

Albrecht Beutelspacher

„Das ist o. B. d. A. trivial!“

Tipps und Tricks zur Formulierung
mathematischer Gedanken

9. Auflage

STUDIUM

Albrecht Beutelspacher

„Das ist o. B. d. A. trivial!“

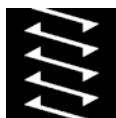
Albrecht Beutelspacher

„Das ist o. B. d. A. trivial!“

Tipps und Tricks zur Formulierung
mathematischer Gedanken

9., aktualisierte Auflage

STUDIUM



**VIEWEG+
TEUBNER**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Professor Dr. Albrecht Beutelispacher
Universität Gießen
Mathematisches Institut
Arndtstraße 2
D-35392 Gießen
E-Mail: albrecht.beutelispacher@math.uni-giessen.de

1. Auflage 1991
2. Auflage 1992
3. Auflage 1995
4. Auflage 1997
5. Auflage 1999
6. Auflage 2002
7. Auflage 2004
8. Auflage 2006
9. Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Künkellopka Medienentwicklung, Heidelberg
Porträtfoto: Rolf K. Wegst, www.rolfwegst.com
Druck und buchbinderische Verarbeitung: STRAUSS GMBH, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0771-7

Inhaltsverzeichnis

Das höchste Ziel: Klarheit!	1
Auch ein mathematischer Text ist ein Text in deutscher Sprache!	3
Definitionen.....	6
Wohldefiniert	9
Satz, Lemma, Korollar	11
Bezeichnungen	13
Gute Bezeichnungen	17
Keine unnötigen Bezeichnungen!	21
„2 paarweise verschiedene Zahlen“	24
„3 5-elementige Mengen haben 15 Elemente“	27
Symbole.....	29
Symbole im Text	31
\Rightarrow	33
$ \mathcal{M} $	35
∞	37
Notwendig und hinreichend	39
Trivial	41
Beispiele	44
\forall	47
\exists	51
$\forall\exists$ und $\exists\forall$	54
Gegenbeispiele	57
Beweise	58
Zitate	61
Der, die, das.....	63
Eineindeutig	65
Kanonisch.....	67

O. B. d. A.	69
Ich, wir, man.....	71
Mein, unser.....	74
Abbildung, Funktion, Operator	75
Konjunktiv	78
Wörter, die man wissen muss.....	80
Lesen	87
Übungsaufgaben.....	90
Was soll ich lesen?.....	93
Schlusswort	95

Das höchste Ziel: Klarheit!

„Ich hab's verstanden, aber ich kann es nicht ausdrücken!“, „Ist das jetzt ein Beweis?“,... – mit solchen Problemen und Fragen muss jeder umgehen, der sich bemüht, mathematische Gedanken zu Papier zu bringen. Besonders schmerzlich wird oft Studienanfängern diese Problematik bewusst. Hauptsächlich für sie ist dieses Büchlein geschrieben.

Ich versuche darin, Sie mit Ihren Formulierungsproblemen nicht allein zu lassen. Sie können dabei (so hoffe ich!) die folgenden Dinge lernen:

- **Besser formulieren**

Sie lernen die „mathematische Sprache“ kennen, die ihre eigenen Vokabeln hat. Sie erhalten praktische Tipps zur Formulierung Ihrer Übungs- und Klausuraufgaben. Ich sage Ihnen jedenfalls sehr deutlich, welche Formulierungen Sie besser *nicht* verwenden sollten.

- **Bessere Kontrolle über Ihre eigenen Formulierungen**

Wenn Sie Definitionen, Sätze und Beweise richtig aufschreiben, können Sie auch überprüfen, ob das, was Sie aufgeschrieben haben, stichhaltig ist. Ihr eigenes Produkt tritt Ihnen dann nicht mehr als unverständlicher Wust entgegen, bei dem Sie froh sind, ihn fertig zu haben, sondern als ein Text, der nach gewissen Regeln strukturiert ist. So können Sie eventuelle Beweislücken, vergessene Fälle usw. entdecken. Sie haben also die Möglichkeit, selbst zu prüfen, ob Sie die Sache wirklich verstanden haben, oder ob Sie nur glauben, sie verstanden zu haben.

- **Besser lesen**

Die Beherrschung des Instruments des besseren Schreibens wird Ihnen auch helfen, mathematische Texte genauer lesen zu können. Sie werden Feinheiten der Argumentation entdecken, die Ihnen zuvor entgangen sind. In diesem Sinne lernen Sie also auch ‚besser sehen‘.

- **Abbau der Angst vor der Mathematik**

Die mathematischen Begriffe und Formalismen wirken oft wahrhaft furchterregend; Sie sollten lernen, dass diese in Wirklichkeit eine Hilfe sind, die es gera-

de dem Nichtexperten ermöglichen soll, Mathematik klar auszudrücken und gut zu verstehen.

Was ist dieses Buch nicht?

- Das Buch ist kein Mathematikbuch; es ersetzt nicht das genaue und intensive Studium der Analysis, der Linearen Algebra und der höheren Vorlesungen.
- Dieses Buch kann Sie von Anfang an begleiten. Insbesondere hilft es Ihnen, schon zu Beginn des Bachelor-Studiums, Sicherheit in der Verwendung der mathematischen Sprache zu erlangen.
- Dies ist kein Buch, das Sie zu einem perfekten mathematischen Schriftsteller macht. Mein Ziel ist bewusst sehr niedrig gehalten: Sie sollen konkrete Hinweise erhalten, wie Sie mit geringem Aufwand
 - *die schlimmsten Fehler vermeiden* und
 - *mathematische Gedanken gut formulieren*können.

* * *

In diesem Buch werden Sie mitunter sehr deutliche Ratschläge finden, die ich nur zum Teil mit der üblichen wissenschaftlich-vorsichtigen Distanzierung formuliert habe. Diese deutlichen Regeln wenden sich vor allem an die Anfänger. Wenn Sie als schon weiter Fortgeschrittene manche Regeln zu restriktiv finden, machen Sie sich nichts draus! Wenn Sie bessere Vorschläge haben, bitte ich Sie ausdrücklich, mir diese mitzuteilen.

In jedem Fall bitte ich Sie, sich den trostreichen Satz zu Herzen zu nehmen, den Theodor FONTANE seinen Stechlin sagen lässt:

*Unanfechtbare Wahrheiten gibt es überhaupt nicht,
und wenn es welche gibt, so sind sie langweilig.*

Auch ein mathematischer Text ist ein Text in deutscher Sprache!

Mathematische Texte dienen, wie viele andere Texte, zur Informationsübermittlung. Der Autor will eine mathematische Aussage (einen „Satz“), einen Beweis, oder eine Definition... anderen mitteilen. Die Aufgabe des Verfassers ist es, den Text so zu gestalten, dass der Leser möglichst wenig Mühe und Zeit aufwenden muss, um den Text zu verstehen.

Man muss zwei Phasen der mathematischen Arbeit unterscheiden:

Explorationsphase („Schmierzettel“). In dieser entstehen die mathematischen Gedanken. Wie jeder kreative Prozess hängt auch dieser äußerst stark von der Person ab, die die Ideen hat (bzw. haben soll). In der Regel läuft diese Phase nicht sehr planbar ab, sondern ist irrational und fehleranfällig. Die meisten Mathematiker kritzeln dabei Unmengen von Papier voll oder malen an eine Tafel.

Konsolidierungsphase („Reinschrift“). In dieser Phase müssen Sie versuchen, Ihre Gedanken in Form zu bringen – und zwar in eine solche Form, die die Gedanken für Sie und andere nachvollziehbar macht. Dabei müssen Sie die Spreu vom Weizen trennen, Argumente ordnen, fehlende Begründungen entdecken, Bezeichnungen einführen und harmonisieren... Die einfache Abfolge Explorations- / Konsolidierungsphase werden Sie bei längeren Aufgaben und komplizierten mathematischen Entwicklungen natürlich wiederholt anwenden müssen.

Das vorliegende Buch behandelt nur die zweite Phase.

Für einen von Ihnen geschriebenen Text kommen als Leser zwei Personengruppen vor: Einerseits Sie selbst und andererseits alle anderen. Die Sprache dient zur Kontrolle dieser beiden „Schnittstellen“.

Die eine Schnittstelle ist die *zwischen den Gedanken in Ihrem Kopf und der formulierbaren Mathematik*. Die Bedeutung einer präzisen Sprache kann dabei gar nicht überschätzt werden: Durch den nicht nachlassenden Versuch, das, was sich in Ihrer Gedankenwelt abspielt, möglichst genau auszudrücken, wird Ihnen die Grenze bewusst zwischen dem, was Sie wissen und dem, was Sie (noch) nicht wissen. Stellen Sie unangenehme Fragen an Ihre Gedanken! Nur so können Sie herausfinden, ob Sie wirklich etwas erkannt haben oder ob Sie sich nur etwas vormachen.

Die andere Schnittstelle ist die *zwischen formulierten mathematischen Gedanken*. Wenn zwei Personen über Mathematik miteinander reden, sollten sie wis-

sen, was die Formulierungen des anderen bedeuten; dann haben sie es viel leichter, zu den dahinterstehenden Gedanken vorzudringen.

Eine typische Situation ist die, in der der Verfasser eines Textes (etwa der Lösung einer Übungsaufgabe) ein Student und der Leser ein Professor ist. In einer anderen häufigen Situation schreibt ein Professor seine Gedanken zum Stoff einer Vorlesung an die Tafel, und die Hörer versuchen, diese nachzuvollziehen.

Machen Sie sich klar, dass eine logische Ableitung einer Aussage aus einer anderen nur dann einen Sinn hat, wenn beide Aussagen klar formuliert sind.

Dazu dient die Sprache, also ein Werkzeug, das weitgehend standardisiert ist, aber dem Autor auch noch viele Freiheiten offenlässt. Die Standardisierung bietet, wie immer, offensichtliche Vorteile:

Der Vorteil für den Autor besteht darin, dass er weiß, wie er gewisse Dinge ausdrücken kann und sich nicht jedes Mal aufs Neue den Kopf zerbrechen muss. Der Leser hat den enormen Vorteil, dass er sicher ist, wie er gewisse Ausdrücke aufzufassen hat; er muss nicht rätseln, was der Autor gemeint haben könnte.

Diese Vorteile kommen aber nur dann zur Geltung, wenn Autor und Leser die zugrundeliegenden Regeln kennen und anwenden; andernfalls schlägt die Standardisierung in ihr Gegenteil um: Der Leser meint einen Text vor sich zu haben, der in einer ihm hermetisch verschlossenen Geheimsprache verfasst ist.

Zusammenfassend rate ich Ihnen:

Beachten Sie die Regeln der deutschen Sprache!

Besonders unleserlich ist ein Text, wenn man nur Wörter und Satzketten erkennen kann und sich den Zusammenhang selbst denken muss. Also:

Schreiben Sie in vollständigen Sätzen!

Das andere Extrem sind lange, verschachtelte Sätze, aus denen der Leser auch nur mit Mühe (wenn überhaupt) herausfinden kann, was der Autor gemeint hat. Deshalb mein Rat

Schreiben Sie in überschaubaren, klaren Sätzen!

Eine Regel, die mir schon erstaunlich oft bei der Formulierung komplizierter Gedanken geholfen hat, lautet:

Wenn Sie mit einem Satz nicht klar kommen, versuchen Sie es mit zwei Sätzen!

In der Mathematik gibt es über die üblichen sprachlichen Regeln hinaus *weitere Regeln*, und diese werden in diesem Buch behandelt. Das bedeutet aber nicht,

dass man auf die Regeln der deutschen Sprache verzichten könnte! Im Gegenteil: Es kommen noch weitere Regeln und Vereinbarungen hinzu!

Ich betone noch einmal ausdrücklich: Es ist kein Zeichen mathematischer Genialität, ein paar Symbole und Zeichen aufs Papier zu werfen und den Leser damit allein zu lassen. Schreiben Sie vollständige, übersichtlich und kontrolliert gestaltete Sätze!

Rechtschreibfehler und Fehler in der Zeichensetzung sind keine Kavaliersdelikte! Rechtschreibung und Zeichensetzung sind Teil der sprachlichen Normen, die sowohl dem Autor wie auch dem Leser Sicherheit geben und es ihm erlauben, sich auf das Wesentliche zu konzentrieren.

Achtung: Gerade Anfänger sind in der Gefahr, Aussagen mit logischen Formalismen so zu verschlüsseln, dass am Ende nicht einmal sie selbst wissen, was die Aussage bedeuten soll. **Jeder Satz, den Sie schreiben, muss einen (von Ihnen benennbaren) Sinn haben!**

Fazit: Mathematische Texte (auch Lösungen von Übungsaufgaben, Seminararbeiten und Diplomarbeiten) sind Literatur – zwar Gebrauchsliteratur, aber eben doch Literatur!

Übungen

- 1 Können Sie sich Texte vorstellen, die nicht (nur) zur Informationsübermittlung dienen?
- 2 Machen Sie sich die Schnittstelle zu Ihrer Gedankenwelt und der von Ihnen formulierbaren Gedankenwelt bewusst, indem Sie das, was Ihnen zum Thema „Primzahlen“ (Alternative: zum Thema „Satz des Pythagoras“) einfällt, in systematischer Form aufschreiben.
- 3 Machen Sie sich nochmals die Vorteile einer standardisierten Sprache klar, und zwar in folgenden Situationen:
 - (a) Aufschreiben einer Übungsaufgabe
 - (b) Anschreiben des Stoffes einer Vorlesung durch den Professor an die Tafel.Berücksichtigen Sie dabei jeweils die verschiedenen Beteiligten (Student – Assistent oder Professor bzw. Professor – Student).
- 4 Führen Sie sich folgende Aussage Richard P. FEYNMANS vor Augen: *Der oberste Grundsatz ist, dass Sie sich nichts vormachen dürfen – und sich selbst können Sie am leichtesten etwas vormachen. In der Beziehung müssen Sie also sehr vorsichtig sein. Wenn es Ihnen gelungen ist, sich selbst nichts vorzumachen, wird es Ihnen auch leicht fallen, anderen Wissenschaftlern nichts vorzumachen.*

Definitionen

Man kann aus den Grundbegriffen und aus bereits definierten Begriffen neue Begriffe definieren: Wenn etwa der Begriff „ganze Zahl“ schon bekannt ist, kann man die folgenden Begriffe definieren:



Eine ganze Zahl n heißt eine **natürliche Zahl**, wenn $n \geq 0$ ist.



Seien t und n ganze Zahlen. Dann heißt t ein **Teiler** von n , falls es eine ganze Zahl s gibt mit $t \cdot s = n$.



Eine ganze Zahl g heißt **gerade**, falls 2 ein Teiler von g ist. Die Menge der geraden ganzen Zahlen bezeichnen wir mit $2\mathbb{Z}$.



Eine natürliche Zahl $p > 1$ wird eine **Primzahl** genannt, falls 1 und p die einzigen natürlichen Zahlen sind, die p teilen.

Formal gesehen sind Definitionen nur Abkürzungen; man kann jederzeit den definierten Begriff durch die definierende Beschreibung ersetzen. Zum Beispiel kann man „Primzahl“ stets durch „ganze Zahl $p > 1$, die nur 1 und p als positive Teiler hat“ ersetzen. Manchmal muss man eine solche Ersetzung auch vornehmen, etwa dann, wenn man beweisen will, dass eine gewisse Zahl n eine Primzahl ist; dann muss man (sofern man noch keine anderen Charakterisierungen zur Verfügung hat) sich (und andere) überzeugen, dass n größer als 1 ist und nur 1 und n als positive Teiler hat.

Die Vorstellung, eine Definition sei 'nur' eine Abkürzung, setzt aber die Bedeutung von Definitionen herab. Jede Definition ist ein schöpferischer Akt! Es ist bei der mathematischen Arbeit entscheidend, den wichtigen Objekten und Eigenschaften Namen zu geben. Dadurch werden Begriffe geschaffen und diese einer Betrachtung zugänglich gemacht.

Zögern Sie nicht, beim Lösen von Übungsaufgaben oder bei der Lektüre mathematischer Texte die Objekte, die Ihnen zu schaffen machen, mit Bezeichnungen zu versehen. Es kommt dabei in erster Linie nicht auf ein treffendes Wort an, sondern darauf, dass Sie überhaupt ein Wort zur Verfügung haben, mit dem Sie die zu bearbeitenden Objekte ansprechen können. Oft helfen dabei Adjektive: ‚Starke‘ Primzahlen, ‚spezielle‘ Matrizen, ‚normale‘ Untergruppen,...

Es gibt allerdings Bezeichnungen, die so häufig verwendet werden, dass sie farblos sind; dazu gehören Begriffe wie normal, regulär, zulässig. Vermeiden

Sie es, mit diesen Wörtern neue Begriffe zu schaffen. Scheuen Sie sich nicht, kräftige Wörter wie *schön*, *schlank*, *unsichtbar*, *cool*,... zu verwenden. Versuchen Sie immer, einen möglichst treffenden Ausdruck zu finden! Vergleichen Sie hierzu den Abschnitt „Gute Bezeichnungen“.

Viele Definitionen kann man nicht nur verbal ausdrücken, sondern auch unter Zuhilfenahme der mathematischen Symbolik. Man kann die Menge \mathbf{P} aller Primzahlen auch wie folgt definieren:

$$\mathbf{P} := \{n \in \mathbf{Z} \mid n > 1, n \text{ hat nur } 1 \text{ und } n \text{ als positive Teiler}\}.$$

Dazu zwei *Bemerkungen*:

1. Die Präzision einer Beschreibung hängt nicht davon ab, ob man viele Symbole benutzt oder nicht. Es ist ebenso gut zu sagen: „die **symmetrische Differenz** $A \Delta B$ der Mengen A und B ist die Menge der Elemente, die entweder in A oder in B liegen“, wie zu schreiben

$$„A \Delta B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B, \text{ aber } x \notin A \cap B\}“.$$

Man muss aber jederzeit von der formalen in die verbale Beschreibung umschalten können. Außerdem erhöht es das Verständnis von Texten ungemein, wenn (mindestens bei schwierigen) Definitionen dem Leser beide Beschreibungsarten angeboten werden.

2. Der Doppelpunkt bei „ $\mathbf{P} :=$ “ steht immer auf derjenigen Seite des Gleichheitszeichens, auf der der zu definierende Begriff steht. Auch dies ist eine Hilfe für den Leser, die Sie nützen sollten: Der Leser muss nicht lange raten, was denn jetzt definiert wird und was er eigentlich schon wissen müsste.

Achtung! Das Zeichen „ $:=$ “ kommt auch in der Informatik vor, etwa in der Programmiersprache PASCAL; dort bedeutet es aber etwas anderes. Wenn man in einem PASCAL -Programm $a := b$ schreibt, so wird bei dessen Ausführung dem Speicherplatz mit Namen a der Wert des Speicherplatzes mit Namen b zugewiesen. In einer solchen Situation ist eine Formulierung wie „ $x := x+1$ “ sinnvoll und oft nützlich; als mathematische Definition wäre sie aber offenbar unsinnig. Meiner Beobachtung nach führen die beiden Bedeutungen des Doppelpunkts aber zu keinen folgenschweren Missverständnissen.

Übungen

1. Machen Sie sich klar, dass die folgenden Beschreibungen dasselbe Objekt definieren. Welche gefällt Ihnen am besten?

- Die Menge $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z}$ besteht aus den Zahlen $0, 1, \dots, n-1$ zusammen mit der Addition in \mathbf{Z} , wobei wir vom Ergebnis nur den Rest betrachten, der bei Division durch n entsteht.
- Definiere $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z} := \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $a + b := a+b \bmod n$.

- Definiere $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z} := \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $a \oplus b := a+b \bmod n$.
- Sei $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z} := \{n\mathbf{Z}, 1+n\mathbf{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbf{Z}\}$, wobei die Addition repräsentantenweise definiert wird.

2 Richtig oder falsch?

☐ Seien $a, b \in \mathbf{N}$. Schreibe $a \mid b$, falls a die Zahl b teilt.

☐ Seien $a, b \in \mathbf{N}$. Schreibe

$$a \mid b : \Leftrightarrow a \text{ teilt } b.$$

☐ $A \Delta B := (A-B) \cup (B-A)$.

☐ $A \Delta B := (A \cup B) - (A \cap B)$.

☐ p **Primzahl** : $\Leftrightarrow : p > 1$, und p ist nur durch die natürlichen Zahlen p und 1 teilbar.

☐ p, q **Primzahlzwillinge** $\Leftrightarrow : p, q$ Primzahlen und $|q-p| = 2$.

☐ $n\mathbf{Z} := \{nz \mid z \in \mathbf{Z}\}$.

☐ $n\mathbf{Z} := \{x \in \mathbf{Z} \mid \text{es gibt } j \in \mathbf{Z} \text{ mit } x = jn\}$.

Wohldefiniert

Das Wort „wohldefiniert“ wird sehr oft falsch gebraucht, obwohl es einen ganz präzisen Sinn hat. Es bedeutet nicht „sehr gut definiert“ oder „sehr präzise definiert“; beispielsweise ist der Satz



π ist eine wohldefinierte reelle Zahl

einfach Unsinn.

Ein Problem tritt dann auf, wenn man eine Eigenschaft einer Menge dadurch zuspricht, dass man sie *nur über einzelne Repräsentanten* der Menge erklärt. Dann muss gewährleistet sein, dass diese Eigenschaft gerecht verteilt wurde, das heißt, dass die Definition unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten ist. Genau dafür sagt man auch, man habe zu zeigen, dass die Eigenschaft **wohldefiniert** ist. Entsprechendes gilt für Operationen: Wenn man eine Operation auf Mengen dadurch definiert, dass man sie auf eine Operation auf Repräsentanten zurückführt, muss man zeigen, dass die definierte Operation *repräsentantenunabhängig*, das heißt **wohldefiniert** ist.

