

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia XXXIV. EMMV

országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat. Határozd meg azokat a p, q, r prímszámokat, amelyekre

$$p \cdot q + 6 = r \cdot (r - 1).$$

2. feladat. Az A -ban derékszögű ABC háromszög AD magassága ($D \in BC$) a B és C szögek szögfelezőit az M , illetve N pontban metszi. Igazold, hogy

$$\left(\frac{ND}{AN}\right)^2 + \left(\frac{MD}{AM}\right)^2 = 1.$$

3. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszögben AD magasság, $D \in BC$. Az AD , AB , BC és CA szakaszok centiméterben kifejezett hosszai egymás utáni természetes számok, ebben a sorrendben.

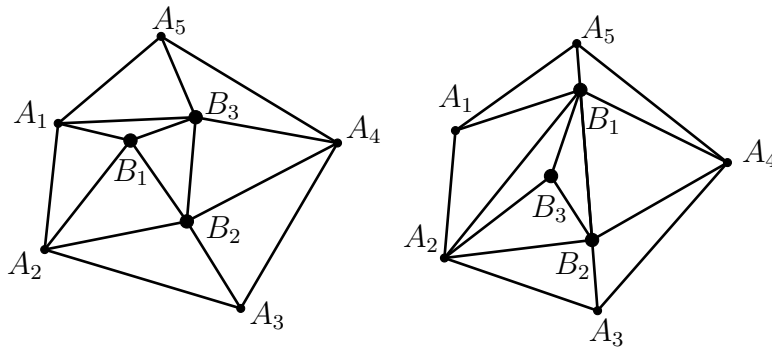
a) Számítsd ki a ABC háromszög oldalainak hosszát!

b) Igazold, hogy a háromszögbe írt kör sugarának centiméterben kifejezett hossza természetes szám!

4. feladat. Egy 1000 oldalú konvex sokszög belsejében felvesszünk n pontot. Jelöljük \mathcal{H} -val a sokszög csúcsaiból és a felvett pontokból álló halmazt. A sokszöget osszuk fel páronként diszjunkt belsejű üres háromszögekre úgy, hogy a háromszögek csúcsai a \mathcal{H} -ból legyenek. Egy háromszöget üres háromszögnek nevezünk ha sem a belsejében, sem az oldalainak belsejében nem tartalmaz \mathcal{H} -beli pontot. Az alábbi ábrákon két ilyen felbontást szemléltetünk egy ötszög és a belsejében felvett három pont esetén.

a) Létezik-e olyan n érték, amelyre a felbontás 2025 üres háromszögből áll?

b) Milyen k értékekre létezik olyan $n > 0$, amelyre a felbontás k darab üres háromszögből áll?



5. feladat. Tekintsük a $H = \{6, 7, 8, \dots, 21\}$ számhalmazt. Igazold, hogy H -ból bárhogy választunk ki 7 számot, a kiválasztottak között létezik 3 olyan, amellyel hegyesszögű háromszög szerkeszthető!

6. feladat. Egy természetes számot teljes hatványnak nevezünk, ha felírható a^b alakban, ahol $a, b \in \mathbb{N}$ és $b \geq 2$. Határozd meg azt a legnagyobb természetes számot, amelyet nem lehet felírni páronként különböző teljes hatványok összegeként!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.