

1. Sintonía algebraica de PI y PID — 2GDL

1.1 Sintonía algebraica de un controlador PI para un sistema de primer orden

Consideremos un sistema a controlar que puede aproximarse por la función de transferencia de primer orden:

$$G(s) = \frac{\alpha}{\tau s + 1} \quad (1.1)$$

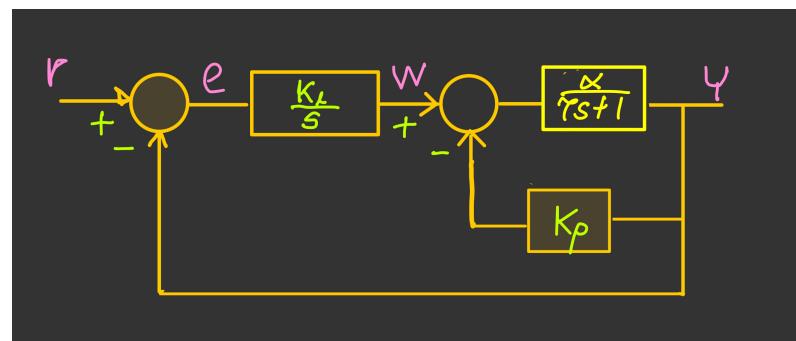


Figura 1.1: Control PI de dos grados de libertad

No estamos incluyendo en el modelo el retardo en el sistema (el cual se debe, ante todo, a la implementación digital), pero lo tendremos en cuenta en las restricciones de diseño.

Para este sistema vamos diseñar un controlador PI. Para implementarlo, es conveniente adoptar la arquitectura mostrada en la figura 1.1. Este es control PI de dos grados de libertad (PI-2GDL).

1.1.1 Función de transferencia de lazo cerrado

Obtengamos la función de transferencia de lazo cerrado de la referencia a la salida, $Y(s)/R(s)$, la cual denotaremos como $T(s)$. Para obtenerla, consideremos primero la función de transferencia de $W(s)$ a $Y(s)$ del lazo cerrado más interno, mostrado con el recuadro verde en la siguiente figura:

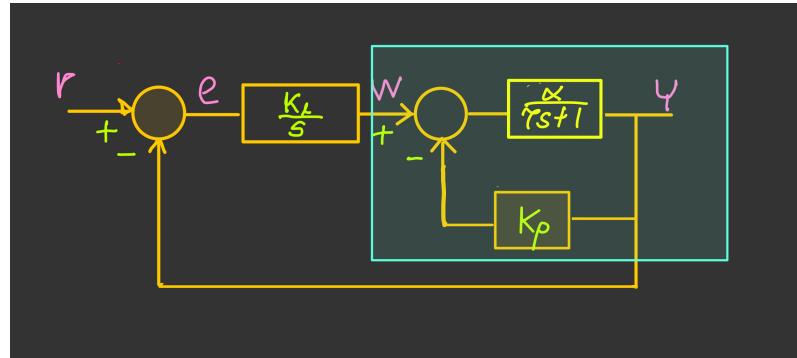


Figura 1.2: Lazo interno en el recuadro verde

La función $Y(s)/W(s)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{\frac{\alpha}{\tau s + 1}}{1 + k_p \frac{\alpha}{\tau s + 1}} \\ &= \frac{k_p \alpha}{\tau s + k_p \alpha + 1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Así que reemplazando el lazo interno por la expresión del lado derecho de la ecuación 1.2, llegamos a la simplificación mostrada en la siguiente figura:

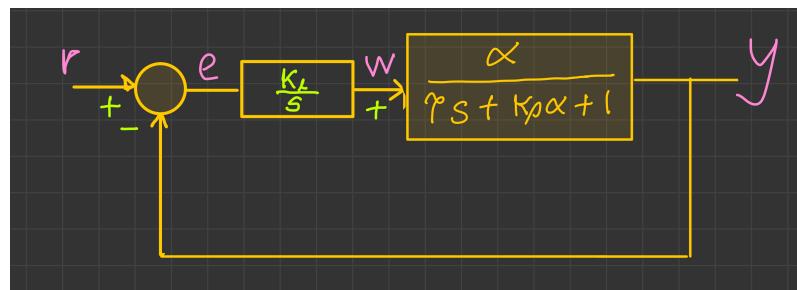


Figura 1.3: Diagrama simplificado

Finalmente, la función de transferencia de lazo cerrado $T(s) = Y(s)/R(s)$ se obtiene directamente de este diagrama como:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_i}{s} \frac{\alpha}{\tau s + k_p \alpha + 1}}{1 + \frac{k_i}{s} \frac{\alpha}{\tau s + k_p \alpha + 1}}$$

Simplificando y factorizando convenientemente obtenemos la siguiente función de transferencia de segundo orden:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_i \alpha}{\tau}}{s^2 + \left(\frac{k_p \alpha + 1}{\tau}\right)s + \frac{k_i \alpha}{\tau}} \quad (1.3)$$

Apreciamos como la ecuación (1.3) define un sistema de segundo orden (ya visto en muchos cursos anteriores). Los sistemas de segundo orden se suelen presentar con la siguiente forma general:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.4)$$

en que:

- ω_n es la frecuencia natural.
- ζ es el coeficiente de amortiguamiento.