Beispiele:

1. Zunächst ein „anschauliches“ Beispiel: Professor B. legt für die Studenten die Prüfungsbedingungen fest. Natürlich gibt es unterschiedliche Mengen von Prüflingen: die Menge der Prüflinge, die sich im Vordiplom in Linearer Algebra prüfen lassen, die Menge der Diplomanden, die eine Prüfung in Geometrie absolvieren wollen, die Doktoranden... Prof. B. muss die Prüfungsbedingungen so festlegen, dass diese wohldefiniert („gerecht“) sind: Natürlich sind die Anforderungen in verschiedenen Klassen verschieden, aber innerhalb einer Klasse muss es gerecht zugehen: Wenn Prof. B. einem Vordiplom-Studenten zusagen sollte, ihn nicht über den gefürchteten Faktorraum zu prüfen, so muss dies gerechtigkeitshalber für alle diese Prüflinge gelten.

So einfach (und wichtig) ist die Sache mit „wohldefiniert“! Aber manchmal ist es noch ein bisschen schwieriger... Manchmal steht nämlich nicht der Aspekt der „Gerechtigkeit“ im Vordergrund; manchmal definiert man Eigenschaften von Mengen nur über spezielle Repräsentanten der einzelnen Mengen.

Ein typisches alltägliches Beispiel hierfür ist die „Nationenwertung“ bei internationalen Sportwettkämpfen: Ein Land X ist dabei „besser“ als ein Land Y , wenn die Sportler aus X (also ganz spezielle Repräsentanten – mit mir zum

Beispiel wäre dabei sicherlich kein Staat zu machen) mehr Medaillen erkämpft haben als die Spitzensportler aus Y .

2. Typischerweise tritt das Problem in der Mathematik bei der Behandlung von Nebenklassen auf. Wenn man die Summe von zwei Nebenklassen X und Y nach dem Unterraum U eines Vektorraums erklärt, indem man festsetzt

$$X + Y := x + y + U \text{ für beliebige } x \in X \text{ und } y \in Y,$$

so muss man beweisen, dass die so erklärte Summe wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten x und y ist. Genauer gesagt muss man also zeigen:

Ist $x' \in X$ und $y' \in Y$, so ist auch

$$x + y + U = x' + y' + U.$$

Übungen

- 1 Denken Sie sich weitere alltägliche Situationen aus, die zur Illustration des Begriffs „wohldefiniert“ dienen können.
- 2 Kann man auf der Menge der Geraden von \mathbf{R}^2 , die parallel zur 1. Winkelhalbierenden sind, eine Addition erklären?
- 3 Zeigen Sie, dass die Summe zweier Nebenklassen eines Unterraums in einem Vektorraum wohldefiniert ist.
- 4 Manchmal benutzen Schüler zur Addition von rationalen Zahlen folgende „Regel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Was ist hier falsch? Ist diese „Addition“ wohldefiniert?

- 5 Lesen Sie in einem Analysisbuch (etwa K. Endl, W. Luh: Analysis I. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt 1972) die Einführung der reellen Zahlen als Menge aller Cauchyfolgen modulo der Nullfolgen nach.
- 6 Ist die Wohldefiniertheit, die bei der Einführung der reellen Zahlen, wie sie in Aufgabe 5 angedeutet ist, eine Rolle spielt, vom Typ „Gerechtigkeit“ oder vom Typ „Nationenwertung“?

Satz, Lemma, Korollar

Man kann die gesamte Mathematik als eine Menge von Aussagen auffassen, von denen jede – auf mehr oder weniger verschlungenen Pfaden – aus gewissen Grundaussagen (den **Axiomen**) rein logisch abgeleitet wird (man nennt diesen Vorgang **beweisen**). Wenn eine gewisse Aussage A bewiesen worden ist und man aus A rein logisch die Aussage B ableiten kann, so gilt natürlich auch B als bewiesen.

Diese bewiesenen Aussagen nennt man **Sätze**. Meist wird ein Satz aufgeschrieben und anschließend sein Beweis geliefert. Der Beweis kann aber auch vorher erfolgen; dieser schließt dann etwa mit den Worten „Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:“. Wichtig ist nur, dass zum Beweis keine unbewiesenen Hypothesen benutzt werden und die Argumentation auf rein logische Schlüsse zurückgeführt werden kann.

An dieser Vorgehensweise ist nicht zu rütteln; sie ist das Prinzip der Mathematik. Dagegen ist es prinzipiell eine reine Geschmacksfrage, wie man die bewiesenen Aussagen nennt: Es gibt Autoren, die jede zu beweisende Aussage ‚Satz‘ nennen; es gibt Autoren, die ihre Aussagen einfach durchnummerieren; es gibt auch Autoren, die die bewiesenen Aussagen überhaupt nicht besonders kennzeichnen und es dem Leser überlassen herauszufinden, was noch unbewiesen, was bewiesen ist und was zum Beweis dient. Die Regel ist aber, dass man die bewiesenen Aussagen mit Namen belegt, die ihren Stellenwert innerhalb der Theorie andeuten. Dafür stehen vor allem die Wörter **Hauptsatz**, **Satz**, **Theorem**, **Lemma**, **Korollar** zur Verfügung.

Satz bezeichnet den Normalfall: Der Beweis einer solchen Aussage ist nicht zu lang, meist auch nicht sehr kurz; es lohnt sich, über die Aussage an sich nachzudenken und sich diese einzuprägen.

Hauptsatz bezeichnet einen besonders wichtigen Satz, in dem ein ganzes Teilgebiet der Mathematik gipfelt (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Hauptsatz der Galoistheorie,...). Merkregel: Es gibt relativ wenige Hauptsätze, und die wenigsten lebenden Mathematiker werden je einen neuen Hauptsatz der Mathematik beweisen.

Lemma stammt aus dem Griechischen und bedeutet ‚Stichwort‘ oder ‚Hauptgedanke‘. Bei einem Lemma handelt es sich also um einen besonders wichtigen Schlüsselgedanken, der in vielen verschiedenen Situationen nützlich ist. Solche **Lemmata** (der Plural von Lemma heißt so!) tragen oft den Namen ihres Entdeckers (Lemma von Zorn, Lemma von Sperner usw.). Die Genialität

des Entdeckers zeigt sich darin, die meist unscheinbare Aussage des Lemmas als eigenständigen, vielfältig verwendbaren Gedanken erkannt zu haben.

Heute wird die Bezeichnung „Lemma“ aber auch im Sinne von Hilfssatz gebraucht. Ein **Hilfssatz** ist eine „rein technische“ Aussage, die vielleicht sogar noch einen komplizierten Beweis hat; diese Aussage wird in der Regel im Beweis eines der folgenden Sätze verwendet und hat damit ihren Zweck erfüllt. Ein Hilfssatz ist also ein nicht sehr wichtiger, aber eventuell schwer zu beweisender Satz.

Wenn Sie das Wort Lemma lesen, kann dies also zweierlei bedeuten: Entweder ist es ein Lemma im strengen Sinne (Hauptgedanke) oder es ist ein technischer Hilfssatz.

Theorem stammt von dem griechischen Wort *theorema* ab und bezeichnet im Deutschen einen besonders wichtigen Satz, der ein Höhepunkt in der Entwicklung einer Theorie ist. (Ein besonders schöner Satz der Differentialgeometrie wird traditionell „*theorema egregium*“ genannt.)

Proposition ist das lateinische Wort für Satz. Manche Autoren bezeichnen damit Aussagen, die nicht so wichtig sind wie ein Satz, aber auch nicht nur den Rang eines Hilfssatzes haben. Das Wort ‚Proposition‘ wird aber vergleichsweise selten gebraucht.

Korollar heißt **Folgerung**. Ein Korollar ist also ein Satz, der ganz einfach (manchmal sogar trivial) aus dem vorhergehenden Satz oder seinem Beweis folgt. Bei einem Korollar muss man immer angeben können, wovon diese Aussage ein Korollar sein soll. (*Korollar* stammt von dem lateinischen Wort *corollarium* ab; das bedeutet das *Kränzchen*, das der Gastgeber dem Gast ‚einfach so‘ schenkt.)

Ein Beispiel:



Der **Satz** *Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar* hat als

Korollar: *Es gibt mindestens eine transzendente Zahl;*
denn die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Übungen

- 1 Versuchen Sie selbst, die Bedeutung der Wörter **Fundamentalsatz**, **Bemerkung**, **Beobachtung** und **Kriterium** als Bezeichnungen für einen Satz zu formulieren.
- 2 Gibt es Gründe, die dagegen sprechen, einen Beweis *vor* dem entsprechenden Satz aufzuschreiben? Gibt es Gründe, die *dafür* sprechen?

Bezeichnungen

Für die mathematische Analyse ist es entscheidend, die zu behandelnden Objekte und Eigenschaften zu bezeichnen. Beachten Sie, dass kein Objekt von sich aus einen Namen hat (keine Gerade trägt ein Namensschild „g“). Das Bezeichnen ist ein strukturierender Eingriff des Menschen in die Welt; es macht klar, welche Objekte der betreffende Mensch für wichtig hält und deutet eventuell auch an, in welchen Beziehungen dieser Mensch die bezeichneten Objekte sieht (vergleichen Sie den Abschnitt „Gute Bezeichnungen“).

Wenn Sie die ‚richtigen‘ Gegenstände bezeichnet haben, haben Sie sehr häufig schon eine Leitlinie für den Beweis, oft sogar den halben Beweis. Was die ‚richtigen‘ Gegenstände sind, kann Ihnen nur die Erfahrung sagen.

Haben Sie den Mut, mathematische Objekte zu benennen. Dafür dienen etwa die folgenden Formulierungen:



Wir bezeichnen die Menge der Objekte, die die Eigenschaft E haben, mit M .



*Man nennt diese Matrizen **schiefsymmetrisch**.*



*Eine solche Primzahl heiße **stark**.*

Am Anfang eines Beweises ist es oft notwendig, gewisse Bezeichnungen zu vergeben, zum Beispiel:



Sei x ein beliebiges Element der Menge X .



Betrachte alle Werte $f(n)$ mit $n > n_0$.

Gewöhnen Sie sich von vornherein an, keine Formulierungen der Art



Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest

zu gebrauchen. Das Wort ‚fest‘ hat darin nämlich überhaupt keine Bedeutung! Es stellt bestenfalls eine Erklärung des Autors dar, dass dieses Symbol, wenn es später wieder auftaucht, dieselbe Bedeutung haben soll – das ist aber eine Selbstverständlichkeit, die man wirklich nicht zu betonen braucht! Wie unsin-

nig eine solche Formulierung ist, merken Sie dann, wenn Sie alltägliche Begriffe damit verbinden. Ich könnte zum Beispiel einem Studenten, der sich von mir prüfen lassen will, sagen:



Als Prüfungsstoff können Sie sich drei beliebige Kapitel des Buches XYZ aussuchen.

Es ist aber offenbar unsinnig zu formulieren



*Als Prüfungsstoff können Sie sich drei beliebige, **aber feste** Kapitel des Buches XYZ aussuchen.*

In jedem Fall sollten Sie die Formulierung



Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig

vermeiden.

Ein Leser hat mich auf Situationen aufmerksam gemacht, in denen die Formulierung „beliebig, aber fest“ jedenfalls didaktisch sinnvoll verwendet werden kann: Oft untersucht man eine Funktion f von zwei Variablen x und y dadurch, dass man ihr Verhalten bei festem x und variablem y studiert:



*Für beliebiges, aber festes x sei g die Abbildung, die durch
$$g(y) := f(x, y)$$

definiert ist.*

* * *

Achten Sie bei folgenden Formulierungen darauf, wie eine Behauptung fast unmerklich in ihren Beweis übergeht. Die Versionen 1 und 2 bedeuten jeweils das Gleiche; in der zweiten Version wird aber durch die Einführung von Bezeichnungen schon deutlich auf den Beweis hingearbeitet.



1. *Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.*
2. *Die Summe zweier beliebiger ungerader Zahlen $2m+1$ und $2n+1$ ist gerade.*
3. *Beweis. Die Summe zweier beliebiger ungerader Zahlen $2m+1$ und $2n+1$ ist $2(n+m+1)$, also gerade.*



1. *Die symmetrische Differenz zweier Mengen gerader Mächtigkeit hat gerade Mächtigkeit.*

2. Die symmetrische Differenz zweier Mengen A und B mit geraden Mächtigkeiten $2a$ und $2b$ hat gerade Mächtigkeit.

3. Beweis. Sei $x := |A \cap B|$. Dann ist

$$|A \Delta B| = 2a - x + 2b - x = 2(a + b - x).$$

Noch ein Hinweis: Geben Sie den Typ der Variablen mit an; schreiben Sie also nicht



P liegt auf g ,

sondern besser



Der Punkt P liegt auf der Geraden g .

Und noch etwas: Wenn Sie einen Begriff definieren, schreiben Sie die Variable nicht zu dem zu definierenden (und also in diesem Augenblick noch nicht definierten) Begriff, sondern zu der übergeordneten Typenbezeichnung. Also nicht:



Eine Primzahl p ist eine natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft:

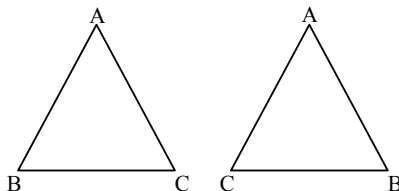
sondern



Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl p mit folgender Eigenschaft:

Übungen

- 1 Beobachten Sie, wie raffiniert in dem folgenden Abschnitt (nach Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*) die Bezeichnungen eingeführt werden. Es geht um folgenden Basiswinkelsatz über gleichschenklige Dreiecke, der auch den merkwürdigen Namen *Pons Asinorum* (Eselsbrücke) trägt:



Satz. Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich groß.

Beweis: Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $|AB| = |AC|$. Wir schauen uns dieses Dreieck von zwei Seiten an und schließen so:

Da $|AB| = |AC|$ und $|AC| = |AB|$ ist, sind die beiden Seiten \overline{AB} , \overline{AC} gleich den beiden Seiten \overline{AC} , \overline{AB} . Ferner ist der Winkel $\angle BAC$ gleich groß wie der Winkel $\angle CAB$, da es sich um denselben Winkel handelt. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind daher alle entsprechenden Teile der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACB$ gleich groß. Insbesondere sind dann die Winkel $\angle ABC$ und $\angle ACB$ gleich groß.

- 2 Rufen Sie sich die Definition einer partiellen Ableitung ins Gedächtnis. Wird dabei die Formulierung „beliebig, aber fest“ sinnvoll gebraucht?

3 **Richtig oder falsch?**

- ☐ Eine Gruppe G ist eine Menge zusammen mit einer binären Operation...
- ☐ Eine Gruppe G heißt **abelsch**, falls...

Gute Bezeichnungen

Im Land der unbegrenzten Möglichkeiten haben Eltern das Recht, als Vornamen für ihre Kinder jede nichtleere alphanumerische Zeichenfolge zu wählen. Die entsprechende Freiheit haben Sie in der Mathematik grundsätzlich auch. Missbrauchen Sie sie nicht! Man wird kaum einmal schreiben



Sei 2 eine Funktion,

oder



Wir nennen diese Gruppe $\text{qr}.*7))n$.

Mit schlecht gewählten Bezeichnungen kann man das Verständnis eines mathematischen Textes entscheidend erschweren, während man mit guten Bezeichnungen dem Leser eine große Last abnehmen und sein Verständnis allgemein fördern kann.

Dies hat niemand so klar ausgedrückt wie der Philosoph und Mathematiker Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716), einer der ganz Großen in der Erfindung guter Symbole. Er schreibt:

Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, dass sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie die innerste Natur der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert.

(G.W. Leibniz: Über die Analysis des Unendlichen.
Ostwalds Klassiker, Leipzig 1908, S. 74)

Die *Grundregeln für gute* Bezeichnungen in der Mathematik sind die folgenden:

1. Ähnliche Objekte sollen ähnlich bezeichnet werden.

Geht es um zwei Mengen, die eine ähnliche Komplexität haben (etwa zwei Mengen von Vektoren), so können diese A und B oder X und Y oder α und β oder Δ und Σ heißen, aber nicht \aleph und \wp und auch nicht \mathbf{A} und \mathbf{B} (beide normal oder beide fett oder beide kursiv).

2. Die Bezeichnung von Objekten soll deren ‚Hierarchie‘ berücksichtigen.

Es ist gut, die Elemente einer Menge G mit g, h, \dots zu bezeichnen; ein System, das aus den Mengen X_1, X_2, \dots zusammengesetzt ist, bezeichnet man sinnvollerweise mit X . Kleinbuchstaben sollten für einfache, Großbuchstaben für komplexere Objekte verwendet werden (beispielsweise wird $a \in A$ und $\sigma \in \Sigma$ als gut empfunden); Frakturbuchstaben sind für komplexe Objekte gedacht.

Manchmal will man allerdings aus Gründen der Klarheit Symbole verwenden, die sich deutlich unterscheiden. Nur so ist es zu erklären, dass in vielen Büchern über lineare Algebra die Vektoren mit kleinen lateinischen Buchstaben, die Skalare aber mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden: $v \in V$, aber $\lambda \in K$. Meiner Meinung nach handelt es sich hierbei um übertriebene Vorsicht; die Bezeichnungen $u, v, w, \dots \in V$ und $k, h, \dots \in K$ sind die natürlichen.

3. Die Bezeichnung von Objekten soll selbsterklärend sein.

Eine Bezeichnung kann selbsterklärend sein aufgrund einer Tradition oder dadurch, dass der Anfangsbuchstabe des entsprechenden Begriffs benutzt wird: Ein Punkt wird traditionell häufig mit P , eine Gerade mit g , ein Winkel mit α oder φ , ein Vektor mit v , ein Körper mit K , eine Gruppe mit G , eine Funktion mit f , eine natürliche Zahl mit n , eine Primzahl mit p , eine Variable mit x , eine Wahrscheinlichkeit mit p, \dots bezeichnet. Wenn Sie zwei Objekte desselben Typs bezeichnen müssen, wählen Sie zusätzlich den darauffolgenden Buchstaben; also: Punkte P und Q , Winkel α und β , Primzahlen p und q, \dots

Spätestens von vier Objekten an lohnt sich eine Nummerierung. Man schreibt: „Punkte P_1, P_2, \dots, P_n “, oder „Punkte P_i mit $1 \leq i \leq n$ “ oder „Punkte P_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ “, oder ähnliches.

4. Passen Sie Ihre Bezeichnung den Gegebenheiten an.

Scheuen Sie sich nicht, traditionelle Bezeichnungen zu wählen. In jungen Jahren hatte ich einen geometrischen Aufsatz geschrieben, in dem ich, wie ich es gewohnt war, die Punkte mit kleinen Buchstaben bezeichnet hatte. Vor Drucklegung wurde die Arbeit referiert und der Herausgeber riet mir, die Punkte unbedingt mit Großbuchstaben zu bezeichnen, „wie das schon der große EUKLID gemacht hat“. Seitdem bin ich bekehrt.

5. Verwenden Sie Standardbezeichnungen.

Die Standardbezeichnungen für die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen sind \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} und \mathbf{C} . (Schande über mein Textverarbeitungssystem, das nicht in der Lage ist, die Standardsymbole für die

Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen darzustellen!) Die leere Menge wird mit $\{\}$ oder mit \emptyset bezeichnet. (Übrigens ist dieses Zeichen eine durchgestrichene Null und nicht das Durchmesserzeichen.)

Weitere Standardbezeichnungen sind $[a, b]$ und (a, b) bzw. $]a, b[$ für das abgeschlossene und offene Intervall zwischen a und b ; $C[0, 1]$ für die Menge der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen; $GL(V)$ für die Menge der invertierbaren linearen Abbildungen des Vektorraums V in sich; PQ für die Gerade durch P und Q ; x, y, z für Variable; \aleph_0 (sprich: Aleph Null) für die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen usw. usw.

Übrigens: Es gibt sogar DIN-Normen für mathematische Symbole; in diesen ist zum Beispiel festgelegt, dass 0 eine natürliche Zahl ist. Die meisten existierenden mathematischen Normen sind im DIN-Taschenbuch 202 (Beuth Verlag Berlin) erschienen.

6. Vektoren können verschieden bezeichnet werden.

Wenn man schreibt

Sei v ein Vektor,

so bezeichnet v einen Vektor. Es ist dazu nicht notwendig, v fett zu drucken, zu unterstreichen, zu überstreichen oder mit einem Pfeil zu versehen. Es kann sinnvoll sein, diese Bezeichnungen zu verwenden, aber v wird nicht dadurch zum Vektor, dass man einen Pfeil über den Buchstaben malt!

7. Nummerieren Sie möglichst einfach.

Gut ist in der Regel

$$k_i < k_j, \text{ falls } i < j;$$

schlecht ist meist (Ausnahmen bestätigen die Regel!)

$$k_i < k_j, \text{ falls } i > j.$$

Wenn Sie „iterierte“ Indizes (wie etwa k_{ij}) verwenden, sollten Sie sich stets Rechenschaft darüber ablegen, ob das wirklich notwendig ist.

8. Konflikte sind unvermeidlich.

Manchmal widersprechen sich obige Forderungen. (Eine Tradition in der Geometrie sagt, Punkte mit großen Buchstaben, Geraden mit kleinen Buchstaben und Ebenen mit kleinen griechischen Buchstaben zu bezeichnen. Wenn man Punkte, Geraden und Ebenen als gleichberechtigte Objekte behandeln möchte, ist dies nicht sinnvoll.)

