专题 3　一元函数积分学

（A 组）基础题

1.【考点定位】定积分的换元法；　定积分的几何意义。

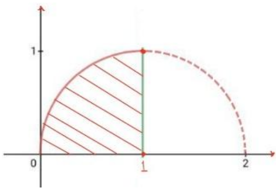
【答案】$\dfrac{\pi}{4}$

【解】方法一：

$$I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)$$

$$\overset{u=x-1}{=}\int_{-1}^0\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u\overset{u=\sin\theta}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^0=\frac{\pi}{4}。,$$

方法二：因为 $y=\sqrt{2x-x^2},x\in[0,1]$ 即是 $(x-1)^2+y^2=1,x\in[0,1],y\in[0,1]$，所以曲线 $y=\sqrt{2x-x^2},x\in[0,1]$ 是圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的位于第一象限的四分之一圆弧（如图？）。由定积分的几何意义得，　$I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$。



图？

2.【考点定位】定积分的换元法；反常积分。

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解】令 $\sqrt{x-2}=t$，则 $x=t^2+2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，从而

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2+9)t}=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+9}\mathrm{d}t\quad,$$

下面用两种方法计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+9}\mathrm{d}t$：

方法一：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+9}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1}\mathrm{d}\frac{t}{3}=\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{6}$;

方法二：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+9}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+3^2}\mathrm{d}t\overset{t=3\tan\theta}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{9\sec^2\theta}3\sec^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}$。

故原式$=2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$。

3.【考点定位】奇偶函数积分的性质；瓦里士公式。

【答案】$\dfrac{\pi}{8}$

【解】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2 x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$。

下面分别计算$I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2 x\mathrm{d}x, I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$。

$$I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2 x\mathrm{d}\overset{\text{奇函数}}{=\!=}0;$$

我们用两种方式计算$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$：

方式一：

$$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x\cos x)^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8};$$

方式二：

$$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x\overset{\text{偶函数}}{=\!=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$
$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x\right)=2\left(\frac{1!!}{2!!}\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{3\times1}{4\times2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}。$$

所以，原式$=I_1+I_2=0+\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{8}$。

【注】以下常用的结果称为瓦里士公式，要求同学们会推导并牢记：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为正奇数}，\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}，\end{cases}$$

其中$n!!=n\times(n-2)\times(n-4)\cdots\times1$($n$为奇数)，$n!!=n\times(n-2)\times(n-4)\cdots\times2$($n$为偶数)，

例如：$7!!=7\times5\times3\times1=105, 6!!=6\times4\times2=48$。

4.【考点定位】反常积分；定积分的换元法。

【答案】1

【解】方法一：

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_{e}^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}\xlongequal{u=\ln x}\int_{1}^{+\infty}\frac{du}{u^2}=(-\frac{1}{u})\Big|_1^{+\infty}=1。$$

方法二：令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，$dx=e^t dt$，从而

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_{1}^{+\infty}\frac{e^t dt}{e^t\cdot t^2}=\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^{+\infty}=1。$$

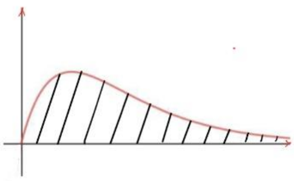
5.【考点定位】定积分的几何应用； 反常积分。

【答案】1

【解】我们用两种方法求该无界图形的面积(如图？)

方法一： $S=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=\Gamma(2)=1!=1$

方法二： $S=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=\int_0^{+\infty}xd\left(-e^{-x}\right)=\left(-xe^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=0+\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty}=1$ 。



图？

【注】在方法一中，我们用到了重要的反常积分---Γ 函数。以下关于 Γ 函数的几个重要结果同学们要会推导并牢记： $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha>0)$

①递推公式 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，(利用分部积分)；② $\Gamma(1)=1,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

③ $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)=n!$。

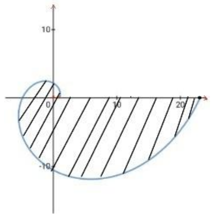
例如：

$$\int_0^{+\infty}\left(3x^2+4x-1\right)e^{-x}dx=3\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx+4\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx-\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$$
$$=3\Gamma(3)+4\Gamma(2)-\Gamma(1)=3\times 2!+4\times 1!-1=6+4-1=9。$$

6.【考点定位】定积分的几何应用。

【答案】 $\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$

【解】如图所示，所求面积 $A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(e^{a\theta})^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{2a\theta}d\theta=\frac{1}{4a}e^{2a\theta}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$ 。



7.【考点定位】分段函数的定积分；定积分的换元法。

【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解】$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}(x-1)\xlongequal{u=x-1}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(u)\mathrm{d}u \quad =\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u)\mathrm{d}u+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}u$

$=0+(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}$ 。（注意这里被积函数 $u\mathrm{e}^{u^2}$ 在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ 为奇函数）

8.【考点定位】定积分的换元法；反常积分。

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【解】方法一：令 $x=\sec t$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sec t)=\sec t\tan t\mathrm{d}t$

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sec t\tan t}\sec t\tan t\mathrm{d}t=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\text{。}$$

方法二：

$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\mathrm{d}x=-\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\text{。}$$

9.【考点定位】定积分的换元法； 反常积分。

【答案】$\dfrac{\pi}{4}$

【解】方法一：令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$

$$\int_{0}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cdot\cos t\mathrm{d}t}{(2-\sin^2 t)\cos t}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\mathrm{d}t}{2-\sin^2 t}=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\cos t}{1+\cos^2 t}$$

$$=-\arctan(\cos t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}\text{。}$$

方法二：

$$\int_{0}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x^2}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{[1+(1-x^2)]\sqrt{1-x^2}}$$

$$\xlongequal{u=1-x^2}-\frac{1}{2}\int_1^0\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\xlongequal[u=t^2]{\sqrt{u}=t}\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{t}2t\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}。$$

10.【考点定位】反常积分；定积分的换元法。

【答案】$\frac{1}{2}$

【解】方法一：$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}\xlongequal{u=1+x^2}\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{u})\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$。

方法二：$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t}{\sec^4 t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}\sin t=\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$。

11.【考点定位】定积分的分部积分法； 定积分的换元法。

【答案】$\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$

【解】方法一：令$\frac{1}{x}=t$，则$x=\frac{1}{t}$， $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$。

$$I=\int_1^2\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_1^{\frac{1}{2}}t^3\mathrm{e}^t(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=(t-1)\mathrm{e}^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}。$$

方法二：$I=\int_1^2\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2+\int_1^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}(\frac{1}{x})=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\mathrm{e}+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\mathrm{e}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$。

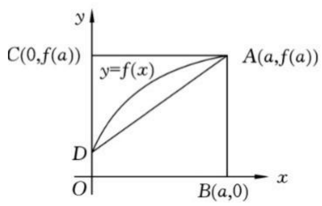
12.【考点定位】分部积分法； 定积分的几何意义。

【答案】C

【解】$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$。

由图？可知$a\cdot f(a)$为矩形$ABOC$的面积，由定积分的几何意义知$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$表示曲边梯形$ABOD$的面积。从而$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$表示曲边三角形$ACD$面积。

故答案选（C）。



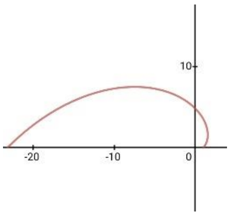
图？

13.【考点定位】极坐标下的弧长公式。

【答案】$\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\pi}-1)$

【解】极坐标下弧长的计算公式为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\theta)+\left[r'(\theta)\right]^2}\,\mathrm{d}\theta$

（如图？）所求弧长 $$s=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\theta}\right)^2+\left[\left(\mathrm{e}^{\theta}\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\theta}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\theta}\Big|_0^{\pi}=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\pi}-1)。$$



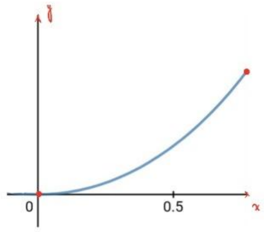
图？

14.【考点定位】变限积分求导；定积分的几何应用；基本积分公式：$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+c$。

【答案】$\ln(\sqrt{2}+1)$

【解】所求弧长为 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该曲线的图像，如图？



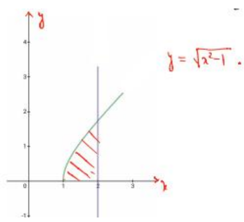
图？

15.【考点定位】旋转体的体积。

【答案】$\frac{4}{3}\pi$

【解】所求旋转体体积为

$$V_x=\int_1^2\pi y^2\mathrm{d}x=\int_1^2\pi(\sqrt{x^2-1})^2\mathrm{d}x=\int_1^2\pi(x^2-1)\mathrm{d}x=\pi\cdot(\frac{1}{3}x^3-x)\Big|_1^2=\frac{4}{3}\pi。$$



16.【考点定位】定积分的不等式性质。

【答案】B

【解】因为$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，$0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，所以$\ln(\sin x)<\ln(\cos x)<\ln(\cot x)$，故$I<K<J$。

17.【考点定位】反常积分；Γ 函数。

【答案】$\dfrac{1}{\lambda}$

【解】$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}(\lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}(\lambda x)\overset{u=\lambda x}{=}\dfrac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{\lambda}\Gamma(2)=\dfrac{1}{\lambda}$。

18.【考点定位】定积分的换元法；反常积分。

【答案】$\dfrac{3\pi}{8}$

【解】$\int_{-\infty}^{1}\dfrac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\dfrac{1}{(x+1)^2+2^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\dfrac{1}{(x+1)^2+2^2}\mathrm{d}(x+1)$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{2}\right)\overset{u=\frac{x+1}{2}}{=}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan u\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3\pi}{8}。$$

19.【考点定位】定积分的分部积分法。

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解】由$\dfrac{1}{4}=\int_{0}^{a}x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4})\mathrm{e}^{2x}\Big|_{0}^{a}=(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4})\mathrm{e}^{2a}+\dfrac{1}{4}$，得$(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4})\mathrm{e}^{2a}=0$，所以$a=\dfrac{1}{2}$。

【注】这里$\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4})\mathrm{e}^{2x}+c$ 可由推广的分部积分法快速得到：

$x\downarrow$	+	1	−	0
$\mathrm{e}^{2x}\uparrow$		$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$		$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$

20.【考点定位】不定积分法换元；分部积分法；连续的充要条件。

【答案】D

【解】当$x<1$时$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}(x-1)=(x-1)^2+c_1$，

当$x\geq 1$时，$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+c_2$。

由于$F(x)$为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的原函数，所以$F(x)$在$x=1$处连续。

因为 $F(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[(x-1)^2+c_1]=c_1$，

$$F(1^+)=\lim_{x\to 1^+}F(x)=\lim_{x\to 1^+}(x\ln x-x+c_2)=c_2-1,$$

所以 $c_1=c_2-1$，令 $c_1=c$，则 $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+c, x<1,\\ x(\ln x-1)+1+c, x\ge 1,\end{cases}$ 取 $c=0$ 可得 $f(x)$ 的一个原函数

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x-1)+1, x\ge 1。\end{cases}$$

故答案选（D）。

21.【考点定位】反常积分；分部积分法。

【答案】1

【解】方法一：$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}(1+x)\overset{u=1+x}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2}\mathrm{d}u$

$=\int_1^{+\infty}\ln u\mathrm{d}(-\frac{1}{u})=-\frac{\ln u}{u}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u=0+(-\frac{1}{u})\Big|_1^{+\infty}=1$ 。

方法二：令 $\ln(x+1)=t$，则 $x=\mathrm{e}^t-1$， $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(2)=1。$$

22.【考点定位】有理函数的积分；反常积分。

【答案】$\frac{1}{2}\ln 2$

【解】$I=\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-3)(x-1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right)\Big|_5^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2$ 。

23.【考点定位】曲线的弧长；基本积分公式 $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+c$ 。

【答案】$\frac{1}{2}\ln 3$

【解】 $l=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+[(\ln\cos x)']^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(-\frac{\sin x}{\cos x})^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\mathrm{d}x$

$=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$。

24.【考点定位】定积分的换元法； 反常积分的敛散性。

【答案】D

【解】

对于选项（A）：因为 $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(2)=1,$ 所以 $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛。

对于选项（B）：因为$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x^2=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)=\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$，

所以$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$收敛。

对于选项（C）：因为$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{8}$，

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛。

对于选项（D）：因为$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x==\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$，所以$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散。

故答案选（D）。

25.【考点定位】反常积分； 换元法。

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}$

$$\xlongequal{u=x+1}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\arctan u\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}。$$

26.【考点定位】 反常积分。

【答案】$\frac{1}{\ln 3}$

【解】方法一：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{0}x\cdot 3^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}x\cdot 3^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}3^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}3^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 3}3^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 3}3^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\ln 3}。$$

方法二：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x\overset{\text{偶函数}}{=}2\int_0^{+\infty}x3^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}3^{-x^2}\mathrm{d}x^2\overset{u=x^2}{=}\int_0^{+\infty}3^{-u}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{\ln 3}\int_0^{+\infty}e^{-u\ln 3}\mathrm{d}(u\ln 3)\overset{u\ln 3=v}{=}\frac{1}{\ln 3}\int_0^{+\infty}e^{-v}\mathrm{d}v=\frac{1}{\ln 3}\Gamma(1)=\frac{1}{\ln 3}。$$

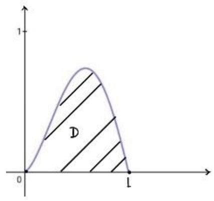
27.【考点定位】旋转体的体积；定积分的换元法；瓦里士公式。

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解】如图，所求旋转体的体积为：

$$V=\pi\int_0^1 y^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^1 x\sin^2\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi x\sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}(\pi x)$$

$$\underline{\underline{\pi x=u}}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}u\sin^2 u\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}。$$



【注】上述定积分的计算主要利用到了两个常用的公式：：

① $\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$；② $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$。

为了使同学们加深对这两个结果的理解，我们给出推导过程：

对于①：$\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$，又由于

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x\overset{x=\pi-t}{=}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f\left(\sin\left(\pi-t\right)\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$。

对于② :由于

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x\overset{x=\pi-t}{=}-\int_{\pi}^{0}\left(\pi-t\right)f\left(\sin\left(\pi-t\right)\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left(\pi-t\right)f(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left(\pi-x\right)f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

移项得，$2\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$，所以 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$。

（B 组）提升题

1.【考点定位】定积分的换元法；反常积分。

【答案】$\frac{\pi}{4\mathrm{e}}$

【解】记 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}$

方法一：$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+\mathrm{e}^2}\overset{u=\mathrm{e}^x}{=}\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\mathrm{e}^2}=\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan\frac{u}{\mathrm{e}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4\mathrm{e}}$。

方法二：令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，所以

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{t+\mathrm{e}^2t^{-1}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{t^2+\mathrm{e}^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan\left(\frac{t}{\mathrm{e}}\right)\Bigg|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\frac{\pi}{4\mathrm{e}}。$$

【注】方法一是第一换元法，方法二是第二换元法。

2.【考点定位】不定积分的分部积分法；不定积分的换元法。

【解】方法一：$\int\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int\arctan \mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\arctan \mathrm{e}^x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cdot\arctan \mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cdot\arctan \mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan \mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x,$$

由于$\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x\overset{u=\mathrm{e}^x}{=}\int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u=-\frac{1}{u}-\arctan u+c=-\mathrm{e}^{-x}-\arctan \mathrm{e}^x+c_1$, 所以

原式$=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan \mathrm{e}^x\right)+c$。

方法二：令$\mathrm{e}^x=t$，则$x=\ln t,\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，从而

$$\int\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan t}{t^2}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\int\arctan t\mathrm{d}\frac{1}{t^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

