专题 6 多元函数微分学

（A 组）基础题

1.【考点定位】 复合函数的偏导数。

【答案】$yf_1'\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{1}{y}f_2'\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{y}{x^2}g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$

【解】由 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 得，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left(xy,\frac{x}{y}\right)\cdot y+f_2'\left(xy,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}+g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-y}{x^2}=yf_1'\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f_2'\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)。$$

2.【考点定位】可微的必要条件；可微的充分条件；偏导数的连续。

【答案】A

【解】由如下关系图：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{偏导数连续}\Rightarrow\text{函数可微}\Rightarrow\text{偏导数存在}\\ \Downarrow \\ \text{连续}\end{array}}$$

可知答案选(A)。

3.【考点定位】偏导数；全微分。

【解】 方法一：由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x+y}+x\mathrm{e}^{x+y}+\ln(1+y)$ 得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\mathrm{e}+\mathrm{e}=2\mathrm{e}$；由 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{x+y}+\dfrac{1+x}{1+y}$ 得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\mathrm{e}+2,\ \text{从而}\ \left.\mathrm{d}z\right|_{(1,0)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}\mathrm{d}y=2\mathrm{e}\mathrm{d}x+(\mathrm{e}+2)\mathrm{d}y。。$$

方法二：在求函数在一点的偏导数时，我们也可利用代入法：求关于 x 的偏导数时先将 y 的值代入，再对 x 求导数；求关于 y 的偏导数时先将 x 的值代入，再对 y 求导数。

将 $y=0$ 代入 $z=x\mathrm{e}^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，得 $z(x,0)=x\mathrm{e}^x$，从而 $z_x'(x,0)=\left(x\mathrm{e}^x\right)'=(1+x)\mathrm{e}^x$，所以 $z_x'(1,0)=2\mathrm{e}$；同理 $z(1,y)=\mathrm{e}^{1+y}+2\ln(1+y)$，从而 $z_y'(1,y)=\mathrm{e}^{1+y}+\dfrac{2}{1+y}$，所以 $z_y'(1,0)=\mathrm{e}+2$。

故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,0)}=2\mathrm{e}\mathrm{d}x+(\mathrm{e}+2)\mathrm{d}y$。

4.【考点定位】复合函数的偏导数；变限积分求导。

【答案】B

【解】由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$，从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，故答案选（B）。

5.【考点定位】多元函数的偏导数；隐函数存在定理。

【答案】D

【解】令 $F\left(x,y,z\right)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$，则

① $F\left(0,1,1\right)=0$ 且 $F\left(x,y,z\right)$ 连续；

② $F_x'=y+z\mathrm{e}^{xz}$， $F_y'=x-\dfrac{z}{y}$， $F_z'=-\ln y+x\mathrm{e}^{xz}$ 均连续；

③ $F_x'\left(0,1,1\right)=2\neq 0,F_y'\left(0,1,1\right)=-1\neq 0,F_z'\left(0,1,1\right)=0$。

由于 $F_x'\left(0,1,1\right)=2\neq 0$，故由隐函数存在定理可知在 $\left(0,1,1\right)$ 的某邻域内可以确定具有连续偏导数的隐函数 $x=x\left(y,z\right)$；

由于 $F_y'\left(0,1,1\right)=-1\neq 0$，故由隐函数存在定理可知在 $\left(0,1,1\right)$ 的某邻域内可以确定具有连续偏导数的隐函数 $y=y\left(z,x\right)$。故答案选（D）。

6.【考点定位】 等价无穷小替换；极限四则运算法则；洛必达法则。

【解】（I）

$$g(x)=\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+xy}-\frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{1+xy}-\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(1-y\sin\frac{\pi x}{y}\right)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{y}+x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(y\sin\frac{\pi x}{y}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(y\frac{\pi x}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{\pi x}{\arctan x}。$$

（II）

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\right)+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x}{\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\arctan x-x}{x\arctan x}\right)+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x}{x}=\pi+\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\arctan x-x}{x^2}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\pi+\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{2x}\right)=\pi+\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{2x}\right)=\pi。$$

7.【考点定位】全微分；一阶微分形式不变性。

【答案】 $4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$

【解】方法一：$\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}\mathrm{d}y,$ 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(4x^2-y^2)\cdot 8x，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(4x^2-y^2)\cdot(-2y),$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=f'(0)\times8=4,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=f'(0)\times(-4)=-2$。故 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$。

方法二：利用一阶微分形式不变性。

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f\left(4x^2-y^2\right)=f'\left(4x^2-y^2\right)\mathrm{d}\left(4x^2-y^2\right)=f'\left(4x^2-y^2\right)\left[8x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y\right],$$

将 $x=1,y=2$ 代入上式得，$\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=f'(0)\left(8\mathrm{d}x-4\mathrm{d}y\right)=4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$。

8.【考点定位】复合函数的偏导数。

【答案】$yx^{y-1}\cdot f_1'\left(x^y,y^x\right)+y^x\cdot\ln y\cdot f_2'\left(x^y,y^x\right)$

【解】令 $u=x^y$ ，$v=y^x$ 则 $z=f(u,v)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\left(x^y,y^x\right)\cdot yx^{y-1}+f_2'\left(x^y,y^x\right)\cdot y^x\cdot\ln y$$

$$=yx^{y-1}\cdot f_1'\left(x^y,y^x\right)+y^x\cdot\ln y\cdot f_2'\left(x^y,y^x\right)。$$

9.【考点定位】复合函数求偏导。

【答案】$-\frac{2y}{x}f_1'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y}f_2'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{x}+f_2'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$，

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}f_1'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}f_2'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x}f_1'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}f_2'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$

$$=-\frac{2y}{x}f_1'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y}f_2'\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)。$$

10.【考点定位】复合函数的偏导数；幂指函数求偏导。

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln 2-1\right)$

【解】方法一：

由于 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}}$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y}\right)$，

故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln 2-1\right)$。

方法二：当 $y=2$ 时，$z=\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\ln\left(\frac{2}{x}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\ln 2-\ln x)}$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\ln 2-\ln x)}\right]'\right|_{x=1}=\left.\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\ln 2-\ln x)}\left[\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln x\right)-\frac{1}{2}\right]\right)\right|_{x=1}=2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln 2-1\right)。$$

11.【考点定位】偏导数的定义。

【答案】B

【解】 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+0^4}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在，

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y^4}}-1}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0,$$

故 $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)=0$，因此答案选(B)。

12.【考点定位】偏导数的计算。

【答案】$1+2\ln 2$。

【解】方法一： 当 $y=0$ 时，$z=(x+1)^x=\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\left[\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\right]'\Big|_{x=1}=\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]\Bigg|_{x=1}=\mathrm{e}^{\ln 2}(\ln 2+\frac{1}{2})=1+2\ln 2$，

方法二： 由于 $z=\mathrm{e}^{x\ln(x+\mathrm{e}^y)}$，从而 $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x\ln(x+\mathrm{e}^y)}\left[\ln(x+\mathrm{e}^y)+\frac{x}{x+\mathrm{e}^y}\right]$，

将 $x=1,y=0$ 代入得，$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=1+2\ln 2$。

13.【考点定位】复合函数的偏导数；二阶偏导数。

【答案】$xf_{12}''(x,xy)+f_2'(x,xy)+xyf_{22}''(x,xy)$

【解】因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(x,xy)+yf_2'(x,xy)$，所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf_{12}''(x,xy)+f_2'(x,xy)+xyf_{22}''(x,xy)$。

14.【考点定位】 隐函数的偏导数；复合函数的偏导数；一阶微分形式不变性。

【答案】B

【解】方法一：方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边对 x 求偏导得，$F_1'\frac{-y}{x^2}+F_2'\frac{x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}=0$，解得

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$；方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边对 y 求偏导得，$F_1'\cdot\frac{1}{x}+F_2'\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{x}=0$，解得

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'}{F_2'}$。所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}+y\cdot\left(-\frac{F_1'}{F_2'}\right)=\frac{yF_1'+zF_2'-yF_1'}{F_2'}=z$。

方法二：方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边取全微分得 $F_1'\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)+F_2'\mathrm{d}\left(\frac{z}{x}\right)=0$，所以

$F_1'\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}+F_2'\frac{x\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x}{x^2}=0$，解得 $\mathrm{d}z=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}\mathrm{d}x-\frac{F_1'}{F_2'}\mathrm{d}y$，故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'}{F_2'}$。

因此 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}+y\cdot\left(-\frac{F_1'}{F_2'}\right)=\frac{yF_1'+zF_2'-yF_1'}{F_2'}=z$。

故答案选（B）。

15.【考点定位】全微分；偏导数的计算。

【答案】$(2\ln 2+1)\mathrm{d}x-(2\ln 2+1)\mathrm{d}y$

【解】方法一：当 $y=1$ 时，$z=(1+x)^x=\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]\Bigg|_{x=1}=2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=2\ln 2+1,$$

当 $x=1$ 时，$z=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{y}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{y}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}-\left[\frac{1}{y^2}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y}\cdot\frac{-\frac{1}{y^2}}{1+\frac{1}{y}}\right]\Bigg|_{y=1}=2\left(-\ln 2-\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2-1,$$

故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}\cdot\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}\cdot\mathrm{d}y=(2\ln 2+1)\mathrm{d}x-(2\ln 2+1)\mathrm{d}y$。

方法二：由 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$ 取对数得，$\ln z=\frac{x}{y}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}\left[\ln(x+y)-\ln y\right]$，

两边取全微分得，

$$\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\left\{\frac{1}{y}\left[\ln(x+y)-\ln y\right]+\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x+y}\right\}\mathrm{d}x+\left\{-\frac{1}{y^2}\left[\ln(x+y)-\ln x\right]+\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y}\right)\right\}\mathrm{d}y,$$

将 $x=1,y=1,z=2$ 代入上式得，

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,1)}=2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+2\left(-\ln 2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=(2\ln 2+1)\mathrm{d}x-(2\ln 2+1)\mathrm{d}y。$$

16.【考点定位】复合函数的偏导数。

【答案】0

【解】因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$，

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)-f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)=0$。

17.【考点定位】多元复合函数求导。

【答案】A

【解】由 $z=\frac{y}{x}f\left(xy\right)$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f\left(xy\right)+\frac{y}{x}f'\left(xy\right)\cdot y=-\frac{y}{x^2}f\left(xy\right)+\frac{y^2}{x}f'\left(xy\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f\left(xy\right)+\frac{y}{x}f'\left(xy\right)\cdot x=\frac{1}{x}f\left(xy\right)+yf'\left(xy\right)。$$

因此 $$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}\left[-\frac{y}{x^2}f\left(xy\right)+\frac{y^2}{x}f'\left(xy\right)\right]+\frac{1}{x}f\left(xy\right)+yf'\left(xy\right)$$

$$=-\frac{1}{x}f\left(xy\right)+yf'\left(xy\right)+\frac{1}{x}f\left(xy\right)+yf'\left(xy\right)=2yf'\left(xy\right)$$ 。故答案选（A）。

18.【考点定位】隐函数求偏导数。

【答案】$\frac{1}{4}$

【解】当 $x=2,y=\frac{1}{2}$ 时，$\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=1$，解得 $z=1$。

方法一：记 $F\left(x,y,z\right)=\ln z+\mathrm{e}^{z-1}-xy$，则 $F_x'=-y$，$F_z'=\frac{1}{z}+\mathrm{e}^{z-1}$，故 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{y}{\frac{1}{z}+\mathrm{e}^{z-1}}$。

$$故\ \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\left(2,\frac{1}{2}\right)}=\frac{y}{\frac{1}{z}+\mathrm{e}^{z-1}}\bigg|_{\left(2,\frac{1}{2},1\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{1}{4}。$$

方法二：方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 两边对 x 求偏导得，$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{e}^{z-1}\frac{\partial z}{\partial x}=y$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\left(2,\frac{1}{2}\right)}=\frac{y}{\frac{1}{z}+\mathrm{e}^{z-1}}\bigg|_{\left(2,\frac{1}{2},1\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{1}{4}。$$

19.【考点定位】复合函数的偏导数。

【答案】z

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\left(\frac{y^2}{x}\right)\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=-\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{y^2}{x}\right)+y\cdot f'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\frac{2y}{x}=f\left(\frac{y^2}{x}\right)+\frac{2y^2}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)。$$

故 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x\left(-\dfrac{y^3}{x^2}f'\left(\dfrac{y^2}{x}\right)\right)+yf\left(\dfrac{y^2}{x}\right)+\dfrac{2y^3}{x}f'\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$

$$=-\frac{2y^3}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)+yf\left(\frac{y^2}{x}\right)+\frac{2y^3}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)=yf\left(\frac{y^2}{x}\right)=z\text{。}$$

20.【考点定位】复合函数的偏导数

【答案】$\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$

【解】因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\cos x\cdot f'(\sin y-\sin x)+y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos y\cdot f'(\sin y-\sin x)+x$，所以

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos x}\left(\cdot y-\cos x\cdot f'(\sin y-\sin x)\right)+\frac{1}{\cos y}\cdot\left(x+\cos y\cdot f'(\sin y-\sin x)\right)$$

$$=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}\text{。}$$

21.【考点定位】偏导数；全微分。

【答案】$(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

【解】方法一： 因为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\left.\dfrac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\right|_{(0,\pi)}=\dfrac{\pi-1}{1+0}=\pi-1,$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=\left.\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\right|_{(0,\pi)}=\frac{-1}{1}=-1,$$

所以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ 。

方法二： 当 $x=0$ 时， $z=\arctan(\sin y)$,

所以$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=\left.\left[\arctan(\sin y)\right]'\right|_{y=\pi}=\left.\dfrac{\cos y}{1+\sin^2 y}\right|_{y=\pi}=-1;$

