

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia XXXIV. EMMV országos szakasz, Csíkszereda, 2025. február 24–28.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Oldd meg az

$$(xy + 6)^2 = x^2 + y^2$$

egyenletet az egész számok halmazán!

2. feladat. Adott egy n oldalú konvex sokszög ($n \geq 4$), amelyet valamilyen módon felbontunk háromszögekre belső pontban egymást nem metsző átlók segítségével. Az adott felbontás esetén nevezzük nullás csúcsnak a sokszög azon csúcsait, amelyekből nem indul ki átló, illetve nevezzük belső háromszögnek azokat, amelyek minden oldala átló. Ha N a nullás csúcsok száma, illetve B a belső háromszögek száma, akkor igazold, hogy

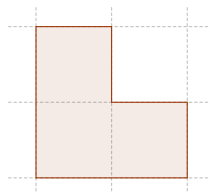
$$N = B + 2.$$

3. feladat. Egy 30 cm^2 területű ABC háromszög mindhárom szögének tangense egész szám. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

4. feladat. Egy $2n \times 2n$ -es, $4n^2$ egységnégyzetből álló négyzet alakú tábla egyik egységnégyzetét kivettük.

a) Bizonyítsd be, hogy ha $n \in \{1, 2, 4\}$, akkor a megmaradt rész hézag és átfedés nélkül lefedhető az alábbi ábrán látható, 3 egységnégyzetből álló alakzat segítségével, ha ebből elégséges számú áll a rendelkezésünkre, és ezeket bármilyen pozícióban elhelyezhetjük a táblán!

b) Határozd meg az összes olyan $n \in \mathbb{N}^*$ számot, amely esetén a megmaradt rész hézag és átfedés nélkül lefedhető az előbbi alakzatok segítségével!



5. feladat. Legyen ABC egy egyenlő szárú háromszög, amelyben a $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Az ABC szög szögfelezője az AC oldalt E pontban, az EBC szög szögfelezője az AC oldalt pedig D pontban metszi. Megszerkesztjük az ABE háromszög AF magasságát és az ABD háromszög AG magasságát. Legyen H az AF és BC egyenesek metszéspontja.

a) Igazold, hogy $FG \parallel HE$.

b) Bizonyítsd be, hogy a $HD \parallel AB$.

6. feladat. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan nem nullában végződő N teljes négyzet létezik, amely osztható a számjegyei négyzetösszegével, és amelyre N -et elosztva a számjegyei négyzetösszegével a hányados is négyzetszám!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.