VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

V. osztály

1. feladat (10 pont). Adott a következő számpiramis:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 3 & 1 & 3 & & \\
 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & \\
7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
\end{array}$$

....

a) Számítsd ki a 10. sorban szereplő számok összegét!

b) Melyik teljes négyzet kétszerese 1-gyel nagyobb, mint a 100. sorban szereplő számok összege?

Orbán Ilona-Kármen, Berettyószéplak
Durugy Erika, Torda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 3 & 1 & 3 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & & & & & & & \\
 & & & & & & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & & & & & & \\
 & & & & & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & & & & & \\
 & & & & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & & & & \\
 & & & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & & & \\
 & & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & & \\
 & 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19
\end{array}$$

A 10. sor első eleme 19, **(1 pont)**

tehát a 10. sorban található számok összege

$$\begin{aligned}
&19+17+15+13+11+9+7+5+3+1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = \quad \textbf{(1 pont)}\\
&= 19+17+15+13+11+9+7+5+3+1\\
&\quad 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19\\
&\quad -1\\
&= 20+20+20+20+20+20+20+20+20+20-1\\
&= 20\cdot 10-1=199. \quad \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

b) Észrevesszük, hogy az n-edik sorból az első szám $2 \cdot n - 1$ alakú. Ezért a 100. sor első eleme

$$2 \cdot 100 - 1 = 199. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az 1-től 200-ig 200 darab természetes szám van, amelyek fele páratlan. Ezért 1-től 199-ig 100 darab páratlan szám van. **(1 pont)**

Kiszámítjuk 1-től 199-ig a páratlan számok összegét:

$$\begin{aligned} \text{Ö} &= 1 + 3 + 5 + \ldots + 195 + 197 + 199, \\ \text{Ö} &= 199 + 197 + 195 + \ldots + 5 + 3 + 1. \end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy a fenti két sor egymás alatti tagjait összeadva, mindig 200-at kapunk, összesen 100 darabot, tehát

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{Ö} &= \underbrace{200 + 200 + 200 + \ldots + 200 + 200 + 200}_{\text{100 darab.}}, \\ 2 \cdot \text{Ö} &= 100 \cdot 200. \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Tehát a 100. sorban szereplő számok összege:

$$\begin{aligned} 199 + 197 + ... + 3 + 1 + 3 + ... + 197 + 199 &= 2 \cdot \text{Ö} - 1, \\ 199 + 197 + ... + 3 + 1 + 3 + ... + 197 + 199 &= 100 \cdot 200 - 1. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A 100. sorban szereplő számok összegénél 1-gyel nagyobb természetes szám:

$$(100 \cdot 200 - 1) + 1 = 2 \cdot 100^2.$$

Tehát a keresett teljes négyzet: $10000 = 100^2$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Határozd meg azt a legkisebb $\overline{abcd}$ alakú természetes számot, amelyre $\overline{abcd}$ teljes négyzet és $(\overline{cb} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = 9$. *Simon József, Csíkszereda*

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned} (\overline{cb} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = 9 &\iff (\overline{cb} + \overline{ad}) = 9 \cdot (\overline{cd} - \overline{ab}) && \textbf{(1 pont)} \\ &\iff 10c + b + 10a + d = 9 \cdot (10c + d - 10a - b) \\ &\iff 10c + b + 10a + d = 90c + 9d - 90a - 9b && \textbf{(1 pont)} \\ &\iff 100a + 10b = 80c + 8d \\ &\iff 10 \cdot (10a + b) = 8 \cdot (10c + d) \\ &\iff 5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}. && \textbf{(2 pont)} \end{aligned}$$

Az $\overline{abcd}$ számot kifejezzük a $\overline{cd}$ függvényében:

$$\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 20 \cdot 5 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 20 \cdot 4 \cdot \overline{cd} + \overline{cd} = 81 \cdot \overline{cd}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $\overline{abcd}$ teljes négyzet és 81 is az, ezért $\overline{cd}$ is teljes négyzet kell legyen.
Így a $\overline{cd}$ lehetséges értékei:

$$16, \quad 25, \quad 36, \quad 49, \quad 64 \quad \text{vagy} \quad 81. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $\overline{cd} = 16$, akkor $\overline{abcd} = 81 \cdot 16 = 1296$. Mivel $5 \cdot 12 \neq 4 \cdot 96$, ezért 1296 nem felel meg. **(1 pont)**
Ha $\overline{cd} = 25$, akkor $\overline{abcd} = 81 \cdot 25 = 2025$ és $5 \cdot 20 = 4 \cdot 25$, ezért $\overline{abcd} = 2025$. **(1 pont)**