当 $y=\pi$ 时， $z=\arctan(\pi x+\sin(x+\pi))=\arctan(\pi x-\sin x)$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\left.\left[\arctan(\pi x-\sin x)\right]'\right|_{x=0}=\left.\frac{\pi-\cos x}{1+(\pi x-\sin x)^2}\right|_{x=0}=\pi-1;$$

故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,\pi)}=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}\cdot\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}\cdot\mathrm{d}y=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ 。

（B 组）提升题

1.【考点定位】多元复合函数的偏导数（题目有错误！！！！）

【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}+g'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}\cdot f_{12}''\right)-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}\cdot f_{22}''\right)-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=f_1'\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2'\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}''\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}''\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)。$$

2.【考点定位】全微分；隐函数的偏导数。

【解】$\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\left[f_1'+f_3'\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]\mathrm{d}x+\left[f_2'+f_3'\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]\mathrm{d}y$，下面求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

方法一：方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两端同时对 x 求偏导得 $e^x+xe^x=e^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+ze^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}$；方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两端对 y 求偏导得 $-e^y-ye^y=e^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+ze^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$，

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}$。

方法二：记 $F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$，因为

$$F_x'=(x+1)e^x,F_y'=-(y+1)e^y,F_z'=-(z+1)e^z,$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}$，

方法三：方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两端求微分得 $\mathrm{d}(xe^x)-\mathrm{d}(ye^y)=\mathrm{d}(ze^z)$，

所以 $x\mathrm{d}e^x+e^x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}e^y-e^y\mathrm{d}y=z\mathrm{d}e^z+e^z\mathrm{d}z$，解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}\mathrm{d}x-\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}\mathrm{d}y$，

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+1}{z+1}e^{x-z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}。$$

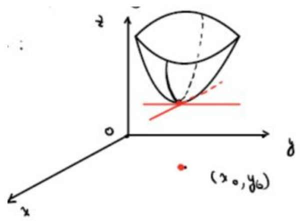
故
$$\mathrm{d}u=\left(f_1'+\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}\cdot f_3'\right)\mathrm{d}x+\left(f_2'-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}f_3'\right)\mathrm{d}y。$$

3.【考点定位】多元函数取极值的条件。

【答案】A

【解】由 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极小值知，$f(x_0,y),f(x,y_0)$ 分别在 y_0，x_0 处取极小值，又由于 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数存在，$f(x_0,y),f(x,y_0)$ 在 y_0，x_0 处可导，从而 $f_y'(x_0,y_0)=0$，$f_x'(x_0,y_0)=0$，故应选（A）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取极小值及可微时的几何图像。



4.【考点定位】隐函数求偏导。

【答案】2

【解】方法一：方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 两边同时对 x 求偏导得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{2x-3z}\left(2-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$；两边同时对 y 求偏导得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{2x-3z}\left(-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+2$，

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，故 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}+\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}=2$。

方法二：$z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 变为 $z-\mathrm{e}^{2x-3z}-2y=0$，记 $F(x,y,z)=z-\mathrm{e}^{2x-3z}-2y$

则 $F_x'=-2\mathrm{e}^{2x-3z},F_y'=-2,F_z'=1+3\mathrm{e}^{2x-3z}$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$。故 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}+\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}=2$。

方法三：$z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 两边同时取微分得 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{2x-3z}(2\mathrm{d}x-3\mathrm{d}z)+2\mathrm{d}y$，解得

$\mathrm{d}z=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}y$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$。

故 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}+\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}=2$。

5.【考点定位】高阶偏导

【答案】$-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$

【解】令$\begin{cases}u = xg(y),\\ v = y,\end{cases}$ 则$\begin{cases}x=\dfrac{u}{g(v)},\\ y = v.\end{cases}$ 代入 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 得 $f(u,v)=\dfrac{u}{g(v)}+g(v)$ ，

因此$\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{g(v)}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$。

6.【考点定位】复合函数的一阶偏导及二阶偏导

【解】由 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$ 得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x\left[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot x\mathrm{e}^{xy}\right]+\left[\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}\right]f_2'+y\mathrm{e}^{xy}\left[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot x\mathrm{e}^{xy}\right]$$

$$=-4xyf_{11}''+2x^2\mathrm{e}^{xy}f_{12}''-2y^2\mathrm{e}^{xy}f_{21}''+xy\mathrm{e}^{2xy}f_{22}''+(1+xy)\mathrm{e}^{xy}f_2'$$

$$=-4xyf_{11}''+(2x^2-2y^2)\mathrm{e}^{xy}f_{12}''+xy\mathrm{e}^{2xy}f_{22}''+(1+xy)\mathrm{e}^{xy}f_2'。$$

7.【考点定位】复合函数的高阶偏导。

【解】 $\dfrac{\partial g}{\partial x}=f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+yf'\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\dfrac{1}{y}=-\dfrac{y}{x^2}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)+f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ，

$$\frac{\partial g}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+f\left(\frac{x}{y}\right)+yf'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f''\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+f''\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}+f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)。$$

所以

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)。$$

8.【考点定位】隐函数求导；高阶导数；复合函数求导法则。

【解】由 $z=f(\ln y-\sin x)$ 可得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'(\ln y-\sin x)\cdot\left(\dfrac{y'}{y}-\cos x\right)$, ①

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''\left(\ln y-\sin x\right)\cdot\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right)^2+f'\left(\ln y-\sin x\right)\cdot\left(\frac{y''\cdot y-(y')^2}{y^2}+\sin x\right)。\quad ②$$

将 $x=0$ 代入方程 $y-xe^{y-1}=1$ 得 $y=1$。 记 $F\left(x,y\right)=y-xe^{y-1}-1$，则

$$y'\left(x\right)=-\frac{F_x\left(x,y\right)}{F_y\left(x,y\right)}=-\frac{-e^{y-1}}{1-xe^{y-1}}=\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}},\quad ③$$

两边对 x 求导得 $$y''\left(x\right)=\frac{e^{y-1}y'\left(x\right)\left(1-xe^{y-1}\right)-e^{y-1}\left[-e^{y-1}-xe^{y-1}y'\left(x\right)\right]}{\left(1-xe^{y-1}\right)^2}\quad ④$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入③得，$y'(0)=1$，再代入④得 $y''(0)=2$。

将 $x=0$，$y=1$，$y'(0)=1$，$y''(0)=2$ 代入①②得，

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}=f'(0)(1-\cos 0)=0；\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}=f''(0)\cdot(1-\cos 0)^2+f'(0)(1+\sin 0)=1。$$

9.【考点定位】隐函数的偏导数；全微分的概念。

【解】（I）方法一：$x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 变形为 $x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)=0$。

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$，则 $F_x'=2x-\varphi'$，$F_y'=2y-\varphi'$，$F_z'=-1-\varphi'$。

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$，故 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy$。

方法二：方程 $x^2+y^2-z=\varphi\left(x+y+z\right)$ 两边对 x 求偏导得，$2x-\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)$，

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}$；方程两边对 y 求偏导得，$2y-\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$。

故 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy$。

方法三：方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两边取微分得，$d(x^2+y^2-z)=d\varphi(x+y+z)$，所以

$$2xdx+2ydy-dz=\varphi'(dx+dy+dz),$$

解得

$$dz=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy。$$

（II）由（I）知 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}-\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\right)=\frac{2}{1+\varphi'}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(1+\varphi')^2}=\frac{-2\varphi''}{(1+\varphi')^2}\left[1+\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\right]=\frac{-2\varphi''\left(x+y+z\right)\cdot\left(1+2x\right)}{\left[1+\varphi'\left(x+y+z\right)\right]^2}。$$

10.【考点定位】全微分；多元复合函数的偏导数。

【解】由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3',\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$ ，

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy$ 。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+f_2'+yf_3'\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial y}+\frac{\partial f_2'}{\partial y}+f_3'+y\frac{\partial f_3'}{\partial y}$$

$$=\left(f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''\right)+\left(f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''\right)+f_3'+y\left(f_{31}''-f_{32}''+xf_{33}''\right)$$

$$=f_{11}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''-f_{22}''+xyf_{33}''+f_3'。$$

11.【考点定位】二元函数极值点的判别

【答案】D

【解】由 $dz=xdx+ydy$ 可知，$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\frac{\partial z}{\partial y}=y$，故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$，

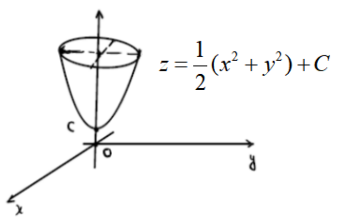
由 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$，可得驻点为 $P(0,0)$，在 $P(0,0)$ 处，$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_P=1,B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_P=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_P=1$，

从而 $A>0,AC-B^2>0$，所以 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点。

对于选项(A)，由于 $f(x,y)$ 可微，故在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 必连续。综上所述，应选(D)。

【注】由 $dz=xdx+ydy$ 可得 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+C$，显然 $f(x,y)\geq C=f(0,0)$，

故 $(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点，为了方便同学们理解，我们画出 $z=f(x,y)$ 的图像：



12.【考点定位】二阶偏导数；二元函数无条件极值。

【解】由 $f\left(x,y\right)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 得，$f_x'=2x(2+y^2), f_y'=2x^2y+\ln y+1$，

$$f_{xx}''=2(2+y^2), f_{xy}''=4xy, f_{yy}''=2x^2+\frac{1}{y}。$$

由 $\begin{cases} f_x'=2x(2+y^2)=0 \\ f_y'=2x^2y+\ln y+1=0 \end{cases}$ 解得 $x=0, y=\frac{1}{\mathrm{e}}$，即驻点为 $P\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$。

在 $P\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 处，$A=f_{xx}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right), B=f_{xy}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0, C=f_{yy}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}$，

所以 $A>0$，$AC-B^2=2\mathrm{e}(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2})>0$，故 $f\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 是极小值。

13.【考点定位】变限积分求导；二阶偏导数的概念。

【答案】4

【解】方法一：因为 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin xy}{1+\left(xy\right)^2}\cdot y$，所以 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y\cdot\frac{y\cos xy\cdot\left[1+\left(xy\right)^2\right]-2xy^2\cdot\sin xy}{\left[1+\left(xy\right)^2\right]^2}$，

$$故\ \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=\left.\frac{y^2\cos xy\cdot\left[1+\left(xy\right)^2\right]-2xy^2\cdot\sin xy}{\left[1+\left(xy\right)^2\right]^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4。$$

方法二：当 $y=2$ 时，$F\left(x,2\right)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\left(x,2\right)=\frac{2\sin 2x}{1+4x^2},\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F\left(x,2\right)=\left(\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}\right)'=\frac{4\cos 2x\cdot\left(1+4x^2\right)-2\sin 2x\cdot\left(8x\right)}{\left(1+4x^2\right)^2},$$

$$故\ \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=\left.\left(\frac{4\cos 2x\cdot\left(1+4x^2\right)-2\sin 2x\cdot\left(8x\right)}{\left(1+4x^2\right)^2}\right)\right|_{x=0}=4。$$

方法三：利用幂级数展开：当 $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 时，系数 $a_n=\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}$，从而 $f^{(n)}\left(0\right)=n!a_n$。

当 $y=2$ 时，$F\left(x,2\right)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2x}\left(t-\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-t^2+\cdots\right)\mathrm{d}t=\int_0^{2x}\left(t+\cdots\right)\mathrm{d}t=2x^2+\cdots$

$$故\ \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=\left.\frac{\mathrm{d}^2F\left(x,2\right)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2!\times 2=4。$$

14.【考点定位】多元复合函数的导数；极值。

【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'\left(xy,yg\left(x\right)\right)+yg'\left(x\right)\cdot f_2'\left(xy,yg\left(x\right)\right)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\left(xy,yg\left(x\right)\right)+y\left(xf_{11}''\left(xy,yg\left(x\right)\right)+g\left(x\right)\cdot f_{12}''\left(xy,yg\left(x\right)\right)\right)$$

$$+g'\left(x\right)\cdot f_2'\left(xy,yg\left(x\right)\right)+yg'\left(x\right)\left(xf_{21}''\left(xy,yg\left(x\right)\right)+g\left(x\right)\cdot f_{22}''\left(xy,yg\left(x\right)\right)\right),$$

由于 $g\left(x\right)$ 可导且在 $x=1$ 取得极值 $g\left(1\right)=1$，所以 $g'\left(1\right)=0$，

从而 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial z}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'\left(1,1\right)+f_{11}''\left(1,1\right)+f_{12}''\left(1,1\right)$。

15.【考点定位】复合函数的高阶偏导。

【解】由 $f\left(1,1\right)=2$ 是 $f\left(u,v\right)$ 的极值可知

$$f_1'\left(1,1\right)=0，\quad f_2'\left(1,1\right)=0。$$

由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left(x+y,f\left(x,y\right)\right)+f_2'\left(x+y,f\left(x,y\right)\right)\cdot f_1'\left(x,y\right)$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\left(x+y,f\left(x,y\right)\right)+f_{12}''\left(x+y,f\left(x,y\right)\right)\cdot f_2'\left(x,y\right)+f_2'\left(x+y,f\left(x,y\right)\right)\cdot f_{12}''\left(x,y\right)$$

$$+\left[f_{21}''\left(x+y,f\left(x,y\right)\right)+f_{22}''\left(x+y,f\left(x,y\right)\right)\cdot f_2'\left(x,y\right)\right]\cdot f_1'\left(x,y\right),$$

