Фільтри Баєса і Калмана

Ймовірнісний підхід до розрахунку динамічних параметрів стану роботизованої системи

Віктор Сахарчук

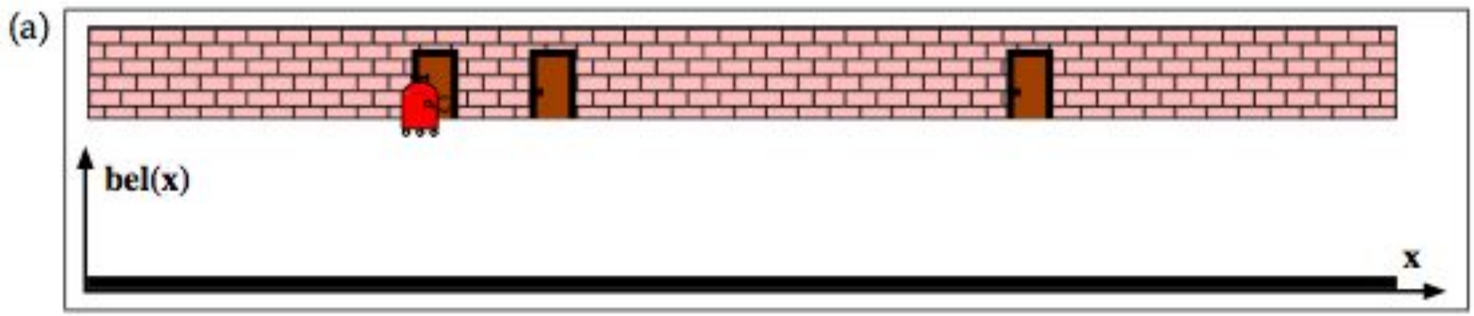
Мотивація застосувати оцінку замість прямої моделі

- Велика кількість факторів, що визначають стан системи
- Похибки вимірювальних приладів та сенсорів, зашумлення даних із сенсорів
- Обчислювальна складність
- Складність адаптації і розширення

Оцінка стану: приклади

- Локалізація об’єкта в просторі по карті
- Локалізація з одночасним створенням карти (SLAM)
- Об’єднання даних з різни сенсорів для збільшення точності вимірювань (sensor fusion)
- Згладжування показників сенсорів
- Прогнозування часових рядів

