VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

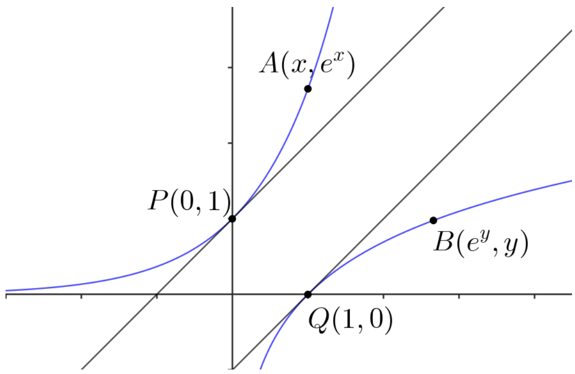
XII. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg az

$$f(x,y)=\sqrt{(x-e^y)^2+(y-e^x)^2}$$

kifejezés minimumát, ha $x,y\in\mathbb{R}$. *Dávid Géza, Székelyudvarhely*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Látható, hogy az $f(x,y)$ az $A(x,e^x)$ és $B(e^y,y)$ pontok távolsága. (**1 pont**)
Tekintsük a $g\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $g(x)=e^x$ függvényt. A g bijektív és konvex, mert $g'(x)>0$, bármely $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$ és $g''(x)>0$, bármely $x\in\mathbb{R}$. Ugyanakkor $g^{-1}\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln x$ konkáv függvény. (**1 pont**)
A g és a g^{-1} grafikus képei egymás szimmetrikusai az első szögfelezőre nézve. Az A pont a g függvény grafikus képének egy pontja, a B pedig a g^{-1} függvény grafikus képének egy pontja. Tehát azt kell meghatározni, hogy az AB szakasz hossza mikor lesz minimális. (**1 pont**)



A $P(0,1)$ pontban a g függvény grafikus képének az érintője az $y=x+1$ egyenletű egyenes, míg a g^{-1} függvény grafikus képéhez a $Q(1,0)$ pontban húzott érintő egyenlete $y=x-1$. (**2 pont**)
Mivel g konvex, grafikus képe az $y=x+1$ egyenletű egyenes fölött helyezkedik el. Analóg módon, mivel a g^{-1} konkáv, grafikus képe az $y=x-1$ egyenletű egyenes alatt helyeszkedik el. (**1 pont**)
Figyelembe véve, hogy a két egyenes párhuzamos, (**1 pont**)
azt kapjuk, hogy

$$AB\geq PQ=\sqrt{2},$$

mert PQ a két egyenes távolsága. (**1 pont**)
Tehát $\min(f(x,y))=\sqrt{2}$, és ezt az értéket az $x=0,y=0$ esetben veszi fel. (**1 pont**)
■

2. feladat (10 pont). A $(G,\cdot)$ véges csoport esetén létezik olyan $f\colon G\to G$ morfizmus, melyre $f(x^2)=x$, bármely $x\in G$.

a) Igazold, hogy a $(G,\cdot)$ kommutatív csoport!

b) Igazold, hogy ha a G csoport ciklikus, akkor nem lehet páros sok eleme!

c) Határozd meg az összes ilyen f függvényt, ha a G-nek páratlan sok eleme van!

Baja Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Tetszőleges $x, y \in G$ esetén

$$xy = f(x^2)f(y^2) = f(x)f(x)f(y)f(y). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanakkor

$$xy = f((xy)^2) = f(xyxy) = f(x)f(y)f(x)f(y).$$

Az előbbi észrevételek alapján $f(x)f(x)f(y)f(y) = f(x)f(y)f(x)f(y)$, ahonnan azt kapjuk, hogy

$$f(x)f(y) = f(y)f(x), \quad \forall x, y \in G. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Másrészt $yx = f(y^2) \cdot f(x^2) = f(x^2) \cdot f(y^2) = xy$.

