VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV

országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat a p, q, r prímszámokat, amelyekre

$$p \cdot q + 6 = r \cdot (r-1).$$

Tóth Csongor, Szováta
Spier Tünde, Arad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Mivel $r-1$ és r egymás utáni természetes számok, ezért $r \cdot (r-1)$ páros. **(1 pont)**
Ugyanakkor a 6 páros szám, így a $p \cdot q$ is páros kell legyen, tehát $p = 2$ vagy $q = 2$. **(2 pont)**
Ha $p = 2$, akkor $2q + 6 = r(r-1)$, ahonnan

$$q + 3 = \frac{r(r-1)}{2},$$

innen

$$q = \frac{(r+2)(r-3)}{2}.$$

Mivel $q > 0$, a fenti azonosság szerint $r - 3 > 0$, így r páratlan, azaz $r = 2k+1$ alakú. Ez alapján

$$q = (2k+3)(k-1).$$

Mivel q prímszám és $2k+3 > 3$, következik, hogy $k - 1 = 1$, azaz $k = 2$, $r = 5$, valamint $q = 7$. **(4 pont)**
Ha $q = 2$, akkor hasonlóan kapjuk, hogy $p = 7$ és $r = 5$. Tehát

$$(p, q, r) \in \{(2,7,5), (7,2,5)\}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

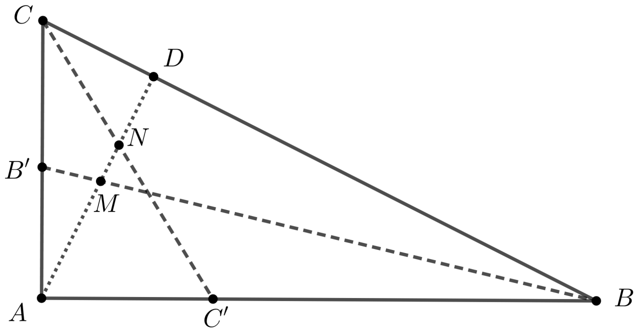
■

2. feladat (10 pont). Az A-ban derékszögű ABC háromszög AD magassága ($D \in BC$) a B és C szögek szögfelezőit az M, illetve N pontban metszi. Igazold, hogy

$$\left(\frac{ND}{AN}\right)^2 + \left(\frac{MD}{AM}\right)^2 = 1.$$

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Megfelelő ábra elkészítése. **(1 pont)**
Az ACD háromszögben a szögfelezőtétel alapján

$$\frac{ND}{NA} = \frac{CD}{CA}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Másrészt a DAC és ABC háromszögek hasonlóak ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90°, \widehat{C}$ közös szög), így

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A fentiek alapján

$$\frac{ND}{NA} = \frac{CA}{CB} \Longrightarrow \left(\frac{ND}{NA}\right)^2 = \frac{CA^2}{CB^2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan a BDA háromszögben BM szögfelező, valamint a BDA háromszög hasonló a BAC háromszöggel, tehát

$$\frac{MD}{MA} = \frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB} \Longrightarrow \left(\frac{MD}{AM}\right)^2 = \frac{AB^2}{CB^2}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Összeadjuk a két összefüggést, majd alkalmazzuk a Pitagorász tételét, azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{ND}{NA}\right)^2 + \left(\frac{MD}{AM}\right)^2 = \frac{CA^2}{CB^2} + \frac{AB^2}{CB^2} = \frac{CB^2}{CB^2} = 1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

Megjegyzés. A $\frac{CD}{CA} = \cos C = \sin B$ és $\frac{BD}{BA} = \cos B = \sin C$ összefüggések alapján a megoldás rövidebben is leírható.

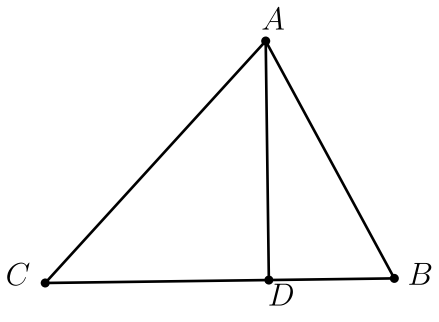
3. feladat (10 pont). Az ABC hegyesszögű háromszögben AD magasság, $D \in BC$. Az AD, AB, BC és CA szakaszok centiméterben kifejezett hosszai egymás utáni természetes számok, ebben a sorrendben.

a) Számítsd ki a ABC háromszög oldalainak hosszát!

b) Igazold, hogy a háromszögbe írt kör sugarának centiméterben kifejezett hossza természetes szám!