将 $x=1,y=1$ 代入上式得：

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_{11}''\left(2,2\right)+f_{12}''\left(2,2\right)\cdot f_2'\left(1,1\right)+f_2'\left(2,2\right)\cdot f_{12}''\left(1,1\right)+\left[f_{21}''\left(2,2\right)+f_{22}''\left(2,2\right)\cdot f_2'\left(1,1\right)\right]\cdot f_1'\left(1,1\right)$$

$$=f_{11}''\left(2,2\right)+f_2'\left(2,2\right)\cdot f_{12}''\left(1,1\right)。$$

16.【考点定位】函数的单调性。

【答案】A

【解】由 $\dfrac{\partial f}{\partial x}>0$ 知 $f(x,y)$ 关于 x 单调递增；由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}<0$ 知，$f(x,y)$ 关于 y 单调递减。

所以当 $x_1>x_2,y_1<y_2$ 时，$f\left(x_1,y_1\right)>f\left(x_2,y_1\right)>f\left(x_2,y_2\right)$，或者

$f\left(x_1,y_1\right)>f\left(x_1,y_2\right)>f\left(x_2,y_2\right)$。因此答案选(A)。

【注】对于选择题，本题我们可以采用特例法：取 $f(x,y)=x-y$，显然 $f(x,y)$ 满足条件 $\dfrac{\partial f}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}<0$。

$$f\left(x_1,y_1\right)>f\left(x_2,y_2\right)\Leftrightarrow x_1-y_1>x_2-y_2\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)+\left(y_2-y_1\right)>0$$
$$\Leftarrow x_1-x_2>0,y_2-y_1>0\Leftrightarrow x_1>x_2,y_1<y_2。$$

故答案选(A)

17.【考点定位】二元函数可微的概念；连续的概念。

【答案】$2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

【解】

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0\Leftrightarrow f(x,y)-2x+y-2=o\left(r\right)\Leftrightarrow f(x,y)=2x-\left(y-1\right)+1+o\left(r\right)$$

这里 $r=\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}$ 。由于 $f(x,y)$ 连续，所以 $f(0,1)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}f(x,y)=1,$

从而 $f(x,y)=2x-\left(y-1\right)+1+o\left(r\right)\Leftrightarrow f(x,y)-f(0,1)=2(x-0)+(-1)(y-1)+o(r),$

由二元函数可微的定义知，$f(x,y)$ 在 (0, 1) 处可微，且 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x+(-1)\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ 。

【注】在考试中，可用特例法完成此题，取 $f(x,y)-2x+y-2=0$，则 $z=f(x,y)=2x-y+2,$ 从而

$$\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,1)}\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y\text{ 。}$$

18.【考点定位】二元函数的极值。

【解】由 $f\left(x,y\right)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 得，$f_x'=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $f_y'=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ ，

$$f_{xx}''=-2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(-x\right),\ f_{xy}''=-y(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ f_{yy}''=-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-y)。$$

由 $\begin{cases}f_x'=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\f_y'=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，即驻点为 $P_1\left(1,0\right),P_2\left(-1,0\right)$ 。

在 $P_1\left(1,0\right)$ 处，$A=f_{xx}''(1,0)=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},B=f_{xy}''(1,0)=0,C=f_{yy}''(1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，

所以 $A<0$，$AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0$，故 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 是极大值。

在 $P_2\left(-1,0\right)$ 处，$A=f_{xx}''(-1,0)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},B=f_{xy}''(-1,0)=0,C=f_{yy}''(-1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，所以

$A>0$，$AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0$ 且，故 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 是极小值。

19.【考点定位】多元函数极值的判定(题目有错误！！！)

【解】由 $f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$ 得，

$$f_x'=x^2\mathrm{e}^{x+y}+\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}=\left(x^2+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}，f_y'=\mathrm{e}^{x+y}+\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}=\left(1+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y},$$

$$f_{xx}''=\left(2x+x^2\right)\mathrm{e}^{x+y}+\left(x^2+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}, f_{xy}''=x^2\mathrm{e}^{x+y}+\left(1+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}, f_{yy}''=\mathrm{e}^{x+y}+\left(1+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}。$$

由 $\begin{cases}f_x'=0\\f_y'=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x^2+y+\dfrac{x^3}{3}=0\\1+y+\dfrac{x^3}{3}=0\end{cases}$， 所以 $\begin{cases}x=1\\y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$，$\begin{cases}x=-1\\y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 即驻点为 $P_1\left(1,-\dfrac{4}{3}\right),P_2\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$。

在 $P_1\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 处， $A=f_{xx}''(P_1)=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},B=f_{xy}''(P_1)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$， $C=f_{yy}''(P_1)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，

由于 $A=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}>0,AC-B^2=3\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}=2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}>0,$ 故 $P_1\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 为函数的极小值点，极小值为 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$；

在 $P_2\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 处， $A=f_{xx}''(P_2)=(-2+1)\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}=-\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},B=f_{xy}''(P_2)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},C=f_{yy}''(P_2)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$，由于 $AC-B^2=-2\mathrm{e}^{-\frac{10}{3}}<0$，因此 $P_2\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是极值点。

综上所述，$f(x,y)$ 有极小值 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$。

20.【考点定位】隐函数求偏导。

【答案】$2-2\ln 2$

【解】方法一：$(z+y)^x=xy$ 两边取对数 $x\ln(z+y)=\ln x+\ln y$，所以

$$x\ln(z+y)-\ln x-\ln y=0，\quad ①$$

当 $x=1,y=2$ 时，$\ln(z+2)-\ln 2=0$，所以 $z=0$。下面用三种方式求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$。

其一：记 $F(x,y,z)=x\ln(z+y)-\ln x-\ln y$，则

$$F_x'=\ln\left(z+y\right)-\frac{1}{x},F_z'=\frac{x}{z+y},$$

故 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=-\frac{F_x'\left(1,2,0\right)}{F_z'\left(1,2,0\right)}=-\frac{\ln 2-1}{\frac{1}{2}}=2-2\ln 2。$$

其二：方程①两边对 x 求偏导得 $\ln\left(z+y\right)+x\cdot\frac{1}{z+y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x}=0$，将 $x=1,y=2,z=0$ 代入上式得 $\ln 2+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}-1=0$，故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2-2\ln 2$。

其三：当 $y=2$ 时，①变为 $x\ln\left(z+2\right)-\ln x-\ln 2=0$，两边对 x 求导得

$\ln\left(z+2\right)+\frac{x}{z+2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}=0$，将 $x=1,z=0$ 代入得 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=2-2\ln 2$，即 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2-2\ln 2$。

方法二：对于方程 $\left(z+y\right)^x=xy$，当 $x=1,y=2$ 时，$z+2=2$，所以 $z=0$。与方法一类似，我们可以用三种方式求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$，这里展式其中一种，记 $F\left(x,y,z\right)=\left(z+y\right)^x-xy$，则

$F_x=\left(z+y\right)^x\ln\left(z+y\right)-y,\ F_z=x\left(z+y\right)^{x-1}$，故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=-\frac{F_x\left(1,2,0\right)}{F_z\left(1,2,0\right)}=-\frac{2\ln 2-2}{1}=2-2\ln 2$。

21.【考点定位】全微分的概念；隐函数的偏导数；微分四则运算法则。

【答案】$-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$

【解】将 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ 代入方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 可得 $\mathrm{e}^z+z=1$，所以 $z=0$。下面用三种方法求全微分 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$。

方法一：方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 两边对 x 求偏导得，$2y\mathrm{e}^{2yz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$， ①

将 $x=y=\frac{1}{2},z=0$ 代入方程①，可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$。

方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 两边对 y 求偏导得，$2z\mathrm{e}^{2yz}+2y\mathrm{e}^{2yz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0$， ②

将 $x=y=\frac{1}{2},z=0$ 代入方程②，可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$，

故 $\mathrm{d}z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$ 。

方法二：$\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 变为 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z-\dfrac{7}{4}=0$，记 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z-\dfrac{7}{4}$ 。

由于 $F_x=1,\ F_y=\mathrm{e}^{2yz}2z+2y,\ F_z=\mathrm{e}^{2yz}2y+1,$ 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{F_x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}{F_z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\frac{1}{2},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{F_y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}{F_z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\frac{1}{2},$$

故 $\mathrm{d}z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$ 。

方法三：方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 两边求微分得，$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2yz})+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z=0$，

所以 $2\mathrm{e}^{2yz}(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)+\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0$， ①

将 $x=y=\dfrac{1}{2},z=0$ 代入①，可得 $2\mathrm{d}z+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0$，故 $\mathrm{d}z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$ 。

22.【考点定位】全微分的计算；一阶微分形式不变性；隐函数求偏导。

【答案】$-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

【解】$\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}y$。

方法一：方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 变为 $(x+1)z-y^2-x^2f(x-z,y)=0$，

当 $x=0,y=1$ 时，$z=1$. 记 $F(x,y,z)=(x+1)z-y^2-x^2f(x-z,y)$，则

$$F_x'=z-2xf(x-z,y)-x^2f_1'(x-z,y),F_y'=-2y-x^2f_2'(x-z,y),\ F_z'=(x+1)+x^2f_1'(x-z,y),$$

从而可得 $F_x'(0,1,1)=1,F_y'(0,1,1)=-2,F_z'(0,1,1)=1,$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-\dfrac{F_x'(0,1,1)}{F_z'(0,1,1)}=-1,\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=-\dfrac{F_y'(0,1,1)}{F_z'(0,1,1)}=2,$

故 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$ 。

方法二：方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边同时对 x 求偏导得

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}=2xf\left(x-z,y\right)+x^2f_1'\left(x-z,y\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入上式得。方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边同时对 y 求偏导得

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial y}-2y=x^2\left[f_1'\left(x-z,y\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+f_2'\left(x-z,y\right)\right],$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入上式得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=2$, 故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$ 。

方法三：方程 $(x+1)z-y^2=x^2f\left(x-z,y\right)$ 两边同时取全微分得

$$(x+1)\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y=x^2\mathrm{d}f(x-z,y)+f(x-z,y)\cdot 2x\mathrm{d}x,$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入上式得 $\mathrm{d}z+\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y=0$，故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$ 。

23.【考点定位】偏导数的计算。

【答案】D

【解】 由 $f_x'=\frac{\mathrm{e}^x(x-y)-\mathrm{e}^x\cdot 1}{(x-y)^2}=\frac{\mathrm{e}^x(x-y-1)}{(x-y)^2}$， $f_y'=\frac{-\mathrm{e}^x(-1)}{(x-y)^2}=\frac{\mathrm{e}^x}{(x-y)^2}$ 得

$$f_x'+f_y'=\frac{\mathrm{e}^x(x-y-1)}{(x-y)^2}+\frac{\mathrm{e}^x}{(x-y)^2}=\frac{\mathrm{e}^x}{x-y}=f\text{，}\quad f_x'-f_y'=\frac{\mathrm{e}^x(x-y-1)}{(x-y)^2}-\frac{\mathrm{e}^x}{(x-y)^2}=\frac{\mathrm{e}^x(x-y-2)}{x-y}\text{。}$$

故答案选(D)。

24.【考点定位】复合函数的导数与高阶导数。

【解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1'(\mathrm{e}^x,\cos x)\mathrm{e}^x+f_2'(\mathrm{e}^x,\cos x)(-\sin x)$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f_1'(\mathrm{e}^x,\cos x)\mathrm{e}^x+[f_{11}''(\mathrm{e}^x,\cos x)\mathrm{e}^x+f_{12}''(\mathrm{e}^x,\cos x)(-\sin x)]\mathrm{e}^x$$

$$+f_2'(\mathrm{e}^x,\cos x)(-\cos x)+[f_{21}''(\mathrm{e}^x,\cos x)\mathrm{e}^x+f_{22}''(\mathrm{e}^x,\cos x)(-\sin x)](-\sin x)\text{，}$$

故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$， $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)-f_2'(1,1)$ 。

25.【考点定位】偏导数的概念；函数单调性的判定。

【答案】D

【解】方法一：由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$ 可知，当 y 固定时， $f(x,y)$ 关于 x 单调增加；由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 可知，当

x 固定时，$f(x,y)$ 是关于 y 单调递减。所以 $f(0,1)<f(1,1)<f(1,0)$，故(D)正确。

方法二：特例法　取 $f(x,y)=ax-by$，其中 $a>0,b>0$，此时 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=a>0$，

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-b<0$ 满足题设条件。此时，$f(0,0)=0, f(0,1)=-b, f(1,0)=a, f(1,1)=a-b$，

对于选项(A),(B)：$f(0,0)$ 与 $f(1,1)$ 没有确定的大小关系；对于选项(C),(D)：

$f(0,1)=-b<a=f(1,0)$。故答案选(D)。

26.【考点定位】全微分；偏积分。

【答案】　$f(x,y)=xye^y$

【解】方法一：由题意知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^y,\dfrac{\partial f}{\partial y}=x(1+y)e^y$，则 $f(x,y)=\int ye^y\mathrm{d}x=xye^y+\varphi(y),$

从而　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=xe^y+xye^y+\varphi'(y)=x(y+1)e^y+\varphi'(y)$。因为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x(1+y)e^y$，所以 $\varphi'(y)=0$，

解得 $\varphi(y)=c$，故 $f(x,y)=xye^y+c,$ 又由于 $f(0,0)=0$ 所以 $c=0$，故 $f(x,y)=xye^y$。

方法二：由于 $\mathrm{d}f(x,y)=ye^y\mathrm{d}x+x(1+y)e^y\mathrm{d}y=ye^y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}ye^y=\mathrm{d}(xye^y),$ 所以 $f(x,y)=xye^y+c,$