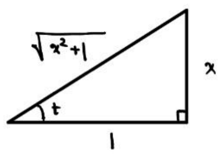
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}-\arctan t\right)+c=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan \mathrm{e}^x\right)+c$$

3.【考点定位】不定积分的三角换元法。

【解】令$x=\tan t$，则$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，（如图）

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{1}{(2\tan^2 t+1)\sec t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{\sec t}{2\tan^2 t+1}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{1+\sin^2 t}=\arctan(\sin t)+c=\arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c。$$



4.【考点定位】变限积分的性质。

【答案】D

【解】当$0\le x<1$时，$g(x)=\int_0^x \frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x$；

当$1\le x\le 2$时，$g(x)=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u+\int_1^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 \frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u+\int_1^x \frac{1}{3}(u-1)\mathrm{d}u$

$$=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{6}(u-1)^2\Big|_1^x\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}(x-1)^2;$$

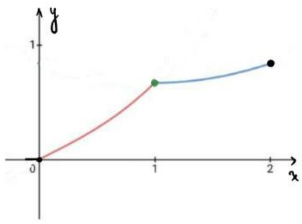
故$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x, & 0\le x<1,\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{6}(x-1)^2, & 1\le x\le 2,\end{cases}$

因为$\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\frac{2}{3},\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\frac{2}{3},g(1)=\frac{2}{3}$，所以$g(x)$在$x=1$处连续，则在$g(x)$在$[0,2]$内连续。由连续函数的性质可知，$g(x)$在$(0,2)$内有界。

又因为$g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), & 0<x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & 1<x<2,\end{cases}$所以$g'(x)\ge 0$，$x\in(0,1)\cup(1,2)$，故$g(x)$在$[0,2]$上单增。

综上所述，答案选(D)。

【注】①为了方便同学们理解，我们画出函数$g(x)$的图像，计算可以发现$g(x)$在$x=1$处$g'_+(1)=0,g'_-(1)=1$。



②对于变限定积分$\boldsymbol{\Phi}(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,x\in[a,b]$，我们有以下常用的结论，请同学们结合本例来理解。

(i) 当$f(x)$在$[a,b]$上连续时，有$\boldsymbol{\Phi}'(x)=f(x),x\in[a,b]$;

(ii) 当$f(x)$在$[a,b]$上可积时，$\boldsymbol{\Phi}(x)$在区间$[a,b]$上连续，在$f(x)$的连续点处有$\boldsymbol{\Phi}'(x)=f(x)$，

在$f(x)$的第一类间断点x_0处(跳跃间断点或可去间断点)有$\boldsymbol{\Phi}'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x),\boldsymbol{\Phi}'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$。

5.【考点定位】分段函数的变限积分； 分部积分法。

【解】当$-1\le x<0$时，$F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^x\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^x=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}$；

当$0\le x\le 1$时，

$$F(x)=\int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\left(2t+\frac{3}{2}t^{2}\right)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{te^{t}}{(\mathrm{e}^{t}+1)^{2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}+\int_{0}^{x}\frac{te^{t}}{(\mathrm{e}^{t}+1)^{2}}\mathrm{d}t$$

下面我们用两种方法计算定积分 $I=\int_{0}^{x}\frac{te^{t}}{(\mathrm{e}^{t}+1)^{2}}\mathrm{d}t$：

方法一：令 $\mathrm{e}^{t}+1=u$, 则 $t=\ln(u-1),\mathrm{d}t=\frac{1}{u-1}\mathrm{d}u$，所以

$$I=\int_{0}^{x}\frac{te^{t}}{(\mathrm{e}^{t}+1)^{2}}\mathrm{d}t=\int_{2}^{\mathrm{e}^{x}+1}\frac{(u-1)\ln(u-1)}{u^{2}}\frac{1}{u-1}\mathrm{d}u=\int_{2}^{\mathrm{e}^{x}+1}\frac{\ln(u-1)}{u^{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\int_{2}^{\mathrm{e}^{x}+1}\frac{\ln(u-1)}{u^{2}}\mathrm{d}u=-\int_{2}^{\mathrm{e}^{x}+1}\ln(u-1)\,\mathrm{d}\frac{1}{u}=\left(-\frac{1}{u}\ln(u-1)\right)\Bigg|_{2}^{\mathrm{e}^{x}+1}+\int_{2}^{\mathrm{e}^{x}+1}\frac{1}{u(u-1)}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\int_{2}^{\mathrm{e}^{x}+1}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln\frac{u-1}{u}\Bigg|_{2}^{\mathrm{e}^{x}+1}=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln 2$$

方法二：

$$I=\int_{0}^{x}\frac{te^{t}}{(\mathrm{e}^{t}+1)^{2}}\mathrm{d}t=\int_{0}^{x}\frac{t}{(\mathrm{e}^{t}+1)^{2}}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{t}+1\right)=-\int_{0}^{x}t\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{t}+1}\right)=-\frac{t}{\mathrm{e}^{t}+1}\Bigg|_{0}^{x}+\int_{0}^{x}\frac{1}{\mathrm{e}^{t}+1}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{t}(\mathrm{e}^{t}+1)}\mathrm{d}t=-\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\int_{0}^{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{t}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{t}+1}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{t}=-\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\int_{0}^{x}\frac{1}{\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{t}-\int_{0}^{x}\frac{1}{\mathrm{e}^{t}+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{t}+1)$$

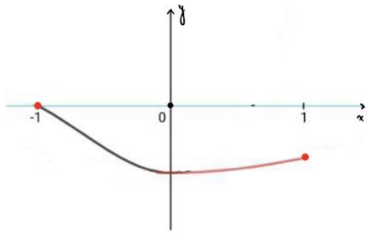
$$=-\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{t}+1}\Bigg|_{0}^{x}=-\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln 2$$

所以，当 $0\le x\le 1$ 时，$F(x)=-\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln 2-\frac{1}{2}$。

综上所述，$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^{3}+x^{2}-\frac{1}{2}, & -1\le x<0,\\ -\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}+\ln 2-\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1,\end{cases}$。

【注】本例中的被积函数 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^{2},-1\le x<0,\\ \frac{xe^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}},0\le x\le 1,\end{cases}$ 是连续函数，由上一题中的注②(i)知，

$F'(x)=f(x),x\in[-1,1]$, 特别的，$F'(0)=0$, 为了方便同学们理解，我们画出 $F(x)$ 的图像。



6.【考点定位】函数的奇偶性。

【答案】D

【解】我们有如下常用结论：设 $f(x)$ 连续，则

①若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数；②若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数。

事实上，当 $f(x)$ 为奇函数时，令 $H\left(x\right)=F(x)-F\left(-x\right)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$，

则有 $H'\left(x\right)=f(x)-\left[-f\left(-x\right)\right]=f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0$，又由于 $H\left(0\right)=F(0)-F\left(0\right)=0$，故

$H\left(x\right)=0,$ 即得 $F(x)=F\left(-x\right),$ 所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数。

当 $f(x)$ 为偶函数时，令 $H\left(x\right)=F(x)+F\left(-x\right)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$，

则有 $H'\left(x\right)=f(x)+\left[-f\left(-x\right)\right]=f\left(x\right)-f\left(-x\right)=0$，又由于 $H\left(0\right)=F(0)+F\left(0\right)=0$，故

$H\left(x\right)=0,$ 即得 $F(x)=-F\left(-x\right),$ 所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数。

对于选项(A)：被积函数 $f(t^2)$ 为偶函数，所以 $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$ 为奇函数；

对于选项(B)：被积函数 $f^2(t)$ 不一定是奇函数，也不一定是偶函数，所以 $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$ 不一定具有奇偶性；

对于选项(C)：令 $g\left(t\right)=t\left[f(t)-f\left(-t\right)\right]$，则 $g\left(-t\right)=\left(-t\right)\left[f(-t)-f\left(t\right)\right]=t\left[f(t)-f\left(-t\right)\right]=g\left(t\right)$，所以

$g\left(t\right)$ 为偶函数，从而 $\int_0^x t\left[f(t)-f\left(-t\right)\right]\mathrm{d}t$ 为奇函数；

对于选项(D)：令 $g\left(t\right)=t\left[f(t)+f\left(-t\right)\right]$，则 $g\left(-t\right)=\left(-t\right)\left[f(-t)+f\left(t\right)\right]=-g\left(t\right)$，所以 $g\left(t\right)$ 为奇函数，

从而 $\int_0^x t\left[f(t)+f\left(-t\right)\right]\mathrm{d}t$ 为偶函数。

故答案选(D)。

7.【考点定位】不定积分换元法。

【答案】$\dfrac{1}{2}\ln^2 x$

【解析】方法一：令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，由 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$ 得 $f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，所以

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x+c,$$

由于 $f(1)=0$，所以 $c=0$，故 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$。

方法二：$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x\overset{x=\mathrm{e}^t}{\underset{t=\ln x}{=}}\int f'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}x=\int t\mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}t^2+c=\dfrac{1}{2}\ln^2 x+c$，

由于$f(1)=0$，所以$c=0$，故$f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$。

8.【考点定位】原函数存在定理；函数的奇偶性与原函数奇偶性的关系；函数的周期性与原函数周期性的关系。

【答案】A

【解】当$f(x)$连续时，其原函数可表示为$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+c$。

对于选项(A)：$F(x)$为偶函数时，$F(x)=F(-x)$，等式两边同时对x求导得，$F'(x)=-F'(-x)$，所以

$f(x)=-f(-x)$，则$f(x)$为奇函数。

反之，设$f(x)$为奇函数，则$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+c\overset{t=-u}{=}-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+c=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+c=F(x)$，

所以$F(x)$为偶函数。故$F(x)$是偶函数$\Leftrightarrow$ $f(x)$是奇函数。

对于选项(B):当$F(x)$为奇函数时，$F(x)=-F(-x)$,等式两边同时对x求导得，

$F'(x)=-F'(-x)\cdot(-1)=F'(-x)$，所以$f(x)=f(-x)$，故$f(x)$为偶函数。

反之，设$f(x)$为偶函数，则

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+c\overset{t=-u}{=}-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+c=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+c=-\left[\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+c\right]+2c=-F(x)+2c,$$

当且仅当$c=0$时，$F(x)$为奇函数。综上所述：$F(x)$是奇函数$\overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow}$ $f(x)$是偶函数。

对于选项(C)：当$F(x)$是周期函数时，设$F(x+T)=F(x),(T\neq 0)$，等式两边同时对x求导得，$F'(x+T)=F'(x)$，所以$f(x+T)=f(x)$，则$f(x)$为周期函数。反之，设$f(x+T)=f(x)$，则

$$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t+c=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+c+\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+c\right)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=F(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t,$$

当且仅当$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$时，$F(x)$为周期函数。综上所述：$F(x)$是周期函数$\overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow}$ $f(x)$是周期函数。

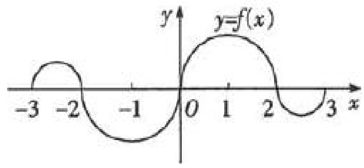
对于选项(D)：取$F(x)=x^3$为单调函数，但$f(x)=3x^2$不单调。取$f(x)=x$，则$f(x)$单调，但是$F(x)=\frac{1}{2}x^2$并不单调。综上所述：$F(x)$是单调函数$\overset{\nRightarrow}{\nLeftarrow}$ $f(x)$是单调函数。

故答案选(A)。

【注】作为选择题，我们也可以像判断（D）选项那样，通过反例排除(B)、(C)选项。在(B)中，取$f(x)=x^2$，则$F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$不一定是奇函数；在(C)中，取$f(x)=1+\cos x$，则$F(x)=x+\sin x+c$并不是周期函数。

9. 【考点定位】定积分的几何意义。

【答案】C



【解】由 $f(x)$ 的图形知 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 连续，所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数。从而 $F(-3)=F(3)$，$F(-2)=F(2)$，由定积分的几何意义知，

$$F(3)=\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3}{8}\pi,$$

$F(2)=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{2}$，从而 $\frac{F(3)}{F(2)}=\frac{\frac{3}{8}\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}$，即 $F(3)=\frac{3}{4}F(2)=F(-3)$，故答案选(C)。

10. 【考点定位】函数的复合；定积分的换元法 。

【答案】$\frac{1}{2}\ln 3$

【解】方法一：因为 $$f(x+\frac{1}{x})=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{\frac{1}{x}+x}{\frac{1}{x^2}+x^2}=\frac{\frac{1}{x}+x}{(\frac{1}{x}+x)^2-2},$$

记 $u=\frac{1}{x}+x$ 则 $f(u)=\frac{u}{u^2-2}$，所以 $f(x)=\frac{x}{x^2-2}$，则

$$I=\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}(x^2-2)}{x^2-2}=\frac{1}{2}\ln(x^2-2)\Big|_2^{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 3 。$$

方法二：

$$I=\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x\overset{x=t+\frac{1}{t}}{=}\int_1^{\sqrt{2}+1} f(t+\frac{1}{t})\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{t+t^3}{1+t^4}\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{t+t^3}{1+t^4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{1+t^2}{1+t^4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{t^4-1}{1+t^4}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{2}+1}\left(1-\frac{2}{1+t^4}\right)\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln t\Big|_1^{\sqrt{2}+1}-2\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{1+t^4}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-2\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{1+t^4}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$\overset{t=\frac{1}{u}}{=}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+2\int_1^{\sqrt{2}-1}\frac{u^3}{1+u^4}\mathrm{d}u=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^1\frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}\left(1+u^4\right)=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^4\right)\Big|_{\sqrt{2}-1}^1$$

$$=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left[\ln 2-\ln\left(18-12\sqrt{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)-\ln 2+\ln 6+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\ln 3 。$$

11.【考点定位】定积分的换元法；分部积分法；反常积分。

【解】令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$ 。从而

$$\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin^2 t\right)\cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\cos 2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}\sin 2t=\frac{\pi^2}{16}-\left(\frac{1}{4}t\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{16}-\left(\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}(-1-1)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}。$$

12.【考点定位】反常积分。

【答案】-2

【解】$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x=\frac{2}{k}\mathrm{e}^{kx}\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}-\frac{2}{k},k<0\\+\infty,\quad k>0\end{cases}$（当$k=0$时，$\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\mathrm{d}x=+\infty$），所以$-\frac{2}{k}=1$，解得 $k=-2$。

13.【考点定位】分部积分法；无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量。

【答案】0

【解】方法一：利用分部积分法可得

$$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\int_0^1\sin nx\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}\sin nx\Big|_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\cdot n\cdot\cos nx\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\int_0^1\cos nx\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\mathrm{e}^{-x}\cos nx\Big|_0^1+n\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\cdot n(-\sin nx)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\mathrm{e}^{-1}\cos n+n\mathrm{e}^{-1}-n^2\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x,$$

故 $$(n^2+1)\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}(\sin n+n\cos n)+n\mathrm{e}^{-1},$$

得 $$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{n\cos n+\sin n}{\mathrm{e}(n^2+1)}+\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{n\cos n+\sin n}{\mathrm{e}(n^2+1)}+\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{n}{\mathrm{e}(n^2+1)}\cos n-\frac{1}{\mathrm{e}(n^2+1)}\sin n+\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{\mathrm{e}(n^2+1)}\cos n\right)+\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}(n^2+1)}\sin n\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}=0+0+0=0。$$

方法二：$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\cos nx=-\left(\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos nx\Big|_0^1\right)-\frac{1}{n}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\cos nx\mathrm{d}x,$

