Раздел IV
Раскраски гиперграфов

УДК 519.112.7 + 519.174 + 519.179.1

Д. А. Шабанов

Кафедра дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ;
Кафедра теории вероятностей механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова;
Отдел теоретических и прикладных исследований, ООО «Яндекс»

Об одном обобщении задачи Эрдеша–Ловаса

Исследуется обобщение классической задачи Эрдеша–Ловаса, связанное с раскрасками неоднородных гиперграфов. Пусть $H = (V, E)$ — произвольный гиперграф с минимальной мощностью ребра n и обхватом не меньше 4. В работе получено новое достаточное условие r-раскрашиваемости гиперграфа H в терминах ограничения на функцию $f_r(H) = \sum_{e \in E} r^{1-|e|}$.

Ключевые слова: раскраски гиперграфов, задача Эрдеша–Ловаса, гиперграфы с большим обхватом.

1. Введение и история задачи

В работе исследуется обобщение классической задачи Эрдеша–Ловаса, относящейся к экстремальной теории гиперграфов. Сначала мы напомним основные определения.

Гиперграфом называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ есть совокупность подмножеств множества V, и эти подмножества называются *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. *Простым циклом длины s* в гиперграфе $H = (V, E)$ называется последовательность $(A_0, v_0, A_1, \ldots, A_{s-1}, v_{s-1}, A_s)$, где $A_0, \ldots, A_{s-1}$ — различные ребра H, ребро A_s совпадает с A_0, а $v_0, \ldots, v_{s-1}$ — различные вершины H, причем $v_i \in A_i \cap A_{i+1}$ для всех $i = 0, \ldots, s-1$. *Обхватом* гиперграфа H называется длина минимального простого цикла в H. Обхват гиперграфа H мы будем обозначать через $girth(H)$.

Раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра из $E(H)$ не являются одноцветными. *Хроматическим числом* гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски вершин этого гиперграфа. Мы будем обозначать хроматическое число гиперграфа H через $\chi(H)$. Если $\chi(H) \leqslant r$, то говорят, что H является *r-раскрашиваемым.*

Одной из центральных проблем теории раскрасок гиперграфов является экстремальная задача Эрдеша–Хайнала. В 1961 году П. Эрдеш и А. Хайнал поставили (см. [1]) вопрос о нахождении величины $m(n)$, равной *минимально возможному количеству ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше двух.* Формально определение $m(n)$ можно записать так:

$$m(n) = \min \{|E(H)| : \ H \text{ — } n\text{-однородный гиперграф}, \ \chi(H) > 2\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант є 12-01-00683), Программы поддержки ведущих научных школ (грант є НШ-2519.2012.1) и гранта Президента РФ МК-1122.2012.1.

Первые нетривиальные результаты о величине $m(n)$ были получены самим Эрдешем (см. [2, 3]) в 1963—64-м гг. Он показал, что выполняются неравенства

$$2^{n-1} \leqslant m(n) \leqslant e(\ln 2)n^2 2^{n-2}(1+o(1)). \tag{6}$$

Исследованию проблемы Эрдеша–Хайнала о величине $m(n)$, а также ее обобщениям для различных классов однородных гиперграфов посвящено огромное количество работ. Подробнее об известных результатах в этой области можно прочитать, например, в обзорах [4, 5]. Мы же в свою очередь отметим, что верхняя оценка Эрдеша из (6) так и остается асимптотически наилучшей на сегодняшний день.

Нетривиальное обобщение задачи Эрдеша–Хайнала для неоднородных гиперграфов было предложено Эрдешем и Л. Ловасом в 1973 году в работе [6]. Пусть $H = (V, E)$ — произвольный гиперграф. Обозначим через $e(H)$ минимальную мощность ребра в этом гиперграфе, т.е.

$$e(H) = \min\left\{|e| :\ e \in E\right\},$$

а также введем функцию $f(H)$ по правилу

$$f(H) = \sum_{e\in E} 2^{-|e|}.$$

Задача, предложенная Эрдешем и Ловасом, состоит в том, чтобы найти минимальное значение функции $f(H)$ в классе гиперграфов H, удовлетворяющих условиям $e(H) = n$, $\chi(H) > 2$. Искомое значение они обозначили через $f(n)$. Таким образом,

$$f(n) = \min\left\{f(H) :\ H \text{ — гиперграф, } e(H) = n,\ \chi(H) > 2\right\}.$$

