I. forduló
2014. február 24.
XI. osztály

JAVÍTÓKULCS

I. feladat

1.) a) trigonometriai átalakítással

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3t - \frac{1}{2}\cos 3t\,(\mathrm{m}) = \cos\frac{\pi}{6}\,t\sin 3t - \sin\frac{\pi}{6}t \cdot \cos 3t = \sin(3\mathrm{t} - \frac{\pi}{6})$,

a harmonikus oszcillátor mozgásegyenletét kapjuk 1 p

$A = 1\ m,\ \omega = 3$ rad/s és $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 0,5 p

(Párhuzamos rezgések összetevésének módszerével is megoldható $y = y_1 + y_2 \rightarrow$ A és φ)

b) $y = \sin(3\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}m$ 0,5 p

$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}m/s$ 0,5 p

$a = -\omega^2 y = -9\frac{\sqrt{3}}{2}m/s^2$ 0,5 p

c) $Eh + Em = E \rightarrow\ Em = \frac{kA^2}{2} - \frac{ky^2}{2}$ 0,5 p

$E_m = E_h = \frac{ky^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{ky^2}{2} = \frac{kA^2}{2} - \frac{ky^2}{2} \rightarrow\ y = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}707m.$ 0,5 p

$y = ¿ \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = A\sin(3\mathrm{t} - \frac{\pi}{6}) \rightarrow \sin$ 1 p

2.) a) Kis kitérésnél a megnyúlt rugó és az összenyomott rugó által kifejtett erők, valamint a test súlyának tangenciális összetevője azonos irányítással összeadódva eredményezik a test gyorsulását. 1 p

$F = -kx - kx - \frac{mg}{l}x = ma$ 1 p

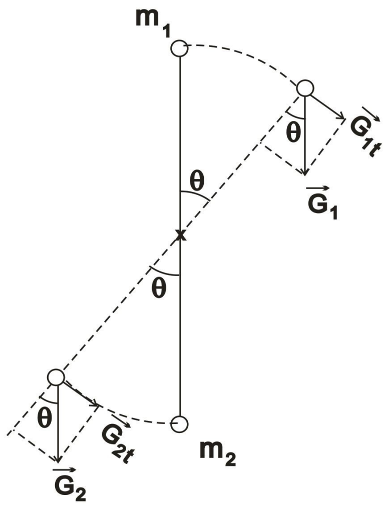
– ez egy párhuzamos kapcsolásnak felel meg**.** 1 p

b) az eredő rugalmassági állandó $k_e = 2k + \frac{mg}{l}$ 1 p

$\rightarrow$ a rezgési periódus $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k + \frac{mg}{l}}}$ 1 p

II. feladat

1.) A pálca egyensúlyi helyzete függőleges. Kis kitérésnél a súlyerőknek a mozgás irányára (körpálya) eső összetevői eredményezik a gyorsulást.



1 p

Az eredő erő $F = -m_2 g\sin\theta + m_1 g\sin\theta = -(m_2-m_1)g\dfrac{2x}{l}$, $\quad (\sin\theta = \dfrac{x}{l/2})$. 1 p

A rugalmassági állandónak megfelelő kifejezés $k = (m_2-m_1)g\dfrac{2}{l}$. 1 p

A lengési idő $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)l}{2(m_2-m_1)g}} = 2{,}45\ s$. 1 p

2.) A rugók sorosan vannak kapcsolva, a rendszer rugalmassági állandója $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$ 1 p

Mivel a két test az érintkezés pillanatában nem az egyensúlyi helyzetben van, a rezgés megkezdésekor a kitérés $y_0 = m_1 g/k$, a kezdőfázisa különbözök nullától 1 p

Az impulzus-megmaradás törvényéből meghatározható az indulási sebesség:

$$m_1\sqrt{2gh} = (m_1+m_2)v_0 \quad\Rightarrow\quad v_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}$$ 1 p

Az amplitúdó az energia megmaradásának törvényéből számítható:

$$\frac{(m_1+m_2)v_0^2}{2} + \frac{ky_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \quad\Rightarrow\quad A = \frac{m_1}{k}\sqrt{\frac{2hkg + (m_1+m_2)g^2}{m_1+m_2}} = \frac{1}{12}m$$ 1 p

$t = 0$ pillanatban $y = y_0 \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi_0 = \dfrac{y_0}{A} = \dfrac{m_1 g}{kA} = 0{,}5$.

