VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Oldd meg az

$$(xy+6)^2 = x^2 + y^2$$

egyenletet az egész számok halmazán! *Bencze Mihály, Brassó*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen $s = x + y$ és $p = xy$. Ekkor az egyenlet $(p+6)^2 = s^2 - 2p$, vagyis $p^2 + 14p + 36 = s^2$. Kialakítva a teljes négyzetet a bal oldalon, kapjuk, hogy $(p+7)^2 - 13 = s^2$, vagyis **(2 pont)**

$$(p+7-s)(p+7+s) = 13. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel s, p egész számok és 13 prím, ezért négy eset lehetséges:

$$\begin{cases} p+7+s=13 \\ p+7-s=1, \end{cases} \quad \begin{cases} p+7+s=1 \\ p+7-s=13, \end{cases} \quad \begin{cases} p+7+s=-13 \\ p+7-s=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} p+7+s=-1 \\ p+7-s=-13. \end{cases} \quad \textbf{(2 pont)}$$

Az első két esetben összeadva a két egyenletet kapjuk, hogy $2p + 14 = 14$, ahonnan $p = 0$. Így $s = 6$ az első esetben, illetve $s = -6$ a másodikban. Ez azt jelenti, hogy $(x, y) \in \{(\pm 6, 0), (0, \pm 6)\}$.
Az utolsó két esetben $p = -14$, ahonnan $s = -6$ a harmadik esetben és $s = 6$ a negyedik esetben. **(2 pont)**

Viszont az

$$\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=-14, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=6 \\ xy=-14 \end{cases}$$

szimmetrikus rendszerek egyikének sincs egész megoldása, mert a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa $6^2 + 4 \cdot 14 = 92$, ami nem teljes négyzet. **(1 pont)**
Tehát a megoldáshalmaz $M = \{(\pm 6, 0), (0, \pm 6)\}$. **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont). Adott egy n oldalú konvex sokszög ($n \geq 4$), amelyet valamilyen módon felbontunk háromszögekre belső pontban egymást nem metsző átlók segítségével. Az adott felbontás esetén nevezzük nullás csúcsnak a sokszög azon csúcsait, amelyekből nem indul ki átló, illetve nevezzük belső háromszögnek azokat, amelyek minden oldala átló. Ha N a nullás csúcsok száma, illetve B a belső háromszögek száma, akkor igazold, hogy

$$N = B + 2.$$

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A sokszög háromszögekre való felosztása során három fajta háromszög keletkezik.

1. Olyan háromszög, amelyeknek egy oldala behúzott átló és két oldala a sokszögnek is oldala. Ezek számát jelöljük K-val.

2. Olyan háromszög, amelyeknek két oldala behúzott átló és egy oldala a sokszögnek is oldala. Ezek számát jelöljük M-mel.

3. Olyan háromszög, amelyeknek mindhárom oldala behúzott átló. Ezek a belső háromszögek, amelyek száma B.

(1 pont)

Az első fajta háromszög pontosan egy csúcsából nem indul ki behúzott átló, illetve a második és harmadik fajta háromszögek mindegyik csúcsából indul ki behúzott átló. Így a nullás csúcsok száma megegyezik az első fajta háromszögek számával, vagyis $K = N$. **(1 pont)**
A sokszög oldalainak számát kétféleképpen számolhatjuk meg. Egyrészt a sokszög minden oldala pontosan egy háromszögnek oldala. Másrészt az első fajta háromszögek a sokszög oldalaiból $2K$ darabot és a második fajta háromszögek pedig M darabot tartalmaznak, a harmadik fajta háromszögek pedig egyetlen darabot sem tartalmaznak. Ezek alapján a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$n = 2K + M. \tag{1}$$

(2 pont)

