LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

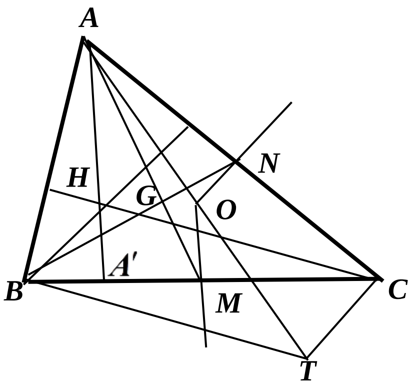
MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
MEGYEI FORDULÓ-MAROS MEGYE
2017. DECEMBER 09.
IX. OSZTÁLY

1.Feladat

Az ABC tetszőleges háromszög BC oldalának a felezőpontja M, legyen O a háromszög köré írt kör középpontja, H a háromszög ortocentruma és G a háromszög súlypontja.
Igazoljuk, hogy:

a) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$;
b) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=6\cdot\overrightarrow{OG}$;
c) az O, G, H pontok kollineárisak.



Megoldás:**Hivatalból 1p.**

a) Legyen T az ABC tetszőleges háromszög köré írt egy olyan pontja, amelyre AT átmérő.
Az ABT háromszögben $m(B\measuredangle)=90^0$, tehát
$BT\perp AB, CH\perp AB\Rightarrow BT\parallel HC$.(1)
Hasonlóan az ACT háromszögben $m(C\measuredangle)=90^0$, tehát
$CT\perp AC, BH\perp AC\Rightarrow CT\parallel BH$.(2)
Az (1) és (2) kapjuk, hogy $BTCH$ paralelogramma, M felezőpontja a BC átlónak tehát M felezőpontja a HT átlónak is . Az ATH háromszögben OM középvonal tehát $OM\parallel AH$ és , ahonnan kapjuk, hogy $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$. **(3p)**

Megjegyzés: A feladat megoldható az $ABH_\Delta\sim MNO_\Delta$ hasonlóság felhasználásával is.

b) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{OP}$, ahol P az AB oldal felezőpontja.
De $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ és $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, tehát
$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=6\overrightarrow{OG}$ (A Leibniz képlet szerint) **(3p).**

c) A Leibniz képlet szerint $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ a sík bármely O pontja esetében.
Legyen $H\to O\Rightarrow\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HG}$, felhasználva az előző pontban igazolt egyenlőséget kapjuk, hogy $3\overrightarrow{GH}=6\overrightarrow{OG}\Rightarrow\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$, tehát az az O, G, H pontok kollineárisak. **(3p)**

2.Feladat

a) Adottak $a,b,c\in(0,\infty)$ úgy, hogy $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$, igazoljuk, hogy $\frac{ab}{ab^2+1}+\frac{bc}{bc^2+1}+\frac{ca}{ca^2+1}\le\frac{3}{2}$.
b) Határozzuk meg, az $a,b,c\in(0,\infty)$ úgy, hogy $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$ és
$\frac{ab}{ab^2+1}+\frac{bc}{bc^2+1}+\frac{ca}{ca^2+1}=\frac{3}{2}$

Megoldás: Hivatalból 1p.

Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti összefüggést kapjuk, hogy:
$ab^2+1\ge 2\sqrt{ab^2}\Rightarrow ab^2+1\ge 2b\sqrt{a}$,**(2p)** ahonnan $\frac{1}{ab^2+1}\le\frac{1}{2b\sqrt{a}}\Rightarrow\frac{ab}{ab^2+1}\le\frac{ab}{2b\sqrt{a}}\Rightarrow\frac{ab}{ab^2+1}\le\frac{\sqrt{a}}{2}$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $\frac{bc}{bc^2+1} \le \frac{\sqrt{b}}{2}, \frac{ca}{ca^2+1} \le \frac{\sqrt{c}}{2}$, összeadva a kapott egyenlőtlenségeket következik, hogy $\frac{ab}{ab^2+1}+\frac{bc}{bc^2+1}+\frac{ca}{ca^2+1} \le \frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{c}}{2}=\frac{3}{2}$.**(4p)**

b) $\frac{ab}{ab^2+1}+\frac{bc}{bc^2+1}+\frac{ca}{ca^2+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow ab^2+1=2b\sqrt{a}, bc^2+1=2c\sqrt{b}, ca^2+1=2a\sqrt{c}$ vagyis a számtani közép egyenlő a mértani középpel, ahonan kapjuk, hogy a számok egyenlőek, tehát

$ab^2=1, bc^2=1, ca^2=1 \Rightarrow (abc)^3=1 \Rightarrow abc=1$.

