VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Hasonlítsd össze az m és n számokat, ha

$$m = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2\cdot 1}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025\cdot 2024}} \quad \text{és}$$

$$n = 5^{2025} - 4\cdot 5^{2024} - 4\cdot 5^{2023} - \cdots - 4\cdot 5^2 - 4\cdot 5 - 4.$$

b) Adottak az x, y, z szigorúan pozitív racionális számok úgy, hogy

$$\frac{5y+4z-3x}{7x} = \frac{5z+4x-3y}{7y} = \frac{5x+4y-3z}{7z}.$$

Igazold, hogy ha $a = \dfrac{(5y+4z)\cdot(5z+4x)\cdot(5x+4y)}{2025xyz}$, akkor $\sqrt{a}$ racionális szám!

Oláh-Ilkei Árpád, Sepsiszentrgyörgy
Fodor Erika, Beszterce

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Tekintsük az m számot. Az összegben szereplő tagokat a következőképpen alakíthatjuk:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2\cdot 1}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot 3}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}},$$
$$\cdots$$
$$\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025\cdot 2024}} = \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025}\cdot\sqrt{2024}} = \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{2025}\cdot\sqrt{2024}} - \frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2025}\cdot\sqrt{2024}} = \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}}.$$

(1 pont)

Ahonnan

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2025}} \\ &= 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}. \end{aligned}$$

(1 pont)

Tekintsük az n számot. Mindenik 4-es felírható úgy, mint $5-1$, így az n szám a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} n &= 5^{2025} - 4\cdot 5^{2024} - 4\cdot 5^{2023} - \cdots - 4\cdot 5^2 - 4\cdot 5 - 4 \\ &= 5^{2025} - (5-1)\cdot 5^{2024} - (5-1)\cdot 5^{2023} - \cdots - (5-1)\cdot 5^2 - (5-1)\cdot 5 - (5-1) \qquad \textbf{(1 pont)} \\ &= 5^{2025} - 5\cdot 5^{2024} + 5^{2024} - 5\cdot 5^{2023} + 5^{2023} - \cdots - 5\cdot 5^2 + 5^2 - 5\cdot 5 + 5 - 5 + 1 \\ &= 5^{2025} - 5^{2025} + 5^{2024} - 5^{2024} + 5^{2023} - \cdots - 5^3 + 5^2 - 5^2 + 5 - 5 + 1 \\ &= 1\,. \qquad \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Tehát $m = 1 - \dfrac{1}{45} = \dfrac{44}{45}$ és $n = 1$, azaz megállapíthatjuk, hogy $m < n$. **(1 pont)**

b) Felhasználva az egyenlő arányok sorozatának tulajdonságát, miszerint

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}\,,$$

felírhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned} \frac{5y+4z-3x}{7x} = \frac{5z+4x-3y}{7y} = \frac{5x+4y-3z}{7z} &= \frac{(5y+4z-3x)+(5z+4x-3y)+(5x+4y-3z)}{7x+7y+7z} \\ &= \frac{6x+6y+6z}{7x+7y+7z} \\ &= \frac{6(x+y+z)}{7(x+y+z)} \\ &= \frac{6}{7}\,. \qquad \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Tehát $\dfrac{5y+4z-3x}{7x} = \dfrac{5z+4x-3y}{7y} = \dfrac{5x+4y-3z}{7z} = \dfrac{6}{7}$. Vegyük ezeket az arányokat páronként.

$$\begin{aligned} \frac{5y+4z-3x}{7x} = \frac{6}{7} &\implies 5y+4z-3x = 6x \implies 5y+4z = 9x, \\ \frac{5z+4x-3y}{7y} = \frac{6}{7} &\implies 5z+4x-3y = 6y \implies 5z+4x = 9y, \\ \frac{5x+4y-3z}{7z} = \frac{6}{7} &\implies 5x+4y-3z = 6z \implies 5x+4y = 9z. \qquad \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

Ezekből felírható, hogy

$$a = \frac{(5y+4z)\cdot(5z+4x)\cdot(5x+4y)}{2025xyz} = \frac{9x\cdot 9y\cdot 9z}{2025xyz} = \frac{9^3xyz}{9^2\cdot 5^2xyz} = \frac{9}{25}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ahonnan $\sqrt{a} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. A háromszögbe írt kör BC-t K pontban, AB-t M pontban, míg AC-t N pontban érinti.

a) Határozd meg az AM, BK, CN szakaszok hosszát az a, b és c függvényében!