Поймем, как величина $f(n)$ связана с задачей Эрдеша–Хайнала. Если $H = (V, E)$ — n-однородный гиперграф, то для него $f(H) = |E|2^{-n}$. Значит, имеет место следующее соотношение между $f(n)$ и классической величиной $m(n)$:

$$f(n) \leqslant m(n)2^{-n}.$$

Используя это соотношение, из оценки (6) Эрдеша для $m(n)$ мы получаем верхнюю оценку для $f(n)$:

$$f(n) \leqslant \frac{e\ln 2}{4}\, n^2(1+o(1)).$$

Эрдеш и Ловас отметили, что простейшее применение вероятностных соображений дает нижнюю оценку $f(n) \geqslant 1/2$, и поставили следующий вопрос: *верно ли, что* $f(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$?

Положительный ответ на этот вопрос был получен Й. Беком в 1978 году (см. [7]), однако доказанная им нижняя оценка является весьма слабой. Введем последовательность функций: $g_0(x) = x$ и $g_k(x) = \log_2(g_{k-1}(x))$ для всех $k \geqslant 1$. Для любого положительного x положим

$$\log^*(x) = \min\left\{k :\ g_k(x) \leqslant 1\right\}.$$

С помощью введенной функции $\log^*(x)$ оценка Бека может быть записана следующим образом:

$$f(n) \geqslant \frac{\log^*(n) - 100}{7}. \tag{7}$$

Данное неравенство, безусловно, положительно отвечает на вопрос Эрдеша и Ловаса, но сама оценка очень медленно растет, ведь, по сути, $\log^*(n)$ — это функция, обратная к функции, сопоставляющей натуральному числу n башню из n двоек.

Качественное улучшение оценки (7) было получено Л. Лю (см. [8]), который обосновал следующую теорему.

Теорема 1. (Л. Лю, [8]) *Для любого $\varepsilon \in (0, 1/16)$ существует такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство*

$$f(n) \geqslant \left(\frac{1}{16} - \varepsilon\right) \frac{\ln n}{\ln \ln n}. \qquad (8)$$

Ясно, что неравенство (8) улучшает результат Бека (7). Кроме того, Лю в своей работе [8] рассмотрел естественное обобщение задачи о величине $f(n)$, связанное с r-раскрашиваемостью неоднородных гиперграфов для произвольного $r \geqslant 2$. Он доказал следующее утверждение.

Теорема 2. (Л. Лю, [8]) *Для любых $r \geqslant 2$ и $\varepsilon \in (0, (r-1)/4r^2)$ существует такое $n_0 = n_0(\varepsilon, r)$, что для всех $n > n_0$ и любого гиперграфа $H = (V, E)$ с условиями $e(H) = n$ и*

$$\sum_{e \in E} r^{-|e|} \leqslant \left(\frac{r-1}{4r^2} - \varepsilon\right) \frac{\ln n}{\ln \ln n}$$

выполнено $\chi(H) \leqslant r$.

В настоящей работе получено существенное усиление теоремы 2 для гиперграфов с большим обхватом. Точная формулировка звучит следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 3$, $r \geqslant 2$, а $H = (V, E)$ — произвольный гиперграф с условиями $e(H) = n$ и $girth(H) > 3$. Если, кроме того, выполняется неравенство*

$$\sum_{e \in E} r^{1-|e|} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}, \qquad (9)$$

то H является r-раскрашиваемым.

Сравним результаты теорем 3 и 2. Фактически, в теореме 2 сказано, что если $e(H) = n$ и сумма $\sum_{e \in E} r^{1-|e|}$ имеет порядок роста $O\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right)$, то гиперграф H является r-раскрашиваемым. В нашей же теореме 3 утверждается, что если есть дополнительное ограничение на обхват гиперграфа, $girth(H) > 3$, то сумма $\sum_{e \in E} r^{1-|e|}$ может уже иметь гораздо больший порядок роста: $O\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}\right)$, — а гиперграф H по-прежнему будет r-раскрашиваемым. Более того, наша теорема выполнена для всех $r \geqslant 2$ и $n \geqslant 3$, в то время как в теореме Лю требуется, чтобы r было маленьким по сравнению с n (фиксированным в асимптотике).

Далее мы приведем доказательство теоремы 3.

