IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Az ABC szabályos háromszög belsejében adott egy P pont, melyre $PA = \sqrt{3}$, $PB = 2$ és $PC = 1$. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát!

2. feladat. Adott az ABC háromszög, valamint az $M \in (AB)$ és az $N \in (AC)$ pontok úgy, hogy $MN \nparallel BC$. Legyen $MN \cap BC = \{P\}$. Igazold, hogy az ABC, BMP, AMN és NCP háromszögek köré írt körök egy ponton mennek át!

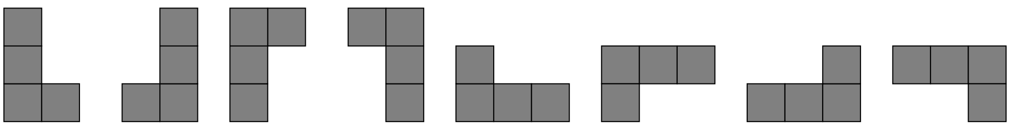
3. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^6 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^6 = 65$ egyenletet!

4. feladat. Legyenek $a, b, c \in (0, \infty)$ valós számok úgy, hogy $abc = 1$. Igazold a

$$9a^3 + 9b^3 + 9c^3 \geq 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 4a - 4b - 4c + 12$$

egyenlőtlenséget!

5. feladat. Egy 8×8-as sakktáblán L alakú résznek (tetraminónak) nevezzük az alábbi ábrán látható alakzatokat:



a) Jelölj meg a sakktáblán 21 mezőt úgy, hogy a sakktábla minden L alakú részén legyen legalább egy megjelölt mező!

b) Bizonyítsd be, hogy ha csak 20 mezőt jelölünk meg a sakktáblán, akkor ez a tábla biztosan tartalmaz egy olyan L alakú részt, amelyen nincs egyetlen megjelölt mező sem!

6. feladat. A sík koordináta-rendszerének rácspontjaiból rácspontjaiba lépegetünk. Az $O(a_0, b_0)$ pontból indulunk, ahol $a_0 = b_0 = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az n-edik lépés azt jelenti, hogy az $(a_{n-1}, b_{n-1}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontról átlépünk egy tőle pontosan 13 egység távolságra lévő $(a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontra. Tudjuk, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok monoton növekvők. Határozd meg, hogy legkevesebb hány lépéssel juthatunk el a $(2022, 2022)$ pontba!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.