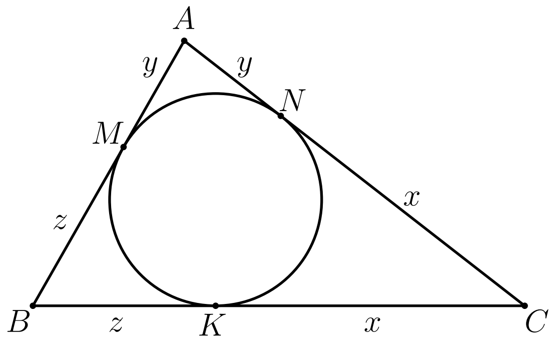
b) Igazold, hogy ha az ABC háromszög kerülete 12 egység, akkor teljesül a

$$\sqrt{CN + CK} + \sqrt{BM + BK} + \sqrt{AM + AN} \leq 6$$

egyenlőtlenség!

Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Mivel egy külső pontból ugyanazon körhöz húzott érintő szakaszok hossza egyenlő, ezért $CK = CN = x$, $AM = AN = y$, illetve $BM = BK = z$. **(1 pont)**

A feltétel alapján $a = x + z$, $b = x + y$ és $c = y + z$. Ezeket összeadva a következőt kapjuk:

$$a + b + c = 2(x + y + z),$$
$$\frac{a + b + c}{2} = x + y + z\,,$$ **(1 pont)**

ahonnan rendre

$$y = (x + y + z) - (x + z) = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{b + c - a}{2},$$
$$x = (x + y + z) - (y + z) = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2},$$
$$z = (x + y + z) - (x + y) = \frac{a + b + c}{2} - b = \frac{a + c - b}{2}.$$

Tehát $AM = \dfrac{b + c - a}{2}$, $BK = \dfrac{a + c - b}{2}$ és $CN = \dfrac{a + b - c}{2}$. **(2 pont)**

b) Az *a)* alpont jelöléseit felhsználva igazolni kell, hogy

$$\sqrt{CN + CK} + \sqrt{BM + BK} + \sqrt{AM + AN} \leq 6,$$
$$\sqrt{2y} + \sqrt{2z} + \sqrt{2x} \leq 6,$$ **(1 pont)**

ahol $x + y + z = \dfrac{a + b + c}{2} = \dfrac{12}{2} = 6.$ **(1 pont)**

Felhasználva a számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenségeket a következőket írhatjuk hogy:

$$\sqrt{2y} \leq \frac{y+2}{2}, \quad \sqrt{2z} \leq \frac{z+2}{2}, \quad \sqrt{2x} \leq \frac{x+2}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva adódik, hogy

$$\sqrt{2y} + \sqrt{2z} + \sqrt{2x} \leq \frac{x+y+z+6}{2}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\sqrt{2y} + \sqrt{2z} + \sqrt{2x} \leq \frac{6+6}{2},$$

$$\sqrt{2y} + \sqrt{2z} + \sqrt{2x} \leq 6\,.$$

Tehát $\sqrt{CN + CK} + \sqrt{BM + BK} + \sqrt{AM + AN} \leq 6$. (**1 pont**)

Megjegyzés. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y = z = 2$, azaz $a = b = c = 4$.

■

3. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy két, 7-tel nem osztható, természetes szám négyzetének összege nem osztható 7-tel!

b) Tekintsük az $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2025^2$ számokat. Legfennebb hány darab természetes számot választhatunk ki az adott számokból úgy, hogy ne legyen közöttük három olyan szám, amelyeknek összege osztható 7-tel?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A 7-tel nem osztható természetes számok $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6$ alakúak, ahol k természetes szám. (**1 pont**)

Vizsgáljuk a négyzeteik 7-tel való osztási maradékát.

$(7k+1)^2 = (7k+1)\cdot(7k+1) = 49k^2 + 7k + 7k + 1 = 7\cdot(7k^2 + 2k) + 1,$ tehát $7m+1$ alakú.
$(7k+2)^2 = (7k+2)\cdot(7k+2) = 49k^2 + 14k + 14k + 4 = 7\cdot(7k^2 + 4k) + 4,$ tehát $7m+4$ alakú.
$(7k+3)^2 = (7k+3)\cdot(7k+3) = 49k^2 + 42k + 9 = 7\cdot(7k^2 + 6k + 1) + 2,$ tehát $7m+2$ alakú.
$(7k+4)^2 = (7k+4)\cdot(7k+4) = 49k^2 + 56k + 16 = 7\cdot(7k^2 + 8k + 2) + 2,$ tehát $7m+2$ alakú.
$(7k+5)^2 = (7k+5)\cdot(7k+5) = 49k^2 + 70k + 25 = 7\cdot(7k^2 + 10k + 3) + 4,$ tehát $7m+4$ alakú.
$(7k+6)^2 = (7k+6)\cdot(7k+6) = 49k^2 + 84k + 36 = 7\cdot(7k^2 + 16k + 5) + 1,$ tehát $7m+1$ alakú.

