JAVÍTÓKULCS – VIII. OSZTÁLY

1. **Feladat**

   Igazold, hogy:

   a. $A=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}+2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}-\sqrt{2}-2\sqrt{1\frac{1}{4}}\in\mathbb{N}$

   b. $B=\sqrt{1+2016\cdot\sqrt{1+2017\cdot 2019}}\in\mathbb{N}$

Megoldás.

Hivatalból 1 pont.

a) A nevezők gyöktelenítése után kapjuk, hogy:

$A=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{2}-\sqrt{5}=$ **…………………………………………..2p**

$=\left|\sqrt{2}-1\right|+\left|3+\sqrt{5}\right|-\sqrt{2}-\sqrt{5}=$

$=\sqrt{2}-1+3+\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{5}=2\in\mathbb{N}$ **…………………………………………......2p**

b) A következő átalakításokat végezzük:

$B=\sqrt{1+2016\cdot\sqrt{1+2017\cdot 2019}}=\sqrt{1+2016\cdot\sqrt{1+2017\cdot\left(2018+1\right)}}=$

$=\sqrt{1+2016\cdot\sqrt{1+2017\cdot 2018+2017}}=\sqrt{1+2016\cdot\sqrt{2018+2017\cdot 2018}}=$

$=\sqrt{1+2016\cdot\sqrt{2018^2}}=\sqrt{1+2016\cdot 2018}=$ **………………………………3p**

$=\sqrt{1+2016\cdot\left(2017+1\right)}=\sqrt{1+2016\cdot 2017+2016}=$

$=\sqrt{2017+2016\cdot 2017}=\sqrt{2017^2}=2017\in\mathbb{N}$ **……………………………2p**

2. **Feladat**

   Adottak az $a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*$, valamint az

$E=\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}+\sqrt{\left(b+c\right)\left(b+d\right)}+\sqrt{\left(c+d\right)\left(a+c\right)}+\sqrt{\left(d+a\right)\left(d+b\right)}$ kifejezés.

Igazoljuk, hogy: a. $E\le 2\left(a+b+c+d\right)$

b. $E\ge 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{ad}\right)$.

Megoldás.

Hivatalból 1 pont.

a) Alkalmazzuk a számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenséget, így írhatjuk, hogy:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} \le \frac{a+b+a+c}{2} = a+\frac{b+c}{2}$$

$$\sqrt{(b+c)(b+d)} \le \frac{b+c+b+d}{2} = b+\frac{c+d}{2}$$

$$\sqrt{(c+d)(c+a)} \le \frac{c+d+c+a}{2} = c+\frac{a+d}{2}$$

$$\sqrt{(d+a)(d+b)} \le \frac{d+a+d+b}{2} = d+\frac{a+b}{2}$$

…………………………….………..4p

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket, kapjuk,hogy:

$$E \le a+b+c+d+\frac{2(a+b+c+d)}{2} = 2(a+b+c+d)$$ **………………………………1p**

b) A számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlensége alapján:

$$\left.\begin{array}{l} a+b \ge 2\sqrt{ab} \\ b+c \ge 2\sqrt{bc} \\ d+c \ge 2\sqrt{dc} \\ a+d \ge 2\sqrt{ad} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} a+b+c+d \ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{dc}+\sqrt{ad} \qquad (1)$$ **……………...1p**

Továbbá:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} = \sqrt{a^2+ac+ab+bc} = \sqrt{a^2+a(b+c)+bc} \underset{m_a \ge m_g}{\overset{b+c\ge 2\sqrt{bc}}{\ge}} \sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc} =$$

$$= \sqrt{\left(a+\sqrt{bc}\right)^2} = a+\sqrt{bc}, \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$$

Tehát $\sqrt{(a+b)(a+c)} \ge a+\sqrt{bc}$ **……………………………………………………..2p**

Hasonlóan:

$$\sqrt{(b+c)(b+d)} \ge b+\sqrt{cd}$$

$$\sqrt{(c+d)(a+c)} \ge c+\sqrt{ad}$$

$$\sqrt{(d+a)(d+b)} \ge d+\sqrt{ab}$$

Összegezve: $E \ge a+b+c+d+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{ad}$.

Felhasználva (1) –et kapjuk, hogy $E \ge 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{ad}\right)$**………………..1p**

Megjegyzés:

Alkalmazva a Cauchy-Bunyakovski-Schwarz egyenlőtlenséget a $\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)$ és $\left(\sqrt{a},\sqrt{c}\right)$ számpárokra:

$$\left(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2\right)\cdot\left(\sqrt{a}^2+\sqrt{c}^2\right) \ge \left(\sqrt{a}\sqrt{a}+\sqrt{b}\sqrt{c}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+b)(a+c)} \ge a+\sqrt{bc}$$

