VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

X. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}^*$ és $z \in \mathbb{C}$ számokat, amelyek esetén

$$(\overline{z})^n = (i \cdot z + 2)^n ,$$

ahol $i^2 = -1$. *Kovács Béla, Szatmárnémeti*

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen a z algebrai alakja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. A megadott feltételből következik, hogy $\left|(\overline{z})^n\right| = \left|(iz+2)^n\right|$, ahonnan $|\overline{z}|^n = |iz+2|^n$ és innen következik, hogy $|\overline{z}| = |iz+2|$. Mivel $iz+2 = ia-b+2$, az előbbi összefüggés alapján

$$a^2 + b^2 = a^2 + (2-b)^2,$$

vagyis $4 - 4b = 0$, ahonnan $b = 1$. **(3 pont)**
Tehát $z = a + i$, és a megadott összefüggés a

$$(\overline{z})^n = (a-i)^n = (iz+2)^n = (ia+1)^n \tag{1}$$

alakot ölti. Viszont

$$(ia+1)^n = \frac{i^n}{i^n} \cdot (ia+1)^n = (-i)^n (i \cdot (ia+1))^n = i^n (-1)^n (-a+i)^n = i^n (a-i)^n, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

ezért (1) alapján $(a-i)^n = i^n (a-i)^n$. Felhasználva, hogy $a - i \neq 0$, következik, hogy $i^n = 1$, tehát $n = 4k$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. **(3 pont)**
■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az adott egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\varepsilon_n \cdot \overline{z} = i \cdot z + 2,$$

ahol ε_n egy n-edrendű egységgyök. **(2 pont)**
Ha $z = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\varepsilon_n (a - bi) = ai - b + 2$. Ebből következik, hogy

$$|\varepsilon_n (a - bi)| = |ai - b + 2| \Leftrightarrow |\varepsilon_n| \cdot |a - bi| = |ai - b + 2| \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $|\varepsilon_n| = 1$ kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = a^2 + (2-b)^2$, ahonnan következik,
hogy $a \in \mathbb{R}$ és $b = 1$ **(2 pont)**
Tehát $z = a+i$. Ezt behelyettesítve az $\varepsilon_n \cdot \overline{z} = i \cdot z + 2$ összefüggésbe kapjuk, hogy $\varepsilon_n (a-i) = ai - 1 + 2$, tehát

$$\varepsilon_n = \frac{ai+1}{a-i} = i. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $\varepsilon_n = i$, ezért $n = 4k$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y+1} + \sqrt[3]{x-y} = & 2 \\ 2x + y + \sqrt[3]{y-x} = & 5 \end{cases}$$

egyenletrendszert! *Papp Ilonka, Brassó*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Bevezetve a $\sqrt[3]{x+2y+1} = a$ és $\sqrt[3]{x-y} = b$ változócseréket, a következőket kapjuk: $a + b = 2$ és $a^3 + b^3 = 2x + y + 1$. (**2 pont**)
A második összefüggésből következik, hogy $2x + y = a^3 + b^3 - 1$, így az előbbiek alapján a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} a + b = & 2, \\ a^3 + b^3 - 1 - b = & 5. \end{cases}$$

(**2 pont**)
Kifejezve az első egyenletből az a ismeretlent és behelyettesítve a második egyenletbe, kapjuk, hogy

$$(2-b)^3 + b^3 - 1 - b = 5 \Leftrightarrow 6b^2 - 13b + 2 = 0.$$ (**2 pont**)

A fenti másodfokú egyenlet megoldásai $b_1 = 2$ és $b_2 = \frac{1}{6}$. (**1 pont**)
Ha $b = 2$, akkor $a = 0$ és

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = & 0, \\ x - y = & 8. \end{cases}$$

ahonnan kapjuk, hogy $x = 5$ és $y = -3$. (**1 pont**)
Ha $b = \frac{1}{6}$, akkor $a = \frac{11}{6}$ és

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = & \dfrac{1331}{216}, \\ x - y = & \dfrac{1}{216}. \end{cases}$$

ahonnan kapjuk, hogy $x = \frac{1117}{648}$ és $y = \frac{557}{324}$. (**1 pont**)
■

