Меднікова Олександра, ФІ-93

Завдання 1

1) Граф з умови задає таку матрицю перехідних ймовірностей:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

2) Інваріантним розподілом цієї матриці буде розподіл π = [0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]
3) За допомогою реалізації алгоритму знаходження частот станів ланцюга розпочнемо рахувати частоти після часу m = 1000, і тоді отримаємо такі результати для різних початкових розподілів μ та різної кількості N станів ланцюга:

N	X		
	1	3	4
50	[0. 0. 0.32 0.3 0.14 0.24]	[0. 0. 0.14 0.2 0.42 0.24]	[0. 0. 0.16 0.18 0.48 0.18]
250	[0. 0. 0.252 0.256 0.232 0.26]	[0. 0. 0.24 0.32 0.136 0.304]	[0. 0. 0.256 0.208 0.348 0.188]
500	[0. 0. 0.238 0.256 0.242 0.264]	[0. 0. 0.248 0.284 0.192 0.276]	[0. 0. 0.266 0.212 0.302 0.22]
1000	[0. 0. 0.254 0.247 0.257 0.242]	[0. 0. 0.245 0.275 0.206 0.274]	[0. 0. 0.262 0.224 0.288 0.226]
10000	[0. 0. 0.251 0.245 0.26 0.244]	[0. 0. 0.244 0.261 0.234 0.26]	[0. 0. 0.26 0.238 0.27 0.232]
100000	[0. 0. 0.248 0.253 0.243 0.256]	[0. 0. 0.251 0.25 0.249 0.25]	[0. 0. 0.25 0.248 0.255 0.247]

Висновок: оптимальним є вибір N в інтервалі [10000, 100000]. При таких значеннях N, частоти збігаються до інваріантного розподілу з достатньо малою похибкою. Вибір x_0 не має великого впливу на збіжність при достатньо великих N, тому можна обирати будь-яке можливе значення x_0.

