VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\{x+3\} + 2[x+3] + \sqrt{x^2+3(2x+3)} = 4$$

egyenletet, ahol $\{a\}$ és $[a]$ rendre az a valós szám tört-, illetve egészrészét jelöli!

b) Legyen $a, b, c > 0$ úgy, hogy $abc = 2025$. Igazold, hogy

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{45}.$$

Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Értelmezés szerint $\{x+3\} = x+3-[x+3]$, így az eredeti egyenletünk

$$x+3+[x+3]+\sqrt{x^2+6x+9} = 4$$

alakra hozható. A gyök alatt lévő kifejezés a rövidített számítási képletek szerint $(x+3)^2$. (**1 pont**)
Az egyenlet tehát a még egyszerűbb

$$x+3+[x+3]+|x+3| = 4, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

alakra hozható. Az $x+3$ előjele szerint két lehetséges eset van. Ha $x+3<0$ akkor,

$$x+3+[x+3]-(x+3) = 4,$$

vagyis $[x+3] = 4$. Az egészrész értelmezése alapján $4 \le x+3 < 5$, ami ellentmond az $x+3<0$ feltételnek, tehát ebben az esetben nincs megoldás. (**1 pont**)
Ha $x+3 \ge 0$, akkor

$$x+3+[x+3]+x+3 = 4,$$

ami ekvivalens átalakítással az $[x+3] = -2-2x$ alakra hozható. Ha $y = -2-2x$, akkor $y = [\frac{-2-y}{2}+3]$ és y egész szám. Az új egyenletünk tehát $y = [\frac{4-y}{2}]$. (**1 pont**)
Az egészrész értelmezése alapján

$$y \le \frac{4-y}{2} < y+1.$$

Elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\frac{2}{3} < y \le \frac{4}{3},$$

de y egész, tehát $y=1$. Visszahelyettesítéssel az $x = -\frac{3}{2}$ eredményhez jutunk, ami helyes is lesz, mert $x+3 = \frac{3}{2} > 0$. (**1 pont**)

b) Becsüljük a tagokat külön-külön! Legyenek $x, y > 0$ tetszőleges valós számok. A számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségek alapján $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, ami elemi átalakításokkal az

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{2}{x+y}$$

alakra hozható. **(1 pont)**

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségek alapján viszont $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, vagyis

$$\frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$ **(1 pont)**

Az előbbi egyenlőtlenségek alapján

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$ **(1 pont)**

Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget a feladatban kitűzött egyenlőtlenség bal oldalán megjelenő tagokra, írhatjuk, hogy

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{45},$$

ahonnan következik a kért egyenlőtlenség. **(1 pont)**

Megjegyzés. Az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a = b = c = \sqrt[3]{2025}$.

■

2. feladat (10 pont). Adott egy 45×45-ös négyzetrács, amelyben a természetes számok 1-től 2025-ig sorrendben követik egymást, a mellékelt ábra szerint.

1	2	3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	43	44	45
46	47	48	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	88	89	90
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1981	1982	1983	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	2023	2024	2025

A négyzetrács 9 négyzetét lefedjük egy 3×3-as négyzetlappal. Számítsd ki a valószínűségét, hogy a lefedett kilenc szám összege osztható legyen 81-gyel!

Nagy Enikő Ilona, Nagyvárad
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Baja Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen a lefedésre használt 3×3-as négyzetlap középső mezője által lefedett szám n. Amikor egy számról az eggyel alatta, vagy felette lévő számra lépünk, akkor az adott számérték 45-tel nő, vagy csökken. Ennek a tulajdonságnak a segítségével a négyzetlap többi elemét is kiszámíthatjuk, amint az alábbi ábra is mutatja.