2. Доказательство основного результата

Итак, пусть задан гиперграф $H = (V, E)$, удовлетворяющий условиям теоремы 3. Нам необходимо доказать существование правильной раскраски в r цветов (r-раскраски) для H. Для этого мы построим некоторую случайную r-раскраску и покажем, что в условиях теоремы 3 она является правильной для H с положительной вероятностью.

2.1. Рандомизированный алгоритм раскраски

Без ограничения общности мы можем считать, что $V = \{1, \ldots, w\}$. Опишем алгоритм случайной раскраски, который состоит из двух этапов: основной раскраски и процедуры перекраски.

Первый этап. Основная раскраска. На первом этапе мы осуществляем случайную равномерную раскраску множества вершин: присваиваем каждой вершине, независимо от всех остальных вершин, любой из r цветов с одной и той же вероятностью $1/r$. Полученную случайную раскраску обозначаем через χ_0 и называем ее *основной раскраской.*

Раскраска χ_0 может содержать одноцветные и «почти одноцветные» ребра. Назовем ребро $e \in E$ *почти одноцветным* в раскраске χ_0, если найдется такой цвет u, что

$$|\{v \in e: \ v \text{ покрашено в цвет } u \text{ в } \chi_0\}| = |e| - 1,$$

т.е. есть ровно одна вершина в ребре e, которая не покрашена в цвет u в раскраске χ_0. В этом случае назовем цвет u *доминирующим* в ребре e. Для каждой вершины $v \in V$ и цвета $u = 1, \ldots, r$ введем следующие обозначения:

$$\mathscr{M}(v) = \{e \in E: \ v \in e, \ e \text{ одноцветно в } \chi_0\},$$
$$\mathscr{A}\mathscr{M}(v,u) = \{e \in E: \ v \in e, \ e \text{ почти одноцветно в } \chi_0 \text{ с доминирующим цветом } u, \ v \text{ — единственная вершина } e, \text{ не покрашенная в } u \text{ в } \chi_0\}.$$

Второй этап. Процедура перекраски. На втором этапе мы попытаемся перекрасить некоторые вершины из ребер, которые были одноцветны в χ_0. Пусть $\{\eta_1, \ldots, \eta_w\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, \ldots, r$ с одной и той же вероятностью p (это параметр нашей конструкции) и значение 0 с вероятностью $1 - rp$. Процедура перекраски будет состоять из w шагов. Мы рассмотрим все вершины гиперграфа H по одной, согласно произвольной фиксированной нумерации σ множества вершин V (например, мы можем взять естественный порядок вершин $V = \{1, 2, \ldots, w\}$).

Шаг № k процедуры перекраски. Пусть раскраска χ_{k-1} уже построена. На k-м шаге мы рассматриваем вершину $v \in V$, имеющую номер k согласно нумерации σ, т.е. $\sigma(v) = k$. Предположим, что выполнены следующие два условия.

- Нашлось некоторое ребро $e \in \mathscr{M}(v)$, в котором в течение всех предыдущих шагов процедуры (с 1 по $k-1$) ни одна из вершин не сменила свой изначальный цвет.
- Не нашлось таких $u \in \{1, \ldots, r\}$ и $f \in \mathscr{A}\mathscr{M}(v,u)$, что
  1. $\eta_v = u$;
  2. *v все еще остается* единственной вершиной ребра f, которая не покрашена в цвет u (т.е. *v является* единственной вершиной ребра f, которая не покрашена в цвет u в раскраске χ_{k-1}). Другими словами, f все еще почти одноцветно (т.е. почти одноцветно в χ_{k-1}) с доминирующим цветом u и ни одна из вершин этого ребра не сменила свой цвет на шагах процедуры с 1 по $k-1$.

Тогда мы случайным образом перекрашиваем вершину v в соответствии со значением случайной величины η_v:

- если $\eta_v = 0$, то не перекрашиваем v,
- если $\eta_v \neq 0$, то присваиваем v цвет η_v.

Во всех других ситуациях, т.е. когда одно из условий не выполнено, мы не меняем цвет v. Обозначаем через χ_k случайную раскраску, получающуюся после рассмотрения вершины v.

Всего мы совершаем w шагов процедуры перекраски, поэтому раскраску χ_w естественно назвать *финальной раскраской*. Нам необходимо оценить вероятность события

$$\mathscr{F} = \{H \text{ содержит одноцветные ребра в } \chi_w\}.$$

Далее мы приведем формальную конструкцию случайной раскраски χ_w.

2.2. Формальная конструкция случайной раскраски

Напомним, что $V = \{1, \ldots, w\}$. Пусть на некотором вероятностном пространстве задан следующий набор независимых в совокупности случайных величин.

