中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

GAMES102

GAMES 102在线课程

几何建模与处理基础

刘利刚

中国科学技术大学

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

GAMES102

GAMES 102在线课程：几何建模与处理基础

参数曲线

回顾

- 一元（单变量）函数 $f: R^1 \to R^1$
$$y = f(x)$$
- 一元函数的数据拟合的方法
  - 到哪找？
    - 确定某个函数集合（“池子”），具有某种结构容易表达（比如线性函数空间），且尽量广泛（表达能力强）
  - 找哪个？
    - 度量哪个函数是好的/“最好”的，定义损失函数，包括数据误差项（逼近数据的度量）与正则项（对函数性质的度量）
  - 怎么找？
    - 优化求解：不同的优化方法与技巧
      - 线性问题：解线性方程或线性方程组
      - 非线性问题：
        - 凸问题：有理论保证
        - 非凸问题：难！数值求解（梯度下降法、牛顿法、拟牛顿法、L-BFGS, …），须选择合适初值、步长等；一般要根据具体的优化问题形式及特点来设计合适的优化方法!

多元函数

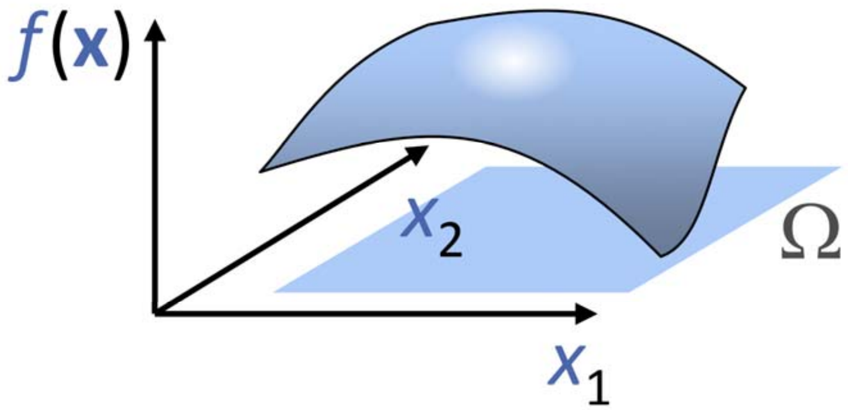
多元函数（多变量）

- 多个变量的函数

$$f: R^n \to R^1 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to y$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- 例子：二元函数$z = f(x, y), (x, y) \in [0,1] \times [0,1]$



二元函数的基函数构造

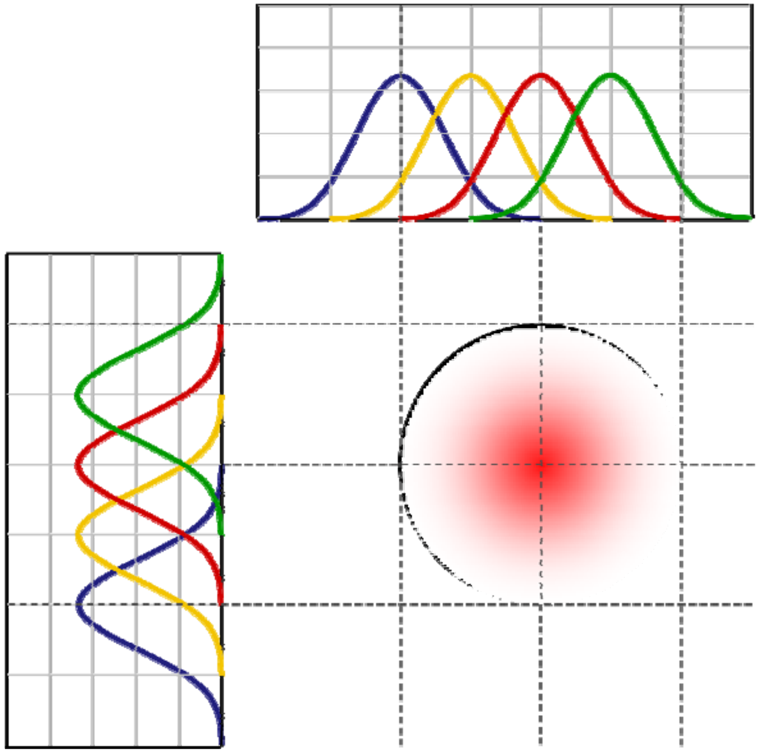
- 方法：张量积形式，即用两个一元函数的基函数的相互乘积来定义
- 比如：二次二元多项式函数$z = f(x, y)$的基函数 $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$

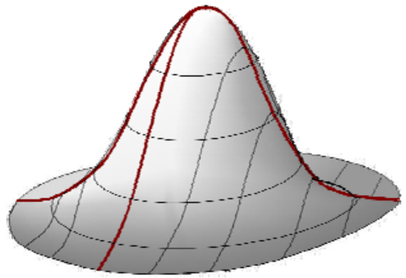
	1	x	x^2
1	1	x	x^2
y	y	xy	x^2y
y^2	y^2	xy^2	x^2y^2

三次张量积多项式

	1	u	u^2	u^3
1	1	u	u^2	u^3
v	v	vu	vu^2	vu^3
v^2	v^2	v^2u	v^2u^2	v^2u^3
v^3	v^3	v^3u	v^3u^2	v^3u^3

三次张量积函数





张量积基函数

	$b_1(u)$	$b_2(u)$	$b_3(u)$	$b_4(u)$
$b_1(v)$	$b_1(v)b_1(u)$	$b_1(v)b_2(u)$	$b_1(v)b_3(u)$	$b_1(v)b_4(u)$
$b_2(v)$	$b_2(v)b_1(u)$	$b_2(v)b_2(u)$	$b_2(v)b_3(u)$	$b_2(v)b_4(u)$
$b_3(v)$	$b_3(v)b_1(u)$	$b_3(v)b_2(u)$	$b_3(v)b_3(u)$	$b_3(v)b_4(u)$
$b_4(v)$	$b_4(v)b_1(u)$	$b_4(v)b_2(u)$	$b_4(v)b_3(u)$	$b_4(v)b_4(u)$