Beszorozva az utolsó egyenlőséget *b*-vel és felhasználva, hogy $ab^2=1$ kapjuk, hogy $c=b$, hasonlóan $a=b$, tehát $a=b=c=1$.**(3p)**

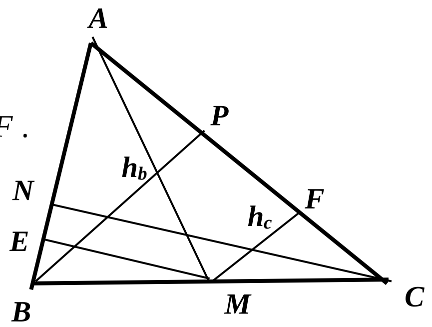
3.Feladat

Adott az *ABC* hegyesszögű háromszög és $M \in [BC]$ egy változó pont. Legyenek *E* és *F*, a *M*-ből az *AB*, illetve *AC*-re húzott merőlegesek talppontja.

a) Mutassuk ki, hogy $\frac{4T^2}{b^2+c^2} \le ME^2+MF^2$, ahol *T* az az *ABC* háromszög területe.

b) Igazoljuk, hogy $ME^2+MF^2 \le \max\{h_b^2, h_c^2\}$, ahol h_b és h_c pedig a *B*-ből, illetve *C*-ből húzott magasságokat jelöli.

Megoldás: Hivatalból 1p.



$T=T_{ABM}+T_{ACM}=\frac{c\cdot ME}{2}+\frac{b\cdot MF}{2} \Rightarrow$ **(2p)**

$2T=c\cdot ME+b\cdot MF \Rightarrow 4T^2=c^2\cdot ME^2+b^2\cdot MF^2+2bc\cdot ME\cdot MF$.

Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti összefüggést kapjuk, hogy

$(b\cdot ME)\cdot(c\cdot MF) \le \frac{b^2\cdot ME^2+c^2\cdot MF^2}{2} \Rightarrow$.

$2bc\cdot ME\cdot MF \le b^2\cdot ME^2+c^2\cdot MF^2$.**(2p)**

Behelyettesítve az előző egyenlőségbe, kapjuk, hogy

$4T^2 \le c^2\cdot(ME^2+MF^2)+b^2\cdot(ME^2+MF^2) \Rightarrow 4T^2 \le (b^2+c^2)\cdot(ME^2+MF^2) \Rightarrow$

$\frac{4T^2}{b^2+c^2} \le ME^2+MF^2$.**(2p)**

A *BNC* háromszögben $ME \parallel NC \Rightarrow \frac{ME}{h_c}=\frac{MB}{a} \Rightarrow ME=\frac{MB\cdot h_c}{a}$.**(1p)**

Hasonlóan a *BPC* háromszögben $MF \parallel BP \Rightarrow \frac{MF}{h_b}=\frac{MC}{a} \Rightarrow MF=\frac{MC\cdot h_b}{a}$.**(1p)**

$ME^2+MF^2=\frac{MB^2\cdot h_c^2}{a^2}+\frac{MC^2\cdot h_b^2}{a^2} \le \max\{h_b^2, h_c^2\}\frac{MC^2+MB^2}{a^2}$, de

$\frac{MC^2+MB^2}{a^2} \le \frac{MC^2+2MB\cdot MC+MB^2}{a^2}=\frac{(MB+MC)^2}{a^2}=1$, ahonnan kapjuk, hogy

$ME^2+MF^2 \le \max\{h_b^2, h_c^2\}$.**(1p)**

LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

4.Feladat

Egy matematikaverseny megyei szakaszára 264 tanuló nevezett be. Az iskolák negyede 8 tanulóval nevezett be, a többi iskola mindegyike 6 vagy 7 tanulóval jelentkezett.
Hány iskolából jelenkeztek iskolánként 6, 7 vagy 8 tanulóval?

Megoldás: Hivatalból 1p.

Jelöljük *a*,*b*, *c*-vel azon iskolák számát, amelyek rendre 6, 7 vagy 8 tanulóval jelentkeztek a versenyre.

A feltétel szerint $c=\dfrac{a+b+c}{4}\Rightarrow 3c=a+b$.**(3p)**

Mivel összesen 264 tanuló nevezett be felírható, hogy a $6a+7b+8c=264\Rightarrow 6a+7b+8\dfrac{a+b}{3}=264$,

ahonnan kapjuk, hogy $26a+29b=792$.**(3p)**

$a=30+\dfrac{12}{26}-b-\dfrac{3b}{26}\Rightarrow a=30-b+3\cdot\dfrac{4-b}{26}$, tehát $4-b=26k\Rightarrow b=4-26k, k\in Z\Rightarrow k=0$.

Tehát $a=26, b=4, c=10$.**(3p)**

Megjegyzések:
- Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
- Munkaidő 3 óra.
- Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.
- Lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 plusz-pont jár.