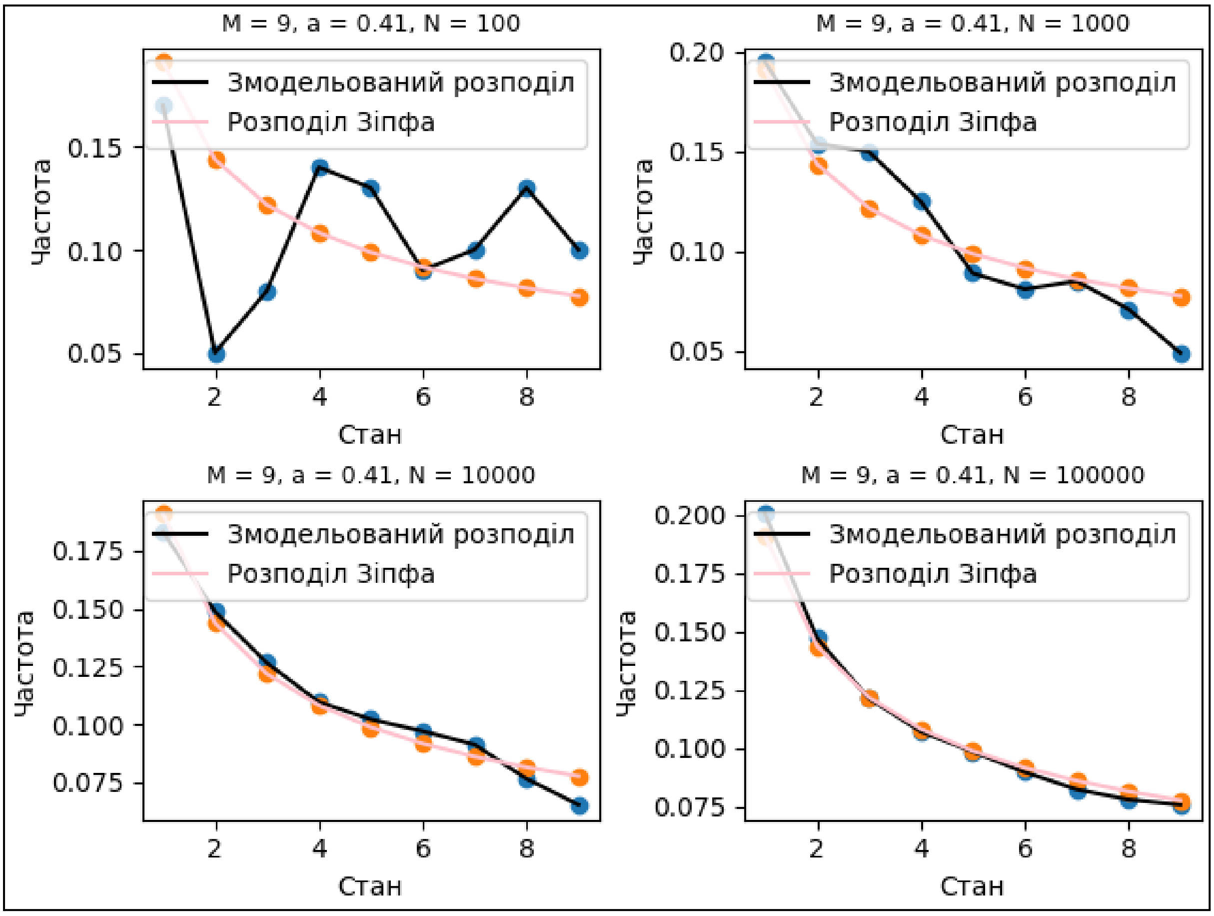
Завдання 2

Моделювання ланцюга Маркова,
для якого рівняння Зіпфа є інваріантним

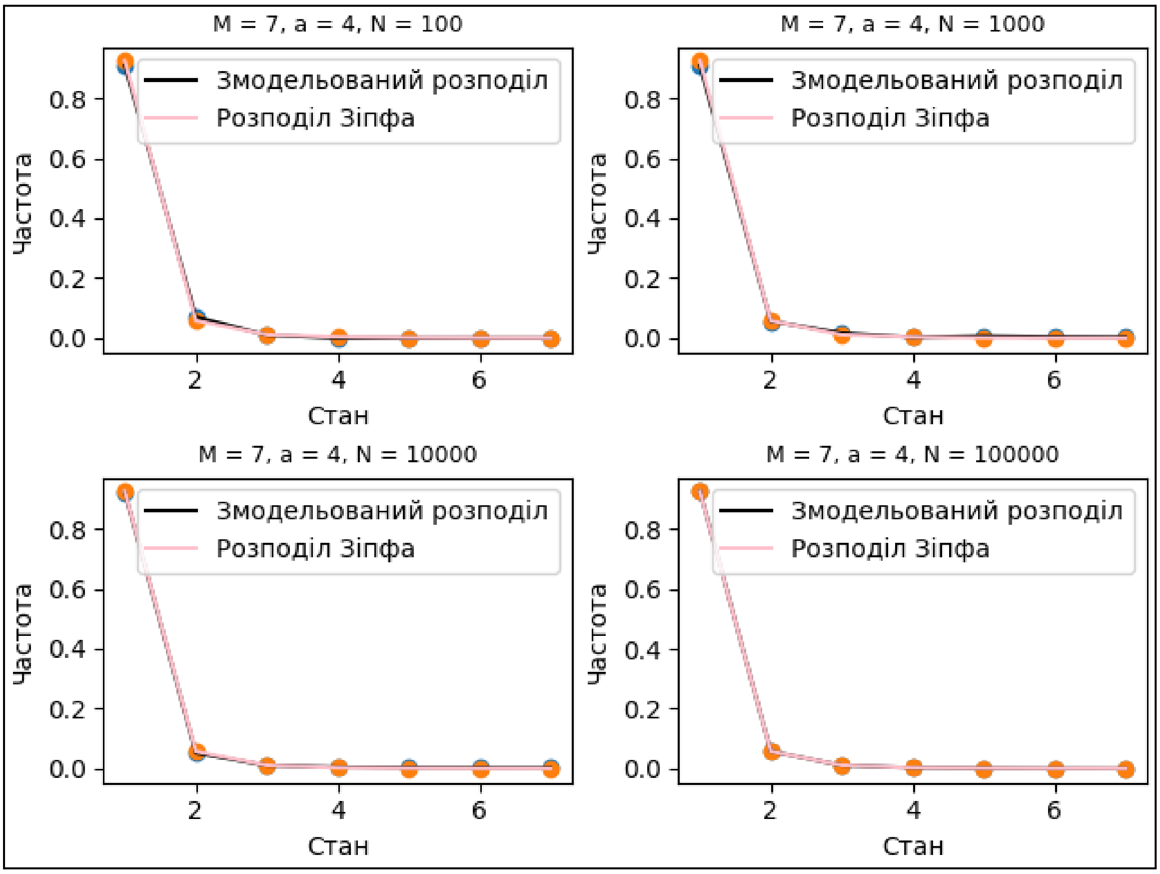
На графіках представлені результати для різних параметрів M, a та отримані після різної кількості ітерацій N. Для порівняння наведені графіки теоретичного розподілу Зіпфа.

У всіх випадках матриця P, отримана за описаною побудовою по матриці пропозицій Q та отриманих α_{ij}, має вигляд одиничної матриці розміру $[M \times M]$.