又由 $f(0,0)=0$ 知 $c=0$，故 $f(x,y)=xye^y$。

27.【考点定位】二元函数的极值。

【答案】D

【解】由 $z=3xy-x^2y-xy^2$ 得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3y-2xy-y^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x-x^2-2xy$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3-2x-2y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$。

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(3-2x-y)=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x(3-x-2y)=0\end{cases}$，解得驻点为 $P_1(0,0),P_2(0,3),P_3(1,1),P_4(3,0)$，

列表讨论如下：

驻点	$P_1(0,0)$	$P_2(0,3)$	$P_3(1,1)$	$P_4(3,0)$
$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	0	−6	−2	0
$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$	3	−3	−1	−3
$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	0	0	−2	−6
$AC-B^2$	−9	−9	3	−9
z	非极值点	非极值点	极大值点	非极值点

所以 $P_3(1,1)$ 为极值点，故答案选（D）。

28.【考点定位】复合函数的偏导数；二阶偏导数。

【解】因为 $\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y)$，

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}&=-f_{11}''(x+y,x-y)-f_{12}''(x+y,x-y)-f_{21}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)\\&=-f_{11}''(x+y,x-y)-2f_{12}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y),\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}&=1-f_{11}''(x+y,x-y)+f_{12}''(x+y,x-y)-f_{21}''(x+y,x-y)+f_{22}''(x+y,x-y)\\&=1-f_{11}''(x+y,x-y)+f_{22}''(x+y,x-y)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=-f_{11}''(x+y,x-y)+f_{12}''(x+y,x-y)+f_{21}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)\\&=-f_{11}''(x+y,x-y)+2f_{12}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)\end{aligned},$$

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{11}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)$。

29.【考点定位】二阶偏导数；二元函数无条件极值。

【解】由 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 得 $f_x'=3x^2-y,\ f_y'=24y^2-x,\ f_{xx}''=6x,\ f_{xy}''=-1,\ f_{yy}'=48y$。

由 $\begin{cases}f_x'=3x^2-y=0\\f_y'=24y^2-x=0\end{cases}$，解得驻点为 $P_1(0,0)$ $P_2\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 。

在驻点 $P_1\left(0,0\right)$ 处：$A=f''_{xx}(0,0)=0,B=f''_{xy}\left(0,0\right)=-1,C=f''_{yy}(0,0)=0$，由于 $AC-B^2=-1<0$，故 $P_1\left(0,0\right)$ 不是极值点。

在驻点 $P_2\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 处：$A=f''_{xx}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=1,B=f''_{xy}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-1,C=f''_{yy}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=4$，

由于 $A>0$，$AC-B^2=3>0$，故 $P_2\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 为极小值点，极小值为 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$。

30.【考点定位】偏导数的定义；二阶偏导数的定义；二重极限；二次极限。

【答案】 B

【解】对于①：由于 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$，所以①正确。

对于②：$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f_x{}'(0,y)-f_x{}'(0,0)}{y}$，下面分别计算 $f_x{}'(0,0),f_x{}'(0,y)$：

同①的计算可得 $f_x{}'(0,0)=1;\ f_x{}'(0,y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x,y\right)-f\left(0,y\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xy-y}{x}=\infty\left(y\neq 0\right)$，所以 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在。故②错误。

对于③：由于 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & xy\neq 0\\ x, & y=0\\ y, & x=0\end{cases}$，所以 $\left|f(x,y)\right|=\begin{cases}|xy|, & xy\neq 0\\ |x|, & y=0\\ |y|, & x=0\end{cases}$，从而

$\left|f(x,y)\right|\le|xy|+|x|+|y|$。由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(|xy|+|x|+|y|\right)=0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$。

故③正确；

对于④：先计算累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 的里层极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y),\left(y\neq 0\right)$：当 $y\neq 0$ 时，

$\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}xy=0$。所以 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f\left(x,y\right)=\lim\limits_{y\to 0}0=0$。故④正确。

综上，正确的个数是 3，选(B)

31.【考点定位】变限积分求导；二元函数的混合二阶偏导数。

【答案】4e

【解】由 $f\left(x,y\right)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\mathrm{d}t$ 得 $\frac{\partial f}{\partial y}=x\mathrm{e}^{x^3y^2}$，所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial\left(x\mathrm{e}^{x^3y^2}\right)}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^3y^2}+3x^3y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}$，

故 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\left(\mathrm{e}^{x^3y^2}+3x^3y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}\right)\right|_{(1,1)}=4\mathrm{e}$ 。

32.【考点定位】复合函数求导；二元函数的全微分。

【答案】C

【解】$\mathrm{d}f(1,1)=f_1'(1,1)\mathrm{d}x+f_2'(1,1)\mathrm{d}y$。下面求 $f_1'(1,1),f_2'(1,1)$。

由 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2$ 两边对 x 求导得，

$$f_1'(x+1,\mathrm{e}^x)+f_2'(x+1,\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x=(x+1)^2+x\cdot 2(x+1),$$

令 $x=0$ 得， $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$ ①。

由 $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两边对 x 求导得，

$$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)\cdot 2x=4x\ln x+2x^2\cdot\frac{1}{x}=4x\ln x+2x,$$

令 $x=1$ 得， $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$ ②。

由①②解得 $\begin{cases}f_1'(1,1)=0\\ f_2'(1,1)=1\end{cases}$，故 $\mathrm{d}f(1,1)=f_1'(1,1)\mathrm{d}x+f_2'(1,1)\mathrm{d}y=0\mathrm{d}x+1\cdot\mathrm{d}y=\mathrm{d}y$。

因此答案选(C)。

33.【考点定位】隐函数求偏导。

【答案】1

【解】当 $x=0,y=2$ 时，$z+2\ln z=1$，即 $z+2\ln z-1=0$。记 $f(z)=z+2\ln z-1$，则 $f(1)=0$，

且 $f'(z)=1+\dfrac{2}{z}>0$，从而 $f(z)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，所以 $f(z)=0$ 只有一个零点，故 $z=1$。

下面用三种方法求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}$；

方法一：方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 两边同时对 x 求偏导得，

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{2y}{1+4x^2y^2}=0,$$

将 $x=0,y=2,z=1$ 代入上式得，$1+\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}+2\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}-4=0$，解得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=1$。

方法二：记 $F(x,y,z)=(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)-1$，则

$$F_x'=z-\frac{2y}{1+4x^2y^2}\text{，}F_z'=(x+1)+\frac{y}{z}\text{，故}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=-\frac{F_x'(0,2,1)}{F_z'(0,2,1)}=-\frac{1-4}{3}=1\text{。}$$

方法三：在方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 中取 $y=2$ 得，

$$(x+1)z+2\ln z-\arctan(4x)=1,$$

两边对 x 求导得 $z+(x+1)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{1+16x^2}=0$，将 $x=0,z=1$ 代入上式得，

$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$，即 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=1$。

（C 组）拔高题

1.【考点定位】偏导数的经济应用；二元函数的最值；条件最值。

【解】（1）总利润函数为 $L=R-C=P_1Q_1+P_2Q_2-(2Q+5)=-2Q_1^{\ 2}-Q_2^{\ 2}+16Q_1+10Q_2-5$。

下面用两种方法求 L 的最大值。

方法一：$L'_{Q_1}=-4Q_1+16,L'_{Q_2}=-2Q_2+10$，令 $\begin{cases}L'_{Q_1}=-4Q_1+16=0\\L'_{Q_2}=-2Q_2+10=0\end{cases}$

解得 $Q_1=4,Q_2=5$，从而 $P_1=10,P_2=7$。故当 $P_1=10,Q_1=4$ 且 $P_2=7,Q_2=5$ 时总利润最大，

且最大利润 $L_{\max}=52$。

方法二：由于 $L=-2Q_1^{\ 2}-Q_2^{\ 2}+16Q_1+10Q_2-5\overset{\text{配方}}{=}-2\left(Q_1-4\right)^2-\left(Q_2-5\right)^2+52$，所以

当 $Q_1=4,P_1=10$ 且 $Q_2=5,P_2=7$ 时总利润最大，且最大利润 $L_{\max}=52$。

（2）若价格无差别，则 $P_1=P_2$，即 $18-2Q_1=12-Q_2$ 所以 $2Q_1-Q_2-6=0$。

下面用两种方法求 L 得最大值。

方法一：作拉格朗日函数 $F(Q_1,Q_2,\lambda)=-2Q_1^{\ 2}-Q_2^{\ 2}+16Q_1+10Q_2-5+\lambda(2Q_1-Q_2-6)$，

令 $\begin{cases}F'_{Q_1}=-4Q_1+16+2\lambda=0\\F'_{Q_2}=-2Q_2+10-\lambda=0\\F'_{\lambda}=2Q_1-Q_2-6=0\end{cases}$ 解得 $Q_1=5,Q_2=4,\lambda=2$，从而 $P_1=P_2=8$，

即 $P_1=P_2=8,Q_1=5,Q_2=4$ 时，总利润最大，且 $L_{\max}=49$。

方法二：由 $2Q_1-Q_2=6$ 得 $Q_2=2Q_1-6$，从而

$$L=-2Q_1^{\ 2}-Q_2^{\ 2}+16Q_1+10Q_2-5=-2Q_1^{\ 2}-\left(2Q_1-6\right)^2+16Q_1+10\left(2Q_1-6\right)-5$$
$$=-6Q_1^2+60Q_1-101=-6\left(Q_1-5\right)^2+49$$

所以当 $Q_1=5$ 时，总利润最大，且 $L_{\max}=49$，此时 $Q_1=5,Q_2=4,P_1=P_2=8$。。

综上所述，企业实行差别定价的利润要大于统一价格时的利润。

2.【考点定位】 多元复合函数的偏导数；复合函数求导。

【解】$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)=3\varphi^2(x)\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=f_1'\left(x,f\left(x,x\right)\right)+f_2'\left(x,f\left(x,x\right)\right)\cdot\left[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)\right]$

因为 $f(1,1)=1$ 所以 $\varphi(1)=f(1,1)=1$。由于 $f_x'\left(1,1\right)=2,f_y'\left(1,1\right)=3$，即 $f_1'\left(1,1\right)=2,f_2'\left(1,1\right)=3$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\cdot\left[f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\right]=2+3\cdot\left(2+3\right)=17$，

故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=\left.3\varphi^2(x)\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=3\times1^2\times17=51$。

3.【考点定位】隐函数求偏导；变限积分求导；复合函数的导数。

【解】$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'\left(x,y,z\right)+f_2'\left(x,y,z\right)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_3'\left(x,y,z\right)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，

下面求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$：由 $\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 两边同时对 x 求导得 $\mathrm{e}^{xy}\left(xy'+y\right)-\left(xy'+y\right)=0$，

解得 $y'=-\dfrac{y}{x}$。由 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两端同时对 x 求导得 $\mathrm{e}^x=\dfrac{\sin\left(x-z\right)}{x-z}\left(1-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$，

解得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-\dfrac{\left(x-z\right)\mathrm{e}^x}{\sin\left(x-z\right)}$，故 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'\left(x,y,z\right)+f_2'\left(x,y,z\right)\left(-\dfrac{y}{x}\right)+\left[1-\dfrac{\left(x-z\right)\mathrm{e}^x}{\sin\left(x-z\right)}\right]f_3'\left(x,y,z\right)$。

4.【考点定位】极限与无穷小的关系；高阶无穷小的定义。

【答案】A

【解】方法一：由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f\left(x,y\right)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$，所以 $\dfrac{f\left(x,y\right)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha=0$，

故 $f\left(x,y\right)-xy=\left(1+\alpha\right)\left(x^2+y^2\right)^2$，且 $f\left(x,y\right)=xy+\left(1+\alpha\right)\left(x^2+y^2\right)^2$。

$f\left(0,0\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f\left(x,y\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[xy+\left(1+\alpha\right)\left(x^2+y^2\right)^2\right]=0$，当 $y=x$ 时，

$f(x,x)=x^2+(1+\alpha)(x^2+x^2)^2=x^2+4(1+\alpha)x^4$，由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+4(1+\alpha)x^2\right]=1$，

从而存在$\delta>0$，当$x\in U^o(0,\delta)$时，进而$f(x,x)>0=f(0,0)$；当$y=-x$时，

$f(x,-x)=-x^2+(1+\alpha)\left(x^2+(-x)^2\right)^2=-x^2+4(1+\alpha)x^4=x^2\left[-1+4(1+\alpha)x^2\right]$，由于

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,-x)}{-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[1-4(1+\alpha)x^2\right]=1$，所以存在$\delta>0$，当$x\in U^o(0,\delta)$时，$f(x,-x)<0=f(0,0)$。

由极值的定义知$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点，从而答案选（A）。

方法二：对于选择题，本题可以采用特例法得到正确选项：

由于$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，可以取$\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，即$f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2$。

$f_x(x,y)=y+2(x^2+y^2)\cdot2x=y+4x^3+4xy^2,\ f_y(x,y)=x+2(x^2+y^2)\cdot2y=x+4y^3+4x^2y,$
$f_{xx}(x,y)=12x^2+4y^2,\ f_{xy}(x,y)=1+8xy,\ f_{yy}(x,y)=12y^2+4x^2$。

从而$f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0, A=f_{xx}(0,0)=0, B=f_{xy}(0,0)=1, C=f_{yy}(0,0)=0$。由于

$AC-B^2=-1<0$，所以$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点，从而答案选（A）。