1. $\xi_1, \ldots, \xi_w$ — одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \ldots, r$ с равной вероятностью $1/r$.

2. $\eta_1, \ldots, \eta_w$ — одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \ldots, r$ с одной и той же вероятностью p, а также значение 0 с вероятностью $1 - rp$.

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_w)$ можно интерпретировать как случайную r-раскраску множества вершин V с равномерным распределением (мы присваиваем цвет ξ_i вершине i). Она соответствует основной раскраске χ_0 из нашего алгоритма. Случайная же величина η_v в свою очередь соответствует результату случайного перекрашивания вершины v во время ее рассмотрения. В течение процедуры перекраски мы будем использовать естественную нумерацию множества вершин V.

Пусть $e \in E$ — произвольное ребро гиперграфа H. Для каждого $u = 1, \ldots, r$ введем обозначения $\mathscr{M}(e, u)$ и $\mathscr{AM}(e, u)$ для следующих событий:

$$\mathscr{M}(e, u) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\}, \quad \mathscr{AM}(e, u) = \left\{ \sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq u\} = 1 \right\}.$$

Ясно, что событие $\mathscr{M}(e, u)$ состоит в том, что ребро e является одноцветным цвета u в раскраске ξ, а событие $\mathscr{AM}(e, u)$ — в том, что e почти одноцветно в ξ с доминирующим цветом u.

Для каждой вершины v и каждого цвета u обозначим через $\mathscr{BL}(v, u)$, $\mathscr{BL}(v)$ и $\mathscr{R}(v)$ следующие события:

$$\mathscr{BL}(v, u) = \bigcup_{e \in E\colon v \in e} \left(\mathscr{AM}(e, u) \cap \{\xi_v \neq u,\ \eta_v = u\} \right), \ \mathscr{BL}(v) = \bigcup_{a=1}^{r} \mathscr{BL}(v, a),$$

$$\mathscr{R}(v) = \bigcup_{e \in E\colon v \in e} \bigcup_{u=1}^{r} \left(\mathscr{M}(e, u) \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\left\{ s < v,\ \eta_s \notin \{0, u\},\ \overline{\mathscr{BL}(s)} \right\} = 0 \right\} \right). \tag{10}$$

Легко понять, что событие $\mathscr{BL}(v, u)$ состоит в том, что потенциальная перекраска вершины v в цвет u «запрещается» некоторым почти одноцветным ребром, в котором v является единственной вершиной, не покрашенной в цвет u в основной раскраске ξ. Событие же $\mathscr{R}(v)$ состоит в том, что вершину v следует попытаться перекрасить: есть некоторое одноцветное в основной раскраске ξ ребро e, содержащее v, в котором до рассмотрения v не произошло никакого перекрашивания, т.е. не нашлось такой вершины s, что $s < v$, ее перекраска не была запрещена (не выполнено событие $\mathscr{BL}(s)$) и она действительно изменила свой цвет ($\eta_s \notin \{0, \xi_s\}$).

Введем случайные величины ζ_i, $i = 1, \ldots, w$, по следующему правилу:

$$\zeta_i = \xi_i \, I \left\{ \overline{\mathscr{R}(i)} \cup \{\eta_i = 0\} \cup \mathscr{B}\mathscr{L}(i) \right\} + \eta_i \, I \left\{ \mathscr{R}(i) \cap \{\eta_i \neq 0\} \cap \overline{\mathscr{B}\mathscr{L}(i)} \right\}. \qquad (11)$$

Ясно, что случайные величины ζ_i принимают только значения из множества $\{1, 2, \ldots, r\}$. Следовательно, мы можем интерпретировать случайный вектор $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_w)$ как случайную r-раскраску множества вершин V (вершине i мы присваиваем цвет ζ_i). Обозначим через $\mathscr{F}$ событие, состоящее в том, что ζ не является правильной раскраской для гиперграфа H:

$$\mathscr{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{u=1}^{r} \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\}. \qquad (12)$$

Наша задача состоит в том, чтобы при некотором выборе параметра p в условиях теоремы 3 обосновать неравенство $\mathsf{P}(\mathscr{F}) < 1$.

2.3. Анализ плохих событий

Любое ребро $e \in E$ может стать одноцветным в финальной раскраске ζ тремя различными путями.