■

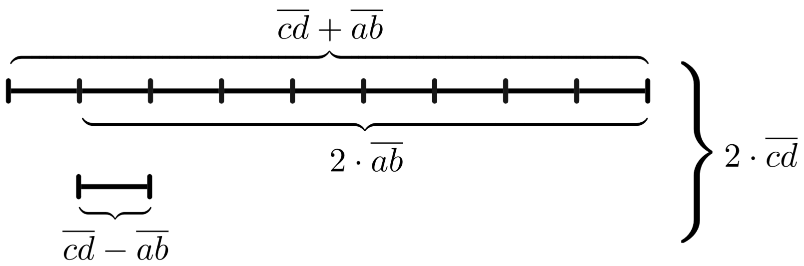
Megjegyzés. Mivel $5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}$, ezért az is következik, hogy a $\overline{cd}$ olyan teljes négyzet, amely osztható 5-tel, tehát csak a 25 lehet. Így nem szükséges az esetek tárgyalása a megoldáshoz.

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$(\overline{cb} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = 9 \iff (\overline{cb} + \overline{ad}) = 9 \cdot (\overline{cd} - \overline{ab}) \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$\iff (\overline{cd} + \overline{ab}) = 9 \cdot (\overline{cd} - \overline{ab}). \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ábrázoljuk a kapott egyenlőséget:



(2 pont)
Így $2 \cdot \overline{ab} = 8e$ (ahol $e = \overline{cd} - \overline{ab}$ az egységet jelöli) és $2 \cdot \overline{cd} = 10e$, tehát $\overline{ab} = 4e$ és $\overline{cd} = 5e$. **(1 pont)**
Az $\overline{abcd}$ számot kifejezzük az e egység függvényben:

$$\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 400 \cdot e + 5 \cdot e = 405 \cdot e. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $\overline{abcd}$ teljes négyzet, ezért

$$405 \cdot e = 81 \cdot 5 \cdot e = k^2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

A feltétel akkor teljesül legelőször, ha $e = 5$. **(1 pont)**
Tehát $\overline{ab} = 4 \cdot 5 = 20$ és $\overline{cd} = 5 \cdot 5 = 25$, amelyek teljesítik a $(\overline{cd} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = (20 + 25) : (25 - 20) = 9$ feltételt. Tehát a legkisebb négyjegyű természetes szám, ami teljesíti a feltételeket

$$\overline{abcd} = 2025 = 45^2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont). Az alábbi összeadásban a különböző betűk különböző számjegyeket és az azonos betűk azonos számjegyeket helyettesítenek. Határozd meg az összeg azon legnagyobb értékét, amely osztható a számjegyei összegével!

$$\begin{array}{r} \text{LÁM}+ \\ \text{APA} \\ \text{FEJ} \\ \hline \text{1LEA} \end{array}$$

András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az összeadás csak akkor lehetséges, ha

$$M + J = 10,$$
$$Á + P + 1 = 10 \implies Á + P = 9,$$
$$A + F + 1 = 10 \implies A + F = 9. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Az $\overline{1LEA}$ szám, akkor a legnagyobb, ha $L = 9$. **(1 pont)**

A 10 és 9 lehetséges felbontásai a fenti feltételnek megfelelően:

$$10 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4, \quad \text{illetve} \quad 9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4. \quad \textbf{(1 pont)}$$

I. eset. Az $L = 9$ és $\overline{1LEA}$ a lehető legnagyobb szám, ezért azt vizsgáljuk, először, hogy lehet-e $E = 8$. Mivel különböző betűknek különböző számjegyek felelnek meg, a következő lehetőségek maradnak.

a) Ha $M + J = 7 + 3$, akkor $A + F = 5 + 4$, így az $Á + P$-nek nem marad megfelelő felbontás.

b) Ha $M + J = 6 + 4$, akkor $A + F = 7 + 2$, így az $Á + P$-nek nem marad megfelelő felbontás.

