VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. a) Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (ahol $n \geq 2$) mátrixban minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_{ij} = 1$, ha $i \mid j$, különben $a_{ij} = 0$. Számítsd ki a $\det A$ értékét!

b) Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (ahol $n \geq 2$) mátrixban minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_{ij} = 1$, ha i és j relatív prím, különben $a_{ij} = 0$. Számítsd ki a $\det A$ értékét!

2. feladat. Legyen $b \geq 2$ egy természetes szám. Tekintsünk egy, a b számrendszerben felírt, $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot, ahol $x_0 \in \mathbb{N}$ és x_{n+1} az x_n számjegyeinek az összege. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

3. feladat. Adott az $(a_n)_{n\geq 0}$ és $(b_n)_{n\geq 0}$ valós számsorozat, valamint az $\alpha \in (0, 1)$ valós szám úgy, hogy

$$0 \leq a_{n+1} \leq \alpha \cdot a_n + b_n,$$

minden $n \geq 0$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Igazold, hogy az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és határértéke nulla!

4. feladat. Az $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ mátrix teljesíti a $2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = O_3$ összefüggést. Igazold, hogy a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

összeg osztható hárommal!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.