Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematika Olimpiája

Szatmár megyei szakasz, 2018. január 19.

VI. osztály

Összeállította és szerkesztette: Polcz Zita

1) Tétel

Négy különböző prímszám összege 33.

a) Igazold, hogy a szorzatuk páros szám!

b) Keress négy ilyen prímszámot, ha szorzatuk osztható az összegükkel!

c) Mennyi lehet négy ilyen prímszám szorzatának legkisebb és legnagyobb értéke?

2) Tétel

a) Egy négyjegyű természetes szám utolsó számjegye 7. Ha a 7-es számjegyet az egyes helyi értékről áthelyezzük az ezres helyi értékre, akkor a kapott szám 2826-tal nagyobb, mint az eredeti szám. Mennyi a számjegyek összege a kapott számban?

b) Határozd meg az 5^{5^n} szám 13-mal való osztási maradékát! ($n \in \mathbb{N}$)

3) Tétel

Adott az AOB hegyesszög. $[OC$ és $[OD$ olyan félegyenesek, amelyekre $[OC \perp [OA$ és $[OD \perp [OB$ úgy, hogy az $\widehat{AOC}$ és $\widehat{BOD}$ belső tartományának nincs közös pontja.

a) Igazold, hogy az $\widehat{AOB}$ és $\widehat{COD}$ kiegészítő szögek!

b) Ha $[OM$ az $\widehat{AOB}$ szögfelezője, $[ON$ pedig a $\widehat{COD}$ szögfelezője, akkor az M, O és N kollineáris pontok.

c) Legyen $[OP$ az $\widehat{BOC}$ szögfelezője. Igazold, hogy az $\widehat{NOP}$ mértéke állandó, függetlenül az $\widehat{AOB}$ mértékétől!

Minden helyes megoldásért 10 pont jár.
Munkaidő 2 óra.
Feladatonként egy pont jár hivatalból.

2016 EMMV

6. **Meglepetés, 25 p**…
Egy ilyen úton történt, hogy … a vonatokat.
ért, a füst becsapott ezen az … az alagútba

– Itt van olyan ember, … *s az arca, az*
szálljon le a következő megá… … *i.*

Az első két megállónál … adikhoz érve
néhányan felálltak és leszáll…

Megjegyzés: Az utasok … *arcukat nem*
látják, de a többiekét igen. …

ERDÉLYI MAGYAR ÁLTALÁNOS ISKOLÁK MATEMATIKAVERSENYE

Szatmár megye, 2016. január 22.

V. osztály

Szerkesztette és összeállította: **Koczinger Éva**

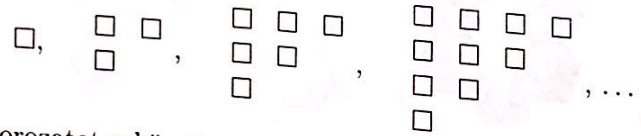
1. a) Oldd meg az egyenletet: $10^3 : \{26 + 2\,[4^3 + 12^2 : (15 - 3x)]\} = 4$.

b) Határozd meg az a, b, c számjegyeket, melyekre $\overline{abba} + \overline{abab} + c = 2016$.

2. a) Benő ebben az évben ünnepli a 12. születésnapját. Amikor a testvére, Anna annyi éves lesz, mint Benő most, akkor együtt 27 évesek lesznek. Melyik évben született Anna?

b) Határozd meg azokat a nullától különböző természetes számokat, amelyeket 15-tel, illetve 12-vel osztva, hányadosul a és b számjegyet kapunk, maradékul pedig 9-et, illetve 6-ot.

3. Tekintsük a következő sorozatot:



a) Folytasd a sorozatot a következő két taggal!

b) Hány kis négyzetből áll a 63. tag?

c) Hányadik az a tag, amelyik 231 kis négyzetből áll?

4. Egy képernyőn kezdetben a 27-es szám jelenik meg, majd 1 perc után mindig a szám számjegyeinek a szorzatánál 23-mal nagyobb szám jelenik meg. Hányas szám lesz a képernyőn 1 óra múlva? Az 1 óra alatt hányszor jelenik meg a képernyőn a 3-as számjegy?