Tehát $E \neq 8$. **(2 pont)**

II. eset. Vizsgáljuk most az $L = 9$ és $E = 7$ lehetőséget.

a) Ha $M + J = 6 + 4$, akkor $A + F = 8 + 1$, így az $Á + P$-nek nem marad megfelelő felbontás.

b) Ha $M + J = 8 + 2$, akkor

$$A + F = 6 + 3 \text{ és } Á + P = 5 + 4$$

vagy

$$A + F = 5 + 4 \text{ és } Á + P = 6 + 3.$$

Tehát a lehetséges eredmények:

$$1976, \quad 1975, \quad 1974 \quad \text{és} \quad 1973. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Nem vettük még figyelembe azt a feltételt, hogy az $\overline{1LEA}$ osztható kell legyen a számjegyeinek az összegével, vagyis az $1 + L + E + A$ számmal. Mivel

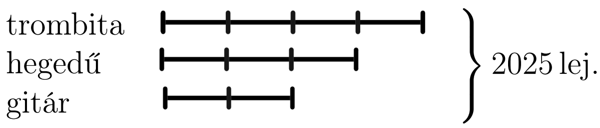
$$23 \nmid 1976, \quad 22 \nmid 1975 \quad \text{és} \quad 21 \mid 1974,$$

ezért a legnagyobb összeg $\overline{1LEA} = 1974$ lehet, ha az Á, M, P, F, J számjegyeket is sikerült megadnunk. Egy ilyen lehetőség például $Á = 6$, $M = 8$, $P = 3$, $F = 4$ és $J = 2$.**(1 pont)**

4. feladat (10 pont). Három testvér, Péter, Zsolt és Erzsébet, összesen 2025 lejt kapott a nagymamájuktól, hogy hangszereket vásároljanak. Péter egy gitárt, Zsolt egy hegedűt, Erzsébet pedig egy trombitát szeretne. Tudjuk, hogy Erzsébet négyszer annyi pénzt kapott, mint Zsolt. A gitár ára a trombita árának felével, illetve a hegedű árának 2/3-ával egyenlő. Péter rájön, hogy a 2025 lej teljes felhasználásával mindhárman meg tudnák venni a kiválasztott hangszert, ha ő a kapott pénze 1/6-át odaadná a testvéreinek. Hány lejbe kerülnek az egyes hangszerek, illetve hány lejt kapott Péter, Zsolt és Erzsébet külön-külön a nagymamától?

Szász Szilárd, Marosvásárhely
Durugy Erika, Torda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Először megállapítjuk a hangszerek árát, ábrázolás módszerét alkalmazzuk. (Ha a gitár ára 2 egység, akkor a hegedű ára 3 egység és a trombita ára 4 egység.)

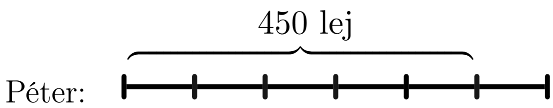


(2 pont)

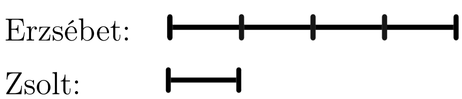
A hangszerek ára 9 egység, ami pontosan 2025 lej, ahonnan egy egység ára

$$2025 : 9 = 225\,\text{lej}.$$

Tehát a gitár ára $2 \cdot 225\,\text{lej} = 450\,\text{lej}$, a hegedű ára $3 \cdot 225\,\text{lej} = 675$ lej, valamint a trombita ára $4 \cdot 225\,\text{lej} = 900\,\text{lej}$. **(1 pont)**
Péternek 450 lejre van szüksége a gitár, Zsoltnak 675 lejre van szüksége a hegedű, illetve Erzsébetnek 900 lejre van szüksége a trombita megvásárlására. A továbbiakban megállapítjuk az unokák által kapott összegeket.
Péter a kapott pénzösszeg 5/6-át költi el gitárra:



Az ábra alapján egy egység $450 : 5 = 90\,\text{lej}$, így Péter $6 \cdot 90 = 540$ lejt kapott. **(2 pont)**
Tehát Erzsébetnek és Zsoltnak együtt $2025 - 540 = 1485$ lejt adott nagymama. **(1 pont)**
Mivel Erzsébet 4-szeresét kapta a Zsolt által kapott összegnek:



Ezért egy egység

$$1485 : 5 = 297, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

tehát Zsolt 297 lejt, Erzsébet 1188 lejt kapott. **(1 pont)**