5.【考点定位】多元复合函数的偏导数。

【解】$\dfrac{\partial g}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot x$，$\dfrac{\partial g}{\partial y}=f_1'\cdot x-y\cdot f_2'$，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y\left(f''_{11}\cdot y+x\cdot f_{12}''\right)+f_2'+x\left(yf_{21}''+xf_{22}''\right)=y^2f''_{11}+2xyf_{12}''+f_2'+x^2f_{22}''，$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x\left(xf_{11}''-yf_{12}''\right)-f_2'-y\left(xf_{21}''-yf_{22}''\right)=x^2f_{11}''-2xyf_{12}''+y^2f_{22}''-f_2'，$$

又由于$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，即$f_{11}''+f_{22}''=1$，所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=y^2f''_{11}+2xyf_{12}''+x^2f_{22}''+f_2'+x^2f_{11}''-2xyf_{12}''+y^2f_{22}''-f_2'$$

$$=(x^2+y^2)f_{11}''+(x^2+y^2)f_{22}''=(x^2+y^2)(f_{11}''+f_{22}'')=x^2+y^2。$$

6.【考点定位】隐函数的偏导数和高阶偏导数；二元函数的极值。

【解】方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0,$ ①

两边分别对x,y求偏导可得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0\text{，} \qquad ②$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0\text{，} \qquad ③$$

在方程②③中分别令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$可得$\begin{cases} x-3y=0 \\ -3x+10y-z=0 \end{cases}$，即$x=3y,$且$z=y$，将它们代入方程①得$y^2=9$，所以$y=\pm 3$；当$y=3$时，$x=9$，$z=3$；当$y=-3$时，$x=-9$，$z=-3$，则$P_1(9,3)$与$P_2(-9,-3)$是函数$z=z(x,y)$的驻点。方程②两边对$x$求偏导得

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \qquad ④$$

将方程②两边对y求偏导得$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}--2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$ ⑤

将方程③两边对y求偏导得$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ ⑥

将$x=9,y=3,z=3$分别代入③④⑤，并注意到$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(9,3)}=0$以及$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(9,3)}=0$，可以得到

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3)}=\frac{1}{6}\text{，}\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3)}=-\frac{1}{2}\text{，}\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3)}=\frac{5}{3}\text{，由于}$$

$A>0, AC-B^2=\frac{5}{18}-\frac{1}{4}=\frac{1}{36}>0$，所以$P_1(9,3)$是$z=z(x,y)$的极小值点，极小值$z(9,3)=3$。

同理当$x=-9,y=-3,z=-3$时，$A=-\frac{1}{6},B=\frac{1}{2},C=-\frac{5}{3}$，由于$A<0$，$AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，所以$P_2(-9,-3)$是$z=z(x,y)$的极大值点，极大值$z(-9,-3)=-3$。

7.【考点定位】偏积分；二元函数的最值。

【解】由$\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$得，$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$，所以$z=f(x,y)=\int 2x\mathrm{d}x+\varphi(y)=x^2+\varphi(y)$。

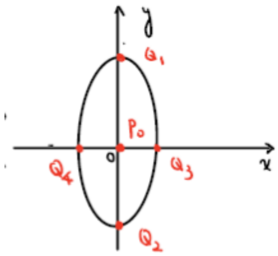
又由$-2y=\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(y)$得$\varphi(y)=-y^2+C$，所以$f(x,y)=x^2-y^2+C$。又因为$f(1,1)=2$，所以

$c=2$，故 $f(x,y)=x^2-y^2+2$。

先求 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点。由 $\begin{cases} f_x(x,y)=2x=0 \\ f_y(x,y)=-2y=0 \end{cases}$，得驻点为 $P_0=(0,0)$，$f(P_0)=2$，

在区域 D 的边界 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，令 $L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1)$，由

$$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda x=0 \\ L'_y=-2y+\dfrac{\lambda}{2}y=0 \\ L'_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0 \end{cases},$$



得边界上可能的最值点为 $Q_1(0,2),Q_2(0,-2),Q_3(1,0),Q_4(-1,0)$。

$f(Q_1)=f(0,2)=-2,f(Q_2)=f(0,-2)=-2$，$f(Q_3)=f(1,0)=3,f(Q_4)=f(-1,0)=3,$

比较 $f(P_0)$ 及 $f(Q_i)(i=1,2,3,4)$ 知，$f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3，最小值为-2。

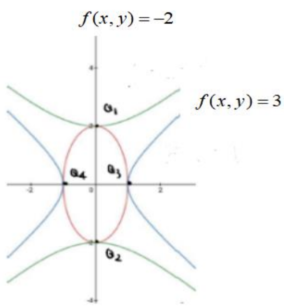
【注】①本题求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的可能的最值时，还可以使用其他方法。

当 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 时，$z=x^2-y^2+2=(1-\dfrac{y^2}{4})-y^2+2=3-\dfrac{5}{4}y^2,-2\le y\le 2$，

易知此时 $Z_{\max}=3,Z_{\min}=-2$。

②在最小值点 Q_1,Q_2 处和最大值点 Q_3,Q_4 处，目标函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 的等值线

$f(x,y)=-2$，及 $f(x,y)=3$ 与 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 相切，请同学们想一想这是为什么？



8.【考点定位】二元函数条件极值；一元函数极值点的必要条件；隐函数存在定理。

【答案】D

【解】方法一：因为(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，所以存在

λ_0，使得$\left(x_0,y_0,\lambda_0\right)$为拉格朗日函数$L\left(x,y,\lambda\right)=f(x,y)+\lambda\varphi\left(x,y\right)$的驻点，即

$\begin{cases} f_x'\left(x_0,y_0\right)+\lambda_0\varphi_x'\left(x_0,y_0\right)=0 & ① \\ f_y'\left(x_0,y_0\right)+\lambda_0\varphi_y'\left(x_0,y_0\right)=0 & ② \\ \varphi\left(x_0,y_0\right)=0 \end{cases}$ 由于$\varphi_y'(x,y)\neq0$，所以由②解得$\lambda_0=-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$，

代入①得$f_x'(x_0,y_0)-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}\varphi_x'(x_0,y_0)=0$。当$f_x'(x_0,y_0)$=0时，$f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)=0$，

此时$f_y'(x_0,y_0)=0$或者$\varphi_x'(x_0,y_0)=0$，所以选项(A)(B)都错误；当$f_x'(x_0,y_0)\neq0$时，

$f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)\neq0$，从而$f_y'(x_0,y_0)\neq0$且$\varphi_x'(x_0,y_0)\neq0$，所以选项(C)错误，(D)正确。

方法二：因为$\varphi(x,y)$是可微函数，且$\varphi(x_0,y_0)=0,\varphi_y'(x,y)\neq0$，则由方程$\varphi(x,y)=0$确定了唯一的可导的隐函数$y=y(x)$且满足$y_0=y(x_0)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x'(x,y)}{\varphi_y'(x,y)}$。因为$(x_0,y_0)$是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，所以$x=x_0$是一元函数$z=f\left(x,y(x)\right)$的极值点，从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x'(x_0,y_0)-\frac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}=0$$，即得

$f_x'(x_0,y_0)-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}=0$。同方法一中的分析，答案选(D)。

9.【考点定位】复合函数的偏导数；二阶偏导数；可降阶的微分方程。

【解】（I）记$u=\sqrt{x^2+y^2}$，则$z=f\left(u\right)$，从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(u\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=f'\left(u\right)\cdot\frac{x}{u},\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(u\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=f'\left(u\right)\cdot\frac{y}{u};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{u-\frac{x^2}{u}}{u^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{u^2-x^2}{u^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{u^2}+f'(u)\frac{u-\frac{y^2}{u}}{u^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{u^2}+f'(u)\frac{u^2-y^2}{u^3}。$$

代入等式$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$可得$f''(u)\cdot\dfrac{x^2+y^2}{u^2}+f'(u)\dfrac{2u^2-\left(x^2+y^2\right)}{u^3}=0$，所以

$$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0\text{。}$$

（II）由（I）可知 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$， ① 令 $f'(u)=p$ ，则 $f''(u)=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}$ ，代入①式整理可得

$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$，两边积分 $\int\dfrac{1}{p}\mathrm{d}p=-\int\dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$ 解得 $p=f'(u)=\dfrac{c}{u}$ 。因为 $f'(1)=1$，所以 $c=1$ ，即

$f'(u)=\dfrac{1}{u}$ ，所以 $f(u)=\ln u+c_1$。又因为 $f(1)=0$，所以 $c_1=0$ ，故 $f(u)=\ln u$。

10.【考点定位】全微分的定义；二元函数可微与连续的关系；二元函数可微与可偏导的关系。

【答案】C

【解】对于选项(A)：由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0 \Leftrightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的必要不充分条件，所以(A)不正确。

对于选项(B)：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \Leftrightarrow f_x'(0,0)=0$，$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0 \Leftrightarrow f_y'(0,0)=0$，

而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导是可微的必要不充分条件，所以(B)不正确。

对于选项(C)：由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 可知，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，

$f(x,y)-f(0,0)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，即 $f(x,y)-f(0,0)=0\cdot x+0\cdot y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，

故 $f(x,y)$ 在点(0，0)处可微，所以(C)正确。

对于选项(D)：因为 $\lim\limits_{x\to0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$ 的含义是 $f_x'(x,0)$ 在 $x=0$ 处连续，

$\lim\limits_{y\to0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$ 的含义是 $f_y'(y,0)$ 在 $y=0$ 处连续。这不能说明 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。所以(D)不是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的充分条件。例如取 $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$，则 $f_x'(x,0)=0$

$f_y'(y,0)=0$，满足 $\lim\limits_{x\to0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，$\lim\limits_{y\to0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$，但

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'\left(0,0\right)x-f_x'\left(0,0\right)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\overset{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}}{=}\lim_{r\to0}\frac{r}{r}\left(\cos\theta\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sin\theta\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\cos\theta\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sin\theta\right)^{\frac{2}{3}}$$

这说明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_x'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不等于零。所以 $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,0)$ 处不可微。综上所述，答案选(C)。

11.【考点定位】二元函数的条件极值；拉格朗日乘数法；多元函数的最值。

【解】先求 $f(x,y)$ 在区域 D 内的驻点。$f_x'=2x-2xy^2, f_y'=4y-2x^2y$，由 $\begin{cases} f_x'=0 \\ f_y'=0 \end{cases}$ 得

$\begin{cases} 2x(1-y^2)=0 \\ 2y(2-x^2)=0 \end{cases}$，解得 D 内部的驻点为 $\left(-\sqrt{2},1\right),\left(\sqrt{2},1\right)$。易得 $f\left(-\sqrt{2},1\right)=2, f\left(\sqrt{2},1\right)=2$。

再求 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界上的所有可能的最值点。

在边界 $y=0,(-2\le x\le 2)$ 上，$f(x,0)=x^2, f(\pm 2,0)=4, f(0,0)=0$。

在边界 $x^2+y^2=4(0<y\le 2)$，作拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$，

令 $\begin{cases} L_x'=2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ L_y'=4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ L_\lambda'=x^2+y^2-4=0 \end{cases}$，整理得 $\begin{cases} 2x(1+\lambda-y^2)=0 \\ 2y(2+\lambda-x^2)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$。

当 $x=0$ 时，$y=2,\lambda=-2$；

当 $x\ne 0$ 时，$\begin{cases} y^2=1+\lambda \\ x^2=2+\lambda \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$，故 $3+2\lambda=4$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，代入上式解得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$，$y=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$。

$f(0,2)=8$，$f\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=\dfrac{5}{2}+2\cdot\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{2}-\dfrac{15}{4}=\dfrac{7}{4}$。

比较以上各点的值可得，$f(x,y)$ 在区域 D 上的最小值 $f(0,0)=0$，最大值 $f(0,2)=8$。

【注】$f(x,y)$ 在区域 D 的边界 $x^2+y^2=4(0<y\le 2)$ 上的所有可能的最值点的求法不是唯一的，下面再介绍一种方法：由 $x^2+y^2=4(0<y\le 2)$ 得，$x^2=4-y^2(0<y\le 2)$，从而

$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2=\left(4-y^2\right)+2y^2-\left(4-y^2\right)y^2=y^4-3y^2+4=\left(y^2-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$，由于

$0<y^2\le 4$，此时易得在边界 $x^2+y^2=4(0<y\le 2)$ 上，$f(x,y)$ 的最大值为 $f(0,2)=8$，最小值为

$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{5}{2}+2\cdot\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{11}{2}-\frac{15}{4}=\frac{7}{4}$。

12.【考点定位】多元函数的条件最值；拉格朗日乘数法

【解】方法一：曲线C上点$P(x,y,z)$到xoy面的距离$d=|z|=\sqrt{z^2}$。问题转化为求目标函数

$f(x,y,z)=z^2$在限制条件$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$下的最大值和最小值。

令$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda\left(x^2+y^2-2z^2\right)+\mu\left(x+y+3z-5\right)$，

令$\begin{cases}L'_x=2\lambda x+\mu=0 & ①\\L'_y=2\lambda y+\mu=0 & ②\\L'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0 & ③\\L'_\lambda=x^2+y^2-2z^2=0 & ④\\L'_\mu=x+y+3z-5=0 & ⑤\end{cases}$，由①②两式相减得$2\lambda\left(x-y\right)=0$。若$\lambda=0$，则由①得$\mu=0$，

代入③得$z=0$，再代入④和⑤得$\begin{cases}x^2+y^2=0\\x+y=5\end{cases}$，显然无解。所以$\lambda\neq0$，从而$x=y$，代入④

⑤得$\begin{cases}x^2-z^2=0\\2x+3z=5\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\z=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-5\\z=5\end{cases}$，所以$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-5\\y=-5\\z=5\end{cases}$。在$P_1(1,1,1)$处

