专题 5 中值问题及不等式

（A 组）基础题

1.【考点定位】 零点定理；可导与连续的关系；微分中值定理。

【答案】B

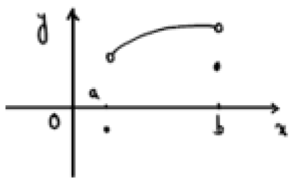
【解】对于选项(A)： $f(a)f(b)<0$ 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$，题设条件不能保证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而结论不一定成立。如图所示：所以(A)错误。

对于选项(B)：由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，故对任意 $\xi\in(a,b)$， $f(x)$ 在 ξ 处必连续，从而 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$，即得 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$，所以(B)正确。

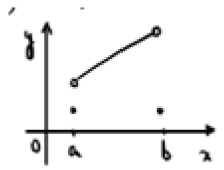
对于选项(C)：当 $f(a)=f(b)$ 时，不能保证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而罗尔定理的结论不一定成立，如图所示：所以(C)错误。

对于选项(D)：由于题设条件不能得证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而拉格朗日中值定理的结论不一定成立，如图所示：所以(D)错误。

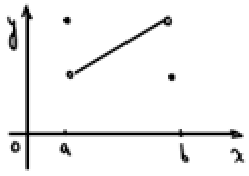
综上所述：答案选(B)。



(a)



(b)



（c）

2.【考点定位】罗尔定理；拉格朗日中值定理；导数的定义。

【证明】（1）这里采用四种方法进行证明。

方法 一：分析： $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)-k=0\Leftrightarrow\left[f(x)-kx\right]'\Big|_{x=\xi}=0\overset{F(x)=f(x)-kx}{\Leftrightarrow}F'(\xi)=0\Leftarrow F(a)=F(b)。$$

这里 $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

设 $F(x)=f(x)-kx$，这里 $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则 $F(x)$ 满足：

① $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；② $F'(x)=f'(x)-k$， $x\in(a,b)$；

③$F(b)-F(a)=\left[f(b)-kb\right]-\left[f(a)-ka\right]=\left[f(b)-f(a)\right]-k(b-a)$

$=\left[f(b)-f(a)\right]-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)=0$,即$F(b)$=$F(a)$。

由罗尔定理可得，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)$=0，即得 $f'(\xi)$=k=$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

从而 $f(b)-f(a)$=$f'(\xi)(b-a)$。

方法二：

> 分析：$f(b)-f(a)$=$f'(\xi)(b-a)\Leftrightarrow f'(\xi)(b-a)-\left[f(b)-f(a)\right]$=0
>
> $\Leftrightarrow\left((b-a)f(x)-\left[f(b)-f(a)\right]x\right)'\Big|_{x=\xi}=0\Leftrightarrow F'(\xi)=0\Leftarrow F(b)=F(a)$,
>
> 这里$F(x)=(b-a)f(x)-[f(b)-f(a)]x$。

设$F(x)=(b-a)f(x)-\left[f(b)-f(a)\right]x$，则$F(x)$满足：

①$F(x)$在$[a,b]$上连续；②$F'(x)$=$(b-a)f'(x)-\left(f(b)-f(a)\right)$，$x\in(a,b)$；

③$F(a)$=$(b-a)f(a)-\left[f(b)-f(a)\right]a=bf(a)-af(b)$,

$F(b)$=$(b-a)f(b)-\left[f(b)-f(a)\right]b=bf(a)-af(b)$,即得$F(a)$=$F(b)$。

由罗尔定理可得，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)$=0，即 $f(b)-f(a)$=$f'(\xi)(b-a)$。

方法三：

> 分析：如图（a），显然函数$y=f(x)$与直线 AB 表示的函数$y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$
>
> 在两个端点处函数值相等。从而$y=f(x)-\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$在两个端点处函数值都为
>
> 零。

设$F(x)=f(x)-\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$，则有：

① $F(x)$在$[a,b]$上连续；②$F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a},x\in(a,b)$; ③ $F(a)=0,F(b)=0$。

由罗尔定理可得，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)$=0，即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$=0, 从而

