MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN CLUJ
BÁTHORY ISTVÁN ELMÉLETI LÍCEUM KOLOZSVÁR
UNIVERSITAS CLAUDIOPOLITANA BABEȘ-BOLYAI 1581
31. EMMV · 4. OMMV · OMPȘPM

IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

V. osztály

1. feladat. Egy zeneiskolában az egyik osztály minden diákját tanítják zongorázni és hegedülni is, méghozzá úgy, hogy a tanár egyszerre mindig csak egy diáknak tart órát. Az osztály fel van osztva A és B csoportokra. Az A csoportba tartozó diákok mindegyike hetente 5 hegedűórára és 2 zongoraórára, a B csoportban lévők pedig 3 hegedűórára és 4 zongoraórára járnak. Így az osztály diákjai hetente 63 hegedűórán és 56 zongoraórán vesznek részt.

a) Határozd meg, hogy hány diák van az osztályban!

b) Határozd meg az A, illetve B csoportban lévő diákok számát!

2. feladat. a) Határozd meg azt a legkisebb m természetes számot, amelynek pontosan 2022 természetes osztója van!

b) Igazold, hogy az $n = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5$ szám osztóinak összege osztható 78-cal!

3. feladat. Gombóc Artúr gazdag nagybácsija egy játékra hívja Artúrt és barátait. A játékosok kapnak egy-egy belépőt a játékba, amellyel majd elnyerhetik a nagybácsi 2022 aranyérméből álló vagyonát, vagy annak egy részét. A játék folyamán, minden kör elején, mindenki akinek van belépője sorra elvesz egy-egy aranyérmét a gazdag nagybácsitól. Ezután a nagybácsi véletlenszerűen elveszi valamelyik játékos belépőjét, aki ezáltal kiesik a játékból, majd egy új kör kezdődik. A játék addig folytatódik, ameddig mindegyik játékos el nem veszíti a belépőjét, vagy a nagybácsi ki nem fogy az aranyérmékből.

a) Határozd meg, hogy legtöbb hány belépőt oszthat ki a nagybácsi úgy, hogy biztos maradjon neki is aranyérméje a játék végére!

b) Gombóc Artúrnak a nagynénije is rendelkezik 2022 aranyérmével és megszervez ő is egy hasonló játékot, annyi különbséggel, hogy ő körönként két játékosnak veszi el a belépőjét, vagy az utolsó egynek. Határozd meg, hogy a nagynéni legtöbb hány belépőt oszthat ki úgy, hogy a játék végére biztosan ne fogyjon ki az aranyérmékből!

4. feladat. Az A és B város távolsága 60 km. A két várost egy kétirányú egyenes út köti össze. Ezen az úton egyszerre indul egy-egy felügyelő járőr egymással szemben azonos sebességgel. Velük egy időben a félúton levő C pontból is elindul egy járőr az egyik város felé, ugyanolyan sebességgel, mint az előző kettő. A járőrökre az a szabály vonatkozik, hogy egyenletes sebességgel kell haladniuk és ha összetalálkoznak egy másik járőrrel, akkor mindkettő visszafordul és tovább folytatja a járőrözést. Ha valamelyik járőr visszaér az A vagy a B városba, akkor szintén visszafordul és folytatja az útját.

a) Igazold, hogy van olyan t időpont, amelyben minden járőr visszakerült abba a pontba, amelyikből indult. Határozd meg az ilyen t időpontokat (a kezdéshes viszonyítva), ha a járőrök sebessége 5 km/h!

b) Igazold, hogy az előbbi állítás akkor is igaz, ha a C-ben lévő járőr helyett két másikat indítunk: az egyiket az A-tól 20 km-re levő D pontból, a másikat az A-tól 40 km-re levő E pontból, tetszőlegesen vagy az A, vagy a B irányába!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.