Tehát $xy = yx$, bármely $x, y \in G$ esetén, azaz a $(G, \cdot)$ kommutatív csoport. **(1 pont)**

b) Feltételezzük, hogy $|G| = 2n$, és hogy a $(G, \cdot)$ ciklikus, tehát létezik $x \in G$ úgy, hogy

$$G = \{x, x^2, x^3, ..., x^{2n-1}, x^{2n} = e\} \text{ és } x^k \neq e, \text{ ha } k \in \{1, 2, 3, ..., 2n-1\}.$$

(1 pont)

Ekkor $x = f(x^2) = f(x^2 \cdot e) = f(x^2 \cdot x^{2n}) = f(x^{2(n+1)}) = x^{n+1}$, ahonnan azt kapjuk, hogy $x^n = e$, ami ellentmondás, tehát ha G ciklikus, akkor nem lehet páros sok eleme. **(2 pont)**

c) Legyen $|G| = 2n + 1$ és x egy tetszőleges elem a G-ből.

Ekkor $f(x) = f(x \cdot e) = f(x \cdot x^{2n+1}) = f(x^{2n+2}) = f((x^{n+1})^2) = x^{n+1}$, tehát $f(x) = x^{n+1}$, bármely $x \in G$ esetén. **(1 pont)**

Be kell még látnunk, hogy ez az f valóban csoportmorfizmus. Ha $x, y \in G$ tetszőlegesek, akkor $f(xy) = (xy)^{n+1}$ és $f(x)f(y) = x^{n+1} \cdot y^{n+1}$.

Az a) alpontban igazoltuk, hogy a $(G, \cdot)$ kommutatív csoport, ezért $(xy)^{n+1} = x^{n+1} \cdot y^{n+1}$, bármely $x, y \in G$ esetén, **(1 pont)**

tehát $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, bármely $x, y \in G$ esetén. **(1 pont)**

Létezik a feladat c) alpontjában megfogalmazott feltételeknek megfelelő csoport, például a $(\mathbb{Z}_{2n+1}, +)$.

■

3. feladat (10 pont). Számítsd ki az

$$\int (1 + u^2) \ln(1 + \sqrt{2 + u^2})\, du$$

határozatlan integrált!

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I &= \int (1+u^2)\ln(1+\sqrt{2+u^2})\mathrm{d}u \\
&= \left(u+\frac{u^3}{3}\right)\ln(1+\sqrt{2+u^2}) - \int \left(u+\frac{u^3}{3}\right)\frac{1}{1+\sqrt{2+u^2}}\cdot\frac{u}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u \\
&= \left(u+\frac{u^3}{3}\right)\ln(1+\sqrt{2+u^2}) - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{u^4+3u^2}{(1+\sqrt{2+u^2})\cdot\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u}_{J}.
\end{aligned}$$

(**2 pont**)

Továbbá

$$\begin{aligned}
J &= \int (u^4+3u^2)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u \\
&= \int (u^4+3u^2)\cdot\frac{\sqrt{2+u^2}-1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u \\
&= \int [(1+u^2)(2+u^2)-2]\cdot\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{(1+u^2)\sqrt{2+u^2}}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int \left(2+u^2-\frac{2}{1+u^2}-\frac{2+u^2}{\sqrt{2+u^2}}+\frac{2}{(1+u^2)\sqrt{2+u^2}}\right)\mathrm{d}u \\
&= \underbrace{\int \left(2+u^2-\frac{2}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u}_{J_1} - \underbrace{\int \sqrt{2+u^2}\mathrm{d}u}_{J_2} + \underbrace{\int \frac{2}{(1+u^2)\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u}_{J_3}.
\end{aligned}$$

(**2 pont**)

Rendre kiszámoljuk a három integrált.

$$J_1 = \int \left(2+u^2-\frac{2}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u = 2u+\frac{u^3}{3}-2\operatorname{arctg} u+\mathcal{C}.$$

(**1 pont**)