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)。$$

方法四：这里再向同学们介绍一种证明方法，以拓展同学们的视野。

分析：曲线$y=f(x)$上三点$A(a,f(a)),B(b,f(b)),P(x,f(x))$形成的三角形的面积的二倍可以用二阶行列式表示为：

$S(x)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AP}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a & f(b)-f(a)\\ x-a & f(x)-f(a)\end{vmatrix}$，显然当$P(x,f(x))$与$A(a,f(a))$或$B(b,f(b))$重合时，

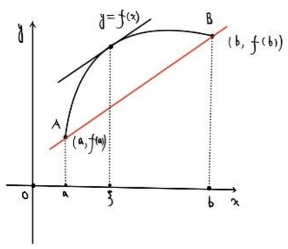
面积均为零，即$S(a)=S(b)=0$。又由于

$\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 1 & x & f(x)\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 0 & b-a & f(b)-f(a)\\ 0 & x-a & f(x)-f(a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a & f(b)-f(a)\\ x-a & f(x)-f(a)\end{vmatrix}$，故$S(x)=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 1 & x & f(x)\end{vmatrix}$。

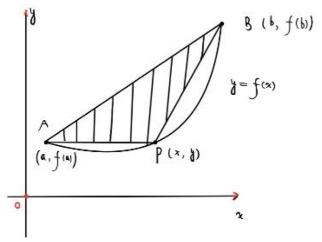
设$S(x)=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 1 & x & f(x)\end{vmatrix}$，则有：①$S(x)$在$[a,b]$上连续；②$S'(x)=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 0 & 1 & f'(x)\end{vmatrix},x\in(a,b)$；

② $S(a)=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 1 & a & f(a)\end{vmatrix}\overset{\text{两行相同}}{=}0,S(b)=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 1 & b & f(b)\end{vmatrix}\overset{\text{两行相同}}{=}0,$ 从而$S(a)=S(b)$。

由罗尔定理可得，存在$\xi\in(a,b)$，使得$S'(\xi)$=0，即$S'(\xi)=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\\ 0 & 1 & f'(\xi)\end{vmatrix}$=0，将$S'(\xi)$按第三行展开即得$f(b)-f(a)$=$f'(\xi)(b-a)$。



（a）



（b）

（2）$\forall x\in(0,\delta)$，$f(x)$在$[0,x]$上连续，$(0,x)$上可导，由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(0,x)$使得，$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$。当$x\to0^+$时，$\zeta\to0^+$，所以

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(\xi)(x-0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}f'(\xi)=\lim_{\xi\to0^+}f'(\xi),$$

又因为$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，所以$f_+'(0)=\lim\limits_{\xi\to0^+}f'(\xi)=A$，从而$f_+'(0)$存在，且$f_+'(0)=A$。

【注】①在本题中，我们对每一种方法都给出了分析过程，同学们可以看到，这些辅助函数不是从天而降的，更不需要死记硬背，其根源都是罗尔定理！当然，在考试的时候同学们不需要写上述分析过程，但精髓却在分析过程中。

②罗尔定理的三个条件(i) $f(x)$在$[a,b]$上连续；(ii) $f(x)$在(a,b)内可导；(iii) $f(a)=f(b)$中，前面两个条件一般容易满足，关键在于第三个条件$f(a)=f(b)$。我们往往将罗尔定理简写为$f(a)=f(b)\Rightarrow f'(\xi)=0$或$f'(\xi)=0\Leftarrow f(a)=f(b)$。

③ 设函数$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$可导，则有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \end{vmatrix}。$$

④ 第（II）问中的结论可以用来求左右导数，用(II)中的完全一样的方法可得：

(i)若$f(x)$在$x=x_0$处右连续且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$，则$f_+'(x_0)$存在，且$f_+'(x_0)=A$；

(ii) 若$f(x)$在$x=x_0$处左连续且$\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=A$，则$f_-'(x_0)$存在，且$f_-'(x_0)=A$。

例如，$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0, \\ -x+\pi\cos x+\sin x, & 0\le x<\pi。\end{cases}$ 则 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}, & -\pi<x<0, \\ -1-\pi\sin x+\cos x, & 0<x<\pi。\end{cases}$