由于 $\left|-\left(\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos nx\Big|_0^1\right)\right|=\left|\frac{-\mathrm{e}^{-1}\cos n}{n}+\frac{1}{n}\right|\le\left|\frac{-\mathrm{e}^{-1}\cos n}{n}\right|+\frac{1}{n}\le\frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{n}\to 0,$

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\cos nx\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{n}\int_0^1\left|\mathrm{e}^{-x}\cos nx\right|\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\int_0^1\left|\mathrm{e}^{-x}\right|\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\int_0^1 1\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\to 0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = 0$。

【注】①在求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x$ 的原函数时，我们还可采用推广的分部积分法

	$\sin nx\downarrow$	$+$ $n\cos nx$	$-$	$-n^2\sin nx$
	$\mathrm{e}^{-x}\uparrow$	$-\mathrm{e}^{-x}$		e^{-x}

故 $$\int \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\sin nx - n\mathrm{e}^{-x}\cos nx - \int -n^2\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x,$$

得 $(n^2+1)\int \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}(\sin nx + n\cos nx)$，

所以 $\int \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n^2+1}(\sin nx + n\cos nx)+c$，

因此 $$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n^2+1}(\sin nx + n\cos nx)\Big|_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n^2+1)}(\sin n + n\cos n) + \frac{\mathrm{e}^{-1}\cdot n}{n^2+1}。$$

②一般情形下，方法二可以推广为如下结论：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可微，则有

（i）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$；（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0$。

以后在选择题与填空题中上述结论可以直接使用。为了让同学们能理解这个结论的来历，我们以（i）为例给出其证明。由连续函数的有界性，可设

$$|f(x)| \le M_1, |f'(x)| \le M_2,$$ **这里**

M_1, M_2 为常数。

则有 $$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int_a^b f(x)\mathrm{d}\cos nx = \left(-\frac{f(x)\cos nx}{n}\right)\Bigg|_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \left(-\frac{f(b)\cos nb}{n} + \frac{f(a)\cos na}{n}\right) + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

由于 $$\left|-\frac{f(b)\cos nb}{n} + \frac{f(a)\cos na}{n}\right| \le \left|\frac{f(b)\cos nb}{n}\right| + \left|\frac{f(a)\cos na}{n}\right| \le \frac{M_1}{n} + \frac{M_1}{n} = \frac{2M_1}{n} \to 0,$$

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)\cos nx|\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\int_a^b M_2\mathrm{d}x = \frac{M_2}{n}(b-a) \to 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$。

14.【考点定位】定积分的换元法；反常积分。

【答案】$\dfrac{\pi^2}{4}$

【解】所求旋转体的体积

$$V=\int_{e}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\mathrm{d}x=\pi\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{1+\ln^2 x}\mathrm{d}\ln x$$
$$\overset{u=\ln x}{=}\pi\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\pi(\arctan u\Big|_{1}^{+\infty})=\frac{\pi^2}{4}。$$

15.【考点定位】定积分的换元法；定积分的分部积分法。

【答案】-4π。

【解】令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}t^2\cos t\mathrm{d}t=2(t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t)\Big|_0^{\pi}=-4\pi$。

这里 $\int t^2\cos t\mathrm{d}t$ 由推广的分部积分法快速得到：

$t^2\downarrow$	+ $2t\downarrow$	− 2	+ 0
$\cos t\uparrow$	$\sin t$	$-\cos t$	$-\sin t$

16.【考点定位】定积分的几何意义；定积分的换元法；偶函数积分的性质；瓦里士公式。

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$。

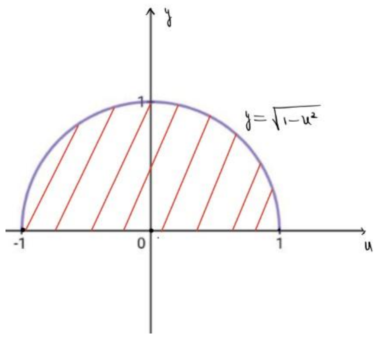
【解】方法一：$I=\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$，令 $x-1=\sin\theta$，则 $x=1+\sin\theta$。

从而
$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}\mathrm{d}(1+\sin\theta)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

方法二：

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}\left(x-1\right)\overset{u=x-1}{=}\int_{-1}^{1}(u+1)\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-1}^{1}u\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u=0+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u\overset{\text{几何意义}}{=}\frac{\pi}{2}。$$



图？

17.【考点定位】定积分的几何应用；导数的几何意义。（原题中有错误！！）

【解】设切点为 $A(x_0,\ln x_0)$，由 $y=\ln x$ 得，$y'=\dfrac{1}{x}$，从而切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$。

因为切线经过点 $(0,1)$，所以 $1-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(-x_0)$，解得 $x_0=\mathrm{e}^2$，所以切点为 $A(\mathrm{e}^2,2)$，如图？

区域 D 的面积为

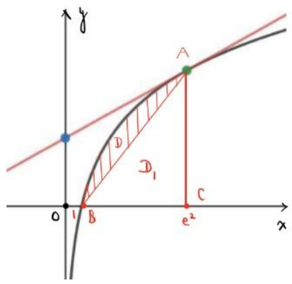
$$S=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x-S(D_1)=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\times 2=(x\ln x-x)\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-(\mathrm{e}^2-1)=(\mathrm{e}^2+1)-(\mathrm{e}^2-1)=2。$$

区域 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体为圆锥体，其体积为 $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\times 2^2\times(\mathrm{e}^2-1)=\dfrac{4}{3}\pi(\mathrm{e}^2-1)$,

区域 $D\cup D_1$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_2=\int_1^{\mathrm{e}^2}\pi\ln^2 x\mathrm{d}x\overset{\ln x=t}{\underset{x=\mathrm{e}^t}{=}}\int_0^2\pi t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\pi(t^2-2t+2)\mathrm{e}^t\Big|_0^2=\pi(2\mathrm{e}^2-2)=2\pi(\mathrm{e}^2-1),$$

所求旋转体的体积为：$V=V_2-V_1=2\pi(\mathrm{e}^2-1)-\dfrac{4}{3}\pi(\mathrm{e}^2-1)=\dfrac{2}{3}\pi(\mathrm{e}^2-1)$。



图？

【注】其中 $\int t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=(t^2-2t+2)\mathrm{e}^t+c$ 由推广的分部积分法快速得到：

$t^2\downarrow$	+	$2t$	−	2	+	0
$\mathrm{e}^t\uparrow$		e^t		e^t		e^t

18.【考点定位】旋转体的体积。

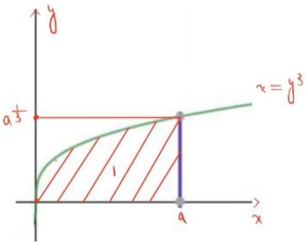
【解】$V_x=\int_0^a \pi y^2\mathrm{d}x=\int_0^a \pi x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$。

下面用两种方法来求V_y。

方法一：选x为积分变量，$V_y=\int_0^a 2\pi x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\left(\frac{6\pi}{7}x^{\frac{7}{3}}\right)\Big|_0^a=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$。

方法二：选y为积分变量，$V_y=\pi a^2\cdot a^{\frac{1}{3}}-\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\pi(y^3)^2\mathrm{d}y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\left(\frac{\pi}{7}y^7\Big|_0^{a^{\frac{1}{3}}}\right)=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$。

由题设$V_y=10V_x$得，$\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\times\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$，故$a=7\sqrt{7}$。



19.【考点定位】变限积分函数；连续的概念；洛必达法则；导数存在的充要条件。

【答案】C

【解】方法一：当$0\le x<\pi$时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t=-\cos t\big|_0^x=1-\cos x$；

当$\pi\le x\le 2\pi$时，$F(x)=\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t+\int_{\pi}^x 2\mathrm{d}t=2+2x-2\pi$。

综上所述，$F(x)=\begin{cases}1-\cos x, & 0\le x<\pi,\\ 2x-2\pi+2, & \pi\le x\le 2\pi。\end{cases}$

由于$F(\pi^-)=\lim\limits_{x\to\pi^-}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}(1-\cos x)=2=F(\pi)$，$F(\pi^+)=\lim\limits_{x\to\pi^+}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}(2x-2\pi+2)=2=F(\pi)$

所以$F(x)$在$x=\pi$点连续。

因为$F_-'(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{1-\cos x-2}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{-(1+\cos x)}{x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\pi^-}\sin x=0$，

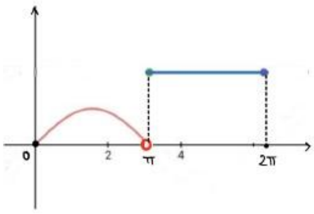
$F_+'(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{2x-2\pi+2-2}{x-\pi}=2$。

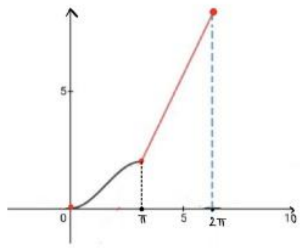
所以$F_-'(\pi)\ne F_+'(\pi)$，因此$F(x)$在$x=\pi$点不可导。故答案选（C）。

方法二：由B-4中的注可知$F(x)$连续，且$F_-'(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\sin x=0,F_+'(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}2=2$。

故答案选（C）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出函数 $f(x),F(x)$ 的图像：





20.【考点定位】分部积分法；有理函数积分；反常积分。

【答案】$\ln 2$

【解】 $$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=0+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$$

21.【考点定位】定积分的换元法；反常积分。

【答案】D

【解】由于 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=I_1+I_2$，

对于 $I_1=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$：$I_1=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}(x-1)\overset{u=x-1}{=}\int_0^{\mathrm{e}-1}\frac{1}{u^{\alpha-1}}\mathrm{d}u$，

故 I_1 收敛 $\Leftrightarrow\alpha-1<1\Leftrightarrow\alpha<2$。

对于 $I_2=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$：$I_2=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}\ln x\overset{u=\ln x}{=}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^{\alpha+1}}\mathrm{d}u$，

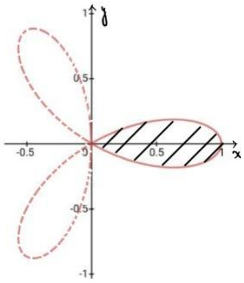
故 I_2 收敛 $\Leftrightarrow\alpha+1>1\Leftrightarrow\alpha>0$。

综上所述：当 $0<\alpha<2$ 时，$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，从而答案选（D）。

22.【考点定位】平面图形的面积；定积分的换元法；偶函数的性质；瓦里士公式。

【答案】$\frac{\pi}{12}$

【解】$S=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta\overset{偶函数}{=}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}(3\theta)\overset{u=3\theta}{=}\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$。



23.【考点定位】平面图形的面积。

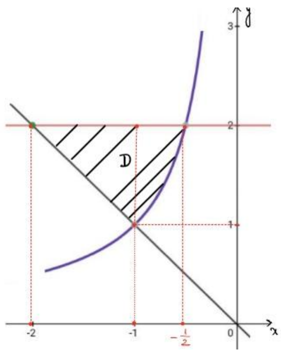
【答案】$\frac{3}{2}-\ln 2$

【解】曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 的交点为 $(-1,-1)$，曲线线 $xy+1=0$ 与直线 $y=2$ 的交点为 $\left(-\frac{1}{2},2\right)$，直线 $y+x=0$ 与直线 $y=2$ 的交点为 $(-2,2)$

下面用两种方法求 D 的面积 S。如图?

方法一：$S=\int_1^2\left(-\frac{1}{y}-(-y)\right)\mathrm{d}y=\left(-\ln y+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2$。

方法二：$S=\int_{-2}^{-1}(2-(-x))\mathrm{d}x+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(2-(-\frac{1}{x})\right)\mathrm{d}x=2+\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{-1}\right)+1+\left(\ln(-x)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{2}-\ln 2,$



图?

24.【考点定位】函数的奇偶性；函数的周期性；原函数。

【答案】1

【解】因为 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，所以对 $\forall x\in[0,2]$ 有

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}(x-1)=(x-1)^2+c$。由于 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，

从而 $c=-1$， 故 $f(x)=(x-1)^2-1,x\in[0,2]$。

又因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，所以

$$f(7)=f(2\times4-1)=f(-1)=-f(1)=-(-1)=1。$$

25.【考点定位】反常积分的敛散性判别。

【答案】C

【解】 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x=I_1+I_2$，

对于 $I_1=\int_0^1\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$：当 $x\to 0^+$ 时 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^a}}=1$，所以 I_1 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}\mathrm{d}x$, 同敛散。故当 $a<1$，I_1 收敛。

对于 $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$：当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x^a(1+x)^b}=\frac{1}{x^{a+b}(1+\frac{1}{x})^b}$，从而

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{a+b}}{x^{a+b}(1+\frac{1}{x})^b}=1$，所以 I_2 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{a+b}}\mathrm{d}x$ 同敛散。故当 $a+b>1$，I_2 收敛。

综上所述，$a<1$ 且 $a+b>1$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，答案选（C）。

26.【考点定位】反常积分的敛散性。

【答案】B

【解】因为 $\int_{-\infty}^0\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}(\frac{1}{x})=\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\Big|_{-\infty}^0=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)-\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)=0+1=1$，所以反常积分①收敛；

因为 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\frac{1}{x}=\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\Big|_0^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)-\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)=0+(+\infty)=+\infty$。，所以反常积分②发散。

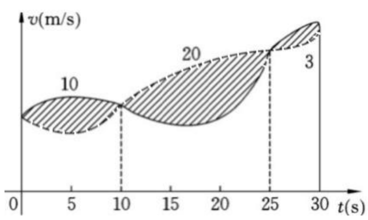
综上所述，答案选(B)。

27.【考点定位】定积分的物理应用；定积分的几何意义。

【答案】C

【解】甲的位移 $s_{甲}=\int_0^{t_0}v_1(t)\mathrm{d}t$，乙的位移 $s_{乙}=\int_0^{t_0}v_2(t)\mathrm{d}t$，当乙追上甲时，$s_{乙}=s_{甲}+10$，由图可知 $t_0=25$，

故应选(C)。



28.【考点定位】两条曲线相切的条件；定积分的分部积分法。

【答案】$2\ln 2-2$

【解】因为曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$，所以 $f(0)=0$。又因为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 相切，所以 $f(1)=2$，$f'(1)=(2^x)'\big|_{x=1}=2\ln 2$，则

$$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\left[xf'(x)-f(x)\right]\Big|_0^1=\left[f'(1)-f(1)\right]+f(0)=2\ln 2-2。$$

x ↓	+	1	−	0
$f''(x)$↑		$f'(x)$		$f(x)$

【注】在计算 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x$ 时也可以不用推广的分部积分法。

$$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=2\ln 2-\left(f(x)\right)\Big|_0^1=2\ln 2-2\ 。$$

29.【考点定位】奇偶函数积分的性质；定积分的不等式性质。

【答案】C

【解】
$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi,$$

记 $f(x)=\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}$，则 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-(1+x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=-x\mathrm{e}^{-x}$，列表讨论如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↓	最小值点	↑

由上表知 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$，所以 $f(x)=\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}<1(x\neq 0)$，因此

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\pi,\quad K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\pi,$$

故 $K>M>N$，答案选(C)。

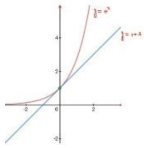
【注】$\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}<1(x\neq 0)$ 的证明方法有多种，这里我们再提供几种证明方法:

方法一: 注意 $y=\mathrm{e}^x$ 为凹函数，在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=1+x$，由凹函数的几何特征可得

$1+x<\mathrm{e}^x\,(x\neq 0)$ 如图?，从而 $\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}<1(x\neq 0)$。

方法二：利用带拉格朗日余项的二阶泰勒公式可得$e^x=1+x+\frac{e^{\xi}}{2!}x^2>1+x\left(x\neq 0\right)$，从而

$$\frac{1+x}{e^x}<1\left(x\neq 0\right)。$$


图?