Megoldások

1. a) Az egyenlet rendre így alakítható: $26 + 2\,[4^3 + 12^2 : (15 - 3x)] = 1000 : 4 \iff$
$\iff 2[64 + 144 : (15 - 3x)] = 224 \iff 64 + 144 : (15 - 3x) = 112 \iff$
$\iff 144 : (15 - 3x) = 48 \iff 15 - 3x = 3 \iff x = 4$.

b) A feladat alapján $a \leq 1$, $a \neq 0$, tehát $a = 1$.

Az adott egyenlet egyenértékű a következővel: $\overline{b1b} + \overline{bb1} + c = 16$, ahonnan $b = 0$, $c = 5$.

2. a) Amikor Anna 12 éves lesz, akkor kettőjük életkorának összege 27, ami 3-mal több, mint 24, tehát Benő 3 évvel idősebb. Ezért Anna idén 9 éves, tehát 2007-ben született.

b) A maradékos osztás tételét alkalmazva, az n szám $15a + 9$, illetve $12b + 6$ alakú, ahol a és b számjegyek.

Az első esetben n lehetséges értékei: $15 \cdot 1 + 9 = 24$, $15 \cdot 2 + 9 = 39$, 54, 69, 84, 99, 114, 129, 154.

A második esetben n értékei: $12 \cdot 1 + 6 = 18$, $12 \cdot 2 + 6 = 30$, 42, 54, 66, 78, 90, 102, 114.

Tehát n értékei: 54 és 114.

3. a) A következő két tag: $\begin{array}{lllll} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & & \\ \square & \square & & & \\ \square & & & & \end{array}$ és $\begin{array}{llllll} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & \square & & \\ \square & \square & \square & & & \\ \square & \square & & & & \\ \square & & & & & \end{array}$.

b) Az 1. tag 1, a 2. tag $1 + 2 = 3$, a 3. tag $1 + 2 + 3 = 6$, a 63. tag $1 + 2 + 3 + \ldots + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$ kis négyzetből áll.

c) Az n. tag $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 231 \iff n(n+1) = 462 = 21 \cdot 22$, tehát $n = 21$.

4. Az 1. percben a **27** jelenik meg, a 2. percben $14 + 23 = \mathbf{37}$, a 3. percben $21 + 23 = \mathbf{44}$, a 4. percben $16 + 23 = \mathbf{39}$, az 5. percben $27 + 23 = \mathbf{50}$, a 6. percben $0 + 23 = \mathbf{23}$, a 7. percben $6 + 23 = \mathbf{29}$, a 8. percben $18 + 23 = \mathbf{41}$, a 9. percben $4 + 23 = \mathbf{27}$ ismét.

A kapott nyolc szám ismétlődik nyolc percenként. Mivel 1 óra = 60 perc, $60 = 8 \cdot 7 + 4$, ezért a sorozat 4. száma, 39 lesz látható.

Nyolc perc alatt háromszor jelenik meg a 3-as. A számsorozat hétszer ismétlődik meg, és még megjelenik az első négy szám 27, 37, 44, 39. Összesen $7 \cdot 3 + 2 = 23$-szor jelenik meg a 3-as az első óra alatt.

VI. osztály

Szerkesztette és összeállította: **Polcz Zita**

1. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(2^{2016} - 2^{2015}) : 2^{2014} =$

b) $\left[2,1(6) + 1\frac{1}{2} : 0,(3)\right]\left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 - 9 \cdot 2016^0 =$

2. Két háromjegyű szám összege osztható 37-tel. Ha ezt a két számot egymás mellé írjuk, egy hatjegyű számot kapunk. Igazoljuk, hogy ez a hatjegyű szám is osztható 37-tel!

3. Adottak az A_1, A_2, $\ldots$, A_{2016} pontok egy egyenesen úgy, hogy $A_1A_2 = 2$ cm, $A_2A_3 = 2^2$ cm, $\ldots$, $A_{2015}A_{2016} = 2^{2015}$ cm.

a) Számítsuk ki az $[A_1A_6]$ és $A_1A_{2016}]$ szakaszok hosszát!

b) Számítsuk ki az $[A_8A_{28}]$ szakasz hosszát, és igazoljuk, hogy a kapott szám osztható 15-tel!

4. Az A, O és D pontok kollineárisak, $O \in (AD)$, $\widehat{AOB}$ és $\widehat{BOC}$ egymás melletti szögek, $(OC \in Int\,(\widehat{BOD})$, $m(\widehat{BOC}) = 5m(\widehat{AOB})$, $3m(\widehat{BOC}) = 5m(\widehat{COD})$, $\widehat{AOM} \equiv \widehat{MOC}$, $OQ \perp OM$, ahol $Q \in Int\,(\widehat{MOD})$.

a) Számítsuk ki az $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ és $\widehat{COD}$ mértékét!

b) Igazoljuk, hogy $(OQ$ szögfelezője a $\widehat{COD}$-nek!