A sokszög behúzott átlóinak kétszeresét kétféleképpen is megszámolhatjuk. Ehhez előbb megszámoljuk, hogy hány háromszögre bontjuk a sokszöget, illetve ehhez hány átlóra van szükség.
Az n oldalú sokszög $n-2$ háromszögre bomlik fel, amit a következőképpen láthatunk be. A sokszög szögeinek összegét kétféleképpen számolhatjuk meg. A sokszög felosztása során a sokszög egy rögzített A csúcsánál található szög felbomlik ezen csúcsot tartalmazó háromszögek A csúcsainál található szögekre. Egyrészt az n oldalú sokszög szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$, másrészt ha h a háromszögek száma, akkor ugyanezen összeg egyenlő $h \cdot 180°$-val, ahonnan a háromszögek száma $h = n - 2$.

(1 pont)

A háromszögekre bontás során összesen $n-3$ darab átlót húzunk be, amit a következőképpen tudunk belátni. Mielőtt behúznánk az első átlót a sokszög egy darabból áll. Az első átló behúzásával két részre bontjuk a sokszöget. A második átló behúzásával az egyik darabot újra két részre bontjuk, tehát három darabra bomlik a sokszög. Minden újabb átló behúzásával egy meglévő darabot bontuk ketté, így eggyel növelve a darabok számát. Tehát k átló behúzása után $k + 1$ darabra bomlik a sokszög. Ha a sokszög $n-2$ háromszögre bontásához k darab átlóra van szükség, akkor $k+1 = n-2$, ahonnan $k = n - 3$. **(1 pont)**
A sokszög minden behúzott átlója pontosan két háromszögnek oldala. Továbbá a behúzott átlókból az első fajta háromszögek K darabot, a második fajta háromszögek $2M$ darabot, a harmadik fajta háromszögek pedig $3B$ darabot tartalmaznak. Tehát

$$2(n-3) = K + 2M + 3B. \tag{2}$$

(2 pont)

A (2) egyenlőségből kivonva az (1) egyenlőség kétszeresét kapjuk, hogy

$$2\cdot(n-3) - 2n = (K + 2M + 3B) - 2\cdot(2K + M) \iff -6 = -3K + 3B \iff K = B + 2$$

Mivel $K = N$, így kapjuk, hogy $N = B + 2$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Nevezzük nullás háromszögnek azokat a felbontásban szereplő háromszögeket, amelyeknek van nullás csúcsa. Matematikai indukcióval belátjuk, hogy bármilyen felbontásban lesz legalább két nullás háromszög. Az állítás $n = 4$ esetén igaz. Ha elfogadjuk az állítást tetszőleges $k > 4$ oldalú sokszög tetszőleges felbontására, és egy, a felbontásban szereplő átló mentén két részre osztjuk a sokszöget, akkor

- ha az egyik rész háromszög, akkor ez az eredeti háromszögnek nullás háromszöge volt, és a másik résznek van legalább két nullás háromszöge, amelyek közül csak az egyik lehet a vágáshoz használt átló mentén;
- ha mindkét rész legalább négyszög, akkor az indukciós feltevés szerint mindkét részben lesz legalább két nullás háromszög, amelyek közül legfennebb egy-egynek lehet az egyik oldala a vágáshoz használt átló.

A matematikai indukció elve alapján tehát az állítás igaz minden $n \geq 4$ oldalú sokszögre. (**5 pont**)
Belátjuk, hogy a feladat állítása igaz, ismét matematikai indukcióval. Ha $n = 4$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges k csúcsú konvex sokszög esetén és legyen P egy tetszőleges $k+1$ csúcsú konvex sokszög, amelyet tetszőlegesen felbontottunk háromszögekre a feltételek szerint. Válasszunk ki egy nullás háromszöget (ami biztosan létezik). Jelölje Q azt a felbontott k-szöget, amelyet úgy kapunk a P-ből és a felbontásából, hogy levágjuk a kiválasztott háromszöget. Két esetet különböztetünk meg:

- Ha a levágott háromszög megmaradó oldala a P felbontásában belső háromszöghöz tartozik, akkor $N_P = N_Q + 1$ és $B_P = B_Q + 1$.
- Ha a levágott háromszög megmaradó oldala a P felbontásában nullás háromszöghöz tartozik, akkor $N_P = N_Q$ és $B_P = B_Q$.