1. Оно было одноцветным цвета u в основной раскраске ξ и стало одноцветным другого цвета a в финальной раскраске ζ. Обозначим такое событие через $\mathscr{A}(e, u, a)$.

2. Оно было одноцветным цвета u в основной раскраске ξ и осталось таковым в финальной раскраске ζ. Обозначим такое событие через $\mathscr{B}(e, u)$.

3. Оно не было одноцветным в основной раскраске ξ и стало одноцветным цвета u в финальной раскраске ζ. Обозначим это событие через $\mathscr{C}(e, u)$.

Следовательно,

$$\mathscr{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{u=1}^{r} \left(\bigcup_{a=1, a \neq u}^{r} \mathscr{A}(e, u, a) \cup \mathscr{B}(e, u) \cup \mathscr{C}(e, u) \right). \qquad (13)$$

Мы рассмотрим эти три события по отдельности.

Первое плохое событие. В силу своего определения событие $\mathscr{A}(e, u, a)$ представляется в виде

$$\mathscr{A}(e, u, a) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \ \zeta_s = a\}.$$

Для каждой вершины s из неравенства $\zeta_s \neq \xi_s$ следует, что $\zeta_s = \eta_s$. Значит, имеет место вложение

$$\mathscr{A}(e, u, a) \subset \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \ \eta_s = a\}.$$

Вероятность же последнего события легко считается:

$$\mathsf{P}\left(\mathscr{A}(e, u, a)\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u, \ \eta_s = a\} \right) = \prod_{s \in e} \mathsf{P}\left(\xi_s = u, \ \eta_s = a\right) = \left(\frac{p}{r}\right)^{|e|}. \qquad (14)$$

Второе плохое событие. В силу своего определения событие $\mathscr{B}(e,u)$ формально записывается следующим образом:

$$\mathscr{B}(e,u) = \bigcap_{s\in e} \{\xi_s = u,\ \zeta_s = u\}.$$

Несложно понять, что из события $\mathscr{B}(e,u)$ вытекают события $\mathscr{R}(s)$ для всех $s \in e$. Действительно, пусть v — это первая вершина (согласно естественной нумерации множества вершин) в ребре e с условиями: $\eta_v \notin \{0,u\}$ и выполнено событие $\overline{\mathscr{B}\mathscr{L}(v)}$. В этой ситуации, конечно, выполнено событие $\mathscr{R}(v)$ (см. (10)), но в силу определения случайной величины ζ_v (см. (11)) мы получаем соотношения $\zeta_v = \eta_v \neq u = \xi_v$, что противоречит событию $\mathscr{B}(e,u)$. Таким образом, из $\mathscr{B}(e,u)$ вытекают события $\overline{\{\eta_s \notin \{0,u\}\} \cup \mathscr{B}\mathscr{L}(s)}$ для всех $s \in e$. Значит, из него следуют и все события $\mathscr{R}(s)$ для каждого $s \in e$.

Когда происходит событие $\mathscr{R}(s)$, равенство $\zeta_s = \xi_s = u$ может получиться только двумя способами: либо $\eta_s \in \{0,u\}$, либо $\eta_s \notin \{0,u\}$ и произошло событие $\mathscr{B}\mathscr{L}(s)$. Во втором случае должно существовать такое ребро $f \in E$, что, во-первых, $s \in f \cap e$, во-вторых, f является почти одноцветным в основной раскраске ξ с доминирующим цветом $a \neq u$, в-третьих, s — единственная вершина f, которая не покрашена в цвет a в ξ, и, наконец, в-четвертых, мы должны перекрасить s именно в цвет a, т.е. $\eta_s = a$.

Предположим, что в точности t вершин $v_1,\ldots,v_t$ ребра e удовлетворяют условию $\eta_{v_i} \notin \{0,u\}$. Тогда в силу предыдущих рассуждений мы получаем, что существуют такие ребра $f_1,\ldots,f_t$, что

- f_i, $i = 1,\ldots,t$, почти одноцветно в ξ с доминирующим цветом $a_i \neq u$,
- f_i пересекает e по единственной вершине v_i (напомним, что $girth(H) > 3$, а значит, этот гиперграф простой, т.е. любые два его ребра имеют не более одной общей вершины),
- $\eta_{v_i} = a_i$ для всех $i = 1,\ldots,t$,
- $\eta_s \in \{0,u\}$ для всех $s \in e \setminus \{v_1,\ldots,v_t\}$.

