LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

MEGYEI FORDULÓ-MAROS MEGYE

2017. DECEMBER 9.

XI. OSZTÁLY

1.Feladat

Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 2017 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol $x, y, z \in R$.
Oldjuk meg az $A^{2018} \cdot B = C$ egyenletet!

2.Feladat

Adott az $(x_n)_{n>0}$ valós számsorozat, melynek általános tagja $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Tudva, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi^2}{6}$, számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $l_1 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right)$

b) $l_2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{31}{4^2 \cdot 5^2} + \cdots + \frac{18n^2 - 18n + 5}{(3n-2)^2 \cdot (3n-1)^2} \right)$

3.Feladat

Az ABC háromszögben az AD szögfelező és a BE oldalfelező a P pontban metszi egymást. $(D \in BC, E \in AC)$. Az AB és CP egyenesek metszéspontja az F pont. A B ponton át a CF egyeneshez húzott párhuzamos a DF egyenest az M pontban metszi. Igazold, hogy $DM = BF$.

4.Feladat

Egy sportversenyen 15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött. A győzelemért 3, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pont járt. A verseny végén minden csapatnak más volt a pontszáma, az utolsó 21 pontot szerzett. Bizonyítsuk be, hogy a legtöbb pontot gyűjtött csapat legalább egyszer döntetlenül mérkőzött!

Megjegyzések:
- Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!
- Munkaidő 3 óra.
- Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér.
- Lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 plusz-pont jár.

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
MEGYEI FORDULÓ-MAROS MEGYE
2017. DECEMBER 9.
XI. OSZTÁLY

1. Feladat

Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 2017 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol $x, y, z \in R$.

Oldjuk meg az $A^{2018} \cdot B = C$ egyenletet!

Megoldás:

Matematikai indukcióval igazolható, hogy: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 3n-1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$……………………………….………4p

Az $\begin{pmatrix} 1 & 2018 & 6053 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2017 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ egyenletből kapjuk, hogy:

$x + 2018y + 6053z = 2017,\ y + 3z = 1$ és $z \in R$ ……………………………………….………2p

Végül: $x = z - 1,\ y = 1 - 3z,\ z \in R$

Tehát: $B = \begin{pmatrix} z-1 \\ 1-3z \\ z \end{pmatrix}$, ahol $z \in R$ ....……………………………………………..………………3p

Hivatalból…………………………………………………………………………………………1p

2. Feladat

Adott az $(x_n)_{n>0}$ valós számsorozat, melynek általános tagja $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Tudva, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi^2}{6}$, számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right)$

b) $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{31}{4^2 \cdot 5^2} + \cdots + \frac{18n^2 - 18n + 5}{(3n-2)^2 \cdot (3n-1)^2} \right)$

Megoldás:

a) Mivel: $x_{2n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} =$

LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$……………..……2p

Kapjuk, hogy: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} = x_{2n} - \frac{1}{4} \cdot x_n$ ……………………1p

Tehát: $l_1 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$ …………………………………………………………1p

b) Észrevesszük, hogy: $\frac{18n^2-18n+5}{(3n-2)^2 \cdot (3n-1)^2} = \frac{1}{(3n-2)^2} + \frac{1}{(3n-1)^2}$

Mivel: $x_{3n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)^2} + \frac{1}{(3n-1)^2} + \frac{1}{(3n)^2} =$

$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(3k-2)^2} + \frac{1}{(3k-1)^2}\right] + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$……………………3p

Kapjuk, hogy: $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(3k-2)^2} + \frac{1}{(3k-1)^2}\right] = x_{3n} - \frac{1}{9} \cdot x_n$………………………1p

Tehát: $l_2 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{54} = \frac{4\pi^2}{27}$…………………………………………….…….1p

Hivatalból…………………………………………..……………………1p

3. Feladat

Az ABC háromszögben az AD szögfelező és a BE oldalfelező a P pontban metszi egymást. $(D \in BC, E \in AC)$. Az AB és CP egyenesek metszéspontja az F pont. A B ponton át a CF egyeneshez húzott párhuzamos a DF egyenest az M pontban metszi. Igazold, hogy $DM = BF$.

Megoldás:

Ceva tételéből kapjuk, hogy $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{BF}{FA} = \frac{BD}{DC}$.

Thales fordított tételéből következik, hogy: $DF \parallel AC$………………………….…..…3p

Mivel $BFD\Delta \sim BAC\Delta \Rightarrow \frac{BF}{BA} = \frac{FD}{AC} \Rightarrow BF = \frac{AB}{AC} \cdot FD$ ………………………………….2p

Mivel $BDM\Delta \sim CDF\Delta \Rightarrow \frac{DM}{FD} = \frac{BD}{DC}$ ………………………………………….……..……1p

De a szögfelezők tételéből kapjuk, hogy $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow DM = \frac{AB}{AC} \cdot FD$ ………………...2p

Következik, hogy $DM = BF$ ……………………………………………...………..1p

Hivatalból……………………………………………………...……………1p

4. Feladat

Egy sportversenyen 15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött. A győzelemért 3, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pont járt. A verseny végén minden csapatnak más volt a pontszáma, az utolsó 21 pontot szerzett. Bizonyítsuk be, hogy a legtöbb pontot gyűjtött csapat legalább egyszer döntetlenül mérkőzött!

LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS" ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREȘ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail: bolyai@bolyai.ro

Megoldás:

A verseny folyamán a csapatok összesen $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ mérkozést játszottak. ……………..…..2 p

Mivel egy-egy mérkőzésen pontosan 4 pontot osztottak szét a csapatok között, ezért az összes pontok száma 105 · 4 = 420. ……………………………………………………………………..…1 p

Az utolsó helyen végzett csapatnak 21 pontja volt, az előtte végzők rendre legalább 1-1 ponttal többet kaptak, így a 15 csapatnak legalább 21+22+23+. . .+35 = 420 pontja volt. Ez éppen megegyezik a kiosztott pontok számával, így a győztes csapatnak éppen 35 pontja volt…………..…..… 3 p

Tegyük fel, hogy a 35 pontot csak győzelmekből és vereségekből érték el, és a győzelmek számát jelöljük G-vel, ekkor 14 − G a vereségek száma: 3 · G + 14 − G = 35.

Mivel a bal oldalon álló kifejezés páros, a jobb oldal páratlan, így nincs az egyenletnek egész megoldása. ……………………………………………………………………………………………..…..2 p

Tehát a legtöbb pontot szerző csapat biztosan legalább egyszer döntetlenül mérkőzött. …1 p

Hivatalból……………………………………………...……………………………….1p