数学建模核心素养的高考测评及教学培养
——以近五年全国数学高考试题为例

胡一超 杭州师范大学经亨颐教育学院 311100
王雅妍 杭州师范大学数学学院 311100
陆吉健 杭州师范大学经亨颐教育学院 311100

[摘 要] 在现如今高中数学教育的新形势下,新课标高考数学试题更多的意图是培养高中生抽象概括、提出和解决问题的能力. 因此研究者从近五年高考数学试题出发,基于数学建模核心素养,浅析近五年全国数学高考试题对于题型和分值结构的调整、考点范围和掌握程度的变化以及学生建模思维能力的要求等几方面进行议论分析. 通过对全国数学高考试卷(理科)Ⅰ卷5套试卷中的典型例题的研究分析,感受数学建模核心素养在试题中的具体体现,并对数学教学培养提出了建议.

[关键词] 数学建模;核心素养;高考测评;教学培养;典型试题

研究背景

《普通高中数学课程标准(2017年版)》首次提出了数学六大核心素养,即数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学建模、数学运算和数据分析. 其中数学建模作为六大核心素养之一,在我国高中数学的教学中发挥着十分重要的指导价值和现实意义,其不仅在高中阶段对试题的解决有重要作用,而且为学生日后对于数学更深层次的研究和日常问题的解决具有一定的意义[1]. 所以本文从数学建模核心素养出发,以近五年全国高考数学试题为例进行针对性的测评研究.

研究内容

1. 考查题型和分值结构

试卷满分150分, 必做题140分,选做题10分. 其中选择题12道,共60分;填空题4道,共20分;解答必做题5道,共60分;解答选做题2道(各10分,选做一题),共10分.

为分析近五年全国高考数学Ⅰ卷(理科)对于数学建模核心素养的考查情况,对考查题型和分值结构进行了汇总,如表1所示.

综合分析,全国高考数学Ⅰ卷(理科)对于数学建模素养的考查以填空题和选择题为主,近年来解答题的出现频率上升,分值占比总体呈上升趋势.

2. 评价框架

根据喻平教授对数学核心素养的评价框架,大致将其分为三个层面,即知识理解、知识迁移、知识创新[2],对于这三个层面的不同要求如表2所示.

表1 近五年全国高考数学Ⅰ卷(理科)关于数学建模素养的题型和分值

年份	考查数学建模素养的试题题号			分值		
	选择题	填空题	解答题	选择题	填空题	解答题
2017	5、10、1	14、16	20	15	10	12
2018	11	13、16	20、21	5	10	24
2019	5、10	—	21、22	10	—	24
2020	5、7、11、12	13、15、16	17、18、20、21、22	20	15	60
2021	5、8、10、11、12	15、16	18、19、20、21、22	25	10	60

基金项目:教育部产学合作项目“线上线下混合式虚拟仿真教学模式及其实践”(202101031035).

作者简介:胡一超(1999—),杭州师范大学理科综合—数学与数学应用(师范)专业学生,未来教育协会研究助理,主要从事数学测试、未来教育等研究工作.
通讯作者:陆吉健(1990—),北师大和墨尔本大学联培教育学博士,杭州师范大学讲师,硕士生导师,主要从事数学测评、未来教育等研究工作,发表CSSCI、核心、SSCI等期刊论文近40篇.

表2 数学建模素养不同层面的要求

层面	水平标定	具体试题
知识理解	能用数和符号表示数量关系,掌握代数式、方程、不等式和函数模型的数学描述,体会模型思想,准确表达熟悉情境下简单的数量关系	2020年题5、题7、题13、题15、题17、题18;2021年题5、题10、题11、题15、题18
知识迁移	能在新的情境下用代数式、方程、不等式、函数模型中的一种表示数量关系,分析模型中的数量关系变化,能够在建立模型过程中进行筛选和优化	2020年题11、题12、题16、题20、题21、题22;2021年题12、题16、题19、题20、题21、题22
知识创新	能综合运用数、代数式、方程、不等式和函数模型等表示新情境下的数量关系,能将模型进行推广,用建模的数学方法认识和分析现实问题	2021年题8

3. 例题分析

根据上述评价框架,从考查的形式、内容出发,分析评定5套试卷对于数学建模素养的考查要求变化. 因为题目数量较多,以下选取部分具有代表性的试题进行分析说明.