Следовательно, выполнение $\mathscr{B}(e,u)$ влечет выполнение для некоторого t и некоторого набора ребер $\{f_1,\ldots,f_t\}$ следующего события:

$$\mathscr{B}(e,u,f_1,\ldots,f_t) = \mathscr{M}(e,u) \cap \bigcap_{s\in e\setminus\{v_1,\ldots,v_t\}} \{\eta_s \in \{0,u\}\} \cap$$
$$\cap \left(\bigcup_{\substack{a_1,\ldots,a_t:\\ a_j\neq u}} \bigcap_{i=1}^{t} \{\mathscr{A}\mathscr{M}(f_i,a_i) \cap \{\eta_{v_i} = a_i\}\} \right), \quad (15)$$

где $v_1,\ldots,v_t$ — различные вершины ребра e и v_i — единственная вершина в пересечении e и f_i. Заметим, что в силу ограничения $girth(H) > 3$ ребра $f_1,\ldots,f_t$ вообще не имеют общих вершин, а потому вероятность события $\mathscr{B}(e,u,f_1,\ldots,f_t)$ легко вычисляется. В силу (15) получаем:

$$\mathsf{P}\left(\mathscr{B}(e,u,f_1,\ldots,f_t)\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\mathscr{M}(e,u)\right) \prod_{s\in e\setminus\{v_1,\ldots,v_t\}} \mathsf{P}\left(\eta_s \in \{0,u\}\right) \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_t:\\ a_j\neq u}} \prod_{i=1}^{t} \mathsf{P}\left(\left\{ \bigcap_{s\in f_i\setminus\{v_i\}} \{\xi_s = a_i\} \right\} \cap \{\eta_{v_i} = a_i\} \right) =$$
$$= r^{-|e|}\left(1-(r-1)p\right)^{|e|-t}(r-1)^t r^{t-\sum_{i=1}^t |f_i|} p^t = r^{-|e|} r^{t-\sum_{i=1}^t |f_i|} (1-q)^{|e|-t} q^t. \quad (16)$$

Здесь мы использовали обозначение $q = (r-1)p$.

Осталось оценить вероятность события $\mathscr{B}(e,u)$. Напомним, что из него вытекает, для некоторого $t \geqslant 0$ и некоторого набора ребер $f_1,\ldots,f_t$, событие $\mathscr{B}(e,u,f_1,\ldots,f_t)$. Следовательно,

$$\mathscr{B}(e,u) \subset \bigcup_{t=0}^{|e|} \bigcup_{f_1,\ldots,f_t \in E} \mathscr{B}(e,u,f_1,\ldots,f_t).$$

Отсюда с учетом начального условия (9) и неравенства (16) получаем следующую верхнюю оценку вероятности события $\mathscr{B}(e,u)$:

$$\mathsf{P}\left(\mathscr{B}(e,u)\right) \leqslant \sum_{t=0}^{|e|} \sum_{f_1,\ldots,f_t \in E} \mathsf{P}\left(\mathscr{B}(e,u,f_1,\ldots,f_t)\right) \leqslant \sum_{t=0}^{|e|} \sum_{f_1,\ldots,f_t \in E} r^{-|e|} r^{t-\sum_{i=1}^{t}|f_i|}(1-q)^{|e|-t} q^t \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{t=0}^{|e|} r^{-|e|}(1-q)^{|e|-t} q^t \left(\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}\right)^t. \quad (17)$$

Третье плохое событие. Нам осталось рассмотреть только событие $\mathscr{C}(e,u)$. Согласно своему определению это событие формально записывается следующим образом:

$$\mathscr{C}(e,u) = \overline{\bigcup_{a=1}^{r} \mathscr{M}(e,a)} \cap \bigcap_{s\in e} \{\zeta_s = u\},$$

т.е. в основной раскраске ребро e не было одноцветным, но стало таковым цвета u в финальной раскраске ζ. Это означает, в частности, что ребро e содержало вершины других цветов, кроме u, и все эти вершины перекрасились в u во время процедуры перекраски. Сколько таких вершин могло быть? Если такая вершина v была бы ровно одна, то ребро было бы почти одноцветным с доминирующим цветом u. Тогда мы не смогли бы перекрасить v в цвет u, потому что было бы выполнено событие $\mathscr{BL}(v)$, в результате которого $\zeta_v = \xi_v \neq u$. Таким образом, подобных вершин должно было быть по крайней мере две.