Igualando los coeficientes de los denominadores en las ecuaciones (1.3) y (1.4), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{k_p \alpha + 1}{\tau} &= 2\zeta\omega_n \\ \frac{k_i \alpha}{\tau} &= \omega_n^2 \end{aligned}$$

Estas expresiones, a su vez, nos permiten calcular las constantes k_p y k_i a partir de los parámetros ω_n y ζ del sistema de segundo orden, así:

$$k_p = \frac{2\tau\zeta\omega_n - 1}{\alpha} \quad (1.5a)$$

$$k_i = \frac{\tau\omega_n^2}{\alpha} \quad (1.5b)$$

1.2 Respuesta al escalón de un sistema de segundo orden

En la figura 1.4 se muestra la forma general de la respuesta de un sistema de segundo orden a un escalón. Este tipo de respuesta se usa para evaluar el desempeño transitorio de un sistema de control.

Denotemos como $\Delta_y = y_b - y_a$ al cambio neto en el valor de estado estacionario de la salida, producido al aplicar el escalón. Definamos también el valor máximo de la salida como $y_{max} = \max |y(t)|$.

Con esta notación, algunas medidas cuantitativas importantes de la respuesta transitoria de un sistema de control son las siguientes:

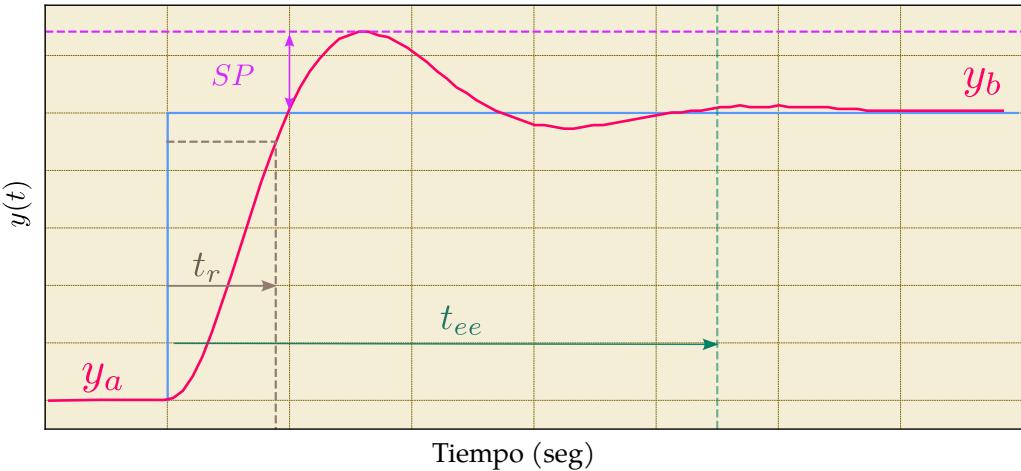


Figura 1.4: Respuesta al escalón en un sistema de segundo orden

SP: *Sobrepico o sobrepasso* es cuanto se pasa la salida del sistema en proporción al cambio neto de valor de estado estacionario que ocurrió al aplicar el escalón. Formalmente,

$$SP = \frac{y_{max} - y_b}{\Delta_y} \times 100\%. \quad (1.6)$$

t_{ee} : *El tiempo de establecimiento* mide cuanto tarda en estabilizarse el sistema controlado. Formalmente, el tiempo de establecimiento se produce cuando para un tiempo $t \geq t_{ee}$, la salida $y(t)$ cumple:

$$|y(t) - y_b| \leq 0.02\Delta_y. \quad (1.7)$$

t_r : *El tiempo de subida* mide el tiempo más corto en que el sistema alcanza el 90 % del cambio neto de estado estacionario, después de aplicar el escalón. Formalmente, es el tiempo mínimo para el cual:

$$y(t_r) = y_a + 0.9\Delta_y. \quad (1.8)$$

En control, es usual diseñar sistemas para que sean levemente subamortiguados ($\zeta < 1$). En este caso, las siguientes expresiones permiten calcular, aproximadamente¹, el sobrepico (SP), el tiempo de establecimiento (t_{ee}) y el tiempo de subida (t_r).

