聚焦数学核心素养 引导立体几何教学①

——以 2021 年高考数学全国甲卷文科第 19 题为例

刘 熙 刘冰楠②

(云南师范大学数学学院 650500)

高考数学文科立体几何试题一般以棱柱、棱锥为载体,主要考查空间几何体的体积计算,直线与直线、直线与平面、平面与平面位置关系的证明等知识.突出考查阅读理解、信息整理、语言表达、批判性思维四项关键能力;题目蕴含了数形结合、转化与化归等思想方法。这些题目往往较为聚焦学生的直观想象、逻辑推理、数学运算等数学学科核心素养,可有效考察“四基”和“四能”的落实情况.因此立体几何试题具有较高的数学学科育人价值和核心素养发展价值,在高考中占有举足轻重的地位.

本文以 2021 年高考数学全国甲卷文科第 19 题为例,对第(1)问从三棱锥的四个侧面分别求其体积,对第(2)问从综合几何方法、向量坐标法、向量基底法三个维度探析其不同解法,从而在一个广阔的知识平台上获得对数学本质的多维度、多层面的认识;并通过广泛调研,归纳错因,提出针对性的教学建议.

1 试题呈现

如图 1,已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 AA_1B_1B 为正方形,$AB=BC=2$,E、F 分别为 AC 和 CC_1 的中点,$BF\perp A_1B_1$.

(1)求三棱锥 $F-EBC$ 的体积;

(2)已知 D 为棱 A_1B_1 上的点,证明:$BF\perp DE$.

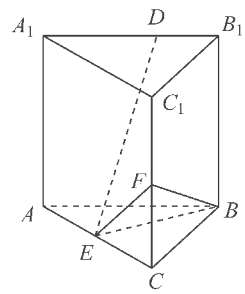

图 1

基于对甲卷文科第 19 题的深入剖析,该试题聚焦《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》考核要求——“了解一些简单几何体的体积计算方法;掌握基本空间图形的概念和基本特征;会简单应用平行、垂直的性质定理;运用向量的方法研究空间基本图形的位置关系;重点提升直观想象、逻辑推理、数学运算素养”[1],主要考查空间几何体的结构特征,三棱锥的体积计算,空间中直线与直线、直线与平面平行(垂直)的性质和判定,利用向量方法证明直线与直线垂直等知识,涉及的知识面广,综合性强.此外,该试题聚焦直观想象、逻辑推理、数学运算等数学学科核心素养,蕴含数形结合、转化与化归等思想方法,有效发挥了高考的选拔功能.

该试题可灵活选择三棱锥的四个侧面为底面求其体积,择优选择综合几何方法或向量方法证明直线与直线垂直,这在一定程度上考虑到学生解题思维、解题习惯的差异性,尊重和保护学生自

① 基金项目:2021 年度教育部人文社会科学研究青年基金项目“建党百年来我国中学数学教科书学科德育演变研究”(21XJC880002);2020 年度云南省教育厅科学研究基金教师类项目“数学(教师教育)本科数学史课程建设研究”(HX2019120338).

② 本文通讯作者,email:liubingnan1986@163.com.

主的选择性. 此外，还需要学生具备阅读理解关键能力，以便弄清题意；需要具备批判性思维、信息整理能力，以便优化解题策略；需要具备语言表达能力，使解题思路可视化.

2　第(1)问解法探究

第(1)问综合考查三棱锥体积的计算、直线与平面垂直的性质和判定等简单几何性质知识. 计算三棱锥的体积时，可选取不同的侧面作为三棱锥的底面，求出其顶点到底面的距离即可求得三棱锥的体积. 该问题的设置满足无论以哪个侧面为三棱锥的底面都可以求出其体积，只是难易程度不同. 这不仅可以让学生从不同视角审视三棱锥的几何特征，更重要的是让学生在面临选择时，对问题进行深入分析、灵活选择解题方法以优化问题的解决.

