

## IV. országos magyar matematikaolimpia

### XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

## VIII. osztály

**1. feladat.** Péternek és Jánosnak összesen 40 kisautója van. Mindketten ráírják az összes saját autójukra a szerencseszámukat. A János autóin levő számok összege kétszer nagyobb, mint a Péter autóin található számok összege. Ha Jánosnak annyi autója lenne, mint amennyi Péternek van, akkor az autóin található számok összege 36-tal kevesebb lenne, mint amennyi a Péter autóira írt számok összege. Ha Péternek lenne annyi autója, mint amennyi Jánosnak van, akkor a Péter autóin levő számok összege 84-gyel lenne több, mint amennyi a János autóin szereplő számok összege. Hány autójuk van a fiúknak külön-külön és mennyi a szerencseszámuk?

**2. feladat.** Az  $ABCD A'B'C'D'$  kockában  $E$  az  $AD'$ ,  $F$  az  $AB'$ ,  $G$  a  $B'C$  és  $H$  a  $D'C$  szakasz felezőpontja. Igazold, hogy

- a) az  $ACB'D'$  szabályos tetraéder;
- b) az  $E$ ,  $F$ ,  $G$  és  $H$  pontok egy síkban vannak, és négyzetet alkotnak;
- c) az  $EFGH$  négyzet középpontja egybeesik a kocka középpontjával!

**3. feladat.** Az  $ABCDEFGH$  téglatestben  $AB = 20$  cm,  $BC = 15$  cm és  $AE = 12\sqrt{3}$  cm.

- a) Számítsd ki az  $E$  pont távolságát a  $BD$  egyenestől!
- b) Határozd meg az  $(EBD)$  és  $(FDB)$  síkok által meghatározott szög mértékét!
- c) Ha  $M$  és  $N$  a  $CD$ , illetve  $CG$  élek felezőpontjai, akkor számítsd ki az  $M$  pont távolságát az  $(NDB)$  síktól!

**4. feladat.** Adottak az  $a < b < c$  prímszámok, amelyekre  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 335$ .

- a) Igazold, hogy  $6 \leq \sqrt{a+6} - \sqrt{8a} + \sqrt{b+12} - \sqrt{12b} + \sqrt{c+6} - \sqrt{20c} < 337$ .
- b) Határozd meg az  $a, b, c$  számok értékét úgy, hogy

$$\frac{2022}{\sqrt{a+6} - \sqrt{8a} + \sqrt{b+12} - \sqrt{12b} + \sqrt{c+6} - \sqrt{20c}} \in \mathbb{N}.$$