Dávid Géza, Székelyudvarhely
Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Legyenek a szakaszok hosszai rendre $AD = n$, $AB = n+1$, $BC = n+2$, $CA = n+3$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Továbbá legyen $BD = x$, $DC = y$. Ha az ADB és ADC háromszögekben felírjuk Pitágorász tételét és felhasználjuk a $BC = BD + DC$ egyenlőséget, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} x^2 + n^2 = (n+1)^2 \\ y^2 + n^2 = (n+3)^2 \\ x + y = n + 2, \end{cases}$$ **(2 pont)**

amely egyenértékű azzal, hogy

$$\begin{cases} x^2 = 2n + 1 \\ y^2 = 6n + 9 \\ x + y = n + 2. \end{cases}$$

A harmadik egyenletből $y = n + 2 - x$, ahonnan a második egyenlet alapján következik, hogy

$$(n + 2 - x)^2 = 6n + 9,$$

azaz

$$(n + 2)^2 - 2(n + 2)x + x^2 = 6n + 9.$$

Az első egyenlet alapján következik, hogy $(n + 2)^2 - 2(n + 2)x + 2n + 1 = 6n + 9$, vagyis

$$2(n + 2)x = n^2 - 4,$$

ahonnan

$$x = \frac{(n+2)(n-2)}{2(n+2)} = \frac{n-2}{2}.$$ **(3 pont)**

Visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{n^2 - 4n + 4}{4} = 2n + 1,$$

ahonnan követezik, hogy $n(n - 12) = 0$. Mivel $n \neq 0$, ezért $n = 12$. **(1 pont)**

Tehát $AB = n + 1 = 13$ cm, $BC = n + 2 = 14$ cm és $AC = n + 3 = 15$ cm. **(1 pont)**

b) Legyen I a háromszögbe írt kör középpontja és r a sugár hossza centiméterben kifejezve. A háromszög területe

$$T = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84 \text{ cm}^2.$$ **(1 pont)**

Ugyanakkor

$$T_{ABC} = T_{BIC} + T_{CIA} + T_{AIB},$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$84 = \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{CA \cdot r}{2} + \frac{AB \cdot r}{2},$$

ahonnan

$$r = \frac{2 \cdot 84}{BC + CA + AB} = 2 \cdot \frac{84}{42} = 4.$$

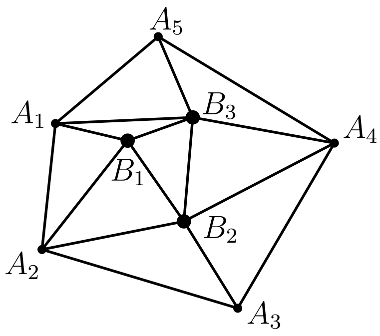
Tehát a beírt kör sugara 4 cm. **(1 pont)**

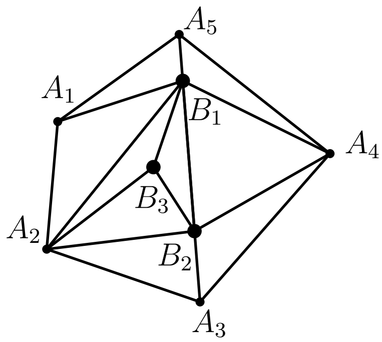
■

4. feladat (10 pont). Egy 1000 oldalú konvex sokszög belsejében felveszünk n pontot. Jelöljük $\mathcal{H}$-val a sokszög csúcsaiból és a felvett pontokból álló halmazt. A sokszöget osszuk fel páronként diszjunkt belsejű *üres* háromszögekre úgy, hogy a háromszögek csúcsai a $\mathcal{H}$-ból legyenek. Egy háromszöget *üres* háromszögnek nevezünk ha sem a belsejében, sem az oldalainak belsejében nem tartalmaz $\mathcal{H}$-beli pontot. Az alábbi ábrákon két ilyen felbontást szemléltetünk egy ötszög és a belsejében felvett három pont esetén.

a) Létezik-e olyan n érték, amelyre a felbontás 2025 üres háromszögből áll?

b) Milyen k értékekre létezik olyan $n > 0$, amelyre a felbontás k darab üres háromszögből áll?





