

**IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.**

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - 5x - 18 = 2(x - 3)\sqrt{x - 2}$$

egyenletet!

2. feladat.

- a) Tanulmányozd az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$ függvény monotonitását!
b) Oldd meg a természetes számok halmazán a

$$3^{3^x} \cdot 2^{2^x} - 3^{2^x} \cdot 2^{3^x} = x \cdot 6^{2^x}$$

egyenletet!

3. feladat. A z_1, z_2, z_3 komplex számokra teljesülnek a következő összefüggések:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \quad \text{és} \quad z_1 + \sqrt{3}z_2 + 2z_3 = 0.$$

Igazold, hogy $z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_3 = 0$, ahol $z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.

4. feladat. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ függvény. Az f_{n+1} függvényt a következőképpen értelmezzük: $f_1 = f$ és $f_{n+1} = f \circ f_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az f_n értelmezett az $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ halmazon, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén és határozd meg az f_n függvényt!