Megoldások

1. a) $2^{2015}(2-1) : 2^{2014} = 2$,

b) $\left(\frac{13}{6}+\frac{9}{2}\right)\cdot\frac{36}{25}-9=\frac{48}{5}-9=\frac{3}{5}$.

2. Tudjuk, hogy $37 \mid \overline{abc}+\overline{def}$. Legyen $A=\overline{abcdef}$, akkor $A=\overline{abcdef}=\overline{abc000}+\overline{def}=$ $=1000\cdot\overline{abc}+\overline{def}=999\cdot\overline{abc}+(\overline{abc}+\overline{def})=27\cdot 37\cdot\overline{abc}+(\overline{abc}+\overline{def})$, ami osztható 37-tel.

3. a) $A_1A_6=2+2^2+2^3+2^4+2^5=2^6-2=62$ (cm),
$A_1A_{2016}=2+2^2+\ldots+2^{2015}=2^{2016}-2$ (cm).
b) $A_8A_{28}=A_1A_{28}-A_1A_8=(2^{28}-2)-(2^8-2)=2^{28}-2^8=2^8(2^{20}-1)$ (cm).
Mivel $u(2^{28})-u(2^8)=0$, ezért $2^{28}-2^8$ osztható 5-tel (1).

Továbbá $A_8A_{28}=2^8+2^9+\ldots+2^{27}=2^8(1+2)+2^{10}(1+2)+\ldots+2^{26}(1+2)=$ $=3(2^8+2^{10}+\ldots+2^{26})$, ami osztható 3-mal (2).

Mivel $(3,5)=1$, ezért (1) és (2) alapján következik, hogy az $[A_8A_{28}]$ szakasz hossza egy olyan természetes szám, amely osztható 15-tel.

4. a) Legyen $m(\widehat{AOB})=x$. Ekkor $m(\widehat{BOC})=5x$, $m(\widehat{COD})=3x \Rightarrow$
$\Rightarrow x+5x+3x=180° \Rightarrow x=20° \Rightarrow m(\widehat{AOB})=20°$, $m(\widehat{BOC})=100°$, $m(\widehat{COD})=60°$.
b) $m(\widehat{MOC})=60° \Rightarrow m(\widehat{COQ})=30°$, $m(\widehat{QOD})=30°$, tehát $(OQ$ szögfelező.

VII. osztály

Szerkesztette és összeállította: **Koczinger Éva**

1. a) Számítsd ki: $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot(-3)^5+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(-2)^5\right] : 13=$

b) Igazold, hogy: $|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+\ldots+|\sqrt{99}-\sqrt{100}|\in\mathbb{N}$.

c) Határozd meg a $|2016-|x+1||=1$ egyenlet megoldásainak összegét!

d) Egy téglalap alakú telket négyzet alakúvá egészítünk (a lehető legkisebbre, az egyik oldala mentén). Ha a négyzet területe 36 m^2-rel nagyobb, mint az eredeti terület, határozd meg a téglalap méreteit, tudva, hogy azok természetes számok!

2. a) Ha $a=2-\sqrt{3}$ és $b=2+\sqrt{3}$, számítsd ki a két szám számtani és mértani közepét, majd hasonlítsd össze a kapott erdményeket!

b) Igazold, hogy $\sqrt{20}+\sqrt{30}<10$.

c) Igazold, hogy $\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\ldots+\sqrt{99\cdot 100}<5000$.

3. Az $ABCD$ trapézban $AD=BC$, O az átlók metszéspontja. Ha $m(\widehat{AOD})=120°$, és M, N, P az $[OA]$, $[OD]$, illetve $[BC]$ szakasz felezőpontja, igazold, hogy MNP háromszög egyenlő oldalú.

4. Az ABC háromszögben $m(\widehat{B})=45°$ és $m(\widehat{C})=30°$. Legyenek A', B' és C' az A, B, C pontoknak a szemben fekvő oldalakra vonatkozó szimmetrikusai. Tudjuk, hogy $BB'\cap CC'=$ $=\{P\}$. Igazoljuk, hogy:

a) a P, A, A' pontok kollineárisak;

b) a $B'BC$ háromszög egyenlő oldalú;

c) $ABA'\Delta\equiv AB'C'\Delta$.

