VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

X. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Oldd meg az $x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz = 29$ egyenletet a nullától különböző természetes számok halmazán! *(***)*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Felhasználva az $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ összefüggést, szorzattá alakítjuk az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned} 29 &= x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz \\ &= x^3 + (2y)^3 + (3z)^3 - 3(x \cdot 2y \cdot 3z) \\ &= (x + 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 3xz - 6yz). \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, $x + 2y + 3z \geq 6$ és 29 prímszám, ezért

$$x + 2y + 3z = 29 \quad \text{és} \quad x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 3xz - 6yz = 1. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Másrészt,

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 3xz - 6yz = \frac{1}{2}\left[(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2\right],$$

tehát $(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2 = 2$. **(1 pont)**
Ha az $x, 2y, 3z$ számok páronként különböznek egymástól, akkor

$$(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2 \geq 3,$$

ami ellentmondás.
Így az $x, 2y, 3z$ számok közül legalább kettő egyenlő. **(1 pont)**
Vizsgáljuk az

$$(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2 = 2$$

egyenletet aszerint, hogy melyik két kifejezés egyenlő.

I. eset Ha $x = 2y$, akkor behelyettesítve az $x - 3z$ kifejezésbe kapjuk, hogy $x - 3z = 2y - 3z$. A tárgyalt egyenletből $(2y - 3z)^2 = 1$.

Így $2y - 3z = 1$ vagy $2y - 3z = -1$.

- Ha $2y - 3z = 1$, akkor $3z = 2y - 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 2y + 2y + 2y - 1 = 29$, ahonnan $6y = 30$, vagyis $y = 5$, és így $x = 10$ és $z = 3$.
- Ha $2y - 3z = -1$, akkor $3z = 2y + 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 2y + 2y + 2y + 1 = 29$, ahonnan $6y = 28$, vagyis nincs megoldás a természetes számok halmazán. **(1 pont)**

II. eset Ha $x = 3z$, akkor behelyettesítve az $x - 2y$ kifejezésbe kapjuk, hogy $x - 2y = 3z - 2y$. A tárgyalt egyenletből $(2y - 3z)^2 = 1$.

Így $2y - 3z = 1$, vagy $2y - 3z = -1$.

- Ha $2y - 3z = 1$, akkor $2y = 3z + 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 3z + 3z + 1 + 3z = 29$, ahonnan $9z = 28$, vagyis nincs megoldás a természetes számok halmazán.
- Ha $2y - 3z = -1$, akkor $2y = 3z - 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 3z + 3z - 1 + 3z = 29$, ahonnan $9z = 30$, így nincs megoldás a természetes számok halmazán. (**1 pont**)

III. eset Ha $2y = 3z$, akkor behelyettesítve az $x - 2y$ kifejezésbe kapjuk, hogy $x - 2y = x - 3z$. A tárgyalt egyenletből $(x - 3z)^2 = 1$.

Így $x - 3z = 1$ vagy $x - 3z = -1$.

- Ha $x - 3z = 1$, akkor $x = 3z + 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 3z + 1 + 3z + 3z = 29$, ahonnan $9z = 28$, vagyis itt sincs megoldás a természetes számok halmazán.
- Ha $x - 3z = -1$, akkor $x = 3z - 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 3z - 1 + 3z + 3z = 29$, ahonnan $9z = 30$, vagyis nincs megoldás a természetes számok halmazán. (**1 pont**)

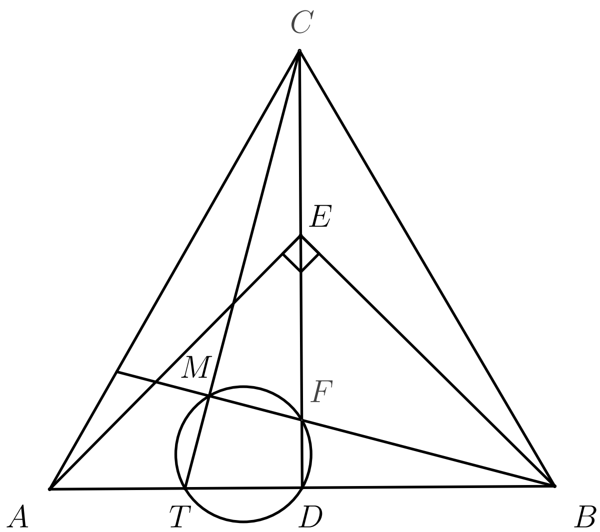
Az esettárgyalásból következik, hogy az egyetlen megoldás $x = 10, y = 5$ és $z = 3$. (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszögben D a C-ből kiinduló magasság talppontja, az E pont a CD szakasz egy pontja úgy, hogy $\widehat{AEB}$ derékszög. Legyen F a C pontnak az E pont szerinti szimmetrikusa. Az $\widehat{ACD}$ szögfelezője az AB oldalt a T pontban, a BF egyenest az M pontban metszi. Igazold, hogy $MTDF$ húrnégyszög!