3. feladat (10 pont). Ha $x, y, z \in (0,1)$ vagy $x, y, z \in (1, +\infty)$ igazold, hogy

$$\frac{\left(\log_y x\right)^3}{\log_y z + \log_z x} + \frac{\left(\log_z y\right)^3}{\log_x y + \log_z x} + \frac{\left(\log_x z\right)^3}{\log_x y + \log_y z} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_x y} + \sqrt{\log_y z} + \sqrt{\log_z x}\right).$$

Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen $a = \log_x y$, $b = \log_y z$, $c = \log_z x$, innen következik, hogy $a \cdot b \cdot c = 1$, ahol a, b, c pozitív valós számok. **(2 pont)**

$$\frac{\left(\log_y x\right)^3}{\log_y z + \log_z x} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{b+c} = \frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{(bc)^2}{(abc)^2 a(b+c)} = \frac{(bc)^2}{ca+ab}.$$

Hasonlóan eljárva a többi taggal, a kitűzött egyenlőtlenség a következő alakban írható fel:

$$\frac{(bc)^2}{ca+ab} + \frac{(ca)^2}{ab+bc} + \frac{(ab)^2}{bc+ca} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right).$$

(1 pont)

Az egyenlőtlenség bal oldalára alkalmazzuk a Bergström-egyenlőtlenséget (vagy más néven a Titu-lemmát, vagy a megfelelő Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget) és kapjuk, hogy

$$\frac{(bc)^2}{ca+ab} + \frac{(ca)^2}{ab+bc} + \frac{(ab)^2}{bc+ca} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

(3 pont)

Másrészt

$$\frac{ab+bc+ca}{2} = \frac{1}{4}\left[(ab+bc) + (bc+ca) + (ca+ab)\right],$$

(1 pont)

alkalmazva a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

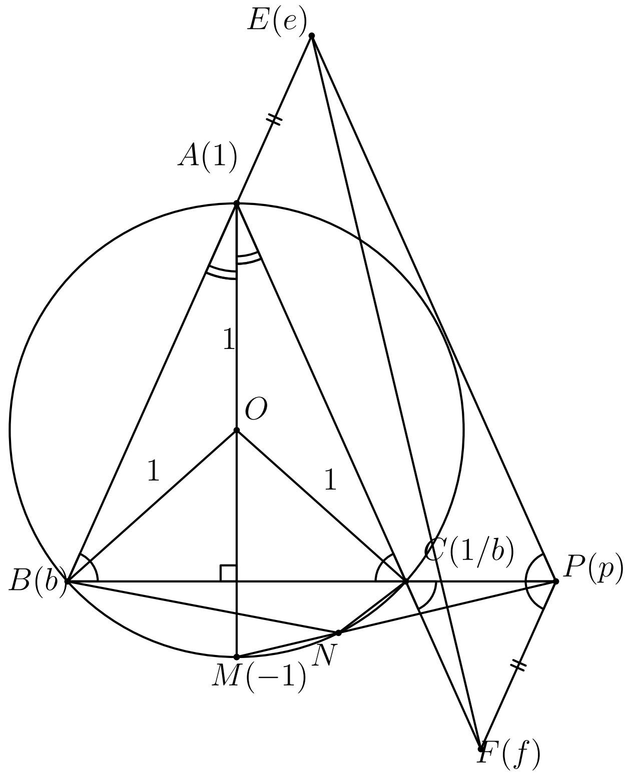
$$\frac{1}{4}\left[(ab+bc) + (bc+ca) + (ca+ab)\right] \geq \frac{1}{4}\left(2\sqrt{ab^2c} + 2\sqrt{abc^2} + 2\sqrt{a^2bc}\right) \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(abc)b} + \sqrt{(abc)c} + \sqrt{(abc)a}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right),$$

amit igazolni kellett. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Adott egy egységnyi sugarú körbe írt ABC egyenlő szárú háromszög, ahol $AB = AC$. A BC egyenesen legyen P egy pont úgy, hogy a C pont a BP szakasz belsejében van. A P ponton át az AC és AB oldalakhoz húzott párhuzamosok az AB és AC egyeneseket rendre az E és F pontokban metszik. Ha az A pont átmérősen ellentett pontja az M pont, igazold, hogy a PM egyenes merőleges az EF egyenesre! *Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy*