Manchmal treten aber auch innerhalb der Mathematik Situationen auf, bei denen nicht von vornherein klar ist, wie man bezeichnen soll. Noch ein Beispiel

aus der Geometrie: Üblicherweise bezeichnet man Punkte durch große lateinische Buchstaben wie etwa P ; wenn man Koordinaten einführt, würde man Punkte gerne als Vektoren schreiben, etwa (x_0, x_1, x_2) ; wenn man schließlich in der projektiven Geometrie Punkte als eindimensionale Unterräume eines Vektorraums auffasst, so empfiehlt es sich, für einen Punkt etwa $\langle v \rangle$ zu schreiben. Noch schlimmer: Oft braucht man all diese Bezeichnungen simultan. Da hilft nur, kühlen Kopf zu bewahren!

Übungen

1 Sei M eine Menge natürlicher Zahlen. **Gut oder weniger gut?**

- ☐ Sei M_0 die Menge der geraden und M_1 die Menge der ungeraden Zahlen in M .
- ☐ Sei M_1 die Menge der geraden und M_0 die Menge der ungeraden Zahlen in M .
- ☐ Sei A die Menge der geraden und k die Menge der ungeraden Zahlen in M .
- ☐ Sei $G(M)$ die Menge der geraden und $U(M)$ die Menge der ungeraden Zahlen in M .

2 Welche der folgenden Formulierung würden Sie verwenden? Wenn nein, wie würden Sie schreiben?

Man kann jede natürliche Zahl n schreiben als

- ☐ $n = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_2 \cdot 10^1 + a_1,$
- ☐ $n = a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$
- ☐ $n = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_2 \cdot 10^1 + a_0,$
- ☐ $n = a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \dots + a_{k-1} \cdot 10^1 + a_k,$
- ☐ $n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_k \cdot 10^k,$
- ☐ $n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots,$
- ☐ $n = a \cdot 10^{k-1} + b \cdot 10^{k-2} + \dots + y \cdot 10^1 + z,$
- ☐ $n = a \cdot 10^a + b \cdot 10^b + \dots + y \cdot 10^y + z.$

3 Können Sie sich mathematische Situationen vorstellen, in denen eine der Schreibweisen aus der vorigen Aufgabe besonders sinnvoll ist?

Keine unnötigen Bezeichnungen!

Ein Objekt wird mit einer Bezeichnung versehen, weil man später auf dieses Objekt zurückgreifen möchte und eben dafür einen Namen braucht. Wenn aber ein Objekt innerhalb eines gewissen Rahmens nur einmal vorkommt oder nur kurz danach auf dieses Objekt zurückgegriffen wird, braucht man dafür keine besondere Bezeichnung einzuführen. Sowohl in



Jede differenzierbare Funktion f ist stetig.

als auch in



Jede Gruppe G von Primzahlordnung p ist einfach.

ist die Angabe der Bezeichnung überflüssig; es genügt völlig zu sagen



Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

und



Jede Gruppe von Primzahlordnung ist einfach.

Schauen wir uns ein weiteres Beispiel an. Es bedeutet einen unnötigen Aufwand zu schreiben



Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme $Q(n)$ durch 3 teilbar ist.

Für die Formulierung dieses Satzes ist es völlig ausreichend zu sagen



Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Im Beweis dieses Satzes werden Sie dann der Zahl einen Namen geben, wahrscheinlich sogar ihre Ziffern bezeichnen; also etwa:

Beweis. Sei $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann lässt sich die Quersumme $Q(n)$ von n wie folgt darstellen:

$$Q(n) = a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

Grundregel: Führen Sie eine Bezeichnung nur ein, wenn diese später auch verwendet wird! Bezeichnungen, die nicht benötigt werden, um die Aussage eines Satzes zu formulieren, sollen dort auch nicht verwendet werden. Solche Bezeichnungen können aber selbstverständlich im Beweis oder bei der Formulierung eines Beispiels Verwendung finden.

Wenn man ein Objekt nicht mit einer Bezeichnung versehen hat, aber später dennoch auf es verweisen möchte, kann man Formulierungen der folgenden Art verwenden:



*Die **oben definierte** natürliche Zahl...*



*Die **vorher erwähnte** Bijektion...*



***Dieser** Unterraum...*



***Unsere** Abbildung...*

Bei dieser Gelegenheit kann man auch Bezeichnungen einführen; zum Beispiel:



***Diese** Abbildung f ...*

Wenn Sie die Quersumme nicht schon vorher eingeführt haben, und den Leser in dem Satz an die Bezeichnung für die Quersumme erinnern wollen, dann dürfen Sie auch schreiben



Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme $Q(n)$ durch 3 teilbar ist.

In allen solchen Fällen sollten Sie allerdings genau prüfen, ob Sie die Bezeichnung nicht schon sinnvollerweise weiter vorne hätten einführen sollen.

Übung

Richtig oder falsch? Verbessern Sie gegebenenfalls die Formulierung.

- ☐ Jede natürliche Zahl n ist Produkt von Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_s .
- ☐ Ist n eine ungerade Quadratzahl, so ist $n-1$ durch 4 teilbar.
- ☐ Jede n -elementige Menge hat genau 2^n Teilmengen.

- *Durch je drei nichtkollineare Punkte P_{i_j} , P_{i_k} und P_{i_l} geht genau ein Kreis.*
- *Jedes reelle Polynom f vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.*
- *Jedes reelle Polynom f vom Grad n hat höchstens n Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.*
- *Jedes komplexe Polynom f vom Grad n lässt sich schreiben als*

$$f(z) = (z - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

„2 paarweise verschiedene Zahlen“

An der Formulierung der Überschrift ist fast alles unglücklich.

1. Die Zahlwörter eins, zwei,..., elf, zwölf (also diejenigen, die einen individuellen Namen tragen) sollen ausgeschrieben werden. Man schreibt nicht



*Jede gerade Zahl ist Summe von **2** Primzahlen,*

sondern



*Jede gerade Zahl ist Summe von **zwei** Primzahlen.*

Bei großen Zahlen schreibt man der Übersichtlichkeit und Klarheit halber aber die Zahl:



*Es gibt genau **26** endliche einfach sporadische Gruppen.*

Wenn aber die Zahl 2 (als mathematisches Objekt) gemeint ist, so darf man nicht ‚zwei‘ schreiben! Also nicht:



*Die einzige gerade Primzahl ist **zwei**,*

sondern



*Die einzige gerade Primzahl ist **2**.*

2. „Paarweise verschieden“ und „verschieden“ bedeutet dasselbe; ferner bedeutet „zehn verschiedene Punkte“ und „zehn Punkte“ ebenfalls dasselbe. Das heißt: Sowohl



M ist eine Menge aus n paarweise verschiedenen Primzahlen,

als auch



M ist eine Menge aus n verschiedenen Primzahlen,

ist redundant. Es genügt zu sagen:



M ist eine Menge aus n Primzahlen.

Manchmal ist der Ausdruck „paarweise“ sinnvoll, nämlich dann, wenn Sie eine Aussage machen wollen, die sich nicht auf die einzelnen Elemente einer Menge, sondern auf Paare von Elementen bezieht. Es ist ein Unterschied, ob Sie sagen

- Die natürlichen Zahlen a, b, c sind teilerfremd

oder

- Die natürlichen Zahlen a, b, c sind **paarweise** teilerfremd.

Denn die Zahlen 6, 10, 15 sind zwar (insgesamt) teilerfremd (d.h. ihr größter gemeinsamer Teiler ist 1), aber keineswegs paarweise teilerfremd, da je zwei einen gemeinsamen Teiler haben, der größer als 1 ist.

Wenn Sie den Eindruck haben, sich besonders deutlich und klar ausdrücken zu müssen (etwa weil Sie an einen bestimmten Leserkreis denken), dann sollten Sie ohne schlechtes Gewissen auch redundante Formulierungen verwenden.

Frage: Wie drückt man aus, dass wir eine Liste von Objekten betrachten, von denen eventuell zwei oder mehrere zusammenfallen? (Das soll bedeuten, dass wir Elemente x und y betrachten, von denen wir nicht wissen, ob $x = y$ ist oder nicht.) Das geht am besten so:



Seien p_1, \dots, p_n Primzahlen.

Noch deutlicher:



Seien p_1, \dots, p_n nicht notwendig verschiedene Primzahlen.

Falsch wäre



Seien p_1, \dots, p_n nicht notwendig verschiedene Primzahlen.

3. Ich warne Sie davor, die Zahl 1 als Abkürzung für den unbestimmten Artikel ‚ein‘ zu verwenden. Wenn Sie schreiben



Sei V 1 Vektorraum,

und damit meinen, dass V ein Vektorraum sein soll, so achten Sie bitte darauf, dass diese Formulierung nie an die Öffentlichkeit dringt!

Noch eine *Bemerkung*, die hierher passt. Schreibt man ‚dreidimensional‘ oder ‚3-dimensional‘? Man kann ‚dreidimensional‘ schreiben; die Mathematiker be-

vorzugen aber die Schreibweise ‚3-dimensional‘. Der Duden war lange Zeit der Ansicht, man solle ‚3dimensional‘ (also ohne Bindestrich!) schreiben: wenn die Dimension eine Variable (etwa n) ist, musste man aber auch nach dem Duden ‚n-dimensional‘ schreiben. Die Rechtschreibreform hat hier allerdings eine Verbesserung gebracht. Heute haben wir auch den Segen des Duden, wenn wir bei der Formulierung ‚3-dimensional‘ den Bindestrich verwenden.

Übungen

1 Gut oder schlecht? Übersichtlich oder unübersichtlich?

- ☐ *Seien a, b, c, d die 4 Seiten eines Quadrats.*
- ☐ *Zwei hoch zwölf ist viertausendsechsunneunzig.*
- ☐ *Zwei hoch zwölf = 4096.*
- ☐ *Sei Q ein Quadrat der Seitenlänge vier.*
- ☐ *Es gibt genau 1 Gerade durch zwei Punkte.*
- ☐ *Die Zahl $2^{2^n} + 1$ ist für Null, eins, zwei, drei Primzahl.*
- ☐ *Es gibt 5 platonische Körper.*
- ☐ *Dieses Buch hat 4 Kapitel; in Kapitel zwei finden Sie...*
- ☐ *Sei p 1 Primzahl...*
- ☐ *Sei p_1 eine Primzahl...*
- ☐ *In 1 zyklischen Gruppe gerader Ordnung existiert genau 1 Element der Ordnung 2.*
- ☐ *Es gibt (bis auf Isomorphie) zwei Gruppen der Ordnung 4.*
- ☐ *Es gibt (bis auf Isomorphie) 2 Gruppen der Ordnung vier.*
- ☐ *Es gibt eine einfache Gruppe mit einhundertachtundsechzig Elementen.*

2 Stellen Sie gegebenenfalls die Formulierungen in Aufgabe 1 richtig.

3 Stellen Sie die Formulierung der Überschrift richtig.

„3 5-elementige Mengen haben 15 Elemente“

Die Verwendung von Symbolen erhöht im Prinzip die Präzision eines mathematischen Textes. Wenn man aber mit den Symbolen zu sorglos umgeht, wird der Text nicht nur schwer lesbar, sondern auch mehrdeutig. Deshalb haben sich die folgenden Grundregeln durchgesetzt.

1. Ein Satz darf nicht mit einem Symbol anfangen.

Also nicht:



\mathbf{R} bezeichnet die Menge der reellen Zahlen,

sondern



Die Menge der reellen Zahlen heißt \mathbf{R} .

2. Axiom von SIEGEL (nach dem Mathematiker C.L. SIEGEL (1896 - 1981)): Zwei mathematische Symbole (die sich nicht zu einem größeren Symbolkomplex ergänzen) müssen stets durch mindestens ein Wort getrennt sein!

Also nicht:



Eine 10-elementige Menge hat genau 45 2-elementige Teilmengen.

Sondern etwa:



Die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen einer 10-elementigen Menge ist 45.

Schlecht ist



Für eine ganze Zahl a folgt aus $0 < a \leq 1$ $a = 1$.

Dies wird auch durch einen Doppelpunkt nicht viel besser:



Für eine ganze Zahl a folgt aus $0 < a \leq 1$: $a = 1$.

Möglichkeiten, diese Aussage zu formulieren, sind zum Beispiel:



Eine ganze Zahl a mit $0 < a \leq 1$ muss gleich 1 sein.

oder



Die einzige ganze Zahl a mit $0 < a \leq 1$ ist 1.

Oft kann man lesen:



..., da f 0 auf 1 abbildet.

Dies kann man leicht wie folgt korrigieren:



..., da f das **Element** 0 auf 1 abbildet.

Noch kürzer (und genau so gut) ist



..., da $f(0) = 1$ ist.

Übungen

1 Warum ist das Axiom von Siegel sinnvoll?

2 Formulieren Sie die folgenden Sätze besser:



g hat gerade Ordnung, da g a und b vertauscht.



Für eine lineare Abbildung f impliziert $f(v) = 0 \quad v \in \text{Kern}(f)$.



..., dann ist die Ableitung von $f \circ f$ stetig.



M = alle Folgen mit fast allen Koeffizienten = 0.

3 Was soll folgende Aussage bedeuten? Formulieren Sie sie verständlich:



n Quadratzahl, n ungerade, $n-1$ durch 4 teilbar.

4 Formulieren Sie die Aussage der Überschrift besser.

Symbole

Eine naive Vorstellung von Mathematik (die aber von vielen Logikern geteilt wird) ist, dass in der Mathematik lediglich Symbole manipuliert werden. Es ist in der Tat so, dass die Sprache der Mathematik durch die Verwendung von Symbolen geprägt ist; diese sind aber kein Selbstzweck, sondern sie dienen sowohl dazu, die Objekte, die die Mathematiker wirklich interessieren, als auch die Beziehungen zwischen diesen Objekten mit Standardsymbolen kontrollierbar zu bezeichnen.

Einige Symbole haben sich durchgesetzt; diese sollten Sie verwenden, und zwar in ihrer richtigen Bedeutung. Einige davon sind: $\{ \mid \}$, $(, , ,)$, \in , \notin , \cap , \cup , \times , $A-B$ oder $A \setminus B$, \emptyset , \subseteq , \supseteq , \Leftrightarrow , \Rightarrow , \Leftarrow .

Sie lernen die Bedeutung dieser Symbole in den Anfängervorlesungen. Deshalb soll auf ihre mathematische Bedeutung hier nicht eingegangen werden.

* * *

Beachten Sie, dass eine zu konzentrierte Verwendung von Symbolen Ihre Texte unlesbar machen kann. Dies wird durch die folgende Gegenüberstellung von drei Texten klar (die durch einen Abschnitt des Buches *Humor in der Mathematik* von F. Wille inspiriert ist). Alle drei Texte versuchen, den gleichen Sachverhalt, nämlich den sogenannten Heiratssatz, zu beschreiben. Die erste Beschreibung lautet wie folgt:

Satz. Sind zwei Mengen $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ von je n Elementen gegeben sowie eine Relation $R \subseteq A \times B$, so ist es dann und nur dann möglich, eine Permutation (j_1, \dots, j_n) der Zahlen $1, 2, \dots, n$ so anzugeben, dass

$$(A_i, B_{j_i}) \in R \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

gilt, wenn für jede Teilmenge A' von A gilt, dass die Menge

$$B' = \{B_k \in B \mid \exists A_i \in A' : (A_i, B_k) \in R\}$$

größere oder gleiche Mächtigkeit wie A' hat.

Wenn Sie diesen Text auf Anhieb verstanden haben, ziehe ich meinen Hut vor Ihnen! Die zweite Version ist in dem Stil geschrieben, in dem üblicherweise seriöse Lehrbücher (etwa das Buch von R. Halder und W. Heise, in dem Sie auch einen Beweis des Heiratssatzes finden) verfasst sind:

Definition. Sei $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)$ eine Familie von Mengen. Wir nennen ein n -Tupel (m_1, \dots, m_n) ein **Vertretersystem** von \mathbf{M} , falls $m_i \in M_i$ ist und die Elemente m_1, \dots, m_n verschieden sind.

Satz. Eine Familie \mathbf{M} endlicher Mengen besitzt genau dann ein Vertretersystem, wenn die Vereinigung von je k Mengen aus \mathbf{M} mindestens k Elemente umfasst.

Schließlich die in eine anschauliche Fragestellung eingebettete Formulierung:

Wir betrachten eine Menge unverheirateter junger Frauen und Männer. Die Frage ist, ob jede der jungen Damen sich einen der mit ihr befreundeten Männer zum Mann wählen kann, so dass alle Frauen einen Mann haben und die Gesetze der Monogamie (nur ein Mann pro Frau, nur eine Frau pro Mann) strikt eingehalten werden. Der Heiratssatz gibt die Bedingung an, unter der dies möglich ist:

Heiratssatz. Eine solche Massenhochzeit ist genau dann möglich, wenn es für je k Frauen mindestens k Männer gibt, von denen jeder mit mindestens einer der k Frauen befreundet ist.

* * *

Der Vorteil einer konkreten Formulierung liegt in ihrer Anschaulichkeit, die unter anderem bewirkt, dass man sich eine solche Formulierung leicht merken kann. Sie werden im Mathematikstudium aber in der Regel mit relativ abstrakt formulierten Gedanken umgehen müssen.

Mein Rat: Wenn sich eine anschauliche Version eines Satzes anbietet, merken Sie sich diese! Entwickeln Sie aber zusätzlich die Fähigkeit, jeden Sachverhalt immer eine Stufe abstrakter (formaler, symbolischer) formulieren zu können. So werden Sie sich einerseits die Sätze gut merken können, andererseits aber keine Probleme mit der Abstraktion mehr haben.

Übungen

- 1 Machen Sie sich die Bedeutung der im Text aufgeführten Symbole klar.
- 2 Überzeugen Sie sich, dass alle drei Formulierungen des Heiratssatzes das gleiche bedeuten.
- 3 Machen Sie sich die Bedingung des Heiratssatzes in den Fällen $k = 1, 2, 3$ klar.

Symbole im Text

Darf man mathematische Symbole im Text verwenden? Antwort: Selbstverständlich! Sie dürfen beispielsweise schreiben



Wir nennen die Menge

$$v+U := \{v+u \mid u \in U\}$$

*eine **Nebenklasse** des Unterraums U .*

Nicht empfehlenswert ist dagegen folgende Formulierung:



Ist $v+U$ eine Nebenklasse + ist $v \in U \Rightarrow v+U = U$.

Daran gefallen mir zwei Dinge nicht: Zum einen ist dies die Verwendung des Zeichens „+“ als Abkürzung für „und“; dies ist falsch: „+“ ist eine Verknüpfungsvorschrift, auf den beiden Seiten von „+“ muss ein Element derjenigen algebraischen Struktur stehen, auf der die Verknüpfung „+“ definiert ist.

Mein anderer Einwand betrifft die Verwendung des Implikationspfeils „ \Rightarrow “. Dieser sollte nur verwendet werden, wenn auf beiden Seiten des Pfeils symbolisch ausgedrückte mathematische Aussagen stehen. Ein gutes Beispiel ist



Für je zwei Nebenklassen $v+U$ und $w+U$ gilt

$$v+U = w+U \Leftrightarrow v-w \in U.$$

Ebenso ist das Gleichheitszeichen keine Abkürzung für das Wort „ist“. Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens muss ein mathematischer Ausdruck stehen! Falsch sind also folgende Formulierungen:



$V =$ Vektorraum,



$f =$ stetige Funktion,



Konvergenz = Cauchykonvergenz.

Richtig ist dagegen:



Da $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ durch 641 teilbar ist, ist F_5 keine Primzahl.

Das Gleichheitszeichen ist auch keine Abkürzung für das Wort ‚gleich‘. Es ist falsch zu schreiben



... Daher sind beide Ausdrücke =.

Allerdings hat sich die Schreibweise



$f(x) = \text{const.}$

offenbar unausrottbar durchgesetzt. Dies ist keine Gleichung, sondern eine abkürzende Schreibweise für die Aussage ‚f ist konstant‘ (oder: ‚f ist eine konstante Funktion‘). Man kann diese Aussage natürlich in eine Gleichung verwandeln, indem man die Konstante angibt:



Es gibt ein c , so dass $f(x) = c$ für alle x gilt.

Übung

Was ist an folgenden Formulierungen auszusetzen? Formulieren Sie den entsprechenden Sachverhalt gut.



$g \in \text{Gruppe} \Rightarrow g$ invertierbar.



$a \in \mathbb{Z} + a > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{N}$.



$0 < a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{N}$.



$f = \text{lineare Abbildung} \Leftrightarrow$ durch Matrix darstellbar.



$|a| = a$ für $a = \text{positiv}$, aber $-$, wenn $a = \text{negativ}$.



Der Schluss ‚aus A folgt B ‘ ist **das** logische Instrument der Mathematik. Entsprechend häufig muss man eine solche Implikation formulieren.

Ein mathematischer Text ist aber kein Schulaufsatz, bei dem die Ausdrucksvielfalt die entscheidende Rolle spielt; dennoch steht dem sensiblen Schreiber zur Formulierung eines logischen Schlusses eine Vielfalt von Ausdrucksmöglichkeiten offen. Einige Beispiele zeigen, was Sie alles für „daraus folgt“ schreiben können:

- **also**, **aufgrund** von; das **bedeutet**, dass; unter **Berücksichtigung** von; **daher**; **damit**; es **ergibt** sich; daraus **erhalten** wir; daraus **erhebt** sich; dies hat zur **Folge**; man kann **folgern**; wir **folgern**; **folglich**; genauer **gesagt**; dies ist **gleichbedeutend** mit; dies ist eine **hinreichende** Bedingung dafür; dies **impliziert**; **insbesondere**; dies hat als **Konsequenz**; **mithin**; eine **notwendige** Bedingung dafür ist; **oder**; dies lässt sich **schreiben** als; wir **sehen**; **somit**; ein **Spezialfall** hiervon ist; nach **Umformung** ergibt sich; mit anderen **Worten**; es **zeigt** sich, dass;...