Szilgýi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Jelöljük $A_1, A_2, \ldots, A_{1000}$-rel a sokszög csúcsait és $B_1, B_2, \ldots, B_n$-nel a belső pontokat. Kiszámítjuk a felbontásban szereplő üres háromszögek szögeinek összegét kétféleképpen. Ha a felbontás 2025 háromszögből áll, akkor ez a szögösszeg $2025 \cdot 180°$. **(1 pont)**

Másrészt az üres háromszögek szögeinek összege egyenlő a sokszög csúcsai körül, illetve a belső pontok körül létrejött szögek összegével. **(1 pont)**

A sokszög A_i csúcsa körül létrejött szögek összege éppen az A_i szög. Így a sokszög csúcsai körül létrejött szögek összege a sokszög szögeinek összegével egyenlő, azaz $180° \cdot (1000 - 2)$. **(2 pont)**

Egy B_i pont körül létrejött szögek összege $360°$, tehát a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pontok körül létrejött szögek összege $n \cdot 360°$. **(1 pont)**

A fentiek alapján, ha létezik 2025 üres háromszögből álló felbontás, akkor

$$2025 \cdot 180° = 998 \cdot 180° + n \cdot 360°,$$

ahonnan $2n + 998 = 2025$. **(1 pont)**

Az egyenlőség bal oldala páros, a jobb oldala páratlan, tehát nem létezik ilyen n érték. **(1 pont)**

b) A fenti gondolatmenet alapján

$$k \cdot 180° = 998 \cdot 180° + n \cdot 360°,$$

vagyis

$$2n + 998 = k.$$

Ennek az egyenletnek minden 1000-nél nagyobb vagy egyenlő páros k értékre van megoldása. **(2 pont)**

■

5. feladat (10 pont). Tekintsük a $H = \{6, 7, 8, \ldots, 21\}$ számhalmazt. Igazold, hogy H-ból bárhogy választunk ki 7 számot, a kiválasztottak között létezik 3 olyan, amellyel hegyesszögű háromszög szerkeszthető! *Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az $a < b < c$ számok akkor és csakis akkor lehetnek egy hegyesszögű háromszög oldalhosszúságai, ha $a + b > c$ és $a^2 + b^2 > c^2$. **(2 pont)**
Ezt figyelembe véve tekintsük a H halmaznak a következő diszjunkt részhalmazait:

$$H_1 = \{6, 7, 8, 9\},$$

$$H_2 = \{10, 11, 12, 13, 14\},$$

$$H_3 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}.$$ **(3 pont)**

Mivel $6+7 > 9$, $6^2+7^2 > 9^2$, továbbá $10+11 > 14$, $10^2+11^2 > 14^2$ és $15+16 > 21$, $15^2+16^2 > 21^2$, ezért a H_1, H_2, H_3 halmazok bármelyikéből választott $a < b < c$ számok teljesítik az $a + b > c$ és $a^2 + b^2 > c^2$ feltételeket. **(2 pont)**
A skatulyelv alapján a H halmazból választott bármely 7 szám között van három olyan, amely ugyanannak a H_i részhalmaznak eleme. Ez a három szám teljesíti a kért feltételt. **(2 pont)**

■

6. feladat (10 pont). Egy természetes számot teljes hatványnak nevezünk, ha felírható a^b alakban, ahol $a, b \in \mathbb{N}$ és $b \geq 2$. Határozd meg azt a legnagyobb természetes számot, amelyet nem lehet felírni páronként különböző teljes hatványok összegeként! *András Szilárd, Csíkdelne*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Tekintjük az n szám kettes számrendszerbeli felírását. Ha az n szám $4k$ vagy $4k + 1$ alakú ($k \in \mathbb{N}$), akkor a kettes számrendszerbeli alakjának az utolsó előtti számjegye 0, tehát a kettes számrendszerbeli felírása csak páronként különböző teljes hatványokat tartalmaz (ezek mindegyikének az alapja 2).

(2 pont)
Ha $n = 4k + 2 \geq 10$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor $n = 4k + 2 = 10 + 4(k - 2) = 9 + 1 + 4(k - 2)$ és a $4(k - 2)$ szám kettes számrendszerbeli reprezentációjával kiegészítve az előbbi felírást (ebben nincs 1-es) megkapjuk az n szám egy lehetséges felírását páronként különböző teljes hatványok összegeként. **(2 pont)**
Ha $n = 4k + 3$ és $n \geq 27$, akkor $n = 27 + 4(k - 6)$, és a $4(k - 6)$ szám kettes számrendszerbeli felírását használva ismét megkapjuk az n-nek egy előállítását páronként különböző hatványok összegeként. Mindezt összevetve ha $n \geq 24$, akkor biztosan felírható páronként különböző teljes hatványok összegeként. **(2 pont)**
A továbbiakban belátjuk, hogy a 23 nem írható fel ilyen alakban. Ha felírható volna, akkor az előállításában csak a $\{0, 1, 4, 8, 9, 16\}$ számok szerepelhetnének. Mivel $1 + 4 + 8 + 9 = 22 < 23$, az előállításban szerepelnie kell a 16-nak. Ekkor viszont a 7 előállítható kellene legyen további páronként különböző teljes hatványok összegeként. Ez viszont nem lehetséges, mert csak a $\{0, 1, 4\}$ teljes hatványok kisebbek mint 7 és ezek összege kisebb, mint 7. **(3 pont)**

■