VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az (x, y) természetes számpárokat, amelyek teljesítik az

$$5x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 2y = 8$$

összefüggést!

Spier Tünde, Arad
Szilágyi Judit, Kolozsvár
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2y + 2x) + (4x^2 + 4x + 1) - 2 &= 8\\ (x - y + 1)^2 + (2x + 1)^2 &= 10.\end{aligned}$$

(4 pont)

Ugyanakkor $2x + 1 \in \mathbb{N}$ és $x - y + 1 \in \mathbb{Z}$, ezért a fenti egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha

$$\begin{cases} |x - y + 1| = 3 \\ 2x + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} |x - y + 1| = 1 \\ 2x + 1 = 3 \end{cases}.$$ **(2 pont)**

Az $\begin{cases} |x - y + 1| = 3 \\ 2x + 1 = 1 \end{cases}$ egyenletek az $x = 0$ és $|1 - y| = 3$ összefüggésekhez vezetnek. Mivel y természetes szám, így $y = 4$. **(1 pont)**

Az $\begin{cases} |x - y + 1| = 1 \\ 2x + 1 = 3 \end{cases}$ egyenletek az $x = 1$ és $|2 - y| = 1$ összefüggésekhez vezetnek, ahonnan $y \in \{1, 3\}$. **(1 pont)**

Tehát a megoldások halmaza $M = \{(0, 4), (1, 1), (1, 3)\}$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Az a, b, c szigorúan pozitív valós számokra $a + b + c = 2025$. Igazold, hogy

$$\frac{a + b}{\sqrt{2025c + ab}} + \frac{b + c}{\sqrt{2025a + bc}} + \frac{a + c}{\sqrt{2025b + ac}} \geq 3.$$

Oláh Ilkei Árpád, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Mivel $a + b + c = 2025$, ezért

$$\begin{aligned}2025c + ab &= (a + b + c)c + ab\\ &= ac + bc + c^2 + ab\\ &= (c + a)(c + b).\end{aligned}$$

Hasonlóan $2025a + bc = (a + b)(a + c)$ és $2025b + ac = (b + c)(b + a)$. **(2 pont)**

Ez alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség az

$$\frac{a + b}{\sqrt{(c + a)(c + b)}} + \frac{b + c}{\sqrt{(a + b)(a + c)}} + \frac{a + c}{\sqrt{(b + a)(b + c)}} \geq 3.$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű. A mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{(c+a)(c+b)} \leq \frac{a+b+2c}{2},$$

így

$$\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \geq \frac{2(a+b)}{a+b+2c}.$$

Hasonlóan $\frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \geq \frac{2(b+c)}{b+c+2a}$ és $\frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \geq \frac{2(a+c)}{a+c+2b}$.
Összegezve a fenti egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} + \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \geq \frac{2(a+b)}{a+b+2c} + \frac{2(b+c)}{b+c+2a} + \frac{2(a+c)}{a+c+2b}.$$

(**3 pont**)

Igazoljuk, hogy

$$\frac{a+b}{a+b+2c} + \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} \geq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Az $a+b=x$, $b+c=y$ és $a+c=z$ jelöléseket használva $2(a+b+c)=x+y+z$, ahonnan $a+b+2c=y+z$, $b+c+2a=x+z$, valamint $a+c+2b=x+y$. Ez alapján az (1) egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \tag{2}$$

(**2 pont**)

Feltételezhetjük, hogy $x \leq y \leq z$, így $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{x+z} \leq \frac{1}{x+y}$, tehát a rendezési tétel alapján

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} &\geq \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z} + \frac{x}{x+y} \\ \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} &\geq \frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{x+y}. \end{aligned}$$

Összeadjuk a fenti egyenlőtlenségeket, elosztjuk 2-vel, így

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

(**2 pont**)

Ez utóbbi egyenlőtlenség Nesbitt-egyenlőtlenség néven ismert.

Megjegyzés. Az

$$\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} + \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \geq 3.$$

egyenlőtlenséget bizonyíthatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alkalmazásával 3 változó esetén a következőképpen:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} + \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \cdot \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \cdot \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}} \\ &= \sqrt[3]{1} = 1. \end{aligned}$$

(**7 pont**)

■

3. feladat (10 pont). Ha $A = [\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \ldots + [\sqrt{2025}]$, igazold, hogy $A^2 - 1$ osztható 506-tal, ahol $[a]$ az a szám egészrészét jelöli! *Szilágyi Judit, Kolozsvár*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Észrevesszük, hogy $[\sqrt{1}] = [\sqrt{3}] = 1$, $[\sqrt{5}] = [\sqrt{7}] = 2$.
Ugyanakkor $[\sqrt{9}] = [\sqrt{11}] = [\sqrt{13}] = [\sqrt{15}] = 3$ és $[\sqrt{17}] = [\sqrt{19}] = [\sqrt{21}] = [\sqrt{23}] = 4$. (**2 pont**)
Általánosan

$$[\sqrt{4k^2-4k+1}] = [\sqrt{4k^2-4k+3}] = \ldots = [\sqrt{4k^2-1}] = 2k-1$$
$$[\sqrt{4k^2+1}] = [\sqrt{4k^2+3}] = \ldots = [\sqrt{4k^2+4k-1}] = 2k,$$ (**2 pont**)

