LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
MEGYEI FORDULÓ-MAROS MEGYE
2017. DECEMBER 09.
XII. OSZTÁLY

1.Feladat
Számítsd ki a következő határozatlan integrálokat:

a. $\int \frac{1+tgx+tg^2x}{e^{-x}+tgx}dx, x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

b. $\int \frac{cos2018x}{sinx}dx,\ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Megoldás:

Hivatalból…………………………………………………………………………………..………1p

a. $\int \frac{1+tgx+tg^2x}{e^{-x}+tgx}dx = \int \frac{e^x(1+tgx+tg^2x)}{1+e^x\cdot tgx}dx$

Mivel $(1+e^x\cdot tgx)' = 0 + e^x\cdot tgx + e^x\cdot(tgx)' = e^x\cdot tgx + e^x\cdot\frac{1}{cos^2x} = e^x\cdot tgx + e^x\cdot(1+tg^2x) = e^x(1+tgx+tg^2x)$, következik, hogy

$\int \frac{e^x(1+tgx+tg^2x)}{1+e^x\cdot tgx}dx = \int\frac{(1+e^x\cdot tgx)'}{1+e^x\cdot tgx}dx = ln|1+e^x\cdot tgx| + C$………………………………4p

b.Legyen $\int \frac{cosnx}{sinx}dx$.

Ha $n = 0 \Longrightarrow \int\frac{1}{sinx}dx = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$………………………………………………….………1p

$$\int\frac{\cos(n+2)\,x}{sinx}dx - \int\frac{cosnx}{sinx}dx =$$

$$= \int\frac{\cos(n+2)\,x - cosnx}{sinx}dx \ = \int\frac{-2\cdot\sin(n+1)\,x\cdot sinx}{sinx}dx = -2\cdot\int\sin(n+1)\,xdx$$

$= 2\cdot\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + C$……………………………………………………………………………..2p

Tehát: $\int\frac{cos2018x}{sinx}dx = \frac{2}{2017}\cdot cos2017x + \int\frac{cos2016x}{sinx}dx = \frac{2}{2017}\cdot cos2017x + \frac{2}{2015}\cdot cos2015x + \int\frac{cos2014x}{sinx}dx = \cdots = \frac{2}{2017}\cdot cos2017x + \frac{2}{2015}\cdot cos2015x + \cdots + \frac{2}{1}\cdot cosx + ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$…..2p

2.Feladat
Adott egy $(M,*)$ csoport és $a \in M$. Értelmezünk az M halmazon még egy műveletet:

$$x \circ y = x * a * y, \forall x, y \in M.$$

Igazold, hogy az $(M,\circ)$ algebrai struktúra egy csoport.

LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

Megoldás:

Hivatalból……………………………………………………………………………..……..1p

Mivel $(M,*)$ csoport, tudjuk, hogy:

1. $\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$

2.“$*$” asszociatív

3.$\exists e_1 \in M: e_1 * x = x * e_1 = x, \forall x \in M$

4.$\forall x \in M\ \exists\ \bar{x} \in M: x * \bar{x} = \bar{x} * x = e_1$ és, ha $a \in M$, akkor $\exists\ \bar{a} \in M: a * \bar{a} = \bar{a} * a = e_1$, ahol $\bar{a}$ az a elem szimmetrikusát jelöli a “$*$” műveletre nézve.

Igazolni kell, hogy az $(M,\circ)$ algebrai struktúra egy csoport:

Zártság: $\forall x, y \in M \Rightarrow x \circ y \in M$

$x \circ y = x * a * y \in M$………………………………………………………………....……1p

Asszociativitás: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall\ x, y, z \in M$

$(x \circ y) \circ z = (x * a * y) \circ z = x * a * y * a * z = x \circ (y * a * z) = x \circ (y \circ z)$…………………..2p

Semleges elem létezése: .$\exists e_2 \in M: e_2 \circ x = x \circ e_2 = x, \forall x \in M$, azaz

$e_2 * a * x = x * a * e_2 = x, \forall x \in M$

$e_2 * a * x = x, \forall x \in M \Longrightarrow e_2 * a * x * \bar{x} = x * \bar{x}, \forall x \in M \Longrightarrow e_2 * a = e_1 \Longrightarrow e_2 * a * \bar{a}$

