基于测试分析视角透析数学高考改革方向①

——以 2022 年新高考全国 1 卷为例

黄　健

（苏州市教育科学研究院　215006）

高考是国家选材最直接的方式，也是检验教学教研质量的基本手段. 2022 年新高考全国 1 卷（下称新 1 卷）坚持素养导向、能力为重原则[1]，紧扣高中数学主体内容，突出学科特点，重视理性思维，强调关键能力. 试题比例恰当，基础题源于课本、中档题追求内涵、高档题灵活创新，呈现出“低起点、多层次、高落差”的特点. 试卷注重对概念理解的考查，引导教学回归本源，大部分试题以经典问题为载体，通过适度改编，考查学生对问题本质的理解程度. 同时，试卷充分发挥数学的应用价值，多处设置问题情境，真正让知识学以致用. 在一些关键的能力题上，试卷通过多题引导、层层递进的方式进行提示，力求有效区分学生层次. 试题的解答追求通法通解，摒弃各类“秒杀”技巧，体现公平性原则.

新时代国家创新型人才的思维需要具备高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性等特点，新高考承接了国家意志，是高考改革的风向标. 新 1 卷加大了高考改革的力度，更好地发挥了人才选拔功能，在问题情境、形式设计、素养考查等方面都有所创新，达到了考基础、考能力、考素质、考潜能的考试目标，“价值引领”被充分体现，考试的信度、效度和区分度更高更准，充分贯彻落实了创新驱动的发展战略和科教兴国的人才强国战略. 这样的创新给学生带来了哪些影响？对教师教学提出了哪些新要求？笔者前期申报了省级课题《基于测试分析推动区域高中数学教研方式转型的实践研究》，希望通过对测试成绩的分析来把握学生的能力特征，进而改变教研方式，提升区域教学质量，满足国家全面育人的发展要求. 研究发现，在当前教学模式下，学生对概念、定义、定理、法则、公式的识记总体做得比较到位，而在分析、转化、计算、作图、表达等基本能力上有所欠缺，在能够体现思维品质的类比、抽象、概括、证明、拓展、探究、运用等创新能力上更显不足，这显然不能适应国家培养更高水平人才的需要.

下面基于对新 1 卷导向的剖析，结合测试分析实证，谈谈目前模式下学生的思维特征和认知现状，帮助教师树立正确的教学观，重视数学的探究意义与应用价值[3].

1　新高考全国卷的改革方向

这里所谈的改革方向，并非指试卷结构与内容的变化，而是指试题在思维逻辑、背景特征、抽象表现、内涵理解、外延表征和应用价值等方面呈现的新型特征.

1.1　重视对知识全面性的考查

新 1 卷进一步明晰了命题的结构和意义，注重对板块认识的全面性，强调知识的均衡性，引导学生完善知识结构，反对“猜题”“押题”等现象. 第 9 题以正方体为载体考查空间角的大小，重在测试学生的量感，培养直觉思维，而仅设置两种角（线线角、线面角）则是尽量减少处理问题的时间，体现人文关怀. 第 10 题基于三次函数模型，考查极值点、零点、对称中心、切线等概念，体现考查方向的多元性，其真正意义在于引导学生体会导数的作用，学会运用导数工具研究函数问题的

① 本文是江苏省中小学教学研究第十四期重点资助课题《基于测试分析推进区域高中数学教研方式转型的实践研究》（2021JYJC14－ZA12）的阶段性成果.

一般方法,彰显数学的理性精神.这两题均指向了常见模型的考查,引导学生运用结构性和抽象性的法则去解决,发展一般化思维能力.

联想1(2022苏州零模)已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+1$,则( ).

A. $\forall a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上均有极值

B. $\exists a\in\mathbf{R}$,使得函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上无极值

C. $\forall a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有且仅有一个零点

D. $\exists a\in\mathbf{R}$,使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有两个零点

学校	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均/难度系数
得分	3.28	2.94	2.23	2.23	2.46	2.1	1.51	1.51	1.13	1.24	2.15/0.43

从测试结果看,学生在对三次函数图象性质的概念理解(极值、最值、单调性等)比较到位,但在融合各种思想全面分析图象特征(对称性、关键点、渐近线、极限等)上有所欠缺,如对选项C,D的判断.与新1卷第10题对比,此题引入了参数 a,并加入了逻辑语言,难度更大,从实测来看难度系数符合预期,由此判断新1卷重视对知识全面性的考查合情合理,体现了评价的系统性和层次性.