多元函数的张量积定义

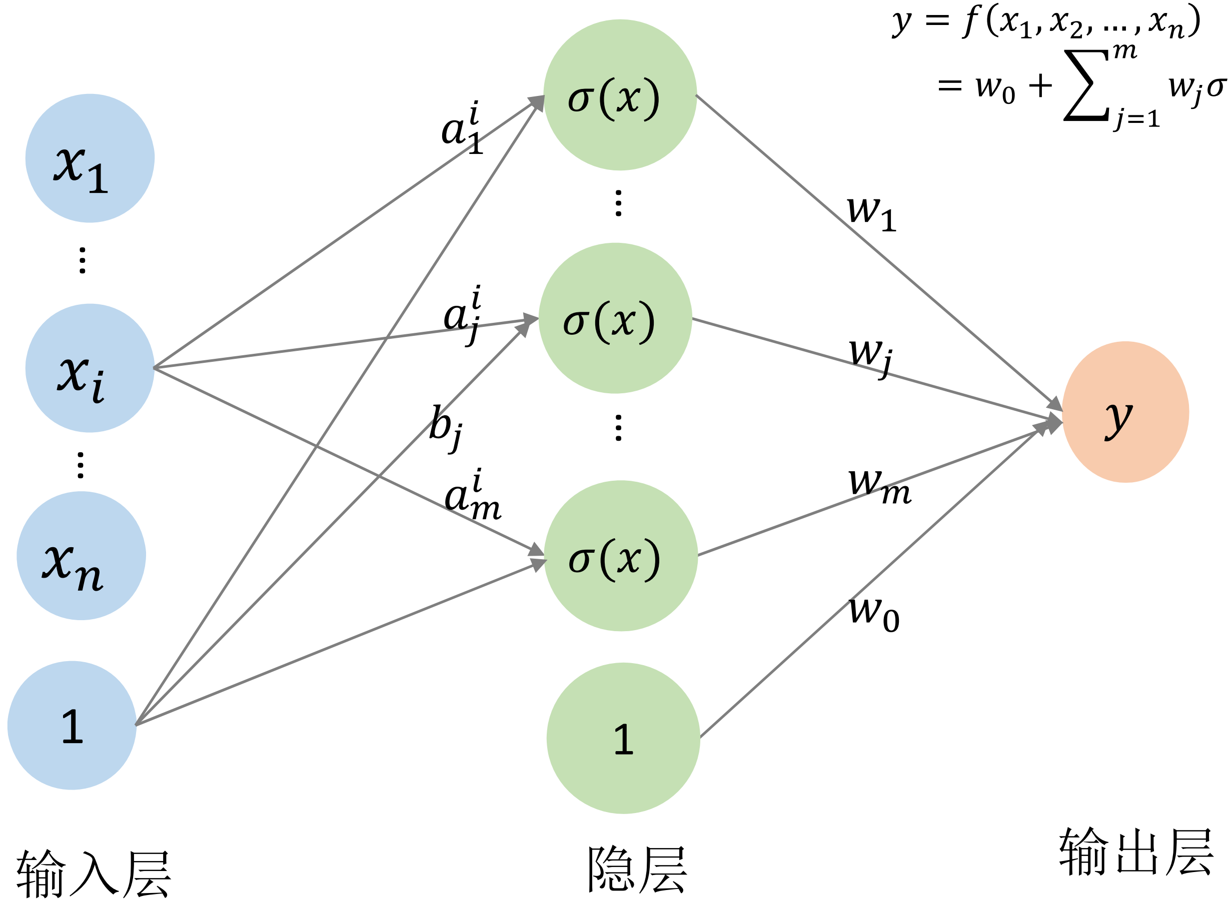
- 优点：定义简单，多个一元基函数的乘积形式
- 不足：
    - 随着维数增加，基函数个数急剧增加，导致变量技据增加（求解系统规模急剧增加，求解代价大）

	$\mathbf{1}$	x	x^2
1	1	x	x^2
y	y	xy	x^2y
y^2	y^2	xy^2	x^2y^2

多元函数的神经网络表达 $f:\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to y$

- 用一个单变量函数$\sigma(x)$（称为激活函数）的不同仿射变换来构造“基函数”：基函数数目可控

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= w_0 + \sum_{j=1}^{m} w_j \sigma(a_j^1 x_1 + \cdots a_j^i x_i + \cdots + a_j^n x_n + b_j)$$



向量值函数

向量值函数（多个应变量）

- 先看单变量的：　$f: R^1 \to R^m$　　$x \to \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

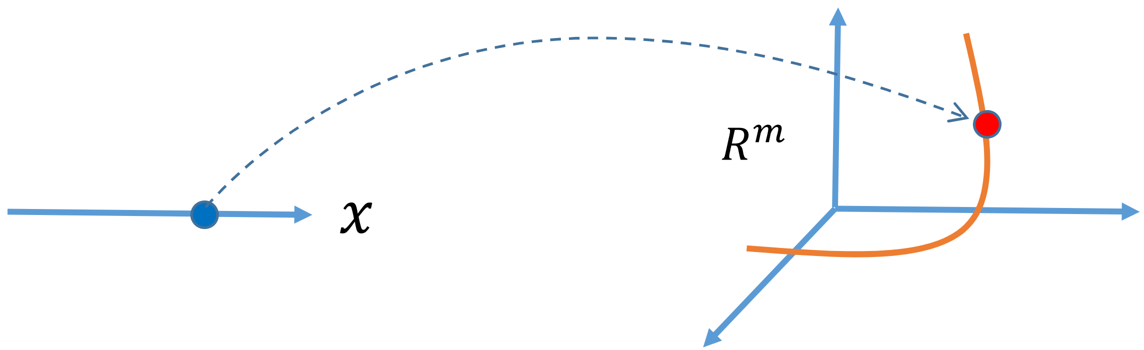
- 看成多个单变量函数，各个函数独立无关
  - 一般会用同样的基函数（共享基函数）

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ \quad\vdots \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$

向量值函数（多个应变量）

$$f: R^1 \to R^m \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ \quad\vdots \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$