当分别以每个侧面为底面计算体积时，涉及一些重复的推理步骤. 部分重复的推理步骤如下：

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱，
所以各侧棱都垂直于底面，
所以 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，
所以 $A_1B_1\perp BB_1$.
又 $A_1B_1\perp BF$ 且 $BB_1\cap BF=B$，
所以 $A_1B_1\perp$ 平面 B_1BCC_1，
所以 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1，所以 $AB\perp BC$，
所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{2}$.
因为 E 为 AC 的中点且 $AB=BC=2$，
所以 $AE=EC=\sqrt{2}$，$BE\perp AC$，
所以 $BE=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，
所以 $BE=EC=\sqrt{2}$，
所以$\triangle ABC$ 和$\triangle BEC$ 都为等腰直角三角形.

在以下的推理过程中若需借助上述相关结论便不再赘述.

2.1　解法探析

解法 1(以$\triangle BCE$ 为底计算体积)：

因为 $CC_1\perp$ 平面 ABC，
所以 CF 为三棱锥 $F-EBC$ 以$\triangle BCE$ 为底对应的高，

所以 $V_{F-EBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle EBC}\times CF$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BE\times EC\times CF$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{1}{3}$.

解法 2(以$\triangle EFC$ 为底计算体积)：

因为 $CC_1\perp$ 平面 ABC 且 $BE\subset$ 平面 ABC，
所以 $CC_1\perp BE$.
又 $BE\perp AC$，$CC_1\cap AC=C$，
所以 $BE\perp$ 平面 A_1ACC_1，
所以 BE 为三棱锥 $F-EBC$ 以$\triangle EFC$ 为底对应的高，

所以 $V_{F-EBC}=V_{B-EFC}=\frac{1}{3}S_{\triangle EFC}\times BE$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times FC\times EC\times BE$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{1}{3}$.

解法 3(以$\triangle BCF$ 为底计算体积)：

如图 2，取 BC 的中点 M，连接 EM.

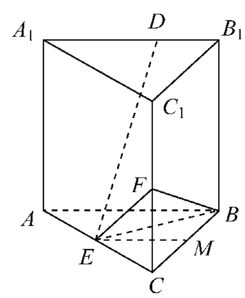

图 2

因为 $BE=EC=\sqrt{2}$，M 为 BC 的中点，
所以 $EM\perp BC$，$EM=1$.
又 $CC_1\perp$ 平面 ABC，
所以 $CC_1\perp EM$，所以 $EM\perp$ 平面 C_1CBB_1，
所以 EM 为三棱锥 $F-EBC$ 以$\triangle BCF$ 为底对应的高，

所以 $V_{F-EBC}=V_{E-BCF}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCF}\times EM$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times FC\times BC\times EM$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 2\times 1=\frac{1}{3}$.

解法 4(以$\triangle EFB$ 为底计算体积)：

如图 3，连接 A_1E，过点 C 作 A_1E 的平行线交 EF 于点 G. 由第(1)问解法 2 知，$BE\perp$ 平面 A_1ACC_1，

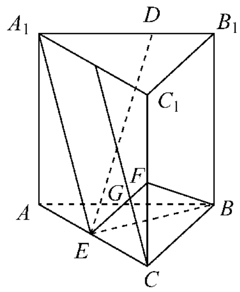

图 3

所以 $BE\perp A_1E$ 且

$A_1E=\sqrt{6}$，$EF=\sqrt{3}$，$A_1F=3$，

所以 $EF\perp A_1E$，所以 $A_1E\perp$ 平面 BEF.

又 $CG /\!/ A_1E$，所以 $CG\perp$ 平面 BEF，

所以 CG 为三棱锥 $F-EBC$ 以 $\triangle EFB$ 为底对应的高，且 $CG\perp EF$.

又 $EF=\sqrt{3}$，$BE=\sqrt{2}$，$BF=\sqrt{5}$，

所以 $EF\perp BE$.

因为 $\frac{1}{2}\times CE\times CF=\frac{1}{2}\times EF\times CG$，

所以 $CG=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$
\begin{aligned}
\text{所以 } V_{F-EBC}=V_{C-BEF}&=\frac{1}{3}S_{\triangle BEF}\times CG\\
&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times EF\times BE\times CG\\
&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

2.2　解后反思

第(1)问解答的关键在于条件“$BF\perp A_1B_1$”的利用. 在解答时学生难以明晰这一条件的命题意图——证明 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1，从而导致失分. 四种解法都运用了 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1 这个结论，因此正确利用“$BF\perp A_1B_1$”是解题的关键. 在立体几何解答题中，如出现“线线垂直”条件一般有以下几种命题意图：证明线面垂直、面面垂直，计算线段长度，求角度等.

