VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Határozd meg az

$$f(x,y)=\sqrt{(x-e^y)^2+(y-e^x)^2}$$

kifejezés minimumát, ha $x,y\in\mathbb{R}$.

2. feladat. A $(G,\cdot)$ véges csoport esetén létezik olyan $f\colon G\to G$ morfizmus, melyre $f(x^2)=x$, bármely $x\in G$.

a) Igazold, hogy a $(G,\cdot)$ kommutatív csoport!

b) Igazold, hogy ha a G csoport ciklikus, akkor nem lehet páros sok eleme!

c) Határozd meg az összes ilyen f függvényt, ha a G-nek páratlan sok eleme van!

3. feladat. Számítsd ki az

$$\int (1+u^2)\ln(1+\sqrt{2+u^2})\,\mathrm{d}u$$

határozatlan integrált!

4. feladat. Legyen $(G,\cdot)$ egy 2025 elemű csoport, H egy olyan valódi részcsoportja, amelynek legalább 675 eleme van, és X egy olyan nem üres részhalmaza a G-nek, amelyre $X\cdot H=X$. (Ha $A,B\subset G$, akkor $A\cdot B=\{a\cdot b\mid a\in A, b\in B\}$.)

a) Hány eleme lehet a H-nak?

b) Hány eleme lehet az X-nek?

c) Az X elemszámának minden lehetséges értéke esetén adj példát olyan G-re, H-ra és X-re, amelyekre a fenti feltételek teljesülnek!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.