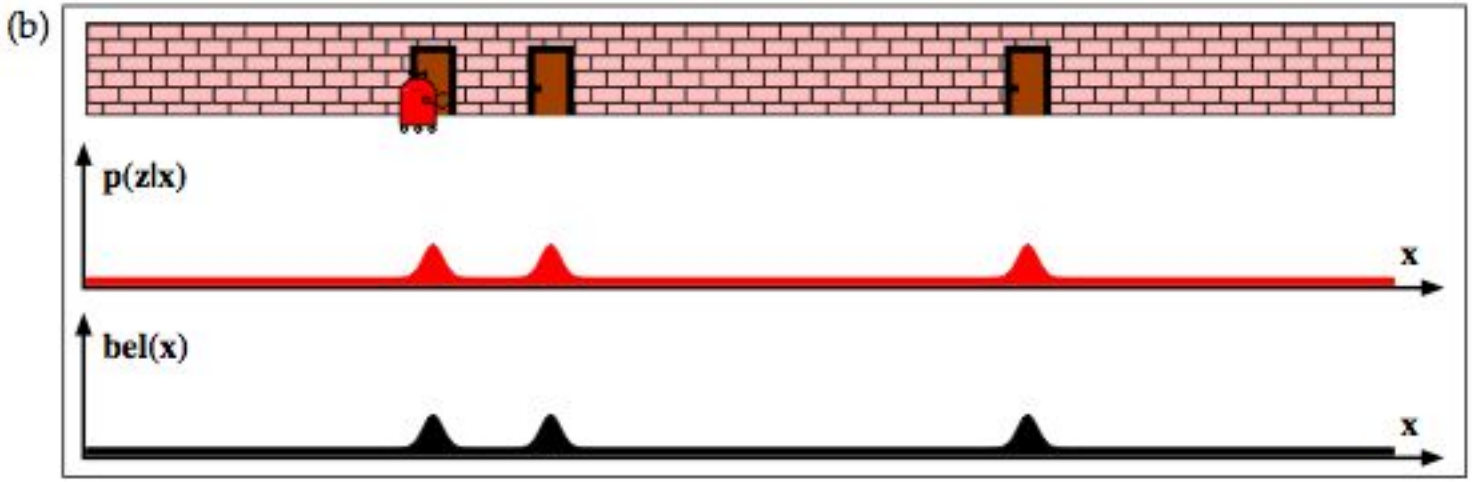
Локалізація



bel(x) = belief(x) – припущення, що випадкова величина набуває певного значення

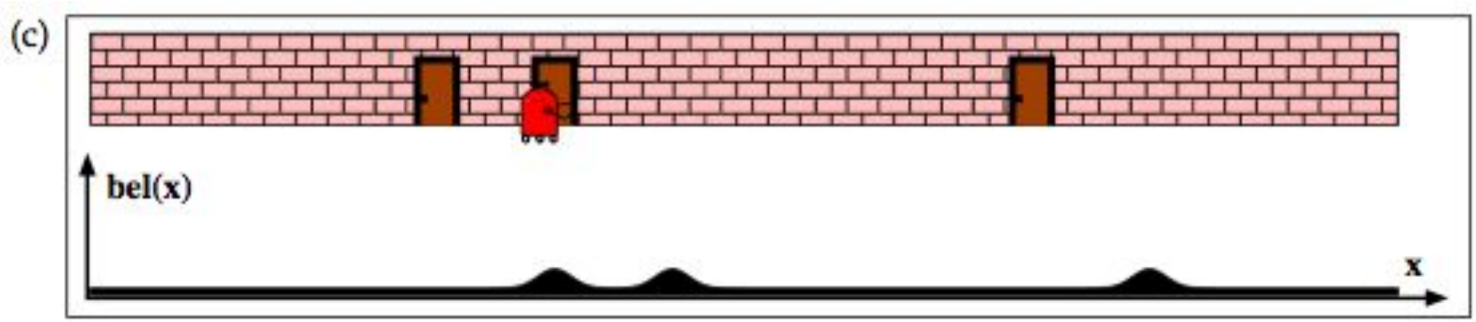
Робот не знає, де він знаходиться, тому вважаємо всі положення рівноймовірними

Локалізація



Дані сенсора показують позиції дверей. Ці дані об'єднуємо із попереднім припущенням (prior belief) для його оновлення

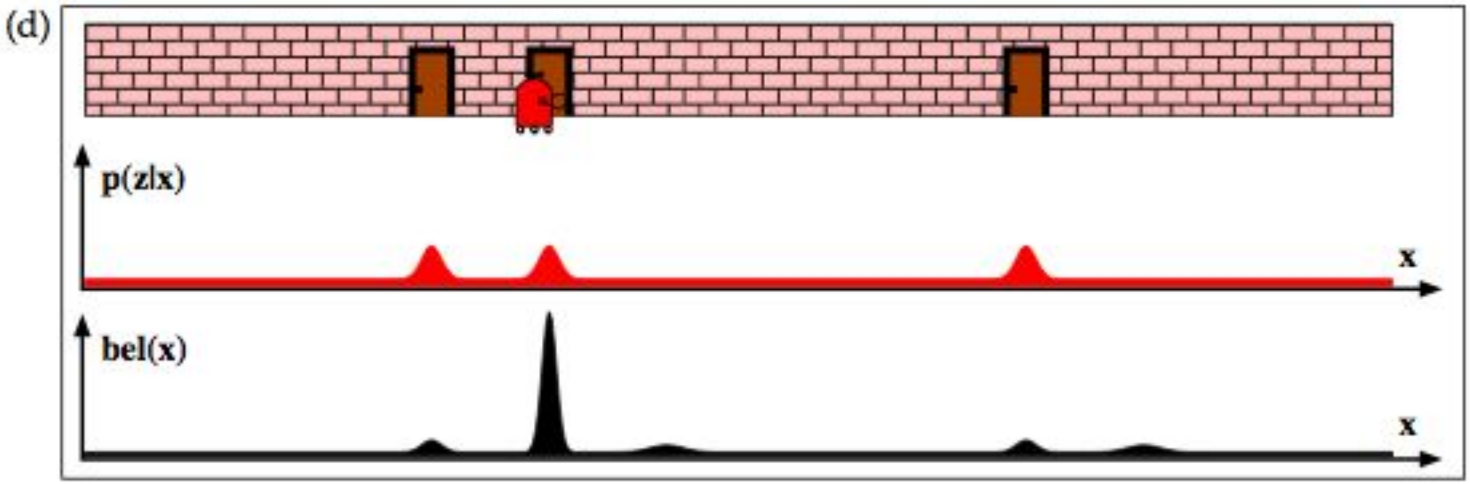
Локалізація



Робот рухається в напрямку праворуч.