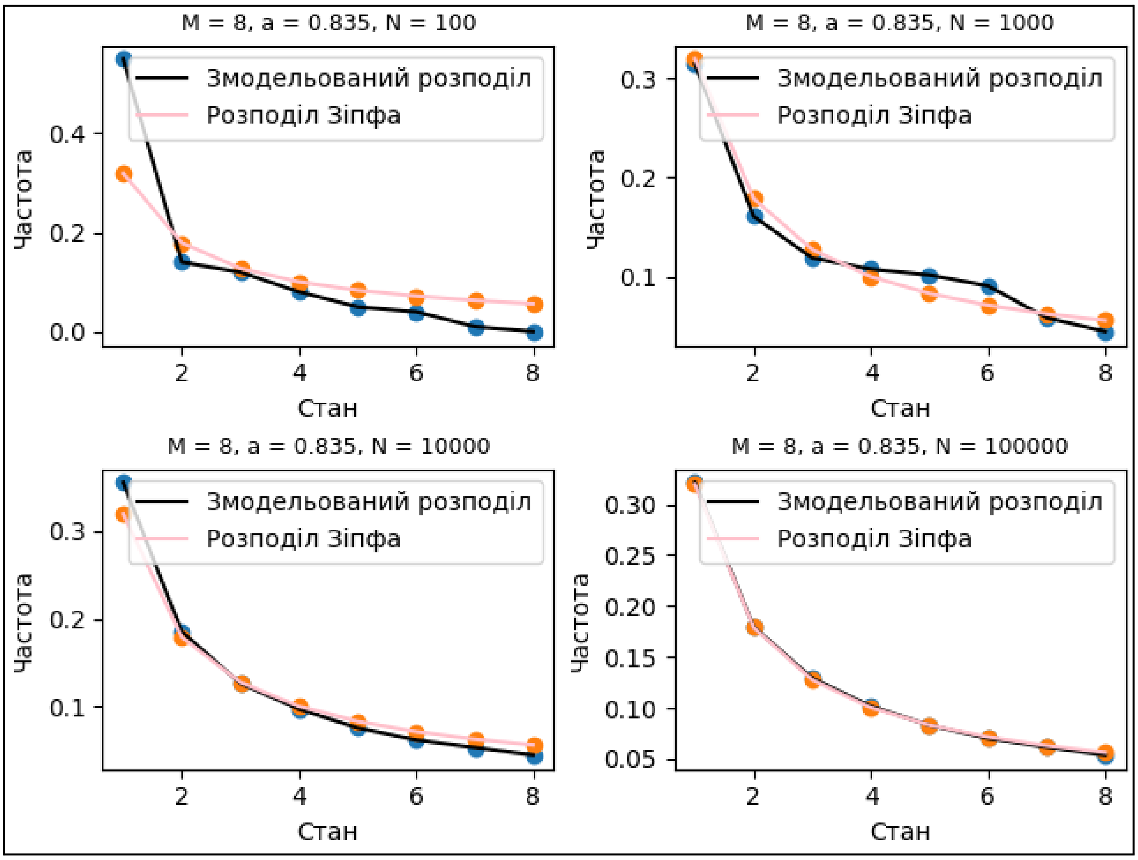
1) <u>Випадок 1:</u>



2) <u>Випадок 2</u>



3) <u>Випадок 3:</u>



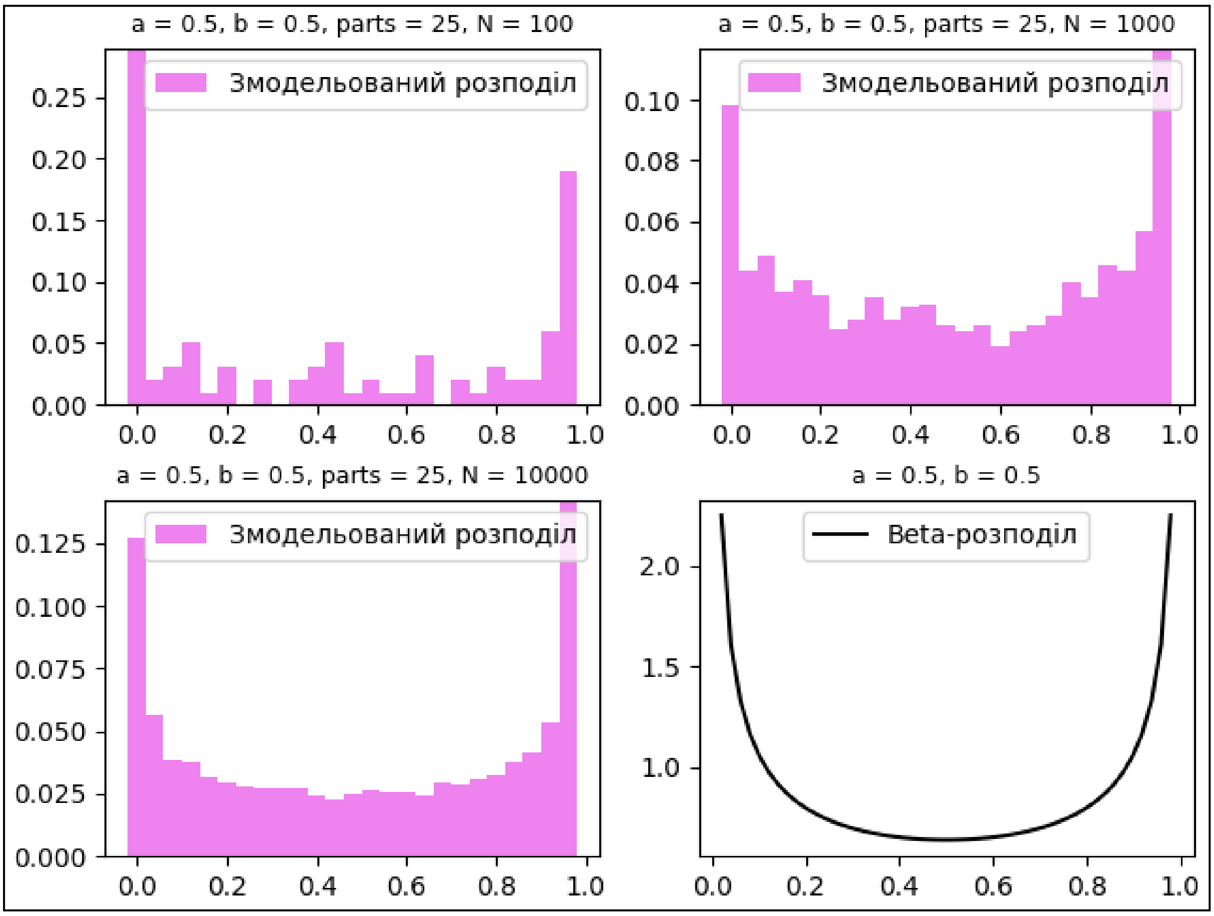
Висновок: Найкращий результат збіжності до теоретичного розподілу спостерігається, коли a - ціле число. При $a \in (0, 1)$ збіжність до теоретичного розподілу спостерігається при великих $N >= 10000$.