ami azt jelenti, hogy $\frac{4k^2-1-(4k^2-4k+1)}{2} + 1 = 2k$ darab tagnak $2k-1$ az egész része, valamint $\frac{4k^2+4k-1-(4k^2+1)}{2} + 1 = 2k$ darab tagnak $2k$ az egész része. (**1 pont**)
Mivel $\sqrt{2025} = 45$, így

$$\begin{aligned}
A &= 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4\cdot 3 + 4\cdot 4 + \ldots + 2k\cdot(2k-1) + 2k\cdot 2k + \ldots + 44\cdot 43 + 44\cdot 44 + 45\\
&= 2\cdot 3 + 4\cdot 7 + \ldots + 2k(4k-1) + \ldots + 44\cdot 87 + 45\\
&= \sum_{k=1}^{22} 2k(4k-1) + 45\\
&= \sum_{k=1}^{22}(8k^2-2k) + 45\\
&= 8\cdot\frac{22\cdot 23\cdot 45}{6} - 2\cdot\frac{22\cdot 23}{2} + 45 = 22\cdot 23\cdot 60 - 22\cdot 23 + 45.
\end{aligned}$$

(**2 pont**)

Ez alapján

$$\begin{aligned}
A-1 &= 22\cdot 23\cdot 60 - 22\cdot 23 + 44 \,\vdots\, 22,\\
A+1 &= 22\cdot 23\cdot 60 - 22\cdot 23 + 46 \,\vdots\, 23.
\end{aligned}$$

Mivel $A^2-1 = (A-1)(A+1)$ és $(A-1) \vdots 22$, $(A+1) \vdots 23$, ezért $(A^2-1) \vdots 22\cdot 23 = 506$. (**2 pont**)
■

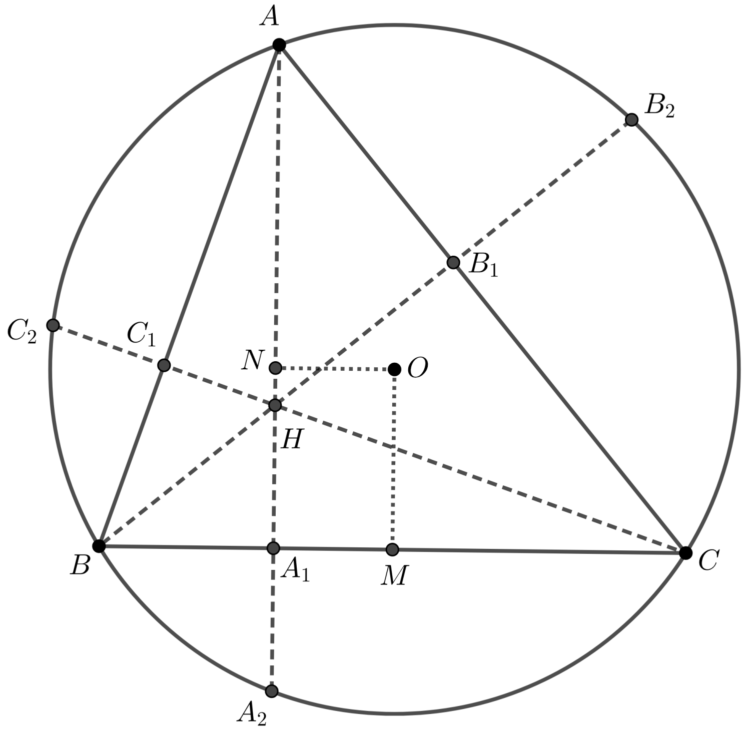
4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög AA_1, BB_1 és CC_1 magasságai a háromszög köré írt O középpontú kört rendre az A_2, B_2 és C_2 pontokban metszik.

a) Igazold hogy az ABA_2C négyszög G_a súlypontja az OA_1 szakasz felezőpontja!

b) Ha H az ABC háromszög ortocentruma, G_1 és G_2 az $A_1B_1C_1$, illetve az $A_2B_2C_2$ háromszög súlypontja, igazold, hogy G_1 a HG_2 szakasz felezőpontja!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



a) Legyen M és N az O pontból a BC, illetve az AA_2 húrra húzott merőleges talppontja. Ekkor az M pont a BC szakasz felezőponjta, az N pont pedig az AA_2 szakasz felezőpontja. (**1 pont**)

Tehát

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2},$$
$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_2}}{2}.$$ (**1 pont**)

Továbbá az OMA_1N négyszög egy téglalap, mert szögei derékszögek, így

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OC}}{2} = 2\overrightarrow{OG_a},$$

tehát G_a az OA_1 szakasz felezőpontja. (**2 pont**)

b) Az előző alpont alapján

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_2}}{2}.$$

Hasonlóan $\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB_2}}{2}$ és $\overrightarrow{OC_1} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC_2}}{2}$.
Összegezve azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \frac{3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}}{2},$$ (**2 pont**)

ami egyenértékű azzal, hogy

$$3\overrightarrow{OG_1} = \frac{3\overrightarrow{OH} + 3\overrightarrow{OG_2}}{2},$$ (**2 pont**)

végigosztva 3-mal, következik, hogy

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OG_2}}{2},$$

ez pedig azt jelenti, hogy G_1 a HG_2 szakasz felezőpontja. (**1 pont**)

■