Пусть $T = \{s \in e : \ \xi_s \neq u\}$. Тогда для каждого $s \in T$ будет выполнено равенство $\eta_s = u$, а также событие $\mathscr{R}(v)$. Пусть $v_1,\ldots,v_t$ — все элементы T. Из события $\mathscr{R}(v_i)$ в свою очередь вытекает одно из событий $\mathscr{M}(f_i,a_i)$, где f_i — некоторое ребро E, содержащее v_i и отличное от e (т.к. e не является одноцветным в ξ). В итоге мы получаем следующее соотношение для события $\mathscr{C}(e,u)$:

$$\mathscr{C}(e,u) \subset \bigcup_{t=2}^{|e|} \bigcup_{f_1,\ldots,f_t\in E} \bigcup_{\substack{a_1,\ldots,a_t=1:\\ a_j\neq u}}^{r} \left(\bigcap_{s\in e\setminus\{v_1,\ldots,v_t\}} \{\xi_s = u\} \cap \bigcap_{s\in \{v_1,\ldots,v_t\}} \{\eta_s = u\} \cap \bigcap_{i=1}^{t} \mathscr{M}(f_i,a_i)\right), \quad (18)$$

где v_i — вершина из пересечения f_i с e. В силу условия $girth(H) > 3$ каждое из ребер $f_1,\ldots,f_t$ имеет ровно одну общую вершину с e, а потому v_i однозначно определяется ребром f_i и мы не берем объединение по ним в формуле (18). Кроме того, из условия на обхват следует, что ребра $f_1,\ldots,f_t$ попарно не пересекаются. Значит, из (18) мы получаем следующую оценку вероятности события $\mathscr{C}(e,u)$:

$$\mathsf{P}\left(\mathscr{C}(e,u)\right) \leqslant \sum_{t=2}^{|e|} \sum_{f_1,\ldots,f_t\in E} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_t=1:\\ a_j\neq u}}^{r} r^{t-|e|} p^t \prod_{i=1}^{t} r^{-|f_i|}.$$

Данное неравенство, с учетом начального условия (9), дает окончательную верхнюю оценку величины $\mathsf{P}\left(\mathscr{C}(e,u)\right)$:

$$\mathsf{P}\left(\mathscr{C}(e,u)\right) \leqslant r^{-|e|} \sum_{t=2}^{|e|} q^t \prod_{i=1}^{t} \left(\sum_{f_i \in E} r^{1-|f_i|} \right) \leqslant r^{-|e|} \sum_{t=2}^{|e|} q^t \left(\frac{1}{2} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{2/3} \right)^t. \tag{19}$$

2.4. Выбор параметров и завершение доказательства

В предыдущем параграфе мы оценили вероятности событий $\mathscr{A}(e,u,a)$, $\mathscr{B}(e,u)$ и $\mathscr{C}(e,u)$. Вспоминая про соотношение (13), мы получаем следующее неравенство для вероятности события $\mathscr{F}$:

$$\mathsf{P}\left(\mathscr{F}\right) \leqslant \sum_{e\in E} \sum_{u=1}^{r} \left(\mathsf{P}\left(\mathscr{B}(e,u)\right) + \mathsf{P}\left(\mathscr{C}(e,u)\right) + \sum_{a=1:\, a\neq u}^{r} \mathsf{P}\left(\mathscr{A}(e,u,a)\right) \right).$$

Для удобства и сокращения записи введем обозначение $L = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}$. Тогда, используя начальное ограничение (9), а также обоснованные ранее оценки (14), (17) и (19), имеем следующее неравенство:

$$\mathsf{P}\left(\mathscr{F}\right) \leqslant \sum_{e\in E} \sum_{u=1}^{r} \left[\left(\sum_{t=0}^{|e|} r^{-|e|} (1-q)^{|e|-t} (qL)^t \right) + \left(r^{-|e|} \sum_{t=2}^{|e|} (qL)^t \right) + \sum_{a=1:\, a\neq u} \left(\frac{p}{r}\right)^{|e|} \right]. \tag{20}$$

Нам нужно выбрать значение параметра p. Положим $q = \frac{2\ln n}{3n}$. Ясно, что при всех $n \geqslant 3$ выполнено $q < \frac{1}{2}$. Тогда параметр $p = q/(r-1)$ будет удовлетворять необходимому условию $p \in (0, 1/r)$. Далее, нам понадобится пара простых неравенств для величин q и L:

$$qL \leqslant \frac{1}{3} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/3} \leqslant \frac{1}{3}, \text{ и, значит, } (1-qL)^{-1} \leqslant \frac{3}{2}; \tag{21}$$

$$q \leqslant \frac{2\ln 3}{3\cdot 3} = \frac{2\ln 3}{9} \leqslant \frac{1}{4}, \text{ и, значит, } \left(1 - \frac{qL}{1-q}\right)^{-1} \leqslant \frac{9}{5}. \tag{22}$$