Mindkét esetben azt kapjuk, hogy $N_P = B_P + 2$. (**4 pont**)

■

Harmadik megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az egyenlőséget a csúcsok száma szerinti indukcióval igazoljuk. Az $n = 4$ esetben a négyszög egyetlen átlóval két háromszögre osztható és a négyszögnek két csúcsa van, amelyből nem indul ki átló. Tehát $B = 0$ és $N = 2$. (**1 pont**)
Feltételezzük, hogy minden n-nél kisebb oldalszámú konvex sokszögre igaz a tulajdonság, ahol n legalább 5. Be fogjuk látni, hogy az n oldalú sokszögekre is igaz.
Jelöljük K-val a megadott n oldalú konvex sokszöget. Legyen PQ a K felbontásában szereplő egyik átló. A PQ átló az n oldalú K sokszöget két, K_1 és K_2 konvex sokszögre bontja. A K felbontása származtatja a K_1, illetve K_2 sokszögek egy-egy háromszögekre való felbontását egymást nem metsző átlókkal. Megjegyezzük, hogy a K sokszög PQ átlója a K_1 és K_2 sokszögeknek oldala, illetve a K nullás csúcsai egyben a K_1 és K_2 sokszögeknek is nullás csúcsai. (**1 pont**)
Jelölje N_1 és N_2 a K azon nullás csúcsainak számát, amelyek a K_1-nek, illetve K_2-nek is csúcsai.
Mivel P és Q nem nullás csúcsai a K-nak, ezért

$$N = N_1 + N_2. \tag{3}$$

Jelölje B_1 és B_2 a K azon belső háromszögeinek számát, amelyek a K_1-nek, illetve K_2-nek is (nem feltétlen belső) háromszögei. Ekkor

$$B = B_1 + B_2. \tag{4}$$

(**2 pont**)
Megjegyezzük, hogy a K_1 és K_2 belső háromszögei a K-nak is belső háromszögei. A K azon két háromszöge, amelynek egyik oldala a PQ átló, azok lehetnek a K belső háromszögei, de nem belső háromszögek a K_1 és K_2 sokszögekben.
Mivel $n \geq 5$, ezért a K_1 és K_2 sokszögek nem lehetnek egyszerre háromszögek. Tegyük fel, hogy K_1 biztosan nem háromszög, illetve K_2 lehet háromszög vagy sem. (**1 pont**)
Jelölje Δ a K_1 felbontásában azt a háromszöget, amelynek egyik oldala a PQ. A K_1 sokszög P és Q szomszédos csúcsainak valamelyikéből ki kell induljon legalább egy átló.

- Először tekintjük azt az esetet, amikor csak az egyik csúcsból indul ki átló, például a P-ből kiindul átló, de a Q-ból nem.

  Ekkor a Δ nem belső háromszöge sem a K sokszögnek, sem a K_1 sokszögnek, ezért a K_1 belső háromszögeinek száma egyenlő B_1-gyel.

  A Q nullás csúcsa a K_1 sokszögnek, míg a P nem, így a K_1 nullás csúcsainak száma egyenlő (N_1+1)-gyel.

  A K_1 sokszögre használva az indukciós feltevést kapjuk, hogy $(N_1+1)-B_1=2$, ahonnan $N_1-B_1=1$. **(1 pont)**

- Most tekintjük azt az esetet, amikor a K_1 sokszög P és Q csúcsaiból indul ki átló. Ekkor a P és Q nem nullás csúcsai a K_1 sokszögnek, tehát a K_1 sokszög nullás sokszögeinek száma egyenlő N_1-gyel. A Δ háromszög belső háromszöge a K-nak, de nem belső háromszöge a K_1-nek, ezért a K_1 belső háromszögeinek száma egyenlő (B_1-1)-gyel.