$n-46$	$n-45$	$n-44$
$n-1$	n	$n+1$
$n+44$	$n+45$	$n+46$

(1 pont)

A lefedett számokat összeadva $9n$-et kapunk, ami pontosan akkor osztható 81-gyel ha n osztható 9-cel. **(1 pont)**
Az adott 45×45-ös négyzetrács $2025 : 9 = 225$ olyan számot tartalmaz, amely osztható 9-cel, de ezek közül ki kell zárnunk azokat, amelyek nem kerülhetnek a 3×3-as négyzetlap közepére. **(1 pont)**
Azokat a számokat kell kizárnunk, amelyek az első vagy utolsó sorban, illetve első vagy utolsó oszlopban vannak és 9-cel oszthatók. A továbbiakban ezeket fogjuk felsorolni.
Az első sorban 5 darab ilyen szám van: 9, 18, 27, 36 és 45. **(1 pont)**
Az utolsó sorban szintén 5 darab ilyen szám van: 1989, 1998, 2007, 2016 és 2025. **(1 pont)**
Egy oszlopon belül bármelyik két számnak a különbsége a $45 = 9 \times 5$ többszöröse, vagyis a 9-cel való maradék állandó az oszlopon belül.
Az első oszlopban mindegyik szám $9k + 1$ alakú, tehát itt nincs olyan, amelyet osztható 9-cel. **(1 pont)**
Az utolsó oszlopban lévő számok $45k$ alakúak, viszont ebből a 45-öt és 2025-öt már számoltuk. Tehát innen további $45 - 2 = 43$ számot kell kizárni. **(1 pont)**
Összesítve a kedvező esetek száma

$$225 - (5 + 5 + 43) = 225 - 53 = 172. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A lehetséges esetek száma pedig $43 \times 43 = 1849$, tehát a keresett valószínűség

$$\mathcal{P} = \frac{172}{1849} = \frac{4}{43}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont). A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúlában V a gúla csúcsa, E a VB, F pedig a VD él felezőpontja, és $VA = AB = a$.

a) Határozd meg az AEF és VBD síkok által alkotott szög szinuszát!

b) Számítsd ki az AE és CF egyenesek által alkotott szög szinuszát!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

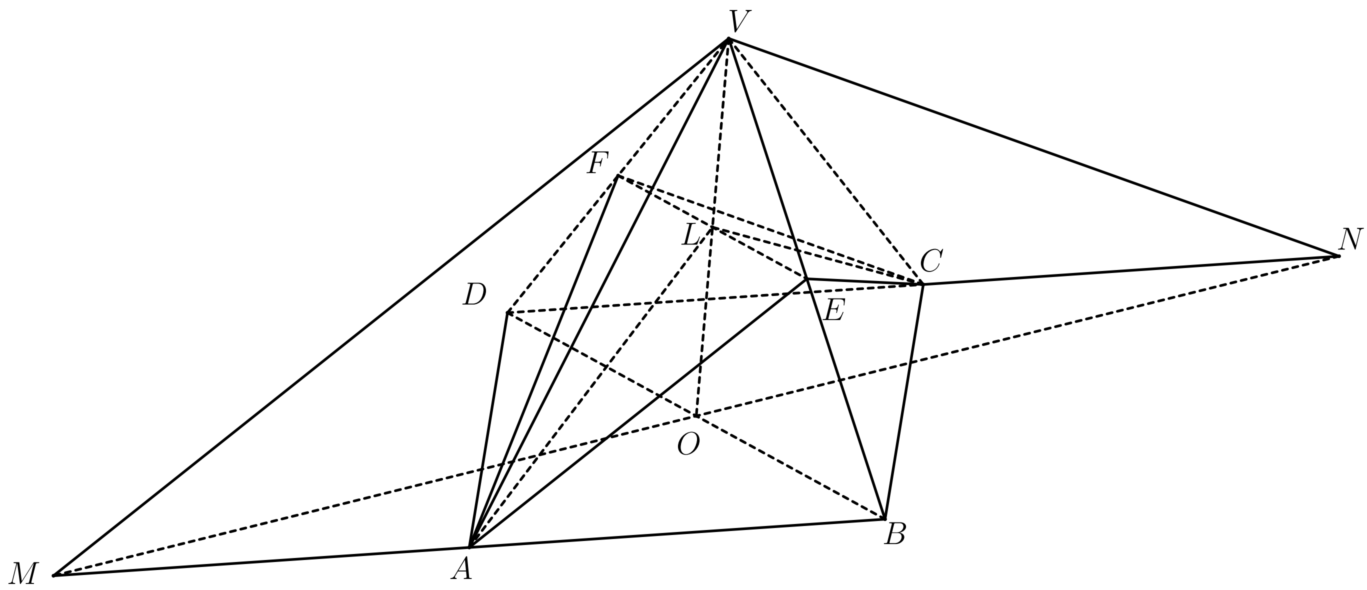
a) A feladat feltételei alapján a két sík EF-ben metszi egymást. Legyen $AC \cap BD = \{O\}$ és $VO \cap EF = \{L\}$.