Оценим по отдельности слагаемые в правой части (20). Из условий (9) и $e(H) = \min_{e\in E} |e| = n$, выбора параметра q, а также (22) получаем оценку первого слагаемого:

$$\begin{aligned} \sum_{e\in E} \sum_{u=1}^{r} \left(\sum_{t=0}^{|e|} r^{-|e|} (1-q)^{|e|-t} (qL)^t \right) &= \sum_{e\in E} r^{1-|e|} \left(\sum_{t=0}^{|e|} (1-q)^{|e|-t} (qL)^t \right) \leqslant \\ \leqslant (1-q)^n \sum_{e\in E} r^{1-|e|} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{qL}{1-q}\right)^t \right) &\leqslant (1-q)^n L \left(1 - \frac{qL}{1-q}\right)^{-1} \leqslant \frac{9}{5} e^{-qn} L = \frac{9}{5} n^{-2/3} L \leqslant \frac{9}{10}. \end{aligned} \tag{23}$$

Второе слагаемое оценивается похожим образом, только мы используем (21) вместо (22):

$$\begin{aligned} \sum_{e\in E} \sum_{u=1}^{r} \left(r^{-|e|} \sum_{t=2}^{|e|} (qL)^t \right) &= \sum_{e\in E} r^{1-|e|} \left(\sum_{t=2}^{|e|} (qL)^t \right) \leqslant \sum_{e\in E} r^{1-|e|} \left(\sum_{t=2}^{\infty} (qL)^t \right) \leqslant \\ &\leqslant q^2 L^3 (1-qL)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 (1-qL)^{-1} \leqslant \frac{1}{12}. \end{aligned} \tag{24}$$

Осталось рассмотреть третье слагаемое из выражения в правой части (20):

$$\sum_{e\in E}\sum_{u=1}^{r}\left(\sum_{a=1:\,a\neq u}\left(\frac{p}{r}\right)^{|e|}\right)\leqslant (r-1)p^n\sum_{e\in E}r^{1-|e|}\leqslant q^nL\leqslant$$

$$\leqslant q^3L=q^2(qL)\leqslant\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/3}\leqslant\frac{1}{48}\left(\frac{\ln 3}{3}\right)^{1/3}. \quad (25)$$

В последней цепочке соотношений мы активно пользовались условием теоремы $n\geqslant 3$.

Подведем итоги. Из неравенств (20), (23), (24) и (25) мы получаем окончательную оценку вероятности события $\mathscr{F}$:

$$\mathsf{P}\left(\mathscr{F}\right)\leqslant\frac{9}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{48}\left(\frac{\ln 3}{3}\right)^{1/3}<1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью случайная раскраска ζ является правильной r-раскраской для гиперграфа H. Значит, H является r-раскрашиваемым. Теорема 3 доказана.

Литература

1. *Erdős P.*, *Hajnal A.* On a property of families of sets // Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary.— 1961.— V. 12, N 1—2.— P. 87–123.
2. *Erdős P.* On a combinatorial problem, I // Nordisk Mat. Tidskrift.— 1963.— V. 11.— P. 5–10.
3. *Erdős P.* On a combinatorial problem, II // Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary.— 1964.— V. 15, N 3—4, P. 445—447.
4. *Kostochka A. V.* Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey // More Sets, Graphs and Numbers. Bolyai Society Mathematical Studies, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász.— V. 15.— Springer, 2006.— P. 175–198.
5. *Райгородский А. М.*, *Шабанов Д. А.* Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы // УМН. — 2011.— Т. 66, вып. 5.— С. 109–182.
6. *Erdős P.*, *Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, North Holland, Amsterdam.— 1973.— V. 10.— 609–627.
7. *Beck J.* On 3-chromatic hypergraphs // Discrete Mathematics.— 1978.— V. 24, N 2.— P. 127–137.
8. *Lu L.*. On a problem of Erdős and Lovász on coloring non-uniform hypergraphs.— www.math.sc.edu/~lu/papers/propertyB.pdf.

Поступила в редакцию 31.05.2011