Achtung: Nicht alle diese Formulierungen haben exakt die gleiche Bedeutung! In Übungsaufgabe 1 werden Sie eingeladen, die Unterschiede herauszuarbeiten.

Sie können auch einen Hinweis darauf geben, warum die Folgerung richtig ist:

- nach **Annahme**; **aufgrund** von Satz 4.17; unter **Berücksichtigung** der Theorie elliptischer Funktionen; **da** V endlichdimensional ist; aus der **Definition** ergibt sich; **per definitionem** ist; nach **Voraussetzung**; **wegen** Lemma 3.5; **weil** f stetig ist;...

Schließlich können Sie die Schwierigkeit der Folgerung kennzeichnen:

- durch **einfaches Ausrechnen**; durch **genaues Hinsehen**; wie man **leicht sieht**; **offenbar**; **offensichtlich**; durch **triviale und langweilige Rechnung**; **trivialerweise**; durch **mühsame Umformungen**;...

Vermeiden Sie die Formulierung „**und dann**“ („ f ist differenzierbar, und dann ist f stetig“). Denn dadurch wird der in der Mathematik entscheidende Unterschied zwischen Voraussetzung und Behauptung verwischt.

Diese Hinweise sind dazu da, dem Leser zu *helfen*: dem Leser soll durch einen solchen Hinweis mitgeteilt werden, worauf er sich einzustellen hat. Sie ver-

scherzen sich den Vertrauensvorschuss, den Ihnen der Leser schon dadurch einräumt, dass er Ihr Produkt zu lesen bereit ist, gründlich, wenn Sie den Leser täuschen: Zu behaupten, etwas sei leicht (oder gar trivial) einzusehen, obwohl es schwer oder mühsam ist, gefährdet auch die beste Beziehung! Mein Rat: Wenn Sie mehr als 30 (15?) Minuten gebraucht haben, um ein Argument einzusehen, handeln Sie bereits grob fahrlässig, wenn sie behaupten, der Leser könne dies ‚leicht‘ einsehen.

Übungen

- 1 Nicht alle der oben aufgeführten Ausdrücke für „daraus folgt“ bedeuten haargenau dasselbe. Versuchen Sie, die feinen Unterschiede herauszufinden.
[Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen „A impliziert B“ und „A ist gleichwertig zu B“.]
- 2 Suchen Sie weitere Synonyme für „daraus folgt“.

|M|

Die Mächtigkeit einer Menge wird in der mathematischen Literatur auf verschiedene Arten bezeichnet. Meiner Meinung nach ist nur eine wirklich empfehlenswert. Lassen Sie uns sehen:

Am übersichtlichsten ist folgendes: Die Mächtigkeit einer Menge M wird mit $|M|$ bezeichnet. Zum Beispiel ist

$$|\{1, 1, 2, 3, 2\}| = |\{1, 3, 2\}| = 3.$$

Die Bezeichnung $|M|$ für die Mächtigkeit einer Menge M hat nichts mit dem Absolutbetrag einer Zahl zu tun.

Manche Autoren schreiben statt $|M|$ auch $\#M$ (lies: Anzahl von M). Dies kommt aus dem Englischen und stammt meiner Meinung nach aus der Zeit der Schreibmaschinen, auf denen keine senkrechten Striche verfügbar waren.

Manchmal liest man auch $\text{card}(M)$ für $|M|$. Diese Bezeichnung unterstreicht die Tatsache, dass $|M|$ eine Kardinalzahl ist.

Da jeder die Bezeichnung $|M|$ versteht, aber nicht jeder weiß, was $\#M$ bedeutet und sich auch nicht jeder für den Unterschied zwischen Kardinalzahlen und Ordinalzahlen interessiert, sollten Sie sich für $|M|$ entscheiden.

Eine besonders eindrucksvolle Bezeichnung für $|M|$ ist die folgende:

$$|M| = \sum_{x \in M} 1.$$

Holen Sie tief Luft: Das bedeutet: Man soll die Zahl 1 so oft aufsummieren, wie man ein Element $x \in M$ wählen kann. Mit anderen Worten: Man summiert 1 so oft, wie die Anzahl der Elemente in M angibt.

Warum sich diese – wie ich finde: hirnrissig komplizierte – Bezeichnung in manchen Bereichen der Mathematik (zum Beispiel in der Zahlentheorie) noch hält, wissen wahrscheinlich nicht einmal die Götter.

Meine Empfehlung: Schreiben Sie stets $|M|$, aber seien Sie darauf gefasst, dass Ihnen auch andere Bezeichnungen für die Mächtigkeit einer Menge begegnen.

Übung

Dechiffrieren Sie

$$|M| = \sum_{\substack{p \text{ Primzahl, } p \leq x, \\ p \text{ ungerade}}} 1.$$

und den folgenden Teil der Definition der ‚Möbiusfunktion‘ μ :

$$\mu(n) = (-1)^{\sum_{p \text{ teilt } n} 1}, \quad \text{falls } n \text{ quadratfrei.}$$

[Hinweis zum Lesen: Mit welchem Exponenten wird -1 potenziert?]

In der Mathematik taucht das Wort „unendlich“ sehr oft auf: Die klassischen Gegenstände der Mathematik (der euklidische Raum, die Menge der natürlichen Zahlen) sind unendlich, die meisten Sätze beziehen sich auf eine unendliche Klasse von Objekten; ja, oft wird die Mathematik sogar als die Wissenschaft vom Unendlichen charakterisiert.

Das klingt – je nach Geschmack – romantisch oder furchterregend. Aber weder die Hoffnung noch die Furcht besteht zu Recht. Ein großer Teil der Entwicklungen der Mathematik, etwa die Entwicklung der Analysis oder die Theorie der Algorithmen, hat zum Ziel, das Unendliche beherrschbar zu machen. Und das bedeutet, dass man die Unendlichkeit durch in endlicher Zeit nachvollziehbare Ausdrücke beschreibt. Man spricht zum Beispiel in der Regel nicht davon, dass eine Folge „unendlich klein“ wird, sondern man sagt, dass ab einem gewissen Index die Absolutbeträge der Folgenglieder kleiner als jede vorgegebene positive Größe sind.

In der heutigen Mathematik spielt diese ‚Philosophie des Unendlichen‘ kaum eine Rolle. Der Begriff ‚unendlich‘ und das Symbol ∞ werden in folgenden Bedeutungen gebraucht:

1. Eine Menge M hat unendlich viele Elemente.

Das bedeutet: Es gibt keine ganze Zahl n derart, dass $|M| = n$ ist. Mit anderen Worten: M hat mehr Elemente als jede endliche Menge. Man nennt dann M eine unendliche Menge. Oft schreibt man dann auch

$$|M| = \infty.$$

Achtung: Es gibt auch bei unendlichen Mengen verschiedene Mächtigkeiten. Deshalb ist Vorsicht beim Umgang mit ∞ geboten!

Beispiel: Sowohl \mathbf{N} als auch \mathbf{R} sind unendliche Mengen; auch wenn man

$$|\mathbf{N}| = \infty \quad \text{und} \quad |\mathbf{R}| = \infty,$$

schreibt, so darf daraus nicht

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{R}|$$

folgern; denn Sie wissen sicher, dass \mathbf{R} nicht abzählbar ist, d.h. eine größere Mächtigkeit als \mathbf{N} hat. Hier gilt also nicht das Axiom „Gleiches darf durch Gleiches ersetzt werden“. Daher rate ich Ihnen, von der Schreibweise ‚ $|M| = \infty$ ‘

keinen Gebrauch zu machen, sondern dies verbal auszudrücken, etwa durch „ M ist unendlich“.

2. Zur Beschreibung eines Grenzübergangs

Wir schreiben zum Beispiel

- Für $n \rightarrow \infty$ geht die Folge (a_n) gegen 0,

oder, gleichbedeutend

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Das kann man wie folgt ausdrücken:

- Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

Entsprechend schreibt man

- $a_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$

für eine Folge (a_n) , deren Glieder beliebig groß werden.

3. Zur Beschreibung von unendlichen Reihen

Man schreibt etwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

4. Zur Bezeichnung zusätzlicher Elemente

Oft beschreibt man die Kreislinie (die 1-Sphäre) so, dass man zu \mathbf{R} ein weiteres Element (das dann ∞ genannt wird) hinzufügt; man schreibt

$$\mathbf{S}^1 = \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Entsprechend schreibt man für die 2-Sphäre (die Kugeloberfläche)

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}.$$

Dies wird Ihnen spätestens in der *Funktionentheorie* begegnen. Wenn Sie an dieser Stelle Probleme mit ‚dem Unendlichen‘ haben, so schreiben Sie für den neuen Punkt einfach ω .

In der *projektiven Geometrie* führt man **uneigentliche Punkte** (manchmal auch **unendlich ferne Punkte** genannt) so ein, dass zu jeder Parallelenschar ein uneigentlicher Punkt hinzugefügt wird, in dem sich dann alle Geraden dieser Parallelenschar treffen. Oft bezeichnet man auch diese neuen Punkte mit Hilfe des Symbols ∞ .

Notwendig und hinreichend

Wenn A und B Aussagen sind, für die $A \Rightarrow B$ gilt, so heißt A **hinreichend** für B , und B heißt **notwendig** für A . Mein Rat: Versuchen Sie nicht, in diese Wörter hineinzuhören und ihre Bedeutung zu erfahren, sondern lernen Sie den Gebrauch dieser Wörter wie die Regeln der StVO in der Fahrschule.

Gilt $A \Leftrightarrow B$, so heißt A **notwendig und hinreichend** für B . Andere in der Mathematik gebräuchliche Formulierungen dafür sind



A gilt *genau dann, wenn* B gilt.



A gilt *dann und nur dann, wenn* B gilt.



A ist *äquivalent (gleichwertig)* zu B .

Wir machen uns die Sache an einigen Beispielen klar:



Notwendig dafür, dass eine Zahl $n > 2$ eine Primzahl ist, ist, dass sie ungerade ist.



Hinreichend für die Konvergenz einer Reihe ist, dass sie dem Quotientenkriterium genügt.



Notwendig und hinreichend dafür, dass eine n -elementige Menge in disjunkte 3-elementige Mengen aufgeteilt werden kann, ist, dass n ein Vielfaches von 3 ist.



Hinreichend für die Stetigkeit einer Funktion ist ihre Differenzierbarkeit.

Wenn Sie die Formulierungen ‚dann, wenn‘ und ‚nur dann, wenn‘ gebrauchen, müssen Sie aufpassen.

- „ A gilt dann, wenn B gilt“ heißt $A \Leftarrow B$,
- „ A gilt nur dann, wenn B gilt“ heißt hingegen $A \Rightarrow B$

Wir machen uns die letzte Formulierung an einem Beispiel klar. Sei A die Aussage „Ein neuer Papst wird gewählt“ und B die Aussage „Der alte Papst ist gestorben“. Wir werden die Implikation „Ein neuer Papst wird nur dann ge-

wählt, wenn der alte gestorben ist“ für richtig halten. Anders formuliert heißt dies: „Wenn ein neuer Papst gewählt wird, dann muss jedenfalls der alte gestorben sein“. Dies ist die Aussage $A \Rightarrow B$.

Mein Tipp: Seien Sie äußerst vorsichtig beim Gebrauch der Formulierung „nur dann, wenn“!

Übungen

1 Identifizieren Sie bei den Beispielen im Text genau die Aussagen A und B .

2 **Richtig oder falsch?**

- ☐ *Notwendig für das Bestehen der Prüfung ist die Teilnahme an der Prüfung.*
- ☐ *Hinreichend für das Bestehen der Prüfung ist die Teilnahme an der Prüfung.*
- ☐ *Das schrittweise Nachvollziehen mathematischer Beweise ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung, um Mathematik zu verstehen.*
- ☐ *Der Weltuntergang ist hinreichend für den Weltfrieden.*
- ☐ *Der Weltuntergang ist notwendig für den Weltfrieden.*

3 Angenommen, für die drei Aussagen A , B und C gilt $A \Rightarrow B$, und $B \Rightarrow C$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ☐ A ist notwendig / hinreichend für B .
- ☐ A ist notwendig / hinreichend für C .
- ☐ B ist notwendig / hinreichend für A .
- ☐ B ist notwendig / hinreichend für C .
- ☐ C ist notwendig / hinreichend für A .
- ☐ C ist notwendig / hinreichend für B .

4 Sei B eine Menge von Vektoren des Vektorraums \mathbb{R}^3 . Welche der folgenden Aussagen ist notwendig bzw. hinreichend bzw. notwendig und hinreichend dafür, dass B eine Basis ist?

- ☐ B ist ein Erzeugendensystem.
- ☐ B ist linear unabhängig.
- ☐ B ist ein Erzeugendensystem mit drei Elementen.
- ☐ B ist eine linear unabhängige Menge mit drei Elementen.
- ☐ $B = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,1,1)\}$.

Trivial

„Trivial“ ist das Wort in mathematischen Texten, das am häufigsten falsch gebraucht wird. Sie sollten immer misstrauisch werden, wenn Sie lesen „dies ist trivial“. „Trivial“ bedeutet nicht „langweilig“, „technisch kompliziert“, „ich bin zu faul“, „das kriegt doch jeder Student im ersten Semester hin“,...

Aber was bedeutet „trivial“? Historisch gesehen kommt *trivial* von *Trivium*, dem mittelalterlichen Vorstudium, das aus Grammatik, Dialektik und Rhetorik bestand und das man absolviert haben musste, bevor man mit dem „eigentlichen“ Studium beginnen konnte. Dementsprechend nannte man ursprünglich Erkenntnisse „trivial“, die auf einer so elementaren Ebene stehen, dass man eigentlich nicht mehr darüber sprechen muss.

So wird dieses Wort auch innerhalb der Mathematik gebraucht. Das Wort trivial hat aber auch eine ziemlich technische Bedeutung. Damit bezeichnet man Argumente oder Eigenschaften, die sich ohne jedes Zutun aus einer Definition oder einem Satz ergeben. Beispiele:



Es ist **trivial**, dass jede Primzahl eine natürliche Zahl > 1 ist. (Das steht ja in der Definition!)



Es ist **trivial**, dass jede ganze Zahl sich selbst teilt. (Das ist eine Aussage, die sich unmittelbar aus der Definition ergibt.)

Man kann „trivial“ auch als Adjektiv gebrauchen:



Die **trivialen** Teiler einer natürlichen Zahl n sind 1 und n .



Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung, nämlich die **triviale**.

Zur Abgrenzung einige Beispiele von falschem Gebrauch des Wortes trivial:



Es ist **trivial**, dass jede Quadratzahl nichtnegativ ist. (Das muss man beweisen, und auch wenn der Beweis einfach ist, ist er ein Beweis!)



Es ist **trivial**, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. (Man kann sich zwar nichts anderes vorstellen, aber auch das muss man beweisen oder axiomatisch fordern.)



Es ist **trivial**, dass eine Zahl, die ein Produkt teilt, auch mindestens einen Faktor teilt. (Das ist falsch!)

Manchmal benutzt ein Autor für etwas, was er für besonders trivial hält, das Wort *volltrivial*. Diese Steigerung ist völlig überflüssig (der Autor möchte dadurch wahrscheinlich ausdrücken, dass er persönlich absolut davon überzeugt ist, dass die Sache trivial ist). Mein Rat: Besser nicht!

Achtung: Beim richtigen Gebrauch des Wortes trivial bewegt man sich auf einem schmalen Grat. Es ist manchmal eine Frage der mathematischen Vorbildung, was man als trivial bezeichnet. Schulen Sie Ihre Sensibilität, indem Sie die Übungsaufgaben lösen!

In Wahrheit ist die Sache noch schwieriger: Was zu Recht als ‚trivial‘ bezeichnet werden darf, hängt auch vom mathematischen Gebiet ab: In der Zahlentheorie wird man die Gleichung $1+1=2$ als äußerst trivial abtun, während in der Mengenlehre diese Aussage als nichttrivialer und beweisbarer Satz vorkommt:

In ihrem monumentalen Versuch *Principia Mathematica*, die Mathematik von den Grundlagen her streng logisch aufzubauen, brauchen Bertrand RUSSELL und Alfred North WHITEHEAD immerhin 362 Seiten, bis sie die Aussage ‚ $1+1=2$ ‘ beweisen können! (Vergleiche hierzu das Buch von Davis und Hersh, S. 352.)

Übungen

1 Richtig oder falsch?

- ☐ Es ist trivial, dass jede durch 4 teilbare Zahl auch durch 2 teilbar ist.
- ☐ Es ist trivial, dass keine Quadratzahl eine Primzahl ist.
- ☐ Es ist trivial, dass jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen darstellbar ist.
- ☐ Die leere Menge ist trivialerweise Teilmenge einer jeden Menge.
- ☐ Es ist trivial, dass eine Menge mit n Elementen genau 2^n Teilmengen hat.
- ☐ Jeder mindestens 1-dimensionale Vektorraum hat mindestens zwei Unterräume, nämlich die trivialen.
- ☐ Trivialerweise hat jeder Vektorraum eine Basis.
- ☐ Trivialerweise hat K^n eine Basis.

2 Richtig oder falsch?

- ☐ 641 ist ein nichttrivialer Teiler der fünften Fermatzahl 4.294.967.297.
- ☐ Jede unendliche Menge hat unendlich viele nichttriviale Teilmengen.
- ☐ Eine Primzahl hat keine nichttrivialen Teiler.

3 Welche der folgenden Aussagen sind trivial, welche nichttrivial, welche falsch?

- ☐ Die Gruppen $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ und \mathbf{Z}_6 sind nicht isomorph.
- ☐ Die Gruppen $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ und \mathbf{Z}_6 sind isomorph.
- ☐ Die Gruppen \mathbf{Z}_4 und $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ sind nicht isomorph.

4 Richard P. FEYNMAN berichtet in seinem (höchst empfehlenswerten) Buch „Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman!“, dass die Physikstudenten in Princeton die Mathematikstudenten mit folgender Behauptung geärgert hätten:

Wir haben ein neues Theorem – nämlich: Mathematiker können nur triviale Theoreme beweisen, denn jedes bewiesene Theorem ist trivial.

Wie kommentieren Sie diese Attacke?

Beispiele

Sie sollten sich bei jeder mathematischen Aussage, die Sie zu Gesicht bekommen, fragen, ob Sie dazu ein Beispiel kennen. Warum? Der Hauptgrund ist der, dass Sie sich dadurch zwingen, genau zu lesen; dadurch verstehen Sie eine Aussage besser, Sie können sich zum Beispiel eine Meinung darüber bilden, ob das in der Aussage beschriebene Phänomen selbstverständlich oder außergewöhnlich ist. Stellen Sie zusätzliche Fragen an eine mathematische Aussage und überzeugen Sie sich, wie die Antwort auf diese Fragen bei den von Ihnen konstruierten Beispielen lautet.

Nach Beispielen kann man bei allen Formen mathematischer Aussagen, insbesondere bei Definitionen, Sätzen und Beweisen fragen.

Beispiele zu Definitionen.

Leitfragen: Gibt es viele Beispiele? Sind sie einfach zu finden? Oder ist es schwierig, Beispiele zu konstruieren? (Beschreibt die Definition ein seltenes Objekt?) Oder gibt es vielleicht überhaupt kein Beispiel?

Sie sollten für jeden Begriff ein Beispiel wissen, nein: mindestens zwei Beispiele, nämlich ein triviales und ein nichttriviales.

- Sei G eine Gruppe mit der Verknüpfung \cdot . Eine Teilmenge U von G heißt **Untergruppe** von G , falls U bezüglich der (auf U eingeschränkten) Operation \cdot selbst eine Gruppe ist.
Jede Gruppe G hat **triviale Untergruppen**, nämlich G selbst und $\{e\}$, wobei e das neutrale Element von G ist.
Nichttriviales Beispiel: $2\mathbb{Z}$ ist Untergruppe der additiven Gruppe \mathbb{Z} .
- *Triviale Beispiele* von linearen Abbildungen: Nullabbildung und Identität;
Nichttriviale Beispiele von linearen Abbildungen: Basistransformationen, Projektionen, Spiegelungen,...
- *Triviales Beispiel* eines Polynoms: das Polynom 2 ;
Nichttriviales Beispiel eines Polynoms: Das Polynom x^2+1 .

(Was ist ein ‚triviales‘ Polynom? Meiner Meinung nach ist dies ein solches, das kein ‚normaler Mensch‘ als Polynom akzeptieren würde. Da in einem ‚richtigen‘ Polynom eine Unbekannte vorkommen muss, sind demgemäß die konstanten Polynome trivial. Über \mathbb{R} sind also die reellen Zahlen die trivialen Polynome.)

Beispiele zu Sätzen.

Leitfragen: Ist der Satz überraschend oder handelt es sich um eine erwartete Aussage? Wäre ich aufgrund meines Wissens selbst darauf gekommen, den Satz zu formulieren? Ist die Aussage des Satzes überhaupt glaubhaft?

Ich halte die Aussagen der folgenden Sätze für so überraschend, dass ich ein Beispiel benötigte, um mich subjektiv zu versichern, dass die Aussage richtig ist.

- Jede endliche Menge hat ebenso viele Teilmengen gerader Mächtigkeit wie Teilmengen ungerader Mächtigkeit.
- Seien p_1, \dots, p_n die ersten n Primzahlen. Man teile diese n Zahlen beliebig in zwei Teilmengen auf und bilde das Produkt A bzw. B der Elemente jeder der beiden Teilmengen. Dann ist $A+B$ eine Primzahl, falls sie größer als 1 und kleiner als $(p_{n+1})^2$ ist. (Honsberger, *More Mathematical Morsels*).

Beispiele zu Beweisen.

Leitfragen: Haben Sie den Gedankengang des Beweises wirklich verstanden? Ist der Beweis Routine, oder gibt es einen Trick? Sagt der Beweis mehr als in dem Satz tatsächlich formuliert ist?