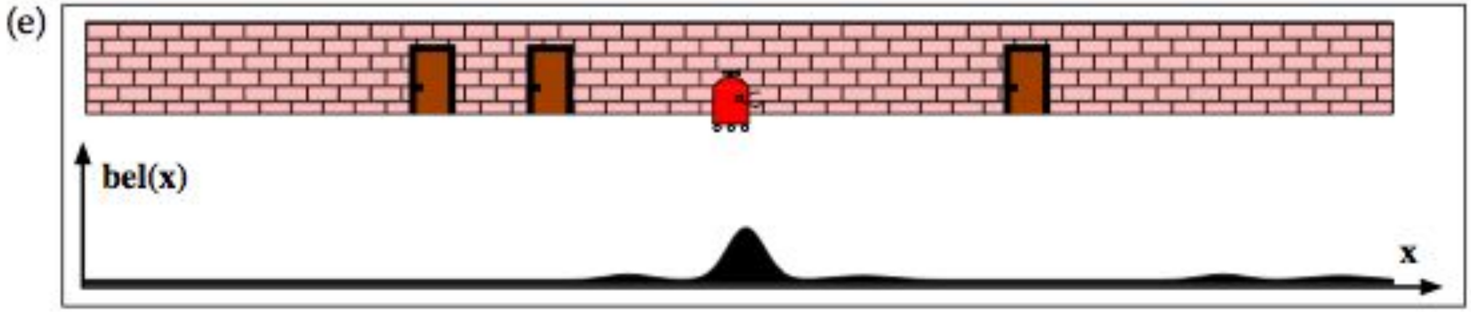
За значення позиції природно вважати попередню, зсунуту на розмір кроку в напрямку руху

Локалізація



Нові дані сенсора вказують, що робот знаходиться навпроти дверей. Ці дані об'єднуємо з попередньою гіпотезою і отримуємо нове припущення.

Локалізація



Робот рухаєтсья далі, тому оновлюємо припущення про його позицію маючи лише одометрію

Оцінка стану системи

Знайти наближене значення параметрів стану системи через вимірювання *z* і керування *u*

$$p(x \mid z,u)$$

$$P(x,y) = P(x \mid y)P(y) = P(y \mid x)P(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$P(x \mid y) = \frac{P(y \mid x)\; P(x)}{P(y)}$$

Нормалізація

$$P(x \mid y) = \frac{P(y \mid x)\; P(x)}{P(y)} = \eta\; P(y \mid x)\, P(x)$$

$$\eta = P(y)^{-1} = \frac{1}{\sum_x P(y \mid x)P(x)}$$

Приклад

- робот обладнаний бінарним сенсором, що в **60%** вимірювань набуває позитивного значення, якщо робот біля дверей, і в **30%** вимірювань позитивного значення, якщо робот знаходиться біля стіни
- знайти ймовірність того, що робот знаходиться біля дверей

Модель сенсора:

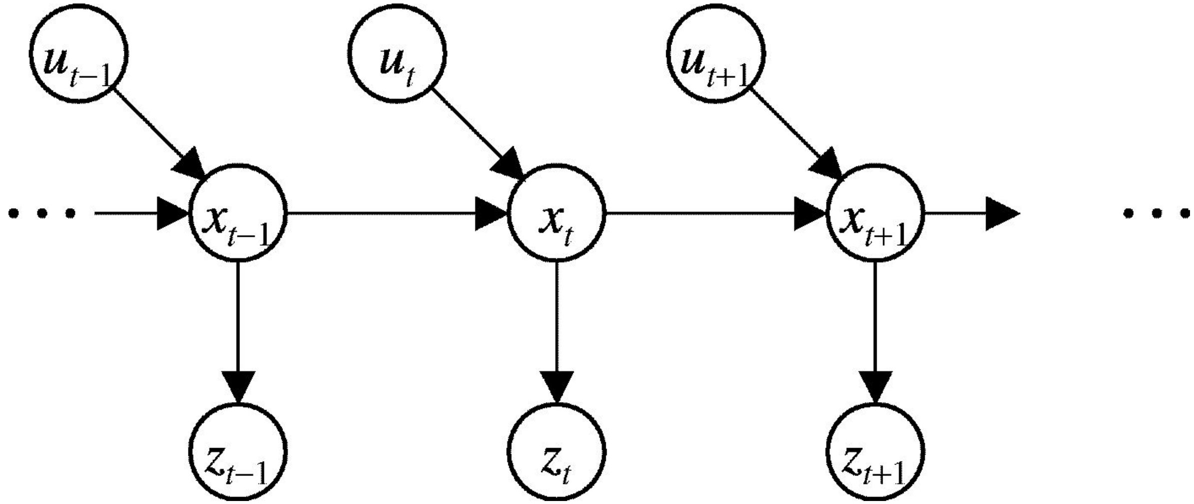
$P(z|двері) = 0.6 \qquad P(z|стіна) = 0.3$