$$t_{ee} \approx \frac{4.5}{\zeta \omega_n} \quad (1.9)$$

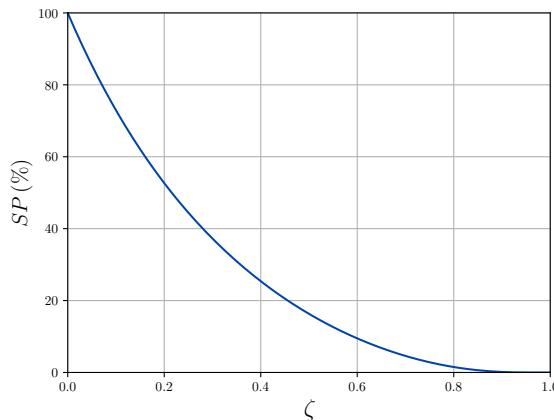
$$t_r \approx \frac{2.5}{\omega_n} \quad (1.10)$$

$$SP = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (1.11)$$

Las ecuaciones (1.9) y (1.10) nos muestran que la frecuencia natural influye en la velocidad de respuesta del sistema en lazo cerrado. Así, al aumentar el valor de ω_n , se obtiene un sistema más rápido, esto es, con menores valores de t_{ee} y t_r .

La figura 1.5 muestra la variación del sobrepico SP en función del parámetro ζ . Como podemos apreciar, al aumentar el valor de ζ se obtiene un sistema *más amortiguado* y, por consiguiente, con menor sobrepico.

¹Es probable que en la clase de teoría vea algunas expresiones distintas, aunque similares. Todas ellas son aproximaciones que nos permiten abordar de forma simplificada el problema de diseño.

Figura 1.5: Sobreíto SP en función del factor de amortiguamiento ζ

1.2.1 ¿Cuáles consideraciones de los sistemas de segundo orden nos interesan en sistemas de control?

En un sistema de control es usual tener que cumplir especificaciones de diseño como, por ejemplo, un sobreíto requerido menor al 10 %. Para este propósito, las ecuaciones (1.11), (1.9) y (1.10) se transforman en las siguientes desigualdades:

$$\omega_n \geq \frac{4.5}{\zeta t_{ee}} \quad (1.12)$$

$$\omega_n \geq \frac{2.5}{t_r} \quad (1.13)$$

$$\zeta \geq \frac{|\ln SP/100|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln SP/100)^2}} \text{ (sobreíto en porcentaje)} \quad (1.14)$$

■ **Ejemplo 1.1 — Parámetros de diseño.** Supongamos que necesitamos diseñar un control de velocidad para el motor del laboratorio con las siguientes restricciones de diseño:

$$SP \leq 10 \%$$

$$t_{ee} \leq 1 \text{ seg.}$$

Esto nos produce las siguientes condiciones para ζ y ω_n

$$\zeta \geq \frac{|\ln SP/100|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln SP/100)^2}} = \frac{|\ln 0.1|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 0.1)^2}} = 0.6 \quad (1.15)$$

$$\omega_n \geq \frac{4.5}{\zeta t_{ee}} = \frac{4.5}{0.6 \times 1} = 7.5 \text{ rad/s} \quad (1.16)$$

Es decir que para cumplir los requerimientos se debe cumplir que:

$$\zeta \geq 0.6$$

$$\omega_n \geq 7.5 \text{ rad/s}$$

■

1.2.2 Restricciones para la frecuencia natural ω_n

En general, cuando diseñamos un sistema de control que puede ser descrito como de segundo orden es deseable aumentar la frecuencia natural porque esto nos produce un sistema más rápido. Pero no es solo más rápido: la ecuación (1.5b) nos dice que la constante integral k_i aumenta con el cuadrado de ω_n y este aumento produce *mejor rechazo a perturbaciones* [1].

Sin embargo, existen límites a este aumento debido a la energía y otras restricciones sistémicas.

Restricciones sistémicas para ω_n

Si seleccionamos un valor muy bajo de frecuencia natural ω_n obtenemos un valor negativo de constante proporcional en la ecuación (1.5a). Para evitarlo se requiere que $\omega_n > 1/(2\zeta\tau)$. Adicionalmente, cuando ω_n es bajo el sistema de lazo cerrado se hace muy sensible a perturbaciones.

Si seleccionamos un valor muy alto para ω_n pueden presentarse oscilaciones indeseadas por efectos de dinámicas que no hemos considerado en el modelo como, por ejemplo, el retardo producido por el tiempo de muestreo y constantes de tiempo de polos que se han despreciado en la etapa de modelado.

