立足学科本质　培育数学素养
——2022年甲卷理科第10题分析与启示

■黎方平

摘要：分析研究高考试题，对促进教师理解教学起着重要作用。参考《中国高考评价体系》中关于高考数学试题的分析框架，分析2022年高考数学甲卷理科第10题的试题情境、必备知识、考查要求、解题方法。解答数学高考试题，要自然地运用学过的基础知识与基本方法，发挥教材例题的典型作用，探索、发现问题本质，运用思维的力量解决问题，在问题解决中提升学生简练思考与表达的能力，培育学生数学素养。教学实践中，为培育学生数学素养，教师要指导学生有序逐级地思考，关注学生不同学习阶段的认知水平，因时应势地设置教学目标，帮助学生逐步理解本质，实现高效教学。

关键词：2022年甲卷理科第10题；数学素养；学科本质

中图分类号：G623.56　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-4289(2022)12-0012-04

一、试题呈现

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左顶点为$A$，点$P,Q$均在$C$上，且关于$y$轴对称。若直线$AP,AQ$的斜率之积为$\frac{1}{4}$，则$C$的离心率为(　　)。

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{1}{3}$

本题设置学习探索情境，以高中数学中代数与几何板块中的主干内容——解析几何为内容载体，以求椭圆离心率问题作为任务，考查点的对称性、直线的斜率及其计算、椭圆的方程及离心率的计算等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力，考查函数与方程、数与形结合、特殊与一般等数学思想方法，考查极限思想。试题的解答，要求学生具有一定的数学理性思维，对数学运算、逻辑推理、直观想象等数学学科素养有一定的要求。

二、解题思路

对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，为求得椭圆的离心率$\frac{c}{a}$(比值)，在三个量$a,b,c$中，因为$a^2=b^2+c^2$，需要从直线$AP,AQ$的斜率之积为$\frac{1}{4}$中获得关于$a,b,c$的另一个方程，才能获解。因此，问题的关键就是用恰当的方法翻译这一条件。

(一)“本手”①——解析几何最基本的研究方法

坐标法是解析几何中最基本的研究方法。对于高中学生，在面对一个几何问题时，如果不能快速获得综合几何的解法，则用坐标法求解是最自然的

思考。这是数学解题思考的“本手”——根据问题的基本特点，从相关的知识出发，结合条件的基本特征，按基本规律进行思考、解答。

解法一：

设点P的坐标为(x_1,y_1)，由点P,Q均在C上，且关于y轴对称，得点$Q(-x_1,y_1)$，$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，即$\frac{y_1^2}{a^2-x_1^2}=\frac{b^2}{a^2}$。

于是，$k_{AP}k_{AQ}=\frac{y_1}{x_1+a}\cdot\frac{y_1}{-x_1+a}=\frac{y_1^2}{a^2-x_1^2}=\frac{b^2}{a^2}$。由已知，$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，即$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$。而$a^2=b^2+c^2$，故$4b^2-b^2=c^2$，从而离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

整个解答过程，只需要运用相关的基础知识反映条件，应用解析几何的基本方法建立联系，便可以顺畅解决问题，没有多大的思维量和运算量，耗时也不多，充分体现了高考对扎实基础的要求。解答好高考数学试题，“本手”是最重要的。

(二)“熟手”——发挥教材例题的典型作用

1.分析典型探方法

人教A版(2019版)的第108页例题3是这样的：

设A，B两点的坐标分别为$(-5,0)$，$(5,0)$。直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积是$-\frac{4}{9}$，求点M的轨迹方程。

根据题意，设点M的坐标为(x,y)，那么直线AM，BM的斜率就可用含x,y的关系式分别表示。由直线AM，BM的斜率之积，可得出x,y之间的关系式，进而得到点M的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm5)$。

在学生完成上面的探索后，有必要引导学生从两个方面进一步探究。

其一，所求方程的轨迹为椭圆，椭圆方程中的$a^2=25$，$b^2=\frac{100}{9}$，从而$A(-5,0)$，B$(5,0)$为该椭圆的顶点，且$-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{4}{9}$。

其二，椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm5)$上任意一点$M$与顶点$A(-5,0)$，B$(5,0)$连线的斜率乘积为$-\frac{4}{9}$。