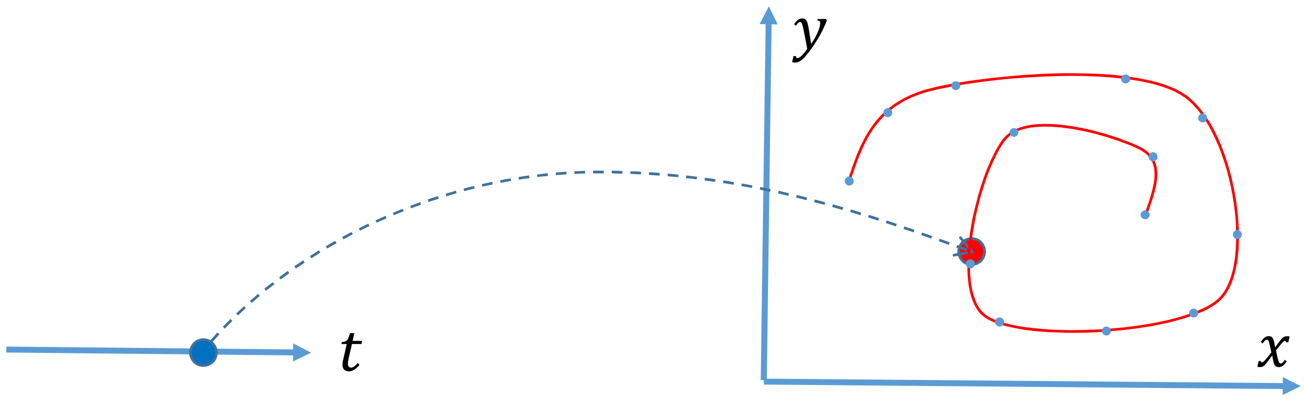
- 几何解释：
  - 一个实数$x \in R^1$映射到m维空间R^m的一个点，轨迹构成R^m的一条“曲线”
  - 本质维度为1



特例：平面参数曲线

$$f: R^1 \rightarrow R^2 \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

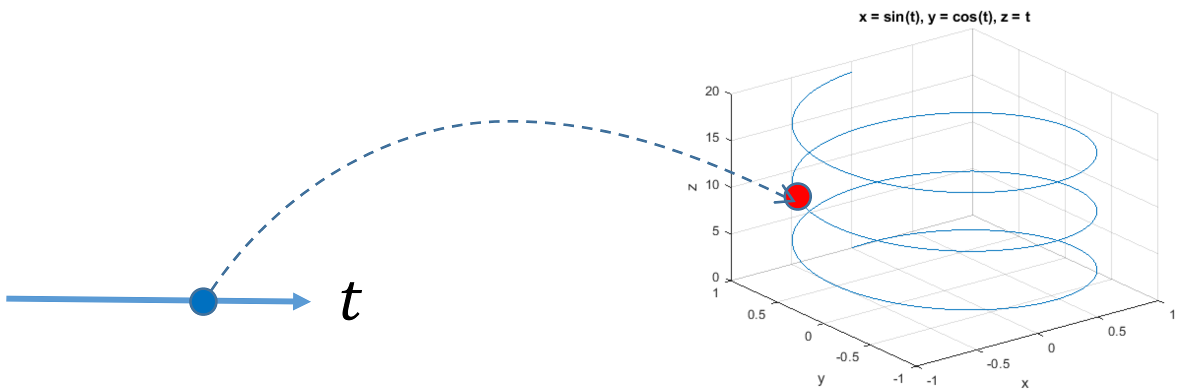
- 几何解释：
  - 一条曲线由一个变量参数t决定，也称为单参数曲线
  - 参数t可看成该曲线的“时间”变量
  - 可灵活表达非函数型的曲线（任意曲线）



特例：空间参数曲线

$$f: R^1 \to R^3 \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

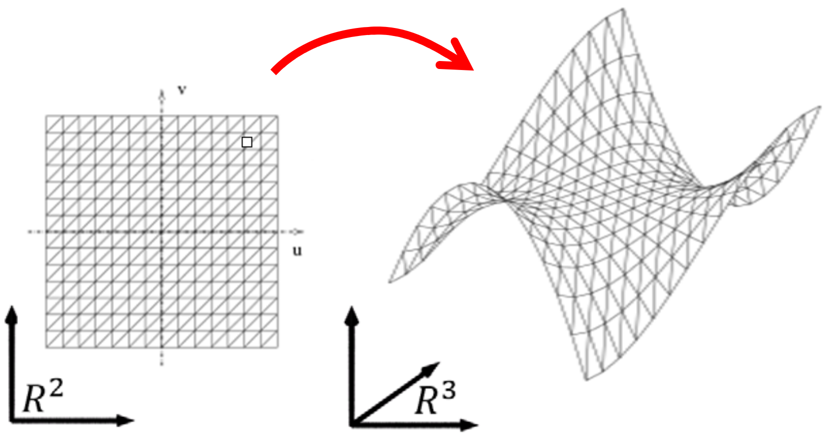
- 几何解释：
  - 一条曲线由一个变量参数t决定，也称为单参数曲线
  - 参数t可看成该曲线的"时间"变量
  - 可灵活表达非函数型的曲线（任意曲线）



特例：参数曲面

$$f: R^2 \to R^3 \qquad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

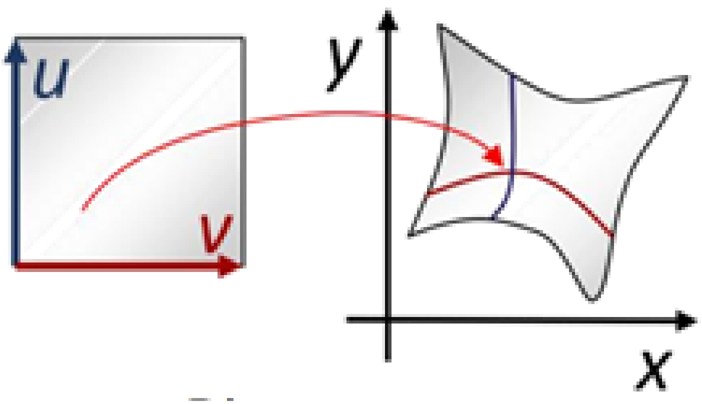
- 几何解释：
  - 一张曲面由两个参数(u,v)决定，也称为双参数曲面
  - 可灵活表达非函数型的任意曲面