A VBD háromszögben az EF középvonal, az L pontban felezi VO-t és $BD \parallel EF$. Ebből következik, hogy $VL \perp EF$, de a VFE háromszög egyenlő szárú, így L az EF felezőpontja.

A szerkesztésből adódóan $AF = AE$, tehát az AFE háromszög egyenlőszárú, amelyben AL felezi az alapot, így $AL \perp EF$. Ezeket összevonva, kijelenthetjük, hogy $[\widehat{(AEF),(VBD)}] = \widehat{ALO}$. **(1 pont)**

A VBD háromszögben $BD^2 = VB^2 + VD^2$. Pitagorász fordított tétele alapján a háromszög derékszögű, ezért a VO oldalfelező az átfogó fele, vagyis

$$VO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{és} \quad LO = \frac{VO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$



Az ALO derékszögű háromszögben, Pitagorász tétele alapján

$$AL^2 = AO^2 + OL^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{10a^2}{16},$$

vagyis $AL = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, (**1 pont**)

továbbá

$$\sin(\widehat{ALO}) = \frac{AO}{AL} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$ (**1 pont**)

b) Hosszabbítsuk meg a $(BA$ és $(DC$ félegyeneseket az $MA = AB$ és $NC = CD$ szakaszokkal! Ekkor a VBM háromszögben EA középvonal, tehát $VM \parallel AE$ és $VM = 2AE$. Mivel AE a VAB egyenlő oldalú háromszög magassága,

$$VM = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Analóg számolásokkal kapjuk, hogy $VN \parallel FC$ és $VN = a\sqrt{3}$. (**1 pont**)

A $VN \parallel FC$ és $VM \parallel EA$ összefüggések alapján

$$(\widehat{AE, CF}) = (\widehat{VM, VN}).$$ (**1 pont**)

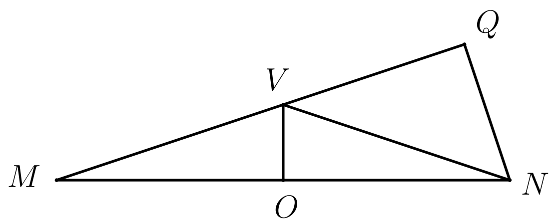
A szerkesztésből adódóan $MB = DN$ és $MB \parallel DN$, tehát az $MBND$ négyszög paralelogramma. A paralelogrammák átlói felezik egymást, vagyis az O pont, amely a BD átló felező pontja, rajta van az MN szakaszon és $MN = 2 \cdot MO$. (**1 pont**)

A VOM háromszög derékszögű, ezért Pitagorász tétele alapján

$$MO^2 = VM^2 - VO^2 = 3a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{10a^2}{4},$$

ahonnan $MO = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, tehát $MN = 2 \cdot MO = a\sqrt{10}$. (**1 pont**)

A VMN háromszögben $MN^2 > VM^2 + VN^2$, ezért a háromszög tompaszögű V-ben. Innen következik, hogy $(\widehat{VM,VN}) = 180° - \widehat{MVN}$. Legyen $Q \in MV$ úgy, hogy $NQ \perp MV$, ekkor $\widehat{NVQ} = 180° - \widehat{MVN}$.



A VMN háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy $NQ = \frac{MN \cdot VO}{VM} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$. (**1 pont**)

A VQN derékszögű háromszögben

$$\sin(\widehat{NVQ}) = \frac{NQ}{VN} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

tehát az AE és EF egyenesek által alkotott szög szinuszának értéke $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (**1 pont**)

Megjegyzés. Az a) alpontban az $AL \perp EF$ igazolható a három merőleges tételével is.

A b) alpontban maximális pontszám szerezhető akkor is, ha valaki az $\widehat{MVN}$ tompaszöggel és a $T_{MVN} = \frac{MV \cdot VN \cdot \sin(\widehat{MVN})}{2}$ összefüggéssel dolgozott, mert a kiegészítő szögek szinusza megegyezik.