$d=\sqrt{1^2}=1$；在$P_2\left(-5,-5,5\right)$处$d=\sqrt{5^2}=5$。故C上距离xoy面最远的点为$P_2\left(-5,-5,5\right)$，

最近的点为$P_1(1,1,1)$。

在本题中，由条件的特殊形式，我们可使用特殊的方法求解。

方法二：$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0, & ①\\x+y+3z=5, & ②\end{cases}$由②得$y=(5-3z)-x$，代入①得

$x^2+(5-3z)^2-2(5-3z)x+x^2-2z^2=0$，整理得

$$2x^2-2(5-3z)x+(25-30z+7z^2)=0,$$

由$\Delta=4(5-3z)^2-8(25-30z+7z^2)\geq0$得$z^2-6z+5\leq0$，故$1\leq z\leq5$。易知，$z=1$时，

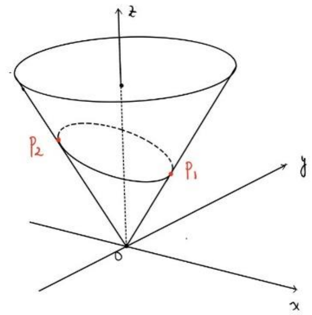
$x=1,y=1;z=5$时，$x=-5,y=-5$。故所求C上距离xoy面最远的点为$P_2\left(-5,-5,5\right)$，最近的点为$P_1(1,1,1)$。(如图所示)。

方法三：利用柯西不等式。

由$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$ 可得$\begin{cases}x^2+y^2=2z^2 & ①\\x+y=5-3z & ②\end{cases}$，由柯西不等式得

$(x+y)^2=\left(\left(x,y\right)\cdot\left(1,1\right)\right)^2\le\left(x^2+y^2\right)\left(1^2+1^2\right)=2\left(x^2+y^2\right)$，将①②代入上式得

$(5-3z)^2\le 4z^2$,即得$(z-1)(z-5)\le 0$，所以$1\le z\le 5$。$z=1$时，$x=1,y=1;z=5$时，$x=-5,y=-5$。故所求C上距离xoy面最远的点为$P_2\left(-5,-5,5\right)$，最近的点为$P_1(1,1,1)$。



13.【考点定位】多元函数的条件最值；拉格朗日乘数法。

【解】方法一：作拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda,u)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+u(x+y+z-4)$，

令$\begin{cases}L_x'=2x+2\lambda x+\mu=0, & ①\\L_y'=2y+2\lambda y+\mu=0, & ②\\L_z'=2z-\lambda+\mu=0, & ③\\L_\lambda'=x^2+y^2-z=0, & ④\\L_\mu'=x+y+z-4=0, & ⑤\end{cases}$ 由①−②可得$(x-y)(1+\lambda)=0$，若$1+\lambda=0$即$\lambda=-1$，则由①式可得$\mu=0$，再由③可得$z=-1$，代入方程④得$x^2+y^2+1=0$，显然无解。故$\lambda\ne-1$，所以$x-y=0$即$x=y$，代 入④⑤可得$\begin{cases}2x^2-z=0\\2x+z-4=0\end{cases}$，解得$x=y=-2,z=8$或$x=y=1,z=2$。

因为$u(-2,-2,8)=72,u(1,1,2)=6$，所以函数u的最大值为 72，最小值为 6。

在本题中，由条件的特殊形式，我们可使用特殊的方法求解。

方法二：由于$z=x^2+y^2$，所以目标函数变为$u=x^2+y^2+z^2=z^2+z$。

条件$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y+z=4\end{cases}$变为$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x+y=4-z\end{cases}$，由柯西不等式得

$(x+y)^2=\left(\left(x,y\right)\cdot\left(1,1\right)\right)^2\le\left(x^2+y^2\right)\left(1^2+1^2\right)=2\left(x^2+y^2\right)$，所以$(4-z)^2\le 2z$，

即$(z-2)(z-8)\le 0$,故$2\le z\le 8$。由于$u=z^2+z$在$[2,8]$上单调递增，所以

当 $z=2$ 时，u 取最小值 $u=6$，此时 $x=y=1,z=2$；当 $z=8$ 时，u 取最大值 $u=72$，

此时 $x=y=-2,z=8$。

方法三：$\begin{cases} z=x^2+y^2 & ① \\ x+y+z=4 & ② \end{cases}$ 将①代入②得 $x^2+y^2+x+y+=4$，即 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}$，设

$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta-\dfrac{1}{2} \end{cases},\theta\in[0,2\pi]$，从而 $z=5-\dfrac{3}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)=5-3\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $2\le z\le 8$。

由于 $u=x^2+y^2+z^2=z+z^2$，所以当 $z=2$ 时，u 取最小值 $u=6$；当 $z=8$ 时，u 取最大值 $u=72$。

14.【考点定位】多元函数的条件极值；拉格朗日乘数法。

【解】方法一：作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$，令

$$\begin{cases} L_x'=y+2\lambda x=0, & ① \\ L_y'=x+2z+2\lambda y=0, & ② \\ L_z'=2y+2\lambda z=0, & ③ \\ L'_\lambda=x^2+y^2+z^2-10=0, & ④ \end{cases}$$

此时用两种方式求目标函数的最值

其一：①③两式得 $\lambda(2x-z)=0$。讨论如下：

（i）若 $\lambda=0$，由①式知 $y=0$，由②式知 $x=-2z$，将 $y=0,x=-2z$ 代入④式 $4z^2+z^2=10$，解得 $z=\pm\sqrt{2}$，可得点 $P_1\left(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right),\ P_2\left(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)$ 且 $u=\left(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)=0,\ u\left(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)=0$。

（ii）若 $\lambda\ne 0$ 则 $z=2x$，由②式知 $5x+2\lambda y=0$；再由①式知 $2\lambda=-\dfrac{y}{x}$，故 $5x-y\cdot\dfrac{y}{x}=0$，解得 $y^2=5x^2$，

将 $z=2x$，$y^2=5x^2$ 代入④式得 $x=\pm1$，可得点 $P_3\left(-1,-\sqrt{5},-2\right),P_4\left(-1,\sqrt{5},-2\right),$

$P_5\left(1,-\sqrt{5},2\right),P_6\left(1,\sqrt{5},2\right)$，且

$u\left(-1,-\sqrt{5},-2\right)=5\sqrt{5},\ u\left(-1,\sqrt{5},-2\right)=-5\sqrt{5},\ u\left(1,-\sqrt{5},2\right)=-5\sqrt{5},\ u\left(1,\sqrt{5},2\right)=5\sqrt{5}$。

综上所述可得最小值 $-5\sqrt{5}$，最大值为 $5\sqrt{5}$。

其二：由④知，$(x,y,z)^T\ne 0$，所以由①②③构成的齐次线性方程组有非零解，因此其系数矩阵的行列式为零，即 $0=\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2\lambda \end{vmatrix}=8\lambda^3-10\lambda=2\lambda(2\lambda+5)(2\lambda-5)$，得 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

由①$\times x+$②$\times y+$③$\times z$ 得 $x\left(y+2\lambda x\right)+y\left(x+2z+2\lambda y\right)+z\left(2y+2\lambda z\right)=0$，即

$xy+2yz=-\lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)$。当 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时，$xy+2yz=-\lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times 10=-5\sqrt{5}$；

当 $\lambda=0$ 时，$xy+2yz=-\lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$；当 $\lambda=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时，$xy+2yz=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times 10=5\sqrt{5}$。

所以 $u_{\max}=5\sqrt{5}$，$u_{\min}=-5\sqrt{5}$。

方法二：利用二次型的理论。

记 $X=(x,y,z)^T$，则 $u=X^TAX$，这里 $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 由

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2-1\right)-\frac{1}{4}\lambda=\lambda\left(\lambda^2-\frac{5}{4}\right)=\lambda\left(\lambda+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{5}}{2},\lambda_2=0,\lambda_3=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $u=X^{\mathrm{T}}AX$ 可经过正交变换 $X=QY$ 化为

$u=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x_1^2+0y_1^2-\dfrac{\sqrt{5}}{2}z_1^2$，其中 $Y=(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$，由于 $\|X\|^2=10\Leftrightarrow\|Y\|^2=10$，

故 $u\le\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=5\sqrt{5}$，当 $Y=\left(\pm\sqrt{10},0,0\right)^{\mathrm{T}}$ 时，取“=”；

$u\ge-\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=-5\sqrt{5}$，当 $Y=\left(0,0,\pm\sqrt{10}\right)^{\mathrm{T}}$ 时，取“=”。综上所述，$u_{\max}=5\sqrt{5},u_{\min}=-5\sqrt{5}$。

此题还可以用初等方法解答。

方法三：由基本不等式 $a^2+b^2\ge 2ab$ 可得

$$x^2+y^2+z^2=x^2+\left(\sqrt{m}y\right)^2+\left(\sqrt{1-m}y\right)^2+z^2\ge 2\sqrt{m}xy+2\sqrt{1-m}yz\quad\left(0\le m\le 1\right)$$

令 $\dfrac{2\sqrt{m}}{2\sqrt{1-m}}=\dfrac{1}{2}$ 得 $m=\dfrac{1}{5}$，代入上式得 $x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{2}{\sqrt{5}}xy+\dfrac{4}{\sqrt{5}}yz=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(xy+2yz\right)$，

所以$u=xy+2yz\le\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{\sqrt{5}}{2}=10\times\frac{\sqrt{5}}{2}=5\sqrt{5}$，当$x=\frac{1}{\sqrt{5}}y,z=\frac{2}{\sqrt{5}}y$，即$\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm\sqrt{5}\\z=\pm2\end{cases}$时，取"="，故$u_{\max}=5\sqrt{5}$。

利用$a^2+b^2\ge-2ab$可得，$10=x^2+y^2+z^2=x^2+\frac{1}{5}y^2+\frac{4}{5}y^2+z^2\ge-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(xy+2yz\right)$得$u_{\min}=-5\sqrt{5}$。

【注】此题的命题背景是线性代数中的实二次型。同学们有必要做些了解：

设n元实二次型$f=X^TAX$，其特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，不妨$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，则经过正交变换$X=QY$，$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，从而

$$f\le\lambda_ny_1^2+\lambda_ny_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=\lambda_n\left(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\right)=\lambda_n\|Y\|^2 \qquad ①$$

且
$$f\ge\lambda_1y_1^2+\lambda_1y_2^2+\cdots+\lambda_1y_n^2=\lambda_1\left(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\right)=\lambda_1\|Y\|^2 \qquad ②$$

由于
$$\|X\|^2=\|QY\|^2=\sqrt{\left(QY\right)^T\left(QY\right)}=\sqrt{Y^TQ^TQY}\overset{Q\text{为正交矩阵}}{=}\sqrt{Y^TY}=\|Y\|^2 \qquad ③$$

故结合①②③得$\lambda_1\|X\|^2\le X^TAX\le\lambda_n\|X\|^2$，其中$\lambda_1,\lambda_n$分别为二次型所对应的矩阵$A$的最小特征值和最大特征值。进一步可以得到结论：当$\|X\|=m>0$，即$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=m^2$时，$n$元实二次型$f=X^TAX$的最小值为$\lambda_1m^2$，最大值为$\lambda_nm^2$。

15.【考点定位】复合函数的高阶偏导。

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=u_\xi\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+u_\eta\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=u_\xi+u_\eta$，$\frac{\partial u}{\partial y}=u_\xi\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+u_\eta\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=au_\xi+bu_\eta$，

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\left(u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\right)+\left(u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}\right)=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\left(u_{\xi\xi}\cdot a+u_{\xi\eta}\cdot b\right)+\left(u_{\eta\xi}\cdot a+u_{\eta\eta}\cdot b\right)=au_{\xi\xi}+\left(a+b\right)u_{\xi\eta}+bu_{\eta\eta},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=a\left(u_{\xi\xi}\cdot a+u_{\xi\eta}\cdot b\right)+b\left(u_{\eta\xi}\cdot a+u_{\eta\eta}\cdot b\right)=a^2u_{\xi\xi}+2abu_{\xi\eta}+b^2u_{\eta\eta},$$

将上述结果代入等式$4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$得，

$$\left(5a^2+12a+4\right)u_{\xi\xi}+\left[10ab+12\left(a+b\right)+8\right]u_{\xi\eta}+\left(5b^2+12b+4\right)u_{\eta\eta}=0,$$

由题设可知，$\begin{cases} 5a^2+12a+4=0 \\ 10ab+12(a+b)+8\neq 0 \\ 5b^2+12b+4=0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=-\dfrac{2}{5} \\ b=-2 \end{cases}$，或$\begin{cases} a=-2 \\ b=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$。

综上所述，$a=-\dfrac{2}{5},b=-2$ 或 $a=-2,b=-\dfrac{2}{5}$。

【注】进一步我们可以求出函数 u 的表达式。由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=\varphi(\xi)$，从而

$$u=\int\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\Psi(\eta)=\Phi(\xi)+\Psi(\eta)=\Phi(x-2y)+\Psi\left(x-\frac{2}{5}y\right)$$，其中 Φ,Ψ 具有二阶连续导数。

16.【考点定位】二元函数极值的判定。

【答案】A

【解】由 $z=f(x)\ln f(y)$ 得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)\cdot\ln f(y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)\ln f(y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)\dfrac{f'(y)}{f(y)}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)\dfrac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{[f(y)]^2}$。所以

$\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}=f'(x)\cdot\ln f(y)|_{(0,0)}=f'(0)\ln f(0)=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}|_{(0,0)}=f(0)\dfrac{f'(0)}{f(0)}=f'(0)=0$，

