IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. Oldd meg az egész számok halmazán a $615 + x^2 = 2^y$ egyenletet!

2. feladat. Az $ABCD$ egységoldalú négyzet AB és AD oldalán a P, illetve Q olyan pontok, amelyekre az APQ háromszög kerülete 2. Határozd meg a PCQ szög mértékét!

3. feladat. Igazold, hogy 202204 egy síkban fekvő egységvektor között mindig van 67402 olyan vektor, amelyek közül bármely kettőnek az összege legalább egységnyi hosszúságú!

4. feladat. Tudva, hogy x és y az

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

egyenletrendszer valós megoldásai, számítsd ki az $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ kifejezés értékét és oldd meg az egyenletrendszert!

5. feladat. Adott az AB szakasz és annak egy C belső pontja. Az AB-vel nem egybeeső, a C ponton áthaladó d egyenes az AC átmérőjű kört másodjára az E pontban, a BC átmérőjű kört másodjára az F pontban, valamint az AB átmérőjű kört a P és Q pontokban metszi. Igazold, hogy $PE = FQ$!

6. feladat. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot, tudva, hogy bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a_n \in \mathbb{N}^*$ és

$$a_{m\cdot n} = (m, a_n) \cdot [a_m, n].$$

Az (x, y) az x és y természetes számok legnagyobb közös osztóját, $[x, y]$ pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.