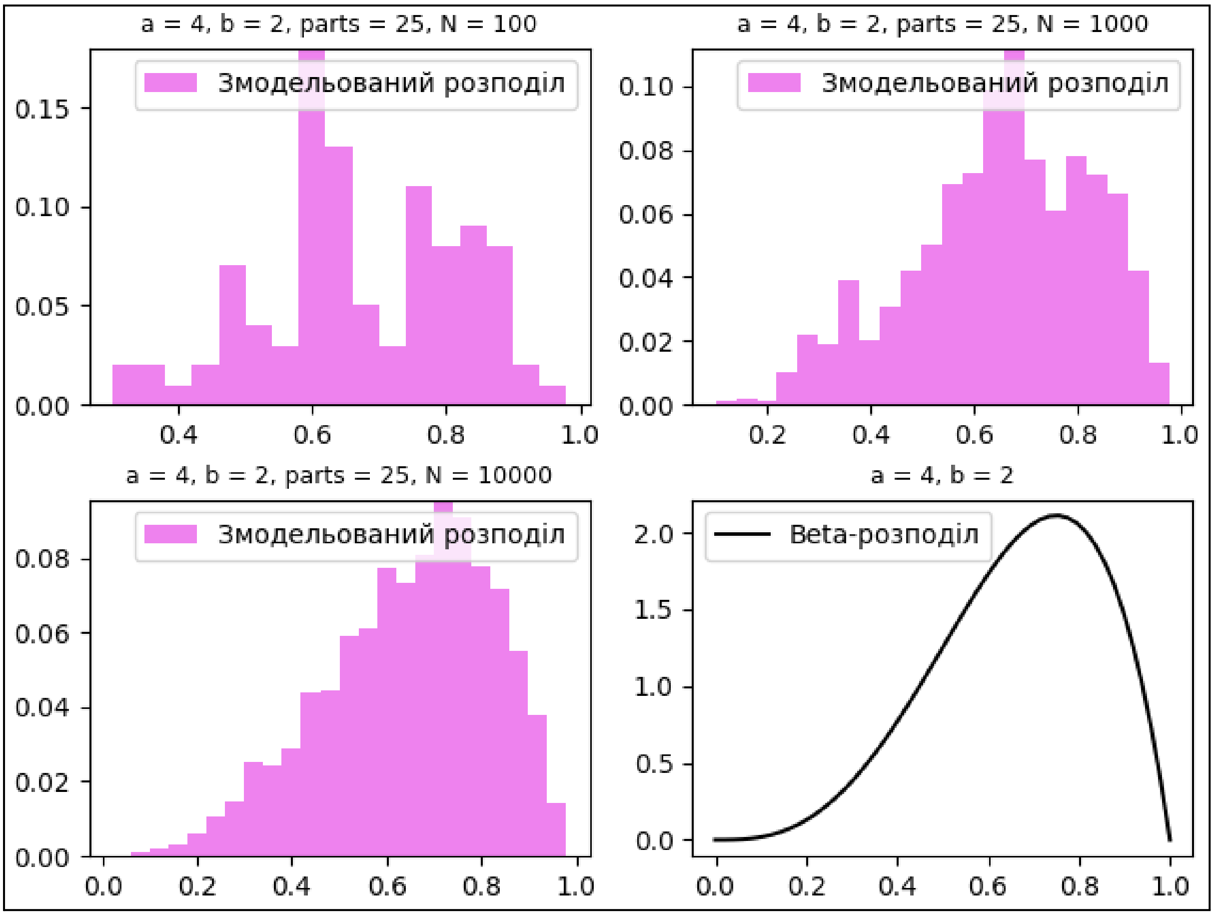
Завдання 3

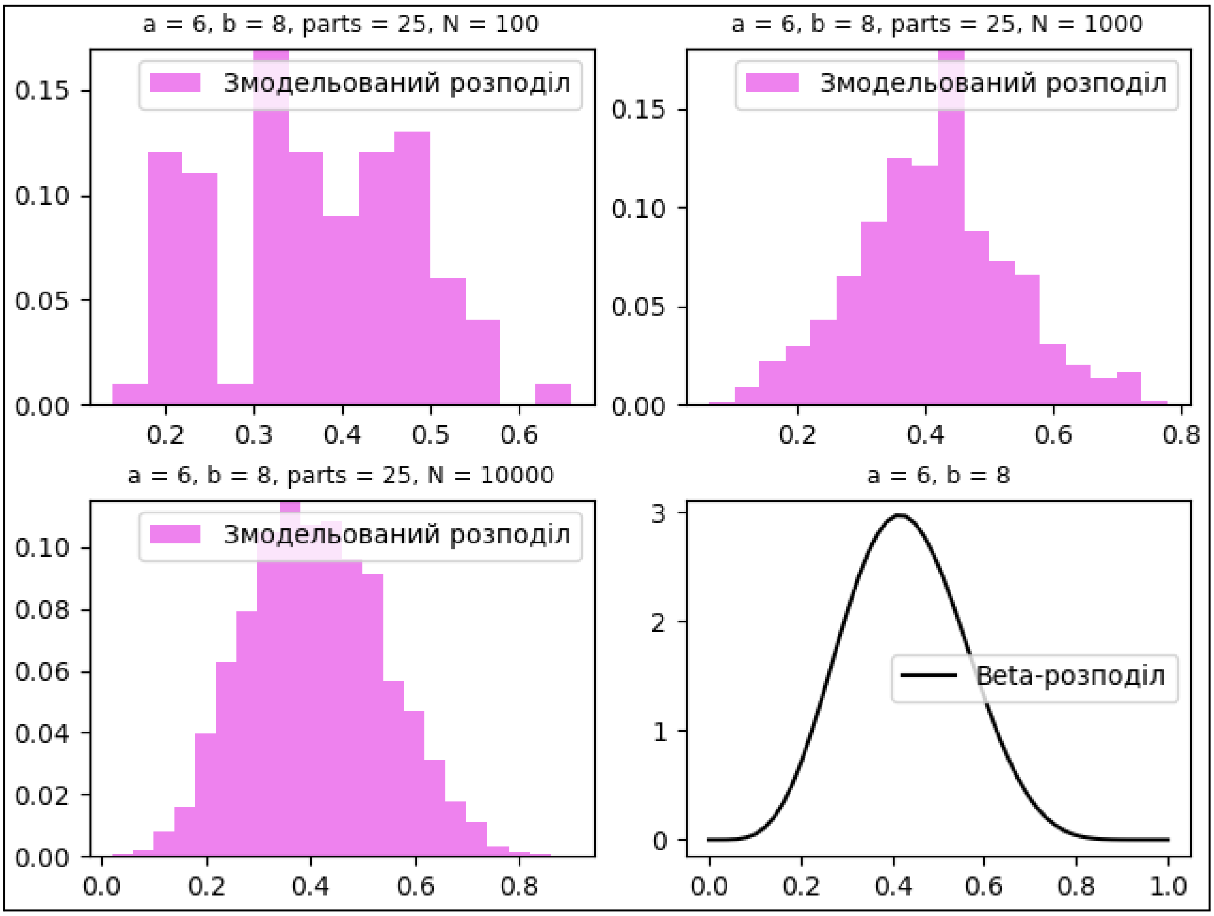
Моделювання розподілу Beta(a, b)
за допомогою алгоритма Метрополіса-Гастінгса

Експеримент проводився для 3 пар значень параметрів (a, b), для різної кількості відрізків, на які ми ділимо x=[0, 1] та для різної кількості згенерованих елементів ланцюга N.