$\sqrt{(b+c)(b+d)} \geq b+\sqrt{cd}$

Hasonlóan: $\sqrt{(c+d)(a+c)} \geq c+\sqrt{ad}$

$\sqrt{(d+a)(d+b)} \geq d+\sqrt{ab}$

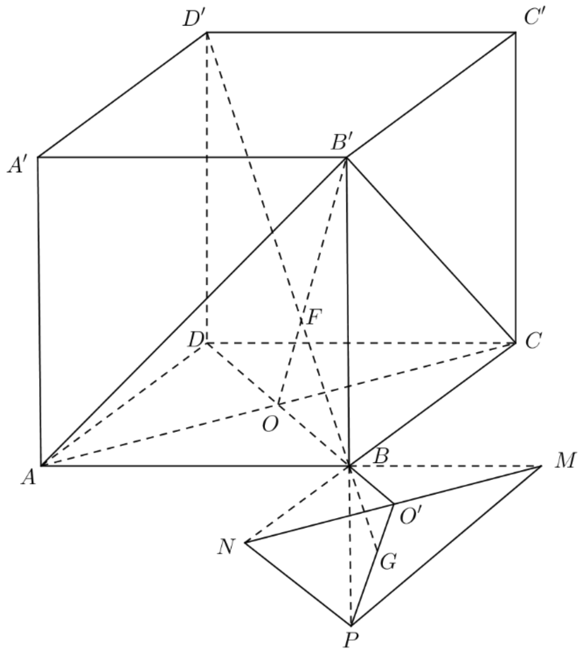
3. Feladat

Hosszabbítsuk meg az $ABCDA'B'C'D'$ kocka $[AB],[BC]$ és $[BB']$ élét a $[BM]\equiv[AB],[BN]\equiv[BC],[BP]\equiv[BB']$ szakaszokkal. Bizonyítsuk be, hogy:

a. $(ACB')\,||\,(MNP)$,

b. $ACB'\Delta \equiv MNP\Delta$

c. az ACB' és MNP háromszögek súlypontjai a BD' egyenesen vannak.



Megoldás.

Hivatalból 1 pont.

a. Az $APMB'$ síknégyszögben az átlók felezik egymást, így $APMB'$ paralelogramma, tehát $PM \,||\, AB'$ (1)

...1p

Hasonlóan a $B'CPN$ is paralelogramma és $NP \,||\, B'C$ (2)

Az (1),(2) párhuzamosságokból következik, hogy $(ACB')\,||\,(MNP)$

...1p

b. Az előbbi paralelogrammák és az $ANMC$ paralelogramma szemben fekvő oldalai kongruensek:

$\left.\begin{array}{l}[MN]\equiv[AC]\\ [NP]\equiv[B'C]\\ [MP]\equiv[AB']\end{array}\right\} \overset{ooo}{\Rightarrow} ACB'\Delta \equiv MNP\Delta$ **.2p**

c. Legyen $[B'O]$ az ACB' háromszög oldalfelezője.

Legyen $F \in B'O$ úgy, hogy $OF = \frac{1}{3}B'O$, így F az ACB' háromszög súlypontja.

Legyen $B'O \cap BD' = \{F'\} \Rightarrow D'B'F'\Delta \sim BOF'\Delta$, mert $FOB\sphericalangle \equiv FB'D'\sphericalangle$ és $FBO\sphericalangle \equiv FD'B'\sphericalangle$.

A hasonlósági arány $\frac{D'B'}{OB} = 2 \Rightarrow \frac{B'F'}{F'O} = 2 \Rightarrow \frac{OF'}{OB'} = \frac{OF}{OB'} \Rightarrow F = F'$. Tehát az ACB' háromszög F súlypontja a BD' testátlón van **...2p**

Legyen $DB \cap MN = \{O'\}$. A BNM háromszög egyenlő szárú és BO' szögfelező is, így BO' oldalfelező is. Legyen $G \in O'P$ úgy, hogy $\frac{O'G}{O'P} = \frac{1}{3}$, így G az MNP háromszög súlypontja.

Legyen $D'B \cap O'P = \{G'\}$, ekkor

$$\left.\begin{array}{l}[OB] \equiv [BO'] \\ FBO\sphericalangle \equiv G'BO'\sphericalangle \\ FOB\sphericalangle \equiv G'O'B\sphericalangle\end{array}\right\} \Rightarrow OBF\Delta \sim O'BG'\Delta \Rightarrow [OF] \equiv [O'G'] \Rightarrow [O'G'] = \frac{1}{3}[O'P] \Rightarrow G = G'.$$

Tehát az MNP háromszög G súlypontja is rajta van a BD' testátlón**…………………………..3p**

4. **Feladat**
   András és Béla sok (de 1000-nél kevesebb) egybevágó kis kockával játszik. András kis kockáiból egy olyan téglatestet rakott össze, melynek élei egymást követő egész számok. Béla a saját kis kockáiból egy nagyobb kockát tudott összeállítani. Ezután András elkérte Béla kis kockáit és azok mindegyikét felhasználva téglatestjének minden élét 1-gyel meg tudta növelni. Hány kis kockájuk volt összesen?

Megoldás.

Hivatalból 1 pont.

Kezdetben Andrásnak $x(x+1)(x+2)$, Bélának y^3 kis kockája volt**…………………………..…..2p**
Majd András $(x+1)(x+2)(x+3)$ kiskockákból épített téglatestet. Az adatok alapján:

$$x(x+1)(x+2) + y^3 = (x+1)(x+2)(x+3) \Leftrightarrow y^3 = (x+1)(x+2)(x+3-x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^3 = 3(x+1)(x+2)$$ **…………..…2p**

Azaz $3(x+1)(x+2)$ köbszám, vagyis $(x+1)(x+2) = 9k^3$, ahol $k \in \mathbb{N}$ **……………......…….1p**

Tudjuk, hogy $9k^3 < 1000 \Rightarrow k^3 < \frac{1000}{9} \Rightarrow k^3 < 111 \Rightarrow k^3 \in \{1, 8, 27, 64\}$. **…………………...1p**

Ha $k^3 = 8 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 9 \cdot 8 \Rightarrow x = 7.$ A többi esetben nincs megoldás a természetes számok halmazán**………………………………………………………………………………...2p**

Andrásnak $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, Bélának $3 \cdot 8 \cdot 9 = 216$, összesen pedig 720 kiskockájuk volt**...............1p**