Rákóczi Erik, Kolozsvár

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



Legyen $DB = 1$, ekkor $BC = 2$ és $ED = \frac{AB}{2} = 1$. (**1 pont**)
Mivel az ABC háromszög egyenlő oldalú, ezért $CD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, ahonnan $EC = CD - ED = \sqrt{3} - 1$, és $FD = CD - 2 \cdot EC = \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$. (**2 pont**)

Ekkor $\operatorname{tg} \widehat{DBF} = \dfrac{FD}{BD} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}$, ahonnan $\widehat{DBF} = 15°$. (**3 pont**)

De $\widehat{TCD} = \dfrac{\widehat{ACD}}{2} = 15°$, és $CD \perp BD$, így $\widehat{TCD}$ és $\widehat{FBD}$ merőleges szárú szögek, ezért $CM \perp BM$. Így $\widehat{TMF} + \widehat{TDF} = 180°$ vagyis $MTDF$ körbeírható. (**3 pont**)

■

Megjegyzés. Az $\widehat{FBD} = 15°$ igazolható a $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$ összefüggés nélkül is. Valóban, Az EBF háromszögben kiszámíthatjuk szinusztétellel az $x = \angle EBF$ szöget. Mivel az FDB derékszögű háromszög, ezért

$$FB^2 = FD^2 + DB^2 = (2 - \sqrt{3})^2 + 1,$$

tehát

$$FB = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}.$$

Az EBF háromszögben a szinusztételt felírva:

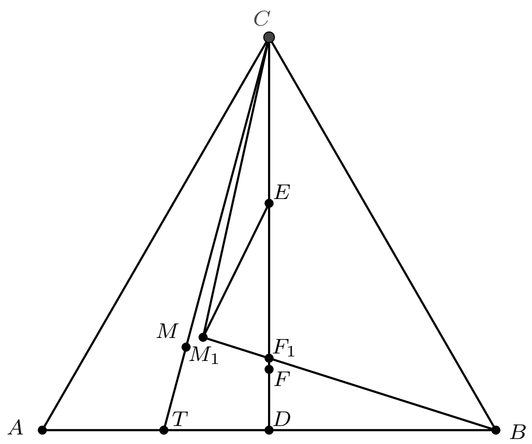
$$\frac{\sin 45°}{\sin x} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + 1}}{\sqrt{3} - 1}.$$

Ebből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2 x} = \frac{1 + (2 - \sqrt{3})^2}{4 - 2\sqrt{3}} = 2,$$

tehát $\frac{1}{4} = \sin^2 x$. Mivel $90° > x > 0$, ezért $\sin x$ pozitív, így $\sin x = \frac{1}{2}$, amelyből $x = 30°$.

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az AEB_Δ egy félnégyzet. Megszerkesztjük a BC oldalra is befele a CM_1B félnégyzetet és legyen $BM_1 \cap CD = \{F_1\}$. Ekkor $\widehat{M_1CE} = 45° - \widehat{DCB} = 45° - 30° = 15°$. (**1 pont**)