例1 (2020年题13)若x,y满足约束条件$\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0,\\ x-y-1\geqslant 0,\\ y+1\geqslant 0,\end{cases}$则$z=x+7y$的最大值为________.

分析:本题的数学建模素养体现在通过数和符号的关系即不等式组的掌握、不等式与函数的转化,体会方程与模型的关系,确定其最优解上. 题目要求学生正确理解三个不等式的数学意义,并运用数形结合思想,得出最优解.

该题为基础题,属于知识理解层面,重点考查学生对不等式组的理解和处理,以及对函数模型的体会. 基础薄弱的学生可能会错误处理不等式组,对所求函数的几何意义的理解也可能出现偏差,从而影响模型的建立.

例2 (2020年题11)已知$\odot M$:$x^2+y^2-2x-2y-2=0$,直线l:$2x+y+2=0$,P为l上的动点,过点P作$\odot M$的切线PA,PB,切点为A,B,当$|PM|\cdot|AB|$最小时,直线AB的方程为( )

A. $2x-y-1=0$ B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$ D. $2x+y+1=0$

分析:本题的数学建模素养体现在解决平面解析几何模型中的最值即最优解问题上. 从一次函数模型中的动点出发,用数学符号表示$|PM|\cdot|AB|$,由此得出其值最小时动点P需要满足的条件,通过计算得到最优解即所求方程.

该题难度适中,属于知识迁移层面,重点考查学生对于模型的确定以及一定的计算能力,通过对模型的分析得出其最优解,完成方程的确定. 基础薄弱的学生难从条件“$|PM|\cdot|AB|$最小”构建出正确的模型,从而影响方程的计算结果.

例3 (2020年题20)已知A,B分别为椭圆E:$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点,$G$为$E$的上顶点,$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$. P为直线$x=6$上的动点,PA与E的另一交点为C,PB与E的另一交点为D.

(1)求E的方程;

(2)证明:直线CD过定点.

分析:本题的数学建模素养体现在从平面几何模型——椭圆模型出发,用符号表示点和函数的关系上. 需要学生从中体会模型的变化,分析得出模型的特点,同时考查学生的计算能力. 学生根据动点确立符号,并由此展开计算得出模型,然后通过分析证明过定点的结论.

该题为综合题,属于知识迁移层面,考查学生求椭圆方程、直线与椭圆的位置关系以及求直线方程问题. 综合来说,该题对于模型构建不算太困难,但计算量较大,基础薄弱的学生在处理模型的过程中容易出现错误.

例4 (2021年题8)2020年12月8日,中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为8848.86(单位:m),三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 如图(图1)是三角高程测量法的一个示意图,现有A,B,C三点,且A,B,C在同一水平面上的投影A',B',C'满足$\angle A'C'B'=45°$,$\angle A'B'C'=60°$. 由C点测得B点的仰角为$15°$,BB'与CC'的差为100;由B点测得A点的仰角为$45°$,则A,C两点到水平面$A'B'C'$的高度差$AA'-CC'$约为($\sqrt{3}\approx1.732$)( )

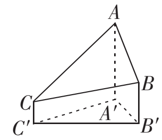

图1

A. 346 B. 373

C. 446 D. 473

分析:本题的数学建模素养体现在综合运用数学模型表示新情境里的数学关系,用建模的方法认识分析实际问题上. 题目以珠穆朗玛峰的测量法为背景,将实际问题抽象建立成立体几何模型,要求学生通过三角高程测量法解决问题. 另外,学生需要一定的空间想象能力构建该立体几何模型,并通过对模型的合理分析,进行正确处理,即如何正确将$AA'-CC'$的长度通过做辅助线的方式转化为$A'B'+100$,并运用三角函数中的相关定理进行求解.

该题属于知识创新层面,从实际问题出发,考查学生建立空间几何模型的能力,并运用所学知识完成其中一些基本计算,同时考查学生简单的直观想象能力,培养学生综合运用数学模型解决实际问题的能力.