  A K_1 sokszögre használva az indukciós feltevést kapjuk, hogy $N_1-(B_1-1)=2$, ahonnan $N_1-B_1=1$. **(1 pont)**

Ezzel beláttunk, hogy a K_1 (legalább 4 oldalú) konvex sokszögben

$$N_1-B_1=1. \tag{5}$$

Végül két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy K_2 legalább négyszög vagy csak háromszög.

- Ha K_2 legalább négyszög, akkor a fenti tárgyaláshoz hasonlóan belátható, hogy $N_2-B_2=1$. Innen a (3), (4), (5) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$N-B=(N_1+N_2)-(B_1+B_2)=(N_1-B_1)+(N_2-B_2)=1+1=2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

- Ha K_2 háromszög, akkor K-nak nem esik belső háromszöge a K_2-be, így $B=B_1$. Továbbá a K_2 azon csúcsa, amely nem esik egybe a P és Q-val a K sokszög nullás csúcsa, így a $N=N_1+1$. Ezekből az (5) összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$N-B=(N_1+1)-B_1=1+N_1-B_1=2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont). Egy $30\,\mathrm{cm}^2$ területű ABC háromszög mindhárom szögének tangense egész szám. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara? *Kaiser Dániel, Kolozsvár*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A feltételek alapján a háromszög nem lehet derékszögű, tehát

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C. \quad \textbf{(1 pont)}$$

A $\operatorname{tg} A=x, \operatorname{tg} B=y, \operatorname{tg} C=z$ jelölésekkel az $x+y+z=xyz$ egész megoldásait keressük.
A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy $x\le y\le z$. Mivel egy háromszögnek legfeljebb egy tompaszöge lehet, ezért $y,z\in\mathbb{N}^*$. Ha $x<0$, akkor az

$$x(1-yz)=-y-z$$

egyenlőség alapján $1-yz>0$, ami ellentmondás. **(2 pont)**

Ha $x > 0$, akkor $0 < x \leq y \leq z$ alapján $x + y + z \leq 3z$, tehát $xyz \leq 3z$, vagyis $xy \leq 3$. Mivel $x, y \in \mathbb{N}^*$, ezért csak az $x = 1$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 2$ vagy $x = 1$, $y = 3$ esetek lehetségesek. Az első és a harmadik esetben ellentmondáshoz jutunk, a másodikban pedig az $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ megoldáshoz. Tehát a háromszög szögei csak $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} 2$ és $\operatorname{arctg} 3$ lehetnek. **(3 pont)**
Másrészt

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2) = \frac{1+2}{1 - 1 \cdot 2} = -3,$$

tehát $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$, vagyis az előbbi szögek valóban egy háromszög szögei. **(1 pont)**
A $T = \frac{abc}{4R}$ összefüggés és a szinusztétel alapján adódik a $T = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ összefüggés. Másrészt, a $\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$ összefüggés alapján $\sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$ és $\sin C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tehát

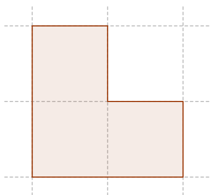
$$R = \sqrt{\frac{30}{2 \cdot \frac{6}{10}}} = 5.$$ **(2 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Egy $2n \times 2n$-es, $4n^2$ egységnégyzetből álló négyzet alakú tábla egyik egységnégyzetét kivettük.

a) Bizonyítsd be, hogy ha $n \in \{1, 2, 4\}$, akkor a megmaradt rész hézag és átfedés nélkül lefedhető az alábbi ábrán látható, 3 egységnégyzetből álló alakzat segítségével, ha ebből elégséges számú áll a rendelkezésünkre, és ezeket bármilyen pozícióban elhelyezhetjük a táblán!