Viszont szimmetriai okok miatt $M_1E \parallel AC$, ahonnan $\widehat{CM_1E} = \widehat{ACM} = \widehat{M_1CE} = 15°$ és CEM_1 egyenlő szárú háromszög, így $CE = EM_1$. (**2 pont**)
Az EM_1F_1 háromszögben $\widehat{EM_1F_1} = 90° - 15° = 75°$ és $\widehat{M_1EF_1} = 30°$ (mivel külső szöge az M_1EC háromszögnek), tehát $\widehat{EF_1M_1} = 75°$, vagyis $EM_1 = EF_1$. (**2 pont**)
Tehát $CE = EF_1$, ami azt jelenti, hogy a szerkesztés után felvett F_1 pont egybeesik a feladatban szereplő F ponttal. (**1 pont**)
Másrészt $\widehat{M_1CE} = 15°$, de $\widehat{DCA} = 30°$ vagyis M_1 pont rajta van a $\widehat{DCA}$ szögfelezőjén. Ekkor a BF_1 egyenes a $\widehat{DCA}$ szögfelezőjét metszi az M_1 pontban, de BF_1 egyenes azonos a BF egyenessel, vagyis a szerkesztett M_1 pont egybeesik a feladatban megadott M ponttal. (**2 pont**)
Ekkor $\widehat{BM_1C} = \widehat{BMC} = \widehat{BMT} = 90°$, illetve $\widehat{CDA} = 90°$, tehát az $MFDT$ körbeírható. (**1 pont**)
■

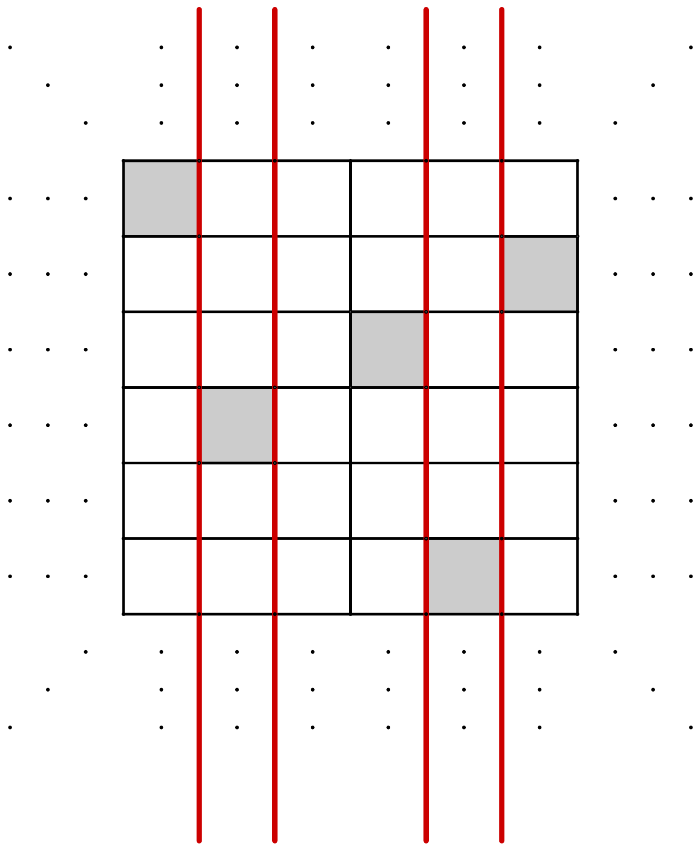
3. feladat (10 pont). Adott egy 2025×2025-ös négyzetrács, melyben minden sorban és minden oszlopban egyetlen mező van feketére színezve, minden más mező fehér színű. Egy lépésben kiválasztunk egy sort vagy egy oszlopot és az ebben található mezők színét megváltoztatjuk. Elérhető-e, hogy valahány lépés után két sor vagy két oszlop színezése azonos legyen?

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Hogyha van két azonos színezésű oszlop, akkor sorok átszínezésével elérhető, hogy a két oszlop csak fekete (vagy csak fehér) legyen. Tehát a feladat ekvivalens a következővel: elérhető-e, hogy valahány lépés után két sor teljesen fekete legyen? **(3 pont)**

Válasszunk ki két tetszőleges oszlopot. Mivel ezek magasabbak, mint két egységnégyzet, ezér biztosan lesz két olyan sor, amely metszete a kiválasztott oszlopokkal 3 fehér és egy fekete mezőt tartalmaz. **(2 pont)**



Ahhoz, hogy elérjük a két teljesen egyszínű oszlopot, ezt a négy mezőt is teljesen feketére kellene átszínezzük. Ha egy sort vagy oszlopot átszínezünk, a fekete mezők száma vagy változatlan marad, vagy pedig kettővel nő. Tehát ebben a négy mezőben a fekete mezők számának paritása invariáns. Kezdetben egy fekete mező van, így sosem tudjuk elérni a 4 fekete mezőt.