将问题一般化：

与定点$A(-a,0)$，$B(a,0)$的连线斜率乘积为$-\frac{b^2}{a^2}$的动点M都在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，而椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,x\neq\pm a)$上的任意点与其顶点$A(-a,0)$，$B(a,0)$的连线斜率乘积为$-\frac{b^2}{a^2}$。

教学中，对典型问题进行深化、拓展，引导学生将问题一般化，或者变换条件进行思考，能促进学生更深刻地理解知识、掌握方法，形成具有个体感受和体验的活动经验。

以此为基础，可以简化解法一的求解过程，从另一个角度反映已知条件，进行有效的思考。

解法二：

如图1，设点B为椭圆的右顶点，则由A，B关于y轴对称得$k_{AQ}=-k_{BP}$，由$k_{AP}k_{AQ}=\frac{1}{4}=k_{PA}\cdot(-k_{PB})$，得$-\frac{1}{4}=k_{PA}k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$，从而离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

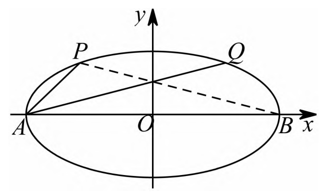

图1

上述解法，与学生学习的基础知识、教材例题联系紧密。这样的考查，有利于引导学生对平时学习的基本问题深入思考，从机械刷题训练中走出来；引导教师体会用教材教学，通过拓展与探索，培养学生的抽象思维能力，减少不必要的训练，实现教学的提质增效。教学中，适当的一般化处理是非常必要的。

2.拓展引申寻本质

在教学中，根据学习实际可以引导学生继续深

入探讨。将顶点A，B关于椭圆中心的对称一般化，通过猜想、证明，发现更具一般性的结论。

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的任意点$M$与其上两点$P(x_1,y_1)$，$Q(-x_1,-y_1)$的连线斜率乘积为$-\frac{b^2}{a^2}$（点$M$异于点$P,Q$）。

有这样的分析和探索之后，学生也可能会得到如下解法。

解法三：

如图2，设点P关于x轴的对称点为P_1，则点P_1与点Q关于原点O中心对称（也可以直接作Q关于O的对称点P_1，说明点P,P_1关于x轴对称），而点A在椭圆上，故$k_{AP_1}k_{AQ}=(-k_{AP})k_{AQ}=-\frac{1}{4}$，即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，所以离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

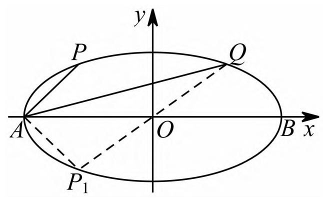

图 2

从解题过程看，解法二、三直接应用探索获得的“二级结论”，更为便捷地获得了$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$。

需要指出，如果学生不清楚二手结论的本质，而是单纯记忆结论，遇题盲目套用，“熟手”也就容易变成“俗手”，是教学中应该避免的。

（三）“妙手”——以数学思想为指导的解题

在复习阶段，还要从更高的思维层次来看待这一问题。题中的P,Q是椭圆上关于y轴对称的任意两点，解决的是具有普遍性的结论，自然对极端情形也成立。因此，引导学生运用“特殊与一般”的关系，从而会有如下简练的思考。

解法四：

设椭圆的一个短轴端点为C，由题意，对任意关于y轴对称的点P,Q，总有$k_{AP}k_{AQ}=\frac{1}{4}$成立。当点P,Q均无限接近点C时，直线AP与AQ无限接近AC，从而$k_{AC}=\frac{1}{2}$，即$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，则离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

这里以理解特殊与一般的关系为核心，运用极限思想完成转化，充分体现了在数学思想指导下去解决问题，就可能出“妙手”。这样的思考，正是学生思维品质的体现，也是学生数学学科核心素养的反映，更展现了高考试题对学生数学能力的有效区分。

三、培育数学核心素养的启示

（一）逐级思考是培育素养的有效途径

学生在面对具体问题时，会依据自身的知识和经验储备进行思考。通过教学，希望学生能形成有序、多级的思考方式，进行有层次的思考。通过本题的分析，可以把解题思考分为以下三个层次：