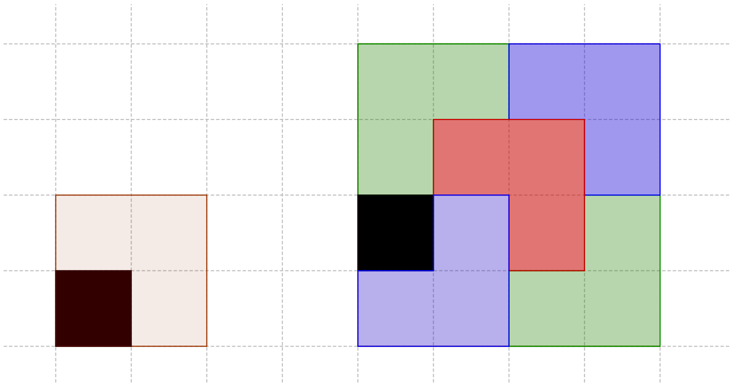
b) Határozd meg az összes olyan $n \in \mathbb{N}^*$ számot, amely esetén a megmaradt rész hézag és átfedés nélkül lefedhető az előbbi alakzatok segítségével!



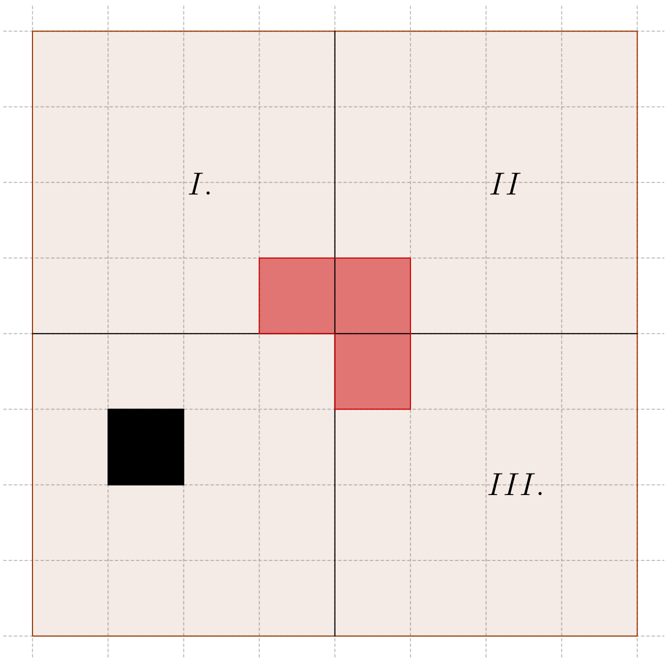
András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

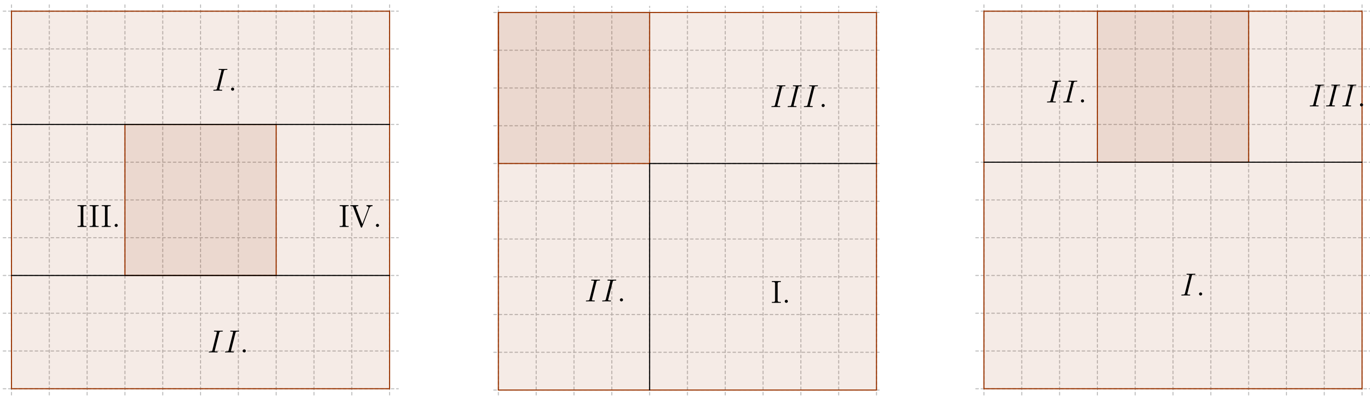
a) 2×2-es tábla esetén ha kiveszünk egy egységnégyzetet, a maradék pontosan egy olyan alakzat lesz, ami a kijelentésben szerepel. A továbbiakban nevezzük ezt az alakzatot L-triminónak. 4×4-es tábla esetén vágjuk szét a táblát 4 darab 2×2-es táblára. A szimmetria miatt elégséges azt megvizsgálni, hogy lefedhető-e a maradék, ha a bal alsó 2×2-es részből vesszük ki az egységnégyzetet. Így a bal alsó 2×2-es rész lefedhető lesz és a többi három 2×2-es rész mindegyikéből kivesszük az eredeti tábla középpontját tartalmazó egységnégyzetet. Így a maradékok ismét lefedhetők L-triminókkal és a 2×2-es részek összeillesztése után a középen üresen maradó három egységnégyzetre illeszkedik egy L-triminó. **(2 pont)**