30.【考点定位】分部积分法；不定积分换元法。

【答案】$e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+c$

【解】

方法一：

$$I=\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx=\int\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}de^x\overset{u=e^x}{=}\int\arcsin\sqrt{1-u^2}du$$

$$=u\arcsin\sqrt{1-u^2}-\int u\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(-2u\right)du=u\arcsin\sqrt{1-u^2}+\int\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du$$

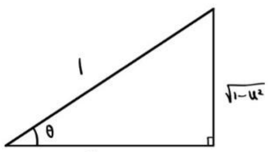
$$=u\arcsin\sqrt{1-u^2}-\frac{1}{2}\int\left(1-u^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-u^2\right)=u\arcsin\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-u^2}+c=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+c。$$

方法二：

$$I=\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx=\int\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}de^x\overset{u=e^x}{=}\int\arcsin\sqrt{1-u^2}du$$

$$\overset{u=\cos\theta}{=}\int\arcsin\left(\sin\theta\right)d\cos\theta=\int\theta d\cos\theta=\theta\cos\theta-\int\cos\theta d\theta=\theta\cos\theta-\sin\theta+c$$

$$=u\cdot\arcsin\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-u^2}+c=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+c$$



图?

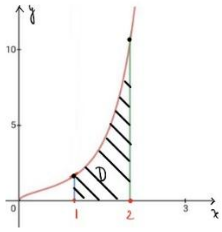
31.【考点定位】一阶线性微分方程； 旋转体的体积。

【解】（1） $$y=e^{-\int -xdx}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{\int -xdx}dx+c\right)=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+c\right)$$

$$=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+c\right)=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(\sqrt{x}+c\right),$$

由 $y(1)=\sqrt{e}$，可得 $\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}(1+c)}$，解得 $c=0$，从而 $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{1}{2}x^2}$。

（2）如图？所示，所求的体积为 $V=\int_1^2 \pi y^2(x)dx=\int_1^2 \pi x e^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$。



图？

32.【考点定位】函数的奇偶性。

【答案】A

【解】同 B-6 的分析

$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 为偶函数，$\cos f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f'(x)+\cos f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow \int_0^x (f'(t)+\cos f(t))dt$ 为奇函数故（A）正确，（B）错误。

$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow \cos f'(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow \int_0^x \cos f'(t)dt$ 为奇函数，又因为 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 为偶函数，所以 $\int_0^x (f(t)+\cos f'(t))dt$ 不一定是奇函数，也不一定是偶函数。

故（C）、（D）错误。综上所述，答案选（A）。

33.【考点定位】常系数齐次线性微分方程解的结构；反常积分。

【答案】$am+n$

【解】由 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0$ 得，$f(x)=-f''(x)-af'(x)$。

从而

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx=-\int_0^{+\infty}(f''(x)+af'(x))dx=-f'(x)\Big|_0^{+\infty}-af(x)\Big|_0^{+\infty}=-\lim_{x\to+\infty}f'(x)-a\lim_{x\to+\infty}f(x)+f'(0)+af(0)$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，故 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=f'(0)+af(0)=am+n$。

【注】①下面给出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 的证明。

微分方程 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+1=0$。

（i）当 $\Delta=a^2-4<0$ 时，特征根 $\lambda_1=-\frac{a}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{4-a^2}}{2},\lambda_2=-\frac{a}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$。

为了表示方便，令$\alpha=-\frac{a}{2}<0,\beta=\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$，此时$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$。

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\alpha x}=0$，且$\left|c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right|\le\left|c_1\cos\beta x\right|+\left|c_2\sin\beta x\right|=\left|c_1\right|+\left|c_2\right|$，故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

又由于
$$f'(x)=\alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)+\mathrm{e}^{\alpha x}\left(-c_1\beta\sin\beta x+c_2\beta\cos\beta x\right),$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\alpha x}\left((c_1\alpha+c_2\beta)\cos\beta x+(c_2\alpha-c_1\beta)\sin\beta x\right)=0。$$

(ii)当$\Delta=a^2-4=0$，即$a=2$时，$\lambda_1=\lambda_2=-1$，此时$f(x)=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{-x}$且
$$f'(x)=c_2\mathrm{e}^{-x}-(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{-x}=(c_2-c_1-c_2x)\mathrm{e}^{-x},$$

从而
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0。$$

(iii) 当$\Delta=a^2-4>0$，$\lambda_1=-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}<0,\lambda_2=-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}<0$。

此时$f(x)=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$，则$f'(x)=c_1\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+c_2\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

综上所述可知当$a>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。

②完全类似注①的讨论，我们有如下结论：若$p>0,q>0$，则二阶常系数线性齐次方程
$$y''+py'+qy=0$$
的通解y满足$y(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y=0,y'(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y'=0,\cdots,y^{(k)}(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y^{(k)}=0,(k=0,1,2,\cdots)$。

该结论可以直接使用。

34.【考点定位】常系数齐次线性微分方程； 反常积分的计算。

【答案】1

【解】方法一：注意对于$y''+py'+qy=0$，当$p>0,q>0$时，其通解$y(x)$满足$y^{(k)}(+\infty)=0,k=0,1,2,\cdots$。

（见 33 题注）所以$y''+2y'+y=0$的通解$y(x)$满足$y(+\infty)=0$，$y'(+\infty)=0$。由$y''+2y'+y=0$得$y=-y''-2y'$，

故
$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(-y''(x)-2y'(x)\right)\mathrm{d}x=\left(-y'(x)-2y(x)\right)\Big|_0^{+\infty}=0-(-1-0)=1。$$

方法二：$y''+2y'+y=0$的特征方程为$r^2+2r+1=0$，解得$r_1=r_2=-1$

所以$y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2x\mathrm{e}^{-x}$。由$y(0)=0,y'(0)=1$得$\begin{cases}c_1=0\\c_2-c_1=1,\end{cases}$，则$\begin{cases}c_1=0\\c_2=1,\end{cases}$，故$y=x\mathrm{e}^{-x}$。

于是
$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(2)=1。$$

【注】请同学们仔细体会方法一，相比而言方法一的计算量比方法二小很多。

35.【考点定位】定积分的换元法；反常积分。

【答案】A

【解】方法一：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t^2=2t\mathrm{d}t$。所以

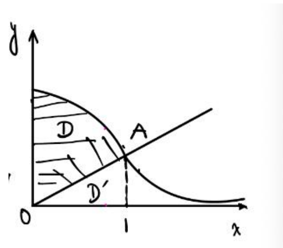
$$I=\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_0^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=2\int_0^1\arcsin t\mathrm{d}(\arcsin t)=\left(\arcsin t\right)^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}。$$

方法二：令 $x=\sin^2\theta$,则$\mathrm{d}x=2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$，

$$I=\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arcsin\left(\sin\theta\right)}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta}}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\mathrm{d}\theta=\theta^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}。$$

36.【考点定位】旋转体的体积。

【答案】$\pi\left(\ln 2-\frac{1}{3}\right)$

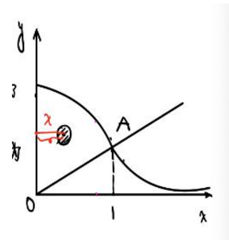


【解】因为曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 与直线 $y=\frac{x}{2}$ 的交点为 $A(1,\frac{1}{2})$。所以 $D\cup D'$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为：

$$V_1=\int_0^1 2\pi x\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\pi\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\pi\ln 2。$$

D' 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为：$V_2=\int_0^1 2\pi x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right)=\frac{\pi}{3}$。

故所求旋转体的体积为 $V=V_1-V_2=\pi(\ln 2-\frac{1}{3})$。



【注】该旋转体的体积也可以利用二重积分进行计算，在 D 内任取点 (x,y) 附近的小邻域 $\mathrm{d}\sigma$，它绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积微元为 $\mathrm{dV}=2\pi x\mathrm{d}\sigma$，故

$$V=\iint_D 2\pi x\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{1}{1+x^2}}2\pi x\mathrm{d}y=\int_0^1 2\pi x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\pi(\ln 2-\frac{1}{3})。$$

37.【考点定位】定积分的换元法;反常积分。

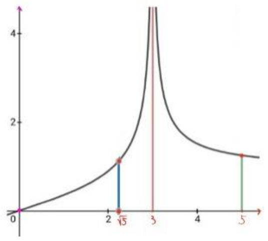
【答案】6

【解】该反常积分的瑕点为 $x=3$, 如图所示。

$$\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{\left|x^2-9\right|}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{\left|x^2-9\right|}}\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{\left|x^2-9\right|}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}\left(9-x^2\right)+\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}\left(x^2-9\right)==-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3}\left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(9-x^2\right)+\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\left(x^2-9\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(x^2-9\right)$$

$$=\left(-\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{\sqrt{5}}^{3}+\left(\left(x^2-9\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{3}^{5}=2+4=6\text{ 。}$$



图?

（C 组）拔高题

1.【考点定位】不定积分换元法；不定积分分部积分法。

【解】方法一：令 $\ln x=t,$ 则 $x=\mathrm{e}^t$，由 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 得 $f(t)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$，所以，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+\int\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\quad=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

由于 $$\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}\mathrm{e}^x\overset{u=\mathrm{e}^x}{=}\int\frac{1}{u(1+u)}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u=\ln|u|-\ln|1+u|+C$$

$$=\ln\mathrm{e}^x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C=x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C,$$

故 $$\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C\text{ 。}$$

方法二：

$$\int f(x)\mathrm{d}x\underset{t=\mathrm{e}^x}{\overset{x=\ln t}{=}}\int f(\ln t)\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\frac{\ln(1+t)}{t}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\ln(1+t)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\int\frac{1}{(1+t)t}\mathrm{d}t=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\ln|t|-\ln|1+t|+C$$

$$=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C\text{ 。}$$

2.【考点定位】定积分的不等式性质；周期函数的定积分性质；夹逼准则。

【解】（I）如图，由于$|\cos t|\ge 0$，且$n\pi \le x<(n+1)\pi$，由定积分不等式性质可知

$$\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{n\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t+\int_{n\pi}^x|\cos t|\,\mathrm{d}t\ge\int_0^{n\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t，且$$

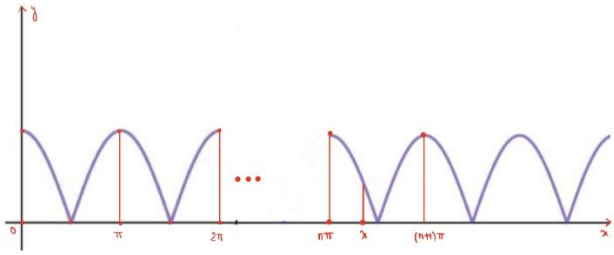
$$\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t-\int_x^{(n+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t。$$

又由于$|\cos t|$是以π为周期的函数，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=n\int_0^{\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2n，$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2(n+1)，$$

故 $2n\le S(x)<2(n+1)$。



（II）由$n\pi\le x<(n+1)\pi$可知，$\dfrac{1}{(n+1)\pi}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n\pi}$。

又由（I）知$2n\le S(x)<2(n+1)$, 所以$\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$，

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2n}{(n+1)\pi}=\dfrac{2}{\pi},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(n+1)}{n\pi}=\dfrac{2}{\pi}$，所以由夹逼准则知$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$。

【注】对于(II)，同学们可能想到使用$\dfrac{\infty}{\infty}$型洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{|\cos x|}{1}=\lim_{x\to+\infty}|\cos x|$$

不存在(也不是无穷大)，这说明洛必达法则不能使用。

3.【考点定位】变限积分。

【解】如图？当$0\le t\le 1$时，$S(t)=\dfrac{1}{2}t^2$；当$1<t\le 2$时，$S(t)=1-\dfrac{1}{2}(2-t)^2=-\dfrac{1}{2}t^2+2t-1$；

当$t>2$时，$S(t)=1$。

所以 $$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\le t\le 1,\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\le 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

当$0\le x\le 1$时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{6}x^3$；

当$1<x\le 2$时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t+\int_1^x S(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}+\int_1^x(-\frac{1}{2}t^2+2t-1)\mathrm{d}t$

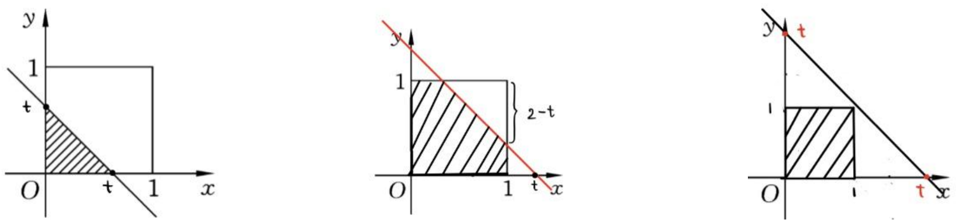
$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}(x^3-1)+(x^2-1)-(x-1)=-\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3}；$$

当$x>2$时，

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 S(t)\mathrm{d}t+\int_2^x S(t)\mathrm{d}t=(-\frac{8}{6}+4-2+\frac{1}{3})+\int_2^x 1\mathrm{d}t=1+x-2=x-1。$$

故

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3, & 0\le x\le 1,\\ -\dfrac{1}{6}x^3+x^2-x+\dfrac{1}{3}, & 1<x\le 2,\\ x-1, & x>2。\end{cases}$$



$0\le t\le 1$的情形　　$1<t\le 2$的情形　　$t>2$的情形

图？

4.【考点定位】旋转体的体积；函数的最值。

【解】由$\begin{cases}y=ax^2,\\ y=1-x^2,\end{cases}$解得$A$点的坐标为$\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}},\frac{a}{1+a}\right)$，所以直线$OA$的方程为$y=\frac{a}{\sqrt{1+a}}x$。如图？区域$D\bigcup D_1$绕$x$轴旋转一周得到的立体为圆锥体，其体积为：$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{1+a}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a}}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}$，

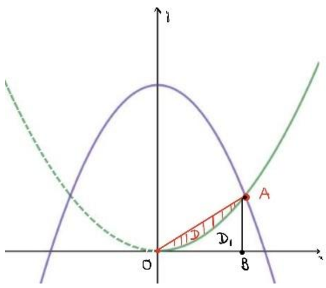
区域D_1绕x轴旋转一周得到的立体为的体积为：$V_2=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\pi\left(ax^2\right)^2\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{5}a^2x^5\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}$，

所以区域D绕x轴旋转一周得到的立体为的体积为：$V(a)=V_1-V_2=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}-\frac{\pi}{5}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2\pi}{15}\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}$。

$V'(a)=\left(\frac{2\pi}{15}a^2(1+a)^{-\frac{5}{2}}\right)'=\frac{2\pi}{15}\left(2a(1+a)^{-\frac{5}{2}}+a^2\left(-\frac{5}{2}\right)(1+a)^{-\frac{7}{2}}\right)=\frac{\pi}{15}\frac{a(4-a)}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}$,，列表讨论如下：

a	$(0,4)$	4	$(4,+\infty)$
$V'(a)$	+	0	−
$V(a)$	↑	最大值点	↓

故当 $a=4$ 时，$V(a)$ 取最大值 $V(4)=\frac{82\sqrt{5}}{1875}\pi$。



5.【考点定位】平面图形的面积； 函数的最值。

【解】(Ⅰ)如图所示，设 $y=px^2+qx$ 与 $x+y=5$ 相切于 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases}px_0^2+qx_0=5-x_0, & ①\\ 2px_0+q=-1, & ②\end{cases}$