例5 (2021年题10)将4个1和2个0随机排成一行,则2个0不相邻的概率为( )

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

分析:本题的数学建模素养体现在通过分析问题内部联系,找到问题解决的切入点,建立合理的数学模型,将问题简单化、常规化上. 该题要求学生采用插空法,对4个1产生5个空,分“2个0相邻”和“2个0不相邻”进行求解,分别得出两种情况的排法数量. 学生需要理解问题的核心原理,选择正确的排列组合模型,对问题进行分析解决.

该题属于知识迁移层面,排列组合问题作为高考中必考的一个类型题,考查学生分析处理问题、将复杂问题进行分解的能力,从而找到问题解决的切入点,建立正确的数学模型. 例如,相邻问题捆绑法,不相邻问题插空法,特殊位

置优先考虑，等等. 对于数学建模素养较弱的学生可能无法正确分析其中的关系而构建出错误的排列组合模型.

研究结果

1. 数学建模的内涵

数学建模是从实际问题出发，通过对实际问题的分析、抽象、简化等，运用数学原理，优化、选择并建立正确合理的模型，在此基础上，通过现有数学知识求解模型以解决问题，再回到实际情境中解释、验证所得结果. 其大致过程可用图2表示.

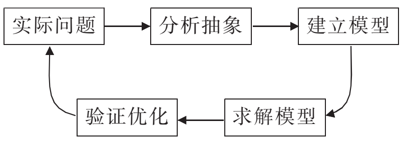

图2

从教学定义出发，建模思想源于构建主义，其内涵是数学家经过大量的研究总结后归纳出的具有代表性的典型抽象化数学模型，通过这种模式，可以将大量数据进行有效量化，并借助这种量化关系选择构建精准、有效的数学模型. 数学建模是现实生活与数学连接的纽带，其数学过程是数学建模素养育人目标的具体体现. 与此同时，数学建模关注着传统文化对学生学习乃至今后发展的影响，体现了教育的人文关怀[3].

2. 数学建模能力要求

总体上说，数学建模是一项综合性较强的数学活动，对于学生多方面的能力有一定要求.

(1)阅读理解能力. 这需要学生依照一定的逻辑和思路方法对问题进行系统性分析，筛选关键信息，理解具体含义，在感知问题信息后，获得对问题的感性认识. 阅读能力较好的学生，能够较容易地理解问题考查的内容和内涵. 读得快，读得准，理解对，理解深，这是数学建模的前提.

(2)抽象概括能力. 这需要学生将获得的感性材料去伪存真，对问题适当简化，忽略不必的次要因素，抓住主要矛盾，发现问题的本质，在不违背题意的前提下，在提炼、抽象的基础上，将实际问题转化为数学问题. 抽象概括能力较强的学生能够较容易地将实际问题抽象为数学问题，这是数学建模的基础.

(3)模型选择能力. 这需要学生对问题有了一定的理解后，为了解决该问题，能够选择合适的数学模型，同一个数学问题可以有多个数学模型，同一个数学模型可以用于多个实际问题，如何选择一个最佳的模型，直接关系到问题能否顺利有效地解决，是学生综合能力的体现，也是数学建模的关键.

(4)空间想象能力. 对于某些稍复杂的模型，如立体几何模型，在抽象概括以及进行分析处理时，碍于技术工具的限制，学生只能依靠个人的空间想象能力进行构建，并以此来解决问题. 空间想象能力好的学生能够较清晰地在脑海中呈现数学模型，并进行简单的数学运用和处理，能够促进数学建模素养较大提升.

(5)数学运算能力. 同样，不管是在构建模型还是在求解模型的过程中，都会涉及一定量的计算，可能还会有近似计算和估计，所以即使模型选择正确合理，如果计算能力欠佳，最终也是前功尽弃. 数学运算能力是数学建模的重要组成部分[4].

3. 高考形式下的几种常用模型

在前面的研究内容中可以看出，在高中阶段对于学生数学建模核心素养的考查大多集中在数学理解和数学迁移方面，题目的难易程度集中在中等，题型的考查方式多样，考查的基本模型分类如下.

