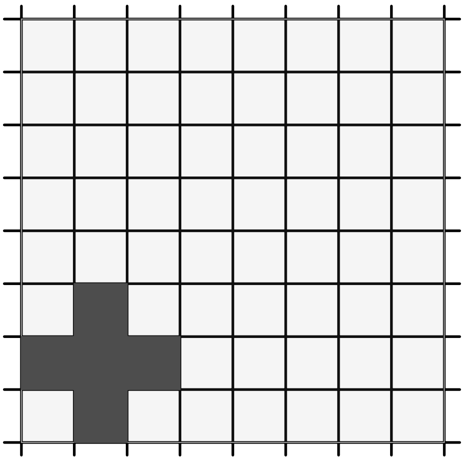
VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

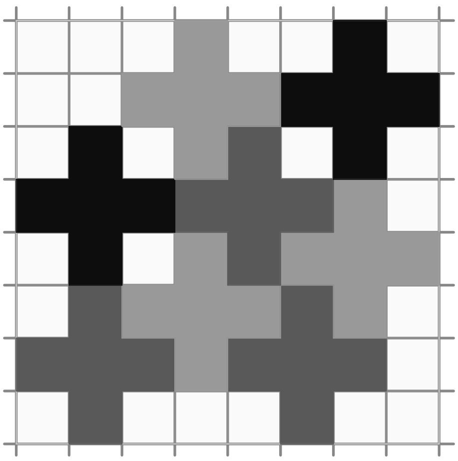
VI. osztály

1. feladat (10 pont). Az alábbi 8×8-as táblán elhelyeztünk egy 5 egységnégyzetből álló keresztet. Legfeljebb hány ilyen kereszt helyezhető el átfedés nélkül a 8×8-as táblán?



András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A diák rajzzal indokolja a megoldást: nyolc kereszt helyezhető el a feltételeknek megfelelően.
(5 pont)



Igazoljuk, hogy 8-nál több kereszttel nem lehetséges az elhelyezés.
Ahhoz, hogy a legalsó sorban lefedjünk egy négyzetet, a felette lévő sorban kell legyen 3 egymás melletti lefedett négyzetünk. Mivel $8 < 3 \cdot 3$, ezért egyik szélén lévő sorban és oszlopban sem lehet 2-nél több négyzetet lefedni. **(1 pont)**
A sarkokat nem tudjuk lefedni. Emiatt a 28 kicsi négyzetből, ami a négyzet oldalaira illeszkedik legalább 20 lefedetlenül kell maradjon. **(1 pont)**
A további $64 - 20 = 44$ egységnégyzetből még 4-nek kell lefedetlenül maradnia, mivel egy kereszt 5 egységnégyzetet fed, tehát a lefedett egységnégyzetek száma 5 többszöröse. **(1 pont)**
Ez alapján $40 : 5 = 8$-nál több keresztet nem lehet elhelyezni a táblán. **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont). Határozd meg az összes olyan $\overline{abcd}$ alakú természetes számot, amelyre egyidőben teljesülnek a következő feltételek:

a) $\dfrac{\overline{ab}}{4} = \dfrac{\overline{cd}}{5}$;

b) $\overline{ad} + c = 27$.

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az a) feltételből következik, hogy $5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}$. (**1 pont**)
Mivel $5 \mid 4 \cdot \overline{cd}$ és $5 \nmid 4$, ezért $5 \mid \overline{cd}$. (**1 pont**)
Ebből következik, hogy $d = 0$ vagy $d = 5$. (**1 pont**)
Mivel a b) feltételnek is kell teljesülnie, ezért $\overline{ad} \in \{20, 25\}$. (**1 pont**)

I. eset. Ha $\overline{ad} = 20$, akkor $c = 7$. (**1 pont**)

Visszahelyettesítve az a) feltételbe kapjuk, hogy $\frac{\overline{2b}}{4} = \frac{70}{5} = 14$. Ekkor $\overline{2b} = 56$, ami ellentmondás. (**1 pont**)

II. eset. Ha $\overline{ad} = 25$, akkor $c = 2$. (**1 pont**)

Visszahelyettesítve az a) feltételbe kapjuk, hogy $\frac{\overline{2b}}{4} = \frac{25}{5} = 5$. Ekkor $\overline{2b} = 20$, tehát $b = 0$. (**1 pont**)