由②得 $x_0=\frac{-1-q}{2p}$，代入①得 $p\cdot\frac{(-1-q)^2}{(2p)^2}+(1+q)\cdot\frac{-1-q}{2p}=5$，从而，$p=-\frac{1}{20}(1+q)^2$。

由 $px^2+qx=0$ 解得 $x_1=0,x_2=-\frac{q}{p}$，所以

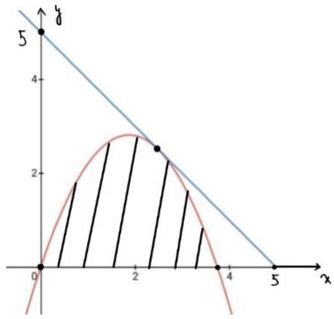
$$S=\int_0^{x_2}(px^2+qx)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}px^3+\frac{1}{2}qx^2\right)\Big|_0^{x_2}=\frac{1}{3}px_2^3+\frac{1}{2}qx_2^2=\frac{1}{3}p\left(-\frac{q}{p}\right)^3+\frac{1}{2}q\left(-\frac{q}{p}\right)^2=\frac{1}{6}\frac{q^3}{p^2}=\frac{200}{3}\frac{q^3}{(1+q)^4}。$$

$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}=\left(\frac{200}{3}q^3(1+q)^{-4}\right)'=\frac{200}{3}\left(3q^2(1+q)^{-4}+q^3(-4)(1+q)^{-5}\right)=\frac{200}{3}\cdot\frac{q^2(3-q)}{(1+q)^5}$，列表讨论如下：

q	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}$	+	0	—
S	↑	最大值点	↓

综上所述：当 $q=3$， $p=-\dfrac{4}{5}$ 时， S 达到最大值。

(II)由(I)知 S 的最大值为 $S\Big|_{q=3}=\dfrac{200}{3}\times\dfrac{27}{4^4}=\dfrac{225}{32}$。



6.【考点定位】曲率半径；弧长公式；参数方程确定的函数的导数与高阶导数。

【解】由于 $y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ y''=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，所以点 $M\left(x,y\right)$ 处的曲率为

$$K_M=\frac{|y''|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{\left[1+\frac{1}{4}x^{-1}\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\left(4x+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$，从而该点的曲率半径 $\rho\left(x\right)=\dfrac{1}{K_M}=\dfrac{1}{2}\left(4x+1\right)^{\frac{3}{2}}$

弧 AM 的弧长 $s=\displaystyle\int_1^x\sqrt{1+\left[\left(\sqrt{t}\right)'\right]^2}\mathrm{d}t=\int_1^x\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\mathrm{d}t$ 。

由 $\begin{cases}\rho=\dfrac{1}{2}\left(4x+1\right)^{\frac{3}{2}}\\ s=\displaystyle\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\mathrm{d}t\end{cases}$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\left(4x+1\right)^{\frac{1}{2}}\times4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\dfrac{3\sqrt{4x+1}}{\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}}=6\sqrt{x}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{3}{\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$

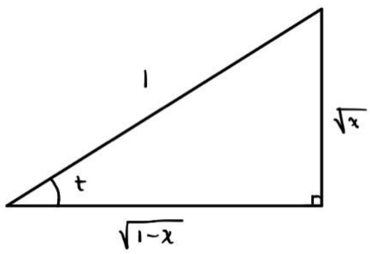
故 $$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\times\frac{1}{2}\left(4x+1\right)^{\frac{3}{2}}\times\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9\left(4x+1\right)-36x=9$$。

7.【考点定位】函数的复合； 分部积分法。

【解】方法一：令 $x=\sin^2t,t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin t=\sqrt{x},\mathrm{d}x=2\sin t\cos t\mathrm{d}t,$，

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\sin^2 t}}{\sqrt{\cos^2 t}}\cdot\frac{t}{\sin t}2\sin t\cos t\mathrm{d}t=2\int t\cdot\sin t\mathrm{d}t$$

$$=2\int t\mathrm{d}\left(-\cos t\right)=2\left(-t\cos t+\int\cos t\mathrm{d}t\right)=2\left(-t\cos t+\sin t\right)+c=2\left(-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)+c。$$



方法二：由 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 可得 $f(u)=\dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，所以

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x\overset{x=\sin^2\theta}{\underset{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)}{=}}\int\frac{\arcsin\left(\sin\theta\right)}{\cos\theta}2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\left(-\theta\cos\theta+\sin\theta\right)+c=2\left(-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)+c\ 。$$

$\theta\downarrow$	$+$ 1	$-$ 0
$\sin\theta\uparrow$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$

8.【考点定位】定积分的物理应用。

【解】如图建立坐标系，则抛物线 AOB 的方程为 $y=x^2$；

先求闸门矩形部分承受的水压力：

取薄片 $\left[y,y+\mathrm{d}y\right]\subset\left[1,h+1\right]$，相应的面积微元为 $\mathrm{d}s=2\mathrm{d}y$，

压力微元为 $\mathrm{d}F_1=\rho g\left(h+1-y\right)2\mathrm{d}y=2\rho g\left(h+1-y\right)\mathrm{d}y$

闸门矩形部分承受的水压力为 $F_1=\int_1^{h+1}2\rho g\left(h+1-y\right)\mathrm{d}y=\rho gh^2$ 。

再求闸门下部承受的水压力：

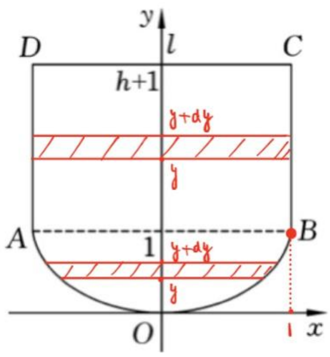
取薄片 $\left[y,y+\mathrm{d}y\right]\subset\left[0,1\right]$，相应的面积微元为 $\mathrm{d}s=2\sqrt{y}\mathrm{d}y$，

压力微元为 $\mathrm{d}F_2=\rho g\left(h+1-y\right)2\sqrt{y}\mathrm{d}y=2\rho g\left(h+1-y\right)\sqrt{y}\mathrm{d}y$

闸门下部承受的水压力为 $F_2=\int_0^1 2\rho g\left(h+1-y\right)\sqrt{y}\mathrm{d}y=2\rho g\left[\frac{2}{3}\left(h+1\right)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^1=2\rho g\left(\frac{2h}{3}+\frac{4}{15}\right)$ 。

由题设 $\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{\rho g h^2}{2\rho g\left(\dfrac{2}{3}h+\dfrac{4}{15}\right)}=\dfrac{5}{4}$，化简得 $3h^2-5h-2=0$，即 $(h-2)(3h+1)=0$，

故 $h=2$，即闸门矩形部分的高 h 应为 2 米。



9.【考点定位】不定积分的换元法；不定积分的分部积分法。

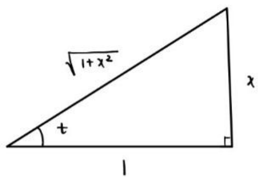
【解】令 $\arctan x=t$,，则 $x=\tan t, \mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan te^t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{\tan te^t}{\sec t}\mathrm{d}t=\int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t,$$

因为 $\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\int\sin t\mathrm{d}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t\sin t-\int\cos t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\sin t-\int\cos t\mathrm{d}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t\sin t-\mathrm{e}^t\cos t-\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t$,

所以 $\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t-\cos t)+C$，

故 $\displaystyle\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t-\cos t)+c=\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{2}\left(\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+c$。



10.【考点定位】定积分的不等式性质；函数的单调性。

【答案】B

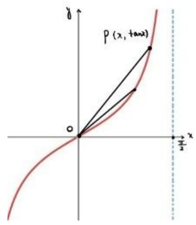
【解】令 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$，

因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$x\sec^2 x-\tan x=\dfrac{x-\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}>\dfrac{\sin x-\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}>0$，所以 $f'(x)>0$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{4}]$，则

$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4}]$ 单增。因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1, f(\frac{\pi}{4})=\frac{4}{\pi}$，所以 $1<f(x)<\frac{4}{\pi}$， $x\in(0,\frac{\pi}{4})$，则

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{\pi}\mathrm{d}x=1$, 且 $I_1>\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$； $I_2<\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$，所以 $1>I_1>I_2$，故答案选（B）。

【注】这里我们向同学们介绍一种快速判别 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增的方法：如图？， $y=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内为凹函数，其上的点 $(x,\tan x),(0,0)$ 的斜率 $k=\frac{\tan x}{x}$ 关于 x 单调递增。



11.【考点定位】定积分的几何应用；导数的几何意义。

【解】设切点为 (x_0,y_0)。由 $y=\ln x$ 得， $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, 从而 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

将 $x=0,y=0$ 代入切线方程可得 $x_0=\mathrm{e}$，所以切点为 $(\mathrm{e},1)$，切线为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$。

(1) 这里用两种方法求平面图形 D 的面积为

方法一： $A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\left(\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{e}}{2}y^2\right)\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}}{2}-1;$

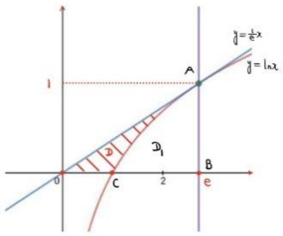
方法二： $A=S(D\cup D_1)-S(D_1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}-\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}-(x\ln x-x)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}-1$。

(2) 区域 $D\cup D_1$ 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 所得立体为圆锥体，其体积为： $V_1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2\times 1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2$，

区域 D_1 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 所得立体体积为：

$$V_2=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^{y+1}+\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}y=\pi\mathrm{e}^2-(2\pi\mathrm{e}^{y+1})\Big|_0^1+\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2y}\right)\Big|_0^1=\pi\left(2\mathrm{e}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\right),$$

所求旋转体的体积为： $V=V_1-V_2=\pi\left(\frac{5}{6}\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3)$。



12.【考点定位】定积分物理应用：变力沿直线做功；等比数列求和。

【解】（1）由题意知，当木桩被打进地下 $x(m)$ 时，桩所受阻力 $f=kx$，设第 n 次击打时木桩被打进地下 $x_n(m)$，此时汽锤克服阻力所做的功为 W_n。

当 $n=1$ 时，木桩被打入地下 $x_1(m)$ 处，则 $W_1=\int_0^{x_1} kx\mathrm{dx}=\frac{k}{2}x_1^{\ 2}$。

当 $n=2$ 时木桩被打入地下 $x_2(m)$ 处，即第二次击打，木桩从 $x_1(m)$ 移动到 $x_2(m)$ 处，

所以 $W_2=\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{dx}=\frac{k}{2}\left(x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}\right)$。

同理，当 $n=3$ 时 $W_3=\int_{x_2}^{x_3} kx\mathrm{dx}=\frac{k}{2}\left(x_3^{\ 2}-x_2^{\ 2}\right)$。则前三次汽锤所做的功为 $W_1+W_2+W_3=\frac{k}{2}x_3^{\ 2}$，

由题意可知 $W_3=rW_2=r^2W_1$，所以 $W_1+W_2+W_3=\left(1+r+r^2\right)W_1=\left(1+r+r^2\right)\frac{k}{2}x_1^{\ 2}$，因为第一次击打将桩打入地下 $a(m)$ 处，即 $x_1=a$，所以 $\frac{k}{2}x_3^{\ 2}=\left(1+r+r^2\right)\frac{k}{2}a^2$，故 $x_3=\sqrt{1+r+r^2}\,a$。

（2）设汽锤击打桩 n 次后，将桩打进地下 x_n (m)，则有：

$W_1=\int_0^{x_1} kxdx=\frac{k}{2}x_1^{\ 2}$，$W_2=\int_{x_1}^{x_2} kxdx=\frac{k}{2}\left(x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}\right)$，…，$W_n=\int_{x_{n-1}}^{x_n} kx\mathrm{dx}=\frac{k}{2}\left(x_n^{\ 2}-x_{n-1}^{\ \ 2}\right)$，

累加得 $W_1+W_2+\cdots+W_n=\frac{k}{2}x_n^{\ 2}$，又由于 $W_i=r^{i-1}W_1=r^{i-1}\cdot\frac{k}{2}x_1^2=r^{i-1}\cdot\frac{k}{2}a^2$，

所以 $\frac{k}{2}\left(1+r+\cdots+r^{n-1}\right)a^2=\frac{k}{2}x_n^{\ 2}$，从而 $x_n=\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}\,a$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}\,a=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}\,a=\sqrt{\frac{1}{1-r}}\,a$，

因此，若击打次数不限，汽锤至多可将木桩打入地下 $\sqrt{\frac{1}{1-r}}\,a(m)$ 处。

13. 【考点定位】旋转体的体积；旋转体的侧面积；洛必达法则。

【解】 (1)如图，曲边梯形绕 x 旋转一周所得旋转体的体积为：

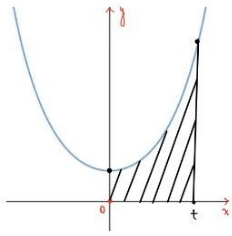
$$V(t)=\int_0^t \pi y^2\mathrm{dx}=\int_0^t \pi\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{dx}=\pi\int_0^t\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{dx}\text{；}$$

侧面积为 $S(t)=\int_0^t 2\pi y\cdot\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^t 2\pi\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^t\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x$；

故 $\frac{S(t)}{V(t)}=2$。

(2) 由于在点 $x=t$ 处的底面积为：$F(t)=\pi\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2$，所以

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x}{\pi\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{2\pi\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2}{2\pi\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)\cdot\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-2t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}}=1。$$



14.【考点定位】定积分的分部积分法； 导数的几何意义； 拐点的必要条件。

【解】由推广的分部积分法得 $\int(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x=(x^2+x)f''(x)-(2x+1)f'(x)+2f(x)+c$

$(x^2+x)\downarrow$	+ $(2x+1)$	—	2 +	0
$f'''(x)\uparrow$	$f''(x)$		$f'(x)$	$f(x)$

所以

$$I=\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x=\left[(x^2+x)f''(x)-(2x+1)f'(x)+2f(x)\right]\Big|_0^3$$
$$=\left[12f''(3)-7f'(3)+2f(3)\right]-\left[-f'(0)+2f(0)\right], \qquad ①$$

下面求 $f(0),f'(0),f(3),f'(3),f''(3)$:

因为 $(0,0)$ 处的切线 l_1 过点 $(2,4)$，所以 $f(0)=0,f'(0)=k_{l_1}\frac{4-0}{2-0}=2$。

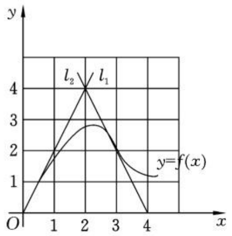
又因为因为点 $(3,2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，所以 $f''(3)=0,\ f(3)=2$，

再由 $(3,2)$ 处的切线 l_2 过点 $(2,4)$ 得，所以 $f'(3)=k_{l_2}=\frac{4-2}{2-3}=-2$。 这样，就得到了：

$$f(0)=0, f'(0)=2, f(3)=2, f'(3)=-2, f''(3)=0,$$

代入①得，$I=\left[12\times0-7\times(-2)+2\times2\right]-\left[-2+2\times0\right]=20,$ 即得

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x=20。$$



15.【考点定位】不定积分换元积分法； 不定积分分部积分法。

【解】方法一：令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$， $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{t}$，

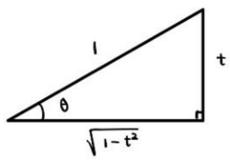
$$\int\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\arcsin t\mathrm{d}\left(-\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t}\arcsin t+\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\ ,$$