Megoldások

1. a) $(3^2+2^2) : 13 = 1$.

b) $S = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100} - \sqrt{99} = 10 - 1 = 9 \in \mathbb{N}$.

c) Az egyenlet egyenértékű a következővel:
$2016 - |x+1| = \pm 1 \iff |x+1| = 2015$ vagy $|x+1| = 2017$.
Ha $|x+1| = 2015$, akkor $x+1 = 2015$ vagy $x+1 = -2015$, ahonnan $x_1 = 2014$ és $x_2 = -2016$. Ha $|x+1| = 2017$, akkor $x_3 = 2016$ és $x_4 = -2018$.
A megoldások összege $2014 - 2016 + 2016 - 2018 = -4$.

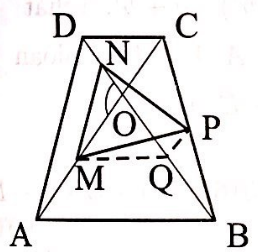
d) A téglalap méretei $y < x$, a téglalap területe xy, a négyzet területe x^2. Ekkor $x^2 = 36 + xy \iff (x-y)x = 36$, ahol $x - y < x$. Mivel $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$, a téglalap lehetséges méretei: $(36, 35)$, $(18, 16)$, $(12, 9)$, $(9, 5)$.

2. a) $m_a = \dfrac{a+b}{2} = 2$, $m_g = \sqrt{ab} = 1$, $m_a > m_g$.

b) Alkalmazva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy
$\sqrt{20} < \dfrac{4+5}{2} = \dfrac{9}{2}$ és $\sqrt{30} < \dfrac{5+6}{2} = \dfrac{11}{2}$, ahonnan $\sqrt{20} + \sqrt{30} < \dfrac{9}{2} + \dfrac{11}{2} = 10$.

c) Hasonlóan a b) ponthoz:

$$\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \ldots + \sqrt{99 \cdot 100} < \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \ldots + \frac{199}{2} = \frac{(3+199) \cdot 99}{4} = \frac{101 \cdot 99}{2} =$$
$$= \frac{10000-1}{2} < 5000.$$



3. Legyen Q az $[OB]$ felezőpontja. A feltevés alapján az OMQ háromszög egyenlő oldalú, így $m(\widehat{MQO}) = 60°$, valamint $QP \parallel OC$ (középvonal a BOC háromszögben), ezért $m(\widehat{OQP}) = 60°$. Ekkor $\widehat{PQM} \equiv \widehat{MON}$.

Továbbá $QM = OM = \dfrac{OA}{2}$ és $QP = ON = \dfrac{OD}{2}$.

Tehát $QMP\Delta \equiv OMN\Delta$ (1), így $(MP) \equiv (MN)$.

Az (1) alapján $\widehat{QMP} \equiv \widehat{OMN} \Rightarrow m(\widehat{NMP}) = m(\widehat{OMQ}) = 60°$.

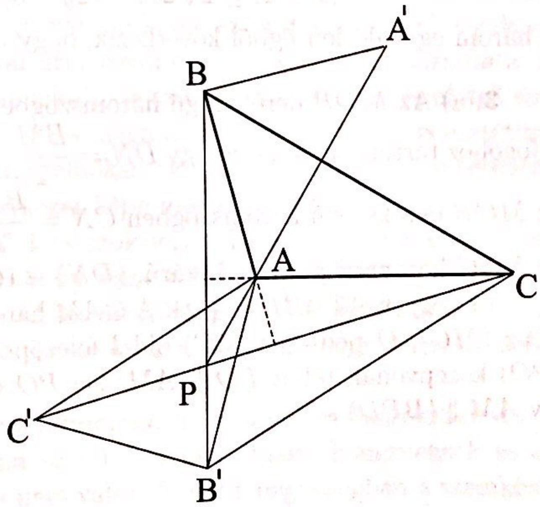
Tehát az MNP háromszög egyenlő szárú, és egyik szögének mértéke $60°$, így a háromszög egyenlő oldalú.