Ha a két kiválasztott oszlopnak van ilyen része, ami nem színezhető teljesen feketére, akkor a két oszlopot sem lehet teljesen feketére színezni. Ez azt jelenti, hogy nem lehet semmilyen más azonos színezést sem elérni a két oszlopban.

Mivel a kiválasztott oszlopok tetszőlegesek voltak, ezért a bizonyítás teljes. **(4 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Jelöljük I-vel az ABC háromszögbe írt kör középpontját.

a) Igazold, hogy ha az AI egyenes a BC oldalt a D pontban metszi, akkor $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{T_{ABI} + T_{ACI}}{T_{ABC}}$.

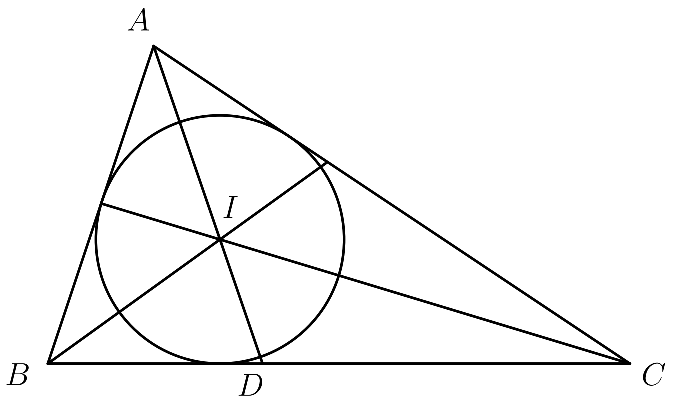
b) Igazold, hogy

$$\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}}\leq 2,$$

ahol a, b, c a háromszög oldalai és p a háromszög félkerülete!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Legyen h a B pontnak, h_1 pedig a C pontnak az AD egyenestől való távolsága. Ekkor

$$\frac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}=\frac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABD}+T_{ADC}}=\frac{\frac{h\cdot AI}{2}+\frac{h_1\cdot AI}{2}}{\frac{h\cdot AD}{2}+\frac{h_1\cdot AD}{2}}=\frac{(h+h_1)\cdot AI}{(h+h_1)\cdot AD}=\frac{AI}{AD}\,.$$ **(3 pont)**

b)

$$\begin{aligned}\frac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}&=\frac{AB\cdot AI\cdot\sin\frac{A}{2}+AC\cdot AI\cdot\sin\frac{A}{2}}{AB\cdot AC\cdot\sin A}\\&=\frac{(AB+AC)\cdot AI\cdot\sin\frac{A}{2}}{AB\cdot AC\cdot 2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}\\&=\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\right)\cdot\frac{AI}{2\cdot\cos\frac{A}{2}}\\&=\frac{AI\cdot\sqrt{bc}}{\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{p(p-a)}}\,.\end{aligned}$$

Hasonlóan következik, hogy

$$\frac{T_{ABI}+T_{BCI}}{T_{ABC}}=\frac{BI\cdot\sqrt{ac}}{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{p(p-b)}}$$

és

$$\frac{T_{BCI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}=\frac{CI\cdot\sqrt{ab}}{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\sqrt{p(p-c)}}\,.$$ **(3 pont)**

Vegyük észre, hogy

$$\frac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}+\frac{T_{ABI}+T_{BCI}}{T_{ABC}}+\frac{T_{BCI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}=\frac{2T_{ABC}}{T_{ABC}}=2.$$ **(1 pont)**

Felhasználva a mértani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{AI\cdot\sqrt{bc}}{\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{p(p-a)}} + \frac{BI\cdot\sqrt{ac}}{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{p(p-b)}} + \frac{CI\cdot\sqrt{ab}}{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\sqrt{p(p-c)}}\\
&\geq \frac{AI\cdot\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)}} + \frac{BI\cdot\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}\cdot\sqrt{p(p-b)}} + \frac{CI\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{p(p-c)}}\\
&= \frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}} + \frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}} + \frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}}\,. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A megoldás és pontozás menete az első megoldással megegyező.

b) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}} + \frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}} + \frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}} &= \frac{\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}}{\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{A}{2}} + \frac{\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}}{\sqrt{ac}\cdot\cos\frac{B}{2}} + \frac{\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}}{\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{C}{2}}\\
&= \frac{2r}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sqrt{bc}} + \frac{2r}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sqrt{ac}} + \frac{2r}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sqrt{ab}}\\
&= \frac{2r}{\sqrt{bc}\cdot\sin A} + \frac{2r}{\sqrt{ac}\cdot\sin B} + \frac{2r}{\sqrt{ab}\cdot\sin C} \qquad \textbf{(3 pont)}\\
&= 2r\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}}\cdot\frac{a}{\sin a} + \frac{1}{b\sqrt{ac}}\cdot\frac{b}{\sin B} + \frac{1}{c\sqrt{ab}}\cdot\frac{c}{\sin C}\right)\\
&= 2r\left(\frac{2R}{a\sqrt{bc}} + \frac{2R}{b\sqrt{ac}} + \frac{2R}{c\sqrt{ab}}\right)\\
&= 4Rr\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}} + \frac{1}{b\sqrt{ac}} + \frac{1}{c\sqrt{ab}}\right)\\
&= 4\cdot\frac{abc}{4T}\cdot\frac{T}{p}\cdot\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}} + \frac{1}{b\sqrt{ac}} + \frac{1}{c\sqrt{ab}}\right)\\
&= \frac{1}{p}\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\right) \qquad \textbf{(1 pont)}\\
&\leq \frac{2}{a+b+c}\cdot\left(\frac{b+c}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{a+b}{2}\right)\\
&= \frac{2}{a+b+c}\cdot(a+b+c) = 2. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c$. ■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A megoldás és pontozás menete az első megoldással megegyező.

b) A szögfelezőtételt használva írhatjuk, hogy $BD = \frac{ac}{b+c}$ és

$$\frac{AI}{ID} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Innen

$$\frac{AI}{AD} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Fel fogjuk használni, hogy

$$AD = \frac{2\sqrt{bc \cdot p(p-a)}}{b+c}.$$

Ekkor

$$AI = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot AD = \frac{2\sqrt{bc \cdot p(p-a)}}{a+b+c}.$$ (**3 pont**)

Így

$$\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}} = \frac{2\sqrt{bc}}{a+b+c}.$$

Hasonlóan

$$\frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}} = \frac{2\sqrt{ca}}{a+b+c},$$

$$\frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b+c}.$$ (**1 pont**)

Ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}} + \frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}} + \frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}} &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{bc}}{a+b+c} + \frac{\sqrt{ca}}{a+b+c} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b+c} \right) \\
&= \frac{2}{a+b+c} \cdot \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right) \\
&\leq \frac{2}{a+b+c} \cdot \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} \right) \\
&= \frac{2}{a+b+c} \cdot \frac{2(a+b+c)}{2} \\
&= 2.
\end{aligned}$$ (**2 pont**)

■

5. feladat (10 pont). a) Bizonyítsd be, hogy minden $k \geq 2$ természetes szám esetén létezik olyan $2k$ számjegyű teljes négyzet, amely az első k és az utolsó k számjegyéből alkotott két szám összegének a négyzete!

b) Igazold, hogy az előbbi feltételt teljesítő számok közt végtelen sok k esetén találunk olyat is, amely osztható a számjegyei összegével! Például $k = 2$ esetén egy ilyen szám a 2025.

András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Ha az N természetes szám teljesíti a feltételt, akkor felírható $N = x \cdot 10^k + y$ alakban, ahol x az első, y pedig az utolsó k számjegyéből alkotott szám. Így x pontosan k számjegyű és y legfeljebb k számjegyű. A feltételek alapján az

$$x \cdot 10^k + y = (x+y)^2$$

egyenletet megoldásait keressük.