Was ich meine, kann man etwa an dem euklidischen Beweis für den Satz sehen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dieser Beweis lautet (in Kurzform):

Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen p_1, \dots, p_n . Da die natürliche Zahl $m := p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ größer als 1 ist, muss sie durch eine Primzahl teilbar sein. Nach Annahme muss sie also durch eine der Primzahlen $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$ teilbar sein. Dann teilt p_i aber 1, da p_i sowohl m als auch das Produkt $p_1 \cdot \dots \cdot p_n$ teilt: Ein Widerspruch.

Ein Beispiel für diesen Beweis ist das folgende:



Sei $p_1 = 2, p_2 = 3$. Dann muss $m = p_1 \cdot p_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1$ durch eine Primzahl teilbar sein. Dies kann weder 2 noch 3 sein. Also gibt es eine dritte Primzahl, nämlich $p_3 = 7$.

Aufgrund dieses Beispiels sieht man nicht nur, wie der Beweis funktioniert, sondern kann ihm auch noch eine konstruktive Version geben:



Seien p_1, \dots, p_n Primzahlen. Dann ist jede Primzahl p_{n+1} , welche die Zahl $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ teilt, eine weitere (das heißt von p_1, \dots, p_n verschiedene) Primzahl.

Merke: Man kann nie zu viele Beispiele kennen! Versuchen Sie immer, an den Beispielen das Wesentliche zu sehen!

Übungen

- 1 Geben Sie triviale und nichttriviale Beispiele zu folgenden Begriffen an: Teiler, Unterraum, Erzeugendensystem eines Vektorraums, linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums, Basis von K^n .
- 2 Ein **Primzahltrilling** ist ein Tripel von Primzahlen p, q und r , für die gilt $r = q+2$ und $q = p+2$. Kennen Sie ein Beispiel eines Primzahltrillings? Kennen Sie alle Beispiele? (Beweis?)
[Hinweis: Schlagen Sie in der zahlentheoretischen Literatur das Stichwort Primzahltrilling nach!]
[Noch ein Hinweis: Um zu entscheiden, ob hier ein Druckfehler vorliegt, sollten Sie vorher die Aufgabe lösen!]
- 3 Konstruieren Sie Beispiele zu den im Text genannten Sätzen.
- 4 Beweisen Sie die im Text erwähnten Sätze.



Aussagen über alle Objekte eines gewissen Bereichs sind zentral für die Mathematik. Man kann die Mathematik geradezu dadurch charakterisieren, dass sie typischerweise Aussagen über alle Elemente einer unendlichen Menge macht.

Führen wir uns die berühmte Goldbachsche Vermutung vor Augen: In dieser wird vermutet, dass jede gerade natürliche Zahl, die größer als 2 ist, Summe von zwei Primzahlen ist. Um diese Behauptung zu verifizieren, genügt es nicht, die ersten Beispiele anzuschauen ($4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 5+3$, $10 = 5+5$, $12 = 7+5, \dots$), es genügt auch nicht, ein Computerprogramm zu schreiben, das alle Zahlen bis 10 Millionen überprüft, es genügt auch nicht, ein Computerprogramm zu haben, das alle Zahlen prinzipiell überprüfen könnte, sondern man muss die Behauptung für alle (unendlich vielen!) geraden Zahlen, sozusagen auf einen Schlag, zeigen! [Bemerkung: Dies ist bis heute noch nicht gelungen!]

Häufig sind Aussagen, die sich auf alle Elemente einer Menge beziehen, nicht nur nach folgendem Modell formuliert:



Sei M eine Menge. Dann gilt für alle Elemente $m \in M$ folgende Aussage:

Vielmehr haben sich die Mathematiker dafür eine große Palette von Formulierungen einfallen lassen:



$\forall m \in M$:



$\wedge m \in M$:



Für alle Elemente von M gilt...



Für jedes Element von M gilt...



Sei m ein beliebiges Element aus M . Dann gilt...



Für ein beliebiges Element aus M gilt...



Ist $m \in M$, so gilt...



Jedes Element aus M erfüllt...



Die Elemente von M erfüllen...



$f = \text{const.}$

Die letzte Formulierung bedeutet nämlich nur: *Für jedes x hat $f(x)$ denselben Wert.* Diese Formulierung „ $f = \text{const.}$ “ sollte aber nur vorsichtig verwendet werden; siehe dazu S. 32.

Wenn mehrere Variable durch einen Allquantor gebunden sind, verwendet man oft die Formulierung ‚je zwei‘, ‚je drei‘,... Zum Beispiel bedeutet die Aussage



Durch je zwei verschiedene Punkte P und Q geht genau eine Gerade.

nichts anderes als



Für jeden Punkt P und jeden Punkt $Q \neq P$ gibt es genau eine Gerade mit...

Einige Bemerkungen:

1. Versuchen Sie, die Aussagen, die Sie lesen oder schreiben, im Geiste (oder auch auf dem Papier) so umzuformulieren, dass Ihnen völlig klar ist, was sie bedeuten.

2. Zwischen ‚für alle‘ und ‚für jedes‘ gibt es keinen mathematischen Unterschied. Man kann aber sprachlich etwas differenzieren: ‚Für alle‘ zielt auf die Gesamtheit aller Elemente, während ‚für jedes‘ ein beliebig herausgegriffenes Element im Blick hat. Man kann also schreiben:



Alle bijektiven Funktionen sind invertierbar.



Jede bijektive Funktion f hat eine Umkehrfunktion; diese nennen wir f^{-1} .

3. Ihre Aussagen werden nicht dadurch exakt, dass Sie Symbole wie etwa \forall verwenden.

4. Meiner Meinung nach ist \forall besser als \wedge ; denn das Symbol \forall kann kaum missverstanden werden.
5. Stellen Sie das Symbol \forall nicht hinter die Formel:



... $a_n \geq 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.

Übungen

- 1 Formulieren Sie die folgenden Aussagen so um, dass es unbestreitbar ist, dass es sich um eine ‚für alle‘-Aussage handelt.
 - *Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen.*
 - *Eine natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.*
 - *Für jede reelle Zahl $r \neq 0$ gilt $r + r \neq 0$.*
 - *Eine Zahl mit gerader Endziffer ist gerade.*
 - *Jede natürliche Zahl ist Summe von höchstens vier Quadratzahlen.*
 - *Das arithmetische Mittel ist nie kleiner als das geometrische Mittel.*
 - *Schotten sind geizig.*
 - *Intelligenz macht hässlich.*
 - *Jungen (Mädchen) sind doof.*
 - *Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.*
 - *Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.*
 - *Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl.*
 - *Für hinreichend große n wird $1/n$ auf Ihrem Computer durch 0 dargestellt.*
 - *Je zwei nichtparallele Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.*
 - *Durch je drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, geht genau ein Kreis.*
- 2 Formulieren Sie die folgenden Aussagen so um, dass es klar wird, ob es sich um eine ‚für alle‘- oder eine ‚es gibt‘-Aussage handelt.
 - *In \mathbb{R} gibt es ein Einselement.*
 - *Jede von Null verschiedene reelle Zahl hat eine multiplikative Inverse.*
 - *Eine natürliche Zahl, die von 1 verschieden ist, hat mindestens zwei Teiler.*
 - *Einige natürliche Zahlen haben mehr als zwei Teiler.*
 - *Eine Reihe, die dem Quotientenkriterium genügt, ist konvergent.*
 - *Eine beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*
 - *Ein rechtwinkliges Dreieck erfüllt den Satz von Pythagoras.*

- 3 (a) Welche der folgenden Aussagen ist eine korrekte Definition eines Parallelogramms?
- *Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.*
 - *Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.*
 - *Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.*
- (b) Die folgenden Aussagen sollen Definitionen der Begriffe ‚Trapez‘, ‚Raute‘ und ‚Drachen‘ sein. Formulieren Sie sie so, dass klar wird, was gemeint ist:
- *Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.*
 - *Ein Trapez ist ein Viereck, in dem zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.*
 - *Eine Raute ist ein Viereck, in dem zwei aneinandergrenzende Seiten gleich lang sind.*
 - *Ein Drachen ist ein Viereck, in dem zwei aneinandergrenzende Seiten gleich lang sind.*
- 4 Machen Sie sich klar, dass folgende Formulierungen missverständlich sind:



Für ein Element aus M gilt...



Zu einem beliebig kleinen ε gibt es ein δ ...

∃

Man nennt eine Aussage der Form

Es gibt ein Objekt mit den Eigenschaften A, B und C

eine Existenzaussage. Wichtig ist hier der Teil ‚es gibt‘; durch eine Existenzaussage wird behauptet, dass es mindestens ein Objekt mit den geforderten Eigenschaften gibt. Es interessiert dabei nicht, ob es genau ein oder fünf Millionen oder unendlich viele solche Objekte gibt. In mathematischer Formelsprache wird dieses ‚es gibt‘ auch durch den **Existenzquantor** \exists (oder \vee) ausgedrückt. Man hätte obige Aussage also auch wie folgt schreiben können:



$\exists x: x$ hat Eigenschaften A, B und C.

Man kann aber eine Existenzaussage in vielen Formulierungen darstellen; lesen Sie die folgenden Aussagen genau und finden Sie heraus, wie die ‚es gibt‘-Formulierung lautet.



Es existieren Primzahlen p und q mit $p-q=3$.



Es existiert eine Funktion auf $[0, 1]$, die in keinem Punkt dieses Intervalls stetig ist.



Sei U ein Unterraum des Vektorraums V . Dann besitzt U einen komplementären Unterraum.



Jede monotone beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt.



Die Exponentialfunktion hat eine Umkehrfunktion.

Besonders raffiniert ist das Wort ‚geeignet‘:



Für ein geeignetes x ist $\log x \leq x$.

heißt nichts anderes als



Es gibt ein x mit $\log x \leq x$.

Genauso trickreich und beliebt ist die Formulierung



Im allgemeinen gilt nicht, dass x^2+x+41 eine Primzahl ist.

was nichts anderes bedeutet als



Es gibt ein x derart, dass x^2+x+41 keine Primzahl ist.

Die Verneinung (Negation) einer Existenzaussage ergibt eine Allaussage und umgekehrt: Die Verneinung von

- *Alle Studenten sind fleißig.*

lautet

- *Es gibt (mindestens) einen Studenten, der nicht fleißig (also faul) ist.*

Entsprechend erhält man die Negation des Satzes

- *Es gibt mindestens einen klugen Professor,*

indem man schreibt

- *Alle Professoren sind doof.*

Manchmal will man ausdrücken, dass es genau ein Objekt einer gewissen Sorte gibt; man spricht dann von **Existenz und Eindeutigkeit** dieses Objekts. Als Symbole dafür haben sich sowohl \exists_1 als auch $\exists!$ eingebürgert.

Übungen

- 1 Wo ist in den folgenden Formulierungen die Existenzaussage verborgen?
 - *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*
 - *Jede $n \times n$ -Matrix M mit $\det(M) \neq 0$ ist über dem entsprechenden Körper invertierbar.*
- 2 Verneinen Sie die folgenden Aussagen:
 - *Je zwei Vektoren sind linear unabhängig.*
 - *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ hat die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in den natürlichen Zahlen x, y, z nur die triviale Lösung $x = y = z = 0$.*
 - *Es gibt eine gerade Zahl, die nicht Summe von zwei Primzahlen ist.*
 - *Im Allgemeinen gilt nicht, dass Frauen intelligenter sind als Männer.*
- 3 Sind die folgenden Aussagenpaare Negationen voneinander?
 - *Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge – es gibt nur endlich viele Primzahlzwillinge.*

- *Jeder Winkel lässt sich mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen.*
- *Der Winkel von 60° lässt sich nicht mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen.*

4 Beweisen Sie die im Text angegebenen Existenzaussagen.

$\forall \exists$ und $\exists \forall$

Knifflig wird es, wenn beide Quantoren in ein- und demselben Satz vorkommen.

Zum einen geht es dabei darum, das richtig zu erkennen. Zum Beispiel ist die Aussage



Die Glieder einer Nullfolge sind von einer gewissen Stelle an kleiner als jedes vorgegebene ε .

gleichbedeutend zu der Aussage



Für alle Nullfolgen (f_n) und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass $|f_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Der klassische Fall ist die ε, δ -Formulierung der Stetigkeit:



Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0 , wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt
 $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

In Kurzform:



f ist stetig in x_0 , wenn gilt:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Die Formulierung ist so ausgeklügelt, dass Sie vermeiden sollten, diese durch – vermeintliche – sprachliche Eleganz zu verunklaren! Schreiben Sie nicht



f ist stetig in x_0 , wenn gilt:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta.$

Auch unter den Wörtern ‚global‘ bzw. ‚konstant‘ können sich All- und Existenzaussagen verbergen:



Es gibt ein globales δ , so dass für alle $\varepsilon...$

heißt



Es gibt ein δ , so dass für alle ε ...

Die Formulierung



Die reellwertige Funktion f ist konstant

bedeutet nichts anderes als



Es gibt eine reelle Zahl c , so dass $f(x) = c$ für alle x gilt.

Manchmal ist eine $\exists\forall$ -Formulierung raffiniert versteckt. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Die Formulierung

der Wert $y = f(x)$ ist **unabhängig** von der Auswahl von x

bedeutet nichts anderes als

es gibt ein $y \in Y$, so dass für alle x gilt $f(x) = y$.

Eine weitere Tücke besteht darin, dass man bei All- und Existenzquantoren genau auf die *Reihenfolge* achten muss. Umkehrung der Reihenfolge von Existenz- und Allquantor ist streng verboten, da das eine völlig andere Aussage liefert. Sie werden sich das für alle Zeiten einprägen, wenn Sie die beiden Aussagen

$$\forall m \exists f: h(m, f) \text{ und } \exists f \forall m: h(m, f)$$

betrachten und sich vorstellen, dass m für *Männer*, f für *Frauen* und h für *hat was mit* steht.

Ein mathematisches Beispiel dafür, dass die Vertauschung der Reihenfolge von All- und Existenzquantor zu völlig unterschiedlichen Begriffen führt, ist der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit. Die einfache Stetigkeit einer Funktion auf einem Intervall I kann bekanntlich so ausgedrückt werden:



f ist stetig auf I , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in I \quad \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Demgegenüber wird gleichmäßige Stetigkeit auf einem Intervall I so definiert:



f ist gleichmäßig stetig auf I , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in I: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Lesen Sie beide formalen Ausdrücke ganz langsam! Achten Sie darauf, was gleich und was verschieden ist! Machen Sie sich klar, dass durch die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit ausgedrückt wird, dass das δ unabhängig von der Wahl des x_0 ist!

Übungen

- 1 Machen Sie sich den Inhalt der folgenden Aussagen klar, indem Sie sie in ‚für alle‘- oder ‚es gibt‘-Aussagen verwandeln.
 - Jeder Vektorraum hat eine Basis.
 - Eine unendliche Menge M hat eine echte Teilmenge M' mit $|M'| = |M|$.
 - Folgen mit Häufungspunkt haben eine konvergente Teilfolge.
 - Aus punktweiser Konvergenz folgt nicht gleichmäßige Konvergenz.
 - Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium.
- 2 Sei K ein konvexer Körper im dreidimensionalen Raum. Stellen Sie sich die folgenden Eigenschaften genau vor:
 - *Es gibt eine natürliche Zahl n , so dass jede Seite von K ein reguläres n -Eck ist.*
 - *Für jede Seite S gibt es eine natürliche Zahl n , so dass S ein reguläres n -Eck ist.*

Kennen Sie Körper, welche eine der beiden Eigenschaften haben, aber nicht die andere?

- 3 Wandeln Sie die folgenden Aussagen so um, dass klar wird, in welcher Reihenfolge die Quantoren aufeinanderfolgen:
 - *Die Funktion f ist auf ganz \mathbf{R} definiert.*
 - *Die Funktionswerte $f(x)$ sind unabhängig von der Auswahl von x .*
- 4 Sei G eine Menge mit einer binären Verknüpfung \cdot und einem neutralen Element e . Was bedeuten die folgenden Aussagen?
 - $\forall g \in G \exists g' \in G \text{ mit } g \cdot g' = e$,
 - $\exists g' \in G, \text{ so dass } \forall g \in G \text{ gilt } g \cdot g' = e$.

Kennen Sie Strukturen, die die erste Eigenschaft haben? Gibt es Strukturen, die die zweite Eigenschaft haben?

- 5 Definieren Sie die Begriffe Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen so, dass klar wird, dass die eine Definition aus der anderen durch Vertauschung der Reihenfolge eines Existenz- und eines Allquantors hervorgeht.

Gegenbeispiele

Gegenbeispiele sind ein Instrument, um Erkenntnisse zu gewinnen, also beispielsweise mathematische Sätze zu beweisen. Beim Nachweis eines Gegenbeispiels muss man dessen Existenz nachweisen; daher handelt es sich um Existenzsätze. Das Wort „Gegenbeispiel“ kommt daher, dass man mit einem solchen Beispiel eine (falsche!) All-Aussage widerlegen kann.

Die Aussage „Alle Schwäne sind weiß“ kann durch das Gegenbeispiel eines einzigen schwarzen Schwanes widerlegt werden.

Alle folgenden All-Aussagen sind falsch:

- *Alle Primzahlen sind ungerade.* (Gegenbeispiel ist die Zahl 2.)
- *Wenn man in die Formel x^2+x+41 eine natürliche Zahl einsetzt, erhält man eine Primzahl.* (Gegenbeispiel ist $x = 41$.)
- *Sind je zwei Vektoren einer Menge linear unabhängig, so ist diese Menge von Vektoren linear unabhängig.* (Gegenbeispiel ist etwa die Menge $\{v, w, v+w\}$, wobei v und w linear unabhängig sind.)

Manche Mathematiker meinen: „Die einzigen Beispiele, die mich interessieren, sind Gegenbeispiele“. Dieser Extremmeinung schließe ich mich nicht an; meine Stellungnahme finden Sie im Abschnitt „Beispiele“.

Mein Rat: Wenn Sie einige Zeit lang versucht haben, eine Aussage (auch eine gedruckte Aussage) zu verifizieren, aber dabei ohne Erfolg geblieben sind, sollten Sie versuchen, ein Gegenbeispiel zu finden. (Sie glauben gar nicht, wie viele falsche Aussagen auch in Lehrbüchern zu finden sind!)

Übungen

- 1 Suchen Sie Gegenbeispiele für folgende Aussagen:
 - *Jede natürliche Zahl ist Summe von höchstens drei Quadratzahlen.*
 - *Mathematik ist langweilig.*
 - *Intelligente Frauen sind hässlich.*
- 2 Achten Sie bei den nächsten Übungsaufgaben Ihrer Mathematikveranstaltungen darauf, ob diese nicht ganz einfach durch ein Gegenbeispiel zu lösen sind.

Beweise

Beweise sind das Herz der Mathematik. Die Mathematiker sind zu Recht stolz darauf, dass die von ihnen gemachten Aussagen (die Sätze) rein logisch, also objektiv nachgewiesen werden können, und nicht durch ‚Expertengutachten‘, ‚Experimente‘, ‚Technologievoraussetzungen‘ gestützt werden müssen. Die revolutionäre Erkenntnis, dass Beweise möglich sind, geht auf die alten Griechen zurück. EUKLID (ca. 300 v. Chr.) hat die damals bekannte Mathematik in seinen *Elementen* zusammengefasst und dabei konsequent nicht beobachtete Naturgesetze aufgelistet, sondern Sätze bewiesen. Diese Vorgehensweise ist bis heute vorbildlich.

Daher sollten Sie Beweise äußerst sorgfältig darstellen, um so die Überlegenheit mathematischer Argumentation dem Leser deutlich zu machen.

Entscheidend ist die Organisation des Beweises.

1. Sagen Sie, was Sie beweisen!

Zu Beginn eines Beweises werden Bezeichnungen festgelegt. Außerdem sollten Sie präzise sagen, was Sie zu beweisen gedenken. Der Leser muss zu jedem Zeitpunkt wissen, welche Teilbehauptung gerade gezeigt wird, und was danach folgt:

**Sagen Sie, was Sie vorhaben, tun Sie es,
und sagen Sie dann, dass Sie es getan haben!**

Ich empfehle, die zu beweisende Aussage zu Beginn des Beweises nochmals in mathematischer Symbolik auszudrücken.



Satz. Jede endliche Menge linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums V kann zu einer Basis von V ergänzt werden.

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine endliche Menge linear unabhängiger Vektoren von V . Es ist zu zeigen, dass es Vektoren v_{k+1}, \dots gibt derart, dass $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots\}$ eine Basis von V ist.

Die Schlüsselformulierungen lauten „es ist zu zeigen“, „es genügt zu beweisen“,...

2. Gliedern Sie Ihren Beweis!

Dies ist bei langen Beweisen (länger als eine halbe Seite) unbedingt notwendig. Isolieren Sie Unterbehauptungen, die man beweisen muss; diese kann man durch die Bezeichnung „Schritt 1“, „Schritt 2“, ... kennzeichnen.

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel ist, den Beweis in *Fälle* zu untergliedern. Achten Sie dabei darauf, dass Sie alle Fälle erfassen. Dies ist besonders dann kritisch, wenn Sie mehr als zwei Fälle unterscheiden:



Satz. *Jede nichtleere endliche Menge hat genau so viele Teilmengen ungerader Mächtigkeit wie Teilmengen gerader Mächtigkeit*

Beweis. Sei M eine endliche Menge.

1. *Fall:* Die Mächtigkeit von M ist ungerade.

Dann ist die Abbildung $X \rightarrow M \setminus X$ eine Bijektion von der Menge der Teilmengen ungerader Mächtigkeit auf die Menge der Teilmengen gerader Mächtigkeit.

2. *Fall:* Die Mächtigkeit von M ist gerade.