Az előbbiek alapján a 7-tel nem osztható természetes számok négyzetei $7m+1, 7m+2, 7m+4$ alakúak lehetnek, ahol m természetes szám. (**2 pont**)

Megjegyzés. Ha kiszámítjuk az első 15 természetes szám négyzetének a 7-tel való osztási maradékát, akkor az ismétlődés alapján szintén felírhatjuk, hogy a maradék 1, 2 vagy 4 lehet. Így belátva is helyes a megoldás.

Ezek közül semelyik két számnak az összege nem osztható 7-tel, ezzel az állítást igazoltuk. (**1 pont**)

b) Mivel $2025 = 7 \cdot 289 + 2$, 290 darab $7k+1$ alakú szám van 1 és 2025 között, valamint 290 darab $7k+2$ alakú szám. (**1 pont**)

A $7k+3$, $7k+4$, $7k+5$, $7k+6$ és $7k$ alakú számok mindegyikéből 289 darab van 1 és 2025 között. (**1 pont**)

Ahhoz, hogy a kiválasztott számok között ne legyen három, amelynek az összege osztható 7-tel, az szükséges, hogy a 7-tel osztható teljes négyzetek közül legfeljebb 2 legyen, a többiek között pedig ne forduljon elő mindhárom lehetséges maradék (mert $1+2+4=7$). (**1 pont**)

Ehhez legfeljebb $2 \cdot 579 = 1158$ darab 7-tel nem osztható számot választhatunk ki, mert ennél több esetén mindhárom maradék előfordulna a kiválasztott számok között. Így összesen legtöbb $2 + 1158 = 1160$ számot választhatunk ki és ez el is érhető, ha kiválasztjuk az összes $7k+1$, $7k+6$, $7k+2$, $7k+5$ alakú szám négyzetét és két 7-tel osztható szám négyzetét. (**2 pont**)

■

4. feladat (10 pont). Egy O középpontú körön adott az E pont. Az E középpontú kisebb sugarú kör az előbbi kört az A és B pontokban metszi. Legyen a kisebb körön P egy olyan pont, amely a nagyobbik kör belsejében van. Az E pontból az AP, illetve BP szakaszokra húzott merőleges egyenesek az O középpontú kört másodszor rendre a C, illetve D pontokban metszik. Legyen EL az O középpontú kör átmérője.
Igazold, hogy:

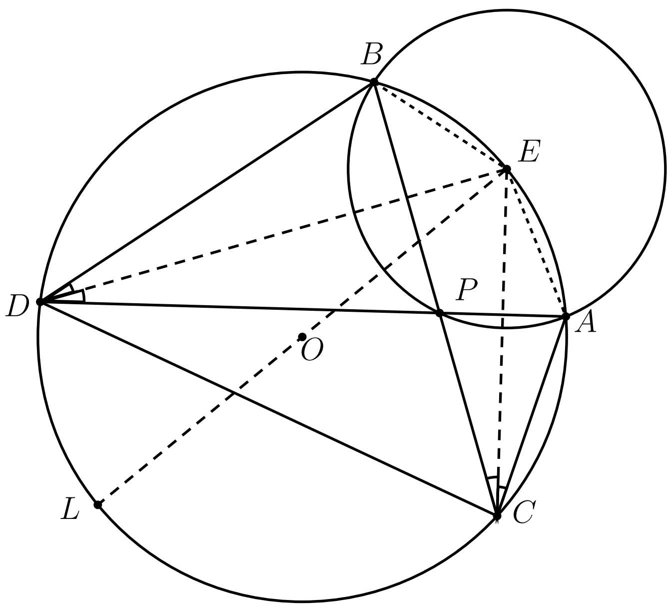
a) az A, P és D, valamint a B, P és C pontok kollineárisak;

b) az $ADLC$ egyenlő szárú trapéz;