En ese orden de ideas, los valores apropiados de frecuencia natural deben ocurrir dentro del siguiente rango [1]:

$$\frac{1}{2\zeta\tau} < \omega_n \leq \frac{0.25}{T_e} \quad (1.17)$$

En que T_e es la suma de las constantes de tiempo de polos que no aparecen modelados y del retardo debido al tiempo de muestreo en el control digital.

Restricciones de energía y su influencia en ω_n

Siempre que diseñamos un sistema de control es vital considerar la *restricción energética*, es decir, cuanta energía podemos entregar al sistema controlado. Esta restricción se puede escribir como

$$|u(t)| \leq u_{max} \quad (1.18)$$

Por ejemplo, en el caso del motor, la tensión de control está restringida entre $-5V$ y $5V$, es decir:

$$|u(t)| \leq u_{max} = 5. \quad (1.19)$$

Comentario 1.2.1 — Restricción de energía y ω_n . Notemos que las desigualdades (1.12) y (1.13) nos indican que para lograr una respuesta más rápida debemos aumentar la frecuencia natural del sistema ω_n . Sin embargo, en la medida en que aumentamos ω_n también aumenta el gasto energético.

Conclusión: la restricción energética impone un límite al valor de ω_n .

- **Ejemplo 1.2 — Rango de frecuencias.** Consideremos que, mediante un experimento, hemos obtenido el siguiente modelo FOTD para el sistema térmico (estos valores son ficticios, así que no los use en sus cálculos):

$$G(s) = \frac{1.5}{30s + 1} \quad (1.20)$$

El retardo no modelado en el sistema se debe al muestreo digital que ocurre cada 0.8s , esto es, $T_e = 0.8\text{s}$. Supongamos que se requiere un sobrepico menor al 5% que implica un mínimo valor de $\zeta = 0.7$. Podemos usar el intervalo (1.17) para tener un estimado del rango de la frecuencia angular ω_n admisible en el sistema controlado. Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\zeta\tau} < \omega_n &\leq \frac{0.25}{T_e} \\ \frac{1}{2 \times 0.7 \times 30} < \omega_n &\leq \frac{0.25}{0.8} \end{aligned}$$

Entonces, la frecuencia natural del sistema debe estar dentro del rango:

$$0.023 < \omega_n \leq 0.31 \quad (1.21)$$

■

Efectos de los parámetros de diseño ω_n y ζ

La tabla 1.1 resume conceptualmente el mayor efecto de los parámetros de diseño ζ y ω_n sobre las características del sistema de lazo cerrado.

Cuadro 1.1: Efectos de los parámetros ω_n y ζ sobre las características del sistema en lazo cerrado.

sobrepico SP	t_{ee}	t_r	señal de control máxima $u(t)$	rechazo de perturbaciones
$\zeta \uparrow$	\downarrow	—	\uparrow	—
$\omega_n \uparrow$	—	\downarrow	\downarrow	\uparrow (mayor rechazo)

Notemos que la frecuencia natural ω_n y el coeficiente de amortiguamiento ζ son *parámetros de diseño* porque permiten actuar de forma relativamente separada sobre diferentes aspectos del lazo de control. Por ejemplo, ζ impacta de forma directa el sobrepico, mientras que ω_n impacta en el tiempo de respuesta, la señal de control y la respuesta a perturbaciones.

1.2.3 Método práctico de ajuste iterativo algebraico para un control PI

A continuación vamos a presentar un método iterativo de ajuste algebraico para un sistema de primer orden como el sistema térmico o el motor controlado en velocidad. El objetivo de este método es maximizar el desempeño del controlador PI para lograr un sistema más rápido y con mayor rechazo de perturbaciones.

Datos de diseño

Debemos tener un modelo de primer orden del sistema $G(s)$ que queremos controlar. Debemos tener una estimación del retardo y de las constantes de tiempo no modeladas que definen T_e . Podemos tener requerimientos de diseño en forma de sobrepico (SP), tiempo de establecimiento (t_{ee}) o tiempo de subida (t_r). También tendremos un límite para la señal de control $|u(t)| \leq u_{max}$ que tenemos disponible.

Pasos del método

Paso 1: Con el límite inferior de la desigualdad (1.14), encuentre un valor inicial para el coeficiente de amortiguamiento, esto es:

$$\zeta \leftarrow \frac{|\ln SP/100|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln SP/100)^2}} \text{ (sobrepico en porcentaje)}, \quad (1.22)$$

Paso 2: Encuentre un valor inicial de frecuencia natural ω_n , usando el límite inferior dado por (1.17) en conjunto con las especificaciones de tiempo de establecimiento y tiempo de subida. Esto es, asigne ω_n inicialmente como:

$$\omega_n \leftarrow \max \left(\frac{1}{2\zeta\tau}, \frac{4.5}{\zeta t_{ee}}, \frac{2.5}{t_r} \right) \quad (1.23)$$

Revise que este valor se encuentre en el intervalo dado por la expresión (1.17). En caso contrario, debemos relajar las especificaciones de rapidez en respuesta porque no serán logradas.