A keresett szám tehát $\overline{abcd} = 2025$. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az aránypárok származtatásából, illetve az utolsó számjegyek felcserélésével kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = \frac{\overline{ab} + \overline{cd}}{4+5} = \frac{\overline{ad} + \overline{cb}}{9}.$$ (**1 pont**)

A feltevés alapján $\overline{ad} = 27 - c$, amit behelyettesítve az előbbi törtbe, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{ad} + \overline{cb}}{9} = \frac{27 - c + 10c + b}{9} = \frac{9c + 27 + b}{9} = c + 3 + \frac{b}{9}.$$

Tehát

$$\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = c + 3 + \frac{b}{9}.$$ (**1 pont**)

Mivel $\frac{\overline{ab}}{4}$ véges tizedes tört, ezért $\frac{b}{9}$ is véges tizedes tört, tehát $b = 9$ vagy $b = 0$. (**2 pont**)

I. eset. Ha $b = 9$, akkor $\frac{\overline{a9}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5}$, ahonnan $4 \cdot \overline{cd} = 5 \cdot \overline{a9}$.

Mivel a $4 \cdot \overline{cd}$ páros szám, az $5 \cdot \overline{a9}$ pedig páratlan, ezért az egyenlőség nem áll fenn.

Tehát $b \neq 9$. (**1 pont**)

II. eset. Ha $b = 0$, akkor $\frac{\overline{a0}}{4} = c + 3$, azaz $10a = 4c + 12$. **(1 pont)**

Az $\overline{ad} + c = 27$ feltételből adódik, hogy $10a + d + c = 27$. A fenti egyenlőség alapján

$$4c + 12 + d + c = 27 \iff 5c + d = 15.$$

Innen kapjuk, hogy d osztható 5-tel, tehát $d \in \{0, 5\}$. **(1 pont)**

Ha $d = 0$, akkor $c = 3$, így a $10a = 4c + 12$ egyenlőség alapján $10a + 3 = 27$, ami ellentmondás. **(1 pont)**

Ha $d = 5$, akkor $c = 2$, így a $10a = 4c + 12$ összefüggésből kapjuk, hogy $a = 2$.

Tehát a keresett szám $\overline{abcd} = 2025$. **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5}$ feltételből kapjuk, hogy $5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}$, amelyben $5 \cdot \overline{ab}$ és $4 \cdot \overline{cd}$ is a 20 többszöröse. **(2 pont)**

Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 20$, akkor $\overline{ab} = 4$, ami ellentmond annak, hogy $\overline{ab}$ kétjegyű szám.
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 40$, akkor $\overline{ab} = 8$, ami ellentmond annak, hogy $\overline{ab}$ kétjegyű szám. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 60$, akkor $\overline{ab} = 12$ és $\overline{cd} = 15$. Ekkor a második feltétel nem teljesül, mert $15+1 \neq 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 80$, akkor $\overline{ab} = 16$ és $\overline{cd} = 20$. Ekkor a második feltétel nem teljesül, mert $10+2 \neq 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 100$, akkor $\overline{ab} = 20$ és $\overline{cd} = 25$. Ekkor a második feltétel is teljesül, mert $25+2 = 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 120$, akkor $\overline{ab} = 24$ és $\overline{cd} = 30$. Ekkor a második feltétel nem teljesül, mert $20 + 3 \neq 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 140$, akkor $\overline{ab} = 28$ és $\overline{cd} = 35$. Ekkor a második feltétel nem teljesül, mert $25 + 3 \neq 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} \geq 160$, akkor $\overline{ab} \geq 32$, innen $a \geq 3$, ami ellentmond a második feltételnek.
A fenti esetek tárgyalásából egy megoldást kaptunk: $\overline{abcd} = 2025$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Adott az $a = 3n + 2$, $b = 2n + 1$ és $c = n + 1$ szám, ahol n egy természetes szám.

a) Igazold, hogy az a és b relatív prímek!

b) Bizonyítsd be, hogy az $[a, b] + [a, c]$ szám négyzetszám, bármely n természetes szám esetén, ahol $[a, b]$ az a és b számok legkisebb közös többszörösét jelöli!