$P(двері) = P(\text{стіна}) = 0.5$

$$P(двері \mid z) = \frac{P(z \mid двері)P(двері)}{P(z \mid двері)\,p(двері) + P(z \mid стіна)\,p(стіна)}$$

$$P(двері \mid z) = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{2}{3} = 0.67$$

Прихована марківська модель (HMM)



$$p(x_t \mid x_{1:t-1}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$$

- Для будь-якого моменту часу t0 імовірнісні характеристики випадкового процесу в майбутньому залежать лише від його стану в даний момент t0 і не залежать від того, як і коли система набула цього стану

Рекурсивне оновлення

$$P(x \mid z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_n \mid x, z_1, \ldots, z_{n-1})\, P(x \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}$$

Марківське припущення:

z_n не залежить від $z_1, \ldots, z_{n-1}$ якщо x відоме

$$P(x \mid z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_n \mid x)\, P(x \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}$$

$$= \eta\, P(z_n \mid x)\, P(x \mid z_1, \ldots, z_{n-1})$$

$$= \eta_{1 \ldots n} \prod_{i=1 \ldots n} P(z_i \mid x)\, P(x)$$

Оцінка стану системи

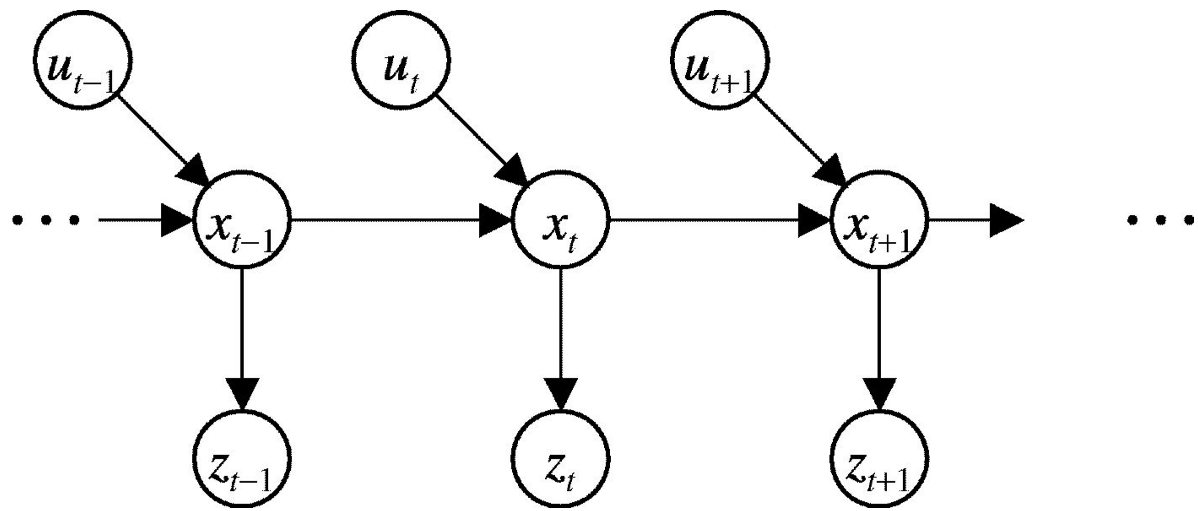
- **Дано:**
  - Дані спостережень *z* і параметри керування *u:*

$$d_t = \{u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t\}$$

  - Модель сен
  - Модель дій (впливів) *P(x|u,x′)*
  - Попереднє значення гіпотези стану системи *P(x)*
- **Необхідно:**
  - Оцінити стан ***x*** динамічної системи

$$Bel(x_t) = P(x_t \mid u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t)$$

Прихована марківська модель (HMM)



Припущення, на яких базується модель

- Часова незалежність
- Незалежний шум
- Ідеальна модель (без помилок наближення)

Баєсовий фільтр

- Передбачення

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

- Корекція

$$bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$$

Фільтр Калмана:

Система лінійна

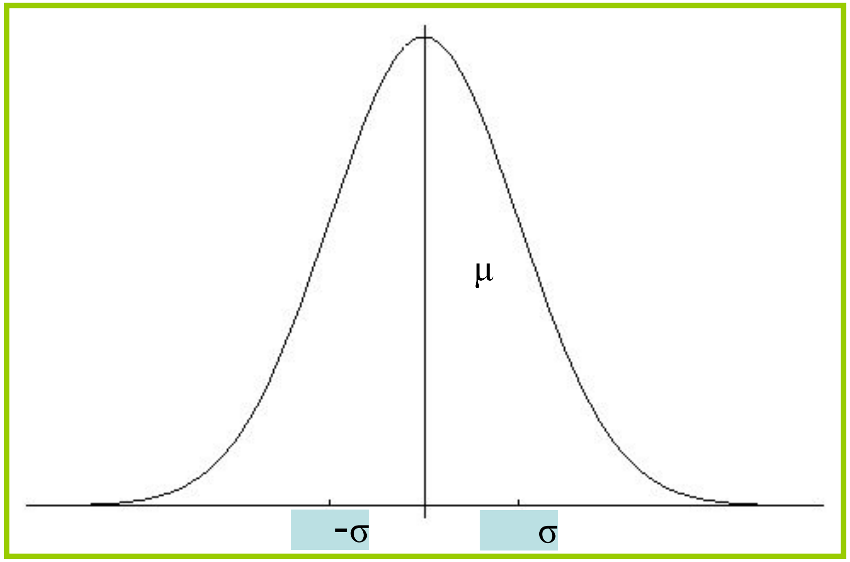
Випадкові величини нормально розподілені

Коваріація шуму системи не залежить від часу

Нормальний розподіл (Ґауса)

$$p(x) \sim N(\mu, \sigma^2):$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

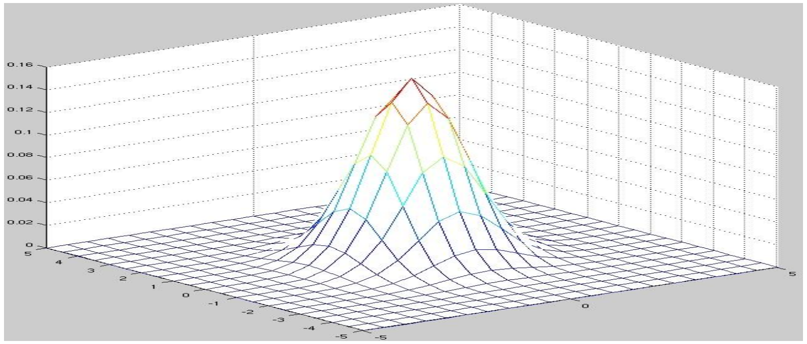


Лінійне перетворення

$$\left.\begin{aligned} X &\sim N(\mu, \sigma^2) \\ Y &= aX + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Багатовимірний нормальний розподіл

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}$$



$$\left.\begin{array}{r} X \sim N(\mu, \Sigma) \\ Y = AX + B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Y \sim N(A\mu + B, A\Sigma A^T)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_2) \end{array}\right\} \Rightarrow p(X_1) \cdot p(X_2) \sim N\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_2, \quad \frac{1}{\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}}\right)$$

- Розподіл лишається нормальним, якщо над ним здійснюються лише лінійні перетворення

Дискретний фільтр Калмана

Модель процесу

стан

керування

шум

$$x_{t+1} = F_t x_t + B_t u_t + G_t w_t$$

функція перетворення стану

функція перетворення керування

Noise input function with covariance Q

Модель вимірювання

дані сенсора

стан

шум сенсора з коваріацією R

$$z_{t+1} = H_{t+1} x_{t+1} + n_{t+1}$$

функція сенсора

Початкові умови:

- Початкова ймовірність нормально розподілена:

$$\boxed{bel(x_0) = N\left(x_0; \mu_0, \Sigma_0\right)}$$

Модель керування

- Динаміка системи описується лінійним рівнянням і шумом:

$$x_t = F_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) = N\left(x_t; F_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right)$$

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \qquad bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N\left(x_t; F_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right) \quad \sim N\left(x_{t-1}; \mu_{t-1}, P_{t-1}\right)$$

Модель спостереження

- Спостереження є лінійною функцією з шумом:

$$\boxed{z_t = H_t x_t + \delta_t}$$

$$\boxed{p(z_t \mid x_t) = N\left(z_t; H_t x_t, Q_t\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} bel(x_t) = & \eta & p(z_t \mid x_t) & \overline{bel}(x_t) \\ & & \Downarrow & \Downarrow \\ & & \sim N\left(z_t; H_t x_t, Q_t\right) & \sim N\left(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{P}_t\right) \end{array}}$$

Фільтр Калмана

Передбачення:

$$\overline{\mu}_t = F_t \mu_{t-1} + B_t u_t$$

$$\overline{P}_t = F_t P_{t-1} F_t^T + R_t$$

Корекція:

$$K_t = \overline{P}_t H_t^T (H_t \overline{P}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t (z_t - H_t \overline{\mu}_t)$$

$$P_t = (I - K_t H_t) \overline{P}_t$$

Фільтр Калмана:

- Має високу обчислювальну ефективність (складність визначається операцією інверсії матриць):

  $$O(k^{2.376} + n^2)$$

- Оптимальний для лінійних систем із нормальним розподілом випадкової величини

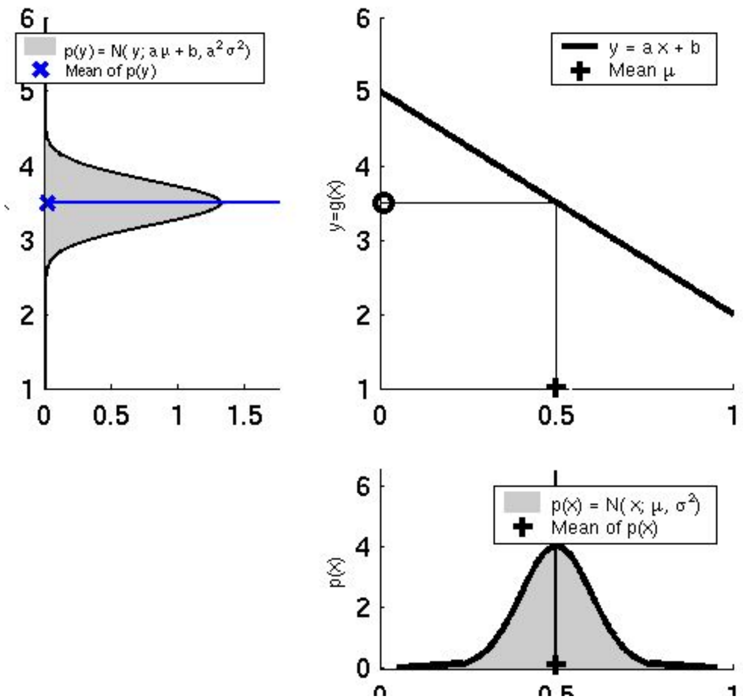
- Переважна більшість роботизованих систем описуються нелінійними рівняннями.

Нелінійні динамічні системи

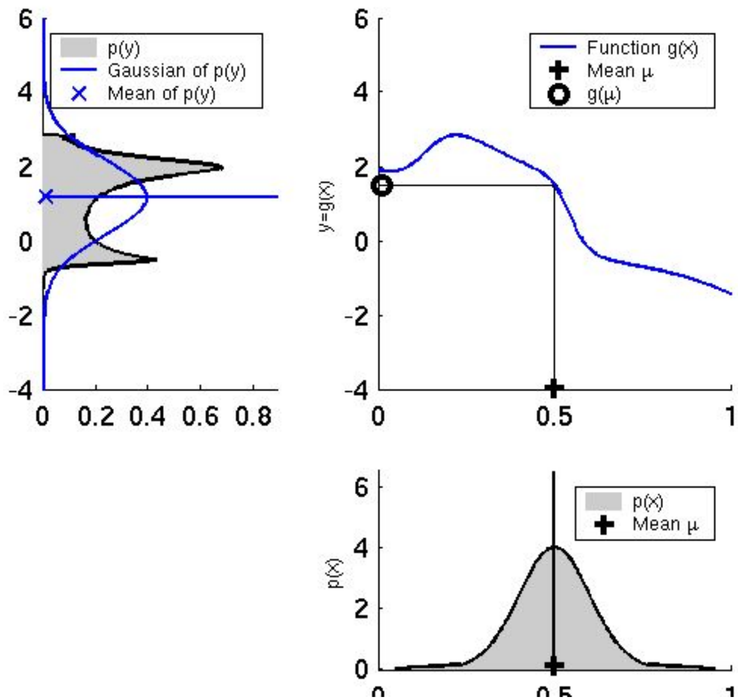
- Більшість задач в робототехніці описуються нелінійними рівняннями

$$x_t = g(u_t, x_{t-1})$$

$$z_t = h(x_t)$$



Лінійне перетворення нормального розподілу



Неінійне перетворення нормального розподілу

Лінеаризація в розширеному фільтрі Калмана: розклад в ряд Тейлора до 1 порядку

- Передбачення:

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \; (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

- Корекція:

$$h(x_t) \approx h(\overline{\mu}_t) + \frac{\partial h(\overline{\mu}_t)}{\partial x_t} (x_t - \overline{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \approx h(\overline{\mu}_t) + H_t \; (x_t - \overline{\mu}_t)$$

Розширений фільтр Калмана (Алгоритм)

