LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

V. osztály - Javítókulcs

1.Feladat
Igazoljuk, hogy az alábbi számok négyzetszámok:

$A=1+3+5+...+1999$
$B=2017+2\cdot(1+2+3+...+2016)$
$C=3^{2n+3}\cdot 4^{2n+3}-2^{2n+1}\cdot 6^{2n+3}$

Megoldás:
Hivatalból 1 pont.

$A=\underbrace{1+3+5+...+1999}_{1000\ db}=\underbrace{2000+2000+...+2000}_{500\ db}=2000\cdot 500=1000^2$ ……………………………………………3p

$B=2017+2\cdot\underbrace{(1+2+3+...+2016)}_{2016\ db}=2017+2\cdot(2017\cdot 1008)=2017+2017\cdot 2016=2017\cdot(1+2016)=2017^2$ ……3p

$C=3^{2n+3}\cdot 4^{2n+3}-2^{2n+1}\cdot 6^{2n+3}=3^{2n+3}\cdot 2^{4n+6}-2^{2n+1}\cdot 2^{2n+3}\cdot 3^{2n+3}=3^{2n+3}\cdot 2^{4n+6}-2^{4n+4}\cdot 3^{2n+3}$

$=2^{4n+4}\cdot 3^{2n+3}\cdot(2^2-1)=2^{4n+4}\cdot 3^{2n+4}=(2^{2n+2}\cdot 3^{n+2})^2$ ……………………………………………………......3p

2.Feladat
Számítsd ki az alábbi összeget: $1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{2016}$.

Megoldás:
Hivatalból 1 pont.

Legyen S=$1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{2016}$ ……………………………………………………….....2p

Akkor, 3S$=3+3^2+3^3+3^4+...+3^{2016}+3^{2017}$ …………………………………………………….2p

3S - S$=(3+3^2+3^3+3^4+...+3^{2016}+3^{2017})$ - $(1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{2016})$ ……………………………2p

$2S=3^{2017}-1$ …………………………………………………………………………………….2p

Tehát, $S=\dfrac{3^{2017}-1}{2}$ ……………………………………………………………………………1p

3.Feladat
Adott két természetes szám, az egyik 420-szal nagyobb, mint a másik. Ha a két szám összegét elosztjuk a két szám különbségével, akkor a hányados 5, a maradék pedig 48. Melyik ez a két szám?

Megoldás:
Hivatalból 1 pont.

Ha az egyik szám x, akkor a másik x+420, ahol x természetes szám. ……………………………………..1p
Ekkor a két szám összege 2x+420, a különbségük pedig 420. ………………………………………1p

A maradékos osztás tételéből következik:
$2x + 420 = 5 \cdot 420 + 48$..$2p$
$2x = 4 \cdot 420 + 48$...$1p$
$x = 2 \cdot 420 + 24$...$2p$
$x = 864$...$1p$
Tehát a két szám: 864 és 864+420=1284……………………………………………………..…1p

4.Feladat

Egy száz emeletes felhőkarcolóban meghibásodott a lift, ezért felfelé mindig 13 emeletet emelkedik, lefelé pedig 10 emeletet ereszkedik, bármilyen gombot nyomunk meg. A lift és a szerelők az első emeleten vannak és el kell jussanak a századik emeletre ahhoz, hogy megjavíthassák a liftet. Megtehetik ezt az utat lifttel, vagy valamennyit gyalog is kell menniük?

Megoldás:
Hivatalból 1 pont.

Legyen n az emelkedések száma, p pedig az ereszkedések száma.
Ekkor 1+13n-10p=100, ………………………………………………………………………………1p
ahonnan 13n=10p+99, amely n=13 és p=7 esetén teljesül………………………………………..…….1p
A szerelők az első emeleten beülnek a liftbe, hétszer felmennek 13 emeletet és lejönnek 10-et, így eljutnak az $1 + 7 \cdot 3 = 22$-edik emeletre, ahonnan még 6 emelkedéssel eljutnak a századik emeletre $(22 + 6 \cdot 13 = 100)$
……………………………………………………………………………………….…6p
Tehát a szerelők eljuthatnak lifttel a 100. emeletre…………………….…………………………………...1p