特例：二维映射

$$f: R^2 \to R^2 \qquad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

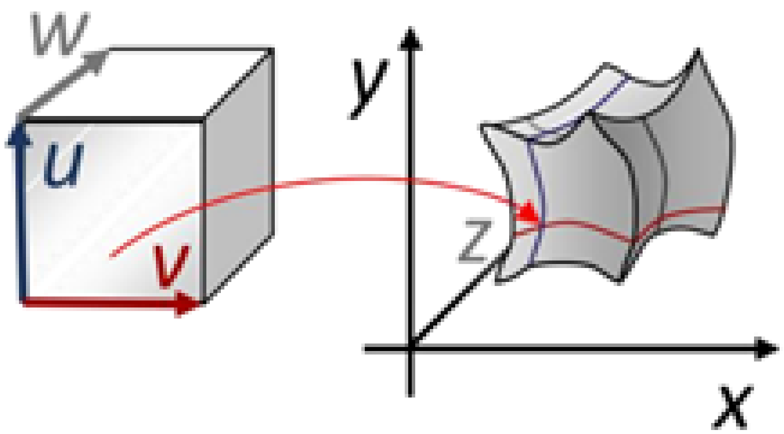
- 几何解释：
  - 二维区域之间的映射
  - 可看成特殊的曲面（第三个维度始终为0）
  - 应用：图像变形



特例：二维映射

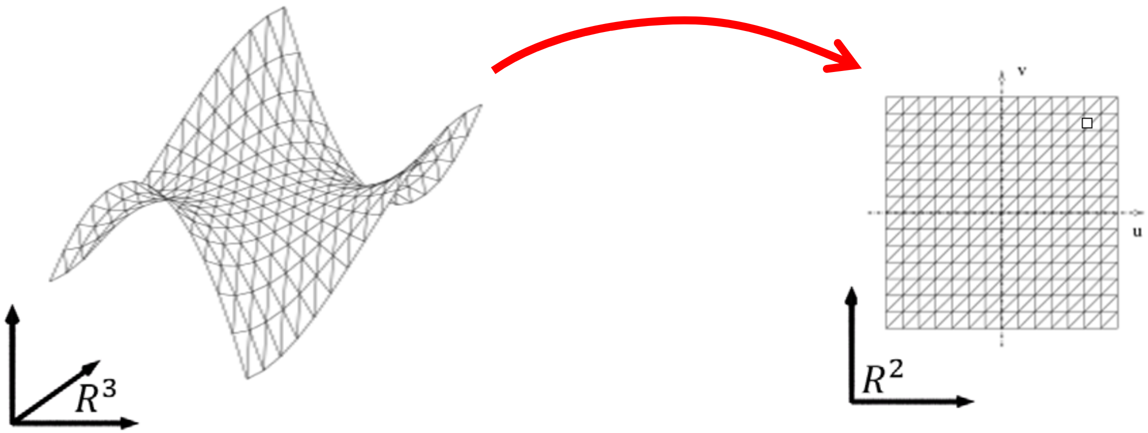
$$f: R^3 \to R^3 \qquad \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \qquad (u,v,w) \in [0,1]^3$$

- 几何解释：
  - 三维体区域之间的映射
  - 应用：体形变、体参数化



特例：降维映射（低维投影）

$$f: R^3 \rightarrow R^2$$



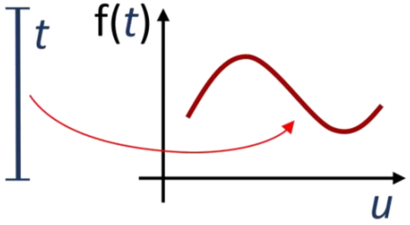
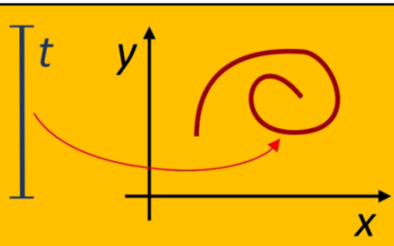
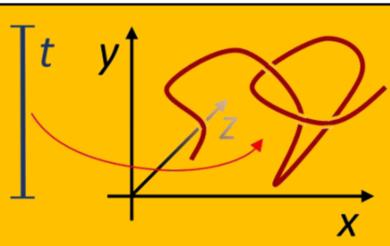
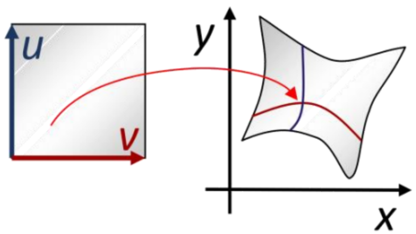
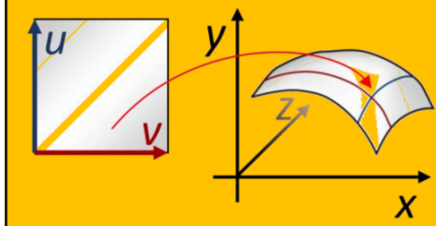
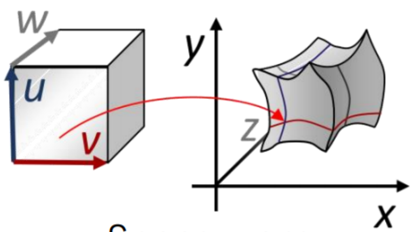
- 降维映射一般有信息丢失
  - 丢失的信息大部分情况下不可逆，即无法恢复

一般映射

$$f: R^n \to R^m$$

- 如果$n < m$，为低维到高维的映射（高维的超曲面，n维流形曲面），本征维度为n
- 如果$n > m$，为降维映射
  - 一般信息有损失
  - 如果R^n中的点集刚好位于一个m维（或小于m）的流形上，则映射可能是无损的，即可以被恢复的