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Ha a komplex sík kezdőpontjának az ABC háromszög köré írt kör O középpontját tekintjük úgy, hogy az A pont afixuma legyen az 1, vagyis az OA egyenes a valós tengely, akkor az M pont affixuma -1 lesz. Mivel a B és C pontok affixumai egység modulusú komplex számok és ezek egymás konjugáltjai, ezért ha a B pont affixuma a b komplex szám, akkor a C pont affixuma $1/b$ lesz. Továbbá legyen a P, E, F pontok affixuma rendre a p, e, f komplex szám. (**1 pont**)



Mivel a P pont a BC egyenesen van ezért

$$\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}} = \frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}} \Leftrightarrow \frac{p-b}{\overline{p}-\frac{1}{b}} = \frac{\frac{1}{b}-b}{b-\frac{1}{b}} = -1 \Leftrightarrow \overline{p} = b + \frac{1}{b} - p. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Hasonlóan, mivel az e pont az AB egyenesen van ezért

$$\frac{e-1}{\overline{e}-1} = \frac{b-1}{\overline{b}-1} \Leftrightarrow \frac{e-1}{\overline{e}-1} = \frac{b-1}{\frac{1}{b}-1} = -b \Leftrightarrow \overline{e} = \frac{b+1-e}{b}. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

A PE egyenes párhuzamos az AC egyenessel, innen kapjuk, hogy

$$\frac{p-e}{\overline{p}-\overline{e}} = \frac{1-\frac{1}{b}}{1-b} = -\frac{1}{b} \Leftrightarrow \overline{e} = \overline{p} + bp - be. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

A fenti három összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& b+\frac{1}{b}-p+bp-be=1+\frac{1}{b}-\frac{e}{b} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow b(p+1)-(p+1)=be-\frac{e}{b} \Leftrightarrow (p+1)(b-1)=e\cdot\frac{b^2-1}{b} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow e=\frac{(p+1)(b-1)b}{(b-1)(b+1)} \Leftrightarrow e=\frac{(p+1)b}{b+1}.
\end{aligned}$$ (**1 pont**)

Mivel az F pont az AC egyenesen van kapjuk, hogy

$$\frac{f-\frac{1}{b}}{\overline{f}-b}=\frac{1-\frac{1}{b}}{1-b}=-\frac{1}{b} \Leftrightarrow \overline{f}=b+1-bf.$$ (**1 pont**)

A PF és AB egyenesek párhuzamosságából következik, hogy

$$\frac{p-f}{\overline{p}-\overline{f}}=\frac{1-b}{1-\frac{1}{b}}=-b \Leftrightarrow \overline{f}=\frac{p+b\overline{p}-f}{b}.$$ (**1 pont**)

A fenti két összefüggésből és abból, hogy $\overline{p}=b+\frac{1}{b}-p$ következik, hogy

$$\begin{aligned}
& b+1-bf=\frac{p+b\left(b+\frac{1}{b}-p\right)-f}{b} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow b^2+b-b^2f=p+b^2+1-bp-f \Leftrightarrow b-1+p(b-1)=f\left(b^2-1\right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (b-1)(p+1)=f(b-1)(b+1),
\end{aligned}$$ (**1 pont**)

és innen következik, hogy $f=\frac{p+1}{b+1}$. Mivel

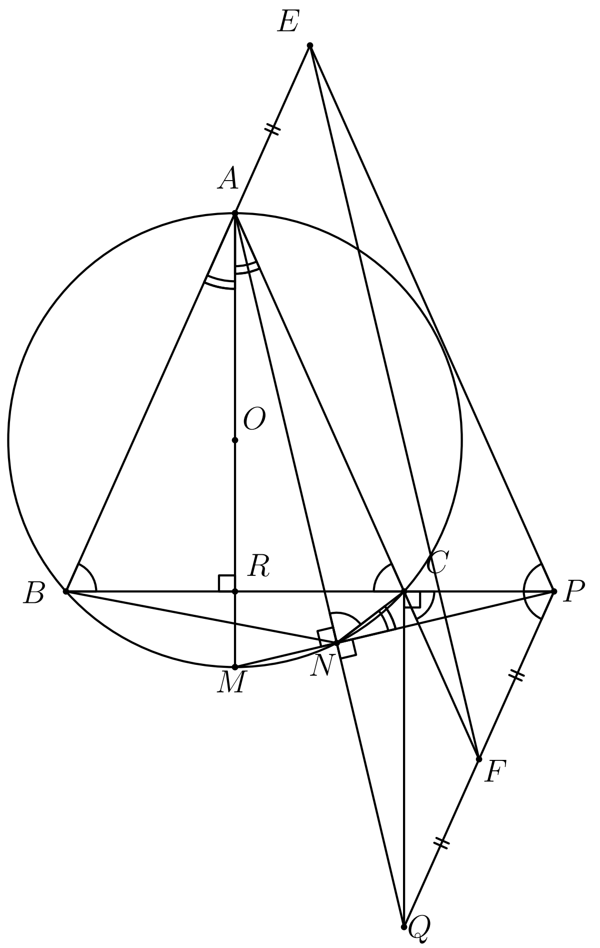
$$\frac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}}=\frac{\frac{(p+1)(b-1)}{b+1}}{\frac{(\overline{p}+1)\left(\frac{1}{b}-1\right)}{\frac{1}{b}}+1}=-\frac{p+1}{\overline{p}+1}=-\frac{p-(-1)}{\overline{p}-(-1)},$$