1.2 重视知识板块特点的考查

新课标突出数学主线,凸显数学的内在逻辑与思想方法,这就要求在板块的考查上进一步突出知识特点,概括数学思想,体现核心规律,达到全方位提升思维品质的目的.新1卷第17题打破以往运用等差(等比)数列公式计算的老套路,第(1)小题考查数列的递推式与和的关系,体现数列的特性,解题过程涉及退位相减法及累乘法的运用,引导学生感悟递推规律,第(2)小题将数列与不等式融合,体现跨界考查的新方向,引导学生重视知识的理解与融通.

联想2(2022苏锡常镇一模)已知数列 $\{a_n\}$,$a_1=1$,且 $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n(n+1)}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)记数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 S_n,求证:$S_n<\frac{4n}{2n+1}$.

学校	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均/难度系数
得分	8.8	7.11	6.72	8.02	7.08	5.53	5.46	3.89	4.22	1.71	6.63/0.55

此题的考查理念和新1卷极为相似,需要学生利用累加法求数列的通项公式,利用放缩法证明数列不等式.从测试结果看,学生在解题思路上存在着认知不足、忽略细节等问题,比如不会构造递推关系、不对 $n=1$ 进行检验、常见放缩模型不熟悉等,折射出一线教师课程内容认知不全、教学方向缺失、逻辑推理不严密等问题.

"用代数语言描述几何问题与特征,通过直观想象和代数运算得到结果和几何解释"[2]是新课标对平面解析几何教学的要求.在解析几何板块考查上,新1卷强调几何特征和代数运算,体现"以代数思想解决几何问题"[2]的板块特点,考查学科关键能力.第11题C、D选项源于广义切割线背景,需要学生将条件转化为点坐标的关系并利用方程思想解决问题.第21题与第11题的代数思想是一致的,强调对直观想象、逻辑推理、数学运算的考查,对学生的能力要求较高.两道题载体不同,但方法一致,提示我们在教学过程中要注意数学抽象的系统性与严谨性.

联想3(2022苏锡常镇一模)已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,且椭圆 C 的右焦点 F 到右准线的距离为 $\sqrt{3}$.点 A 是第一象限内的定点,点 M,N 是椭圆 C 上两个不同的动点(均异于点 A),且直线 AM,AN 的倾斜角互补.

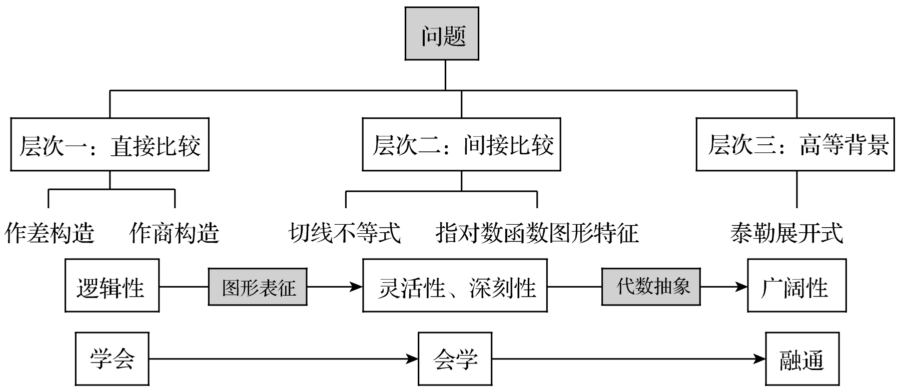
(2)若直线 MN 的斜率 $k=1$,求点 A 的坐标.

学校	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均 / 难度系数
得分	4.31	2.68	1.94	1.94	1.97	1.27	0.54	0.29	0.51	0.01	1.66 / 0.24

将此题和新 1 卷第 21 题的第(1)小题对比，可以发现条件与结论刚好被互换，两题载体稍有不同，但解题思想基本一致.因对运算能力要求较高，故整体得分低于预期，学生答题问题主要有三点：一是方程联立的运算错误，导致韦达定理出错；二是不会将 AM，AN 斜率互为相反数的条件等价转化，解题方向不清；三是学生自我的心理暗示，主观放弃较多.从表格中的数据看出，部分学校的教师在教学导向上存在着明显的投机倾向，新 1 卷第 21 题正是想极力纠正这种现象，两个小题的设置均指向运算，提示教师要在算理分析方面多研究，明确计算方向，优化计算思路、厘清计算步骤，努力提升学生计算的信心与能力.