(1 pont)

Átrendezve az

$$x^2 + (2y - 10^k)x + y^2 - y = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek diszkriminánsa

$$\Delta = 10^{2k} - 4y \cdot 10^k + 4y,$$

(1 pont)

amely $y = 1$ esetén teljes négyzet. **(1 pont)**

Ebben az esetben $x = 10^k - 2$ és az

$$N = \underbrace{9\ldots9}_{k}{}^2 = \underbrace{99\ldots9}_{k-1}8\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1 = (\underbrace{99\ldots9}_{k-1}8 + 1)^2$$

számokhoz jutunk. **(1 pont)**

Megjegyzés. Az $y = \frac{10^k}{4}$ választás is jó minden páros k esetén. Ha $k = 2$, akkor $2025 = 45^2$ és a $3025 = 55^2$.

b) Az N számjegyeinek az összege $9k$, tehát elégséges lenne végtelen sok olyan k számot találni, amelyre

$$(10^k - 1) \,\vdots\, 9k.$$

Ez $k = 1$, $k = 3$ és $k = 9$ esetén teljesül, ezért a $k = 3^v$ alakú számokra igazoljuk, hogy általában is teljesül. Ehhez a matematikai indukció módszerét használjuk és a

$$P(v): \quad (10^{3^v} - 1) \,\vdots\, 3^{v+2}$$

állítást igazoljuk. A $v \in \{0, 1\}$ esetben igaz, mert $9 \,\vdots\, 9$ és $999 \,\vdots\, 27$. Ha igaz valamilyen v-re, akkor

$$10^{3^{v+1}} - 1 = (10^{3^v})^3 - 1 = (10^{3^v} - 1)(10^{2\cdot 3^v} + 10^{3^v} + 1),$$

tehát az indukciós feltétel alapján az utóbbi felbontás első zárójele osztható 3^{v+2}-nel, míg a második zárójelben egy 3-mal osztható szám található (a nemnulla számjegyei 1-esek és 3 van belőlük), tehát a szorzat osztható 3^{v+3}-nal. Ezzel igazoltuk, hogy az $N = \underbrace{99\ldots9}_{3^v-1}8\underbrace{00\ldots0}_{3^v-1}1$ számok teljesítik a feltételeket. **(5 pont)**

■

6. feladat (10 pont). a) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges másodfokú függvény. Ha az $f(x), f(x+1), f(x+2)$ behelyettesítési értékek egészek valamilyen egész x értékre, akkor igazold, hogy $f(x+n)$ szintén egész, bármilyen n egész szám esetén!

b) Jelöljük $\mathcal{M}$-mel az origó középponttú, 7 egység sugarú körlap belsejében levő rácspontok halmazát (az $A(x, y)$ pontot rácspontnak nevezzük, ha $x, y \in \mathbb{Z}$). Az M halmaz elemei közül legtöbb hány lehet egy másodfokú függvény grafikus képén?

András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - ax^2 - bx - c \\ &= 2ax + a + b \ \in \mathbb{Z}\,, \\ f(x+2) - f(x+1) &= a(x+2)^2 + b(x+2) + c - a(x+1)^2 - b(x+1) - c \\ &= ax^2 + 4ax + 4a + bx + 2b + c - ax^2 - 2ax - a - bx - b - c \\ &= 2ax + 3a + b \ \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Ezeket a kifejezéseket kivonva kapjuk, hogy