következik, hogy $EF\perp PM$. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Legyen $PB\cap AM=\{R\}$, $MP\cap\mathcal{C}(O,OA)=\{N\}$, $AN\cap PF=\{Q\}$



Az $\widehat{ABC} = \widehat{ANC} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, az AMN_{Δ} félkörbe írt háromszög, ezért $\widehat{ANM} = 90°$, tehát $\widehat{ANP} = 90°$. Innen következik, hogy $\widehat{CNP} = \widehat{RAC} = \widehat{BAR}$. Mivel $AB \parallel PF$ következik, hogy $\widehat{ABC} = \widehat{CPE}$. Az előbbiek alapján következik, hogy $\widehat{QNC} + \widehat{QPF} = 180°$ ezért a $QNCP$ négyszög körbeírható.

(**2 pont**)

Mivel a $QNCP$ négyszög körbeírható innen következik, hogy $\widehat{QNP} = \widehat{QCP} = 90°$ és mivel $\widehat{ABC} = \widehat{QPC}$ következik, hogy az ARB háromszög hasonló a QCP háromszöggel, innen kapjuk, hogy

$$\frac{QP}{AB} = \frac{CP}{RB} \Rightarrow QP = \frac{AB \cdot CP}{\frac{BC}{2}} = 2 \cdot \frac{AB \cdot CP}{BC}. \qquad (\textbf{2 pont})$$

Mivel $AB \parallel PF$ innen következik, hogy az FCP háromszög hasonló az ACB háromszöggel, innen kapjuk, hogy

$$\frac{FP}{AB} = \frac{CP}{CB} \Rightarrow FP = \frac{AB \cdot CP}{CB}. \qquad (\textbf{2 pont})$$

Az előbbi két összefüggésből következik, hogy $QP = 2 \cdot FP$, vagyis $QF = FP$ és mivel $AE \parallel PF$, $AF \parallel PE$ vagyis az $AFPE$ négyszög egy paralelogramma, ezért az $AQFE$ négyszög is paralelogramma.

(**2 pont**)

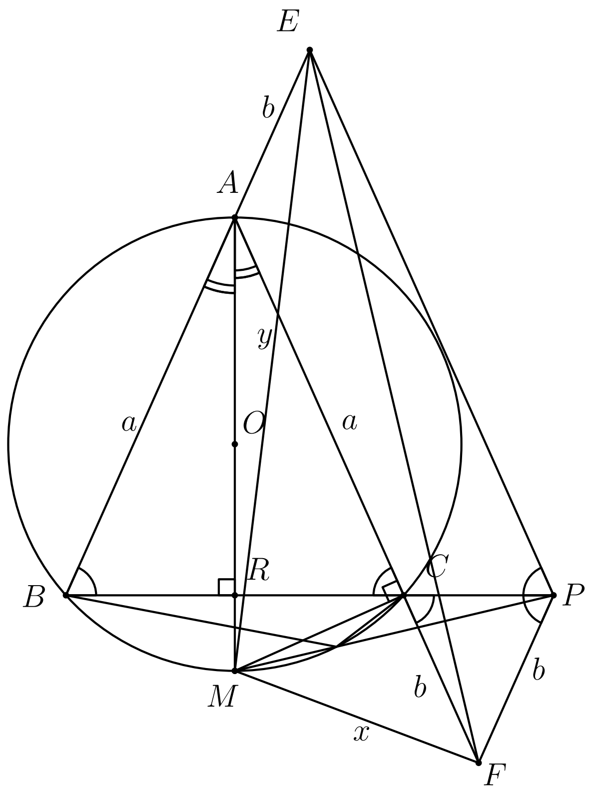
Az előbbiekből következik, hogy $AQ \parallel EF$, és mivel $AQ \perp PQ$ következik, hogy $EF \perp MP$, amit igazolni kellett.

(**1 pont**)

■

Harmadik megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Legyen $AB = AC = a$, $CF = FP = b$, $MF = x$, $EM = y$ és $\widehat{ABC} = \alpha$.



A fenti jelöléseket használva, az ACM és FCM háromszögekből a Pitagorász- tétel alapján következik, hogy $MC^2 + a^2 = AM^2$ és $MC^2 + b^2 = x^2$, ezekből következik, hogy $x^2 = AM^2 - a^2 + b^2$.

(2 pont)

Az EAM háromszögben alkalmazzuk a koszinusz tételt és kapjuk, hogy $\cos(90° + \alpha) = \frac{b^2+AM^2-y^2}{2b\cdot AM}$. Az ABC háromszögben a szinusz tétel alapján $\frac{a}{\sin\alpha} = AM$ és mivel $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$, következik, hogy

$$\frac{b^2 + AM^2 - y^2}{2b \cdot AM} = -\frac{a}{AM} \Rightarrow b^2 + AM^2 - y^2 = -2ab \Rightarrow y^2 = b^2 + AM^2 + 2ab \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Az $EMFP$ négyszögben

$$EP^2 + MF^2 = (a + b)^2 + x^2 = a^2 + 2ab + b^2 + AM^2 - a^2 + b^2 = 2ab + 2b^2 + AM^2$$
$$FP^2 + EM^2 = b^2 + y^2 = b^2 + b^2 + AM^2 + 2ab = 2ab + 2b^2 + AM^2.$$

A fenti két összefüggésből következik, hogy

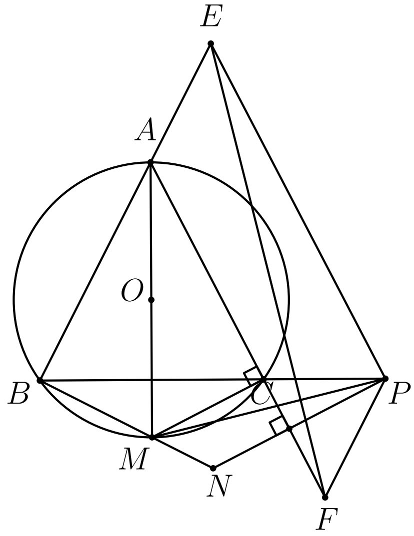
$$EP^2 + MF^2 = FP^2 + EM^2,$$

ami ekvivalens azzal, hogy az $EMFP$ négyszög ortodiagonális, tehát $MP \perp EF$. **(3 pont)**

■

Negyedik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen $AB = AC = a$, $CF = FP = b$, valamint jelöljük N-nel a P pontból az AC egyenesre húzott merőleges és a BM egyenes metszéspontját.



Mivel $MC \parallel NP$ és $AB \parallel FP$ következik, hogy

$$\frac{BM}{MN} = \frac{BC}{CP} = \frac{AB}{FP} = \frac{a}{b} \Rightarrow MN = \frac{b \cdot BM}{a}.$$ **(2 pont)**

Ugyanakkor következik, hogy

$$\frac{MC}{NP} = \frac{BC}{BP} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow NP = \frac{(a+b) \cdot MC}{a}$$ **(2 pont)**

Mivel

$$\frac{NP}{AF} = \frac{\frac{(a+b)\cdot MC}{a}}{a+b} = \frac{MC}{a},$$

valamint

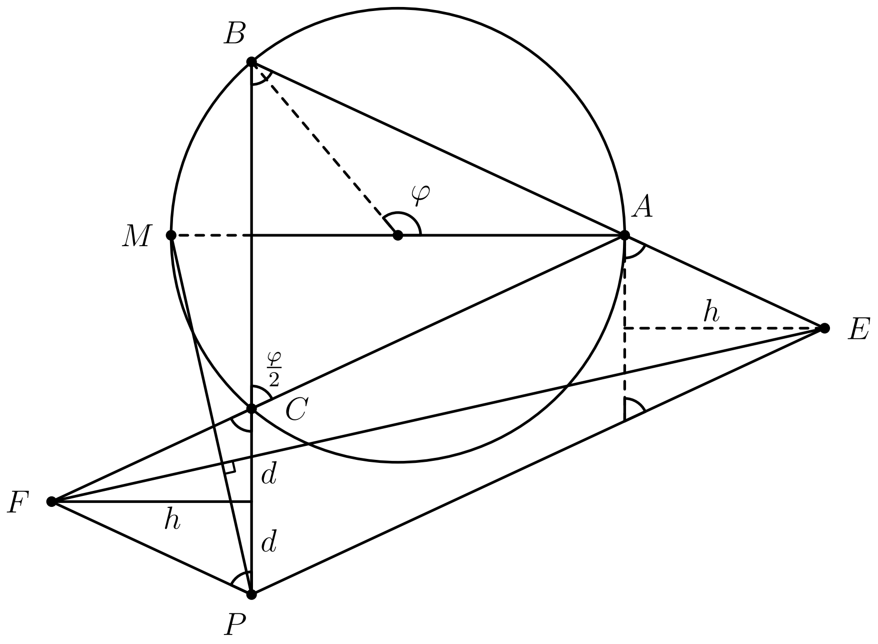
$$\frac{MN}{AE} = \frac{\frac{b \cdot MC}{a}}{b} = \frac{MC}{a},$$

következik, hogy $\frac{NP}{AF} = \frac{NM}{AE}$. **(3 pont)**

Mivel $\widehat{MNP} = \widehat{BMC} = \widehat{EAF}$, és $\frac{NP}{AF} = \frac{NM}{AE}$ következik, hogy az EAF háromszög hasonló az MNP_Δ háromszöggel és tudjuk, hogy $NP \perp AF$, $AE \perp MN$ kapjuk, hogy $OP \perp AF$, amit bizonyítani kellett. **(2 pont)**

■

Ötödik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



A komplex számsík origóját válasszuk meg a kör középpontjának úgy, hogy az A pont affixuma 1 legyen, vagyis az OA egyenes a valós tengely. Ekkor az M pont affixuma -1. Legyen az AOB szög mértéke φ, ekkor a B, C pontok affixumai rendre $b = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $c = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Mivel a BC egyenes párhuzamos az imaginárius tengellyel, ezért a P pont affixuma $p = c - 2id$, ahol $2d = |CP|$. Legyen h a CFP háromszögben az F pontból húzott magasság hossza, ekkor az F pont affixuma $f = c - id - h$. **(2 pont)**

Erre a magasságra írhatjuk, hogy

$$h = d\,\mathrm{tg}(\widehat{FCP}) = d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2},$$

az utolsó egyenlőséget megkapjuk abból, hogy $\widehat{ACB}$ kerületi szög az $\widehat{AOB}$ középponti szög fele. Tehát

$$f = \cos\varphi - d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} - i\sin\varphi - id.$$

Az $AEPF$ négyszög egy paralelogramma, ezért az E pont affixuma $e = a + (p - f)$, vagyis

$$e = 1 + d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} - id.$$ **(2 pont)**

Az MP egyenes pontosan akkor merőleges az EF egyenesre, ha $m - p = ir(e - f)$, valamilyen $r \neq 0$ valós szám esetén. **(1 pont)**

Ahhoz, hogy az utóbbi összefüggést belássuk, ekvivalens módon alakítjuk az $e - f$, majd $m - p$

komplex számokat. Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
e-f &= 1+d\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-id-\cos\varphi+d\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+i\sin\varphi+id\\
&= 1-\cos\varphi+2d\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+i\sin\varphi\\
&= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2d\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\
&= \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+2d+i2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\\
&= \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(\sin\varphi+2d+i2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\\
&= \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(\sin\varphi+2d+i(1+\cos\varphi)\right)\\
&= -i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(i(\sin\varphi+2d)-1-\cos\varphi\right).
\end{aligned}$$

(**3 pont**)

Másrészt,

$$m-p=-1-\cos\varphi+i\sin\varphi+2id=-1-\cos\varphi+i(\sin\varphi+2d),$$

tehát $e-f=-i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(m-p)$, és ezért $EF\perp MP$. (**1 pont**)

■