上述解法均体现了求三棱锥体积的本质——求底面面积、相应高的长度，蕴含丰富的思想方法，有效落实逻辑推理、数学运算、直观想象等数学学科核心素养，突出考查阅读理解、信息整理、语言表达、批判性思维四项关键能力. 在明晰条件“$BF\perp A_1B_1$”的命题意图后，解法 1 只需进行简单推理即可快速得出答案，这也是学生容易想到的解法. 解法 2 和解法 3 相对较难，更能彰显求三棱锥体积的关键——证明过顶点的某直线垂直于底面，如解法 2 证明 $BE\perp$ 平面 EFC，解法 3 证明 $EM\perp$ 平面 BCF. 解法 4 较难，不仅涉及求三棱锥体积的一般思路——求底面面积、找到相应高并求其长度，而且需要复杂的推理，这就要求学生具备严谨的推理思路和清晰的数学思维，同时促进学生逻辑推理、直观想象等数学核心素养的进一步发展.

3　第(2)问解法探究

第(2)问主要考查异面直线垂直问题，从综合几何方法的角度，“这类问题的基本策略是借助线面垂直证线线垂直”[2]，这种方法着重培养学生的逻辑推理、直观想象素养. 该问题也可借助“集数与形于一身”的向量，从“数”的角度，建立空间直角坐标系，将证明两异面直线垂直转化为证明直线的方向向量垂直，进而将几何问题转化为向量的代数运算，这种方法着重发展学生的数学运算素养；从“形”的角度，选取三个不共面的向量(即基底)，借助空间向量基本定理和向量的数量积运算解答，这种方法不仅给学生提供了一个新的视角证明异面直线垂直，而且让学生“理解基底法的本质是空间向量基本定理”[3]. 综合几何方法和向量方法都是解决空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面位置关系的通用方法. 另外通过推理可以发现本题还可利用三垂线定理进行解答.

3.1　综合几何法

解法 1　如图 4，取 BC 的中点 M，连接 A_1E，B_1M，EM. 因为 E、M 为线段 AC、BC 的中点，

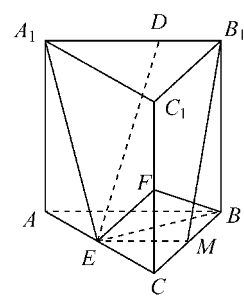

图 4

所以 $EM /\!/ AB$，
所以 A_1、B_1、M、E 共面，
所以 $DE \subset$ 平面 A_1B_1ME，
又 $\triangle FCB \cong \triangle MBB_1$，所以 $BF \perp B_1M$.
又 $BF \perp A_1B_1$，所以 $BF \perp$ 平面 A_1B_1ME，
所以 $BF \perp DE$.

解法 2 由第(1)问解法 4 知，$A_1E \perp$ 平面 BEF，所以 $A_1E \perp BF$，而 $DA_1 \perp BF$，
所以 $BF \perp$ 平面 DEA_1，所以 $BF \perp DE$.

解法 3 如图 5，连接 A_1E，A_1F，B_1E.

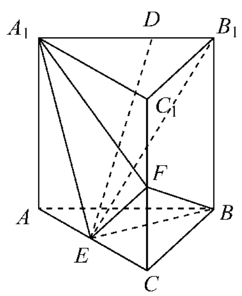

图 5

由第(1)问解法 4 知，$A_1E \perp$ 平面 BEF，
所以 $A_1E \perp BF$，而 $A_1B_1 \perp BF$，
所以 $BF \perp$ 平面 A_1EB_1，所以 $BF \perp DE$.

解法 4 如图 6，取 BC 的中点 M，连接 EM，B_1M.