低维空间之间的函数

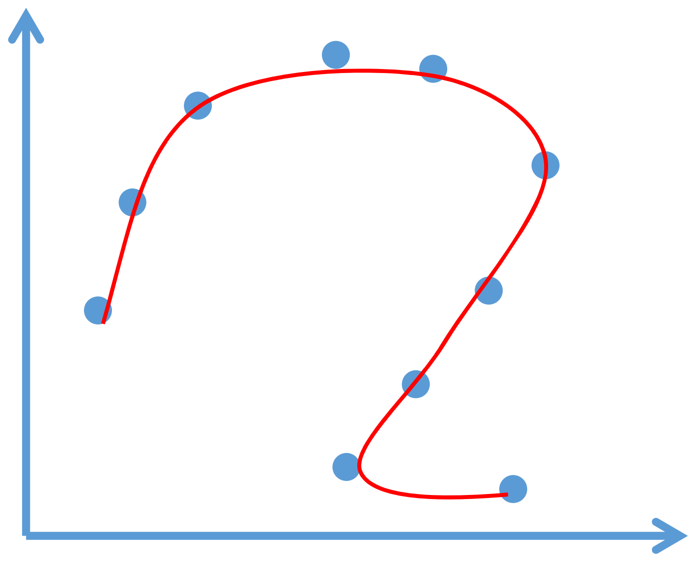
	Output: 1D	Output: 2D	Output: 3D
Input: 1D	 Function graph	 Plane curve	 Space curve
Input: 2D		 Plane warp	 Surface
Input: 3D			 Space warp

曲线拟合

曲线拟合问题

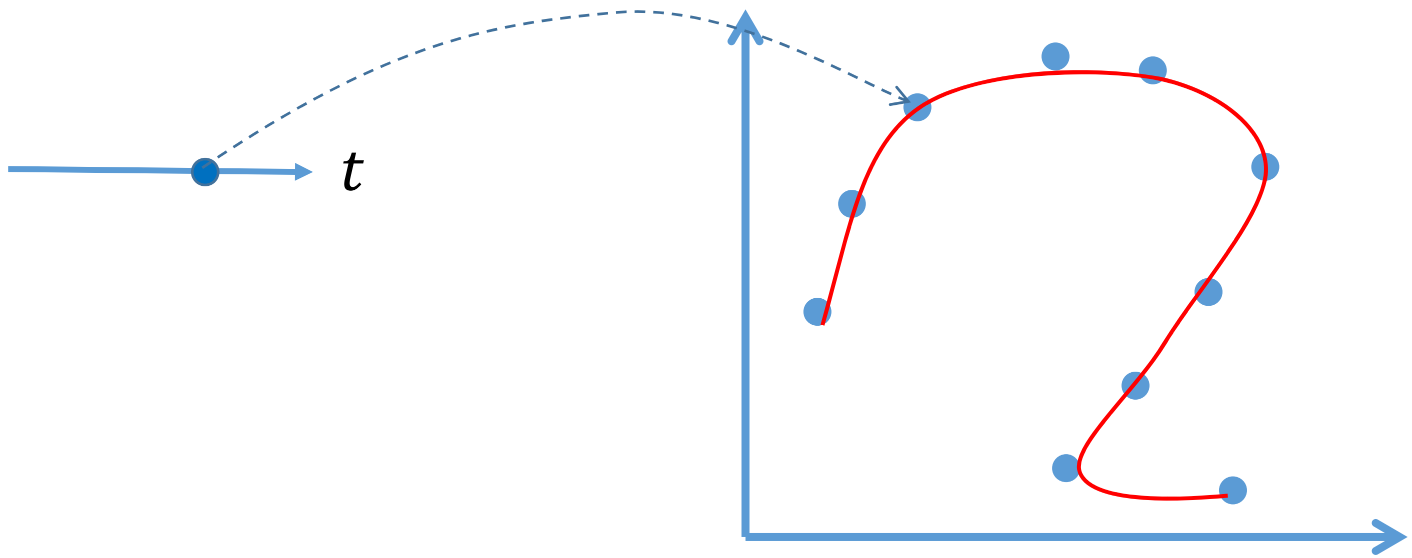
- 输入：给定平面上系列点$(x_i, y_i), i = 1,2, \dots, n$
- 输出：一条参数曲线，拟合这些点

$$f: R^1 \to R^2 \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$



应该怎么做?