Betrachte ein Element m von M . Dann leistet die durch

$$f(X) := (M \setminus X) \cup \{m\}, \quad \text{falls } m \in X,$$

$$f(X) := (M \setminus X) \setminus \{m\}, \quad \text{falls } m \notin X.$$

definierte Abbildung f das Gewünschte.

Warnung: Unnötige Fallunterscheidungen verwirren nur! Machen Sie eine Fallunterscheidung nur, wenn Sie die einzelnen Fälle mit verschiedenen Argumenten behandeln. Es ist schlecht, eine Fallunterscheidung vorzunehmen, den ersten Fall zu behandeln und dann zu sagen



Der zweite Fall wird genau so wie der erste gelöst.

(Das ist ein sinnvolles Vorgehen auf dem ‚Schmierpapier‘, in der ‚Reinschrift‘ sollten Sie das vermeiden.) Wenn der zweite Fall nur im Wesentlichen so gelöst werden kann wie der erste, so sollte man das auch ausdrücken:



Um den zweiten Fall zu lösen, geht man entsprechend wie im ersten vor; man hat nur die Ungleichung () durch die folgende Ungleichung (**) zu ersetzen:*

3. Kennzeichnen Sie den Schluss eines Beweises!

Sie können natürlich sagen: „Der Leser muss das selbst merken“, aber es hat sich gezeigt, dass die Leser äußerst dankbar sind, wenn ihnen signalisiert wird, dass der Autor so viele Argumente zusammengestellt hat, dass die Aussage – seiner Meinung nach – bewiesen ist.

Für die Markierung des Beweisendes haben Sie viele Möglichkeiten. Sie können schreiben

- *Damit ist alles gezeigt* oder – volltönender, aber eigentlich überflüssig –
- *damit ist der Satz vollständig bewiesen.*

- ... wie wir behauptet hatten.
- *Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war, also die Behauptung richtig ist.*
- ..., w.z.b.w. („was zu beweisen war“), oder vornehm lateinisch
- ..., *Q.E.D.* („quod erat demonstrandum“).

Am ökonomischsten ist sicherlich das Beweisabschlusszeichen

- \square

Übung

- 1 Bei der Formulierung des Beweises des Satzes, dass jede endliche Menge genau so viele Teilmengen gerader Mächtigkeit wie ungerader Mächtigkeit hat, habe ich gegen eine Grundregel guter Bezeichnungen verstoßen. Gegen welche?
- 2 Beweisen Sie den in Aufgabe 1 erwähnten Satz durch Induktion nach der Anzahl der Elemente der Menge.

Zitate

In aller Regel baut ein Beweis eines Satzes auf anderen mathematischen Sätzen auf. Diese müssen dann zitiert werden. Dies kann etwa nach folgenden Mustern geschehen:



Nach § 7, Satz 7 des Buches „Analysis I“ von Forster ist...



Das Quotientenkriterium impliziert...



Wegen des Zwischenwertsatzes existiert...

Achten Sie darauf, so zu zitieren, dass der Leser das Zitat ohne große Mühe verifizieren kann. Daher sind Formulierungen der folgenden Art nicht empfehlenswert:



Aus einem Satz der Vorlesung folgt...



Unter Berücksichtigung der Theorie des Lebesgueschen Integrals erkennt man...

Regel: **Kein Zitatenfriedhof; jeweils nur ein Zitat!** Ein Zitat soll ja eine Hilfe für den Leser sein. Also nicht



Aus 3.28 folgt in Verbindung mit 1.1.1, wenn man in 2.34(b) die Ergebnisse von 1.1.2.17(f) benutzt, dass...

Eine weitere Regel: Nicht vorne und hinten eine Begründung! Also nicht



Aus Satz 5.17 folgt $a \in B$, da f nach oben halbstetig ist.

sondern



Da f nach oben halbstetig ist, folgt mit Satz 5.17, dass $a \in B$ gilt.

Übung

Richtig oder falsch?

- ☐ Aus **3.17(a)** ergibt sich, wenn man $a = 1$ setzt...
- ☐ ... daher ist f stetig (vergleiche § 6, Beispiel 3).
- ☐ Aus **1.1, 1.2, 1.3** sowie **3.17** mit den Voraussetzungen von **4.20** folgt unter der gegenwärtigen Annahme durch leichte Rechnung...
- ☐ Wie Sie sicher in der Analysis gelernt haben,...

Der, die, das

Beim Gebrauch des bestimmten Artikels sind die Mathematiker äußerst pingelig: **Der bestimmte Artikel darf nur dann gebraucht werden, wenn es klar ist, dass das fragliche Objekt eindeutig bestimmt ist.**

Falsch ist:



... **die** Matrix, die eine lineare Abbildung f darstellt.



... **die** Basis des Vektorraums \mathbf{R}^3 .



... **der** n -dimensionale Vektorraum über dem Körper K .

Richtig ist dagegen:



Sei n **die** kleinste natürliche Zahl mit...



... **das** neutrale Element der Gruppe G .



... **der** bis auf Isomorphie eindeutige n -dimensionale Vektorraum über dem Körper K .



... **die** kanonische Basis des Vektorraums \mathbf{R}^3 .

Übungen

1 Richtig oder falsch?

- ☐ ... **die** leere Menge.
- ☐ ... **die** Menge der natürlichen/ganzen/rationalen/reellen Zahlen.
- ☐ ... **die** bijektive Abbildung von \mathbf{N} in \mathbf{Q} .
- ☐ ... **der** Automorphismus von \mathbf{R} .
- ☐ ... **die** Funktion auf $[0,1]$, die nirgends stetig ist.
- ☐ ... **die** lineare Abbildung des Vektorraums V auf den Faktorraum V/U .

- ☐ ... **der** Kreis durch drei nichtkollineare Punkte.
- ☐ ... **der** Kreis durch zwei Punkte.
- ☐ ... **die** Menge der Kreise durch zwei Punkte.
- ☐ ... **die** Musterlösung einer Übungsaufgabe.

2 Richtig oder falsch?

- ☐ Die Definition der Abbildung.
- ☐ Die Definition der bijektiven Abbildung
- ☐ Die Definition der stetigen Funktion.
- ☐ Die Definition des Teilers einer natürlichen Zahl.
- ☐ Die Definition der Primzahl.
- ☐ Die Definition der Menge der Primzahlen.
- ☐ Die Definition des Vektorraums.
- ☐ Die Definition des Erzeugnisses der Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n .
- ☐ Die Definition des Kerns einer linearen Abbildung.
- ☐ Der Repräsentant einer Nebenklasse..

3 Richtig oder falsch?

- ☐ Eine Basis ist die maximal linear unabhängige Menge.
- ☐ Die Basis ist die maximal linear unabhängige Menge.
- ☐ Die Dimension ist die Anzahl der Elemente einer Basis.
- ☐ Die Dimension ist die Anzahl der Elemente der Basis.

4 Erklären Sie genau, was der bestimmte Artikel in den folgenden Formulierungen bedeutet:

- Seien a, b, c, d die Elemente der Menge M .
- Seien p_1, \dots, p_k die Primteiler der natürlichen Zahl n .
- Sind a_i die natürlichen Zahlen zwischen 1 und $p-1$ (p prim), so ist $1 + \Pi a_i$ durch p teilbar.

5 Ist der Satz „Der bestimmte Artikel darf nur dann gebraucht werden, wenn es klar ist, dass das fragliche Objekt eindeutig ist“ richtig gebildet?

Eindeutig

Das Wort *eindeutig* ist ein altmodisches Wort, das *bijektiv* bedeutet. Richtig ist also



Es gibt eine eindeutige Abbildung von \mathbf{N} auf \mathbf{Q} .

Das Wort ‚eindeutig‘ drückt aber in keinem Fall aus, dass ein Objekt – entgegen dem ersten Anschein – doch richtig definiert ist. Ein falscher Gebrauch wäre demnach



Der goldene Schnitt ist die durch $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ eindeutig definierte reelle Zahl.

Das Wort *eindeutig* bedeutet in diesem Zusammenhang übrigens *injektiv*, so dass man sagen kann



Es gibt eine eindeutige Abbildung von \mathbf{N} in \mathbf{R} .

Aber die Formulierung



Damit ist die Funktion f eindeutig definiert.

ist schlecht. (Schließlich legt jede Definition den zu definierenden Begriff eindeutig fest; dies muss man daher nicht extra betonen.)

Die Sache ist in Wirklichkeit noch schlimmer: Manche Autoren verwenden das Wort ‚eindeutig‘ im Sinne von ‚injektiv‘. Diese Mathematiker benutzen dann ‚eindeutig‘ als Gegensatz zu ‚mehrdeutig‘!

Mein Rat: Verwenden Sie das Wort ‚eindeutig‘ nicht und ‚eindeutig‘ nur als Gegensatz zu *mehrdeutig*! Seien Sie aber – vor allem bei der Lektüre älterer Mathematik – auf das Erscheinen dieser Wörter gefasst.

Übung

Richtig oder falsch?

- ☐ *Es gibt eine eindeutige Beziehung zwischen \mathbf{N} und \mathbf{Z} .*
- ☐ *Sei f die durch $f(z) = 2z$ eindeutig definierte Bijektion von \mathbf{Z} auf $2\mathbf{Z}$.*
- ☐ *Die Abbildung $f(z) := 2z$ definiert eine eindeutige Korrespondenz zwischen \mathbf{Z} und $2\mathbf{Z}$.*
- ☐ *Durch die Vorschrift $i^2 = -1$ ist die Zahl i eindeutig definiert.*
- ☐ *... hiermit lege ich den Termin für die Klausur in Analysis I eindeutig fest.*
- ☐ *Der Logarithmus ist im Intervall $(0, \infty)$ eine eindeutige Abbildung.*
- ☐ *Die Musterlösung erklärt die Aufgabe eindeutig.*

Kanonisch

Das Wort kanonisch wird für ein Objekt gebraucht, von dessen Sorte es zwar viele gibt, das aber unter seinen Artgenossen das mit Abstand einfachste ist, so dass es in diesem Sinne eindeutig ist.

Der Begriff „Kanon“ (die „Richtschnur“) kommt aus dem religiösen Bereich; es bezeichnet die Auswahl der Schriften, die als verbindlich angesehen wird. („Der „Kanon des Neues Testaments“).

Sie merken: Dieser Begriff ist schwammig – und wenn man ganz genau hinsieht, zerläuft er einem unter den Fingern.



Die **kanonische Basis** des \mathbf{R}^3 ist $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Diese Bezeichnung ist sinnvoll, da diese Basis besonders leicht zu finden ist und daher unter allen Basen des Vektorraums \mathbf{R}^3 ausgezeichnet ist – und diese darf dann auch den Künstlernamen ‚kanonisch‘ tragen (manchmal wird sie auch ‚Standardbasis‘ genannt).

Achtung: Ein allgemeiner Vektorraum V hat keine ‚kanonische Basis‘, denn alle seine Basen sind gleich gut (oder gleich schlecht) zu finden!



Die Abbildung φ eines Vektorraums V auf einen Faktorraum V/U , die durch

$$\varphi(v) := v + U$$

definiert ist, heißt die **kanonische Abbildung** von V nach U .

Hier kommt der Name ‚kanonisch‘ daher, dass die Abbildung φ unter allen Homomorphismen von V auf V/U sich am ehesten von selbst anbietet; sie kann als einzige ‚ohne weiteres‘ definiert werden.

Aus der Zeit, da alles und jedes durch Abbildungen beschrieben wurde, stammt folgende Bezeichnung:



Für Mengen X und Y mit $X \subseteq Y$ nennt man die Abbildung ι von X nach Y , die durch

$$\iota(x) := x \quad \text{für } x \in X$$

definiert ist, die **kanonische Injektion** von X nach Y .

Hier wird meiner Meinung nach ein klarer Sachverhalt, nämlich $X \subseteq Y$ durch die Einführung der nichtssagenden Abbildung ι völlig undurchsichtig.

Meine Meinung: *Kanonisch* ist ein Wort, das fast keine Bedeutung hat. Verwenden Sie es für die kanonische Basis des Vektorraums K^n und sonst nicht!

Ich konzedere gerne, dass es Gebiete der Mathematik und Informatik gibt, in denen der Begriff ‚kanonisch‘ eine präzise benennbare Bedeutung hat. Dann kann man dieses Wort selbstverständlich ohne Gefahr benutzen.

Ähnlich wie ‚kanonisch‘ wird manchmal auch das Wort ‚natürlich‘ gebraucht. Hier müssen Sie natürlich die entsprechenden Vorsichtsmaßnahmen ergreifen.

Übung

- 1 Wie würden sie die „kanonische Einbettung“ des \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^3 beschreiben?

O. B. d. A.

Diese ominöse Abkürzung bedeutet *ohne Beschränkung der Allgemeinheit*. Korrekt gebraucht kann sie zu Beginn eines Beweises oder eines Beweisteils eingesetzt werden. Der Autor gibt dadurch dem Leser zwei Dinge zu erkennen: Zum einen, dass er vorhat, nur einen Teil der Aussage wirklich zu beweisen, zum anderen aber auch, dass die Gesamtaussage seiner Meinung nach einfach aus dem tatsächlich Bewiesenen folgt. Hinter einem o.B.d.A. verbirgt sich also ein mathematischer Satz („aus A (dem tatsächlich Bewiesenen) folgt B (das Behauptete)“). O.B.d.A. bedeutet dann nur, dass diese Implikation nach Ansicht des Autors einfach, vielleicht sogar trivial zu beweisen ist. (Der Autor muss aber im Zweifelsfall in der Lage sein, auch dafür einen Beweis zu erbringen!)

Beachten Sie: Mit der Verwendung des Kürzels o.B.d.A. nimmt der Autor einen Vertrauensvorschuss des Lesers in Anspruch. Verspielen Sie dieses Vertrauen nicht!

O.B.d.A. wird in den folgenden Weisen richtig gebraucht:

1. Durch o.B.d.A. wird die Bezeichnung vereinfacht.



Satz. *Unter je sechs Personen gibt es mindestens drei, die sich paarweise kennen oder mindestens drei, die sich paarweise nicht kennen.*

Beweis. Seien die Personen **o.B.d.A.** mit 1,..., 6 bezeichnet. Betrachte die Person 1; diese hat unter den fünf anderen entweder mindestens drei Bekannte oder mindestens drei Personen, die sie nicht kennen. Wir können **o.B.d.A.** annehmen, dass 1 drei Personen kennt. Seien diese **o.B.d.A.** 2, 3, 4...

2. Durch o.B.d.A. wird ein trivialer Sonderfall ausgeschlossen.



Satz. *Für je zwei positive reelle Zahlen a und b gilt*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Beweis. Sei **o.B.d.A.** $a \neq b$...

3. Durch o.B.d.A. wird angezeigt, dass nur ein (scheinbar!) sehr enger Sonderfall bewiesen wird, aus dem allerdings alles folgt.

Oft spart man sich dadurch eine unübersichtliche Bezeichnung vieler Variablen, die den Beweis nur weniger klar machen.



Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über dem Körper K , o.B.d.A. sei $V = K^n$.



Behauptung: Es gibt genau $n!$ bijektive Abbildungen einer n -elementigen Menge A in eine n -elementige Menge B .

Beweis. Sei o.B.d.A. $A = B$. Dann ist die gesuchte Anzahl gleich der Anzahl der Permutationen von A , also gleich $n!$.

Übungen

- 1 Rufen Sie sich mindestens zwei Beweise der Linearen Algebra in Erinnerung, in denen man den dort betrachteten Vektorraum V o.B.d.A. durch K^n ersetzen darf. Kennen sie einen Satz oder einen Beweis, in dem man das nicht darf?
- 2 Rufen Sie sich mindestens zwei Beweise der Analysis in Erinnerung, in denen man das dort betrachtete Intervall (a, b) bzw. $[a, b]$ o.B.d.A. durch das offene bzw. abgeschlossene Einheitsintervall ersetzen darf. Kennen sie einen Satz oder einen Beweis, in dem man das nicht darf?
- 3 **Richtig oder falsch?**
 - ☐ Sei n eine natürliche Zahl, o.B.d.A. $n = 17$.
 - ☐ O.B.d.A. ist jede natürliche Zahl ein Produkt von Primzahlen.
 - ☐ **Behauptung:** Sei K ein Kreis der euklidischen Ebene. Dann liegt jeder äußere Punkt von K auf genau zwei Tangenten von K .
Beweis. O.B.d.A. sei K der Einheitskreis.
 - ☐ Wir färben die Ecken eines Würfels mit zwei Farben; seien diese Farben o.B.d.A. die Zahlen 0 und 1.
- 4 Beweisen Sie den im Text unter 1. erwähnten Satz zu Ende.
- 5 Warum ist das o.B.d.A. im Abschnitt 2 des Textes richtig verwendet?

Ich, wir, man

Darf man „man“ benutzen? Oder sollten wir besser „wir“ verwenden? Ich meine: das kommt darauf an!

Die Grundregeln sind die folgenden.

1. „Man“ ist zwar nicht schön, aber auch nicht falsch.



Man bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen a und b mit $\text{ggT}(a, b)$.

2. Keine Angst vor „wir“! „Wir“ kann immer dann benutzt werden, wenn statt dessen auch ‚der Autor und der Leser‘ stehen kann.

„Wir“ ist also kein pluralis maiestatis (kein ‚Angeberplural‘), sondern eine Einladung an den Leser, sich an der mathematischen Diskussion zu beteiligen und mitzudenken. Einige typische Beispiele:



Wir betrachten die Menge...



Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre irrational.



Damit sehen wir...

Aber Vorsicht! Der Satz



Wir glauben, dass das vorliegende Buch das beste der Welt ist.

ist falsch, da der Autor hier seine Meinung dem Leser unterjubeln will.

3. „Ich“ wird nur dann verwendet, wenn der Autor eine persönliche Botschaft zu Papier bringt.



Ich danke meiner Frau für das Korrekturlesen.



Ich persönlich bin der Ansicht, dass die vollständige Induktion das wichtigste Beweisprinzip der Mathematik ist.

4. Vorsicht mit „wir wollen“! In der Regel will der *Autor*; ob auch der *Leser* will, muss der Autor dem Leser überlassen.



Wir wollen uns nun dem technisch komplizierten und mathematisch unergiebigem Teil des Beweises zuwenden.

5. Schließlich kann man den Leser auch direkt anreden. (Beispiel: „Lesen Sie das Buch XYZ!“); dies kommt üblicherweise in mathematischen Texten nicht oft vor. In diesem Buch rede ich Sie ungewöhnlich häufig direkt an, aber dies ist ja auch ein ungewöhnliches Buch!

6. Wenn Sie mit Haupt- und Nebensätzen arbeiten, achten Sie darauf, dass die Subjekte zueinander passen. Schlecht ist zum Beispiel



Wenn wir die Zahl n faktorisieren, sieht man, dass...

Ich empfehle Ihnen folgendes:

- Gehen Sie mit ‚ich‘ äußerst vorsichtig um.
- Verwenden Sie, wenn immer möglich, ‚wir‘.
- Wenn es nicht anders geht, benutzen Sie ‚man‘.

Übung

Richtig oder falsch? Gut oder verbesserbar?

- ☐ Man betrachte das Produkt der ersten n Primzahlen.
- ☐ Durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes erhalte ich...
- ☐ Wir glauben, dass die Mengenlehre entbehrlich ist.
- ☐ Ich kann $(a+b)^2$ schreiben als $a^2+2ab+b^2$.
- ☐ Wir danken meiner Frau für das Tippen dieses Buches.
- ☐ Wir haben eine Reihe definiert, auf die ich das Quotientenkriterium anwenden kann.
- ☐ Wir wollen dem Leser zunächst eine intuitive Vorstellung vermitteln.
- ☐ Wir weisen den Leser darauf hin, dass...
- ☐ Wenn Sie das Lemma von Zorn anwenden, erhalten wir folgenden Satz:
- ☐ Im Gegensatz zu den meisten meiner Kollegen empfehle ich Ihnen...
- ☐ Wir wissen nicht, ob...

- ☐ *Ich bin der Überzeugung, dass die Riemannsche Zetafunktion die wichtigste Funktion überhaupt ist.*
- ☐ *Es ist uns nicht gelungen zu klären, ob...*
- ☐ *Indem wir die Ableitung von ζ betrachten, sieht man...*
- ☐ *In der Einführung in die Stochastik wollen wir vor allem Maßtheorie behandeln.*

Mein, unser

Für die Verwendung der Possessivpronomen *mein* und *unser* gilt Ähnliches wie für die Verwendung von *ich* und *wir*.

Verwenden Sie ‚mein‘ nur dort, wo es sich wirklich um Ihre Sache handelt!

Sie können sagen



Meiner Meinung nach sind Faktorräume unnötig,

denn hier äußern Sie eine subjektive Meinung.

Ich rate Ihnen aber davon ab, von *meiner reellen Zahl*, *meinem Element*, *meiner Teilmenge*,... zu sprechen, wenn Sie auf ein zuvor eingeführtes Objekt verweisen wollen. Denken Sie daran, dass solche Formulierungen manchmal auch ungewollte Effekte haben können: *Betrachten wir ein Element meines Unterkörpers...*

Die Verwendung von ‚unser‘ ist weniger gefährlich, aber ich rate Ihnen, auch mit diesem Wort vorsichtig umzugehen (viel vorsichtiger als mit dem Wort ‚wir‘!). Man kann ‚unser‘ dazu verwenden, um Bezeichnungen zu sparen; siehe dazu den Abschnitt „Keine unnötigen Bezeichnungen!“.

Übung

Richtig oder falsch?

- ☐ *Sei P ein Punkt meines \mathbf{R}^3 .*
- ☐ *Unser Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt...*
- ☐ *Meine Einführung des Integralbegriffs unterscheidet sich wesentlich von der meines Kollegen.*
- ☐ *Nach meiner Vermutung gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge.*

Abbildung, Funktion, Operator

Der Abbildungsbegriff ist zentral in der Mathematik; er wurde aber erst vergleichsweise spät formal definiert. Dementsprechend gibt es viele Wörter, die in speziellen Situationen für Abbildung verwendet werden. Mit anderen Worten: Man muss sich an den Sprachgebrauch halten, der in dem Gebiet herrscht, in dem man gerade arbeitet.