(1)函数模型. 高中阶段的大部分函数模型为一次函数、二次函数、指数函数、幂函数、对数函数以及简单的分段函数等. 处理函数模型时，需要对各类函数的定义、性质以及一些拓展性内容扎实掌握，如定义域、值域的取值. 处理问题时，要灵活选择并运用函数性质，通过数学知识从已知条件向所求问题靠近. 在高考范围内，函数模型的考查形式多样，选择题、填空题、解答题都会涉及，分值占比较高，属于高中阶段较为重要的一种模型.

(2)不等式模型. 该模型在高考中大多以填空题为主，题目较容易，分值占比较低. 在处理过程中常配合函数进行解决，需要学生熟练掌握数形结合方法，理解模型的几何含义.

(3)平面几何模型. 在高中阶段的平面几何模型主要有三种，即抛物线、双曲线、椭圆，在高考中以填空题和选择题为主，分值占比中等. 在处理过程中需要学生对各类模型的基本知识，如焦点、渐近线等熟练掌握并灵活运用，也可能会与一次函数配合形成难度较高的动点问题，这要求学生在扎实的基础知识上，会运用一些巧妙的求解方法解题.

(4)立体几何模型. 该模型在高考中出现频率最高的是一道解答题，几乎每年都会出现，以求线面角和面面角为主，近年也在选择题出现，需要学生有一定的空间想象能力，并对模型进行简单辅助线处理以及运用三角函数知识进行求解，总体来说难度不大.

(5)数列、概率模型. 该模型在高考中大多以一道解答题的方式出现，也会涉及选择题和填空题，学生需要理解题意，知道不同模型对应的解决方法，恰当运用方法就会比较容易解决.

4. 高考数学建模趋势分析

近年来，数学建模素养的考查范围越来越广，内容越来越深，题型也越来越新颖，集中体现在以下几方面.

(1)综合性. 数学建模已经由单纯的数学知识逐步转化为知识、方法和运用能力相结合的综合性题型，因此对于学生来说，单纯的"记忆"远远不够，要学会灵活运用不同的解题方法，从中感受数学建模思想.

(2)文化性. 特别是近两年以数学文化为背景的题目频繁出现，可见高考数学正在努力挖掘数学历史长河中的精髓，从数学文化中体会建模思想.

(3)应用性. 尤以解答题为主，选取现实生活的背景考查学生的数学应用能力，让学生体会数学来源于生活，应用于生活，要求学生不能停留在纸面上，而要有一定的应用意识.

(4)创新性. 对于同一个知识点，不管是从考查的角度还是从内容上，相比于以前，都有了一定程度的创新，需要考生对题意有较清楚的理解，在此基础上解决问题. 创新型试题符合时代的发展，也是选拔高素质人才的要求.

（下转第20页）

教学思考

因受学习能力、思维方式等因素的影响，学生的思考习惯和解题习惯也会有所差异，在教学中，教师要为学生提供一定的时间和空间来呈现这种差异，以此通过有效的互动交流，发散学生的思维，提高学生的解题能力. 对于函数的零点这一重要考点，在前面的教学重点中讲解过，但因为缺乏对函数的零点、函数图像与x轴的交点以及方程的根之间的互换，影响了解题效果. 在本节课教学中，笔者精心挑选问题，引导学生通过自主探究和合作交流，体验等价转换、数形结合等思想方法的重要应用，提高了学生的解题能力. 结合以上教学实践，笔者谈几点教学感悟：

1. 以生为本，完善认知

课堂的主体是学生，要提高教学有效性，必须充分调动学生参与的积极性. 为了让学生能够积极主动地参与课堂教学，教师设计教学方案、组织教学活动时，应从学生出发，遵循教学实际. 在教学中，教师要充分理解学生、理解教材，找到学生的认知漏缺，发现学生学习的难点，找到学生出错的主要原因，以此通过有针对性的引导和启发来完善学生认知，发展学生的学习能力. 例如在本节课教学中，笔者发现学生求解关于函数的零点个数问题时，常常漏洞百出，因此精心设计了此次微专题活动，引导学生通过独立思考、合作交流发现问题的本质，找到解决问题的方法，以此提高解题技能. 整个教学中，教师"以生为本"，鼓励学生从不同角度寻找解决问题的方法，可以发散学生的思维，提高学生数学综合应用能力.

