VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV

országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). a) Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (ahol $n \geq 2$) mátrixban minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_{ij} = 1$, ha $i \mid j$, különben $a_{ij} = 0$. Számítsd ki a $\det A$ értékét!

b) Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (ahol $n \geq 2$) mátrixban minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_{ij} = 1$, ha i és j relatív prím, különben $a_{ij} = 0$. Számítsd ki a $\det A$ értékét!

Gábor Farkas Ferencz, Nagyenyed

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Számoljuk ki $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ esetén a mátrix determinánsát.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$ **(2 pont)**

Ha $i > j$, akkor i biztosan nem osztja j-t, tehát $a_{ij} = 0$. Ez azt jelenti, hogy A egy felső háromszögmátrix, így determinánsa a főátlón lévő elemek szorzata. Az $a_{ii} = 1$ minden i esetén, mert minden szám osztja önmagát. Következésképpen $\det A = 1$. **(2 pont)**

b) Számoljuk ki $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ esetén a mátrix determinánsát.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ **(2 pont)**

Az utolsó két determináns azért nulla, mert második és negyedik oszlopuk azonos. Ez minden további determinánsra igaz, mert 2 és j pontosan akkor relatív prím, ha 4 és j relatív prím, azaz ha j páratlan. Tehát $\det A = 0$, ha $n \geq 4$. **(3 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Legyen $b \geq 2$ egy természetes szám. Tekintsünk egy, a b számrendszerben felírt, $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot, ahol $x_0 \in \mathbb{N}$ és x_{n+1} az x_n számjegyeinek az összege. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét! *Tőtős György, Zilah*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Vizsgáljuk meg a sorozat monotonitását! Ehhez írjuk fel az x_n számot b számrendszerben.
Ha $k+1$ darab számjegyből áll ($k \geq 1$), akkor az x_n alakja

$$x_n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_k b^k,$$

ahol $a_0, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ és $a_k \neq 0$. Ekkor $x_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$. Kivonva egymásból a kettőt kapjuk, hogy

$$x_n - x_{n+1} = a_1(b-1) + a_2(b^2-1) + \ldots + a_k(b^k-1),$$

ami egy pozitív szám, mert $a_j(b^j-1) \geq 0$, ha $j < k$ és $a_k(b^k-1) > 0$. (**2 pont**)
Ha x_n egy számjegyű, vagyis ha $x_n \leq b-1$, akkor $x_{n+1} = x_n$. Az előbbi észrevételek alapján a sorozat csökkenő. (**1 pont**)
Mivel alulról korlátos, ezért konvergens, és a határérték egy természetes szám, mert a sorozat természetes számokból áll. (**1 pont**)
Az $x_{n+1} = 0$ csak akkor lehetséges ha $x_n = 0$, mert egy szám számjegyeinek összege bármely számrendszerben csak akkor nulla, ha maga a szám is nulla. Tehát ha van olyan n, amelyre $x_{n+1} = 0$, akkor $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_1 = x_0 = 0$. Ebben az esetben a sorozat konstans. (**1 pont**)
Ha $x_0 > 0$, akkor a konvergencia miatt létezik $m, x > 0$ természetes szám, amelyre $x_n = x$, minden $n \geq m$ esetén. Mivel $x_{m+1} = x_m = x$ következik, hogy $0 < x < b$.
Figyeljük meg, hogy az $x_n - x_{n+1}$ különbség kifejezésében $(b-1) \mid (b^j - 1)$ minden j természetes szám esetén, tehát $(b-1) \mid (x_n - x_{n+1})$. Ez persze akkor is teljesül ha $x_n = x_{n+1}$.
Ekkor az x_{n+1} szám $(b-1)$-gyel való osztási maradéka megegyezik az x_n szám $(b-1)$-gyel való osztási maradékával.
Így, induktívan az x_0, x számok $(b-1)$-gyel való osztási maradéka azonos. (**2 pont**)
Legyen r az x_0 szám $(b-1)$-gyel való osztási maradéka. Ekkor $b-1$ osztja $x-r$-et, ez csak úgy lehetséges ha $x = r$, amennyiben $r > 0$. (**1 pont**)
Ha $r = 0$, akkor $x = b-1$, mert ez az egyetlen szám az $\{1, \ldots, b-1\}$ halmazban, amely osztható $(b-1)$-gyel. (**1 pont**)
Összegezve, ha $x_0 = 0$, akkor a határérték nulla. Ellenkező esetben legyen r az x_0 szám $(b-1)$-gyel vett osztási maradéka. Ha $r \neq 0$, akkor a határérték r; ha $r = 0$, akkor $b-1$. ■

3. feladat (10 pont). Adott az $(a_n)_{n\geq 0}$ és $(b_n)_{n\geq 0}$ valós számsorozat, valamint az $\alpha \in (0,1)$ valós szám úgy, hogy

$$0 \leq a_{n+1} \leq \alpha \cdot a_n + b_n,$$

minden $n \geq 0$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Igazold, hogy az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és határértéke nulla! *Tőtős György, Zilah*

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Írjuk egymás alá az egyenlőtlenségeket az $n, n-1, \ldots, 1, 0$ értékekre, és rendre szorozzuk be az $1, \alpha^1$, …, α^{n-1}, α^n számokkal.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq \alpha a_n + b_n, \\ \alpha a_n &\leq \alpha^2 a_{n-1} + \alpha b_{n-1}, \\ &\vdots \\ \alpha^{n-1} a_2 &\leq \alpha^n a_1 + \alpha^{n-1} b_1, \\ \alpha^n a_1 &\leq \alpha^{n+1} a_0 + \alpha^n b_0. \end{aligned}$$

Összeadva ezeket kapjuk, hogy

$$a_{n+1} \leq \alpha^{n+1} a_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k,$$

minden $n \geq 0$ esetén. (**4 pont**)
Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{n+1} a_0 = 0$, mert $\alpha \in (0,1)$. Továbbá azt is tudjuk, hogy $0 \leq a_{n+1}$ minden $n \geq 0$ esetén. Így a fogó tétele alapján elégséges belátnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k = 0. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Kiemelve az α^n szorzót az összegből, kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k = \alpha^n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{\alpha^k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{b_k}{\alpha^k}}{\frac{1}{\alpha^n}}. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Az $(\alpha^{-n})_{n\geq 0}$ sorozat növekvő és nem korlátos, így alkalmazhatjuk a Cesàro–Stolz-lemmát és írhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b_{n+1}}{\alpha^{n+1}}}{\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{1-\alpha} = 0. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
A megoldás menete a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k = 0$$

határérték belátásánál tér el az előző megoldástól. (**5 pont**)
Az ötlet, hogy nagy k esetén a b_k számok lesznek közel nullához, míg kis k esetén az $\sum\limits_{k} \alpha^{n-k}$ összeg lesz közel nullához. Pontosabban, vizsgáljuk a következő felső becslést

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} |b_k| = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^{n-k} |b_k| + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \alpha^{n-k} |b_k|. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Tudjuk, hogy a $(b_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens, ezért korlátos, vagyis létezik $M > 0$ úgy, hogy $|b_n| \leq M$, minden $n \geq 0$ esetén. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\lambda > 0$ rögzített szám úgy, hogy $\lambda(M + \frac{1}{1-\alpha}) = 1$. Ekkor létezik $n_0 > 0$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $|b_n| < \varepsilon \cdot \lambda$. Következésképpen

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k \right| \leq M \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^{n-k} + \varepsilon \cdot \lambda \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \alpha^{n-k}, \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

bármely $n \geq 2n_0$ esetén. A második mértani haladvány összeg tovább növelhető

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \alpha^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Az első összeg értéke

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^n - \alpha^{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1}}{1-\alpha^{-1}}.$$

Látható, hogy ennek a határértéke 0, ha n tart a végtelenhez, így létezik $n_1 > 0$ úgy, hogy minden $n \geq n_1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^{n-k} \leq \varepsilon\lambda.$$

Ekkor tetszőleges $n \geq \max\{2n_0, n_1\}$ esetén

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k\right| \leq M\varepsilon\lambda + \varepsilon\lambda\frac{1}{1-\alpha} = \varepsilon\left(M + \frac{1}{1-\alpha}\right)\lambda = \varepsilon. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

4. feladat (10 pont). Az $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ mátrix teljesíti a $2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = O_3$ összefüggést. Igazold, hogy a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

összeg osztható hárommal! ***

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Tényezőkre bontjuk a $2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3$ mátrixot.

$$2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = 2A^3 - 4A^2 - 3A^2 + 6A - 2A + 4I_3 = (A - 2I_3)(2A^2 - 3A - 2I_3).$$

A $2A^2 - 3A - 2I_3$ mátrix tovább bontható $(A - 2I_3)(2A + I_3)$ alakra. Tehát

$$O_3 = 2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = (A - 2I_2)^2(2A + I_2).$$

Az előbbi összefüggés alapján

$$\det(2A + I_3)(\det(A - 2I_3))^2 = 0. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A $\det(2A + I_3)$ egy páratlan szám, mert a kifejtésében csak a főátlón lévő elemek szorzata páratlan, a többi szorzat páros. Tehát $\det(A - 2I_3) = 0$. (**1 pont**)
Jelöljük a kijelentésben szereplő kifejezést S-el. Ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\det(aA + bI_3) = a^3 \det(A) + a^2 bS + ab^2 \operatorname{Tr}(A) + b^3.$$

Ez igazolható a

$$\begin{vmatrix} b_{11} + b'_{11} & b_{12} + b'_{12} & b_{13} + b'_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

tulajdonság többszöri alkalmazásával. (**1 pont**)

Ugyanakkor a $(2A + I_3)(A - 2I_3)^2 = O_3$ egyenlőségből következik, hogy $(A - 2I_3)^2 = O_3$, mert a $2A + I_3$ mátrix invertálható, ahonnan $A^2 = 4A - 4I_3$. Innen

$$(\det A)^2 = 64 \det(A - I_3). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, következik, hogy $\det A, \det(A - I_3) \in \mathbb{Z}$, tehát $64 \mid (\det A)^2$, ahonnan $8 \mid \det A$. Tehát létezik olyan k egész szám, amelyre $\det A = 8k$. **(1 pont)**
Továbbá,

$$\det(A - I_3) = \det A - S + \operatorname{Tr} A - 1.$$

Felhasználva, hogy $\det(A - 2I_3) = \det A - 2S + 4 \operatorname{Tr} A - 8 = 0$ kapjuk, hogy $8k - 2S + 4 \operatorname{Tr} A - 8 = 0$, ahonnan $S = 4k + 2 \operatorname{Tr} A - 4$.
A $\det A$-ra és $\det(A - I_3)$-ra levezetett összefüggések alapján

$$\begin{aligned} &64k^2 = 64(8k - S + \operatorname{Tr} A - 1), \\ &\operatorname{Tr} A = k^2 - 8k + 1 + S, \\ &\operatorname{Tr} A = -k^2 + 4k + 3. \quad (1) \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az S-et megadó kifejezésbe

$$\begin{aligned} &S = 4k + 2(k^2 - 8k + 1 + S) - 4 \\ &S = -2k^2 + 12k + 2. \quad (2) \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $(A - 2I_3)^2 = O_3$, következik, hogy $(A - 2I_3)^3 = O_3$, vagyis

$$A^3 = 6A^2 - 12A + 8I_3 = 6(4A - 4I_3) - 12A + 8I_3 = 12A - 16I_3.$$

Determinánst számolva $(\det A)^3 = 64 \det(3A - 4I_3)$, kifejtve a jobb oldalt és felhasználva, hogy $\det A = 8k$ írhatjuk, hogy

$$8^3 k^3 = 64(27 \det A - 36S + 48 \operatorname{Tr} A - 64).$$

Behelyettesítve az S-re és $\operatorname{Tr} A$-ra kapott kifejezéseket (lásd (1) és (2)) kapjuk, hogy

$$8k^3 = 27 \cdot 8k - 36(-2k^2 + 12k + 2) + 48(-k^2 + 4k + 3) - 64,$$

leegyszerűsítve kapjuk, hogy

$$k^3 = 3k^2 - 3k + 1,$$

vagyis $(k - 1)^3 = 0$, tehát $k = 1$. Következésképpen $S = 12$, ami osztható hárommal. **(2 pont)**
■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Észrevesszük, hogy a kijelentésben az összeg nem más mint $\operatorname{Tr}(A^*)$.
Tényezőkre bontjuk a $2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3$ mátrixot

$$2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = 2A^3 - 4A^2 - 3A^2 + 6A - 2A + 4I_3 = (A - 2I_3)(2A^2 - 3A - 2I_3).$$

A $2A^2 - 3A - 2I_3$ mátrix tovább bontható az $(A - 2I_3)(2A + I_3)$ alakra. Tehát

$$O_3 = 2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = (A - 2I_2)^2(2A + I_2). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A mátrix karakterisztikus egyenlete $\det(A - xI_3) = 0$, azaz

$$x^3 - \mathrm{Tr}(A)x^2 + \mathrm{Tr}(A^*)x - \det(A) = 0. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, következik, hogy $\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(A^*), \det(A)$ egész számok, így $-\frac{1}{2}$ nem lehet megoldása a karakterisztikus egyenletnek, mert a nevezője 2, és ez nem osztja a főegyütthatót, ami 1. Vagyis $\det(2A + I_3) \neq 0$, következésképpen $(2A + I_3)$ invertálható. (**1 pont**)
A $(2A + I_3)(A - 2I_3)^2 = O_3$ egyenlőséget beszorozva a $(2A + I_3)$ mátrix inverzével, azt kapjuk, hogy $(A - 2I_3)^2 = O_3$. (**1 pont**)
Ha $B = A - 2I_3$, akkor $B^2 = O_3$, tehát $(B - yI_3)(B + yI_3) = B^2 - y^2 I_3 = -y^2 I_3$, vagyis $B - yI_3$ invertálható bármely $y \in \mathbb{C}^*$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $\det(B - yI_3) \neq 0$, azaz $\det(A - (y+2)I_3) \neq 0$ egyetlen $y \in \mathbb{C}^*$ esetén sem, azaz $\det(A - xI_3) \neq 0$, ha $x \neq 2$. (**2 pont**)
Mivel a

$$-\det(A - xI_3) = x^3 - \mathrm{Tr}(A)x^2 + \mathrm{Tr}(A^*)x - \det(A) = 0,$$

egyenletnek $x = 2$-n kívül nincs más megoldása, ezért

$$x^3 - \mathrm{Tr}(A)x^2 + \mathrm{Tr}(A^*)x - \det(A) = (x - 2)^3.$$

Következésképpen $\mathrm{Tr}(A^*) = 12$, ami osztható hárommal. (**3 pont**)

■

Megjegyzés. Az utóbbi megoldás másképpen is folytatható, attól kezdve, hogy $(A - 2I_3)^2 = O_3$. A mátrix bármilyen λ sajátértéke teljesíti az $(x - 2)^2 = 0$ egyenletet. Következésképpen $\det(A - xI_3) = (-1)^3(x - 2)^3$, ahonnan $\mathrm{Tr}(A^*) = 12$, ami osztható hárommal.