曲线拟合问题



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

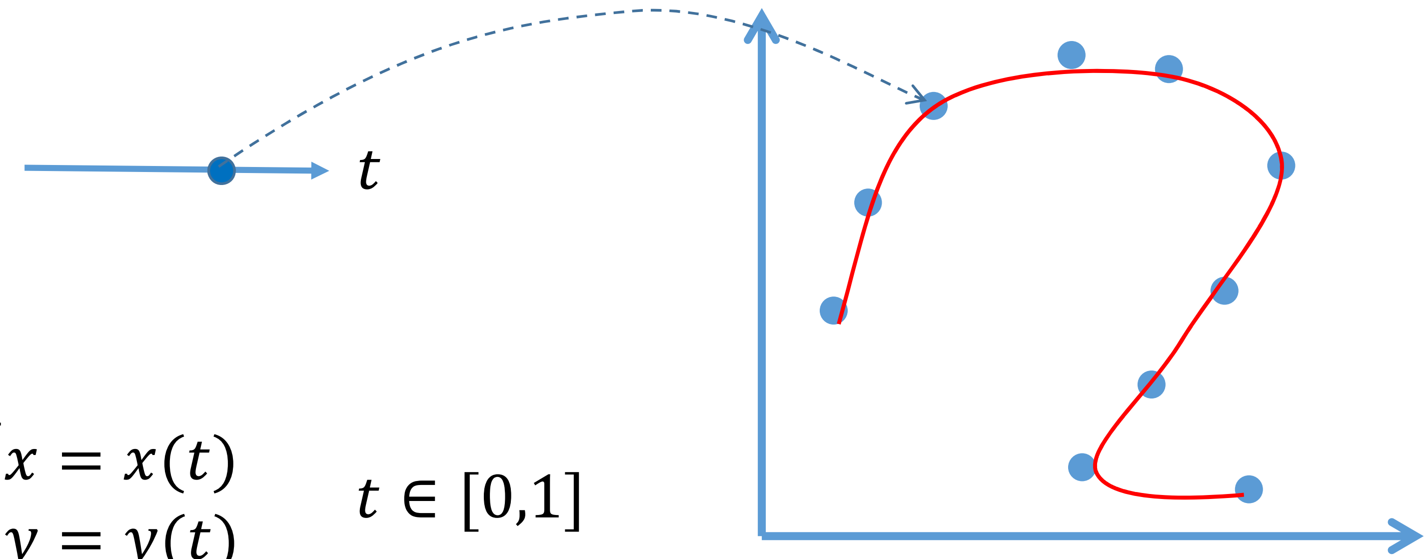
矢量符号化表达：

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- 问题：对数据点(x_i, y_i)，对应哪个参数t_i？
- 误差度量：$E = \sum_{i=1}^{n} \left\| \begin{pmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{p}(t_i) - \boldsymbol{p}_i\|^2$

参数化问题

- 求数据点所对应的参数：一个降维的问题！



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

- 然后极小化误差度量：$E = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{p}(t_i) - \boldsymbol{p}_i\|^2$

点列的参数化

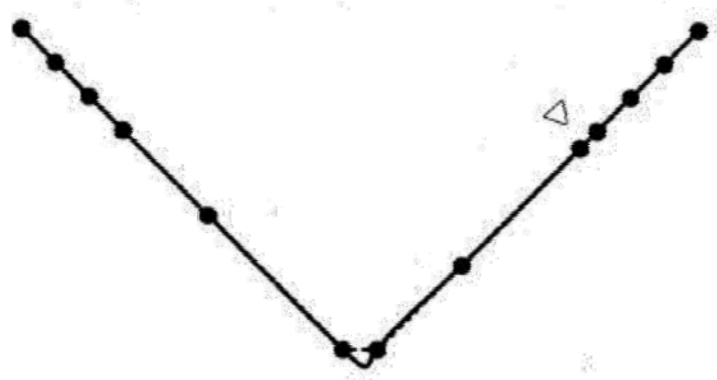
- Equidistant (uniform) parameterization
  - $t_{i+1} - t_i = \text{const}$
  - e.g. $t_i = i$
  - Geometry of the data points is not considered
- Chordal parameterization
  - $t_{i+1} - t_i = \|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|$
  - Parameter intervals proportional to the distances of neighbored control points

点列的参数化

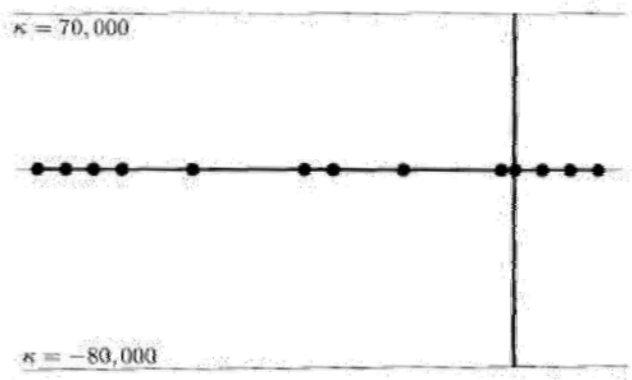
- Centripetal parameterization
  - $t_{i+1} - t_i = \sqrt{\|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|}$
- Foley parameterization
  - Involvement of angles in the control polygon
  - $t_{i+1} - t_i = \|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\| \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\frac{\hat{\alpha}_i\|\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_{i-1}\|}{\|\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_{i-1}\| + \|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|} + \frac{3}{2}\frac{\hat{\alpha}_{i+1}\|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\|}{\|\boldsymbol{k}_{i+1} - \boldsymbol{k}_i\| + \|\boldsymbol{k}_{i+2} - \boldsymbol{k}_{i+1}\|}\right)$
  - with $\hat{\alpha}_i = \min\left(\pi - \alpha_i, \frac{\pi}{2}\right)$
  - and $\alpha_i = \mathrm{angle}(\boldsymbol{k}_{i-1}, \boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_{i+1})$