故 $(0,0)$ 为函数 z 驻点。

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,0)}=f''(x)\ln f(y)|_{(0,0)}=f''(0)\ln f(0)$$，

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,0)}=f'(x)\frac{f'(y)}{f(y)}|_{(0,0)}=[f'(0)]^2\frac{1}{f(0)}=0,$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,0)}=f(x)\frac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{[f(y)]^2}\Bigg|_{(0,0)}=f(0)\frac{f''(0)f(0)-0}{[f(0)]^2}=f''(0),$$

函数 z 在 $(0,0)$ 处取极小值的一个充分条件为$\begin{cases} A>0 \\ AC-B^2>0 \end{cases}$，即$\begin{cases} f''(0)\ln f(0)>0 \\ [f''(0)]^2\ln f(0)>0 \end{cases}$解得

$\begin{cases} f''(0))>0 \\ \ln f(0)>0 \end{cases}$即$\begin{cases} f''(0))>0 \\ f(0)>1 \end{cases}$。故答案选（A）。

17.【考点定位】二元函数极值的判定

【答案】A

【解】由 $z=f(x)g(y)$ 得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y),\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)g''(y)。$$

在 $(0,0)$ 处，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=f'(0)g(0)=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=f(0)g'(0)=0$，故 $(0,0)$ 为函数 z 驻点。

$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,0)}=f''(x)g(y)|_{(0,0)}=f''(0)g(0),$，$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,0)}=f'(x)g'(y)|_{(0,0)}=f'(0)g'(0)=0,$，

$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,0)}=f(x)g''(y)\Big|_{(0,0)}=f(0)g''(0)$，

函数 z 在 $(0,0)$ 处取极小值的一个充分条件为 $\begin{cases}A>0\\AC-B^2>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}f''(0)g(0)>0\\g(0)f(0)f''(0)g''(0)>0\end{cases}$，又由于

$f(0)>0,g(0)<0$，所以 $\begin{cases}f''(0)<0\\f''(0)g''(0)<0\end{cases}$，故 $\begin{cases}f''(0)<0\\g''(0)>0\end{cases}$。故答案选（A）。

18.【考点定位】二元函数可微的定义；偏导数的定义；二元函数可微的必要条件。

【答案】B

【解】对于选项(A):取 $f(x,y)=|x|+|y|$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=1$ 存在，但是

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在(0,0)处不可微，故（A）不正确。

对于选项(B):若 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A$ 存在，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0,$ 因为 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续，所以

$f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$。再由极限和无穷小的关系可得，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，

$\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A+\alpha,$ 其中 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha=0$，即 $f(x,y)=(A+\alpha)(x^2+y^2)$，

所以 $\Delta f(0,0)=f(x,y)-f(0,0)=(A+\alpha)(x^2+y^2)=0x+0y+(A+\alpha)r^2=0x+0y+o(r)$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。由函数可微的定义知，$f(x,y)$ 在(0,0)处可微，所以(B)正确。

对于选项(C)(D):取 $f(x,y)=1$，则 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微，但

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{|x|+|y|}=+\infty;\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{x^2+y^2}=+\infty。$$

所以(C)(D)都不正确。综上所述，答案选(B)。

【注】我们对选项(A)作进一步的分析：

设 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}=A$。若 $A=0$，则 $\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}=\alpha\left(\alpha\to0\right)$，而 $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，

$$\Delta f\left(0,0\right)=f(x,y)-f\left(0,0\right)=\alpha\left(|x|+|y|\right)=\alpha r\left(|\cos\theta|+|\sin\theta|\right)=o\left(r\right)=0x+0y+o\left(r\right)$$

由函数可微的定义知，此时 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微。

若 $A\neq0$，则 $f_x\left(0,0\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f\left(0,0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=A\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ 不存在，所以此时

$f(x,y)$ 在(0,0)处不可微。

19.【考点定位】微分学在经济学上的应用；条件最值。

【解】（1）由题设可知 $\begin{cases}\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}=20+\frac{x}{2}\\ \frac{\partial C(x,y)}{\partial y}=6+y\end{cases}$，从而 $C(x,y)=\int(20+\frac{x}{2})\mathrm{d}x+f(y)=20x+\frac{1}{4}x^2+f(y)$，

又由 $6+y=\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}=f'(y)$ 可得，$f(y)=\frac{1}{2}y^2+6y+c$，故

$$C(x,y)=\frac{1}{4}x^2+20x+\frac{1}{2}y^2+6y+c。$$

又由固定成本为 10000 万元知，$c=10000$，所以 $C(x,y)=\frac{1}{4}x^2+20x+\frac{1}{2}y^2+6y+10000$。

（2）当 $x+y=50$ 时，作拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=C(x,y)+\lambda(x+y-50)$，由

$$\begin{cases}L_x'=\frac{x}{2}+20+\lambda=0\\ L_y'=6+y+\lambda=0\\ L_\lambda'=x+y-50=0\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}x=24\\y=26\end{cases}$，由问题的实际意义知 $C(x,y)$ 的最小值为 $C(24,26)=11118$。

（3）当甲、乙两种产品的总产量为 50 件且总成本最小时，甲产品的边际成本为

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\Big|_{(24,26)}=\left(20+\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=24}=32 \text{（万元/件）}$$

即当甲产品的产量为 24 件时，若再生产一件甲产品，则成本需增加 32 万元。

【注】在第（2）问中，当 $x+y=50$ 时，$y=50-x(0\le x\le 50)$，则

$$C(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{(50-x)^2}{2}+20x+6(50-x)+10000,$$

可直接配方或求导得到当 $x=24$ 时，总成本最小。

20.【考点定位】二元函数条件最值；拉格朗日乘数法。

【解】设 $P(x,y)$ 是曲线 C 上任一点，则 P 点到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2}$ 。问题变为在条件 $x^3-xy+y^3-1=0,(x\ge 0,y\ge 0)$ 下，求目标函数 $d^2=x^2+y^2$ 的最值。

作拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1),(x\ge 0,y\ge 0)$，令

$$\begin{cases} L'_x=2x+\lambda(3x^2-y)=0, & ① \\ L'_y=2y+\lambda(3y^2-x)=0, & ② \\ L'_\lambda=x^3-xy+y^3-1=0, & ③ \end{cases}$$

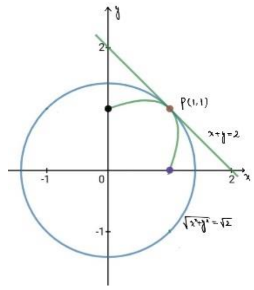
当 $x>0,y>0$ 时，由①②可得 $\begin{cases} \lambda=\dfrac{y-3x^2}{2x} & ④ \\ \lambda=\dfrac{x-3y^2}{2y} & ⑤ \end{cases}$ 所以 $\dfrac{y-3x^2}{2x}=\dfrac{x-3y^2}{2y}$，从而

$y^2-3x^2y=x^2-3xy^2$, 故 $(y-x)(3xy+y+x)=0$，因此 $y=x$，代入③得 $2x^3-x^2-1=0$

即 $(x-1)(2x^2+x+1)=0$，故 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ \lambda=-1 \end{cases}$，此时 $d=\sqrt{2}$。

当 $x=0$ 时，由 $x^3-xy+y^3-1=0$ 得 $y=1$，当 $y=0$ 时，由 $x^3-xy+y^3-1=0$ 得 $x=1$。由于 $d(0,1)=1,d(1,0)=1$，故最长距离为 $\sqrt{2}$，最短距离为 1。

【注】我们画出限制条件 $x^3-xy+y^3-1=0,(x\ge 0,y\ge 0)$ 表示的曲线。在最大值点 $P(1,1)$ 处目标函数 $d=\sqrt{x^2+y^2}$ 的等值线 $d=\sqrt{2}$ 与 $x^3-xy+y^3-1=0,(x\ge 0,y\ge 0)$ 相切，请同学们想一想这是为什么？



21.【考点定位】极值点的判别；连续函数的最值性。

【答案】A

【解】方法一：对区域D内部任意一点P_0， $A=u_{xx}(P_0),B=u_{xy}(P_0),C=u_{yy}(P_0)$。

由于$A+C=0,B\neq 0$，所以$AC-B^2=-A^2-B^2<0$，故D内任意一点P_0都

不是$u(x,y)$的极值点，从而不是最值点。另一方面，由连续函数的性质可知，$u(x,y)$

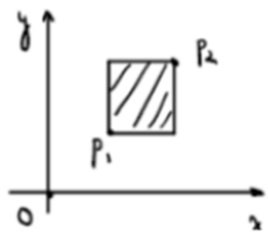
在有界闭区域D上有最大值和最小值，因此最大值和最小值都在D的边界上取得。

故答案选（A）。

方法二：作为选择题，本题我们可以采用特例法。取$u(x,y)=xy$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1$

满足题设的条件，取$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,1\le y\le 2\}$，易知，$u(x,y)$在$P_1(1,1)$处取最小值，

在$P_2(2,2)$处取最大值，P_1,P_2都在D的边界上，故答案选（A）。



【注】 ①本题的命题背景是所谓的调和函数。为了拓展同学们的视野，我们做一点简单的介绍：

若函数$u(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则称$u(x,y)$为调和函数。例

如$u(x,y)=x^3-3xy^2,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x$，从而$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，所以$u(x,y)=x^3-3xy^2$

是整个平面上的调和函数。同理可以验证$u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$为调和函数。

②调和函数有如下重要的性质：有界闭区域上的非常值调和函数在区域内部无极值点，从而其最值只能在边界上取得。

22.【考点定位】二元复合函数的偏导数；二阶偏导数；二阶常系数线性非齐次方程。

【解】记 $u=e^x\cos y$，则 $z=f\left(u\right)$，从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y,$$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y$。代入方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 可得，

$$f''\left(u\right)e^{2x}=\left(4f(u)+u\right)e^{2x}，即 f''(u)-4f(u)=u， \qquad ①$$

方程①的齐次方程的特征方程为：$r^2-4=0$，得特征根为 $r_{1,2}=\pm 2$，所以方程①的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$。设方程①的特解为 $Y^*=a+bu$，代入方程①得 $-4\left(a+bu\right)=u$，所以 $a=0,b=-\dfrac{1}{4}$，故 $f(u)=-\dfrac{1}{4}u+C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$。

因为 $f(0)=0, f'(0)=0$，所以 $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 2C_1-2C_2-\dfrac{1}{4}=0 \end{cases}$，解得 $C_1=\dfrac{1}{16},C_2=-\dfrac{1}{16}$，

故
$$f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u。$$

23.【考点定位】偏积分；旋转体的体积。

【解】由题意知，$f\left(x,y\right)=\int 2\left(y+1\right)dy=\left(y+1\right)^2+\varphi\left(x\right)$，从而 $f\left(y,y\right)=\left(y+1\right)^2+\varphi\left(y\right)$。

又由于 $f\left(y,y\right)=\left(y+1\right)^2-\left(2-y\right)\ln y$，故 $\varphi\left(y\right)=-\left(2-y\right)\ln y$，从而

$$f\left(x,y\right)=\left(y+1\right)^2-\left(2-x\right)\ln x。$$

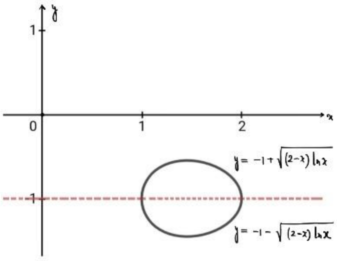
由 $f\left(x,y\right)=0$ 知 $\left(y+1\right)^2-\left(2-x\right)\ln x=0$，即 $\left(y+1\right)^2=\left(2-x\right)\ln x\geq 0$，所以 $y=-1\pm\sqrt{\left(2-x\right)\ln x}$，如图所示。

解得 $1\leq x\leq 2$，$\forall\left[x,x+dx\right]\subset\left[1,2\right]$，体积微元 $dV=\pi\left(\sqrt{\left(2-x\right)\ln x}\right)^2dx=\pi\left(2-x\right)\ln x dx$，

故 $V=\int_1^2\pi\left(2-x\right)\ln x dx=-\pi\int_1^2\left(2-x\right)\ln x d\left(2-x\right)=-\dfrac{\pi}{2}\int_1^2\ln x d\left(2-x\right)^2$

$$=-\frac{\pi}{2}(2-x)^2\ln x\Big|_1^2+\frac{\pi}{2}\int_1^2(2-x)^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_1^2\left(\frac{4}{x}-4+x\right)\mathrm{d}x=2\pi\ln x\Big|_1^2-2\pi+\frac{\pi}{4}x^2\Big|_1^2$$

$$=2\pi\ln 2-2\pi+\frac{3}{4}\pi=2\pi\ln 2-\frac{5}{4}\pi=\pi\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)$$



24.【考点定位】复合函数的高阶偏导；一阶线性微分方程。

【解】记 $u=\mathrm{e}^x\cdot\cos y$，则 $z=f(u)$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\mathrm{e}^x\cdot\cos y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\mathrm{e}^x\cdot(-\sin y)$，

代入方程 $\cos y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(4z+\mathrm{e}^x\cos y\right)\cdot\mathrm{e}^x$ 得

$f'(u)\cdot\mathrm{e}^x\cdot\cos^2 y+f'(u)\cdot\mathrm{e}^x\cdot\sin^2 y=\left(4f(u)+u\right)\cdot\mathrm{e}^x$，即 $f'(u)\cdot\mathrm{e}^x=\left(4f(u)+u\right)\cdot\mathrm{e}^x$