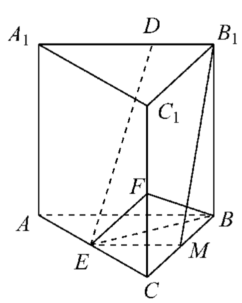

图 6

因为 $A_1B_1 \perp$ 平面 B_1BCC_1，
所以 $EM \perp$ 平面 B_1BCC_1，
所以 B_1M 是 DE 在平面 B_1BCC_1 上的射影，
又 $\triangle FCB \cong \triangle MBB_1$，所以 $BF \perp B_1M$，
所以由三垂线定理知，$BF \perp DE$.

3.2 向量坐标法

解法 5 由第(1)问知，BA、BC、BB_1 两两垂直，故以 B 为原点，建立如图 7 所示的空间直角坐标系. 此时 $B(0,0,0)$，$F(0,2,1)$，$E(1,1,0)$，设 $D(a,0,2)$，所以 $\overrightarrow{BF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，且 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0+2-2=0$，故 $\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{DE}$，于是 $BF \perp DE$.

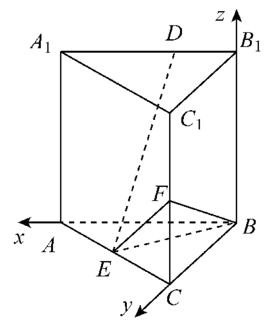

图 7

该问也可选取点 B 为原点，BC 所在直线为 x 轴，BA 所在直线为 y 轴，BB_1 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用上述方法求解.

3.3 向量基底法

解法 6 $\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BB_1}$ 这三个向量两两垂直不共面，$\{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}\}$ 构成空间的一个基底，设 $\overrightarrow{DB_1}=a\,\overrightarrow{B_1A_1}=a\overrightarrow{BA}$，

则 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BE}\\&=a\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{2}\times(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\\&=\left(\frac{1}{2}+a\right)\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}\right)\cdot\\&\quad\left[\left(\frac{1}{2}+a\right)\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB_1}\right]\\&=\left(\frac{1}{2}+a\right)\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\\&\quad\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a\right)\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}-\\&\quad\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}\\&=0+\frac{1}{2}\times4\cos0^\circ-0+0+0-\frac{1}{2}\times4\cos0^\circ\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $BF \perp DE$.

该问也可取其它不共面的三个向量作为基

底，如取 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}\}$ 或 $\{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}\}$ 为空间的基底，利用上述方法求解.

3.4　解后反思

从上述第(2)问的三类共六种解法可以发现，对于异面直线垂直问题可以从不同的角度(综合几何方法、向量坐标法、向量基底法)进行解答，这对培养学生数学思维的多元化、多层面认识数学的本质有莫大助益，“这说明试题命题者充分尊重学生个体差异，求同存异，体现公平性原则”[4]. 虽然“综合几何方法和向量方法都可以解决问题，但在培养学生思维水平方面的作用显然是有高低之分的”[5]. 其中利用空间中直线与直线、直线与平面平行(垂直)的性质和判定或三垂线定理进行解答是综合几何方法，这种方法可以培养学生直观想象、逻辑推理等数学学科核心素养，更能体现学生逻辑的严谨性和整体性；借助空间直角坐标系采用坐标法进行解答是向量的代数表征，这种方法简化了运算、优化了思维过程，是快速解题的有效途径；借助空间向量基本定理采用基底法是向量的几何表征，任何空间向量都可以用基底表示，这也是向量的精髓所在.

运用综合几何方法证明线线垂直一般采用“先证线面垂直再证线线垂直”的思路进行求解，例如解法 1、2、3 分别证明 BF 垂直 DE 所在的平面 A_1B_1ME、平面 DEA_1、平面 A_1EB_1. 深入剖析后发现平面 DEA_1、平面 A_1EB_1 即为平面 A_1B_1ME，因此该问的关键是证明 BF 垂直平面 A_1B_1ME. 推理发现，该问题也可采用三垂线定理求解.

运用向量坐标法解决立体几何问题时只需找到三条两两垂直的直线，并建立合适的空间直角坐标系，将几何问题转化为向量的代数运算. 在本题中要证 $BF\perp DE$，只需将其转化为证直线 BF 和 DE 的方向向量垂直，即证 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$. 而利用向量的几何表征，可任意选取三个不共面的向量作为基底并利用向量加法表示 $\overrightarrow{BF}$ 和 $\overrightarrow{DE}$，再利用向量的数乘运算、数量积运算法则计算 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}$，验证其是否等于 0.