$= e_1 * \bar{a} \Longrightarrow e_2 = \bar{a} \in M$

hasonlóan $x * a * e_2 = x, \forall x \in M \Longrightarrow e_2 = \bar{a} \in M$……………………………………….…....3p

Az elemek szimmetrizálhatósága: .$\forall x \in M\ \exists\ \tilde{x} \in M: x \circ \tilde{x} = \tilde{x} \circ x = e_2$

$x \circ \tilde{x} = e_2 \Longrightarrow\ x * a * \tilde{x} = \bar{a}\ \Longrightarrow\ a * \tilde{x} = \bar{x} * \bar{a} \Longrightarrow\ \tilde{x} = \bar{a} * \bar{x} * \bar{a}$

$\tilde{x} * a * x = \bar{a} \Longrightarrow \tilde{x} * a = \bar{a} * \bar{x} \Longrightarrow \tilde{x} = \bar{a} * \bar{x} * \bar{a}$………………………………………..………3p

3.Feladat

Egy országban több város van úgy, hogy a városok közötti távolságok páronként különböznek. Egy reggel minden városból felszáll egy repülőgép a legközelebbi város fele. Lehetséges, hogy aznap az egyik városban több, mint öt repülőgép landoljon? Indokold meg a választ!

Megoldás:

Hivatalból………………………………………………………………………….…….……1p

Nem lehetséges.

Feltételezzük, hogy az A városba 6 repülő érkezik az $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$városokból……….…….3p

Mivel az A_1 városból induló repülő A-ban landol és nem A_2 −ben, következik, hogy $AA_1 < A_1A_2$. ..2p

Hasonlóan $AA_2 < A_1A_2$. Ilyen körülmények között az AA_1A_2 háromszög leghosszabb oldala A_1A_2 és így $m(A_1AA_2\sphericalangle) > 60°$. Hasonló algoritmussal a $m(A_2AA_3\sphericalangle) > 60°$, $m(A_3AA_4\sphericalangle) > 60°$, $m(A_4AA_5\sphericalangle) > 60°$, $m(A_5AA_6\sphericalangle) > 60°$, $m(A_6AA_1\sphericalangle) > 60°$, de akkor az A pont körüli szögek mértékének összege nagyobb, mint 360°, ami természetesen, nem lehetséges……………………….4p

4.Feladat

Adott egy *O* középpontú, $[AB]$ átmérőjű félkör. A félkör egy tetszőleges *P* pontjában húzott érintő az *A* és *B* pontokban húzott érintőket *M*, illetve *N* pontokban metszi.

a. Igazold, hogy az $AM \cdot BN$ szorzat állandó,

b. Ha a félkört az *OM* *E*-ben, az *ON* pedig *F*-ben metszi, számítsd ki az *EPF* szög mértékét.

Megoldás:

Hivatalból………………………………………………………………………………………1p

a.Az *AMPO* négyszögben: $m(AMP\sphericalangle) + m(AOP\sphericalangle) = 180°$

Az *NBOP* négyszögben: $m(PNB\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle) = 180°$

$m(AOP\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle) = 180°$ 2p

Tehát: $m(AMP\sphericalangle) = m(POB\sphericalangle) \Rightarrow \frac{m(AMP\sphericalangle)}{2} = \frac{m(POB\sphericalangle)}{2}$……………………………………….....1p

$MAO_\Delta \sim OBN_\Delta \Longrightarrow \frac{MA}{BO} = \frac{MO}{ON} = \frac{AO}{BN} \Longrightarrow \frac{MA}{r} = \frac{r}{BN} \Longrightarrow AM \cdot BN = r^2$………………………………..3p

b.$m(EPF\sphericalangle) = m(EPO\sphericalangle) + m(OPF\sphericalangle) = [90° - m(MPE\sphericalangle)] + [90° - m(NPF\sphericalangle)] = 180° - \frac{[m(POE\sphericalangle) + m(POF\sphericalangle)]}{2} = 180° - \frac{\left[\frac{m(POA\sphericalangle)}{2} + \frac{m(POB\sphericalangle)}{2}\right]}{2} = 180° - 45° = 135°$………………………………3p

Megjegyzések:
- Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
- Munkaidő 3 óra.
- Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.
- Lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 plusz-pont jár.