一个例子

- Examples: Uniform parameterization



Curve

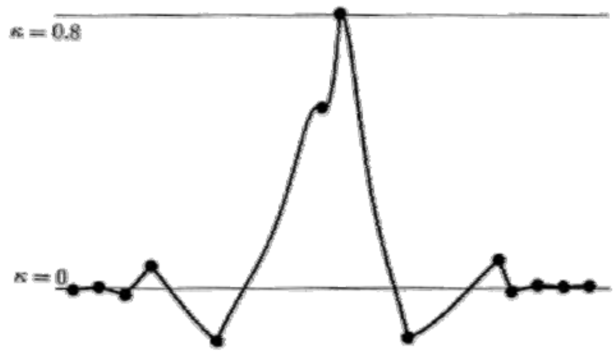


Curvature plot

一个例子

- Examples: Chordal parameterization

Curve

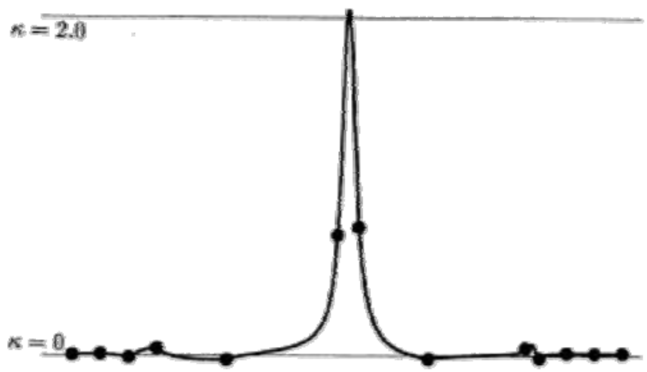


Curvature plot

一个例子

- Examples: Centripetal parameterization

Curve

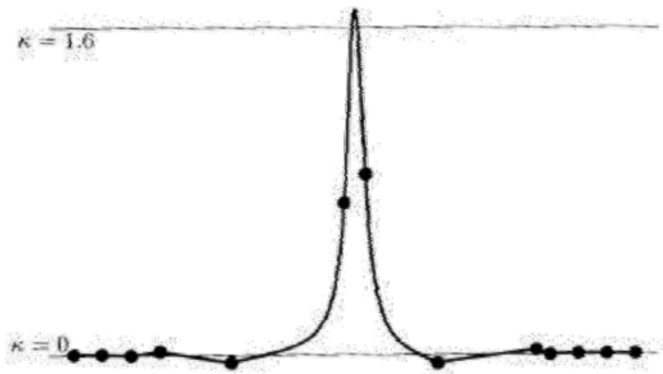


Curvature plot

一个例子

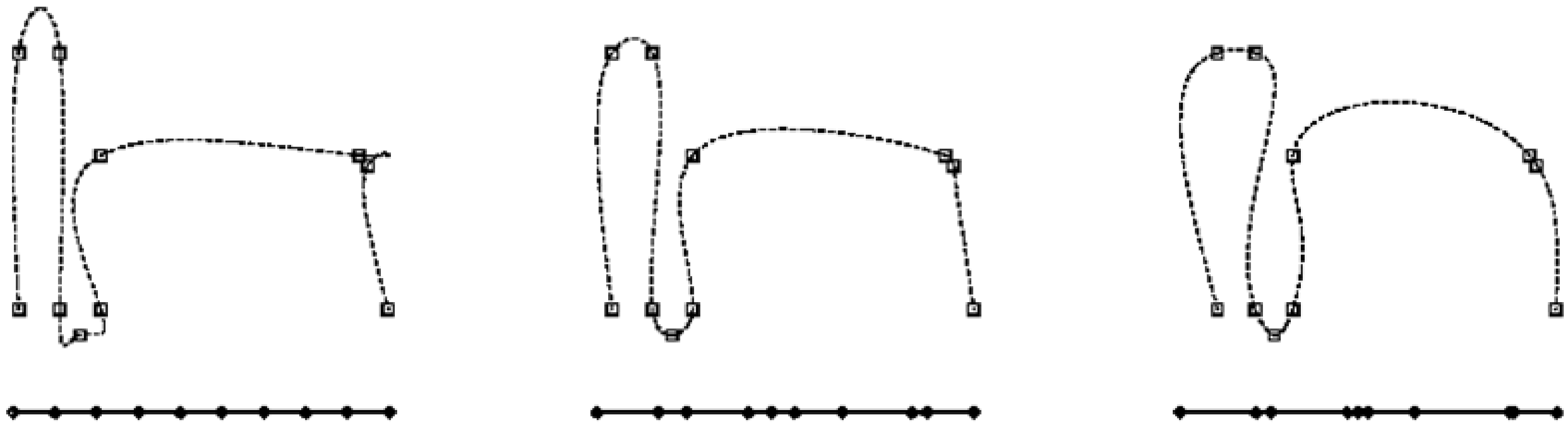
- Examples: Foley parameterization

Curve



Curvature plot

另一个例子

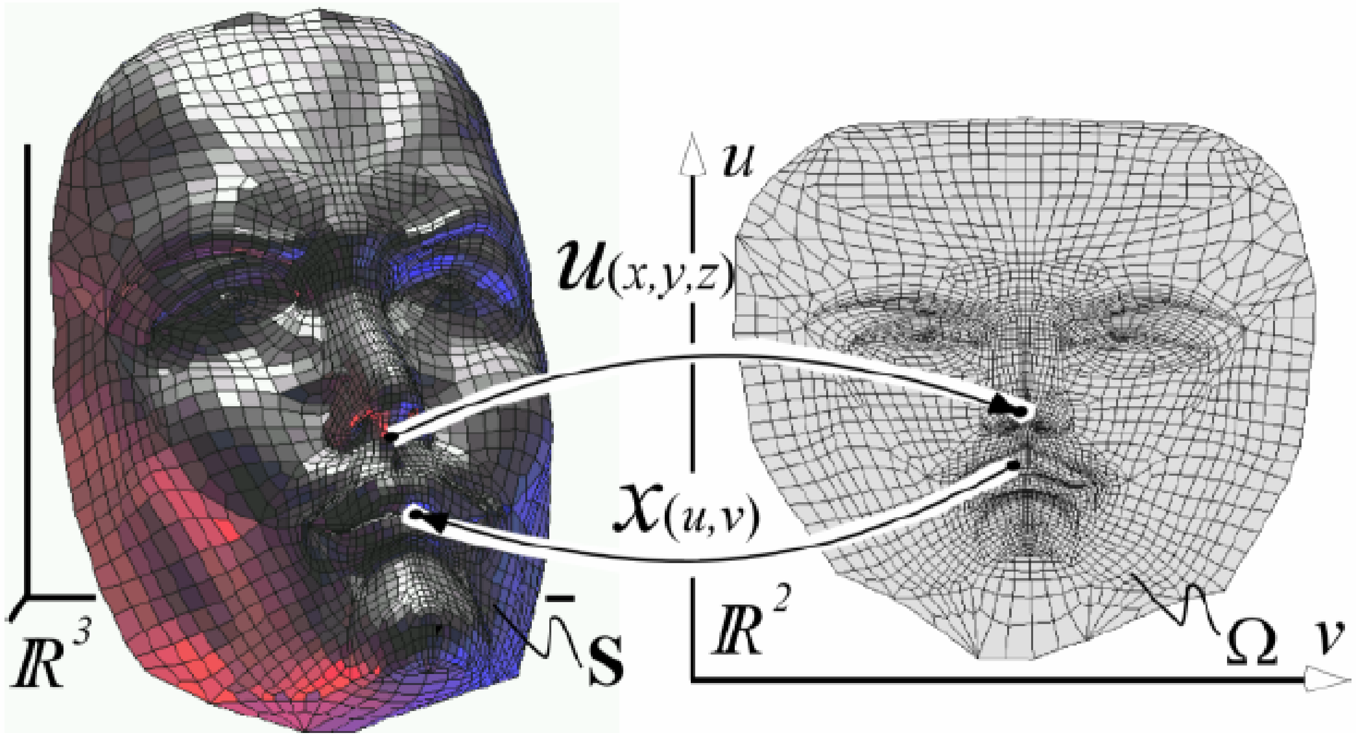


uniform　chord length　centripetal

点的参数化对曲线拟合的影响很大，需要好的参数化!

