LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
MEGYEI FORDULÓ-MAROS MEGYE
2017. DECEMBER 09.
IX. OSZTÁLY

1.Feladat

Az *ABC* tetszőleges háromszög *BC* oldalának a felezőpontja *M*, legyen *O* a háromszög köré írt kör középpontja, *H* a háromszög ortocentruma és *G* a háromszög súlypontja.
Igazoljuk, hogy:

a) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$;
b) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = 6 \cdot \overrightarrow{OG}$;
c) az *O*, *G*, *H* pontok kollineárisak.

2.Feladat

a) Adottak $a, b, c \in (0, \infty)$ úgy, hogy $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$, igazoljuk, hogy $\frac{ab}{ab^2+1} + \frac{bc}{bc^2+1} + \frac{ca}{ca^2+1} \le \frac{3}{2}$.

b) Határozzuk meg, az $a, b, c \in (0, \infty)$ számok értékét úgy, hogy: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$ és $\frac{ab}{ab^2+1} + \frac{bc}{bc^2+1} + \frac{ca}{ca^2+1} = \frac{3}{2}$.

3.Feladat

Adott az *ABC* hegyesszögű háromszög és $M \in [BC]$ egy változó pont. Legyenek *E* és *F*, a *M*-ből az *AB*, illetve *AC*-re húzott merőlegesek talppontjai.

a) Mutassuk ki, hogy $\frac{4T^2}{b^2+c^2} \le ME^2 + MF^2$, ahol *T* az az *ABC* háromszög területe.
b) Igazoljuk, hogy $ME^2 + MF^2 \le \max\{h_b^2, h_c^2\}$, ahol h_b és h_c pedig a *B*-ből, illetve *C*-ből húzott magasságokat jelöli.

4.Feladat

Egy matematikaverseny megyei szakaszára 264 tanuló nevezett be. Az iskolák negyede 8 tanulóval nevezett be, a többi iskola mindegyike 6 vagy 7 tanulóval jelentkezett.
Hány iskolából jelenkeztek iskolánként 6, 7 vagy 8 tanulóval?

Megjegyzések:
- Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
- Munkaidő 3 óra.
- Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.
- Lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 plusz-pont jár.