所以 $f'(u)-4f(u)=u$，故

$$f(u)=\mathrm{e}^{\int 4\mathrm{d}u}\left[\int u\mathrm{e}^{\int -4\mathrm{d}u}\cdot\mathrm{d}u+C\right]=\mathrm{e}^{4u}\left[\int u\mathrm{e}^{-4u}\mathrm{d}u+C\right]=\mathrm{e}^{4u}\left[\left(-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{-4u}+C\right]$$

$$=-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}+C\mathrm{e}^{4u}$$

又由于 $f(0)=0$，所以 $C=\dfrac{1}{16}$，故 $f(u)=-\dfrac{1}{4}u-\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{4u}$ 。

25.【考点定位】隐函数的偏导数；多元函数的极值。

【解】记 $F(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)z+\ln z+2(x+y+1)$，则

$$F_x'=2xz+2,\quad F_y'=2yz+2,\quad F_z'=x^2+y^2+\frac{1}{z},$$

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{2xz+2}{x^2+y^2+\frac{1}{z}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{2yz+2}{x^2+y^2+\frac{1}{z}}$。

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $\begin{cases}2xz+2=0\\2yz+2=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}xz=-1\\yz=-1\end{cases}$，解得 $x=y=-\dfrac{1}{z}$，将 $x=y=-\dfrac{1}{z}$ 代入原方

程$\left(x^2+y^2\right)z+\ln z+2\left(x+y+1\right)=0$得 $\dfrac{2}{z^2}\cdot z+\ln z+2\left(-\dfrac{2}{z}+1\right)=0$，即$z\ln z+2z=2$，解得

$z=1$，从而可得驻点为$\left(-1,-1\right)$。由于

$$A=z''_{xx}\Big|_{(-1,-1)}=-\frac{\left(2z+2x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{z}\right)-\left(2xz+2\right)\left(2x-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{z}\right)^2}\Bigg|_{(-1,-1,1)}=-\frac{2}{3},$$

$$B=z''_{xy}\Big|_{(-1,-1)}=-\frac{2x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{z}\right)-\left(2xz+2\right)\left(2y-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{z}\right)^2}\Bigg|_{(-1,-1,1)}=0,$$

$$C=z''_{yy}\Big|_{(-1,-1)}=-\frac{\left(2z+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{z}\right)-\left(2yz+2\right)\left(2y-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{z}\right)^2}\Bigg|_{(-1,-1,1)}=-\frac{2}{3}。$$

所以$A=-\dfrac{2}{3}<0$，$AC-B^2=\dfrac{4}{9}>0$，从而$\left(-1,-1\right)$为$z\left(x,y\right)$的极大值点，极大值为$z\left(-1,-1\right)=1$。

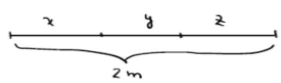
【注】在求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$的时候，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$的表达式不需要代入二阶偏导数，因为驻点是由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$所确定，所以在将驻点代入二阶偏导数时含有$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$的项全部为 0。

26.【考点定位】多元函数的条件最值。

【解】设圆的周长为x，正三角形的周长为y，正方形的周长为z，则$x+y+z=2$，

圆的面积为$S_1=\pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2=\dfrac{x^2}{4\pi}$，正三角形的面积为$S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=\dfrac{y^2}{12\sqrt{3}}$，

正方形的面积为$S_3=\left(\dfrac{z}{4}\right)^2=\dfrac{z^2}{16}$，三个图形的面积之和为$S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{12\sqrt{3}}+\dfrac{z^2}{16}$。



下面使用三种方法求S的最小值。

方法一：作拉格朗日函数$L(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{12\sqrt{3}}+\dfrac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2)$，

由$\begin{cases} L'_x = \dfrac{2x}{4\pi} + \lambda = 0 \\ L'_y = \dfrac{2y}{12\sqrt{3}} + \lambda = 0 \\ L'_z = \dfrac{2z}{16} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{\pi + 3\sqrt{3} + 4} \\ y = \dfrac{6\sqrt{3}}{\pi + 3\sqrt{3} + 4} \\ z = \dfrac{8}{\pi + 3\sqrt{3} + 4} \\ \lambda = -\left(\pi + 3\sqrt{3} + 4\right) \end{cases}$，由问题的实际背景可知

$$S_{\min} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}\right)^2 + \frac{1}{12\sqrt{3}}\left(\frac{6\sqrt{3}}{\pi+3\sqrt{3}+4}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4}\right)^2 = \frac{\pi+3\sqrt{3}+4}{\left(\pi+3\sqrt{3}+4\right)^2} = \frac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}。$$

方法二：由$x+y+z=2$得$z=2-x-y$，则$S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{y^2}{12\sqrt{3}} + \dfrac{(2-x-y)^2}{16}$，①

由$\begin{cases} S'_x = \dfrac{2x}{4\pi} - \dfrac{2(2-x-y)}{16} = 0 \\ S'_y = \dfrac{2y}{12\sqrt{3}} - \dfrac{2(2-x-y)}{16} = 0 \end{cases}$， 解得$\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4} \\ y = \dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+3\sqrt{3}+4} \end{cases}$。

代入①式，由问题的实际背景可知$S_{\min} = \dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$。

方法三：利用柯西不等式$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$时取“=”。由$x+y+z=2$可得，

$$\left(\frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{12\sqrt{3}} + \frac{z^2}{16}\right)\left(\left(\sqrt{4\pi}\right)^2 + \left(\sqrt{12\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{16}\right)^2\right)$$

$$= \left[\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{12\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{16}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{4\pi}\right)^2 + \left(\sqrt{12\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{16}\right)^2\right] \geq \left(x+y+z\right)^2 = 4$$

故$S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{y^2}{12\sqrt{3}} + \dfrac{z^2}{16} \geq \dfrac{4}{4\pi+12\sqrt{3}+16} = \dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，从而$S_{\min} = \dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，

此时$x = \dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}, y = \dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+3\sqrt{3}+4}, z = \dfrac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4}$。

27.【考点定位】偏导数与高阶偏导数。

【解】由$u(x,y) = v(x,y)e^{ax+by}$得，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v_x\mathrm{e}^{ax+by}+v\cdot\mathrm{e}^{ax+by}\cdot a=\mathrm{e}^{ax+by}\left(av+v_x\right),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=v_y\mathrm{e}^{ax+by}+v\cdot\mathrm{e}^{ax+by}\cdot b=\mathrm{e}^{ax+by}\left(bv+v_y\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a\mathrm{e}^{ax+by}\cdot\left(av+v_x\right)+\mathrm{e}^{ax+by}\cdot\left(av_x+v_{xx}\right)=\mathrm{e}^{ax+by}\cdot\left(v_{xx}+2av_x+a^2v\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b\mathrm{e}^{ax+by}\cdot\left(bv+v_y\right)+\mathrm{e}^{ax+by}\cdot\left(bv_y+v_{yy}\right)=\mathrm{e}^{ax+by}\cdot\left(v_{yy}+2bv_y+b^2v\right)。$$

将上述结果代入 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 得，

$$\mathrm{e}^{ax+by}\cdot\left[2\left(v_{xx}+2av_x+a^2v\right)-2\left(v_{yy}+2bv_y+b^2v\right)+3\left(av+v_x\right)+3\left(bv+v_y\right)\right]=0,$$

整理得 $2v_{xx}-2v_{yy}+(4a+3)v_x+(-4b+3)v_y+(2a^2-2b^2+3a+3b)v=0$，

由题设可知，$\begin{cases}4a+3=0,\\-4b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{4},\\b=\frac{3}{4}。\end{cases}$ 综上所述：$a=-\frac{3}{4}$，$b=\frac{3}{4}$ 。

【注】当 $a=-\frac{3}{4}$，$b=\frac{3}{4}$ 时，原方程 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$。

28.【考点定位】多元函数的条件最值。

【解】曲线 C 上点 $P(x,y,z)$ 到 xoy 面的距离 $d=|z|=\sqrt{z^2}$ 。问题等价于求在限制条件下

$\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$ 下目标函数 $d^2=z^2$ 的最大值。

方法一：作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,u)=z^2+\lambda\left(x^2+2y^2-z-6\right)+\mu\left(4x+2y+z-30\right)$，

令 $\begin{cases}L'_x=2\lambda x+4\mu=0 & ①\\L'_y=4\lambda y+2\mu=0 & ②\\L'_z=2z-\lambda+\mu=0 & ③\\L'_\lambda=x^2+2y^2-z-6=0 & ④\\L'_u=4x+2y+z-30=0 & ⑤\end{cases}$ 下面求解该方程组：由①②可得 $\begin{cases}\lambda x=-2\mu\\\lambda y=-\frac{1}{2}\mu\end{cases}$，讨论如下

若 $\lambda=0$，则 $\mu=0$，代入③得 $z=0$，从而④⑤变为 $\begin{cases}x^2+2y^2=6 & ⑥\\2x+y=15 & ⑦\end{cases}$，由⑦可得 $y=15-2x$ 代入⑥整理得 $3x^2-40x+148=0$，此时 $3x^2-40x+148=0,\Delta=\left(-40\right)^2-12\times148=-176<0$，所以无实根；

若 $\lambda \neq 0$，则 $\begin{cases} x=-2\dfrac{\mu}{\lambda} \\ y=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mu}{\lambda} \end{cases}$，所以 $x=4y$，代入④⑤得 $\begin{cases} 18y^2=z+6 \\ 18y=30-z \end{cases}$，解得 $\begin{cases} y=1 \\ z=12 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y=-2 \\ z=66 \end{cases}$，

所以 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=12 \\ \lambda=8 \\ \mu=-16 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-8 \\ y=-2 \\ z=66 \\ \lambda=-44 \\ \mu=-176 \end{cases}$，故 $d_{\max}=66$。

由条件的特殊形式，我们可以使用特殊的方法求解。下面再介绍三种方法。

方法二：由 $\begin{cases} x^2+2y^2-z=6 \\ 4x+2y+z=30 \end{cases}$ 两式相加得，$x^2+2y^2+4x+2y=36$，即 $(x+2)^2+2\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{81}{2}$，

令 $\begin{cases} x=-2+\dfrac{9}{\sqrt{2}}\cos t \\ y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{2}\sin t \end{cases}$，$t\in[0,2\pi]$，故 $z=30-4x-2y=39-9\sin t-18\sqrt{2}\cos t=39-27\sin(t+\varphi)$，

从而 $12\le z\le 66$，因此 $d_{\max}=66$。

方法三：由 $\begin{cases} x^2+2y^2-z=6 \\ 4x+2y+z=30 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x^2+2y^2=6+z，① \\ 4x+2y=30-z，② \end{cases}$ 由②得 $y=\dfrac{30-z}{2}-2x$，代入①得

$x^2+2\left[\left(15-\dfrac{z}{2}\right)-2x\right]^2=6+z$ 整理得 $9x^2-(120-4z)x+\left(\dfrac{z^2}{2}-31z+444\right)=0$，由

$\Delta=(120-4z)^2-36\left(\dfrac{z^2}{2}-31z+444\right)\ge 0$ 得 $(z-12)(z-66)\le 0$，所以 $12\le z\le 66$。故 $d_{\max}=66$。

方法四：由 $\begin{cases} x^2+2y^2-z=6 \\ 4x+2y+z=30 \end{cases}$ 得，$\begin{cases} x^2+2y^2=6+z，① \\ 4x+2y=30-z，② \end{cases}$。由柯西不等式得

$(4x+2y)^2=\left[4x+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}y\right)\right]^2=\left[\left(4,\sqrt{2}\right)\bullet\left(x,\sqrt{2}y\right)\right]^2\le\left(4^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\left(x^2+\left(\sqrt{2}y\right)^2\right)=18\left(x^2+2y^2\right)$

，将①②代入上式得 $(30-z)^2\le 18(6+z)$，整理得 $(z-12)(z-66)\le 0$，所以 $12\le z\le 66$。故 $d_{\max}=66$。

29.【考点定位】多元函数的极值。

【解】由 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2}{2x^2}+\dfrac{y^2}{2x^2}=2\ln|x|+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{y^2}{2x^2}$ 得，

$$f_x'=\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)-\frac{y^2}{x^3}=\frac{2}{x}+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)-\frac{y^2}{x^3}=\frac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}，\quad f_y'=\frac{y}{x^2}。$$

$$f_{xx}''=\frac{4(x+1)x^3-(2x^2+x-1-y^2).3x^2}{x^6}=\frac{4x(x+1)-3(2x^2+x-1-y^2)}{x^4}，\ f_{xy}''=-\frac{2y}{x^3}，\ f_{yy}''=\frac{1}{x^2}，$$

令 $f_x'=0, f_y'=0$，则 $\begin{cases}2x^2+x-1-y^2=0\\ y=0\end{cases}$，解得驻点为 $P_1(-1,0),P_2\left(\frac{1}{2},0\right)$。

在 $P_1(-1,0)$ 处，$A=f_{xx}''(P_1)=3,B=f_{xy}''(P_1)=0,C=f_{yy}''(P_1)=1$，从而 $A=3>0$

$AC-B^2=3>0$，故 $P_1(-1,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点，极小值 $f(-1,0)=2\ln\left|-1\right|+\frac{(-1-1)^2+0^2}{2(-1)^2}=2$。

在 $P_2\left(\frac{1}{2},0\right)$ 处，$A=f_{xx}''(P_2)=24,B=f_{xy}''(P_2)=0,C=f_{yy}''(P_2)=4$ ，从而 $A=24>0$，

$AC-B^2=96>0$，故 $P_2\left(\frac{1}{2},0\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点，极小值

$$f\left(\frac{1}{2},0\right)=2\ln\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+0^2}{2\times\frac{1}{4}}=2\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-2\ln 2。。$$