Paso 3: Calcule y programe las constantes k_p y k_i del controlador usando las ecuaciones (1.5a)–(1.5b), esto es:

$$k_p \leftarrow \frac{2\tau\zeta\omega_n - 1}{\alpha}$$

$$k_i \leftarrow \frac{\tau\omega_n^2}{\alpha}$$

Paso 4: Obtenga la respuesta al escalón del sistema para un cambio especificado en la señal de referencia.

Paso 5:

- Si $\omega_n < 0.25/T_e$ y, simultáneamente, la señal de control no supera la limitación de control dada por $|u(t)| \leq u_{max}$, aumente ω_n para lograr mejor velocidad de respuesta y mejor rechazo de perturbaciones. Vuelva al paso 3.

- Si $\omega_n = 0.25/T_e$; si inicia un comportamiento oscilatorio; o sí la señal de control está cercana al límite del sistema, esto es, $|u(t)| \approx u_{max}$ entonces hemos encontrado un valor límite de ω_n .

Paso 6: Una vez logrado el valor límite de ω_n , ajuste apropiadamente el valor ζ para lograr el sobrepico deseado. Realice ajustes pequeños, pues este parámetro es sensible.

Paso 7: Calcule y programe las constantes k_p y k_i del controlador usando las ecuaciones (1.5a) y (1.5b).

- Paso 8:**
- Obtenga la respuesta al escalón para un cambio en la señal de referencia especificado. Si el sobreímpetu es satisfactorio, hemos terminado el ajuste iterativo algebraico.
 - En caso contrario, vuelva al paso 6, (si $\zeta \geq 1.2$ y no logra el sobreímpetu deseado, disminuya el valor de ω_n y vuelva al paso 6).

Comentario 1.2.2 — ¿Por qué un método iterativo? El método iterativo que hemos presentado no está planteado como una receta infalible. Lo que verdaderamente queremos transmitir con este método es que en control (así como muchas áreas de la ingeniería, como la electrónica analógica) las expresiones matemáticas que se desprenden de la teoría nos dan punto de partida para el inicio de un proceso de ajuste que continúa hasta lograr, progresivamente, un sistema satisfactorio. Las expresiones matemáticas nos dan una hoja de ruta sobre como se deben realizar sistemáticamente los ajustes en la práctica para converger a una solución satisfactoria.

Es un error conceptual común pensar que cualquier proceso iterativo práctico es equivalente a “ensayo y error” ciego. Cuando entendemos conceptualmente un sistema, sabemos como debemos proceder en la próxima iteración para acercarnos más al objetivo deseado.

1.3 Control PID de un sistema de segundo orden

Consideremos ahora el sistema de control ángulo del motor DC. La función de transferencia de tensión a ángulo, denotada $G_\theta(s) = \theta(s)/U(s)$, puede aproximar por un sistema de segundo orden, según la siguiente expresión:

$$G_\theta(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{s(\tau s + 1)} \quad (1.24)$$

Note que no incluimos el retardo² obtenido en el modelo experimental, pero lo tendremos en cuenta en las limitaciones de diseño.

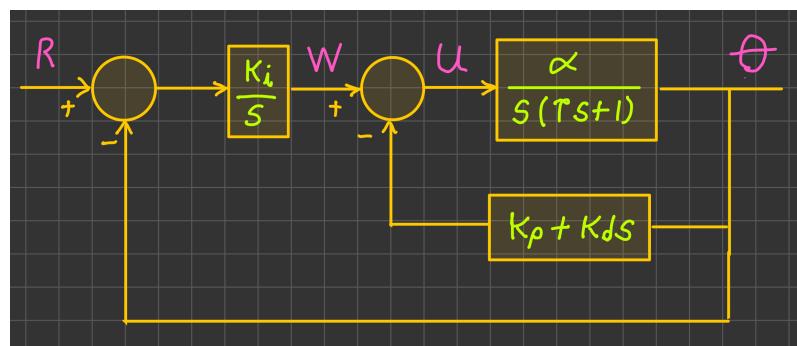


Figura 1.6: Control de ángulo del motor DC con un PID de dos grados de libertad

Para el control de ángulo vamos a diseñar y ajustar un controlador PID. Al igual que en el caso del PI, es conveniente en la implementación adoptar una arquitectura de PID de dos grados de libertad (PID-2GDL), mostrada en la figura 1.7.