Az $(\widehat{AE,FC})$ meghatározható úgy is, ha az FE szakaszon keresztül párhuzamosan eltoljuk az AF-et. Vagyis megszerkesztjük azt az $F' \in (ABD)$ pontot, amelyre $AF' \parallel FE$ és $AF' = FE$. Ekkor a $\sin(\widehat{CEF'})$ értéket kell kiszámolnunk.

■

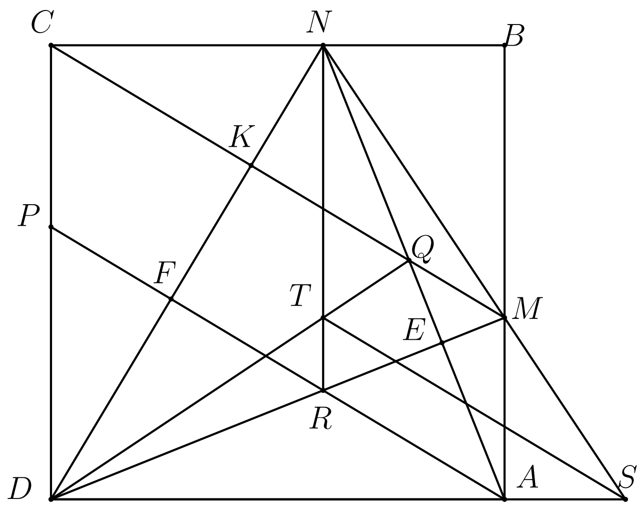
4. feladat (10 pont). Az $ABCD$ négyzet AB, BC és CD oldalainak belsejében felvesszük az M, N, illetve P pontokat úgy, hogy $AM = BN = CP$. A Q, R, S és T pontokra igaz, hogy $MC \cap AN = \{Q\}$, $DM \cap AP = \{R\}$, $MN \cap AD = \{S\}$ és $NR \cap DQ = \{T\}$.

a) Igazold, hogy R a DAN háromszög magasságpontja!

b) Bizonyítsd be, hogy $ST \parallel AR$!

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Megfelelő ábra elkészítése. **(1 pont)**

a) Az ABN és DAM háromszögek derékszögűek, valamint $AB = DA$ és $BN = AM$, ezért a két háromszög kongruens. Ennek alapján $\widehat{NAB} = \widehat{MDA}$. **(1 pont)**

Legyen $DM \cap AN = \{E\}$. Ekkor az AEM háromszögben

$$\widehat{EAM} + \widehat{EMA} = \widehat{NAB} + \widehat{DMA} = \widehat{MDA} + \widehat{DMA} = 90°,$$

mert a DAM háromszög derékszögű. Mindezek alapján levonhatjuk, hogy

$$\widehat{AEM} = 180° - (\widehat{EAM} + \widehat{EMA}) = 180° - 90° = 90°,$$

vagyis $AN \perp DM$. **(1 pont)**

Hasonló gondolatmenettel, ha bevezetjük az F pontot, amelyre $AP \cap DN = \{F\}$, akkor a $DN \perp AP$ állításhoz jutunk. **(1 pont)**

A DAN háromszögben a $DE \perp AN$, $AF \perp DN$ és $DE \cap AF = \{R\}$ tulajdonságok alapján R magasságpont. **(1 pont)**

b) A feladat feltételei alapján $AM \parallel PC$ és $AM = PC$, vagyis az $AMCP$ négyszög egy paralelogramma, ahonnan $AP \parallel MC$. A korábbiakban igazoltuk, azt is, hogy $DN \perp AP$, így következik, hogy $DN \perp MK$, ahol a K pont a DN és MC egyenesek metszéspontja. **(1 pont)**

A DMN háromszögben $MK \perp DN$, $NE \perp DM$ és $MK \cap NE = \{Q\}$, tehát a Q magasságpont, így $DQ \perp NM$. **(1 pont)**

Ha felhasználjuk, hogy a DS és a DA, valamint az NS és az NM egyenesek egybeesnek, akkor az eddigi eredményeink alapján $NR \perp DS$ és $DQ \perp NS$. A korábbi gondolatmenetekhez hasonlóan T magasságpont a DSN háromszögben, vagyis $ST \perp DN$. (**1 pont**)

Igazoltuk azt is, hogy $AP \perp DN$, de az R pont az AP egyenesen helyezkedik el, tehát $ST \parallel AR$. (**1 pont**)

■