Faluvégi Melánia, Zilah

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen d az a és b számok egy közös osztója. Ekkor $d \mid (3n + 2)$ és $d \mid (2n + 1)$. **(1 pont)**

A d osztja ezeknek a számoknak bármilyen többszörösét is. Így $d \mid 2 \cdot (3n + 2)$ és $d \mid 3 \cdot (2n + 1)$. **(1 pont)**

A d szám osztja ezek különbségét is, ezért $d \mid [(6n + 4) - (6n + 3)]$. **(1 pont)**

Innen $d \mid 1$, amiből $d = 1$, vagyis a és b relatív prímek. **(1 pont)**

b) Mivel a és b relatív prímek, ezért $[a, b] = a \cdot b$. **(1 pont)**

Igazolni fogjuk, hogy az a és c is relatív prímek. Legyen az a és c számok közös osztója d, ekkor $d \mid (3n+2)$ és $d \mid (n+1)$ és mivel $d \mid (3n+2)$ és $d \mid 3(n+1)$ következik, hogy $d \mid [(3n+3)-(3n+2)]$, azaz $d \mid 1$, amiből következik, hogy $d = 1$. Ezért $(a, c) = 1$. **(1 pont)**

Mivel a és c relatív prímek, ezért $[a, c] = a \cdot c$. **(1 pont)**

Használva a fenti részeredményeket

$$\begin{aligned}
[a, b] + [a, c] &= ab + ac \\
&= a \cdot (b + c) \qquad \textbf{(1 pont)} \\
&= (3n + 2)(2n + 1 + n + 1) \\
&= (3n + 2)(3n + 2) \\
&= (3n + 2)^2,
\end{aligned}$$

ami négyzetszám. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Észrevesszük, hogy $c = a - b$. **(1 pont)**

Így ha egy d szám oszt a három szám közül kettőt, akkor a harmadik számot is osztania kell. **(1 pont)**

Abból, hogy a d osztja a b-t és c-t következik, $d \mid (2n + 1)$, vagyis $d \mid [(n + 1) + n]$ és $d \mid (n + 1)$.

A $d \mid [(n + 1) + n]$ és a $d \mid (n + 1)$ összefüggésekből következik $d \mid n$. **(1 pont)**

Ha $d \mid n$ és $d \mid (n + 1)$ akkor, $d = 1$. **(1 pont)**

Ezzel azt igazoltuk, hogy a, b és c páronként relatív prímek. **(1 pont)**

b) Az a) alpont szerint $(a, b) = 1, (a, c) = 1$, ezért $[a, b] = a \cdot b$ és $[a, c] = a \cdot c$. **(2 pont)**

Így $[a, b] + [a, c] = ab + ac = a \cdot (b + c)$. **(1 pont)**

A $c = a - b$ egyenlőség alapján $[a, b] + [a, c] = ab + ac = a \cdot (b + c) = a \cdot a = a^2$, ami négyzetszám. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Adottak az $\widehat{AOA_1}$, $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, ..., $\widehat{A_{n-1}OA}$ egy pont körüli, egymással kongruens 24°-os szögek. Legyenek ugyanazon az ábrán az $\widehat{AOB_1}$, $\widehat{B_1OB_2}$, $\widehat{B_2OB_3}$, ..., $\widehat{B_{m-1}OA}$ egy pont körüli, egymással kongruens 18°-os szögek úgy, hogy az A_1 és B_1 az OA egyenes ugyanazon oldalán helyezkedjenek el.

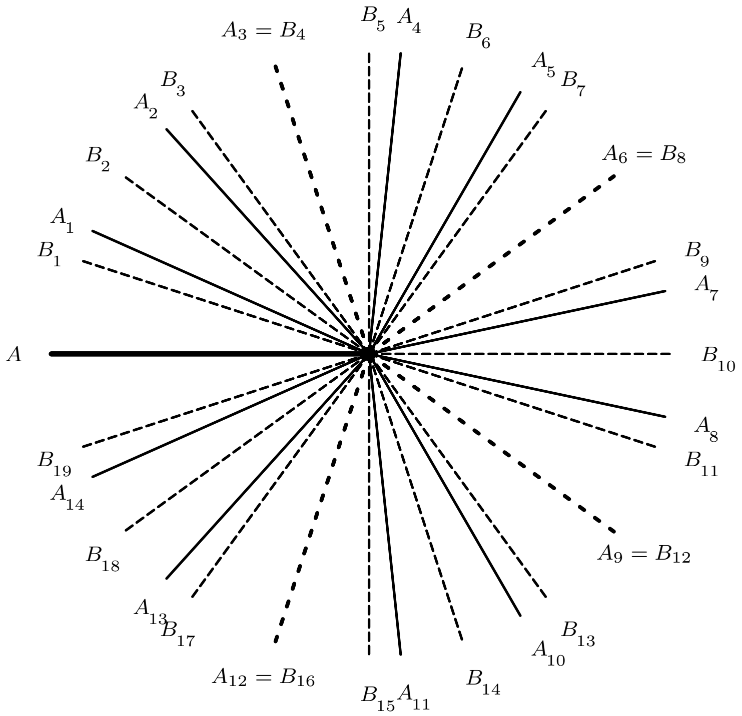
a) Összesen hányszor esnek egybe a szögek szárai az OA félegyenesen kívül?