第一，自然的思考。根据条件、结论的特征和解题需要，直接反映基础知识，联系基本方法，尝试解决问题（如解法一）。

第二，有效的思考。注意问题背景、解题目标，考虑不同表达，排除运算与思考障碍，使解题过程更为简捷，提升解题效益（如解法二、三）。

第三，简练的思考。注意知识、方法的核心应用背景，深入挖掘问题情境的本质特征，更综合地运用内在关系，运用数学思想，简练地表达条件和结论，用思维的力量解决问题，优化思维层次（如解法四）。

在解决具体问题时，自然的思考可能得到的是最费时费力的方案，要引导学生思维不断向有效思考、简练思考发展，这在解题教学中尤其重要。

（二）因时应势是有效教学的必然要求

学生的认知能力是在学习过程中逐渐发展的，因此教学目标的设定要依赖于学生学习的实际情况，做到任务分层，难度逐级提升。

新课教学中，要注重基础性。在学习了离心率的概念后就可以用这个试题作为当节课的思考题，学生能运用解析几何的基本研究方法给出第一种解答，也可能给出第二种解答。教师在充分注意“基

础性”的前提下，可引导学生分享自己的思考和解法，既能起到复习巩固基本知识和基本方法的作用，也能引导学生综合应用前面所学来深入思考，培养探索的习惯，提升对数学问题的探究能力。

复习教学中，要注重综合性。复习教学的目的在于“温故知新”，知新的关键在于对教材的再创造，促进学生优化知识结构，深化数学认识，提高其数学素养。在复习教学阶段，如解法三的分析，可以按照特殊到一般的路径，引导学生认识本题的“几何本质”，加深学生对椭圆定义的认识，并进一步认识椭圆的对称性及斜率乘积的不变性。在具体求解时，又可以利用特殊与一般的关系，创新性地获得解法四，实现思维的高阶发展。

学习过程中，要注重延伸性。本题的研究，从特殊的椭圆出发，推广到椭圆具有的一般性质，最后又结合“一般与特殊”的关系，利用极端情况获得了解答。新课学习伊始，从坐标角度认识斜率乘积为$-\frac{1}{4}$，促进学生从方程的角度理解本题，达成理解基础知识、掌握基本方法的目标。随着学习的推进，将教材典型例题一般化，获得了$k_{MP}k_{MQ}=-\frac{b^2}{a^2}$这个结论，实现特殊到一般的深化。进入复习阶段，还要从类比推理的角度加以引导，类比“圆上一点与直径两端点连线垂直”可以更加深刻认识椭圆直径具有的$k_{MP}k_{MQ}=-\frac{b^2}{a^2}$这一性质，实现对椭圆直径认识的深化。教学中，适时地进行拓展，让学生真正理解这个性质，获得“如何逐步深入问题本质，如何对问题进行拓展和探索”的经验，提升数学思维品质。

(三)理解本质是学习知识的永恒追求

本题突出了内容主线和反映数学本质的核心概念、主要结论、通性通法，特别关注了数学学习过程中探究与发现等思维品质的形成，关注学生会学数学的能力。

教学中，教师始终应把促进学生理解数学本质放在首位，以提升学生数学学科核心素养为目标，培养学生在面对问题时能从自然的思考向有效的思考过渡，最终实现简练思考的能力。

教无定法，关键在得法。我们教学追求的是提升学生的数学素养。表现在解决数学问题时，形成了具有思维价值的思考程序、思维模式，能把握一个数学关系产生和发展的过程，深入问题本质，养成探索的习惯，在面对复杂情境、新颖的问题时，能创造性地发现问题、分析问题、探索提出问题并最终解决问题。

注释：

①“本手、妙手、俗手”是围棋的三个术语。本手是指合乎棋理的正规下法；妙手是指出人意料的精妙下法；俗手是指貌似合理，而从全局看通常会受损的下法。对于初学者而言，应该从本手开始，本手的功夫扎实了，棋力才会提高。一些初学者热衷于追求妙手，而忽视更为常用的本手。本手是基础，妙手是创造。一般来说，对本手理解深刻，才可能出现妙手；否则，难免下出俗手，水平也不易提升。

——摘自全国新课程Ⅰ卷语文作文题

参考文献：

[1]教育部考试中心.中国高考评价体系的说明[R].北京：人民教育出版社，2019：11.

[2]罗增儒.基于核心素养的教学研修(续)——在“核心素养背景下数学教师的专业发展”(南京)会议上的发言(整理)[J].中学数学教学参考,2018,(28):2-8.

(作者单位：成都石室中学<文庙校区>，成都 610041)