由于

$$\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\overset{t=\sin\theta}{=}\int\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int\csc\theta\mathrm{d}\theta=\ln|\csc\theta-\cot\theta|+c$$

$$=\ln\left|\frac{1}{t}-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right|+c=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}\right|+c$$

所以，原式$=-\dfrac{1}{t}\arcsin t+\ln\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}+C=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin \mathrm{e}^x+\ln\left(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\right)-x+c$。

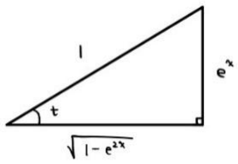


方法二：令 $\arcsin \mathrm{e}^x=t$，则 $\mathrm{e}^x=\sin t, x=\ln\sin t, \mathrm{d}x=\dfrac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=\int t\cdot\csc t\cdot\cot t\mathrm{d}t=\int t\mathrm{d}\left(-\csc t\right)=-t\csc t+\int\csc t\mathrm{d}t$$

$$=-t\csc t+\ln|\csc t-\cot t|+c=-\left(\arcsin \mathrm{e}^x\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\ln\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x}+c$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin \mathrm{e}^x+\ln\left(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\right)-x+C\ 。$$



方法三：$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = \int \arcsin e^x d(-e^{-x}) = -e^{-x}\arcsin e^x + \int e^{-x}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$$= -e^{-x}\arcsin e^x + \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx,$$

下面计算$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$：令$\sqrt{1-e^{2x}} = t$，则

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right), dx = \frac{-t}{1-t^2}dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{-t}{1-t^2}dt = \int \frac{-1}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right) + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{1+\sqrt{1-e^{2x}}} + c = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\left(1-\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}{e^{2x}}\right) + c = \ln\left(1-\sqrt{1-e^{2x}}\right) - x + c$$

故 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = -e^{-x}\arcsin e^x + \ln(1-\sqrt{1-e^{2x}}) - x + c$。

16.【考点定位】高阶导数； 导数的几何意义； 参数方程确定的函数的导数； 函数的凹凸性的判定； 定积分的几何应用。

【解】(Ⅰ)因为$\frac{dx}{dt} = (t^2+1)' = 2t$，$\frac{dy}{dt} = (4t-t^2)' = 4-2t$，所以

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2-t}{t}，\quad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{2}{t}-1\right)'}{2t} = -\frac{1}{t^3}。$$

因为$t>0$，所以$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，故曲线L是凸的。

(Ⅱ)设切点(x_0, y_0)对应的参数为t_0，则$\begin{cases} x_0 = t_0^2+1 \\ y_0 = 4t_0 - t_0^2 \end{cases}$，$y'(x_0) = \left.\left(\frac{2}{t}-1\right)\right|_{t=t_0} = \frac{2}{t_0}-1,$

曲线 L 在点 (x_0,y_0) 的切线方程为 $y-\left(4t_0-t_0^2\right)=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)\left(x-\left(t_0^{\ 2}+1\right)\right)$，因为切线过点 $(-1,0)$，所以

$-(4t_0-t_0^2)=\frac{2-t_0}{t_0}(-1-t_0^{\ 2}-1)$，化简得 $t_0^2+t_0-2=0$，解得 $t_0=1$ 或 $t_0=-2$（舍去），

当 $t_0=1$ 时，$x_0=2$，$y_0=3$，所以切点为 $(2,3)$，所求切线方程为 $y=x+1$。

(III) 如图所示，用两种方法求指定区域的面积。

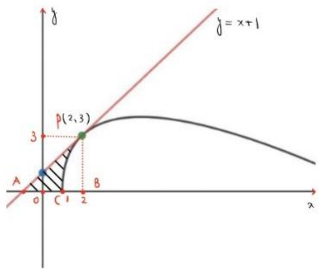
方法一：

记参数方程 $\begin{cases}x=t^2+1\\y=4t-t^2\end{cases}$ 表示的曲线的方程为 $y=y(x)$，所求区域的面积为

$$S=S_{\Delta ABP}-S_{曲边\Delta CBP}=\frac{1}{2}\times 3^2-\int_1^2 y(x)\mathrm{d}x \overset{\begin{cases}x=t^2+1\\y=4t-t^2\end{cases}}{=} \frac{9}{2}-\int_0^1\left(4t-t^2\right)\mathrm{d}\left(t^2+1\right)$$
$$=\frac{9}{2}-\int_0^1 2t\left(4t-t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{9}{2}-\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{3}。$$

方法二：记参数方程 $\begin{cases}x=t^2+1\\y=4t-t^2\end{cases}$ 表示的曲线的方程为 $x=x(y)$，所求区域的面积为

$$S=\int_0^3\left[x(y)-(y-1)\right]\mathrm{d}y=\int_0^3 x(y)\mathrm{d}y-\frac{3}{2}=\int_0^1\left(t^2+1\right)\mathrm{d}\left(4t-t^2\right)-\frac{3}{2}$$
$$=\int_0^1\left(t^2+1\right)\left(4-2t\right)\mathrm{d}t-\frac{3}{2}=\int_0^1\left(-2t^3+4t^2-2t+4\right)\mathrm{d}t-\frac{3}{2}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-1+4\right)-\frac{3}{2}=\frac{7}{3}。$$



【注】$\begin{cases}x=t^2+1\\y=4t-t^2\end{cases}(t\ge 0)$ 表示的曲线可以变为显函数：$y=4\sqrt{x-1}-(x-1)$。

17.【考点定位】导数的几何意义；　一阶线性微分方程通解；　平面图形的面积。

【解】(Ⅰ) 如图，设曲线 L 的方程为 $y=y(x)$，则点 $P(x,y)$ 处的斜率为 y'，直线 OP 的斜率为 $\frac{y}{x}$。

由题设知 $y'-\frac{y}{x}=ax$，该一阶线性微分方程的通解：

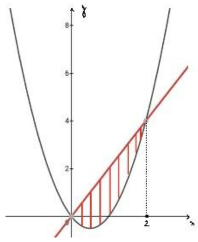
$$y=\mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int ax\mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[\int ax\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C\right]=x(\int a\mathrm{d}x+C)=ax^2+Cx,$$

因为曲线过$(1,0)$，则$0=a+C$，即$C=-a$，所以曲线L的方程为$y=ax^2-ax$。

（II）如图，由$\begin{cases}y=ax^2-ax\\ y=ax\end{cases}$得，两曲线的交点$(0,0)$，$(2,2a)$，则两曲线所围成的平面图形的面积为：

$$S=\int_0^2\left[ax-(ax^2-ax)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2(2ax-ax^2)\mathrm{d}x=(ax^2-\frac{a}{3}x^3)\Big|_0^2=4a-\frac{8}{3}a=\frac{4}{3}a,$$

由题设可得，$\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$，解得$a=2$。



【注】在$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int ax\mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$中$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|$不需要加绝对值，这是由于无论$x$是正还是负，最后符号总可以消掉。

18.【考点定位】函数的奇偶性； 连续的概念； 变量代换； 函数可积的必要条件； 定积分的不等式性质。

【答案】B

【解】方法一：因为$f(x)$是奇函数，所以$f(-x)=-f(x)$。记$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

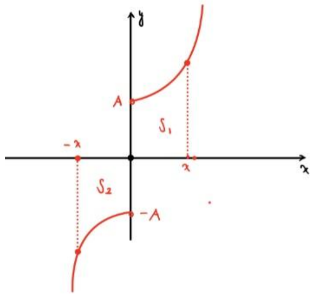
$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\overset{t=-u}{=}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$$，故$F(x)$是偶函数。

因为$f(x)$可积， 所以$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是连续函数。综上所述，答案选（B）

方法二：作为选择题，可以考虑采用特例法快速得到结论，取$f(x)=\begin{cases}-1,x<0,\\0,x=0,\\1,x>0,\end{cases}$，则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}-x,x<0,\\0,\quad x=0,\\x,\quad x>0,\end{cases}=|x|$$，由此得答案选（B）。

方法三：数形结合法



如图，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=S_1$，$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t=-\left(-S_2\right)=S_2$，由奇函数的对称性可得 $S_1=S_2$，即得 $F(x)=F\left(-x\right)$。由 B-4 中的注可得，$F'(x)=f\left(x\right),\left(x\neq 0\right)$ 且 $F_+'(0)=A,F_-'(0)=-A$。

故答案选（B）。

19.【考点定位】定积分的几何应用；反常积分；函数单调性的判定；一元函数的最值；Γ 函数。

【解】（1）如图？，所求旋转体的体积为

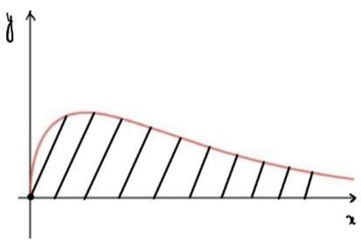
$$V\left(a\right)=\int_0^{+\infty}\pi\left(\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{+\infty}xa^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{+\infty}x\left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{\ln a}{a}x}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln a}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\ln a}{a}x\right)}\mathrm{d}\left(\frac{\ln a}{a}x\right)\overset{u=\frac{\ln a}{a}x}{=}\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2\Gamma\left(2\right)=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2。$$

（2）由（1）可知 $V'\left(a\right)=\dfrac{2\pi a}{\ln^3 a}\left(\ln a-1\right)$，令 $V'\left(a\right)=0$ 可得驻点 $a=\mathrm{e}$。列表讨论如下：

a	$\left(1,\mathrm{e}\right)$	e	$\left(\mathrm{e},+\infty\right)$
$V'\left(a\right)$	$-$	0	$+$
$V\left(a\right)$	$\downarrow$	最小值点	$\uparrow$

故 $a=\mathrm{e}$ 时，体积 $V\left(a\right)$ 最小，且最小值为 $V\left(\mathrm{e}\right)=\pi\mathrm{e}^2$。



图？

20.【考点定位】导数的定义； 定积分的积分中值定理； 周期函数的定积分； 定积分的换元法；变限定积分求导。

【解】(Ⅰ)由于对任意的 x， $f(x)$ 连续，所以

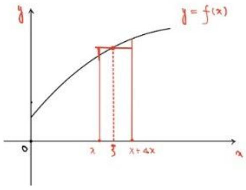
$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x},$$

由积分中值定理可得，存在 ξ 介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间，使得 $\int_x^{x+\Delta x}f\left(t\right)\mathrm{d}t=f\left(\xi\right)\Delta x$，如图？从而

$$F'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f\left(x\right),$$

故 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$。



(Ⅱ)这里采用两种方法证明 $G(x+2)=G\left(x\right)$。

方法一：由题设知 $f(x+2)=f(x)$，

$$G(x+2)=2\int_0^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2\left[\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t\right]-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+2\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t,$$

又由于 $\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t\overset{t=u+2}{=\!=\!=}\int_0^x f(u+2)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，所以 $G(x+2)=2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=G(x)$，

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的函数。

方法二：令 $H\left(x\right)=G\left(x+2\right)-G\left(x\right)$，则

$$H\left(x\right)=\left[2\int_0^{x+2}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\left(x+2\right)\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]-\left[2\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=2\left[\int_0^{x+2}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]$$

从而， $H'\left(x\right)=2\left[f\left(x+2\right)-f\left(x\right)\right]=0$，因此 $H\left(x\right)$ 为常数。又由于

$$H\left(0\right)=2\left[\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_0^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=0,$$

所以 $H\left(x\right)=G\left(x+2\right)-G\left(x\right)=0$，即 $G(x+2)=G\left(x\right)$。故 $G(x)$ 是以 2 为周期的函数。

21. 【考点定位】定积分的换元法； 变限积分求导。

（Ⅰ）证明：这里采用两种方法证明该结论。

方法一：$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_t^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^{2+t} f(x)\mathrm{d}x$，

由于 $$\int_2^{2+t} f(x)\mathrm{d}x \overset{x=u+2}{=} \int_0^t f(u+2)\mathrm{d}u = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x，$$

所以 $$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_t^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x。$$

方法二：记 $G(t) = \int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x$，则 $G'(t) = f(t+2) - f(t) = 0$，故 $G(t)$ 为常数，又因为 $G(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，所以 $G(t) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$。

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，记 $A = \int_0^2 f(s)\mathrm{d}s$，则

$$\begin{aligned}G(x+2) - G(x) &= \int_0^{x+2}[2f(t) - A]\mathrm{d}t - \int_0^x [2f(t) - A]\mathrm{d}t = \int_x^{x+2}[2f(t) - A]\mathrm{d}t = 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - 2A \\ &= 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2A = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s = 0,\end{aligned}$$

故 $G(x+2) = G(x)$，所以 $G(x)$ 是周期为 2 的周期函数。

22.【考点定位】定积分的换元法； 分部积分法。

【解】方法一：设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$，则 $x = \frac{1}{t^2-1}$，所以 $\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\mathrm{d}x = \int \ln(1+t)\mathrm{d}\frac{1}{t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$，

下面计算 $\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$：

设 $$\frac{1}{(t^2-1)(t+1)} = \frac{1}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$$

则 $$1 = A(t+1)^2 + B(t-1)(t+1) + C(t-1)，$$

令 $t=1$ 得 $A = \frac{1}{4}$。对比 t^2 的系数得 $A+B=0$，所以 $B = -\frac{1}{4}$。再比较常数项得 $1 = A - B - C$，所以 $C = -\frac{1}{2}$

从而 $$\int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\ln|t-1| - \ln|t+1| + \frac{2}{t+1}\right] + c_1$$

故原式 $= x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1} - c_1$

$$= x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) + \frac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right] + c。$$

方法二：令 $x=\tan^2 t$，则

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\int \ln\left(1+\frac{\sec t}{\tan t}\right)\mathrm{d}\tan^2 t=\int \ln\left(1+\csc t\right)\mathrm{d}\tan^2 t$$

$$=\tan^2 t\cdot\ln\left(1+\csc t\right)-\int \tan^2 t\frac{-\csc t\cdot\cot t}{1+\csc t}\mathrm{d}t=\tan^2 t\cdot\ln\left(1+\csc t\right)+\int \tan t\cdot\frac{\csc t}{1+\csc t}\mathrm{d}t$$

$$=\tan^2 t\cdot\ln\left(1+\csc t\right)+\int \frac{\sin t}{\left(1+\sin t\right)\cos t}\mathrm{d}t$$

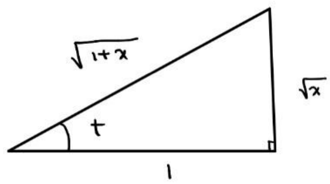
下面计算：$I=\int \frac{\sin t}{\left(1+\sin t\right)\cos t}\mathrm{d}t$

$$I=\int \frac{\sin t}{\left(1+\sin t\right)\cos t}\mathrm{d}t=\int \frac{\sin t\cos t}{\left(1+\sin t\right)\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{\sin t}{\left(1+\sin t\right)^2\left(1-\sin t\right)}\mathrm{d}\sin t\overset{u=\sin t}{=}\int \frac{u}{\left(1+u\right)^2\left(1-u\right)}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}-\frac{2}{\left(1+u\right)^2}\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+u}+c_1=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin t}+c$$

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\tan^2 t\cdot\ln\left(1+\csc t\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin t}+c$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{1+x}}}+c==x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right]+c。$$



【注】这里 $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$。

23.【考点定位】变限积分函数的连续性； 变限积分函数可导的条件。

【答案】选（D）。

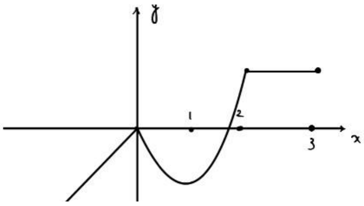
当 $x\neq 0,2$ 时，$f(x)$ 连续，从而 $F'(x)=f(x)\quad(x\neq 0,2)$