1.3 重视思维品质的多维考查

思维品质是指思维能力的特点及其表现.由于基本活动经验存在差异，学生在学习活动中思维的逻辑性、深刻性、灵活性、广阔性、预见性和批判性等都会有不同.质量高的试题往往允许从多角度入手，但解题的快捷性往往不同，有利于区分学习能力的差异.新 1 卷第 7 题要求学生灵活运用所学知识解决问题，解题视角较为灵活，常见的处理手段有：作差、构造、转化，高层次水平的学生还可以联想放缩、展开等思想(如图)，学生认知水平的差异从中体现得淋漓尽致.



联想 4(2022 苏州零模)已知 $a>b+1>1$，则下列不等式一定成立的是( ).

A. $|b-a|>b$　　B. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$

C. $\frac{b+1}{a-1}<\frac{e^b}{\ln a}$　　D. $a+\ln b<b+\ln a$

学校	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均 / 难度系数
得分	4.54	4.1	3.92	3.56	3.51	3.22	2.71	2.55	1.99	1.83	3.35 / 0.67

此题与新 1 卷第 7 题理念相似，但在对象呈现的方式上选择了字母呈现，实际得分情况比较理想，学生只要耐心观察构造，得出答案并不困难，或者也可用举反例的方法来否定结论.而新 1 卷第 7 题反其道行之，要求学生基于定量形式联想变量特征，强调方法内涵理解与应用延伸，揭示一般规律.

新 1 卷第 18 题的解题过程无不体现了对学生思维品质的考查，第(1)小题求角的大小，需要学生理解三角恒等变换的意义，建立关于角 B 的方程去求解，有两个解题关键点：一是需要将“倍角”和“单角”统一，“消 1”是方向；二是将角对象统一，“消元”是关键.第(2)小题求多元最值问题，要求学生树立函数意识，将问题合理转化为关于角变量的函数最值问题.第 19 题的题干一改“一证一算”的套路，释放“反押题”的信号，真正发挥选拔作用，第(2)小题增加思维层次，让学生经历空间线面关系性质的推证以及“以算代证”发现

几何特征的思维过程,体现思维的预见性和批判性.根据测试分析的实证模型,预测此题的区分度会比较好,能更准确地测出学生在概念的理解和方法的应用上的不同掌握程度,思维灵活的学生能想到将三棱柱还原成正方体模型,快速找出图形特征与正确结果,而那些思维僵化、只会用空间向量解题的学生则会花费大量的时间与精力.

1.4 重视图形与数据特征的获取

抽象是高中数学的主要特征,数学抽象以量感、数感、符号意识为基础[2].新课标强调的直观想象和数据分析素养,不仅体现在几何与统计等内容的学习过程中,还体现在解题过程中对特征对象全面分析的思维活动中,包括:对熟悉几何模型的联想与拓广、对代数式整体特征的观察、几何属性的代数表征等过程.这些理念的深入,使得命题有了新的方向,试题思维深度得到明显提升.新1卷第16题需要学生发现离心率为$\frac{1}{2}$时椭圆的"特征三角形"为正三角形,进而从对称出发将弦长条件向椭圆定义的方向转化,对数据特征的观察要求较高,是非常体现能力的一道试题.第21题第(2)小题,学生若能从条件中发现$\angle PAQ$与直线AP倾斜角的关系,则可大幅降低运算量,体现了"思维在先"的理念.分析如下:由AP,AQ斜率之和为0,得AP,AQ倾斜角互补,所以$\angle PAQ$的平分线与y轴平行,从而由$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$可求得AP的斜率,进而求得P,Q的横坐标,最终$\triangle PAQ$的面积可通过$S=\frac{1}{2}|AP|\ |AQ|\sin\angle PAQ$求得.这两道题的解决都经历了"数据运算→图形特征→模型运用→化归定义(公式)→运算求解"的过程,学生能从中感受到数学的魅力,体会研究的乐趣.

联想5(2021苏州零模)已知双曲线C:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$的右焦点为$F$,两条直线$\sqrt{2}x+2y=t_1$,$\sqrt{2}x+2y=t_2$与$C$的交点分别为$A$,$B$,则可以作为$|FA|=|FB|$的充分条件的是( ).