c) $EP \perp CD$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



1. ábra. Az a) alponthoz

a) Az ED egyenes a PB húr felezőmerőlegese, ezért

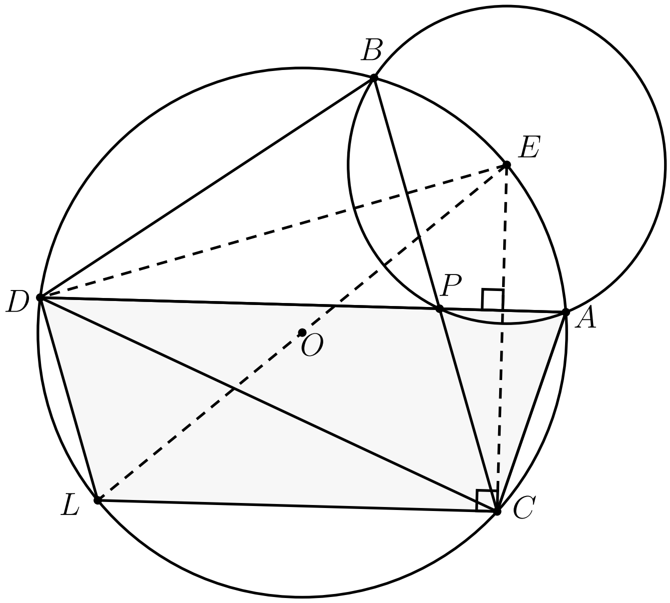
$$\widehat{BDE} = \widehat{EDP}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az $EA = EB$, mivel ezek a kisebb kör sugarai, ezért az O középpontú körben felírhatjuk, hogy $EA = EB$, ahonnan $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$, így

$$\widehat{BDE} = \widehat{EDA}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A fentiek alapján következik, hogy $\widehat{EDP} = \widehat{EDA}$, emiatt az A, P, D pontok kollineárisak. (**1 pont**)

Hasonlóan $\widehat{ACE} = \widehat{ECP}$ és $\widehat{ACE} = \widehat{ECB}$, ahonnan $\widehat{ECP} = \widehat{ECB}$, tehát B, P, C pontok kollineárisak. (**1 pont**)



2. ábra. A b) alponthoz

b) Mivel az EL átmérő az O középpontú körben, C pont a körön van, vagyis

$$\widehat{ECL} = 90^\circ \iff EC \perp CL\,. \qquad (1)$$

Az *a)* alpont alapján a D, P, A pontok kollineárisak, a feladat fetételei szerint pedig $EC \perp PA$, tehát

$$EC \perp DA\,. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) alapján $DA \parallel CL$. Mivel $\widehat{LCA} > \widehat{LCE} = 90^\circ$, ezért AC nem lehet párhuzamos DL-lel, tehát $ADLC$ trapéz. (**2 pont**)

Mivel $DA \parallel CL$, ezért $\widehat{CDA} \equiv \widehat{DCL}$, viszont mindkettő kerületi szög, így

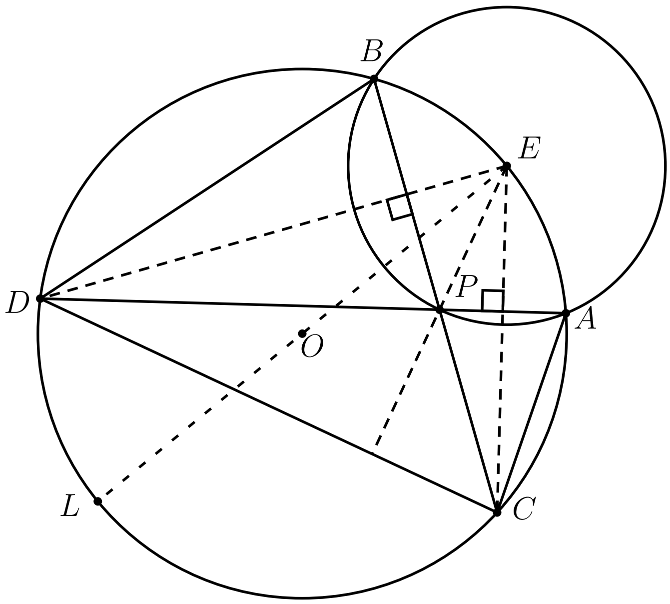
$$\widehat{CDA} = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \widehat{DCL} = \frac{\overset{\frown}{DL}}{2} \implies \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{DL} \implies CA = DL\,.$$

Összefoglalva tehát az $ADLC$ négyszög egyenlő szárú trapéz. (**1 pont**)

c) Tekintsük az EDC háromszöget. A feltételek alapján $ED \perp BP$, de az a) alpont alapján B, P, C pontok kollineárisak, azaz $CP \perp ED$.

Hasonlóan $EC \perp AP$, de az *a)* alpont alapján tudjuk, hogy D, P, A pontok kollineárisak, azaz $DP \perp EC$. (**1 pont**)

Mivel $CP \perp ED$ és $DP \perp EC$, ezért P magasságpontja az EDC háromszögnek, ahonnan $EP \perp DC$. (**1 pont**)



3. ábra. A c) alponthoz

■