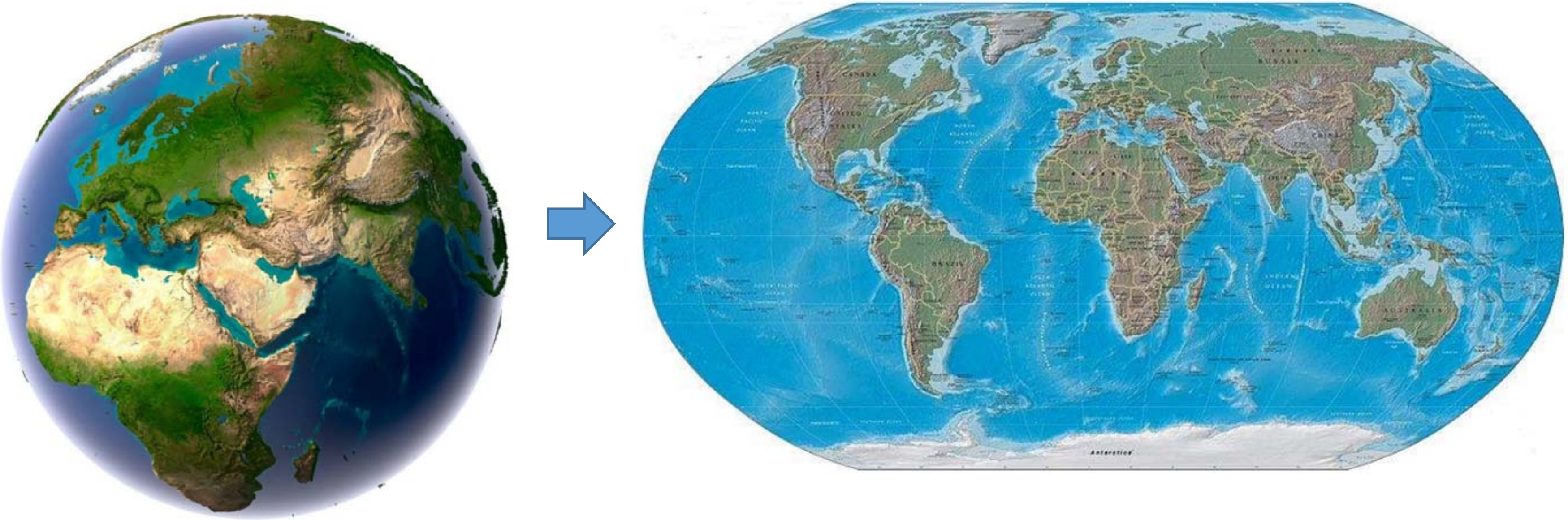
曲面参数化

- 三维的点找二维的参数：一个降维的问题！



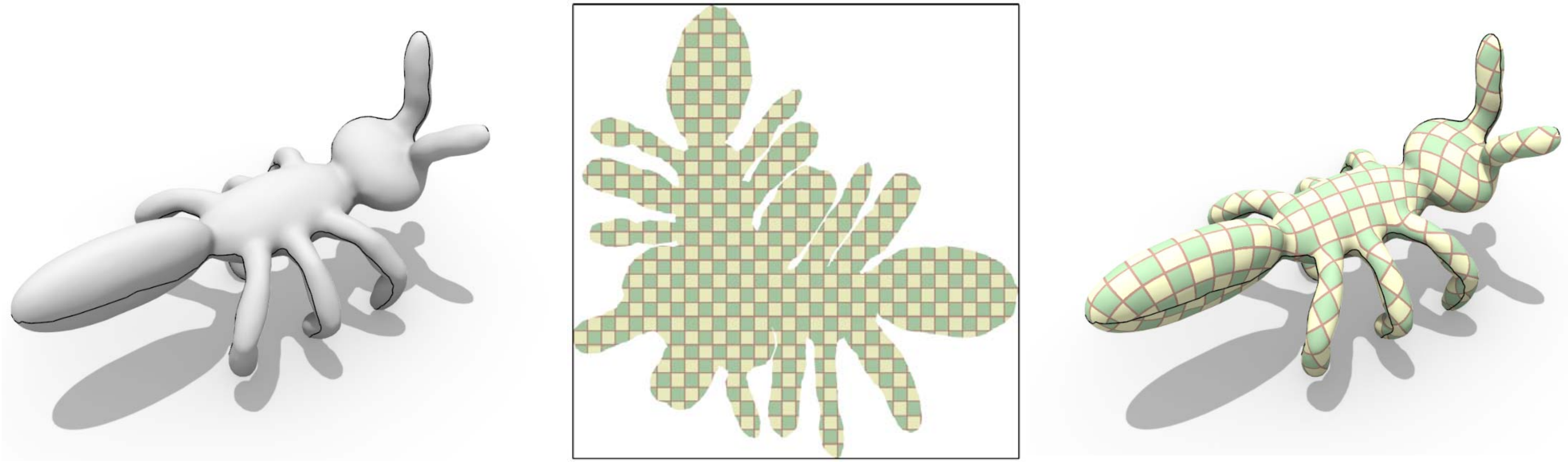
曲面参数化的应用

- 地图绘制（地理学）



曲面参数化的应用

- 纹理映射



作业2情况

- 作业2情况
  - 演示优秀demo
  - 优秀代码和优秀报告
- 其他学员可以继续完成提交
  - 可参照优秀作业尽快完成，赶上大部队

作业3

- 任务
  - 使用单参数曲线来拟合平面上任意有序点列
- 目的
  - 学习参数曲线拟合
  - 使用各种参数化方法，并进行比较
- 要求
  - 可以使用其他语言(Matlab, Python等)或其他框架
- Deadline：2020 年10 月31日晚

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

谢 谢 ！