b) Az O pont körül legtöbb hány olyan szög van, amelyek belső tartományai páronként nem metszik egymást?

c) Hány derékszög van az ábrán?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Az OA_i és OB_j szárak pontosan akkor esnek egybe, ha az AOA_i és AOB_j szögek mértéke megegyezik, vagyis $i \cdot 24° = j \cdot 18°$. Tehát ebben az esetben az AOA_i (és AOB_j) szög mértéke közös többszöröse a 24°-nak és a 18°-nak. A legkisebb közös többszörös a 72°, tehát az első közös szár $OA_3 = OB_4$ ($3 = \frac{72}{24}$ és $4 = \frac{72}{18}$), amelyre $\widehat{AOA_3} = \widehat{AOB_4} = 72°$. **(1 pont)**

Mivel $360 : 72 = 5$, tehát a szögek közös szárainak száma 5 az OA félegyenessel együtt. **(1 pont)**

Az OA félegyenesen kívül a szögek szárai négyszer esnek egybe. **(1 pont)**

b) Egyrészt maximális szögszám esetén a szögek összege 360° kell legyen, különben növelni tudjuk a szögek számát. Másrészt akkor lesz a szögek száma a legnagyobb, ha a választott szögek egyike sem bontható fel OA_i vagy OB_j félegyenesek segítségével kisebb szögekre. Tehát minden OA_i és OB_j félegyenes valamelyik szögnek szára kell legyen. **(1 pont)**

A 24°-os szögek száma $360 : 24 = 15$, így az OA_i félegyenesek száma az OA félegyenessel együtt 15. A 18°-os szögek száma pedig $360 : 18 = 20$, így az OB_j félegyenesek száma az OA félegyenessel együtt 20. **(1 pont)**

Mivel 5 közös szár is van az OA félegyenest is beleszámítva, a különböző félegyenesek száma $15+20-5=30$. Ez a 30 félegyenes 30 darab szöget határoz meg az O pont körül, amelyek belső tartományai páronként nem metszik egymást. Tehát a szögek maximális száma 30. (**1 pont**)

c) Ha bevezetjük az $A = A_0 = B_0$ jelöléseket, akkor elvben három fajta derékszög állhat elő: $\widehat{A_iOA_j}$, $\widehat{B_iOB_j}$ és $\widehat{A_iOB_j}$ alakúak.

Az $\widehat{A_iOA_j}$ szögek mértéke a $24°$ többszöröse, de mivel $\frac{90}{24} = \frac{15}{4}$ nem egész szám, így ez a fajta szög nem lehet derékszög. (**1 pont**)

Az $\widehat{B_iOB_j}$ szögek mértéke a $18°$ többszöröse, de mivel $\frac{90}{18} = 5$. Így ezek a fajta szögek lehetnek derékszögek és 5 darab $\widehat{B_iOB_{i+1}}$ szögből tevődnek össze: $\widehat{AOB_5} = \widehat{B_0OB_5} = 90°$, $\widehat{B_1OB_6} = 90°$, $\widehat{B_2OB_7} = 90°$, …, $\widehat{B_3OB_8} = 90°$, …, $\widehat{B_{15}OA} = \widehat{B_{15}OB_0} = 90°$, $\widehat{B_{16}OB_1} = 90°$, $\widehat{B_{17}OB_2} = 90°$, $\widehat{B_{18}OB_3} = 90°$, $\widehat{B_{19}OB_4} = 90°$. (**1 pont**)

Az $\widehat{A_iOB_j}$ alakú derékszögek esetén az OA_i félegyens egybeesik valamelyik OB_k félegyenessel, tehát az $\widehat{A_iOB_j}$ alakú derékszögek tulajdonképpen $\widehat{B_kOB_j}$ alakú derékszögek, amelyeket már megszámoltunk.

Tehát összesen 20 darab derékszög van (pontosan annyi mint az OB_i félegyenesek száma az OA félegyenessel együtt). (**1 pont**)

■