IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat esetén $x_1 \geq 1$ és $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$-ra.

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét, ha $x_1 = 2$.

b) Bizonyítsd be, hogy minden $x_1 \geq 1$ kezdőérték esetén a sorozat konvergens és határértéke 1.

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$ határértéket!

2. feladat. Adott az $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mátrix.

a) Határozd meg az A^n mátrixot, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Adott az $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$, $f(x) = \frac{9x-7}{8x-6}$ függvény és legyen $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-szer}}$. Határozd meg az f_{2022} függvényt!

3. feladat. Legyen $\mathcal{A}$ azoknak az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixoknak a halmaza, amelyek esetén $\det A = 1$, illetve $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$.

a) Határozd meg a $\mathcal{T} = \{\operatorname{tr}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt, ahol $\operatorname{tr}(A)$ az A mátrix főátlón levő elemeinek összegét jelöli!

b) Határozd meg a $\mathcal{D} = \{\det(A + A^{-1}) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt!

4. feladat. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatokat az

$$x_n = (45 + \sqrt{2022})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

illetve

$$y_n = (45 - \sqrt{2022})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

képletekkel értelmeztük.

a) Igazold, hogy $x_n + y_n \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3^n}}$ határértéket, ahol $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.