4　主要错因分析

考生在答题中存在认知障碍，表现为出错类型多种多样，通过广泛调研并进行归类分析，主要可概括为以下几种.

4.1　误识直棱柱概念本质

本试题以棱柱为载体，涉及直棱柱的概念，考生在答题前应明确直棱柱的概念，熟悉其结构特征和几何性质，但部分考生在回忆直棱柱概念时，由“三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直棱柱”直接推导出“$AB\perp BC$”“$AC\perp CB$”或“$AB\perp AC$”，这显然是考生对直棱柱概念的本质认识不正确、理解不透彻的表现. 直三棱柱并非是底面为直角三角形的三棱柱，而是侧棱垂直于底面的三棱柱.

4.2　误读空间中图形语言

“用好图形语言是解决立体几何问题的关键一环”[6]，但误读图形语言在立体几何解答中屡见不鲜. 例如在本题中考生想当然地见图生意，未进行推理便误认为 $CA\perp CB$，将图形语言错误地表征为数学符号语言导致解题错误. 这也是考生理性思维薄弱的表现. 若 $CA\perp CB$，则斜边 AB 不可能等于直角边 BC 或 AC，而题目中已知 $AB=BC=2$，与数学事实不符.

4.3　误写空间中点的坐标

一些考生的解题错误归因于空间观念淡薄，空间想象能力薄弱. 例如第(2)问中，考生已正确建立空间直角坐标系，但由于空间想象能力有所欠缺，表示空间中点的坐标时出现了错误，如在解法 5 中将点 F 的横坐标误认为 1. 在表示点的坐标时，学生容易在横坐标和纵坐标上出错，解决策略是将空间问题平面化，即在二维平面上画出平面 xOy，方便正确写出空间中各点的坐标.

4.4　误用线线垂直的条件

“逻辑推理是得到数学结论、构建数学体系的重要方式，是数学严谨性的基本保证，是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质.”[7] 逻辑推理能力是解答立体几何题必备的基本技能，该题的解答在一定程度上反映出考生推理能力不足. 一方面考生难以明晰条件“$BF\perp A_1B_1$”的命题意图——证明 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1，以至于无从下手；另一方面即使考生明确条件“$BF\perp A_1B_1$”的命题意图，但在推理过程中仍出现逻辑不清晰、思路不简明、书写不规范等现象.

4.5　误证直线与平面垂直

一些考生在第(2)问会选择证明 $BF\perp$ 平面 DEF，出现这种情况的原因是多方面的. 第一，试卷上的立体图形出现点 D 和点 F 的连线，这在

一定程度上“误导”考生“要证 $BF\perp DE$，只需证 $BF\perp$ 平面 DEF”．第二，批判性思维薄弱．面对“陷阱”，考生并未进行解题思路可行性的分析，直接在答卷上“凑”$BF\perp$ 平面 DEF 的条件，试图得到 $BF\perp DE$．第三，思辨论证能力缺乏，若此解题思路可行，将问题特殊化（点 D 位于点 B_1 处），但 BF 并不垂直于平面 EFB_1 内的直线 EF（已证明在$\triangle EFB$ 中，$EF\perp BE$），于是 BF 不垂直于平面 EFB_1，由于特殊情况不成立，故“先证 $BF\perp$ 平面 DEF，再证 $BF\perp DE$”的解题思路不可行．第四，优化解题策略能力薄弱，要证明 $BF\perp DE$ 有两种思路：证明 BF 垂直 DE 所在的平面或证明 DE 垂直 BF 所在的平面，后一种思路显然不可行，DE 为方向改变的动直线，它不可能垂直于定平面．

由此可见，高考不仅考查数学知识的运用、数学思想方法的渗透、数学学科核心素养的落实，也注重培养学生分析问题、优化选择解题策略的能力，体现高考“重视理性思维，坚持素养导向、能力为重的命题原则”[8]．

