IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Adott a $G=(-2022,2022)$ halmaz és az

$$x*y=\frac{2022^2(x+y)}{2022^2+xy},\quad \forall x,y\in G$$

művelet.

a) Igazold, hogy $(G,*)$ csoport és az $f\colon (G,*)\to(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$,

$$f(x)=\frac{2022-x}{2022+x}$$

függvény csoportizomorfizmus!

b) Számítsd ki tetszőleges $n\geq 2$ természetes szám esetén a

$$\frac{2022}{7}*\frac{2022}{17}*\cdots*\frac{2022}{2n^2-1}$$

kifejezés értékét!

2. feladat. Határozd meg az $f\colon(0,\pi)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{\sin x\cdot(3-\sin 2x)}$$

függvény primitívjeit!

3. feladat. Határozd meg azokat az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyeknek létezik $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitív függvényük úgy, hogy $[f(x)]-\{f(x)\}=F(x)$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét, $\{a\}$ pedig a törtrészét jelöli!

4. feladat. Legyen $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ egy olyan primitív függvénnyel rendelkező függvény, amelynek valamely $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ primitívjére a $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} tF\left(\frac{1}{t}\right)$ határérték véges. Jelöljük ezt a határértéket L-el. Bizonyítsd be, hogy a $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x^2}\right), & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$$

függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha $c=L$.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.