由于$f(x)$在$x=0$处连续且

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}=0,\ \lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(-1-\pi\sin x+\cos x)=0,\text{ 故 } f_+'(0)=0,\ f_-'(0)=0。$$

这样就不需要用定义单独计算$f_\pm'(0)=\lim\limits_{x\to 0^\pm}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$。

(B 组)提升题

1.【考点定位】积分中值定理；罗尔定理；辅助函数的构造。

要证明 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$ 成立，即方程 $f'(x)=(1-x^{-1})f(x)$ 存在实根。考察根的存在性且所证的结论中含有 $f'(x)$，因此首先要考虑罗尔定理，下面要根据 $f'(x)=(1-x^{-1})f(x)$ 寻找辅助函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=0$ 为上述方程，而要构造 $F(x)$，同学们只需掌握两种方法即可：①不定积分法；②解微分方程法。下面将采用上述两种方法构造 $F(x)$。

方法一：由 $f'(x)=(1-x^{-1})f(x)$ 知 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$，可得 $\left[\ln f(x)\right]'=\left[x-\ln x\right]'$，从而 $\left[\ln f(x)-x+\ln x\right]'=0$，整理得 $\left[\ln f(x)\cdot \mathrm{e}^{-x}\cdot x\right]'=0$，从而取 $F(x)=x\mathrm{e}^{-x}f(x)$。

方法二：令 $y=f(x)$ 则 $y'=(1-\dfrac{1}{x})\cdot y$，分离变量 $\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y=(1-\dfrac{1}{x})\mathrm{d}x$，两端积分得 $\int\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y=\int(1-\dfrac{1}{x})\mathrm{d}x$，故 $\ln|y|=x-\ln|x|+C_1$，从而 $x\mathrm{e}^{-x}f(x)=C$，从而取 $F(x)=x\mathrm{e}^{-x}f(x)$。

【证明】令 $F(x)=x\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则有：

① $F(x)=x\mathrm{e}^{-x}f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续；

② $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)-x\mathrm{e}^{-x}f(x)+x\mathrm{e}^{-x}f'(x)=x\mathrm{e}^{-x}\left[f'(x)-\left(1-x^{-1}\right)f(x)\right],x\in(0,1)$；

下面我们在 $[0,1]$ 上找两点，使得 $F(x)$ 在这两点处的值相等。

由于 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}\cdot f(x)\mathrm{d}x$，故由积分中值定理知，存在 $\eta\in[0,\dfrac{1}{k}]$，使得，

$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=k\cdot\dfrac{1}{k}\cdot\eta\mathrm{e}^{1-\eta}f(\eta)=\mathrm{e}^1\left[\eta\mathrm{e}^{-\eta}f(\eta)\right]$，从而 $\mathrm{e}^{-1}f(1)=\eta\mathrm{e}^{-\eta}f(\eta)$，于是得到：

③ $F(1)=F(\eta)$ 。

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\xi\mathrm{e}^{-\xi}\left[f'(\xi)-\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)\right]=0$，

由于 $\xi\mathrm{e}^{-\xi}\neq 0$，所以 $f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$。

2.【考点定位】泰勒公式；定积分的性质；连续函数的介值性。

(I)【解】 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$，其中 ξ 介于 0 与 x 之间。

(II)【证明】这里采用两种方法证明。

方法一：$\boxed{\begin{array}{l}\text{分析 } a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f''(\eta)=\dfrac{3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x}{a^3} \Leftrightarrow m\le \dfrac{3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x}{a^3}\le M,\\ \text{这里 } m=\min\limits_{x\in[-a,a]} f''(x), M=\max\limits_{x\in[-a,a]} f''(x)\text{。}\end{array}}$