5　教学建议

通过这道立体几何试题可以管窥高考数学命题“聚焦学生对重要概念、定理、方法、思想的理解和应用，强调基础性、综合性，注重数学本质”[1]，同时注重培养多角度解决问题的能力、促进数学思维的多元化、发展数学学科核心素养．因此在立体几何教学中，建议注重以下几个方面．

5.1　理解基础知识，凸显概念本质

立体几何内容涉及的知识点繁杂、易混淆，学生易对数学概念的本质理解不透彻．因此在教学中，教师应关注学生的学习过程，让学生在有指导的“再创造”过程中透彻理解数学知识的本质，积累解题经验，获得解题技能，感悟数学思想方法．例如直棱柱概念的本质是侧棱垂直于底面；三棱锥体积计算的本质是找到一条垂直于底面的直线并求其相应高的长度；证明线线垂直的解题策略是证明线面垂直或证明直线的方向向量垂直等．此外教师也可结合现代信息技术绘制章节概念图，帮助学生建构有逻辑、有层次的数学知识网络，以便帮助学生透彻理解各概念之间的区别与联系，凸显概念的本质．

5.2　强化作图技能，增强空间观念

章建跃博士指出“当下的课堂，导学案泛滥，几何课不要求学生作图是立体几何教学质量不高的主要原因之一”[9]．立体几何作图是在二维平面上作三维立体图形，图形的绘制可以更清晰地认识空间几何体的结构特征，正确将数学的文字语言、图形语言表征为数学符号语言，避免空间几何体位置关系的误读，同时也可以培养空间想象能力、强化空间意识．在获得几何对象、几何性质定义、定理等教学环节中，教师应强化学生的作图技能，注重增强学生的空间观念．

5.3　渗透思想方法，强化逻辑推理

立体几何试题蕴含数形结合、转化与化归等思想方法，是逻辑推理、直观想象、数学运算素养的主要载体之一．在教学中教师应从学生的认知基础出发，通过设置层层递进的问题串，由易到难，采用分析法、综合法相结合的方式，将目标逐步转化分解，以探究立体几何试题的解答思路．教师也应发挥示范者的作用，不仅分析解题思路，还应通过缜密严谨的逻辑，采用正确的推理案例，示范板书其推理步骤以提高学生的逻辑推理能力．如果有必要还可采用不正确的推理案例强化学生推理语言的叙述，以促进学生逻辑推理能力的进一步提升．

5.4　优化理性思维，培养关键能力

“数学科高考着重考查阅读理解、信息整理、语言表达、批判性思维四项关键能力，且贯穿于解决问题的全过程．”[10]在解题教学中，教师应在解决问题之前注重发挥学生阅读理解的能力，以便弄清题意；在寻求解题思路的过程中培养学生的信息处理能力和批判性思维能力；在书写解答过程阶段注重培养语言表达能力．立体几何题“突出理性思维，考查关键能力”[8]，在教学中教师应鼓励学生批判性地选择综合几何方法或向量方法解决问题并规范书写解答过程．当出现多种解题思路时，教师应引导学生理性地选择正确甚至更优的解题策略．

2021年高考数学甲卷文科的立体几何试题突显“考查重点知识、重视数学本质、落实核心素养、突出理性思维”的命题原则，体现了数学学科的独特育人价值．考查内容围绕“几何与代数”主线，聚焦学生对直棱柱概念的理解和应用，强调基

础性和综合性，注重证明直线与直线垂直的通性通法，淡化解题技巧，有效发挥了高考的选拔功能.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京：人民教育出版社，2020：27－88

[2]王峥嵘，王奇佳，沈恒. 玩中学演中悟 从三个水平层次管窥直观想象素养——以 2020 年浙江高考立体几何解答题为例[J]. 数理化解题研究，2021(7)：29－31