4. a) A feladat alapján $BB' \perp AC$, $CC' \perp AB$ és $BB' \cap CC' = \{P\}$, tehát P az ABC háromszög magasságpontja. Mivel $AA' \perp BC$ és a magasságok összefutó egyenesek, ezért az A, A' és P pontok kollineárisak.

b) A CBB' háromszögben AC oldalfelező merőleges, ezért $[B'C] \equiv [BC]$, tehát a háromszög egyenlő szárú és $m(\widehat{BCB'}) = 2 \cdot 30° = 60°$, így $B'BC$ egyenlő oldalú háromszög.

c) Tudjuk, hogy $[AB'] \equiv [AB]$ és $[C'A] \equiv [AC] \equiv [AA']$.

Továbbá $m(\widehat{B'AB}) = 2 \cdot 75° = 150°$ és $m(\widehat{C'AA'}) = 360° - \left(m(\widehat{C'AC}) + m(\widehat{CAA'})\right) =$
$= 360° - (150° + 60°) = 150° \Rightarrow$



$\Rightarrow m(\widehat{C'AB}) = m(\widehat{C'AA'}) - m(\widehat{BAA'}) = 150° - 45° = 105° \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\widehat{B'AC'}) = m(\widehat{B'AB}) - m(\widehat{C'AB}) = 150° - 105° = 45° = m(\widehat{BAA'})$.
Tehát $ABA'\Delta \equiv AB'C'\Delta$.

VIII. osztály

Szerkesztette és összeállította: **Polcz Zita**

1. Igazold, hogy az $n = 2009^3 + 2010^3 + 2011^3 + 2012^3 + 2013^3 + 2014^3 + 2015^3 + 2016^3$ szám osztható 161-gyel!

2. a) Oldd meg a valós számok halmazán az $5(2x^2+y^2)+6y(2x+1) = 4x-13$ egyenletet!
b) Igazold, hogy $(x+2)(2y+3)(3z+4) \geq 96\sqrt{xyz}$, bármely $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ esetén!

3. Az $ABCD$ téglalap síkjára a D pontban egy MD merőlegest emelünk. Legyen N az $[MB]$, P pedig az $[MC]$ felezőpontja. Igazold, hogy:
a) az NDC háromszög egyenlő szárú;
b) az AM egyenes párhuzamos a (BPD) síkkal.

4. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában M az $[AB]$, N pedig a $[B'C]$ felezőpontja. Igazold, hogy az MN egyenes
a) párhuzamos a (DAB') síkkal;
b) merőleges a $(CB'D')$ síkra.

Megoldások

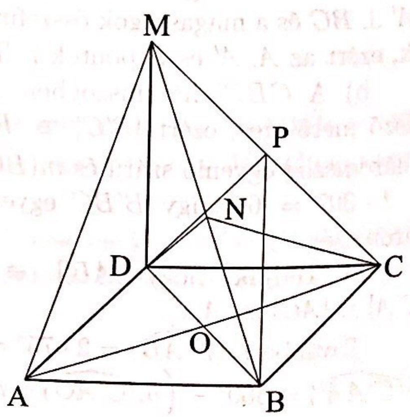
1. Ismert az $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ képlet, ahonnan $(a^3+b^3) \vdots (a+b)$. Tehát
$A = (2009^3+2016^3) \vdots (2009+2016) \Rightarrow A \vdots 4025 \Rightarrow A \vdots (161 \cdot 25) \Rightarrow A \vdots 161$. Hasonlóan
$B = (2010^3+2015^3) \vdots (2010+2015) \Rightarrow B \vdots 4025 \Rightarrow B \vdots (161 \cdot 25) \Rightarrow B \vdots 161$,
$C = (2011^3+2014^3) \vdots 161$ és $D = (2012^3+2013^3) \vdots 161$.
Ekkor $n = 2009^3+2010^3+2011^3+2012^3+2013^3+2014^3+2015^3+2016^3 = A+B+C+D$.
Tehát $n \vdots 161$.

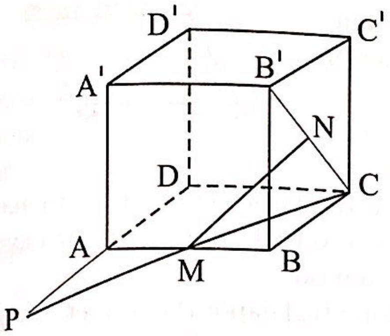
2. a) Az egyenlet egyenértékű a következő egyenlettel:
$(x-2)^2+(3x+2y)^2+(y+3)^2 = 0 \iff x=2$ és $y=-3$.
b) Mivel $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ és $m_a \geq m_g$, ezért

$$(x+2) \geq 2\sqrt{2x}, \quad (2y+3) \geq 2\sqrt{6y}, \quad (3z+4) \geq 2\sqrt{12z}.$$

A három egyenlőtlenségből következik, hogy $(x+2)(2y+3)(3z+4) \geq 8\sqrt{144xyz} = 96\sqrt{xyz}$.