Extended_Kalman_filter($\mu_{t-1}, P_{t-1}, u_t, z_t$**):**

Передбачення:

$$G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

$$\overline{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1}) \longleftarrow \overline{\mu}_t = F_t \mu_{t-1} + B_t u_t$$

$$\overline{P}_t = G_t P_{t-1} G_t^T + R_t \longleftarrow \overline{P}_t = F_t P_{t-1} F_t^T + R_t$$

$$H_t = \frac{\partial h(\overline{\mu}_t)}{\partial x_t}$$

Корекція:

$$K_t = \overline{P}_t H_t^T (H_t \overline{P}_t H_t^T + Q_t)^{-1} \longleftarrow K_t = \overline{P}_t H_t^T (H_t \overline{P}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t (z_t - h(\overline{\mu}_t)) \longleftarrow \mu_t = \overline{\mu}_t + K_t (z_t - H_t \overline{\mu}_t)$$

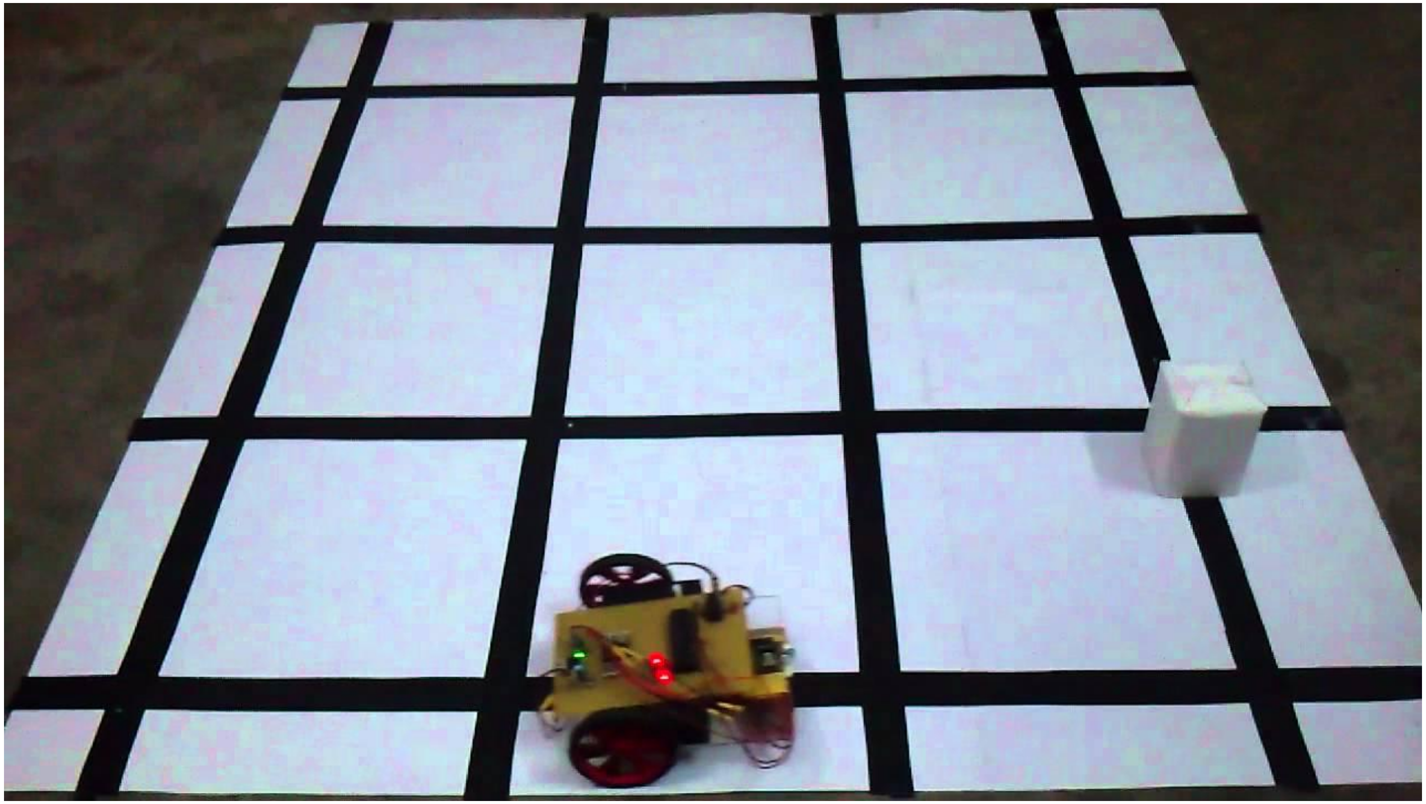
$$P_t = (I - K_t H_t) \overline{P}_t \longleftarrow P_t = (I - K_t H_t) \overline{P}_t$$