A J_2 integrált parciális integrálással számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int \sqrt{2+u^2}\mathrm{d}u = u\sqrt{2+u^2} - \int \frac{u^2}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u = u\sqrt{2+u^2} - \int \frac{u^2+2-2}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u \\
&= u\sqrt{2+u^2} + \int \frac{2}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u - \int \sqrt{2+u^2}\mathrm{d}u = u\sqrt{2+u^2} + 2\ln(u+\sqrt{2+u^2}) - J_2,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$J_2 = \int \sqrt{2+u^2}\mathrm{d}u = \frac{u}{2}\sqrt{2+u^2} + \ln(u+\sqrt{2+u^2}) + \mathcal{C},$$

(**1 pont**)

A J_3 kiszámításához $u=\sqrt{2}\operatorname{tg} t$ helyettesítést fogunk végezni: $\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$, illetve

$$u^2 = 2\operatorname{tg}^2 t \iff \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \iff \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} \iff \frac{u^2}{2+u^2} = \frac{\sin^2 t}{1} \iff \frac{u}{\sqrt{2+u^2}} = \sin t.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int \frac{2}{(1+u^2)\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u = \int \frac{2}{(1+2\operatorname{tg}^2 t)\sqrt{2+2\operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2\sqrt{2}\cos t}{(\cos^2 t + 2\sin^2 t)\sqrt{2}}\mathrm{d}t = \int \frac{2\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t = 2\operatorname{arctg}(\sin t) + \mathcal{C} \\
&= 2\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2+u^2}} + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

(**2 pont**)

Összegezve

$$\begin{aligned}
\int (1+u^2)\ln(1+\sqrt{2+u^2})\mathrm{d}u &= \left(u+\frac{u^3}{3}\right)\ln(1+\sqrt{2+u^2}) - \frac{1}{3}\left(2u+\frac{u^3}{3} - 2\operatorname{arctg} u\right) \\
&+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}u\sqrt{2+u^2} + \ln(u+\sqrt{2+u^2})\right) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2+u^2}} + \mathcal{C} \\
&= \left(u+\frac{u^3}{3}\right)\ln(1+\sqrt{2+u^2}) + \frac{1}{3}\ln(u+\sqrt{2+u^2}) - \frac{2u}{3} - \frac{u^3}{9} \\
&+ \frac{u}{6}\sqrt{2+u^2} + +\frac{2}{3}\operatorname{arctg} u - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2+u^2}} + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

(**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont). Legyen $(G,\cdot)$ egy 2025 elemű csoport, H egy olyan valódi részcsoportja, amelynek legalább 675 eleme van, és X egy olyan nem üres részhalmaza a G-nek, amelyre $X\cdot H = X$. (Ha $A, B \subset G$, akkor $A\cdot B = \{a\cdot b \mid a\in A, b\in B\}$.)

a) Hány eleme lehet a H-nak?

b) Hány eleme lehet az X-nek?

c) Az X elemszámának minden lehetséges értéke esetén adj példát olyan G-re, H-ra és X-re, amelyekre a fenti feltételek teljesülnek!

András Szilárd, Csíkdelne
Lukács Andor, Kolozsvár

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Lagrange tételéből következik, hogy a H elemeinek a száma osztója 2025-nek. (**1 pont**)

Mivel $2025 = 3^4\cdot 5^2 = 3\cdot 675$, ezért a 675 a 2025 legnagyobb valódi osztója. Mivel H valódi részcsoportja a G-nek, és $|H|\geq 675$, ezért $|H| = 675$. (**1 pont**)

b) Legyen $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ és $H = \{h_1, h_2, ..., h_{675}\}$, ahol $h_1 = e$ a G semleges eleme. Ekkor

$$X\cdot H = \{x_1h_1, x_2h_1, ..., x_kh_1, x_1h_2, x_2h_2, ..., x_kh_2, ..., x_1h_{675}, x_2h_{675}, ..., x_kh_{675}\}.$$

Ha $m\neq n$, akkor $x_ih_m \neq x_ih_n$, tehát $x_1h_1, x_1h_2, x_1h_3, ..., x_1h_{675}$ páronként különbözőek és elemei az $X\cdot H$ -nak, ezért az X-nek is, tehát X-nek van legalább 675 eleme. (**1 pont**)

Tekintsük az $x_1h_1, x_1h_2, x_1h_3, ..., x_1h_{675}$ elemeket. Ez 675 különböző elem az $X \cdot H$ halmazból, vagyis az X-ből. Továbbbá tegyük fel, hogy ezek az elemek az $x_1, x_2, ..., x_{675}$. Ha X-nek 675-nél több eleme van, akkor legyen x_{676} egy olyan elem, amely különbözik az $x_1, x_2, ..., x_{675}$ elemektől.