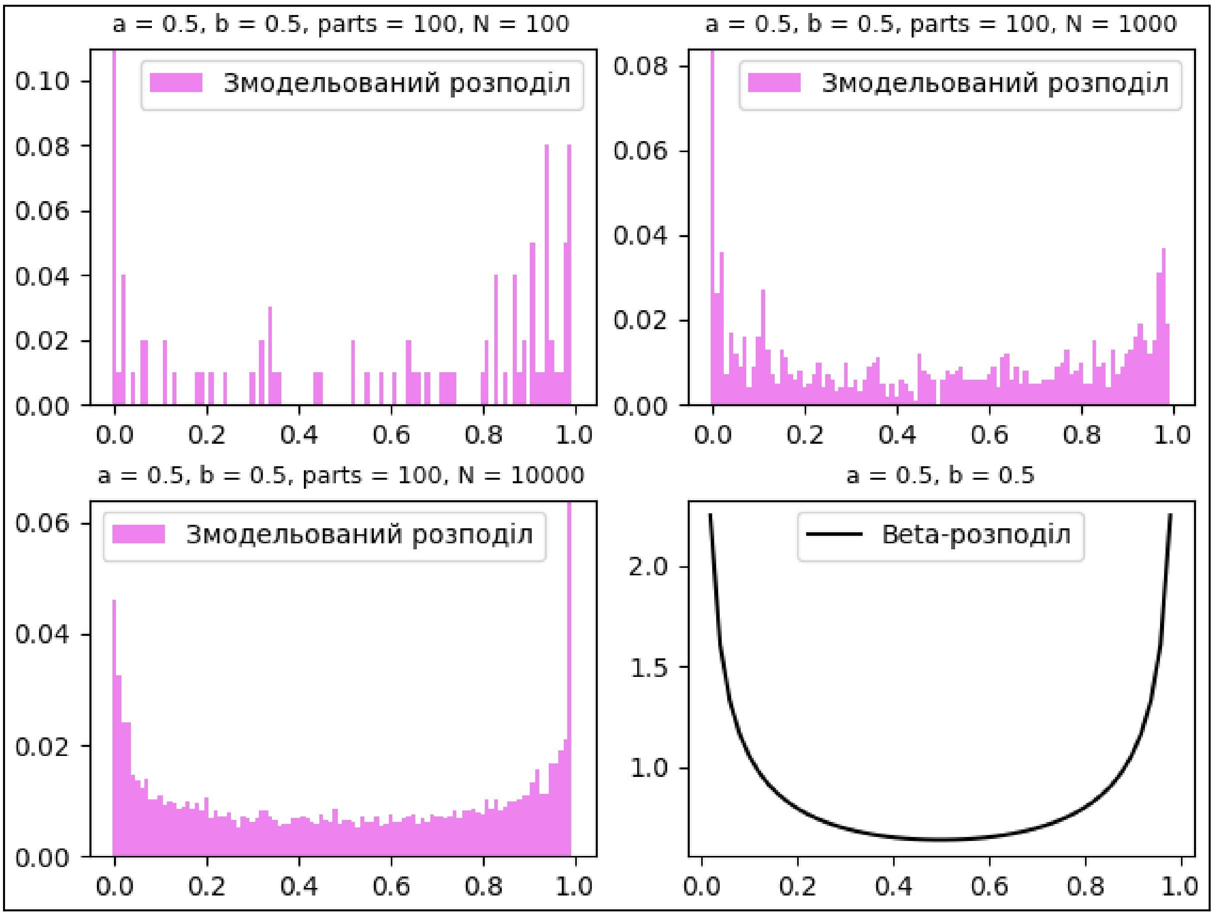
1) Кількість відрізків - 25

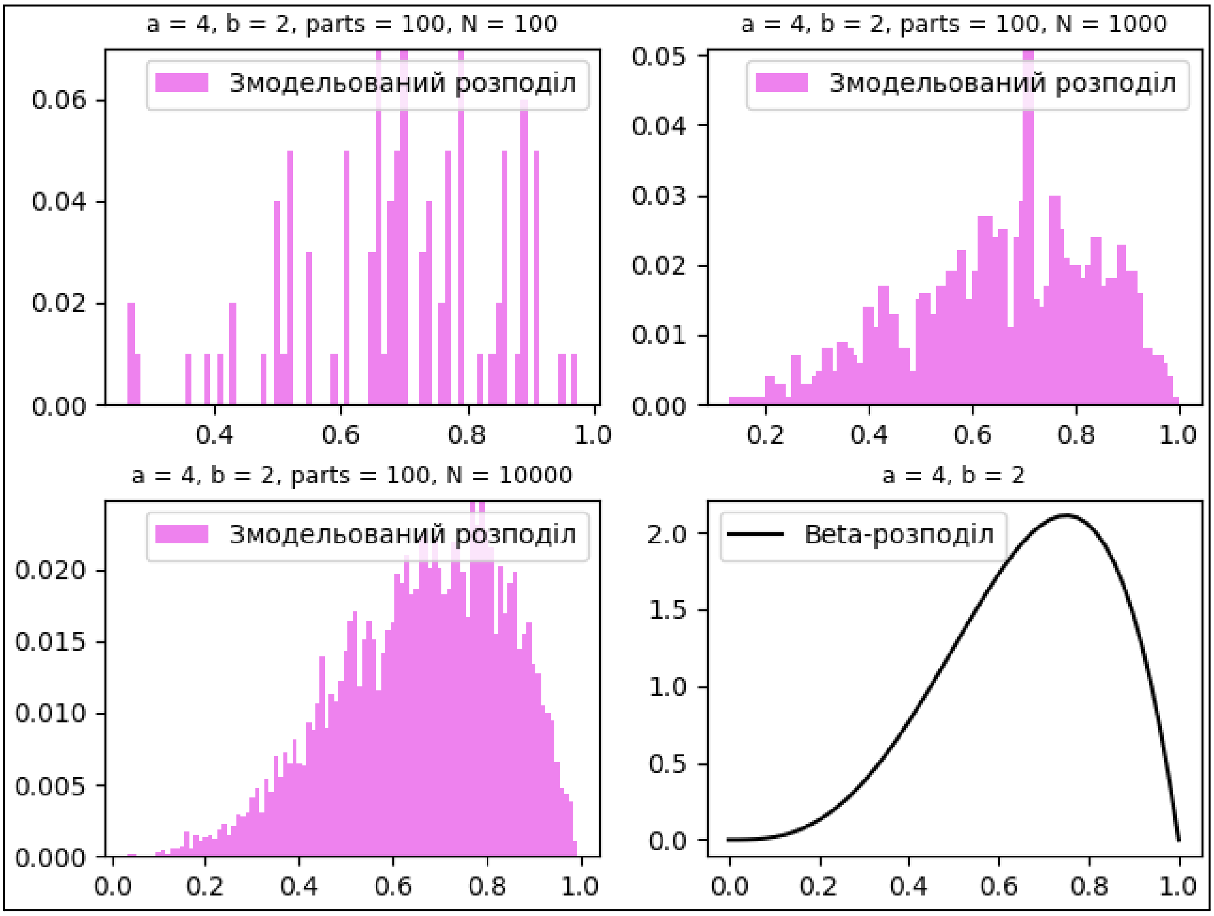


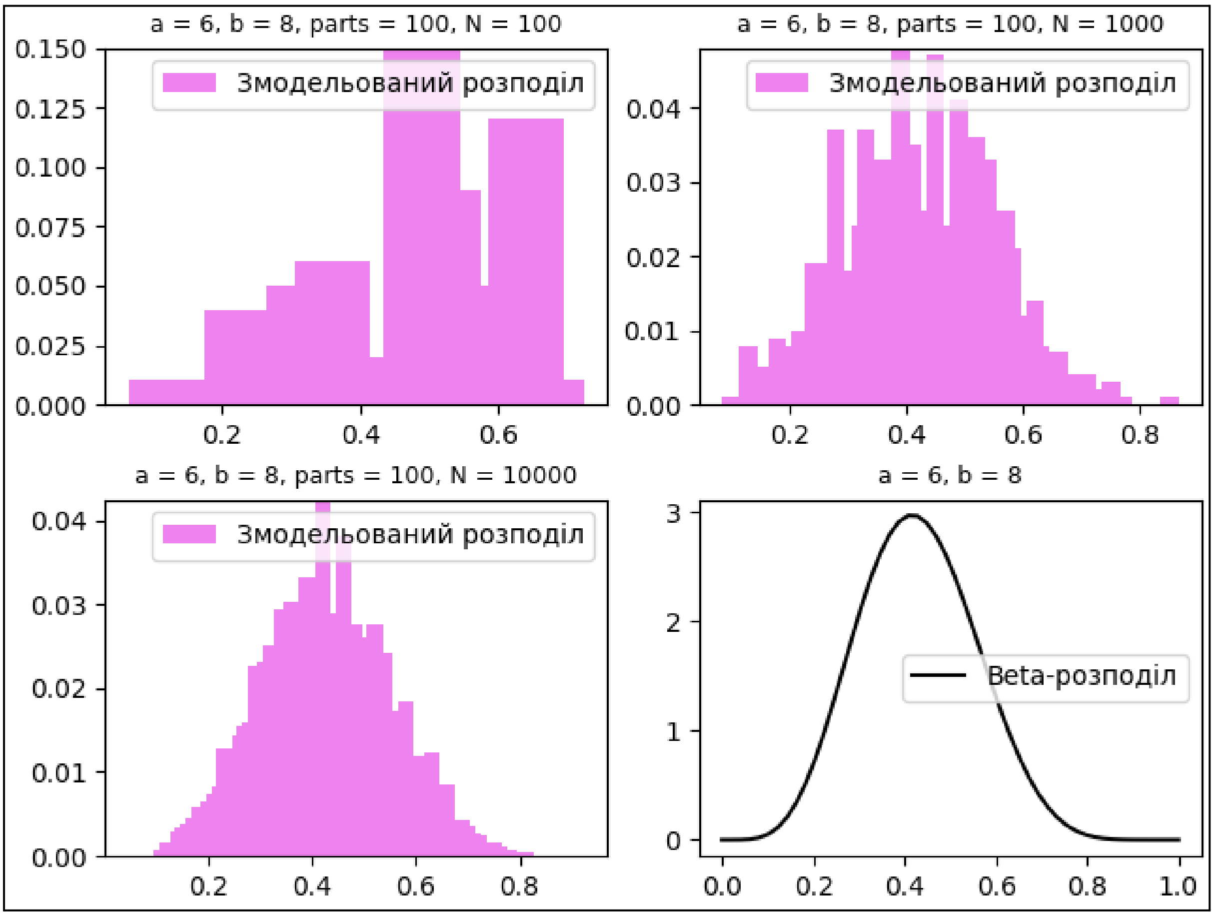

a = 4, b = 2, parts = 25, N = 100
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2, parts = 25, N = 1000
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2, parts = 25, N = 10000
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2
Beta-розподіл


a = 6, b = 8, parts = 25, N = 100
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8, parts = 25, N = 1000
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8, parts = 25, N = 10000
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8
Beta-розподіл