Return μ_t, P_t

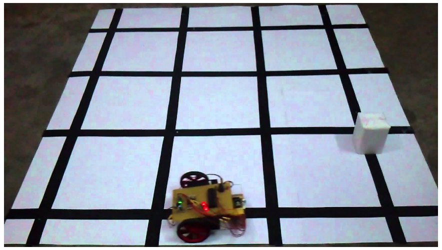
Розширений фільтр Калмана

- Високоефективний: обчислювальна складність (через інверсії матриць) $O(k^{2.376} + n^2)$
- Розбіжний за великих нелінійностей

Приклад: розрахунок стану лінійної двовимірної системи



Приклад: розрахунок стану лінійної двовимірної системи



Модель руху:

$$\boxed{x^{-} = x + v\Delta t}$$

Вектор стану:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \end{bmatrix}$$

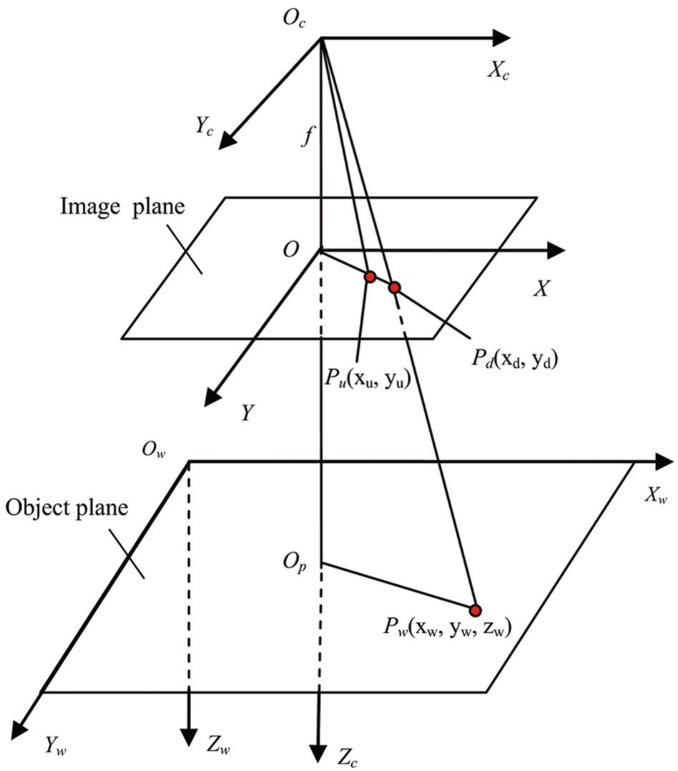
$$\begin{aligned} x' &= (1 * x) + (\Delta t * v_x) + (0 * y) + (0 * v_y) \\ v_x &= (0 * x) + (1 * v_x) + (0 * y) + (0 * v_y) \\ y' &= (0 * x) + (0 * v_x) + (1 * y) + (\Delta t * v_y) \\ v_y &= (0 * x) + (0 * v_x) + (0 * y) + (1 * v_y) \end{aligned}$$

Функція перетворення

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \end{bmatrix}$$

Вимірювання

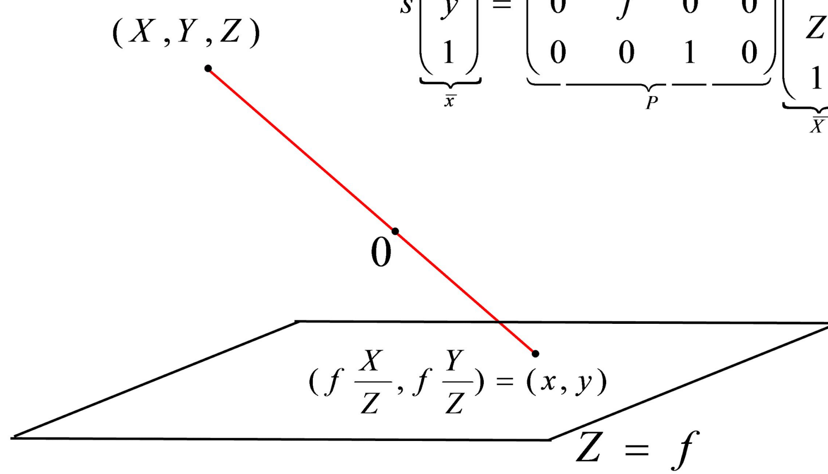


$$\boxed{z = Hx}$$

$$\boxed{H = \begin{bmatrix} factorX & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & factorY & \end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned}(2 \times 1) &= (a \times b)(4 \times 1) \\ &= (a \times 4)(4 \times 1) \\ &= (2 \times 4)(4 \times 1)\end{aligned}$$

$$s\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{X}}$$



Модель сенсора

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Код