$$f(x+2) + f(x) - 2f(x+1) = 2a \implies 2a \ \in \mathbb{Z}\,.$$

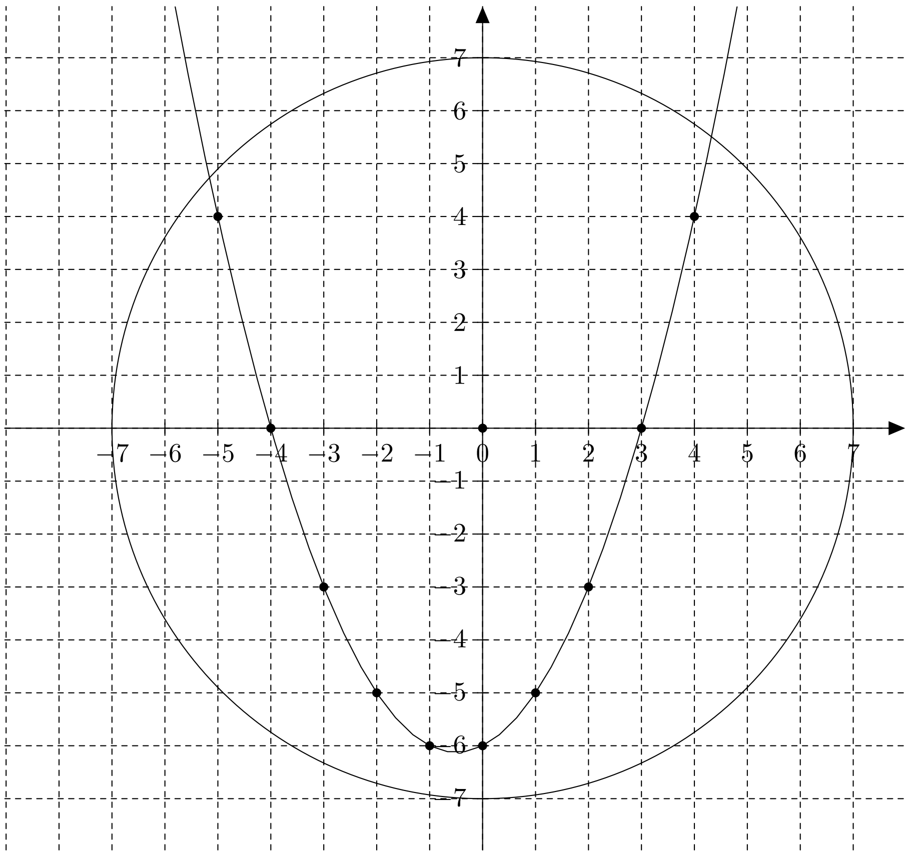
Másrészt

$$\begin{aligned} f(x+n) &= a(x+n)^2 + b(x+n) + c \\ &= ax^2 + 2anx + an^2 + bx + bn + c \\ &= ax^2 + bx + c + 2anx + an^2 + bn \\ &= f(x) + 2anx + an^2 + bn \\ &= f(x) + 2anx + an + an(n-1) + bn \\ &= f(x) + n(2ax + a + b) + an(n-1) \\ &= f(x) + n\left(f(x+1) - f(x)\right) + 2a \cdot \frac{n(n-1)}{2}\,, \end{aligned}$$

ahol az $f(x) \in \mathbb{Z}$, $n\left(f(x+1) - f(x)\right) \in \mathbb{Z}$, $2a \in \mathbb{Z}$ és $\frac{n(n-1)}{2} \in \mathbb{Z}$. Tehát következik, hogy tetszőleges n egész számra az $f(x+n)$ is egész érték. (**3 pont**)

b) A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy $a > 0$. Tekintsük az $f(x+1) - f(x)$ különbséget: $f(x+1) - f(x) = 2ax + a + b$, ami egy elsőfokú függvény, azaz szigorúan monoton, tehát ha az f függvény minden egész x értékre egész értéket vesz fel, akkor a parabola csökkenő vagy növekvő ágán az egymást követő rácspontok ordinátái közt fellépő különbségek nem ismétlődhetnek. (**1 pont**)

Tehát ha lenne 6 pont egy ilyen ágon, akkor a legnagyobb és a legkisebb ordináta közti különbség legalább $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ volna. Ez viszont nem lehetséges, mert a kör átmérője 14. Emiatt ebben az esetben az egy ágra illeszkedő rácspontok száma legfeljebb 5. (**2 pont**)



Ugyanakkor, ha az f nem minden egész x-re vesz fel egész értéket, akkor bármely három egymást követő egész érték közt legalább az egyikre f nem vehet fel egész értéket. A -6 és 6 között összesen 13 egész szám van, tehát ebben az esetben is legfeljebb $4 \cdot 2 + 1 = 9$ rácspont lehetne a parabolán.
(**1 pont**)

Másrészt a mellékelt ábrán látható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x(x+1)}{2} - 6$ függvény grafikus képének mindkét ága pontosan 5 rácspontot tartalmaz a körlap belsejéből, tehát az $\mathcal{M}$ halmaz pontjai közül legtöbb 10 illeszkedhet ugyanarra a parabolára. (**2 pont**)

■