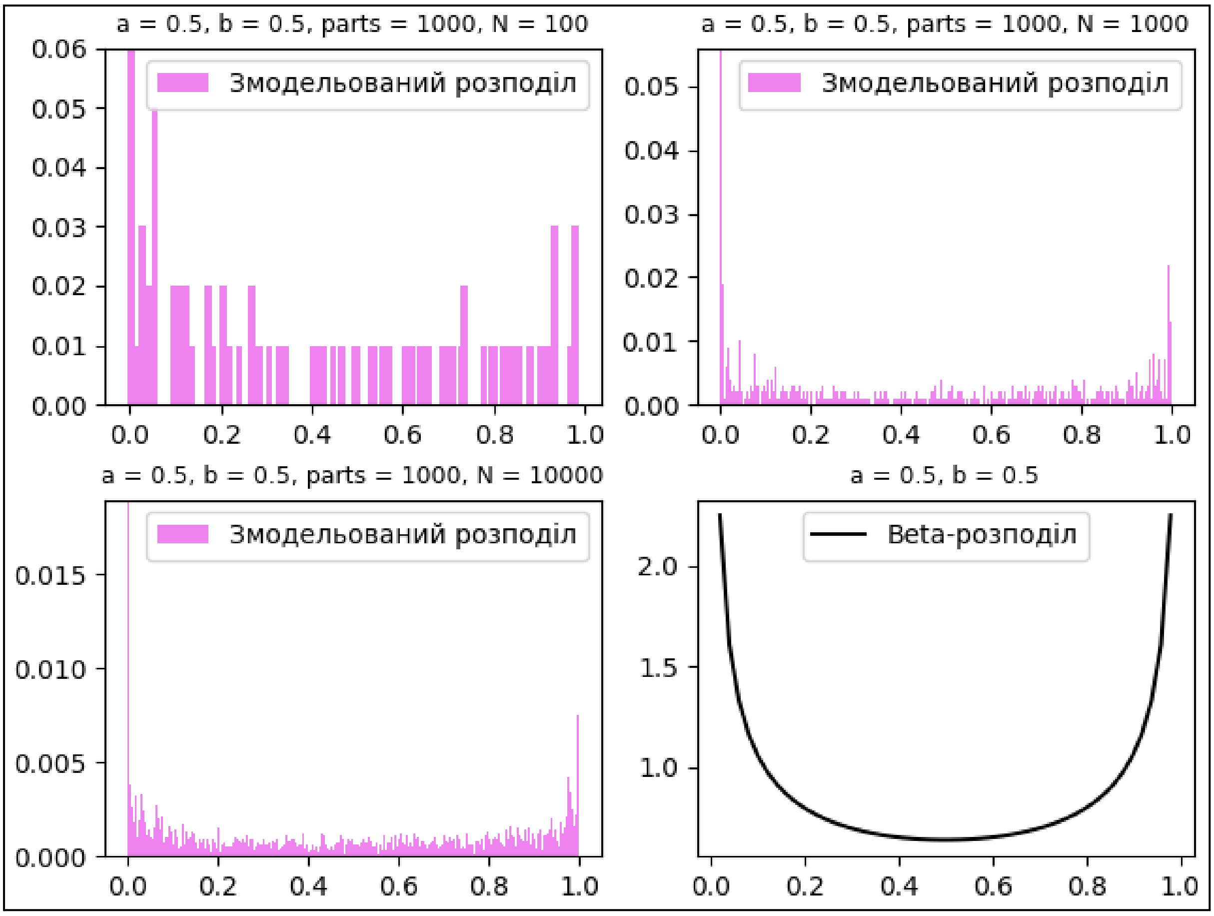
2) Кількість відрізків - 100

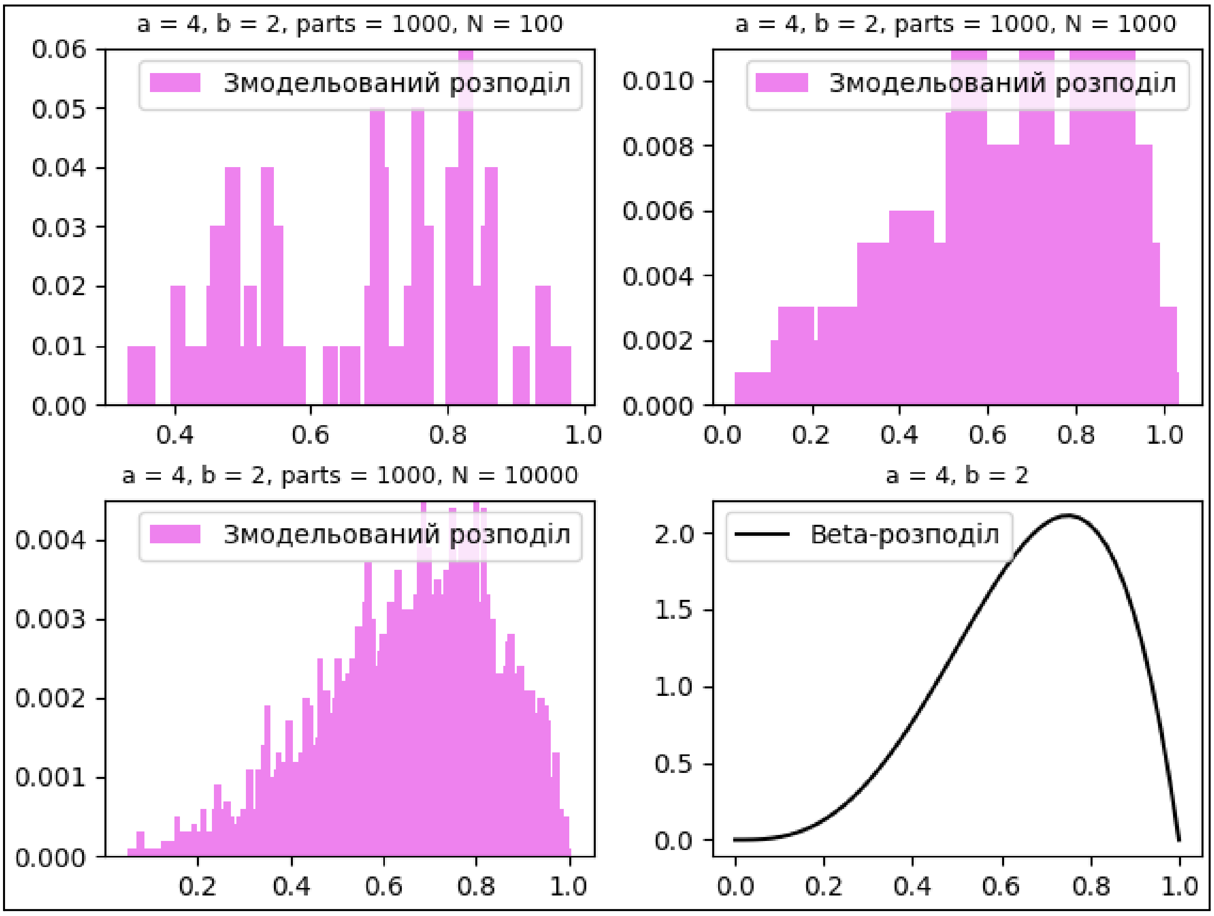


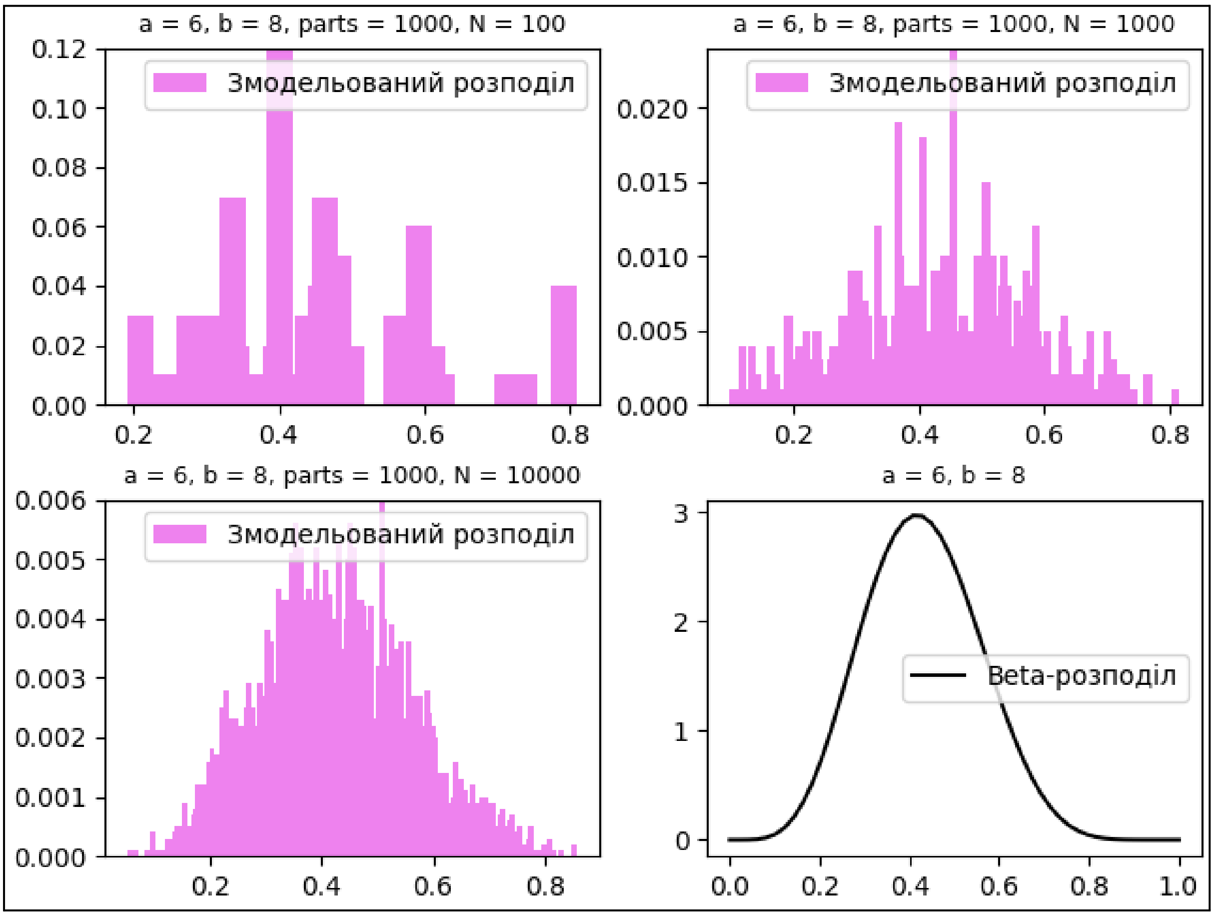

a = 4, b = 2, parts = 100, N = 100
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2, parts = 100, N = 1000
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2, parts = 100, N = 10000
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2
Beta-розподіл


a = 6, b = 8, parts = 100, N = 100
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8, parts = 100, N = 1000
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8, parts = 100, N = 10000
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8
Beta-розподіл

3) Кількість відрізків - 1000




a = 4, b = 2, parts = 1000, N = 100