A. $t_1=1$,$t_2=8$ B. $t_1=2$,$t_2=3$

C. $t_1=2$,$t_2=4$ D. $t_1=1$,$t_2=4$

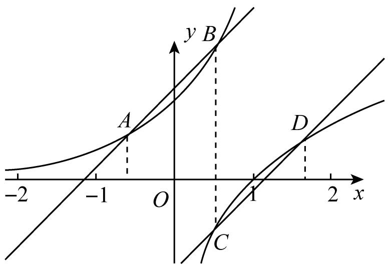
学校	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均/难度系数
得分	2.71	2.31	1.77	1.68	1.6	1.53	1.26	1.33	1.04	1.13	1.78/0.36

此题的常规解法是分别将两直线和双曲线联立,求出交点坐标,再进行常规运算,方法较为繁琐.若能根据双曲线图象对称的特性,由$|FA|=|FB|$敏锐发现A,B关于x轴对称,则不难解决问题.分析如下:设$A(x_0,y_0)$,$B(x_0,-y_0)$,则$\sqrt{2}x_0+2y_0=t_1$,$\sqrt{2}x_0+2(-y_0)=t_2$,两式相乘得$2x_0^2-4y_0^2=t_1t_2$,又$2x_0^2-4y_0^2=8$,所以$t_1\cdot t_2=8$,选AC.

重视图形与数据特征运用的考查要求学生具有较强的观察、联想、猜想、类比、迁移、化归等能力,从以往的测试分析看,得分率并不理想.教师要提醒学生在解题中注意积累与联想,关注问题模型的内在规律和表现层次,加深理解,提升能力.

1.5 重视问题本质的深层次理解

数学问题的本质是对象的存在关系与数量结构的内在关联.追求数学本质的命题突出对数学抽象素养的考查,注重对概念、属性、表现形态的理解与运用,重视对象背后的结构与规律,强调思想的统一性与方法的拓展性.新1卷关注数学知识的横向与纵向联系,能有效区分自主学习能力水平,第12题,一方面考查函数的对称性,基于课本又高于课本,另一方面也要求考生能掌握原函数与导函数的关系,充分认识导函数图象的对称属性与原函数图象变化趋势的关联,从中把握本质、理解融通.第22题为导数解答题,对学生的知识、能力和创新思维均有较高的要求,体现了考查关键能力的导向,学生若能理解指对数函数图象的对称关系,则不难发现问题的图形本质.分析如下:设A,B为函数$y_1=e^x$与$y_2=x+b$图象的两个交点,C,D为函数$y_3=\ln x$与$y_4=x-b$图象的两个交点(如图),且$x_B=x_C$,因为y_1与y_2、y_3与y_4的图象均关于直线$y=x$对称,所以$x_B-x_A=x_D-x_C$,从而$x_A+x_D=x_B+x_C=2x_B$.



联想 6（2021 苏锡常镇二模）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，且在 **R** 上可导，其导函数记为 $f'(x)$. 下列命题正确的有（　　）.

A. 若函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数

B. 若函数 $f'(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 是奇函数

C. 若函数 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数

D. 若函数 $f'(x)$ 是周期函数，则 $f(x)$ 也是周期函数

学校	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	平均 / 难度系数
得分	2.71	2.31	1.77	1.68	1.6	1.53	1.26	1.33	1.04	1.13	1.97 / 0.39

本题考查原函数与导函数的概念辨析，引导学生注重概念的深度理解，从测试结果看，得分率不高. 单调性、对称性、周期性是函数的通性，常常以抽象的特征呈现. 新 1 卷第 12 题基于此题，需要充分挖掘图象特征，从对称轴、对称中心等关键信息出发去解决问题. 从测试分析实证看，抽象函数的概念辨析难度较大，体现出学生对本质的深层次理解不够，主要有两大障碍：一是无法借助具体函数，导致无从下手；二是对周期性、对称性规律的认知不够，不能在数与形中自由转换，导致无法破除障碍.

2　新高考全国卷的导向解读

2.1　强化小初高衔接的教学导向

数学是一门连贯的学科，正确掌握每一个概念、公式、方法都能为后续学习打下坚实的基础. 新 1 卷在小初高衔接上加强了导向，第 4 题强化对数据运算的考查，引导学生在带根号的运算中将整数进行质因数分解，从而有效简化运算，有效检测了学生处理数据的能力. 第 5 题考查素数的概念，引导学生重视知识的回顾与理解. 第 19 题第(2)小题的计算主要依托平面图形，考查初中平面几何的相关知识. 这些问题中所涉及的概念渗透、数据处理、平面化方法等无不体现出强化引导小初高衔接的决心.

2.2　通过反套路化促进教研转型

新 1 卷在极力发出“反套路”的信号，想打破过去约定俗成的规则，表现在：一是任何位置都可以有较难题，二是任何知识都可以出较难题，考查学生的心理应变能力和心态稳定程度，并借此促进一线教学方式的转型. 比如第 4 题考查圆台的体积公式，第 20 题考查条件概率的应用，这些试题提醒教师要依标教学，对各类复习资料中界定的“热门”与“冷门”、“容易”与“困难”应重新审视，改变有轻有重的不良教学倾向.