Mivel $v_0 < 0$, $\Rightarrow \quad \varphi_0 = 5\pi/6$ 1 p

A körfrekvencia a $k = (m_1+m_2)\omega^2$-ből $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} = 2\sqrt{15}s^{-1}$, így a mozgásegyenlet

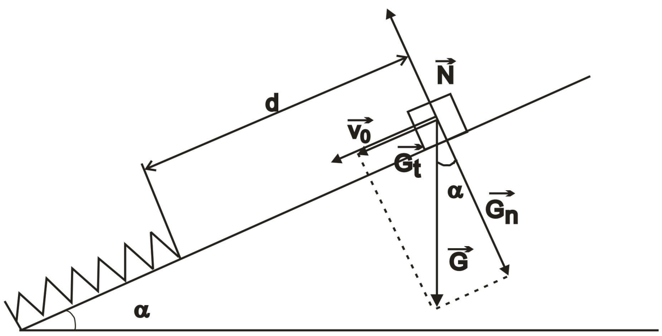
$$y = \frac{1}{12}\sin\left(2\sqrt{15}\cdot t + \frac{5\pi}{6}\right)$$ 1 p

III. feladat

Az erők ábrázolása, a súly felbontása 1 p

A test a $G_t = G\sin\alpha$ hatására mozog lefelé a lejtőn, $G_t = F \Leftrightarrow G\sin\alpha = ma \Leftrightarrow mg\sin\alpha = ma$

$\Rightarrow a = g\sin\alpha$ (1) gyorsulás a lejtőn. 1 p



A rugóval való ütközés pillanatában v a test sebessége: $v^2 = v_0^2 + 2ad$ (Galilei)

$\Rightarrow v = \left[v_0^2 + 2ad\right]^{\frac{1}{2}}$ 1 p

A rugóval való ütközés/összekapcsolódás után a rendszer harmonikus rezgőmozgást fog végezni a lejtő mentén. A test mozgási energiája ütközéskor átadódik a rugónak és abban rugalmas energiaként halmozódik fel, összenyomja maximálisan a rugót, majd a rugalmas erő hatására a testet nyomja felfelé a lejtőn. ez ismétlődik.
Nincs súrlódás, nincs energiaveszteség.

$E_m = E_p$, $mv^2 = kx_{\max}^2$

$x_{\max}^2 = \dfrac{mv^2}{k} \Rightarrow x_{\max} = v\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow x_{\max} = \sqrt{\dfrac{m}{k}\left(v_0^2 + 2ad\right)}$ maximális alakváltozás. 1 p

A rugó-test rendszer mozgási egyenlete: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ $m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 1 p

$t_0 = 0\ s$ az ütközés pillanata $\Rightarrow x(0) = \sin\varphi_0$, $x(0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ 1 p

A rezgések sebessége: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\left[\cos(\omega t + \varphi_0)\right]$, $t_0 = 0\ s$, $v = \sqrt{v_0^2 + 2ad} \Rightarrow$ 1 p

$\Rightarrow v(0) = A\omega\cos\varphi_0$, de $\varphi_0 = 0 \Rightarrow v(0) = A\omega$ $\sqrt{v_0^2 + 2gd\sin\alpha} = A\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{\sqrt{v_0^2 + 2gd\sin\alpha}}{\omega} = \sqrt{\dfrac{m\left(v_0^2 + 2gd\sin\alpha\right)}{k}}$ a rezgés amplitutója. 1 p

Tehát $x(t) = \sqrt{\dfrac{m\left(v_0^2 + 2gd\sin\alpha\right)}{k}}\sin t\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 1 p

$x = x_{\max}$, ha $\sin t\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 1 \Leftrightarrow t_1\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ 1 p