设 $m=\min\limits_{x\in[-a,a]} f''(x), M=\max\limits_{x\in[-a,a]} f''(x)$。由（I）$f(x)=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$ 可知，

$$f'(0)x+\frac{m}{2!}x^2\le f(x)=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\le f'(0)x+\frac{M}{2!}x^2,\text{从而}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x\le\int_{-a}^{a}\left(f'(0)x+\frac{M}{2!}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{M}{3}a^3,\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x\ge\int_{-a}^{a}\left(f'(0)x+\frac{m}{2!}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{m}{3}a^3\text{。}$$

所以 $m\le\dfrac{3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x}{a^3}\le M$，由连续函数的介值性可知，存在 $\eta\in[-a,a]$ 使得，

$f''(\eta)=\dfrac{3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x}{a^3}$，即 $f''(\eta)a^3=3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x$。

方法二：令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0,F'(x)=f(x)$。由于 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有二阶连续导数，所以 $F(x)$ 在 $[-a,a]$ 上三阶可导。由带拉格朗日余项的麦克劳林公式得，存在 ξ 介于 0 与 x 之间，使得：

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}x^3=f(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f''(\xi)}{3!}x^3=\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f''(\xi)}{3!}x^3,$$

所以 $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-F(-a)=-\left[\dfrac{f'(0)}{2}(-a)^2+\dfrac{f''(\xi_1)}{3!}(-a)^3\right]=-\dfrac{f'(0)}{2}a^2+\dfrac{f''(\xi_1)}{3!}a^3$，

其中 $\xi_1\in(-a,0)$；

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=F(a)=\frac{f'(0)}{2}a^2+\frac{f''(\xi_2)}{3!}a^3\text{，其中 }\xi_2\in(0,a)\text{。}$$

故 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(-a)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{3!}\cdot a^3$,

又由于 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有最小值 m，最大值 M，

因此，$m\le f''(\xi_1)\le M$，$m\le f''(\xi_2)\le M$，从而 $m\le\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\le M$。由连续函数的介值性可知，存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}f''(\eta)\cdot a^3$，故

$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

3. .【考点定位】拉格朗日中值定理；函数的单调性。

【证明】先证明$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$。

方法一：设$f(x)=\ln x$，又$0<a<b$，则$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，由拉格朗日中值定理知，$\exists\xi\in(a,b)$使$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$。

由$a<\xi<b$知，$\frac{1}{b}<f'(\xi)=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$且$\frac{1}{b}=\frac{2a}{2ab}>\frac{2a}{a^2+b^2}$，因此$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}>\frac{2a}{a^2+b^2}$。

方法二：

分析：$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\Leftrightarrow\frac{2a\left(b-a\right)}{a^2+b^2}<\ln b-\ln a\Leftrightarrow\frac{2a\left(x-a\right)}{a^2+x^2}-\left(\ln x-\ln a\right)<0,\left(x>a\right)$

设$g\left(x\right)=\frac{2a\left(x-a\right)}{a^2+x^2}-\left(\ln x-\ln a\right)$，则

$$g'\left(x\right)=\frac{2a\left(a^2+x^2\right)-2a\left(x-a\right)\cdot 2x}{\left(a^2+x^2\right)^2}-\frac{1}{x}=\frac{\left(a^2-x^2\right)\left(x^2-a^2+2ax\right)}{x\left(a^2+x^2\right)^2}<0,x\in\left(a,+\infty\right)$$

故$g\left(x\right)$在$\left[a,+\infty\right)$上单调减小，从而当$0<a<b$时，$g\left(b\right)<g\left(a\right)=0$，故

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}。$$

再证明$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$。

分析

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}},\left(b>a\right)\Leftrightarrow\ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}},\left(x>a\right)$$

$$\Leftrightarrow\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}<0,\left(x>a\right)$$

令$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}$，则$\varphi(a)=0$，又因为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{ax}-(x-a)\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}}{ax}=\frac{1}{x}-\frac{2\sqrt{ax}-(x-a)\sqrt{a}}{2ax\sqrt{x}}=\frac{1}{x}-\frac{x+a}{2x\sqrt{ax}}$$

$$=\frac{2\sqrt{ax}-x-a}{2x\sqrt{ax}}=-\frac{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{ax}+(\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,x\in\left(a,+\infty\right),$$

