IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat. Igazold, hogy $2^{n^2} + 13$ osztható 15-tel, bármely n páratlan természetes szám esetén!

2. feladat. Igazold, hogy akárhogy választunk ki 26 számot a $2, 3, 4, \ldots, 100$ természetes számok közül, lesz két olyan, amely nem relatív prím!

3. feladat. Adott $a, b, c > 0$ valós számok esetén léteznek-e olyan x, y, z valós számok, amelyekre

$$|x + a + b| + |y + b + c| + |z + c + a| + |x - a - b| + |y - b - c| + |z - c - a| = 3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})?$$

4. feladat. Az $a_1 = 2$ számból kiindulva minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén képezzük az a_n valós számot, a következő szabály szerint:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(n+2)a_n}{3}.$$

Számítsd ki a $\sum_{k=1}^{2022} [\sqrt{a_k}]$ összeg értékét, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli!

5. feladat. Az ABC egyenlő oldalú háromszög P belső pontjából merőlegeseket húzunk az oldalakra, ezek talppontjai D, E és F. Legyen X az a pont a síkban, amelyre $\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) = \overrightarrow{PX}$. Igazold, hogy az X pont nem függ a P pont megválasztásától!

6. feladat. Egy táblára felírunk legalább öt nemnulla természetes számot egy sorba. Egy lépésben a két szélső szám minimumát levonjuk a szélső számokból, és hozzáadjuk a második, illetve az utolsó előtti számhoz. Ha a felírt számok között megjelenik a 0, azt letöröljük. Így egy vagy két számmal kevesebb marad a táblán. Ezt a lépést mindaddig ismételjük, amíg a táblán egy vagy két szám marad. Mitől függ az, hogy a végén egy szám marad vagy kettő? Az alábbi két példa mutatja, hogy mindkét eset lehetséges.

3	4	7	8	2	1	2
1	6	7	8	2	3	
	7	7	8	3	2	
	5	9	8	5		
		14	13			

3	15	6	8	1	1	2
1	17	6	8	1	3	
	18	6	8	2	2	
	16	8	8	4		
	12	12	12			
		36				

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.