列表讨论如下：

x	$[-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1,2)$	$(2,3]$

$F'(x)$	+	−	0	+	0
$F(x)$	↑	↓		↑	常数

且 $F(0)=0$，$F(x)$ 在 $x=0,2$ 处不可导。因此其图形如下：



故选（D）。

24.【考点定位】反常积分的敛散性判别。

【答案】D

【解】注意 $x=0,1$ 为被积函数的瑕点(或可能的瑕点)

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac12}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=I_1+I_2。$$

对于 $I_1=\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，当 $x\to0^+$ 时，$\ln^2(1-x)\approx x^2\Rightarrow\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}\approx\left(x^2\right)^{\frac1m}=x^{\frac2m}\Rightarrow\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\approx\frac{1}{x^{\frac1n-\frac2m}}$，

从而 $I_1=\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 与 $\int_0^{\frac12}\frac{1}{x^{\frac1n-\frac2m}}dx$ 同敛散，由于 $\frac1n-\frac2m<\frac1n\le1$，所以对任意的正整数 m,n，I_1 收敛。

对于 $I_2=\int_{\frac12}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，当 $x\to1^-$ 时，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}\Big/\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}=1$，所以 I_2 与 $\int_{\frac12}^1\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}dx$ 同敛散。又因为

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{(1-x)^{-\frac12}}\overset{t=1-x}{=}\lim\limits_{t\to0^+}t^{\frac12}\sqrt[m]{\ln^2t}=\lim\limits_{t\to0^+}\sqrt[m]{t^{\frac m2}\ln^2t}=0$，而 $\int_{\frac12}^1\frac{1}{(1-x)^{\frac12}}dx$ 收敛，从而 $\int_{\frac12}^1\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}dx$ 收敛，进而

I_2 收敛。

综上所述，$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性与 m,n 均无关，答案选(D)。

25.【考点定位】不定积分的换元法；分部积分法。

【解】方法一：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,dx=2tdt$

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\arcsin t+2\ln t}{t}\cdot2tdt=2\int\arcsin tdt+4\int\ln tdt$$

由于

$$\int \arcsin t\mathrm{d}t = t\cdot\arcsin t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=t\cdot\arcsin t+\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-t^2)=t\cdot\arcsin t+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+c_1,$$

$$\int \ln t\mathrm{d}t = t\ln t-\int 1\mathrm{d}t = t\ln t - t + c_2,$$

所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2t\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+4t\ln t-4t+C = 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C。$$

方法二：

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int\left(\arcsin\sqrt{x}+\ln x\right)\mathrm{d}\sqrt{x}\overset{u=\sqrt{x}}{=}2\int\left(\arcsin u+2\ln u\right)\mathrm{d}u = 2\int\arcsin u\mathrm{d}u+4\int\ln u\mathrm{d}u$$

由于

$$\int \arcsin u\mathrm{d}u = u\cdot\arcsin u-\int\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=u\cdot\arcsin u+\frac{1}{2}\int(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-u^2)=u\cdot\arcsin u+(1-u^2)^{\frac{1}{2}}+c_1,$$

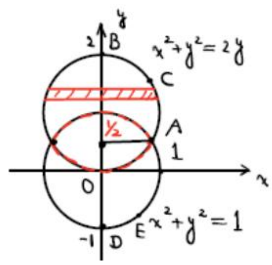
$$\int \ln u\mathrm{d}u = u\ln u-\int 1\mathrm{d}u = u\ln u - u + c_2,$$

所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2u\arcsin u+2\sqrt{1-u^2}+4u\ln u-4u+C = 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$$

26.【考点定位】旋转体的体积；定积分的物理应用。

【解】（1）如图，易知 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，弧 ACB 的方程为 $x=\sqrt{2y-y^2}\left(\frac{1}{2}\le y\le 2\right)$，弧 AED 的方程为 $x=\left(\sqrt{1-y^2}\right)\left(-1\le y\le\frac{1}{2}\right)$，故容器的容积为



$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi\left(\sqrt{2y-y^2}\right)^2\mathrm{d}y+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi\left(2y-y^2\right)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{9}{8}\pi+\frac{9}{8}\pi=\frac{9}{4}\pi。$$

（2）当 $y\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，取薄片 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset\left[\frac{1}{2},2\right]$，其质量 $\mathrm{d}m=\rho\pi\left(\sqrt{2y-y^2}\right)^2\mathrm{d}y$，

该薄片提升的高度为 $2-y$，将该薄片抽出克服重力做功为

$$\mathrm{d}W_1=(2-y)g\mathrm{d}m=\pi\rho g(2-y)(2y-y^2)\mathrm{d}y,$$

总功为 $$W_1=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi\rho g\left(2-y\right)\left(2y-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{63}{64}\pi\rho g,$$

当 $y\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 时，取薄片 $\left[y,y+\mathrm{d}y\right]\subset\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，其质量 $\mathrm{d}m=\rho\pi\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}y$，该薄片提升的高度 $2-y$，

将该薄片抽出克服重力做功为

$$\mathrm{d}W_2=\left(2-y\right)g\mathrm{d}m=\pi\rho g\left(2-y\right)\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y,$$

总功为 $W_2=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi\rho g\left(2-y\right)\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{153}{64}\pi\rho g$，

故至少需要做功 $$W=W_1+W_2=\frac{27}{8}\pi\rho g=\frac{27\times10^3}{8}\pi g。$$

27.【考点定位】定积分的不等式性质；定积分的换元法。

【答案】D

【解】

$$I_1=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x;\quad I_2=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x;\ I_3=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x。$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\overset{x=\pi+t}{=}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(\pi+t)^2}\sin\left(\pi+t\right)\mathrm{d}\left(\pi+t\right)=-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t,$$
$$\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\overset{x=2\pi+t}{=}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(2\pi+t)^2}\sin\left(2\pi+t\right)\mathrm{d}\left(2\pi+t\right)=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(2\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t,$$

记 $a=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{t^2}\sin t\mathrm{d}t,\ b=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t,\ c=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(2\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t$，

由于 $t\in\left(0,\pi\right)$ 时，$0<\mathrm{e}^{t^2}\sin t<\mathrm{e}^{(\pi+t)^2}\sin t<\mathrm{e}^{(2\pi+t)^2}\sin t$，

所以 $0<\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{t^2}\sin t\mathrm{d}t<\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t<\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(2\pi+t)^2}\sin t\mathrm{d}t$，即 $0<a<b<c$。又由于

$I_1=a,\quad I_2=a-b,\ I_3=a-b+c,$，所以 $I_2<I_1<I_3$，故答案选(D)。

28.【考点定位】参数方程确定的函数的导数； 微分方程； 平面图形面积。

【解】由 $\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t,\end{cases}$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\sin t}{f'(t)}$，曲线 L 上任意一点 $P(f(t),\cos t)$ 处的切线方程为

$$Y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}(X-f(t))，$$ 其中 $\left(X,Y\right)$ 为切线上的动点。

令 $Y=0$，可得切线与 x 轴的交点为 $Q(f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}+f(t),0)$。

由题意可知 $|PQ|=1$，所以 $\left(f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}\right)^2+\cos^2 t=1$，从而 $\left(f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}\right)^2=\sin^2 t$，由于 $f'(t)>0$，所以

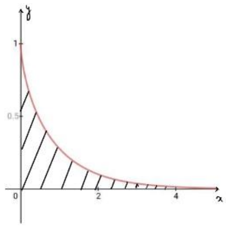
$f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$，故 $f(t)=\displaystyle\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C$，

因为 $f(0)=0$，所以 $C=0$，故 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t,t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。

曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t,\\ y=\cos t,\end{cases}t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所求区域的面积为：

$$S=\int_0^{+\infty}y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}f(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}。$$

【注】为了方便同学们理解，我们画出该曲线的图像：



29.【考点定位】变限积分求导；分部积分法；定积分的换元法；累次积分交换积分次序。

【解】方法一：由 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$ 知 $f(1)=0$，且 $f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，故

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x=2f(1)-2\int_0^1\sqrt{x}\frac{\ln(x+1)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\overset{\sqrt{x}=t}{\underset{x=t^2}{=}}-2\int_0^1\frac{\ln(1+t^2)}{t}2t\mathrm{d}t=-4\int_0^1\ln(1+t^2)\mathrm{d}t=-4\left[t\ln(1+t^2)\Big|_0^1-\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t\right]$$

$$=-4\ln 2+8\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=-4\ln 2+8\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=-4\ln 2+8-(8\arctan t)\Big|_0^1=8-4\ln 2-2\pi。$$

方法二：$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$

$$=-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\int_x^1\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t=-\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^t\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t\int_0^t\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$=-\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot 2\sqrt{t}\mathrm{d}t=-2\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=8-2\pi-4\ln 2$。（最后的定积分的计算过程与方法一相同）。

30.【考点定位】曲线的弧长；形心坐标。

【解】(1) 由 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ 得 $y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，

所以曲线 L 的弧长为 ：

$$S=\int_1^e\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_1^e\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}。$$

(2) 当 $x\in(1,e)$ 时 $y'=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})=\frac{x^2-1}{2x}>0$，所以 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ 在 $[1,e]$ 上单增，由 $y(1)=\frac{1}{4}>0$ 可知，

区域 $D=\{(x,y)|0\le y\le\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x,1\le x\le e\}$。

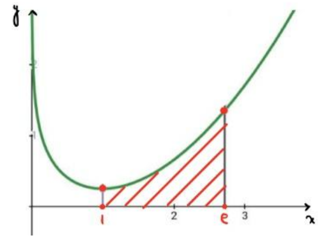
区域 D 的面积　　$S(D)=\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}x\right)\Big|_1^e=\frac{e^3-7}{12}$。,

因为

$$\iint_D x\mathrm{d}\sigma=\int_1^e\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}x\mathrm{d}y=\int_1^e x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{16}x^4\Big|_1^e-\frac{1}{4}\int_1^e\ln x\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{e^4-1}{16}-\frac{1}{4}\left[\left(x^2\ln x\right)\Big|_1^e-\int_1^e x\mathrm{d}x\right]=\frac{e^4-1}{16}-\frac{e^2}{4}+\frac{e^2-1}{8}=\frac{1}{16}\left(e^4-2e^2-3\right)$$

所以形心横坐标为　　$\overline{x}=\frac{\iint_D x\mathrm{d}\sigma}{S(D)}=\frac{\frac{1}{16}\left(e^4-2e^2-3\right)}{\frac{e^3-7}{12}}=\frac{3\left(e^4-2e^2-3\right)}{4\left(e^3-7\right)}$。



31.【考点定位】$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$；配方法；二元函数的最值。(仔细检查注解!!)

【答案】A

【解】记 $\varepsilon(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x$, 则

$$\varepsilon(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2+a^2\cos^2x+b^2\sin^2x-2ax\cos x-2bx\sin x+2ab\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^\pi+2a^2\int_0^\pi\cos^2x\mathrm{d}x+2b^2\int_0^\pi\sin^2x\mathrm{d}x-4b\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x,$$

又由于$\int_0^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$， $\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,

$\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\left(-\cos x\right)=\left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=\pi+\left(\sin x\Big|_0^{\pi}\right)=\pi$,或者直接由

$\int_0^{\pi}xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$得$\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\pi$,

所以$\varepsilon\left(a,b\right)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2-4\pi b=\pi\left[a^2+\left(b-2\right)^2\right]+\left(\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\right)$

这里用两种方法求a,b：

方法一：配方法

由$\varepsilon\left(a,b\right)=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2-4\pi b=\pi\left[a^2+\left(b-2\right)^2\right]+\left(\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\right)$可知

当$a=0,b=2,$时$\varepsilon\left(a,b\right)$最小。此时$a_1\cos x+b_1\sin x=2\sin x$，故答案选（A）。

方法二：二元函数求最值

由$\varepsilon\left(a,b\right)=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2-4\pi b$可得，$\frac{\partial\varepsilon\left(a,b\right)}{\partial a}=2\pi a,\frac{\partial\varepsilon\left(a,b\right)}{\partial b}=2\pi b-4\pi,$令

$\begin{cases}\frac{\partial\varepsilon\left(a,b\right)}{\partial a}=2\pi a=0,\\ \frac{\partial\varepsilon\left(a,b\right)}{\partial b}=2\pi b-4\pi=0,\end{cases}$解得$\varepsilon\left(a,b\right)$的驻点(稳定点)为$\begin{cases}a=0,\\ b=2,\end{cases}$由问题的实际背景知，当$a=0,b=2,$时

$\varepsilon\left(a,b\right)$最小，故答案选（A）。

【注】①此题的命题背景是如下的最佳平方逼近问题：设函数$f\left(x\right)$在区间$\left[a,b\right]$上连续，

函数系$\left\{\varphi_1\left(x\right),\varphi_2\left(x\right),\cdots,\varphi_n\left(x\right)\right\}$是区间$\left[a,b\right]$上的正交系，即$\int_a^b\varphi_i\left(x\right)\cdot\varphi_j\left(x\right)\mathrm{d}x=0,\left(i\neq j\right)$，

求系数$a_1,a_2,\cdots,a_n$使得$\int_a^b\left[f\left(x\right)-\left(a_1\varphi_1\left(x\right)+a_2\varphi_2\left(x\right)+\cdots+a_n\varphi_n\left(x\right)\right)\right]^2\mathrm{d}x$达到最小。

这个问题的解答如下：记$\varepsilon\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\int_a^b\left[f\left(x\right)-\left(a_1\varphi_1\left(x\right)+a_2\varphi_2\left(x\right)+\cdots+a_n\varphi_n\left(x\right)\right)\right]^2\mathrm{d}x$，则

$$\varepsilon(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\int_a^b\left[f(x)-\left(a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\right)\right]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n\left(\int_a^b\varphi_i^2(x)\mathrm{d}x\right)a_i^2-\sum_{i=1}^n\left(2\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right)a_i+2\sum_{i\neq j}\left(\int_a^b\varphi_i(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x\right)a_ia_j$$

$$=\left[\left(\int_a^b\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x\right)a_i^2-\left(2\int_a^b f(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x\right)a_1\right]+\cdots+\left[\left(\int_a^b\varphi_n^2(x)\mathrm{d}x\right)a_n^2-\left(2\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right)a_n\right]+\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\int_a^b\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(a_1-\frac{\int_a^b f(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x}\right)^2+\cdots+\left(\int_a^b\varphi_n^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(a_n-\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b\varphi_n^2(x)\mathrm{d}x}\right)^2+\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^n\frac{\left(\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_a^b\varphi_i^2(x)\mathrm{d}x}$$

从而得到：当 $a_i=\dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b\varphi_i^2(x)\mathrm{d}x},i=1,2,\cdots,n$ 时，$\varepsilon(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 取得最小值，最小值为：

$\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^n\frac{\left(\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_a^b\varphi_i^2(x)\mathrm{d}x}$。该结论以后可以直接使用。

②对于本题而言，函数 $f(x)=x$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，函数系 $\{\cos x,\sin x\}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上正交，即 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot\sin x\mathrm{d}x=0$，由注①中的结论立即可得：

$$a_1=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x}\overset{\text{奇函数}}{=}\frac{0}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x}=0,b_1=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x}\overset{\text{偶函数}}{=}\frac{2\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x}{\pi}=\frac{2\times\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x}{\pi}=2。$$

32.【考点定位】定积分的性质； 变限积分求导； 不等式的证明。

【解】(Ⅰ)由 $0\le g(x)\le 1$ 得，当 $x\in[a,b]$ 时，$\int_a^x 0\mathrm{d}t\le\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\le\int_a^x 1\mathrm{d}t$，所以

$$0\le\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\le x-a,\quad x\in[a,b]。$$

(Ⅱ)令 $F(u)=\int_a^{a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^u f(x)g(x)\mathrm{d}x$，$u\in[a,b]$，则

$$F(a)=0,\quad F'(u)=f(a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t)\cdot g(u)-f(u)g(u),$$

由(Ⅰ)知，$a\le a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t\le a+u-a=u$，因为 $f(x)$ 单调递增，所以

$$F'(u)=g(u)\cdot[f(a+\int_a^u g(t)\mathrm{d}t)-f(u)]\le 0,$$

故 $F(u)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，从而 $F(b)\le F(a)=0$，即得

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x。$$

33.【考点定位】函数的复合；定积分的几何意义。(题目有错!!!)

