LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

JAVÍTÓKULCS - VII OSZTÁLY

1.Feladat

a) Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén:

$$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2}{n(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<2$$

b) Oldjuk meg az egyenletet:

$$\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\cdots+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=2^5\cdot 3$$

Megoldás:

Hívatalból **1 p**

$$a)\ \frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2}{n(n+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{n+1}{n(n+1)}\right)=\cdots\cdots\cdots \textbf{2 p}$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots \textbf{1 p}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2}{n(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\cdots\cdots\cdots \textbf{1 p}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n+1}<2\cdots\cdots\cdots \textbf{1 p}$$

$$b)\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\cdots+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=\frac{x}{5}+\frac{4}{5}+\frac{x}{6}+\frac{5}{6}+\cdots+\frac{x}{99}+\frac{98}{99}+\frac{x}{100}+\frac{99}{100}=\cdots\cdots \textbf{1 p}$$

$$=\frac{x}{5}+\frac{x}{6}+\cdots+\frac{x}{99}+\frac{x}{100}+1-\frac{1}{5}+1-\frac{1}{6}+\cdots+1-\frac{1}{99}+1-\frac{1}{100}=\cdots\cdots\cdots \textbf{1 p}$$

$$=x\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)+\left(\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{96}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)=96\cdots\cdots \textbf{1 p}$$

$$\Rightarrow x\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)=0$$

$$\Rightarrow x=1\cdots\cdots\cdots \textbf{1 p}$$

2.Feladat

Tekintsük az $ABCD$ egyenlő szárú trapézt, melynek nagyalapja AB. A B pontban az AB egyenesre emelt merőleges, a C ponton keresztül az AD egyeneshez húzott párhuzamos egyenest az E pontban metszi. A CE és AB egyenesek F pontban metstik egymást. Mutassuk ki, hogy:

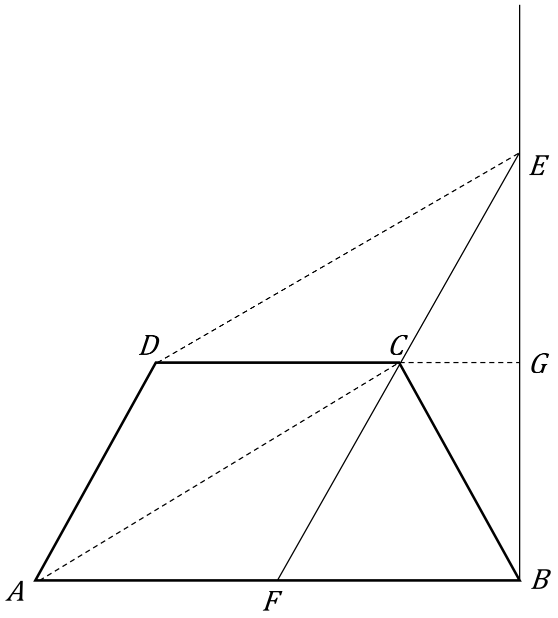
a) a CFB és CEB háromszögek egyenlő szárúak;

b) $[CF]\equiv[CE]$**;**

c) az $ACED$ négyszög paralelogramma;

d) A, M, E kollineáris pontok, ahol M a kisalap felezőpontja.

Megoldás:
Hívatalból **1 p**



a) $$\left.\begin{array}{l} ABCD\ e.sz.tr \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{B} \\ \left.\begin{array}{l} AD \parallel FC \\ AF\ szelő \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} \equiv \widehat{CFB} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CFB} \equiv \widehat{FBC} \Rightarrow [CF] \equiv [CB] \Rightarrow CFB\Delta\ e.sz \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \mathbf{1\ p}$$

Legyen $DC \cap EB = \{G\}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} DG \parallel AB \\ EF\ szelő \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ECG} \equiv \widehat{CFB} \\ \left.\begin{array}{l} DG \parallel AB \\ BC\ szelő \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{GCB} \equiv \widehat{CBF} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \widehat{ECG} \equiv \widehat{GCB} \\ CG \perp EB \end{array}\right\} \Rightarrow [BC] \equiv [CE] \Rightarrow CEB\Delta\ e.sz \cdots\cdots\cdots\cdots \mathbf{3\ p}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} [CF] \equiv [CB] \\ [BC] \equiv [CE] \end{array}\right\} \Rightarrow [CF] \equiv [CE] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \mathbf{1\ p}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} [BC] \equiv [CE] \\ [BC] \equiv [AD] \end{array}\right\} \Rightarrow [AD] \equiv [CE] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \mathbf{1\ p}$$

$$\left.\begin{array}{c} [AD] \equiv [CE] \\ AD \parallel CE \end{array}\right\} \Rightarrow ACED\ paralelogramma \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \mathbf{1\ p}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} DC\ \text{átló az}\ ACED\ paralelogrammában \\ AE\ \text{átló az}\ ACED\ paralelogrammában \end{array}\right\} \Rightarrow AE \cap DC\ = \{M\},$$

$$M\ a\ kisalap\ felezőpontja \Rightarrow\ A, E, M\ kollineáris \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \mathbf{2\ p}$$

LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

3.Feladat

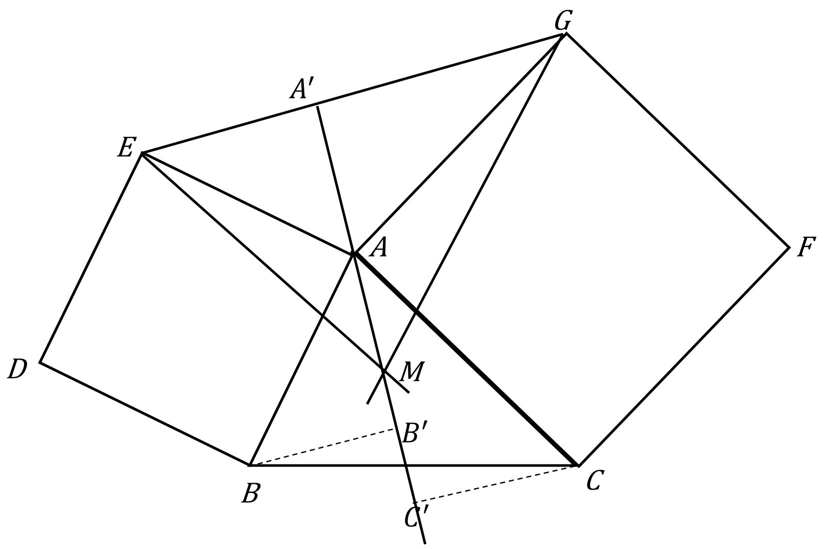
Az ABC háromszög külső tartományában megszerkesztjük az $ABDE$ és $ACFG$ négyzeteket. Mutassuk ki, hogy:

a) az AEG háromszög AA' magassága és az E, illetve G pontokon át az AC, illetve AB-vel húzott párhuzamosok konkurensek (összefutó egyenesek);

b) a B és C pontok egyenlő távolságra vannak az AA' egyenestől

Megoldás:

Hívatalból **1 p**



Legyen M pont úgy, hogy $EM \parallel AC$ és $GM \parallel AB$.

Az $EMG\Delta - ben$:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}GA \perp AC\\ AC \parallel EM\end{array}\right\} \Rightarrow GA \perp EM\\ \left.\begin{array}{l}EA \perp AB\\ AB \parallel GM\end{array}\right\} \Rightarrow EA \perp GM\end{array}\right\} \Rightarrow$$ …………………………………………… **2 p**

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow A\ pont\ a\ EMG\Delta\ ortocentruma \Rightarrow MA \perp EG\\ AA' \perp EG\end{array}\right\} \Rightarrow M \in AA' \Rightarrow$$ ………………………… **1 p**

$\Rightarrow$ AA', EM és GM összefutó egyenesek. …………………………………………… **1 p**

b) Legyen $BB' \perp AA', B' \in AA'$

$$\left.\begin{array}{l}m(\widehat{BAB'}) = 180° - (90° + m(\widehat{EAA'}))\\ m(\widehat{BAB'}) = 180° - (90° + m(\widehat{ABB'}))\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{EAA'} \equiv \widehat{ABB'}$$ ………………………… **1 p**

$ABB'\Delta - ben$ és $EAA'\Delta - ben,$

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [AE]\\ \widehat{ABB'} \equiv \widehat{EAA'}\end{array}\right\} \overset{A.Sz}{\Longrightarrow} ABB'\Delta \equiv EAA'\Delta \Rightarrow [AA'] \equiv [BB']\ (1)$$ ………………………… **1 p**

Hasonlóan legyen $CC' \perp AA', C' \in AA'$ ……………………………………………………………… **1 p**

$ACC'\Delta \equiv GAA'\Delta \Rightarrow [AA'] \equiv [CC']$ (2) ……………………………………………………………… **1 p**

(1),(2)⇒ $[CC'] \equiv [BB']$ ……………………………………………………………… **1 p**

4.Feladat

Egy társaságban öt ember találkozik. Megkérdeztük őket, kinek hány ismerőse van ötük között. Miután megtudták egymásról, hogy kinek hány ismerőse van, így válaszoltak: (Az ismeretség kölcsönös.)

A: Négy embert ismerek.
B: Kevesebb ismerősöm van, mint ***A***-nak.
C: Ugyanannyi ismerősöm van, mint ***D***-nek.
D: Eggyel kevesebb ismerősöm van, mint ***E***-nek.
E: Páratlan számú embert ismerek.

Vajon ***C*** és ***D*** ismeri egymást?

Megoldás:

Hívatalból **1 p**

E válasza alapján, neki 1 vagy 3 ismerőse lehet, tehát ***C***-nek és ***D***-nek vagy 2-2 ismerőse van, vagy nem ismernek senkit a társaságból. ……………………………………………………………… **2 p**

Mivel az utolsó lehetőség ellentmond ***A*** válaszának csak az lehetséges, hogy ***C***-nek és ***D***-nek 2-2 ismerőse van. ……………………………………………………………… **2 p**

Mivel ***A*** ismeri a társaság minden tagját, ezért ***C*** és ***D*** ismeri ***A***-t. ……………………… **1 p**

Tehát ha feltételezzük, hogy ***C*** és ***D*** ismeri egymást, akkor ***C*** ismerősei ***A*** és ***D***, míg ***D*** ismerősei ***A*** és ***C*** ……………………………………………………………… **1 p**

Vagyis ***E***-nek nem lehet három simerőse (mert ő nem ismerheti ***C***-t és ***D***-t, és így csak ***A***-t és ***B***-t ismerheti) Ez viszont ellentmondás. ……………………………………………… **2 p**

Tehát ***C*** és ***D*** nem ismeri egymást. ……………………………………………………… **1 p**