Abbildung ist der in unserem Zusammenhang allgemeinste Begriff: Eine **Abbildung** ist eine Vorschrift f , die jedem Element des Definitionsbereichs (Urbildmenge) X genau ein Element des Bildbereichs Y zuordnet; man schreibt dafür $f: X \rightarrow Y$. Das Bild eines Elementes $x \in X$ wird in der Regel (in der Analysis stets) mit $f(x)$ bezeichnet; mitunter (vor allem in der Algebra) verwendet man auch die Schreibweise x^f ; dies hat Vorteile, ist aber für den Anfänger ungewohnt.

Was ist eine **Funktion**? Hierfür gibt es meiner Beobachtung nach zwei Antworten.

Erste Antwort: ‚Abbildung‘ und ‚Funktion‘ sind synonym; sie bedeuten exakt das Gleiche.

Zweite Antwort: Eine Funktion ist eine Abbildung einer beliebigen Menge in einen Körper. Man spricht von reellwertigen Funktionen und komplexwertigen Funktionen; dies sind Abbildungen, die irgendwelchen Objekten reelle oder komplexe Zahlen zuordnen. In diesem Sinne ist eine Funktion eine Abbildung, mit deren Bildern man rechnen (addieren und multiplizieren) kann. Eine entsprechende Erklärung ist etwa im *Vieweg Mathematik Lexikon* zu finden.

Ich habe mir angewöhnt, den Begriff ‚Funktion‘ im letzteren Sinne zu gebrauchen.

Eine **Transformation** ist eine Abbildung einer Menge in sich. Zum Beispiel spricht man davon, dass Drehungen, Verschiebungen usw. geometrische Transformationen sind. Eine Transformation einer endlichen Menge, die bijektiv ist, nennt man eine **Permutation**.

Nun kommen noch zwei schwierigere Begriffe.

Auch ein **Operator** ist eine Abbildung, hierüber gibt es keine Meinungsverschiedenheiten. Häufig wird das Wort „Operator“ für eine Abbildung verwendet, bei der Urbild- und Bildbereich aus Abbildungen besteht. Klar? Ein Beispiel:



Die Abbildung, die jeder (differenzierbaren) Funktion f ihre Ableitung f' zuordnet, heißt **Ableitungsoperator**.

In manchen Gebieten, wie etwa in der Funktionalanalysis, wird das Wort ‚Operator‘ sehr großzügig eingesetzt; dort wird das Wort ‚Operator‘ für fast jede vorkommende Abbildung gebraucht.

Von einer **Form** spricht man schließlich bei Abbildungen, die einen oder mehrere Vektoren auf ein Körperelement abbilden. Ist V ein K -Vektorraum, so ist zum Beispiel eine **Linearform** eine Abbildung von V in K , die eine lineare Abbildung ist. Eine **quadratische Form** und eine **hermitesche Form** sind ebenfalls eine Abbildung von V in K mit gewissen Eigenschaften. **Bilinearformen**, **Semibilinearformen**, **Sesquilinearformen** usw. sind Abbildung von $V \times V$ in K mit gewissen Linearitätseigenschaften; bei diesen wird also jeweils einem Paar von Vektoren ein Körperelement zugeordnet.

Noch zwei wichtige *Bemerkungen*.

1. Unterscheiden Sie zwischen f und $f(x)$! Wenn f eine Abbildung von X nach Y ist, so heißt die Abbildung, wie gesagt, f – und nicht $f(x)$; $f(x)$ bezeichnet vielmehr das Bild des Elements x unter der Abbildung f . Auch wenn es viele berühmte Vorbilder gibt – es ist schlecht zu schreiben



Die Abbildung $f(x)$...

oder



Das Polynom $f(t)$...

Gut ist dagegen



Sei f die durch $f(x) := x+1$ ($x \in \mathbb{N}$) definierte Abbildung.

oder



Das Polynom f hat die Nullstelle 2, da $f(2) = 0$ ist.

2. Noch liest man in vielen älteren Büchern



... es folgt $f(x) = 0$ für alle x ; also ist $f(x)$ **identisch Null**.

oder



... es folgt $f(x) = 0$ für alle x ; also ist $f(x) \equiv 0$.

Das heißt in moderner Sprache:



... es folgt $f(x) = 0$ für alle x ; also ist f die **Nullabbildung**.

Man kann dafür auch kürzer schreiben



... es folgt $f(x) = 0$ für alle x ; also ist $f = 0$.

Das Zeichen \equiv sollte nur für die Kongruenzrelation in der Zahlentheorie bzw. in der Geometrie verwendet werden. Siehe den Abschnitt ‚modulo‘ in „Wörter, die man wissen muss“.

Bei Polynomen muss man übrigens genau zwischen dem *Polynom* und der zugehörigen *Polynomfunktion* unterscheiden. Ein Polynom ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei die a_i aus einem Körper K kommen. Die zugehörige **Polynomfunktion** ist die Abbildung, die jedem Körperelement k das Element

$$f(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$$

zuordnet.

Es ist durchaus möglich, dass eine Polynomfunktion die Nullabbildung ist, ohne dass das Polynom das Nullpolynom ist. Dies passiert zum Beispiel über endlichen Körpern. Zum Beispiel hat das Polynom $f = x^2 - x$ jedes Element des Körpers $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ als Nullstelle; die Polynomfunktion ist also die Nullabbildung von \mathbb{Z}_2 , obwohl das Polynom nicht das Nullpolynom ist.

Übungen

- 1 Sind die „Funktionen“ Ihres Taschenrechners Funktionen im mathematischen Sinne?
- 2 **Gut oder weniger gut?**
 - ☐ Der Ableitungsoperator ist die Funktion $f(x)$.
 - ☐ Wenn ein Polynom über \mathbf{R} vom Grad n mehr als n Nullstellen hat, ist es identisch Null.
 - ☐ Eine Funktion ist eine Abbildung, bei der jedes Urbild genau ein Bild hat.
 - ☐ Eine Funktion ist eine Abbildung, bei der jedes Bild genau ein Urbild hat.
- 3 Gibt es zwei verschiedene Polynome $f_1, f_2 \in K[x]$, die dieselbe Polynomfunktion haben?

Konjunktiv

In der Mathematik und in Kochbüchern finden wir eines der letzten natürlichen Lebensgebiete des Konjunktivs. Er kommt in der Mathematik hauptsächlich in zwei Erscheinungsformen vor.

In der einen Form dient er dazu, etwas zu erschaffen, was vorher nicht da war. Schon am Anfang der Bibel findet man die Formulierung „Es werde Licht!“ (und es ward Licht). Entsprechend kann der Mathematiker sagen: „Sei f eine im Einheitsintervall monoton wachsende stetige Funktion“ (und f ist eine solche Funktion!).

Dieser Konjunktiv wird naturgemäß vor allem am Anfang von Sätzen und Beweisen verwendet, wo sich der Mathematiker seine Welt so schafft, wie er sie haben möchte. Diese Verwendungsform des Konjunktivs scheint etwas Göttliches an sich zu haben.

Dies ist für die zweite Form des Konjunktivs zu verneinen; diese ist im Reich des Widerspruchs beheimatet. Es ist der Irrealis, der in Widerspruchsbeweisen sein Wesen treibt.



Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann gäbe es zwei teilerfremde natürliche Zahlen p und q mit

$$\sqrt{2} = p/q.$$

Quadriert man diese Gleichung, so erhielte man

$$2 \cdot q^2 = p^2.$$

Daraus ergäbe sich, dass p^2 und damit (nach dem Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung) auch p gerade sein müsste. Also wäre die rechte Seite durch 4 teilbar. Dann müsste aber auch die linke Seite ein Vielfaches von 4 sein, und somit wäre q^2 und damit q gerade. Also wären sowohl p als auch q gerade im Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q .

Jede solche Konjunktivkette schließt mit einem Widerspruch ab. In langen, verschachtelten Widerspruchsbeweisen ist es sinnvoll, jeweils nur am Anfang (nach dem „angenommen“) konjunktivisch zu formulieren und danach im Indikativ weiterzuschreiben.

Aus mir unbekannten Gründen hat es sich eingebürgert, Lösungen von Übungsaufgaben wie folgt zu formulieren:



Wähle eine Basis von V und beachte...; vergleiche dazu...

Mir ist nicht klar, ob dies eine Abkürzung für „Man wähle eine Basis...“ ist, oder ob es sich um einen Imperativ handelt.

Aber die Formulierung gefällt mir in keinem der beiden Fälle: Wenn es eine Abkürzung sein soll, so empfehle ich, die vollständige Formulierung zu gebrauchen. Ein Imperativ gefällt mir noch weniger, denn meiner Meinung nach soll man den Leser nicht mit „Du“ ansprechen. Wenn Sie aber den Imperativ einsetzen, müssen Sie den richtigen Imperativ verwenden, also „Nimm“ und „Gib“ – und nicht... (hm, hm) !

Übungen

- 1 Formulieren Sie den folgenden Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, sorgfältig mit Hilfe von konjunktivischen Formen. [Beachten Sie, dass dabei nicht jedes Verb in den Konjunktiv gesetzt wird!]

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen. Seien diese $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n$.

Dann ist $m := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist (denn es ist $p_1 = 2$). Also ist m durch eine Primzahl p teilbar.

Nach Annahme muss p eine der Primzahlen p_i sein. Also teilt p_i die Zahl $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Daraus folgt, dass p_i auch ein Teiler der Zahl 1 ist.

Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

2 Richtig oder falsch?

- ☐ *Wäre V endlichdimensional, so sei B eine endliche Basis.*
- ☐ *Sei V endlichdimensional. Dann hat...*
- ☐ *V ist ein Vektorraum. Also hat V ...*
- ☐ *Angenommen, $\sqrt{2}$ sei rational...*
- ☐ *Die Funktion f möge Lipschitz-stetig sein...*
- ☐ *Wir nehmen an, die Menge aller Primzahlen möge endlich sein.*
- ☐ *Es wäre f eine differenzierbare Funktion. Dann ist f stetig.*

- 3 Lesen Sie Max FRISCHS *Mein Name sei Gantenbein* und achten Sie dabei auf die virtuose Verwendung des Konjunktivs. Beobachten Sie insbesondere, wie dort Dinge und Vorgänge, die es in Wirklichkeit(?) gar nicht gibt, durch die Zauberformel „ich stelle mir vor“ ins Leben gerufen werden.

Wörter, die man wissen muss

1. Singular und Plural

Manchmal ist der Plural eines Wortes ungewohnt:

- das **Lemma** – die **Lemmata**

Von einigen Autoren wird auch „Lemmas“ für richtig befunden – obwohl es in Wirklichkeit natürlich falsch ist; wieder andere empfinden den Ausdruck ‚Lemmata‘ als aggressiv bildungsbürgerlich und hochnäsiger.

- die **Matrix** – die **Matrizen** (die „Matrize“ ist etwas anderes);
- das **Maximum (Minimum, Extremum)** – die **Maxima (Minima, Extrema)**,
- eine **Basis** – viele **Basen**,
- das **Residuum** – die **Residuen**.

Manchmal ist aber auch der Singular schwierig:

- Die **Indizes** – aber der **Index**. Der ‚Indize‘ ist eine Buchstabenkombination, die zwar unter Studenten populär, aber kein deutsches Wort ist!

Ebenso wird der Plural von ‚Simplex‘ gebildet:

- Das **Simplex** – die **Simplizes**.

Der Duden behauptet allerdings – im Gegensatz zu dem (altmodischen ?) mathematischen Sprachgebrauch – ‚Simplexe‘ sei der richtige Plural.

2. Voraussetzung und Annahme

Ein Satz hat Voraussetzungen, eine Annahme führt zu einem Widerspruch. Ein Satz ist im Allgemeinen falsch, wenn man seine Voraussetzung weglässt; eine Annahme ist selbst falsch; dies zeigt sich daran, dass sie einen Widerspruch hervorruft. Erinnern Sie sich an die klassische Form eines mathematischen Satzes aus der Schule: Voraussetzung - Behauptung - Beweis.



*Beim Beweis des Satzes, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, macht man die **Annahme**, dass $\sqrt{2}$ rational wäre.*



*Die **Voraussetzung** des Satzes von Pythagoras ist, dass das betrachtete Dreieck rechtwinklig ist.*

3. modulo

Ausdrücke mit dem Wortstamm ‚modul‘ begegnen einem häufig in der Mathematik. Die traditionelle Stelle ist die Zahlentheorie: Wenn man nicht in \mathbb{Z} rechnet, sondern nur im Bereich der ganzen Zahlen zwischen 0 und $n-1$ (oder, gleichwertig, im Bereich der Zahlen von 1 bis n), so rechnet man ‚modulo n ‘. Das bedeutet, dass man sich bei Addition und Multiplikation von Zahlen nur für den Rest interessiert, der bei ganzzahliger Division durch n bleibt. Man nennt diese Art des Rechnens auch **modulare Arithmetik**.

Auf Carl Friedrich Gauß geht die Schreibweise \equiv zurück: Wenn zwei Zahlen a und b bei Division durch n den gleichen Rest ergeben, schreibt man dafür

$$a \equiv b \pmod{n}$$

(gesprochen „a ist kongruent b modulo n “). Zum Beispiel ist

$$17 \equiv 3 \pmod{7}.$$

Man nennt die Zahl n den **Modul**. Früher hieß dies (auf Lateinisch) der **modulus**; daher kommt der traditionelle Plural die **Moduli**; heute kann man aber auch **Moduln** sagen.

Achtung: Das Wort ‚modulo‘ ist kein Substantiv; Sie sollten niemals



Der Modulo

oder



Das Modulo

verwenden. Richtig ist dagegen die Sprechweise



Wir rechnen modulo 2.

In der Algebra kommt der Begriff ‚Modul‘ ebenfalls vor; damit bezeichnet man eine Verallgemeinerung von Vektorräumen, bei denen die Rolle des Körpers von einem Ring R übernommen wird. Man spricht dann von einem **R-Modul** und von mehreren **R-Moduln**.

Übrigens: Im mathematischen Sprachgebrauch wird das Wort Modul und die daraus abgeleiteten Wörter stets auf der ersten Silbe betont; ein Modul (Plural: Module) ist etwas ganz anderes (siehe Übungsaufgabe 2)

4. ‚Und‘ und ‚oder‘

Mit dem Wort *und* werden zwei Aussagen verbunden; die daraus entstehende Gesamtaussage ist genau dann wahr, wenn die Einzelaussagen wahr sind.

Mit *oder* verbindet man zwei Aussagen zu einer Gesamtaussage, die wahr ist, wenn mindestens eine der Einzelaussagen wahr ist.

Schreiben Sie niemals



Sei f ein Polynom **und** / **oder** eine trigonometrische Funktion.

denn, wenn der Ausdruck „und / oder“ überhaupt etwas bedeutet, so bedeutet er *oder*! Es genügt also völlig zu schreiben



Sei f ein Polynom **oder** eine trigonometrische Funktion.

5. Vermeiden Sie unnötige Anglizismen!

„Theorem“ stammt zwar von dem griechischen Wort *theorema* ab; es ist aber heute ein englisches Wort, das in der Regel im Deutschen **Satz** heißt. (Vergleichen Sie den Abschnitt „Satz, Lemma, Korollar“.) Übrigens: „Corollary“ heißt auf Deutsch **Korollar** und nicht „Corollar“.

Auch ‚line‘ ist ein englisches Wort, das auf deutsch nicht ‚Linie‘, sondern **Gerade** heißt; ‚row‘ heißt **Zeile** und nicht ‚Reihe‘. Ganz falsch ist es, ‚edge‘ mit *Ecke* zu übersetzen; ‚edge‘ heißt **Kante**, ‚residue‘ heißt **Rest**, ‚strong‘ heißt **stark** und nicht etwa ‚streng‘.

Wenn Sie einen englischen Text ins Deutsche übertragen (etwa bei einem Seminarvortrag), so gleichen Sie die Bezeichnungen an: An der Übersetzung von „a set S “ zu „eine Menge S “ ist zwar mathematisch nichts auszusetzen, besser wäre in der Regel aber, wenn Sie schrieben **eine Menge M** . Ebenso sollte aus „a line l “ die Formulierung **eine Gerade g** werden. Aber Achtung: Ein Wechsel der Bezeichnungen führt leicht zur Verwirrung!

Noch ein Tipp: Engländer verwenden häufig Bindestriche, um Wortteile voneinander zu unterscheiden (zum Beispiel: non-trivial, anti-symmetric, pseudo-random,...). Im Deutschen gibt es diese Verwendung des Bindestrichs nicht; es heißt nichttrivial, antisymmetrisch, pseudozufällig,...

6. ‚Nichtnegativ‘ und ‚nicht negativ‘

Die Sätze

- ... *Dann ist a eine nichtnegative ganze Zahl*
- und
- ... *Dann ist a nicht eine negative ganze Zahl*

unterscheiden sich wie folgt: Im ersten Fall ist a eine ganze Zahl, die nichtnegativ ist; im zweiten ist a etwas, was keine nichtnegative ganze Zahl ist. Beispielsweise ist $a = \frac{1}{2}$ im zweiten Fall erlaubt, im ersten aber nicht.

7. n-Tupel

Ein 2-Tupel heißt **Paar**, und ein 3-Tupel wird **Tripel** genannt. Auch für n -Tupel mit $n \geq 4$ sind zum Teil Langformen bekannt: **Quadrupel**, **Quintupel**,... Diese Bezeichnungen scheinen aber aus der deutschen Sprache zu verschwinden; Sie haben also meine Absolution, wenn Sie „5-Tupel“ schreiben.

Die Buchstabenfolge *Tupel* ist (noch?) kein Wort der deutschen Sprache; man sollte also nicht schreiben



Das Tupel (a_1, \dots, a_n) ,

sondern muss schreiben



Das n-Tupel (a_1, \dots, a_n)

oder



Die Liste (a_1, \dots, a_n)

oder ganz neutral



Die endliche Folge (a_1, \dots, a_n) .

Übrigens ist es ein offenbar weit verbreiteter Aberglaube, eine Folge habe immer unendlich viele Glieder. Nein: Es gibt Folgen jeder endlichen Länge.

Wenn man ganz kritisch ist, wird man sogar sagen müssen, dass ‚-tupel‘ nicht einmal ein Wort, sondern nur eine *Wortendung* ist. Macht man sich diesen Standpunkt zu eigen, so muss man ‚n-tupel‘ schreiben. (Man vergleiche dies mit dem Ausdruck ‚n-tel‘; glücklicherweise ist noch niemand auf die Idee gekommen, dafür ‚n-Tel‘ zu schreiben.)

Es ist allerdings so, dass es sich über den Umweg der Informatik (tja) einzu-bürgern scheint, *Tupel* als Wort zu verwenden. In jedem Fall heißt der Plural von ‚Tupel‘ ebenfalls **Tupel** und nicht ‚Tupels‘.

8. Abbildungen ‚in‘ und ‚auf‘

Ist f eine Abbildung, die jedes Element einer Menge X in ein Element einer Menge Y transformiert, so kann man stets sagen, „ f ist eine Abbildung von X

in Y “. Wenn f surjektiv ist (d.h. wenn jedes Element von Y als Bild auftritt), so kann man auch sagen, „ f ist eine Abbildung von X **auf** Y “. Es ist also richtig zu sagen:



Die durch $f(n) := 2n$ definierte Abbildung f ist eine Abbildung von \mathbb{N} in \mathbb{N} .



Die durch $f(n) := 2n$ definierte Abbildung f ist eine Abbildung von \mathbb{N} **auf** die Menge der geraden natürlichen Zahlen.

Falsch wäre aber, zu formulieren



Die durch $f(n) := 2n$ definierte Abbildung f ist eine Abbildung von \mathbb{N} **auf** \mathbb{N} .

Gebrauchen Sie bitte nicht die scheußliche Formulierung



Die durch $f(x) := x^3$ definierte Abbildung von \mathbb{R} in sich ist **auf**.

9. Genetiv

Mathematiker legen mitunter Wert auf sehr präzise Formulierungen und nehmen dabei keine Rücksicht auf mangelnde Schönheit. Insbesondere gebrauchen sie häufig den Genetiv. Sie sagen:

- Die Summe der Quadrate der Katheten ist gleich...
- Die Ellipse ist die Menge der Punkte, bei denen die Summe der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.
- Der Absolutbetrag der Differenz der Folgenglieder...

Stören Sie sich nicht daran! Es geht nicht um Formulierungen, die leicht von den Lippen gehen, sondern darum, etwas genau auszudrücken. Und wenn es mit Worten zu kompliziert wird, hilft oft die formale Sprache.

10. Menge, Familie, Klasse

Diese Wörter sollten nicht synonym gebraucht werden. Eine Familie ist eine Folge von Objekten, wobei als Indexmenge oft nicht die Menge der natürlichen Zahlen gewählt wird. Zum Beispiel darf eine Indexmenge überabzählbar sein. In den Anfängerveranstaltungen wird Ihnen das Wort „Familie“ – wenn es richtig gebraucht wird – auch hauptsächlich in solchen Fällen begegnen:



Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen U_i linear unabhängiger Vektoren mit $U_i \subseteq U_{i+1}$.

Das Wort **Klasse** hat eine spezielle Bedeutung in der modernen Mengenlehre. Dort hat man erkannt, dass man nicht ohne Gefahr beliebige Objekte zu Mengen zusammenfassen darf, ohne sich in Widersprüche zu verwickeln; beispielsweise darf man nicht die „Menge aller Mengen“ bilden. In solchen Situationen hilft das Wort Klasse; man darf beispielsweise von der Klasse aller Mengen sprechen. Wenn man von der



Klasse aller Gruppen

spricht, meint man wirklich alle Gruppen! Man setzt dann nicht voraus, dass man von jeder Klasse(!) isomorpher Gruppen nur ein Exemplar betrachtet.