Hasonló gondolatmenettel beláthatjuk, hogy a 8×8-as táblán is lefedhető a maradék L-triminókkal ha egy tetszőleges egységnégyzetet kiveszünk: ha a bal alsó 4×4-es részből kiveszünk egy egységnégyzetet, akkor az lefedhető marad, ha a többi három 4×4-es részből kivesszük az eredeti tábla középpontjára illeszkedő egységnégyzeteket, akkor L-triminókkal lefedhető részeket kapunk és a középpont körül a három egységnégyzet helyére egy L-triminó illeszkedik. (**2 pont**)



b) 10×10-es tábla esetén az ötlet az, hogy az eredeti táblát felvágjuk egy olyan részre, amelyről kiveszünk egy egységnégyzetet és a maradék lefedhető lesz (itt 4×4-es részt használunk) és a többit olyan részekre, amelyek biztosan lefedhetők. Ehhez vegyük észre, hogy ha egy téglalap egyik oldala páros, a másik 3-mal osztható, akkor a téglalap felbontható 3×2-es darabokra és ezek lefedhetők. A következő három ábra mutatja, ezeket a szétvágásokat aszerint, hogy a kivett egységnégyzet hol helyezkedik el az eredeti táblán (a szimmetria miatt további esetekre nincs szükség). (**2 pont**)



A továbbiakban ugyanezt a konstrukciót használjuk csak induktívan $(2k) \times (2k)$ méretű tábláról $(2k+6) \times (2k+6)$ méretű táblára úgy, hogy a $(2k) \times (2k)$ méretű táblát előbb a nagyobb tábla közepére helyezzük (így marad egy három egységnyi szélességű keret), majd az egyik csúcsába és végül valamelyik oldal közepére. Mindhárom esetben a $(2k) \times (2k)$ méretű táblán kívüli részek lefedhetőek lesznek 3×2-es téglalapokkal, tehát L-triminókkal is és az indukciós feltevés alapján a $(2k) \times (2k)$ méretű tábláról elhagyva egy egységnégyzetet az is lefedhető lesz. Így a 8×8-as táblából kiindulva rendre megkapjuk a 14×14-es, 20×20-as és általában a $(6k+2) \times (6k+2)$-es táblákat és a 10×10-es táblából kiindulva a $(6k+4) \times (6k+4)$-es táblákat. Ha $n \vdots 3$, akkor a megmaradt részen a mezők száma nem osztható hárommal, tehát ebben az esetben a lefedés nem valósítható meg. Tehát a maradék pontosan akkor fedhető le, ha n nem osztható 3-mal. (**3 pont**)

■

5. feladat (10 pont). Legyen ABC egy egyenlő szárú háromszög, amelyben a $\widehat{BAC} = 100°$. Az ABC szög szögfelezője az AC oldalt E pontban, az EBC szög szögfelezője az AC oldalt pedig D pontban metszi. Megszerkesztjük az ABE háromszög AF magasságát és az ABD háromszög AG magasságát. Legyen H az AF és BC egyenesek metszéspontja.