[3]林松. 在反思和追根中提高解题教学效益——以一道向量题为例[J]. 数学通报，2019，58(11)：46－48

[4]宋建辉. 基于学科核心素养的 2019 年高考全国卷立体试题分析[J]. 数学通报，2020，59(1)：47－51，62

[5]李鹏，单墫. 对立体几何教学应用向量法的思考[J]. 数学通报，2008，47(7)：26－28

[6]李斌，宁连华. 对 2012 年江苏高考立体几何试题的剖析和思考[J]. 数学通报，2013，52(4)：39－40，43

[7]陈玉娟. 从一道高考题谈高中生数学核心素养的缺失与培养[J]. 数学通报，2018，57(3)：33－35

[8]教育部考试中心. 聚焦核心素养 考查关键能力——2021 年高考数学全国卷试题评析[J]. 中国考试，2021(7)：70－76

[9]章建跃. 在一般观念引领下探索空间几何图形的性质——"立体几何初步"内容分析与教学思考[J]. 数学通报，2021，60(2)：11－15，48

[10]任子朝，赵轩，郭学恒. 基于高考评价体系的关键能力考查[J]. 数学通报，2020，59(8)：15－20，24

(上接第 50 页)

丰富的对话，正如数学家保罗・洛克哈特所说：这是创造想象模式的惊人之处，它们会回应！

3.3　误区与窠臼

中考数学试题以新定义为载体，在新的背景下，借助新概念，将核心知识、四基四能、核心素养等融合并举，以考查学生综合运用数学的能力，并在过程中力图培植学生的探究意识，提高学生数学问题的解决能力，其不失为一种中考试题的好模式.

但是，如若此新定义，只是作为一种关系(数量关系、位置关系等)存在；或者在问题串中，充其量只是作为一个已知条件的附着，突兀而孤立；或者只是构成一些支离零碎的数学题目堆砌，而于新事物本质属性的探究、发现与理解无助无益，那么，终究与新定义的初衷相悖.

再有一点值得警示的是：新定义试题的原意与初心，是希冀开辟一个新的疆域，进行数学思想方法的迁移与应用. 但是，如若形成了某一种相对稳定的范式，那么就会陷人一个新的"固定模型"，师生必将困于一个新的"窠臼桎梏"，终究也与新定义的初衷相悖.

结束语

行文至此，蓦然有一番浮想联翩：1900 年希尔伯特的 23 个世纪难题，如第 8 个黎曼猜想，素数的分布等等，一百多年来令数学家们前赴后继——阿蒂亚的宣称、邦别里的愚人节戏谑；……虽然，准等距点的个数、中内弧的排布、非常距离的最值……远远没有黎曼假设来得伟大，但是，人类心灵对于探索发现大自然之秩序规律的渴望与追求，是一脉相承的.

《小王子》的作者圣・埃克苏佩里说：如果你要造船，不要招揽人来搬木柴，不要给人指派任务和工作，而是要教他们去渴望那广袤的大海.

行数学探究之旅，品数学思维之美. 新定义试题的研习，不仅仅是为了对付一场中考，从生命的意义来看，更重要的是，呵护学生们对天地万物的好奇之心，培植学生们对自然科学的探究之力，从而使学生们拥有对大千世界的品赏之悦，以达至心灵的快乐和精神的富足. 此乃数学独特的育人价值之所在.

参考文献

[1] 吴增生. 初中数学毕业考试命题变革的思考与实践[J]. 数学通报，2021，60(1)：41－51

[2] 章建跃. 基于数学整体性的"四边形"课程、教材及单元教学设计[J]. 数学通报，2020，59(6)：4－9，36

[3] 张安军. 台州市十年数学中考"新定义"试题赏析与命制[J]. 数学教学，2016(7)：37－43

[4] 毛玉忠. 北京中考数学"新定义"试题解题策略[J]. 中学教学，2016(8)：37－38

[5] 郑瑄，沈吉儿. 例谈数学教学中慢与快的辩证法[J]. 数学通报，2018，57(11)：21－25

[6] 蒋荣清. 一道新定义几何题的"前生、今世、未来"[J]. 中学教研，2013(12)：31－32

[7] Francis Su. Mathematics for Human Flourishing [M]. Yale university press，2020

[8] Marcus du Sautoy. The Music of the primes[M]. 北京：人民邮电出版社，2019

[9] Paul Lockhart. A Mathematician's Lament[M]. 上海：上海社会科学院出版社，2019

[10] Godfrey Harold Hardy. A Mathematician's Apology[M]. 北京：人民邮电出版社，2020