故$\varphi(x)$在$\left[a,+\infty\right)$单调递减，因此当$b>a>0$时

$$\varphi(b)=\ln b-\ln a-\frac{b-a}{\sqrt{ab}}<\varphi(a)=0,$$

整理得 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$。

综上所述：当$0<a<b$时，$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$。

【注】这里向同学们提供另一种方法:

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow\frac{2a(b-a)}{a^2+b^2}<\ln b-\ln a<\frac{(b-a)}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow\frac{2\left(\frac{b}{a}-1\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}<\ln\frac{b}{a}<\frac{\frac{b}{a}-1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(x-1)}{1+x^2}<\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}},(x>1)$$

先证明$\ln x<\dfrac{x-1}{\sqrt{x}},(x>1)$。令$f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$,则

$$f(1)=0,\ f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}\left(x-2\sqrt{x}+1\right)=\frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x^{\frac{3}{2}}}<0,$$

从而，$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减，所以当$x>1$时，$f(x)<f(1)=0$。即得

$\ln x<\dfrac{x-1}{\sqrt{x}},(x>1)$。类似可证$\dfrac{2(x-1)}{1+x^2}<\ln x,(x>1)$,留给同学们完成。

4.【考点定位】函数的高阶导数；麦克劳林公式。（换地方！！）

【答案】$\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$

【解】方法一：由$y=2^x=\mathrm{e}^{x\ln 2}$得

$$y'=\mathrm{e}^{x\ln 2}\cdot\ln 2,\quad y''=\mathrm{e}^{x\ln 2}\cdot\ln^2 2,\quad \cdots,\quad y^{(n)}=\mathrm{e}^{x\ln 2}\cdot(\ln 2)^n=2^x(\ln 2)^n,$$

故x^n的系数为 $\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$。

方法二：由$2^x=\mathrm{e}^{x\ln 2}$，令$t=x\ln 2$，

$$2^x=\mathrm{e}^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+o(t^n)=1+x\cdot\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^n+o(x^n),$$

故 x^n 的系数为 $\dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$。

5.【考点定位】连续函数的介值性；罗尔定理。

【证明】由于 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上必取得最小值 m，最大值 M。即 $\forall x\in[0,2]$ 有 $m\le f(x)\le M$，故 $m\le f(0)\le M, m\le f(1)\le M, m\le f(2)\le M$，从而 $3m\le f(0)+f(1)+f(2)=3\le 3M$，即 $m\le \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\le M$。

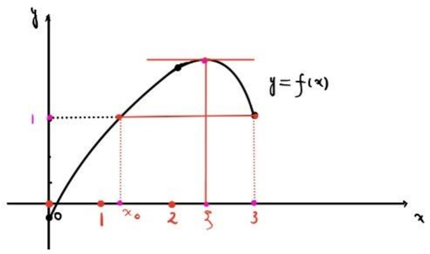
由介值定理得 $\exists x_0\in[0,2]$ 使得 $f(x_0)=1$。因此 $f(x)$ 满足：

① $f(x)$ 在 $[x_0,3]$ 上连续；② $f(x)$ 在 $(x_0,3)$ 内可导；③ $f(x_0)=f(3)$。

由罗尔定理知，$\exists \xi\in(x_0,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

【注】①本题在利用介值定理找点 x_0 时，只能在 $[0,2]$ 上利用介值定理，若在 $[0,3]$ 上利用界值定理，x_0 有可能与 3 重合。

②为了方便同学们理解上述证明过程，我们画出示意图：



6.【考点定位】函数的单调性；拉格朗日中值定理。（题目有错误！）

【证明】方法一：

分析：
$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)\Leftrightarrow \ln^2 b-\dfrac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}a,\left(e<a<b<e^2\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln^2 x-\dfrac{4}{e^2}x$ 在区间 $\left[e,e^2\right]$ 上单调递增。

设 $f(x)=\ln^2 x-\dfrac{4}{e^2}x$，则 $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{4}{e^2}, f'\left(e^2\right)=0$，$f''(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$，

由 $f''(x)<0$，$(x>e)$ 可知 $f'(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $e<x<e^2$ 时，

$$f'(x)>f'(e^2)=0,$$

从而 $f(x)$ 在 $\left(e,e^2\right)$ 上单调递增。所以当 $e<a<b<e^2$ 时，$f(b)>f(a)$，即

$$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a,\text{故 } \ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)。$$

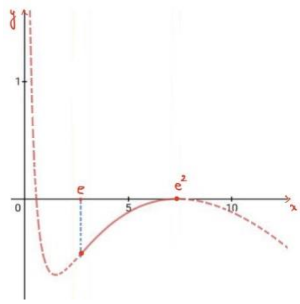
方法二：令 $f(x)=\ln^2 x$，由拉格朗日中值定理可知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),$$

再令 $g(t)=\frac{\ln t}{t}$，$t\in\left[e,e^2\right]$，因为 $g'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，$t\in\left[e,e^2\right]$，由 $g'(t)<0$，$(t>e)$ 可知 $g(t)$ 在 $\left[e,e^2\right]$ 上单调递减。所以 $g(\xi)>g(e^2)$，即 $\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}$，所以

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)>\frac{4}{e^2}(b-a)。$$

【注】为了方便同学们理解，我们画出方法一中 $f(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$，$x\in\left[e,e^2\right]$ 的图像：



7.【考点定位】函数的单调性。

分析：

$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a,\left(0<a<b<\pi\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=x\sin x+2\cos x+\pi x$

在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上单调增加。

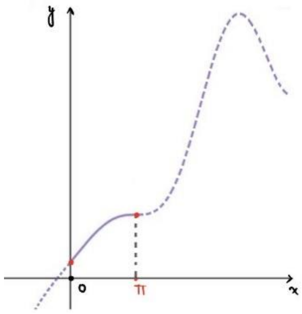
【证明】令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$，$x\in\left[0,\pi\right]$，则 $f'(x)=x\cos x-\sin x+\pi,\ f'\left(\pi\right)=0$，

$f''(x)=-x\sin x$，由 $f''(x)<0$，$x\in\left(0,\pi\right)$ 可知，$f'(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上单调递减，所以

$f'(x)>f'(\pi)=0$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上单调递增，所以当 $0<a<b<\pi$ 时，$f(b)>f(a)$，故

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a。$$

【注】为了方便同学们理解，我们画出 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$，$x\in[0,\pi]$ 的图像：



8.【考点定位】拉格朗日中值定理；连续函数的介值性；罗尔定理。

【证明】 (I) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0$，$F(2)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，$F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导。由拉格朗日中值定理可知，存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $F(2)-F(0)=F'(\eta)(2-0)=2f(\eta)$，

所以 $2f(0)=\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=f(\eta)\cdot\left(2-0\right)$，故存在 $\eta\in\left(0,2\right)$ 使 $f\left(\eta\right)=f\left(0\right)$。

(II) 由于 $f(x)\in[2,3]$，所以 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上有最小值 m 和最大值 M，从而 $\forall x\in[2,3]$

$$m\le f(x)\le M,$$

于是 $m\le f(2)\le M$，$m\le f(3)\le M$，所以

$$2m\le f(2)+f(3)\le 2M,\text{故}\quad m\le\frac{f(2)+f(3)}{2}\le M。$$

由连续函数的介值性知，$\exists c\in[2,3]$，使 $f(c)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$，这样我们得到：

$$f(0)=f(\eta)=f(c)。$$

由罗尔定理知 $\exists\xi_1\in(0,\eta)$，$\exists\xi_2\in(\eta,c)$ 使得 $f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$。

对函数 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用罗尔定理得，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$ 使得 $f''(\xi)=0$。

【注】①关于积分中值定理，我们的结论如下：

$f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续 $\Rightarrow\exists\xi\in\left[a,b\right]$，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=f\left(\xi\right)\left(b-a\right)$。

这个结论来自于连续函数的介值性。利用拉格朗日中值定理，我们可以将结论加强为如下形式：

$f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续 $\Rightarrow\exists\xi\in\left(a,b\right)$，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=f\left(\xi\right)\left(b-a\right)$。

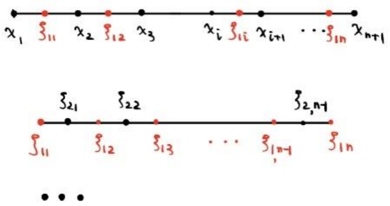
事实上，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上的一个原函数，则有：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=F\left(b\right)-F\left(a\right)=F'\left(\xi\right)\left(b-a\right)=f\left(\xi\right)\left(b-a\right)。$$

这个结论在使用时要给出上述推导过程。

②关于罗尔定理，有些情形下需要多次使用，比如：

设 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f\left(x_{n+1}\right),\left(x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}\right)$，且 $f(x)$ 有 n 阶导数，则由罗尔定理可知，存在 $\xi_{1i}\in\left(x_i,x_{i+1}\right),\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 使得 $f'(\xi_{11})=f'(\xi_{12})=\cdots=f'\left(\xi_{1n}\right)=0$；再对 $f'(x)$ 使用罗尔定理可知，存在 $\xi_{2i}\in\left(\xi_{1i},\xi_{1,i+1}\right),\left(i=1,2,\cdots,n-1\right)$，使得 $f''(\xi_{21})=f''(\xi_{22})=\cdots=f''\left(\xi_{2,n-1}\right)=0$；依此类推，最后可以得到：存在 ξ_{nn}，使得 $f^{(n)}(\xi_{nn})=0$。如图所示：



9.【考点定位】拉格朗日中值定理

【证明】

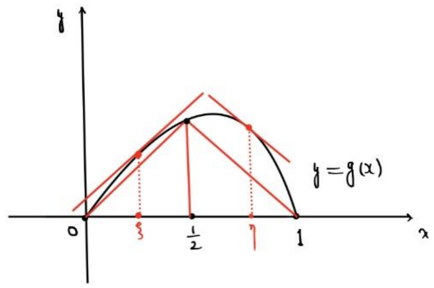
分析：$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2\Leftrightarrow f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'\bigg|_{x=\xi}+\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'\bigg|_{x=\eta}=0$$

取 $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，则有 $g'\left(\xi\right)+g'\left(\eta\right)=0$，因此，我们考虑对 $g(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 上分别使用拉格朗日中值定理。

令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，则 $g\left(0\right)=0,g\left(1\right)=f\left(1\right)-\frac{1}{3}=0$，如图，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $g'(\xi)=\dfrac{g\left(\frac{1}{2}\right)-g(0)}{\frac{1}{2}-0}=2g\left(\frac{1}{2}\right)$，　$g'(\eta)=\dfrac{g(1)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=-2g\left(\frac{1}{2}\right)$。

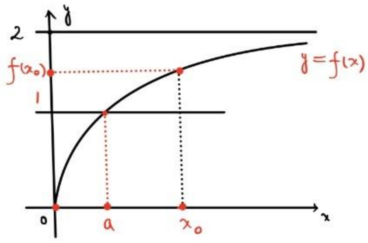
从而 $g'\left(\xi\right)+g'\left(\eta\right)=2g\left(\frac{1}{2}\right)-2g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，故　$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。



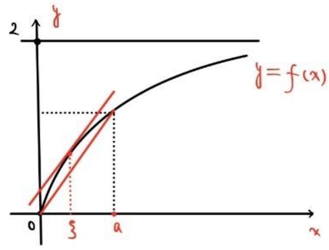
10.【考点定位】拉格朗日中值定理；闭区间连续函数的性质；函数极限的性质。

【证明】(I)因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$，所以 $\exists X>0$，当 $x>X$ 时，$|f(x)-2|<1$，即 $3>f(x)>1$。取 $x_0\in(X,+\infty)$，有 $f(x_0)>1$，又因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$。由介值性定理可知，$\exists a\in(0,x_0)$，使得 $f(a)=1$。(如图 a 所示)

(II)由拉格朗日中值定理可知，$\exists\xi\in(0,a)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(0)}{a}=\dfrac{1}{a}$。(如图 b 所示)