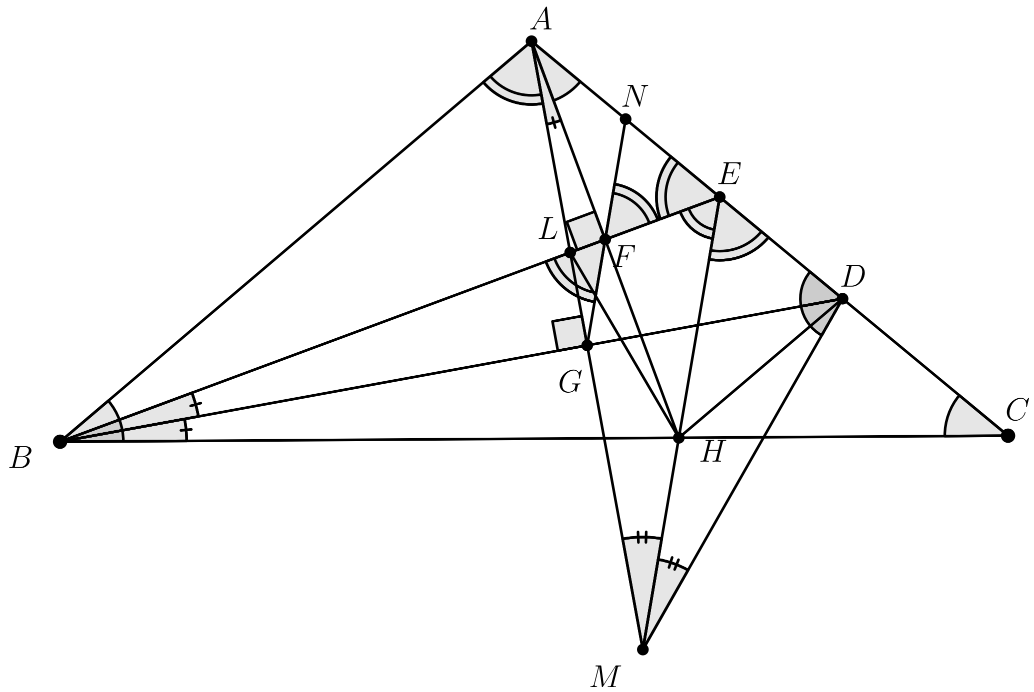
a) Igazold, hogy $FG \parallel HE$.

b) Bizonyítsd be, hogy a $HD \parallel AB$.

Mészár Julianna, Nagyszalonta
Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A feladat feltételei alapján $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40°$, $\widehat{ABE} = \widehat{EBC} = 20°$, $\widehat{EBD} = \widehat{DBC} = 10°$, tehát $\widehat{ABG} = 30°$. (**2 pont**)



A fentiek alapján az ABF derékszögű háromszögből $\widehat{BAF} = 70°$, az ABG derékszögű háromszögből $\widehat{BAG} = 60°$, tehát $\widehat{FAG} = 10°$ és $\widehat{FAE} = 30°$.

Az AEF derékszögű háromszögből $\widehat{AEF} = 60°$. **(1 pont)**

A BF az AHB háromszögben szögfelező és magasság is, tehát BF az AH felezőmerőlegese. Így $\widehat{HEF} = \widehat{AEF} = 60°$ **(1 pont)**

Az $ABGF$ húrnégyszög, mert $\widehat{AFB} = \widehat{AGB} = 90°$, tehát $\widehat{BAG} = \widehat{BFG} = 60°$.