Az $x_{676}h_1, x_{676}h_2, ..., x_{676}h_{675}$ páronként különbözőek és $x_{676}h_i \neq x_p$, ahol $i = \overline{1, 675}$ és $p = \overline{1, 675}$. Valóban, ha $x_{676}h_i = x_p$, akkor $x_{676}h_i = x_1 \cdot h_j$, mert $\{x_1h_1, x_1h_2, x_1h_3, ..., x_1h_{675}\} = \{x_1, x_2, ..., x_{675}\}$, ahonnan azt kapjuk, hogy $x_{676} = x_1 \cdot h_j \cdot h_i^{-1} = x_1 \cdot h$, ahol $h = h_i \cdot h_j^{-1} \in H$. De $x_1 \cdot h \in \{x_1, x_2, ..., x_{675}\}$, ami ellentmondás, mert x_{676} nem eleme a $\{x_1, x_2, ..., x_{675}\}$ halmaznak. (**2 pont**)

Tehát $x_{676}h_1, x_{676}h_2, ..., x_{676}h_{675}$ elemei az $X \cdot H$-nak és ezáltal az X-nek is. Tehát az X-nek van további 675 eleme. Legyenek ezek $x_{676}, x_{677}, ..., x_{1350}$.

Ha X-nek van az $x_1, x_2, ..., x_{1350}$ elemektől különböző eleme, akkor az legyen x_{1351}. Az előbbi gondolatmenet alapján $x_{1351}h_1, x_{1351}h_2, ..., x_{1351}h_{675}$ páronként különbözőek és különbözőek az $x_1, x_2, ..., x_{1350}$ elemektől, tehát az X-nek van további 675 eleme.

Tehát X elemeinek a száma nem lehet más mint $675, 1350$ vagy 2025. (**2 pont**)

c) Legyen $G = (\mathbb{Z}_{2025}, +)$ és $H = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, ..., \widehat{2022}\}$. (**1 pont**)

- Ha $k = 675$, akkor $X = H$ megfelelő.
- Ha $k = 1350$, akkor $X = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{7}, ..., \widehat{2022}, \widehat{2023}\}$ megfelelő.
- Ha $k = 2025$, akkor $X = \mathbb{Z}_{2025}$ megfelelő. (**1 pont**)

■

Második megoldás a b) alpontra. Lagrange tételének a bizonyítását használjuk fel. Eszerint, ha H részcsoportja G-nek, akkor

- minden $g \in G$ esetén $|g \cdot H| = |H|$, mivel tetszőleges $g \in G$ esetén az $f \colon H \to gH$, $f(h) = gh$ függvény injektív és szürjektív, tehát bijektív; (**1 pont**)
- tetszőleges $g_1, g_2 \in G$ esetén, a g_1H és g_2H halmazok vagy diszjunktak, vagy megegyeznek. Valóban, ha létezik $x \in g_1H \cap g_2H$, akkor $x = g_1h_1 = g_2h_2$ valamilyen $h_1, h_2 \in H$ értékekre, tehát $g_1 = g_2h_2h_1^{-1} \in g_2H$, tehát $g_1H \subseteq g_2H$, és analóg módon $g_2H \subseteq g_1H$. (**2 pont**)

Legyen $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, tehát

$$XH = x_1H \cup x_2H \cup \cdots \cup x_kH.$$

Mivel a gH halmazok páronként diszjunktak, vagy megegyeznek, és mindegyik számossága $|H|$, következik, hogy $|X| = |XH|$ többszöröse $|H|$-nak. (**2 pont**)

■