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2, parts = 1000, N = 1000
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2, parts = 1000, N = 10000
Змодельований розподіл
a = 4, b = 2
Beta-розподіл


a = 6, b = 8, parts = 1000, N = 100
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8, parts = 1000, N = 1000
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8, parts = 1000, N = 10000
Змодельований розподіл
a = 6, b = 8
Beta-розподіл

Висновок: для всіх випадків збіжність до справжнього розподілу найближча при N >= 10000, більша кількість відрізків надає меншу похибку, але потребує більших N, щоб сформувати значущий результат.

Завдання 4

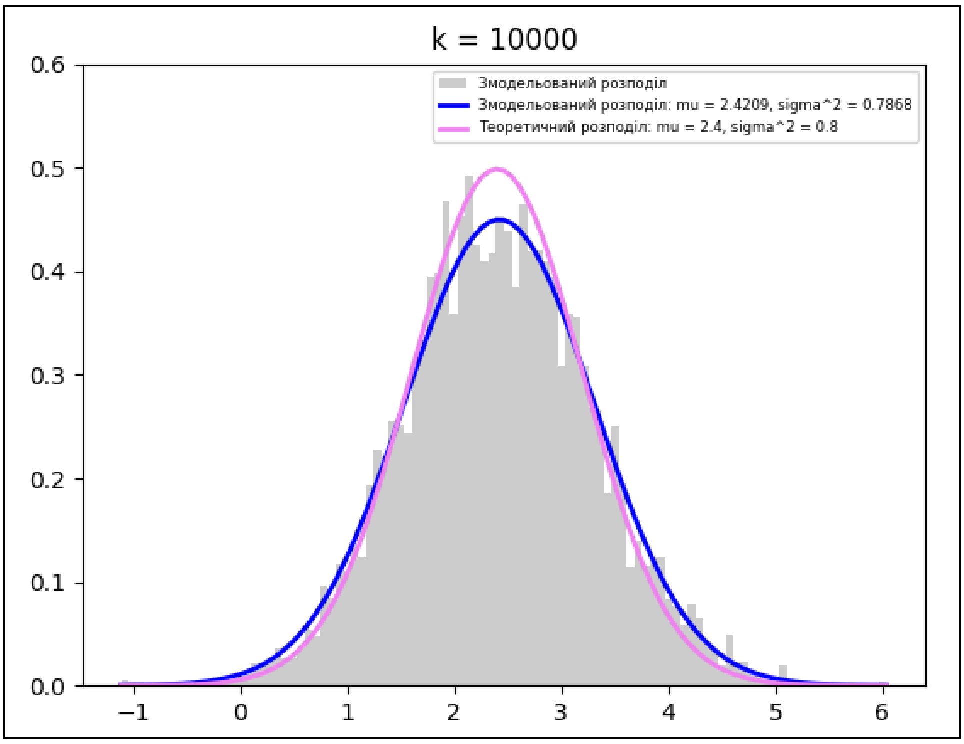
Моделювання ланцюга Маркова
з заданим апостеріорним розподілом $\theta|y$

