VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

VIII. osztály

1. feladat. a) Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\{x+3\}+2[x+3]+\sqrt{x^2+3(2x+3)}=4$$

egyenletet, ahol $\{a\}$ és $[a]$ rendre az a valós szám tört-, illetve egészrészét jelöli!

b) Legyen $a,b,c>0$ úgy, hogy $abc=2025$. Igazold, hogy

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{45}.$$

2. feladat. Adott egy 45×45-ös négyzetrács, amelyben a természetes számok 1-től 2025-ig sorrendben követik egymást, a mellékelt ábra szerint.

1	2	3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	43	44	45
46	47	48	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	88	89	90
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1981	1982	1983	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	2023	2024	2025

A négyzetrács 9 négyzetét lefedjük egy 3×3-as négyzetlappal. Számítsd ki a valószínűségét, hogy a lefedett kilenc szám összege osztható legyen 81-gyel!

3. feladat. A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúlában V a gúla csúcsa, E a VB, F pedig a VD él felezőpontja, és $VA=AB=a$.

a) Határozd meg az AEF és VBD síkok által alkotott szög szinuszát!

b) Számítsd ki az AE és CF egyenesek által alkotott szög szinuszát!

4. feladat. Az $ABCD$ négyzet AB, BC és CD oldalainak belsejében felvesszük az M, N, illetve P pontokat úgy, hogy $AM=BN=CP$. A Q,R,S és T pontokra igaz, hogy $MC\cap AN=\{Q\}$, $DM\cap AP=\{R\}$, $MN\cap AD=\{S\}$ és $NR\cap DQ=\{T\}$.

a) Igazold, hogy R a DAN háromszög magasságpontja!

b) Bizonyítsd be, hogy $ST\parallel AR$!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.