Az eddigiek alapján $\widehat{BEH} = \widehat{BFG} = 60°$, tehát $HE \parallel FG$.

b) Legyen $\{N\} = GF \cap AC$. Ekkor $\widehat{NFE} = \widehat{BFG} = 60°$, tehát a $30° - 60° - 90°$-os háromszögben FN oldalfelező. **(1 pont)**

Legyen $\{M\} = EH \cap AG$. Az AEM háromszögben $NG \parallel ME$ és N az AE felezőpontja, tehát NG középvonal, így G az AM felezőpontja, ahonnan DG az AM felezőmerőlegese. Következésképpen az ADM háromszög egyenlő szárú. Tehát szögei $\widehat{DAM} = \widehat{DMA} = 40°$ és $\widehat{ADM} = 100°$. **(1 pont)**

Az AEM háromszögből $\widehat{AME} = 20°$, tehát EM az LED és LMD szögnek is szögfelezője, ahonnan EM az LD felezőmerőlegese, ahol $\{L\} = AG \cap BE$. Ez alapján $LEH_\Delta \equiv DEH_\Delta$, innen $\widehat{EDH} = \widehat{ELH}$. **(1 pont)**

Mivel LF az AH felezőmerőlegese, következik, hogy $\widehat{LHF} = \widehat{LAF} = 10°$, tehát $\widehat{FLH} = 80°$.**(1 pont)**

Az előzőek alapján $\widehat{EDH} = 80°$, tehát $\widehat{CDH} = 100° = \widehat{BAC}$, ahonnan $AB \parallel DH$. **(1 pont)**

■

6. feladat (10 pont). Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan nem nullában végződő N teljes négyzet létezik, amely osztható a számjegyei négyzetösszegével, és amelyre N-et elosztva a számjegyei négyzetösszegével a hányados is négyzetszám!

András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Ahhoz, hogy a feltétel teljesüljön a számjegyek négyzetösszege is négyzetszám kell legyen. (**1 pont**)
Ezért szerkesszünk olyan számokat, amelyekben a számjegyek négyzetösszege egy előre rögzített négyzetszám, és amelynek az alakját valamilyen képletekkel le tudjuk írni.
A számjegyek négyzetösszegét tudjuk kontrollálni, ha olyan számokat szerkesztünk, amelyekben a számjegyeket ismerjük. Erre a legegyszerűbb megoldás, ha a binom négyzetének kifejtése alapján két számjegy közé 0-kat írunk:
$12^2 = 144 \Leftrightarrow 1002^2 = 1004004$. Az $1^2+4^2+4^2 = 33$ nem négyzetszám, ezért keresnünk kell egy olyan esetet, ami ezt a követelményt teljesíti. Egy ilyen például a

$$205^2 = (200+5)^2 = 40000 + 2000 + 25 = 42025,$$

amelyben a számjegyek négyzetösszege 49. (**4 pont**)

$$2\underbrace{00\dots0}_{k-1}5^2 = (2\cdot 10^k + 5)^2 = 4\cdot 10^{2k} + 2\cdot 10^{k+1} + 25 = 4\underbrace{00\dots0}_{k-2}2\underbrace{00\dots0}_{k-1}25,$$

tehát elégséges, ha találunk végtelen sok olyan k értéket, amelyre

$$2\underbrace{00\dots0}_{k-1}5 \equiv 0(\text{mod } 7).$$

Ez rendre ekvivalens az alábbiakkal:

$$\begin{aligned} 2\cdot 10^k + 5 &\equiv 0(\text{mod } 7) \\ 2\cdot 10^k &\equiv 2(\text{mod } 7) \\ 10^k &\equiv 1(\text{mod } 7). \end{aligned}$$

Másrészt a kis-Fermat tétel (vagy Euler-tétel, vagy egyszerűen számolás) alapján

$$10^6 \equiv 1(\text{mod } 7),$$

tehát

$$10^{6n} \equiv 1(\text{mod } 7)$$

és így a $(2\cdot 10^{6n}+5)^2, n \geq 1$ számok teljesítik a kért feltételeket. (**4 pont**)

■