

**VII. Országos Magyar Matematikaolimpia**  
**XXXIV. EMMV**  
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

**VII. osztály**

1. feladat. a) Hasonlítsd össze az  $m$  és  $n$  számokat, ha

$$m = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{2} \cdot 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 2} + \dots + \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{2024}}{\sqrt{2025} \cdot 2024} \quad \text{és}$$
$$n = 5^{2025} - 4 \cdot 5^{2024} - 4 \cdot 5^{2023} - \dots - 4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 - 4.$$

b) Adottak az  $x, y, z$  szigorúan pozitív racionális számok úgy, hogy

$$\frac{5y + 4z - 3x}{7x} = \frac{5z + 4x - 3y}{7y} = \frac{5x + 4y - 3z}{7z}.$$

Igazold, hogy ha  $a = \frac{(5y + 4z) \cdot (5z + 4x) \cdot (5x + 4y)}{2025xyz}$ , akkor  $\sqrt{a}$  racionális szám!

2. feladat. Az  $ABC$  háromszögben  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . A háromszögbe írt kör  $BC$ -t  $K$  pontban,  $AB$ -t  $M$  pontban, míg  $AC$ -t  $N$  pontban érinti.

a) Határozd meg az  $AM$ ,  $BK$ ,  $CN$  szakaszok hosszát az  $a$ ,  $b$  és  $c$  függvényében!

b) Igazold, hogy ha az  $ABC$  háromszög kerülete 12 egység, akkor teljesül a

$$\sqrt{CN + CK} + \sqrt{BM + BK} + \sqrt{AM + AN} \leq 6$$

egyenlőtlenség!

3. feladat. a) Igazold, hogy két, 7-tel nem osztható, természetes szám négyzetének összege nem osztható 7-tel!

b) Tekintsük az  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2025^2$  számokat. Legfennebb hány darab természetes számot választhatunk ki az adott számokból úgy, hogy ne legyen közöttük három olyan szám, amelyeknek összege osztható 7-tel?

4. feladat. Egy  $O$  középpontú körön adott az  $E$  pont. Az  $E$  középpontú kisebb sugarú kör az előbbi kört az  $A$  és  $B$  pontokban metszi. Legyen a kisebb körön  $P$  egy olyan pont, amely a nagyobbik kör belsejében van. Az  $E$  pontból az  $AP$ , illetve  $BP$  szakaszokra húzott merőleges egyenesek az  $O$  középpontú kört másodszor rendre a  $C$ , illetve  $D$  pontokban metszik. Legyen  $EL$  az  $O$  középpontú kör átmérője.

Igazold, hogy:

a) az  $A, P$  és  $D$ , valamint a  $B, P$  és  $C$  pontok kollineárisak;

b) az  $ADLC$  egyenlő szárú trapéz;

c)  $EP \perp CD$ .

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.