2.3　情境试题的设置逐步理性化

新高考命题注重体现数学的应用价值，发挥积极导向[1]，强调鉴于真实背景来创设问题情境. 新 1 卷不盲目追求实际情境试题的数量，更符合实际考情，通过展示我国优秀传统文化成果和经济发展现状，强调时代特征和民族自豪，激发青少年的爱国主义情怀，体现数学审美理念. 开放情境以推理、证明、探究等形式呈现，旨在区分学生的能力差异，发挥选拔功能，引导教学重视基于探究的实践研究，体现数学理性和数学创造精神.

3　新高考背景下的教学要求

3.1　聚焦价值引领 提升关键能力

教师要把价值观的引领和创造力的培养作为数学课程的重要研究内容[3]，以《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》和《中国高考评价体系》为指引，聚焦素养导向，着力提升学科关键能力，这是教学改革的重中之重. 数学教学不能仅浮于知识表面，更要深入挖掘学生的数据观察能力和运算优化能力，进一步重视对作图能力、运算能力和换元能力的培养. 同时，教师要重视基于测试分析的查漏补缺，挖掘教学增长点，巩固教学成果.

3.2　重视拓广探索 提升思维品质

数学思想方法是相通的，研究手段是相似的，教师应注重知识的关联和方法的类比，将开放探

究理念融入课堂,培养学生追根究底的精神,在有意义的学习环境中培养数学应用能力.教师要减少“模型化”“套路化”等教学习惯,让数学课堂回归本质、回归理性,通过开放性的探索问答,将学生的思维盲点同既有经验有效连结,并通过多层次设计和有针对性的训练,感悟数学知识,提升思维品质.

3.3 基于系统视域 整合教学内容

新高考考查点更为丰富多样,要求学生能充分了解知识网络,提升思考、分析、探究、延伸、反思等能力,这些能力的培养,都要基于较好的问题模型进行研究与拓展.教师应遵循学科教育规律与学生的认知规律,在深度学习的教学观指导下[3],整体考量,科学筹划高中数学教学实践,形成系统化知识网络,学会系统化研究方法,构建前后贯通、相互协调、科学合理的课程体系,使教学内容有机衔接,促进教学质量的有效提升.

参考文献

[1] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M].北京:人民教育出版社,2020

[2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020

[3] 祁平,任子朝,赵轩.指明改革方向 绘就培养蓝图——高考评价体系育人视角的解读与应用[J].数学通报,2020,59(4)

(上接第6页)

后面的都不能保证.更何况,1万个分数化小数算加减,电脑还可以算,手工算起来很难实现.

假如取 x 很小,比如 $x=\frac{1}{5}=0.2$.就不需要算几千几万,算7个分数到 $\frac{0.2^{13}}{13}$ 误差小于 $\frac{0.2^{15}}{15}=\frac{0.000000000032768}{15}<0.000000000003$,精确度相当高了.

不过,问题又来了:$\alpha=\arctan\frac{1}{5}$ 与 π 有什么关系?它的多少倍等于 π?

我们通过倍角公式,由 $\tan\alpha=\frac{1}{5}$ 计算 $\tan2\alpha$,$\tan4\alpha$,假如某个角的正切接近1,这个角就接近 $\frac{\pi}{4}$.

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}=\frac{5}{12}.$$

$$\tan4\alpha=\frac{2\tan2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}=\frac{120}{119}\text{接近 }1.$$

4α 略大于 $\frac{\pi}{4}$.算出差角 $\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$ 的正切

$$\tan\beta=\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\tan4\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan4\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}.$$

则 $\frac{\pi}{4}=4\alpha-\beta=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$.

$$\pi=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{129}.$$

笔算得 $\arctan\frac{1}{5}=\arctan0.2\approx0.2+\frac{0.2^5}{5}+\frac{0.2^9}{9}+\frac{0.2^{13}}{13}-\left(\frac{0.2^3}{3}+\frac{0.2^7}{7}+\frac{0.2^{11}}{11}\right)$

$\approx0.20006405695-0.00266849710$

$=0.19739555985$,

$$\arctan\frac{1}{239}\approx\frac{1}{239}-\frac{1}{239^3\times3}$$

$\approx0.00418410042-0.00000002442$

$=0.004184076$,

$\pi\approx16\times0.19739555985-4\times0.004184076$

$=3.1415926536$,11位数字全对.

以上运算可以用笔算完成.如果用电脑,鼠标一按就算出几百位数字.