11. nun

Das Wort *nun* bedeutet genau das gleiche wie das Wort *jetzt*. Man darf dieses Wort also nur dann verwenden, wenn als Folge einer zeitlichen Entwicklung – nun – ein neues Ereignis eintritt.

Vermeiden Sie den (häufigen) Missbrauch des Wortes ‚nun‘! Dieses Wort hat keine Überleitungsfunktion!

Es ist falsch, nach einer längeren Passage, in der von etwas anderem die Rede war, weiterzumachen mit der Formulierung



Nun ist \mathbf{R} eine additive Gruppe.

Das ist nämlich keine Neuigkeit, sondern war schon immer so. Richtig ist dagegen folgende Formulierung:



Nun wissen wir, dass die Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

Denn unser Wissen über diese (seit Ewigkeiten gültige) Tatsache kann in der Tat neu sein.

Übungen

- 1 Was ist ein Indiz?
- 2 Was ist ein Modul?
- 3 Informieren Sie sich in einem Lexikon, was eine Matrize ist.
- 4 Kennen Sie einen Vektorraum, der genau eine Basis hat? Und einen, der genau zwei Basen hat?
- 5 **Richtig oder falsch? Wie heißt es richtig?**
 - ☐ 31 ist kongruent 1 modulo 5.
 - ☐ 144 ist kongruent 0 modular 2.
 - ☐ Im binären Zahlensystem ist der Modulo 2.
 - ☐ Wenn man modulo 2 rechnet, ist $1 + 1 = 0$.
- 6 **Richtig oder falsch? Gut oder verbesserbar?**
 - ☐ Sei nun M eine quadratische und/oder rechteckige Matrix.
 - ☐ Wir beschreiben nun...
 - ☐ Nun ist jede Primzahl p mit $p > 2$ ungerade.
 - ☐ Nun ist freilich nicht jede stetige Funktion differenzierbar.
 - ☐ Es gibt eine Abbildung von \mathbf{N} auf \mathbf{Q} .
 - ☐ Es gibt eine Abbildung von \mathbf{N} in \mathbf{R} .
 - ☐ Es gibt eine Abbildung von \mathbf{N} auf \mathbf{R} .
 - ☐ Sei K die Klasse aller Körper.
 - ☐ Sei M die Menge aller Körper.
- 7 Wie heißen folgende Wörter auf deutsch?
Continuous, co-ordinate, coset, edge, field, generate, image, map, non-singular, pre-image, sequence, series, set, space, span, subspace, vertex.
- 8 Die folgenden Ausdrücke wurden falsch aus dem Englischen übersetzt. Wie lautet die richtige Übersetzung?
Eine kontinuierliche Funktion, ein begrenztes Feld, eine unendliche Serie; streng konvex, lass P ein Punkt sein.
- 9 Stellen Sie die Beispiele aus Abschnitt 9 (Genetiv) jeweils durch einen formalen Term dar.

Lesen

Es ist eine ausgesprochene Kunst, einen mathematischen Text zu lesen. Ich stelle Ihnen einige Regeln vor, die es Ihnen ermöglichen sollen, mathematische Texte besser aufzunehmen. Die Hauptregel lautet:

Lesen Sie langsam!

Lesen Sie Satz für Satz, Wort für Wort.

Es dauert lange, einen mathematischen Text zu verstehen.

Nehmen Sie sich Zeit. Die Lektüre einer durchschnittlichen Seite eines durchschnittlichen Lehrbuches wird nicht in Sekunden oder Minuten, sondern in Stunden gemessen!

Überlegen Sie bei jedem Satz:

Sagt dieser Satz – im Vergleich zum vorhergehenden – etwas Neues?
Was ist dieses Neue? Formulieren Sie das in anderen Worten!

Wie folgt dieser Satz logisch aus dem vorhergehenden? Fehlt dazu noch Information? Kann ich mir diese selbst beschaffen?

Fällt Ihnen ein Beispiel dazu ein? Fallen Ihnen zwei Beispiele ein?

Im Folgenden habe ich Ihnen einige Gedanken aufgeschrieben, die sich bei der Lektüre eines Stücks Mathematik (Definition einer Gruppe) einstellen können.

Lesen Sie auch diesen Text langsam. Achten Sie besonders darauf, wie wenig links steht (das ist der Text, den Sie typischerweise in einem Lehrbuch finden).

Definition.

Eine **Gruppe** ist ein Paar (G, \cdot) bestehend aus einer Menge G und einer **Verknüpfung** \cdot auf G , d. h. einer Abbildung
 $\cdot: G \times G \rightarrow G$
 $(g, h) \rightarrow g \cdot h,$

Aha, eine Gruppe besteht also aus zwei verschiedenen Objekten, einer Menge von Elementen und einer Verknüpfung dieser Elemente.

Was war doch gleich eine Verknüpfung? Ja, ganz einfach: je zwei Elementen aus G wird wieder ein Element aus G zugeordnet. Solche Verknüpfungen kenne ich gut: Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division von natürlichen, rationalen oder reellen Zahlen ist eine Verknüpfung; der Durchschnitt, die Vereinigung oder die symmetrische Differenz von Mengen sind weitere Beispiele.

die den folgenden Gesetzen genügt (man nennt sie **Gruppenaxiome**):

(G1) $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$
für alle $g, h, k \in G$ (**Assoziativgesetz**).

(G2) Es gibt ein Element $e \in G$ (**neutrales Element** von G) mit folgenden Eigenschaften:

(G2a) $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.

(G2b) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein $g' \in G$

Nun soll die Verknüpfung offenbar nicht eine beliebige Verknüpfung sein, sondern noch zwei Eigenschaften erfüllen, die man Gruppenaxiome nennt.

(G1) scheint einfach zu sein. Es heißt ja, dass ich beim Verknüpfen von drei Elementen die Klammern beliebig setzen darf: Es kommt das gleiche heraus, wenn ich zunächst die ersten beiden Elemente miteinander verknüpfe und dann das dritte damit verknüpfe oder wenn ich zuerst die letzten beiden miteinander verknüpfe und das Ergebnis dann mit dem ersten verknüpfe.

Moment mal, gibt es überhaupt Verknüpfungen, für die das nicht gilt? Mal ausprobieren, wie es mit meinen obigen Beispielen steht.

Nun zu (G2). Achtung, da kommen ja zwei Eigenschaften; also muss ich mir in Wirklichkeit drei Axiome merken. Naja, typisch mathematische Mogelpackung! (Es steckt mehr drin als man zunächst vermutet.)

Die erste Eigenschaft heißt, es gibt ein Element e in G – das bedeutet also, dass G mindestens ein Element enthalten muss; also kann G nicht die leere Menge sein. Hurra, ich habe einen Satz gefunden:

Satz (Fritzchen Müller 1991). *Es gibt keine Gruppe, die kein Element hat.*

Nun ja, dieses eine Element, das in G enthalten sein muss, soll nicht ein beliebiges Element sein, sondern es soll die spezielle Eigenschaft haben, dass es (von links) verknüpft mit jedem anderen Element wieder dieses andere Element ergibt. Dies soll also nicht nur für ein Element a gelten, sondern für alle Elemente von G , sonst ist das keine Gruppe.

Zu guter Letzt kommt (G2b). Für jedes g aus G soll es also ein spezielles Element g'

(**inverses Element** zu g)
mit $g' \cdot g = e$.

geben (die Bezeichnung soll wohl andeuten, dass g' irgendwie zu g gehört), das mit g verknüpft wieder das neutrale Element ergibt.

Uff, lesen wäre schon mal geschafft. Damit habe ich aber das Zeug überhaupt noch nicht verstanden. Als nächstes will ich ein Beispiel sehen, denn definieren kann man alles, zum Beispiel die berühmte eierlegende Wollmilchsau, ich will aber wissen, ob es solche Biester wirklich gibt.

Übungen

- 1 Schlagen Sie in mindestens zwei Algebra-Büchern die Definition einer Gruppe nach und vergleichen Sie diese mit der oben diskutierten Definition.
- 2 Lesen Sie die Definition einer Gruppe nochmals gründlich durch und fragen Sie sich, ob
 - ☐ e mit jedem Element von G vertauschbar ist,
 - ☐ die Elemente g und g' vertauschbar sind,
 - ☐ je zwei Elemente von G vertauschbar sein müssen,
 - ☐ ob e eindeutig ist (nur dann darf man von *dem* neutralen Element sprechen – siehe den Abschnitt „Der, die, das“),
 - ☐ ob g' durch g eindeutig bestimmt ist (nur dann darf man von *dem* zu g inversen Element sprechen).
- 3 Überlegen Sie, ob die Mengen \mathbf{Z} , \mathbf{Q} bzw. \mathbf{R} zusammen mit der Addition oder Multiplikation eine Gruppe bilden.
- 4 Dröseln Sie entsprechend der oben ausgeführten Definition einer Gruppe die Definition eines „Körpers“ auf.

Übungsaufgaben

Im Folgenden sind einige Übungsaufgaben mit Lösungen angegeben. Die Lösungen sind mathematisch (na ja) richtig, aber indiskutabel aufgeschrieben. Dabei habe ich mir nichts aus den Fingern gesogen, sondern alles tatsächlich „gelöst“ Übungsaufgaben entnommen.

Ihre Aufgabe besteht erstens darin, alle Unklarheiten und Ungeschicklichkeiten zu entdecken und zweitens, selbst eine gute Lösung zu produzieren.

-
- 1 Zeigen Sie: Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ergibt bei Division durch 4 den Rest 1.

n Quadrat $\Rightarrow n^2$

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = \text{Rest } 1$$

\uparrow
modulo 4

-
- 2 Zeigen Sie: Sei p eine Primzahl, und sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$p \mid n^2 \Leftrightarrow p \mid n.$$

Zu zeigen: $p \mid n^2 \Leftrightarrow \text{wenn } p \mid n$

Klar: notwendig ✓

Umgekehrt: Wenn $p \nmid n \Rightarrow$ auch $p \nmid n^2$
wg. Eindeutigkeit PFE.

- 3 Zeigen Sie: Eine 1001-elementige Menge hat genau so viele Teilmengen gerader Mächtigkeit wie Teilmengen ungerader Mächtigkeit.

Sei Y Teilmenge einer Menge mit $|Y| = y$ gerade

O.B.d.A. $|Y| = y = 2y'$, $y' \in \mathbb{N}$

Dann $\overset{\text{Komplement}}{\uparrow} C(Y)$ ungerade, weil $2n+1 - 2y'$
 $= 2(n-y') + 1$ unger

Umkehrung analog.

- 4 Zeigen Sie: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Stelle durch 2 teilbar ist.

$$\Rightarrow a_n 10^n + \dots + a_1 10^1 + a_0 \text{ gerade}$$

$$\Rightarrow a_0 \text{ gerade, da } 2 \mid 10$$

$$\Leftrightarrow 2 \mid 10 a_0 = 2 a_0'$$

$$\Rightarrow n = a_k 10^k + \dots + a_1 10 + a_0 \text{ gerade}$$

- 5 Zeigen Sie: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Zu zeigen: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad 2q^2 = p^2$$

$$p, q \text{ gerade} \Rightarrow \nexists \text{ Q.E.D.}$$

- 6 (a) Definieren Sie die Summe zweier binärer n-Tupel.
 (b) Was ist das „Negative“ eines binären n-Tupels?

$$(a) X = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) \quad a_{i_j} \in \{0, 1\}$$

$$y = (B_{n-1, n-1}, \dots, B_{1,1}, B_{0,0}) \quad \forall i, j$$

$$B_{k,k} \in \{0, 1\} \quad \forall k, k$$

$$X + y =: (\dots, a_{i_j} + B_{n-j, n-j}, \dots)$$

$$(b) -a_i$$

- 7 Sei f die durch

$$f: (1, 0) \rightarrow (3, 2)$$

$$f: (0, 1) \rightarrow (1, 0)$$

definierte lineare Abbildung von \mathbb{R}^2 in sich. Geben Sie (mit Begründung) eine Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $\{(1,1), (1,-1)\}$ an.

O.B.d.A. $B = (1,1), (1,-1)$ Basis.

$$f(1,1) = (4,2) = x \cdot (1,1) + y(1,-1)$$

$$f(1,-1) = (2,2) = x \cdot (1,1) + y \cdot (1,-1)$$

Nun:

$$x+y=4, \quad x-y=2 \xrightarrow{\text{trivial}} x=3, y=1$$

$$x+y=2, \quad x-y=2 \Rightarrow x=2, y=0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$

Was soll ich lesen?

Mathematik lernt man vor allem dadurch, dass man aktiv Mathematik betreibt, und das heißt vor allem: Mathematik liest. Besuchen Sie also die Mathematikbibliotheken und schmökern Sie in dort aufgestellten Büchern. Bedenken Sie dabei: So wie verschiedene Autoren einen unterschiedlichen Stil haben, so gibt es auch Leser mit verschiedenem Geschmack; suchen Sie sich daher die Bücher aus, die Ihnen persönlich gefallen.

Die folgende (nicht repräsentative) Liste besteht aus Büchern, aus denen Sie nicht nur gute Mathematik lernen, sondern in denen Sie auch gute mathematische Ausdrucksweise studieren können.

M. Barner, F. Flohr: *Analysis I*. de Gruyter: Berlin, New York 2000.

E. Behrends: *Analysis Band I*. Vieweg+Teubner: Wiesbaden 2008.

A. Beutelspacher: *Lineare Algebra*. Vieweg Verlag: Wiesbaden 2003.

E. Brieskorn: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, II*. Vieweg Verlag: Braunschweig, Wiesbaden 1983 (I) und 1985 (II).

H.S.M. Coxeter: *Unvergängliche Geometrie*. Birkhäuser Verlag: Basel, Stuttgart 1996.

H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Köcher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert: *Zahlen*. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York 2004.

G. Fischer: *Lineare Algebra*. Vieweg+Teubner: Wiesbaden 2008.

O. Forster: *Analysis I*. Vieweg Verlag: Braunschweig, Wiesbaden 2008.

P.R. Halmos: *Naive Mengenlehre*. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1994.

H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis. Teil I*. Vieweg+Teubner: Wiesbaden 2009.

K. Jaenich: *Lineare Algebra. Ein Skriptum für das erste Semester*. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg 2008.

A. Kemnitz: *Mathematik zum Studienbeginn*. Vieweg+Teubner: Wiesbaden 2009.

K. Königsberger: *Analysis I*. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg 2004.

S. Lang: *Introduction to Linear Algebra*. Springer-Verlag: New York 1997.

H. Lenz: *Vorlesungen über projektive Geometrie*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.: Leipzig 1965.

G. Pickert: *Einführung in die Differential- und Integralrechnung*. Ernst Klett Verlag: Stuttgart 1969.

Die zweite Liste enthält Bücher, deren Ziel es ist, Anleitung zum besseren Schreiben zu geben. Leider habe ich kaum einen deutschsprachigen Text gefunden. Besonders empfehle ich das Heft von Knuth, Larrabee und Roberts.

L. Gillman: *Writing Mathematics Well*. The Mathematical Association of America 1987.

P. R. Halmos: *How to Write Mathematics*. Enseign. Math. 16 (1970), 123-152; wiederabgedruckt in N. E. Steenrod, P. R. Halmos, M. M. Schiffer, and J. A. Dieudonné, *How to Write Mathematics*, American Mathematical Society, 1973, 19-48, und in P. R. Halmos, *Selecta, Expository Writing*, Springer 1983, 157-186. Deutsche Ausgabe: *Wie schreibt man mathematische Texte?* BSB B. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1977 (Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek, Reihe Mathematik, Band 7).

S. Hohmann: *Wissenschaftliches Arbeiten für Naturwissenschaftler, Ingenieure und Mathematiker*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009.

D. E. Knuth, T. Larrabee, P.M. Roberts: *Mathematical Writing*. MAA Notes 14, 1989.

D. Solow: *How to Read and Do Proofs*. John Wiley & Sons: New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 2009.

M.C. van Leunen: *A Handbook for Scholars*. Alfred A. Knopf: New York 1978.

Viele der Fragen von allgemeinem Interesse, die in diesem Buch nur angeschnitten werden konnten (Was ist Mathematik? Was ist ein Beweis?), werden sehr anregend in dem folgenden, sehr empfehlenswerten Buch diskutiert:

P.J. Davis, R. Hersh: *Erfahrung Mathematik*. Birkhäuser Verlag: Basel, Boston, Stuttgart 1996.

Die folgenden Bücher wurden ebenfalls im Text zitiert:

R.P. Feynman: „*Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman!*“. Piper: München und Zürich 2008.

H.-R. Halder, W. Heise: *Einführung in die Kombinatorik*. Carl Hanser Verlag: München, Wien 1976.

R. Honsberger: *More Mathematical Morsels*. MAA 1996.

F. Wille: *Humor in der Mathematik*. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 2005.

Vieweg Mathematik Lexikon. Vieweg Verlag: Braunschweig, Wiesbaden 1995.

Schlusswort des Autors

Wie ist dieses Buch entstanden?

Ich hatte mich oft darüber gewundert, wie große Schwierigkeiten Studierende mit der Formulierung ihrer Übungsaufgaben, Seminar- und Diplomarbeiten haben. Ich hatte mir nämlich eingebildet, alles Gute aus meinen Veranstaltungen würde sich „automatisch“ auf die Hörer übertragen – aber was ich sah, war Kraut und Rüben!... oder sollten etwa meine Vorlesungen manchmal...?

Wie dem auch sei: Es ist offenkundig, dass die Kunst, sich präzise auszudrücken und richtig mit den mathematischen Begriffen umzugehen, im Regelfall nicht ohne äußeres Zutun erworben wird. Daher (so war meine Folgerung) muss diese Kunst den Studenten durch ihre Professoren nahegebracht werden. Konsequenterweise kündigte ich eine Vorlesung über dieses Thema an – und ging sehr zufrieden mit mir, meiner guten Idee und meinem Mut nach Hause.

Über Nacht kamen mir dann allerdings Bedenken: Wenn ich eine Vorlesung über, sagen wir, Zahlentheorie ankündige, kann ich im schlimmsten Fall immer ein Buch aus dem Regal ziehen und dieses vorlesen. Aber hier?

So musste ich mich selber daran machen, Stichwörter zu der geplanten Veranstaltung aufzuschreiben. Dabei machte ich mir einen ausgesprochenen „Realissimo-Standpunkt“ zu eigen: Keine Theorie des Schreibens, keine fundamentalen Konzepte, eigentlich auch kaum Rezepte, sondern „nur“ viele konkrete Tipps, praktische Anweisungen und Hinweise auf populäre Fehlerquellen.

Was mir abends einfiel, tippte ich jeweils am nächsten Morgen in den Computer. Das ging scheinbar ohne jede Anstrengung, und als ich nach vier Wochen betrachtete, was ich geschrieben hatte, sah ich, dass es schon ziemlich viel war. Nach weiteren zwei Wochen Arbeit zeigte ich das Zwischenergebnis einigen Freunden. Diese waren begeistert („Genau das hätten wir während unseres Studiums gebraucht!“) und steuerten zusätzliche Ideen bei. (Inzwischen ist es bereits so, dass meine Mitarbeiter mich mit Hinweis auf „O.B.d.A.“ korrigieren, wenn ich mich nicht an die Regeln halte!).

Als dann auch die Lektorin des Verlags Vieweg+Teubner spontan zugriff, wusste ich, dass das Projekt etwas werden könnte.

* * *

Dieses Buch zu schreiben, war ein Kinderspiel; alles ging glatt und für mich völlig unmerklich. Im Gegensatz dazu hatte (und habe) ich aber Probleme beim Gedanken an eine *Veröffentlichung*. Nicht wegen der eigentlichen Zielgruppe, den Studierenden! Ich bin überzeugt, dass ich ihnen etwas zu sagen habe und

dass das Büchlein gut ankommen wird. Aber in meinen traumlosen Nächten stellen sich Fragen der folgenden Art ein: Machst du dich angreifbar? Wirst du nicht von den Kollegen fürchterliche Schläge bekommen? Begibst du dich nicht in einen unauflösbaren Konflikt (klare Regeln für den Anfänger, die die Fortgeschrittenen in ein Prokrustesbett zwingen)? Werden nicht einige Kollegen sagen: In dieser Zeit hätten Sie besser einen Satz bewiesen!?

Da die Antwort auf diese Fragen vielleicht „Ja“ ist, hätte ich genügend viele Ausreden gehabt, das Buch nicht zu veröffentlichen. Deshalb danke ich an dieser Stelle sehr herzlich allen, die mir Mut gemacht haben. Wenn Sie, verehrte Leserin, lieber Leser, zu denen gehören, denen dieses Buch gefallen hat, so schließen Sie sich meinem Dank an die Kollegen Kosmas Einbrodt, Christian Fenske, Theo Grundhöfer, Heinz Lüneburg, Axel Pfau, Ute Rosenbaum, Jörg Schwenk, Johannes Ueberberg und Herbert Zeitler an; ohne ihre, zum Teil sehr direkten Ratschläge wäre dieses Buch unveröffentlicht geblieben. Herrn Wußing aus Leipzig danke ich für das wunderbare Leibniz-Zitat. Frau Dobslaw vom Verlag Vieweg+Teubner danke ich sehr dafür, dass sie schon zum zweiten Mal den Text liebevoll und gründlich durchgesehen und damit Ihnen viel Ärger über unnötige Druckfehler erspart hat.

Schließlich danke ich meiner Familie für die Geduld und Toleranz, mit der sie diese neuerliche Eskapade ertragen hat.