а) Вхідні дані: у = 3, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $\tau^2 = 4$, d = 1, кількість ітерацій - 10000.

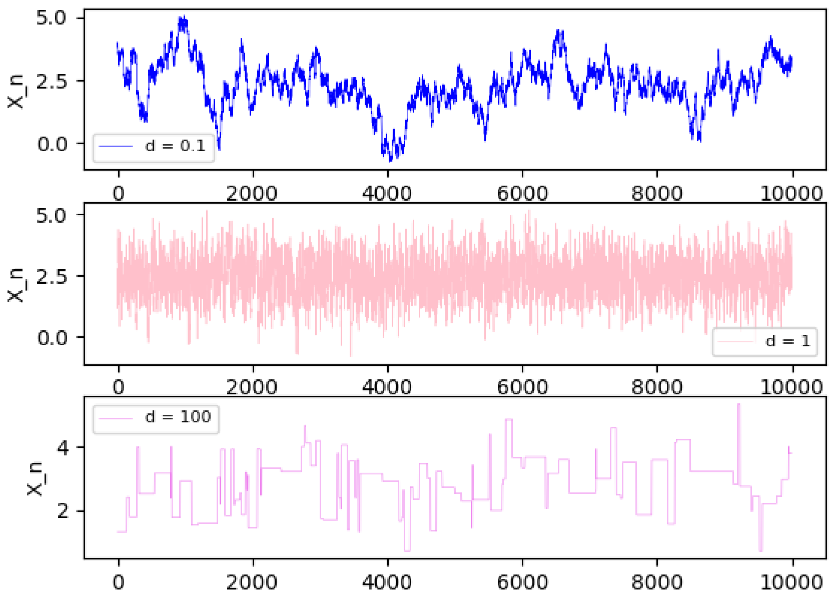
Теоретичні характеристики апостеріорного розподілу: $\mu = 2.4$, $\sigma^2 = 0.8$.

<u>Результат:</u>

отримані вибіркове середнє та дисперсія: $\mu = 2.4209$, $\sigma^2 = 0.7868$



б) Графіки залежності X_n від n при різних d: 0.1, 1, 100.

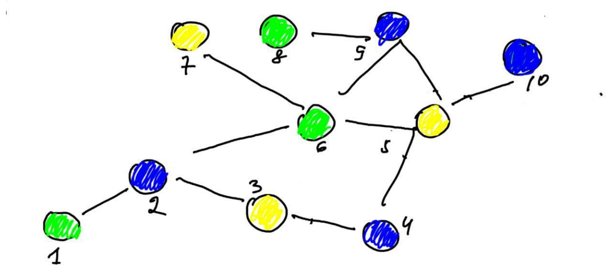


Завдання 5

Оцінка кількості розфарбовок графа

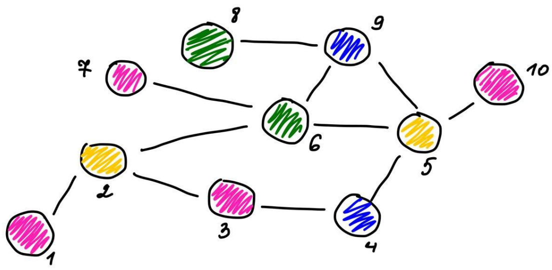
Граф: n = 10 вершин. Побудувати частоту появи кожного стану розфарбовки графу та знайти кількість різних станів - розфарбовок при наступній кількості кольорів за N = 10000 ітерацій:

1) Кількість кольорів - 3
Граф має вигляд:

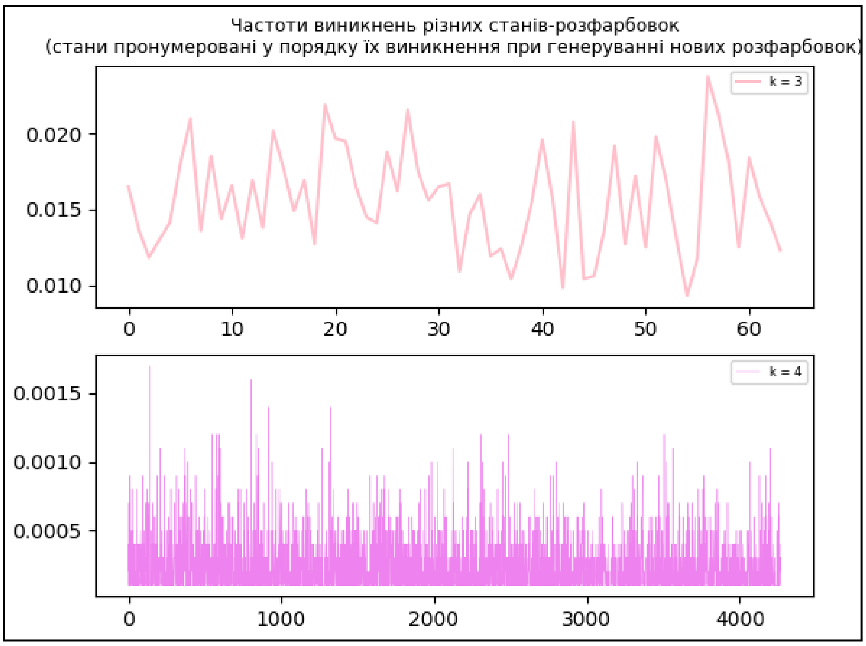


<u>Результат:</u> кількість різних розфарбовок - 64

2) Кількість кольорів - 4
Граф має вигляд:



<u>Результат:</u> кількість різних розфарбовок - 4267



Завдання 6

Обчислення оцінки p' для M(p | X = x)
як вибіркового середнього вибірки Гіббса

Вхід: $\lambda = 10$, a = b = 1, x = 7.
Кількість ітерацій: 10000

Результат: p = 0.687312. Отримані графіки апостеріорних розподілів: