IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20-23.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Határozd meg azokat az x, y, z és t valós számokat, amelyekre

$$2x^2 + 5y^2 + 4z^2 + t^2 - 6xy - 2yz - 2zt - 2t + 2 = 0.$$

2. feladat. Igazold, hogy ha $a, b, c > 0$ és $a \cdot b \cdot c = 1$, akkor

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

3. feladat. Legyen G az ABC általános háromszög súlypontja, B' és C' pedig rendre a B és a C csúcsból kiinduló szögfelező talppontja. Igazold, hogy ha a B', G és C' pontok kollineárisak, akkor $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.

4. feladat. Adott az $ABCD$ négyzet. Felvesszük az E pontot az AC szakaszon, valamint az F pontot az AC egyenesen a négyzet külső tartományában úgy, hogy $AE = CF = AB$. Legyen a BE egyenes és a DC szakasz metszéspontja M, a BE egyenes és az AD egyenes metszéspontja N, valamint a CN egyenes és a DF egyenes metszéspontja P. Igazold, hogy az A, M és P pontok kollineárisak.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.