²Este retardo se debe al tiempo de muestreo en la implementación digital del controlador

1.3.1 Función de transferencia de lazo cerrado

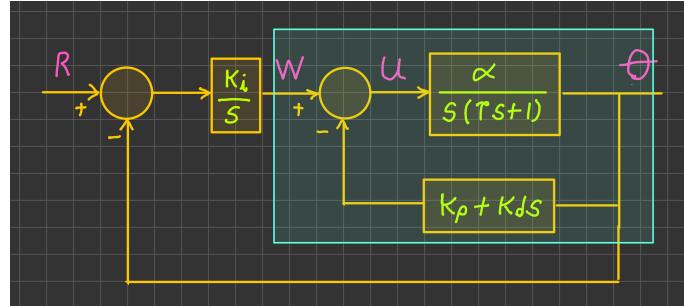


Figura 1.7: Lazo interno del control PID

Obtengamos la función de transferencia de lazo cerrado de la referencia a la salida, $T(s) = \theta(s)/R(s)$. Para obtenerla, consideremos primero la función de transferencia de $W(s)$ a $\theta(s)$ del lazo cerrado más interno, mostrado con el recuadro verde en la figura 1.7.

La función $\theta(s)/W(s)$ está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\theta(s)}{W(s)} &= \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{s(\tau s + 1)}(k_d s + k_p)} \\ &= \frac{\alpha}{\tau s^2 + (1 + \alpha k_d)s + \alpha k_p} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Reemplazando el lazo interno por expresión al lado derecho de la ecuación (1.25), obtenemos el diagrama de bloques simplificado de la figura 1.8.

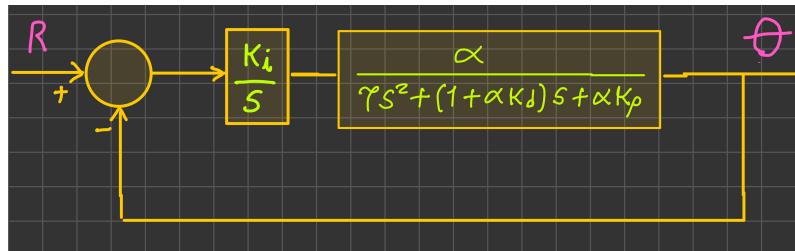


Figura 1.8: Diagrama simplificado del PID de dos grados de libertad

A partir de este diagrama, obtenemos la función de transferencia de lazo cerrado del sistema, dada por:

$$T(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_i}{s} \frac{\alpha}{\tau s^2 + (1 + \alpha k_d)s + \alpha k_p}}{1 + \frac{k_i}{s} \frac{\alpha}{\tau s^2 + (1 + \alpha k_d)s + \alpha k_p}} \quad (1.26)$$

Simplificando y agrupando convenientemente llegamos a la siguiente función de lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{\alpha k_i / \tau}{s^3 + \left(\frac{1 + \alpha k_d}{\tau}\right)s^2 + \left(\frac{\alpha k_p}{\tau}\right)s + \frac{\alpha k_i}{\tau}} \quad (1.27)$$

La ecuación (1.27) muestra que la función de lazo cerrado del control de ángulo con el PID es de tercer orden. Para usar los efectivos conceptos de diseño basados en sistemas de segundo orden revisados en la sección 1.2, es conveniente proponer una función de transferencia de lazo cerrado de la siguiente forma:

$$T(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{n\omega_n^3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + n\omega_n)}, \quad (1.28)$$

en que la constante $n > 1$ permite ajustar un polo adicional cuya constante de tiempo es más rápida que los polos dominantes de segundo orden, dados por las raíces de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$.

Expandiendo el denominador de la función de transferencia (1.28) obtenemos:

$$s^3 + \omega_n(2\zeta + n)s^2 + \omega_n^2(2\zeta n + 1)s + n\omega_n^3 \quad (1.29)$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales de los denominadores en las ecuaciones (1.27) y (1.29), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\alpha k_p}{\tau} = \omega_n^2(2\zeta n + 1) \quad (1.30a)$$

$$\frac{\alpha k_i}{\tau} = n\omega_n^3 \quad (1.30b)$$

$$\frac{1 + \alpha k_d}{\tau} = \omega_n(2\zeta + n) \quad (1.30c)$$

Resolviendo las ecuaciones (1.30a)–(1.30c) obtenemos las constantes k_p , k_i y k_d , dadas por:

$$k_p = \frac{\tau\omega_n^2(2\zeta n + 1)}{\alpha} \quad (1.31a)$$

$$k_i = \frac{n\tau\omega_n^3}{\alpha} \quad (1.31b)$$

$$k_d = \frac{\tau\omega_n(2\zeta + n) - 1}{\alpha} \quad (1.31c)$$

1.3.2 Limitaciones para la frecuencia natural ω_n

Para todo sistema de control existen limitaciones energéticas que no podemos superar de la forma $|u(t)| \leq u_{max}$. En el caso del sistema de control del motor en ángulo, tenemos la clara restricción de que $|u(t)| \leq 5V$.

