VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. Oldd meg az $x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz = 29$ egyenletet a nullától különböző természetes számok halmazán!

2. feladat. Az ABC egyenlő oldalú háromszögben D a C-ből kiinduló magasság talppontja, az E pont a CD szakasz egy pontja úgy, hogy $\widehat{AEB}$ derékszög. Legyen F a C pontnak az E pont szerinti szimmetrikusa. Az $\widehat{ACD}$ szögfelezője az AB oldalt a T pontban, a BF egyenest az M pontban metszi. Igazold, hogy $MTDF$ húrnégyszög!

3. feladat. Adott egy 2025×2025-ös négyzetrács, melyben minden sorban és minden oszlopban egyetlen mező van feketére színezve, minden más mező fehér színű. Egy lépésben kiválasztunk egy sort vagy egy oszlopot és az ebben található mezők színét megváltoztatjuk. Elérhető-e, hogy valahány lépés után két sor vagy két oszlop színezése azonos legyen?

4. feladat. Jelöljük I-vel az ABC háromszögbe írt kör középpontját.

a) Igazold, hogy ha az AI egyenes a BC oldalt a D pontban metszi, akkor $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{T_{ABI} + T_{ACI}}{T_{ABC}}$.

b) Igazold, hogy

$$\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}} + \frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}} + \frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}} \leq 2,$$

ahol a, b, c a háromszög oldalai és p a háromszög félkerülete!

5. feladat. a) Bizonyítsd be, hogy minden $k \geq 2$ természetes szám esetén létezik olyan $2k$ számjegyű teljes négyzet, amely az első k és az utolsó k számjegyéből alkotott két szám összegének a négyzete!

b) Igazold, hogy az előbbi feltételt teljesítő számok közt végtelen sok k esetén találunk olyat is, amely osztható a számjegyei összegével! Például $k = 2$ esetén egy ilyen szám a 2025.

6. feladat. a) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges másodfokú függvény. Ha az $f(x), f(x+1), f(x+2)$ behelyettesítési értékek egészek valamilyen egész x értékre, akkor igazold, hogy $f(x+n)$ szintén egész, bármilyen n egész szám esetén!

b) Jelöljük $\mathcal{M}$-mel az origó középponttú, 7 egység sugarú körlap belsejében levő rácspontok halmazát (az $A(x, y)$ pontot rácspontnak nevezzük, ha $x, y \in \mathbb{Z}$). Az M halmaz elemei közül legtöbb hány lehet egy másodfokú függvény grafikus képén?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.