2. 突出热点，避免盲点

考试虽然不是最终目的，却是检查学生学习效果的重要手段. 在高三复习教学中，教师应重点分析高考的热门考点，以此通过有针对性的教学提高学生的应试能力. 如函数的零点问题就是一个热门考点，其重点考查的是学生在处理这些问题时应用的数学方法. 虽然新课标对函数概念教学并没有太高的要求，但若在教学中也仅仅是就概念讲概念，不关注概念的本质及与其他知识间的联系，这样势必会形成一个教学盲点，学生也很难通过等价转换灵活解决此类问题. 因此，在高三复习教学中，教师要认真研究高考，把握高考的命题方向，消除教学盲点，提高学生解决实际问题的能力.

3. 渗透方法，发展能力

在数学教学中，教师要为学生创设一个广阔的学习空间，引导学生去发现、去探索、去交流，以此培养学生的学习能力，提高学生的创造潜能. 在本节课教学中，笔者以学生自主探究为主线，鼓励学生合作交流，以此让学生更好地了解知识背景，体会转化思想对数学学习和解决数学问题的重要意义. 同时，在本节课教学中，笔者鼓励学生多角度思考问题，寻找不同的解决问题的方法，体会数形结合、从特殊到一般等思想方法的价值，借助不同数学语言的相互转化，提升学生的数学素养.

总之，在高三复习教学中，教师应从教学实际出发，了解学生之所想，之所悟，通过有效的引导和启发来激发学生的潜能，让学生理解和掌握数学的研究方法，以此提高学习能力，提升数学素养.

（上接第12页）

教学培养的建议

由于很多学生的数学模型思维薄弱，难以从文字语言、图像信息中提取并建立正确的模型，在当前疫情防控的背景下，教师更要做好课堂工作，在此提出以下建议.

(1)加强审题阅读训练，夯实数学模型基础. 读懂题目始终是数学建模的基础，理解题目内涵，才能正确建立模型并解答问题. 教师在教学过程中应该对那些典型的阅读难度较高的题目进行系统性整理和分析，从题目出发，教会学生如何去审题，如何找到关键信息，分清主次关系.

(2)优化课堂教学过程，提高数学建模能力. 教师要充分利用教师的主导作用来发挥学生的主体地位，优化教学过程，让学生自主参与到数学建模的学习中来，体验数学模型的构建过程，以此提高学生选择并建立数学模型的能力[3].

(3)重视教材内容挖掘，掌握基本数学模型. 高中阶段有很多常用的数学模型，教师应充分利用课本资源，巩固学生对于高中基本模型的基础知识的掌握，并要求学生能熟练完成课后习题.

(4)强化数学运算能力培养，完善数学建模过程. 数学建模当然离不开运算能力，在当今科学技术发展迅速的时代，学生的运算能力却不抵从前，然而运算在数学建模过程中也是重要的一环. 教师应当要求学生多进行自主运算，在作业中可以适当增加运算量.

(5)关注数学实际应用，开阔数学建模眼界. 数学来源于生活，并服务于生活，若离开实际应用，则数学就只是一纸空文. 因此教学过程中，教师要注重引导和培养学生在实际问题中的解题思维，帮助学生总结一般性的活动经验，让学生进一步体会数学与实际相联系的过程，激发学生的数学学习兴趣，同时培养学生的探究创新精神.

参考文献：

[1] 郑笑梅，姚一玲，陆吉健. 中美数学英才教育课程及其实践的比较研究[J]. 数学教育学报，2021，30(04)：68-72+88.

[2] 王雅妍，陆吉健. 基于数学建模核心素养视角的数学测评研究——以杭州市近五年中考数学试题为例[J]. 数学教学通讯，2021(29)：3-4+28.

[3] 陆吉健，丁姣娜. 数学核心素养的高考测评及其培养[J]. 中学数学杂志，2020(01)：1-4.

[4] 高琼，陈薏仁，陆吉健. 数学核心素养的中考测评分析及思考——以近五年杭州市中考为例[J]. 中学数学教学参考，2021(14)：54-57.