Complementariamente, no se deben tener constantes del PID negativas. En este sentido, para no obtener una constante derivativa k_d negativa, la ecuación (1.31c) nos impone la restricción de que $\omega_n > 1/(\tau(2\zeta + n))$. Adicionalmente T_e impone un límite superior a la frecuencia natural. El rango permisible para ω_n está dado por:

$$\frac{1}{\tau(2\zeta+n)} < \omega_n \leq \frac{0.25}{T_e} \quad (1.32)$$

Recordemos que T_e incluye la suma de las constantes de tiempo de los polos no modelados en el sistema y del retardo producido por el muestreo digital.

1.3.3 Método práctico de ajuste iterativo algebraico para un control PID-2GDL

A continuación vamos a presentar un método iterativo de ajuste algebraico para un sistema de segundo orden como lo es control del ángulo del motor DC.

Datos de diseño

Debemos tener un modelo del motor en ángulo de la forma:

$$G_\theta(s) = \frac{\alpha}{\tau s + 1}$$

Este modelo se obtiene de identificar el motor *en velocidad angular con un punto de operación tan bajo como sea posible, por ejemplo 100°/s.*

Debemos tener una estimación del retardo que existe en el sistema de control y constantes de tiempo no modeladas, que definen T_e . Podemos tener requerimientos de diseño en forma de sobrepico (SP), tiempo de establecimiento (t_{ee}) o tiempo de subida (t_r). También tendremos un límite para la señal de control $|u(t)| \leq u_{max}$ que tenemos disponible.

Pasos del método

Paso 1: Con el límite inferior de la desigualdad (1.14), encuentre un valor inicial para el coeficiente de amortiguamiento, esto es:

$$\zeta \leftarrow \frac{|\ln SP/100|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln SP/100)^2}} \text{ (sobrepico en porcentaje)}, \quad (1.33)$$

Paso 2: Encuentre un valor inicial de frecuencia natural ω_n , usando el límite inferior dado por (1.32) en conjunto con las especificaciones de tiempo de establecimiento y tiempo de subida. Esto es, asigne ω_n inicialmente como:

$$\omega_n \leftarrow \max \left(\frac{1}{\tau(2\zeta+n)}, \frac{4.5}{\zeta t_{ee}}, \frac{2.5}{t_r} \right) \quad (1.34)$$

Revise que este valor se encuentre en el intervalo dado por la expresión (1.32). En caso contrario, debemos relajar las especificaciones de rapidez en respuesta porque no serán logradas.

Paso 3: Usando $n = 2$ para el sistema dominante sea el de segundo orden, calcule y programe (sin compensación de zona muerta) las constantes k_p , k_i y k_d del controlador

usando las ecuaciones (1.31a)–(1.31c), dadas por:

$$\begin{aligned} n &= 2 \\ k_p &\leftarrow \frac{\tau \omega_n^2 (2\zeta n + 1)}{\alpha} \\ k_i &\leftarrow \frac{n \tau \omega_n^3}{\alpha} \\ k_d &\leftarrow \frac{\tau \omega_n (2\zeta + n) - 1}{\alpha} \end{aligned}$$

Paso 4: Obtenga la respuesta al escalón del sistema para un cambio especificado en la señal de referencia.