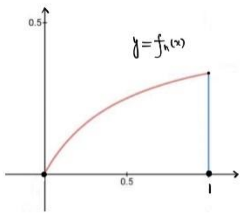
【解】因为 $f_1(x)=\dfrac{x}{1+x},f_2(x)=f(f_1(x))=\dfrac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+2x}$，假设 $f_k(x)=\dfrac{x}{1+kx}$，则

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=f(\frac{x}{1+kx})=\frac{\frac{x}{1+kx}}{1+\frac{x}{1+kx}}=\frac{x}{1+(k+1)x}。$$

由数学归纳法可得， $y=f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(n=1,2,\cdots)$，因此曲线 $y=f_n(x)$ 过点 $(0,0)$，如图?

所以 $$nS_n=\int_0^1 nf_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{nx}{1+nx}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{nx+1-1}{1+nx}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+nx)}{1+nx}=1-\frac{\ln(1+n)}{n},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}nS_n=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}=1-0=1。$$



34.【考点定位】质心公式。

【答案】$\dfrac{11}{20}$

【解】 $$\overline{x}=\frac{\int_0^1 x\rho(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1\rho(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x}{\int_0^1(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x}=\frac{\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1}{\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_0^1}=\frac{-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}+1+1}=\frac{11}{20}。$$

35.【考点定位】二阶常系数线性齐次方程；反常积分。

【解】（Ⅰ）微分方程 $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为：$r^2+2r+k=0$，解得

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4k}}{2}=-1\pm\sqrt{1-k},$$

由于 $0<k<1$，所以，$r_1=-1+\sqrt{1-k}<0$，$r_2=-1-\sqrt{1-k}<0$，$y=c_1\mathrm{e}^{r_1x}+c_2\mathrm{e}^{r_2x}$，

故 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}c_1\mathrm{e}^{r_1x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}c_2\mathrm{e}^{r_2x}\mathrm{d}x=-\dfrac{c_1}{r_1}-\dfrac{c_2}{r_2}$，所以 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

（Ⅱ）方法一：由于 $y(+\infty)=0$，$y'(+\infty)=0$，$y=-\dfrac{1}{k}(y''+2y')$，所以

$$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{k}(y''+2y')\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}(y'+2y)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{k}(y'(0)+2y(0))=\frac{3}{k}\text{。}$$

方法二：由 $y=c_1\mathrm{e}^{r_1x}+c_2\mathrm{e}^{r_2x}$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$ 得，$\begin{cases}c_1+c_2=1,\\ c_1r_1+c_2r_2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c_1=\dfrac{r_2-1}{r_2-r_1},\\ c_2=\dfrac{1-r_1}{r_2-r_1},\end{cases}$，故

$$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=-\frac{c_1}{r_1}-\frac{c_2}{r_2}=-\frac{c_1r_2+c_2r_1}{r_1r_2}=-\frac{\frac{r_2-1}{r_2-r_1}r_2+\frac{1-r_1}{r_2-r_1}r_1}{r_1r_2}=-\frac{\left(r_2^2-r_1^2\right)-\left(r_2-r_1\right)}{r_1r_2\left(r_2-r_1\right)}=-\frac{r_2+r_1-1}{r_1r_2}=-\frac{-2-1}{k}=\frac{3}{k}\text{。}$$

36.【考点定位】旋转体的体积；瓦里士公式；旋转体的侧面积。

【解】(1) 设星形线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 表示的曲线方程为 $y=y(x)$。任取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,1]$，该区间上的体积元素为 $\mathrm{d}V=\pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi y^2(x)\mathrm{d}x$，所以

$$V=\int_0^1\pi(1-x^2)\mathrm{d}x-\int_0^1\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}-\int_0^1\pi y^2(x)\mathrm{d}x\overset{\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}}{=}\frac{2\pi}{3}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\pi\sin^6 t\,\mathrm{d}\cos^3 t$$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi-3\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 t\mathrm{d}t\right)=\frac{2}{3}\pi-3\pi\left(\frac{6!!}{7!!}-\frac{8!!}{9!!}\right)=\frac{18}{35}\pi\text{。}$$

(2) 曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体侧面积为：

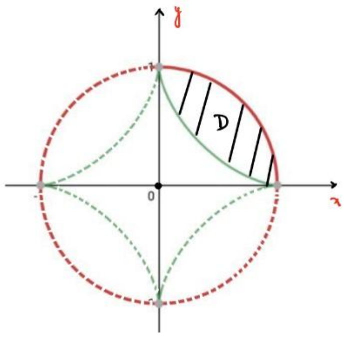
$$S_1=\int_0^1 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 2\pi\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\pi\text{。}$$

星形线绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi\sin^3 t\sqrt{\left[3\cos^2 t(-\sin t)\right]^2+\left[3\sin^2 t\cos t\right]^2}\mathrm{d}t$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}\sin t=\frac{6}{5}\pi\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{5}\pi\text{。}$$

故旋转体侧面积 $S=S_1+S_2=2\pi+\dfrac{6}{5}\pi=\dfrac{16}{5}\pi$。



【注】由于 $y=\sqrt{1-x^2}\left(0\le x\le 1\right)$ 为单位圆的四分之一，故该四分之一圆绕 x 轴旋转一周所得旋转体为半球，因此此在求旋转体体积的侧面积时，我们可直接利用半球的体积 $V_{半球}=\dfrac{2}{3}\pi$，及侧面积 $S_1=2\pi$ 简化计算。

37.【考点定位】定积分不等式性质； 曲线的凹凸性。

【答案】B

【解】方法一：数形结合法：

如图？由于 $f''(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为凹函数，弦 AB 位于弧 AB 的上方。又由于弦 AB 的方程为 $y=-2x-1$，从而 $f(x)<-2x-1,x\in\left(-1,0\right)$，进而由定积分的不等式性质知：

$$\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<\int_{-1}^{0}(-2x-1)\mathrm{d}x=0,$$

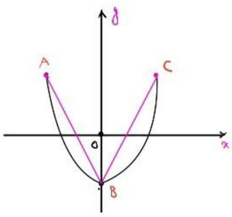
同理在 $[0,1]$ 上，弦 BC 位于弧 BC 的上方，弦 BC 方程为 $y=2x-1$，从而 $f(x)<2x-1,x\in\left(0,1\right)$，所以

$$\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1}(2x-1)\mathrm{d}x=0,$$

故 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$，从而(A)错误，(B)正确。

对于选项(C)和(D)，当取 $f(x)$ 为偶函数时，有 $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x,$ 从而(C)、(D)都错误。

综上所述，答案选(B)。



方法二：特例法

取 $f(x)=2x^2-1,x\in\left[-1,1\right]$，则 $f(x)$ 满足题设条件，具体计算可得：

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3},\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3},\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}。$$

故答案选(B)。

【注】一般情形下，通过数形结合的方法容易得到以下重要结论：

①若 $f''(x)>0, x\in[a,b]$，（如图(a)）则弦 AB 位于曲线 $y=f(x)$ 的上方，点 $\left(\dfrac{a+b}{2}, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$ 的切线位于曲线 $y=f(x)$ 的下方，从而得到以下面积关系：

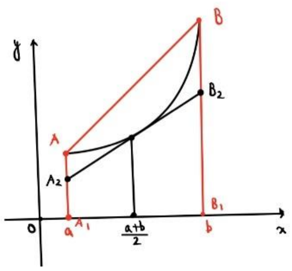
$$S_{梯形ABB_1A_1} > S_{曲边梯形ABB_1A_1} > S_{梯形A_2B_2B_1A_1}$$

即
$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) > \int_a^b f(x)\mathrm{d}x > f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \quad 。$$

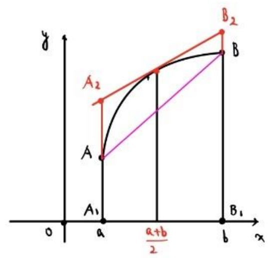
②若 $f''(x)<0, x\in[a,b]$，（如图(b)）则弦 AB 位于曲线 $y=f(x)$ 的下方，点 $\left(\dfrac{a+b}{2}, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$ 的切线位于曲线 $y=f(x)$ 的上方，从而得到以下面积关系：

$$S_{梯形ABB_1A_1} < S_{曲边梯形ABB_1A_1} < S_{梯形A_2B_2B_1A_1}$$

即
$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \quad 。$$



(a)



(b)

上述结论可以直接使用。在本题中，使用上述结论可以得到：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x < \frac{f(-1)+f(0)}{2}\times 1 + \frac{f(0)+f(1)}{2}\times 1 = 0 \ ，$$

答案选(B)。

38.【考点定位】不定积分的换元法；分部积分法。

【解】方法一：令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，则

$$x=\ln(1+t^2), \mathrm{d}x=\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \ \int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = \int (1+t^2)^2\cdot(\arctan t)\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int (\arctan t)\cdot 2t(1+t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int(\arctan t)\mathrm{d}(1+t^2)^2=\frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t-\frac{1}{2}\int(1+t^2)^2\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t-\frac{1}{2}\int(1+t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t+C$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C。$$

方法二： $\int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\int\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{2x}\cdot\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^x}{1+\left(\mathrm{e}^x-1\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x,$$

由于

$$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)\overset{u=\mathrm{e}^x-1}{=}\int\frac{u+1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\int(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}})\mathrm{d}u=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{3}{2}}+2(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{1}{2}}+C_1,$$

故 $\int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{1}{2}}+C$。

39. 【考点定位】有理函数的积分；不定积分的换元法；线性方程组的求解。

【解】设 $\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}\right]+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$，则

$$\begin{aligned}3x+6&=A(x-1)(x^2+x+1)+B\left(x^2+x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x-1\right)^2\\&=A\left(x^3-1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2-2x+1\right)\\&=\left(A+C\right)x^3+\left(B-2C+D\right)x^2+\left(B+C-2D\right)x+\left(-A+B+D\right),\end{aligned}$$

比较系数得：$\begin{cases}A+C=0,\\B-2C+D=0,\\B+C-2D=3,\\-A+B+D=6,\end{cases}$ 利用初等变换求解该方程：

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&1&1&-2&3\\-1&1&0&1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&1&1&-2&3\\0&1&1&1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&0&3&-3&3\\0&0&3&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

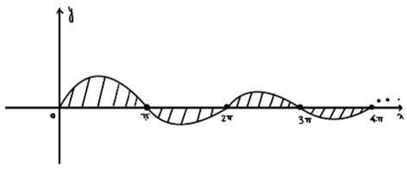
故 $A=-2,B=3,C=2,D=1,$ 所以

$$\int\frac{3x+6}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}=\int\frac{-2}{x-1}\mathrm{d}x+\int\frac{3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\int\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln\left(x^2+x+1\right)+c。$$

40.【考点定位】平面图形的面积；定积分的换元法；分部积分法；等比级数求和。

【解】 如图



所求的面积为：

$$S=\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x}\sin x\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$$

由于 $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x\overset{x=n\pi+t}{=}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(n\pi+t)}\left|\sin\left(n\pi+t\right)\right|\mathrm{d}\left(n\pi+t\right)=\mathrm{e}^{-n\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t,$

所以 $\displaystyle S=\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x}\sin x\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\left(\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t\right)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}=\left(\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}$，

下面计算 $I=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$：

因为

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\left(-\cos t\right)=\left(-\mathrm{e}^{-t}\cos t\right)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\left(-\mathrm{e}^{-t}\cos t\right)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\sin t=\left(-\mathrm{e}^{-t}\cos t\right)\Big|_0^{\pi}-\left(\mathrm{e}^{-t}\sin t\right)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=\left(1+\mathrm{e}^{-\pi}\right)-I,$$

所以 $\displaystyle I=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi}+1\right)$，故 $\displaystyle S=\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}$。

【注】在求 $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$ 时一般先利用变量代换将积分区间化为恒量区间再来求，同学们应重点掌握住这种利用变量代换求定积分的思想。若直接利用分部积分求该积分的值，解答过程较为繁琐。

41.【考点定位】函数方程；旋转体的体积；定积分的换元法。

【解】（1）因为$2f\left(x\right)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ ①，令$t=\frac{1}{x}$，可得$2f\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t^2}f\left(t\right)=\frac{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$，

整理得$f\left(t\right)+2t^2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2t^2+2t}{\sqrt{1+t^2}}$，所以$f\left(x\right)+2x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ ②，

联立方程①、②得$\begin{cases}2f\left(x\right)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}\\ f\left(x\right)+2x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^2+x}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$，解得$f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。

（2）这里采用两种方法求该旋转体的体积：

方法一：如图(a)由$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$得$y^2=\frac{x^2}{1+x^2}$，所以$x^2=\frac{y^2}{1-y^2}$，因为$x>0$，故$x\left(y\right)=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$，对

$\forall\left[y,y+\mathrm{d}y\right]\subset\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，该区间上的体积元素为$\mathrm{d}V=2\pi y\cdot x\left(y\right)=2\pi y\cdot\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=2\pi\cdot\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}$，

所以，该旋转体的体积为

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2\pi\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\overset{y=\sin t}{=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\pi\frac{\sin^2t}{\sqrt{1-\sin^2t}}\cos t\mathrm{d}t=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2t\mathrm{d}t=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{6}\text{。}$$

方法二： 如图(b)

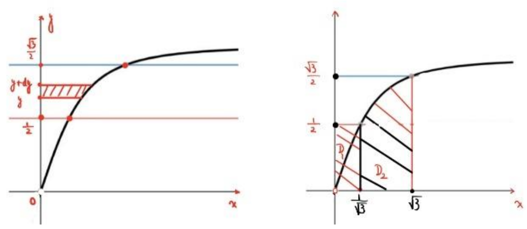
区域$D\cup D_1\cup D_2$绕x轴旋转一周得到的立体为圆柱体，其体积为： $V_0=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi,$

区域D_1绕x轴旋转一周得到的立体为圆柱体，其体积为： $V_1=\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{12},$

区域D_2绕x轴旋转一周得到的立体为圆柱体，其体积为：

$$V_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\pi\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\pi\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi-\pi\left(\arctan x\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{\pi^2}{6},$$

故区域D绕x轴旋转一周得到的立体为：$V=V_0-V_1-V_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{\pi^2}{6}\right)=\dfrac{\pi^2}{6}$。



(a)　　(b)

42.【考点定位】定积分的物理应用。

【答案】$\dfrac{1}{3}\rho g a^3$

【解】如图建立直角坐标轴，取$[y,y+\mathrm{d}y]\subset[-a,0]$，所对应的面积微元为$\mathrm{d}s=2\left(a+y\right)\mathrm{d}y$，

压力微元为$\mathrm{d}F=\rho g\left(-y\right)\mathrm{d}s=-2\rho g y\left(a+y\right)\mathrm{d}y$，故所求的水压力为

$$F=\int_{-a}^{0}-2\rho g y\left(a+y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\rho g a^3。$$