3. a) Az MDB derékszögű háromszögben (DN) az átfogóhoz tartozó oldalfelező, így $DN = \dfrac{BM}{2}$. Hasonlóan az MCB derékszögű háromszögben $CN = \dfrac{BM}{2}$. Tehát az NDC háromszög egyenlő szárú, $(DN) \equiv (CN)$.
b) Legyen $AC \cap BD = \{O\}$. A CAM háromszögben P az (MC), O pedig az (AC) oldal felezőpontja, ezért (PO) középvonal, tehát $PO \parallel AM$. De $PO \subset (BPD)$, így $AM \parallel (BPD)$.





4. a) Legyen $CM \cap DA = \{P\}$.
Ekkor $PAM\Delta \equiv CBM\Delta$, ahonnan $(PM) \equiv (CM)$.
A CPB' háromszögben (MN) középvonal, így $MN \parallel PB'$, de $PB' \subset (DAB')$, ezért $MN \parallel (DAB')$.
b) Az $MB'C$ háromszög egyenlő szárú, $(MB') \equiv (MC)$, N a $B'C$ felezőpontja, ezért MN magasság is az $MB'C$ háromszögben. Ebből következik, hogy $MN \perp B'C$ (1).

A kocka élhossza a, akkor $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $D'N = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $D'M = \frac{3a}{2}$.

A $D'MN$ háromszögben $D'M^2 = D'N^2 + MN^2$, így Pitagorász tételének fordított tétele alapján a háromszög derékszögű, $MN \perp D'N$ (2).

Az (1) és (2) merőlegességek alapján $MN \perp (CB'D')$.

Műhelysarok

CSUKLÓS NÉGYSZÖGEK

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

Tanulmányozva Reiman István könyvét ([2].), felfigyeltem a csuklós sokszögekre, és ott olyan tulajdonságokra is leltem, amelyek IX. osztályban, mint feladatok, jól hasznosíthatók.

Abból indulunk ki, hogy a síkmértanban egyedüli merev sokszög a háromszög. Ez azt jelenti, hogy ha adott három olyan szakasz, amelyeknél bármelyik kisebb a másik kettő összegénél, akkor az ezekből alkotható háromszögek kongruensek egymással (ha megadjuk e szakaszok összerakási sorrendjét, akkor egy és csak egy háromszög építhető). A háromszögekkel történő merevítésre az általános iskolai tankönyvek is adnak példát (hidak, fém tartógerendák, kertkapuk). A tanár felhívhatja arra is a figyelmet, hogy napjainkban az építészetben elterjedt az acélból vagy vasbetonból készült diagrid (diagonal grid rövidítése) szerkezetek használata. E sajátos elrendezésű háromszög alakzatok elsősorban a külső felszínen biztosítják az épületek stabilitását, s ezáltal jelentős belső terek szabadulnak fel, s maga a szerkezet látványa is esztétikai élményt nyújt. Példaként a New York-i Hearst Tower felhőkarcolót említhetjük, de az interneten a diagrid címszónál számos ilyen épület és tetőszerkezet képe megtekinthető.

A háromnál többoldalú sokszögeknél az oldalak és azok sorrendje már nem határozza meg egyértelműen a sokszöget. Ez azt jelenti, hogy ha négy vagy több adott hosszúságú szakaszt adott sorrendben csuklókkal rögzítjük egymáshoz, akkor az oldalak csuklók körüli forgatásával változtathatjuk a sokszöget. A csuklós sokszög létezésének az a feltétele, hogy bármely oldal kisebb legyen, mint a többi oldal összege.

Ha egy csuklós négyszög egy helyzetében paralelogramma, akkor minden helyzetében az.

Ez azzal igazolható, hogy a paralelogramma szemben fekvő oldalai kongruensek és az oldalak csuklók körüli forgatása során azok hossza nem változik, így a négyszögben a szemközti oldalak kongruensek maradnak, tehát a négyszög megmarad paralelogrammának.