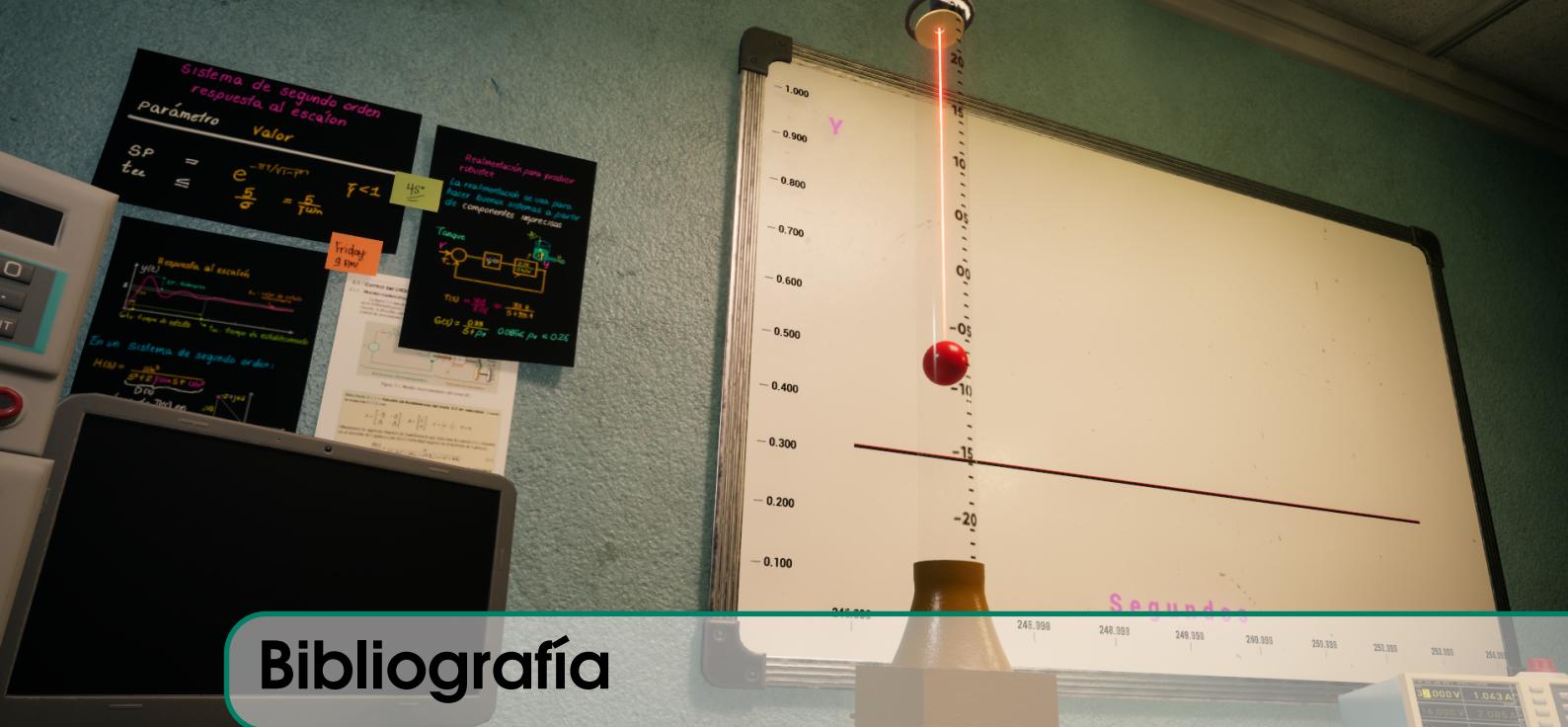
- Paso 5:**
- Si $\omega_n < 0.25/T_e$; si inicia un comportamiento oscilatorio indeseado; o si la señal de control no supera la limitación de control dada por $|u(t)| \leq u_{max}$, aumente ω_n para lograr mejor velocidad de respuesta y mejor rechazo de perturbaciones. Vuelva al paso 3.
 - Si $\omega_n = 0.25/T_e$ o sí la señal de control está cercana al límite del sistema, esto es, $|u(t)| \approx u_{max}$ entonces hemos encontrado un valor límite para ω_n .

Paso 6: Una vez logrado el valor límite de ω_n , ajuste apropiadamente el valor ζ para lograr el sobreímpetu (SP) deseado. Realice ajustes pequeños, pues este parámetro es sensible.

Paso 7: Calcule y programe las constantes k_p , k_i y k_d del controlador usando las ecuaciones (1.31a)–(1.31c).

- Paso 8:**
- Obtenga la respuesta al escalón para un cambio en la señal de referencia especificado. Si el sobreímpetu es satisfactorio, hemos terminado el ajuste iterativo algebraico.
 - En caso contrario, vuelva al paso 6, (si $\zeta \geq 1.5$ y no logra el sobreímpetu deseado, disminuya el valor de ω_n y vuelva al paso 6).

Paso 9: *Opcional: Ajuste finamente la compensación de zona muerta desde el valor que obtuvo en el modelo estático hasta lograr una respuesta con buena estabilización, poco error y sin oscilaciones.*



Bibliografía

Libros

- [ÅH06] K.J. Åström y T. Hägglund. *Advanced PID Control*. ISA-The Instrumentation, Systems, y Automation Society, 2006. ISBN: 9781556179426. URL: <https://books.google.com.co/books?id=XcseAQAAIAAJ> (véase página 6).

Artículos

Online