(a)



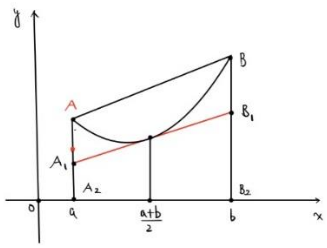
(b)

11.【考点定位】泰勒公式；函数的凸凹性；定积分的性质。(题目要换位置！！)

【答案】D

【解】我们先说明选项(D)正确。我们采用两种方法：

方法一：数形结合法



(a)

如图(a)，当 $f''(x)>0,x\in[a,b]$ 时，$y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为凹函数，$x=\dfrac{a+b}{2}$ 所对应的点处的切线位于曲线 $y=f(x)$ 的下方，线段 AB 在曲线 $y=f(x)$ 的上方，从而

$$S_{梯形A_1A_2B_2B_1}<S_{曲边梯形AA_2B_2B}<S_{梯形AA_2B_2B},$$

所以
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)。$$

由于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)(1-0)<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0<\dfrac{f(0)+f(1)}{2}(1-0)$，从而

$$f\left(\frac{1}{2}\right)<0<\frac{f(0)+f(1)}{2},$$

因此选项(D)正确。

方法二：泰勒公式法：

将 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处展开得 $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，又 $f''(x)>0$，故 $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$。

再由 $0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>\int_0^1\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\Bigg|_0^1=f\left(\frac{1}{2}\right)$，

从而 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$，故选项(D)正确。

对于选项(B)：如图(b)，当 $f''(x)<0,x\in[a,b]$ 时，$y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为凸函数，$x=\frac{a+b}{2}$ 所对应的点处的切线位于曲线 $y=f(x)$ 的上方，线段 AB 在曲线 $y=f(x)$ 的下方，从而

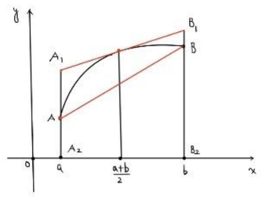
$$S_{梯形A_1A_2B_2B_1}>S_{曲边梯形AA_2B_2B}>S_{梯形AA_2B_2B},$$

所以
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)>\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)。$$

由于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)(1-0)>\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0>\frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0)$，从而

$$f\left(\frac{1}{2}\right)>0>\frac{f(0)+f(1)}{2},$$

因此选项(B)错误。



(b)

对于选项(A)和(C)，当 $f'(x)<0$ 或者 $f'(x)>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调减小或者单调增加，其凸凹性无法确定，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的可以为正，可以为负，也可以为零。

例如，取 $f(x)=-2x+1$，则 $f'(x)=-2<0$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(-2x+1)\mathrm{d}x=(-x^2+x)\big|_0^1=0$，但 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$；取 $f(x)=2x-1$，则 $f'(x)=2>0$，且 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(2x-1)dx=(x^2-x)\big|_0^1=0$，但 $f(\frac{1}{2})=0$，故(A)，(C)都错误。综上所述，答案选(D)。

【注】通过对选项(D)的分析，我们还可以得到：$f(0)+f(1)>0$。

12.【考点定位】零点定理；柯西中值定理；罗尔定理。

【解】（1）方法一：

分析：注意 $f(1)=0$， $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ 。

$$f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2} \Leftrightarrow f(\xi)=(2-\xi)f'(\xi) \Leftrightarrow f(\xi)+(\xi-2)f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \left[\left(x-2\right)f\left(x\right)\right]'\Big|_{x=\xi}=0,$$

取 $g(x)=(x-2)f(x)$，则有 $g'(\xi)=0$。只需证明 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上满足罗尔定理条件即可。

令 $g\left(x\right)=\left(x-2\right)f\left(x\right)$，则由 $f\left(1\right)=0$， $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x^2}$ 可得，

① $g'\left(x\right)=f\left(x\right)+\left(x-2\right)f'\left(x\right)=f\left(x\right)+\left(x-2\right)\mathrm{e}^{x^2}$， $x\in\left[1,2\right]$；

② $g\left(1\right)=\left(1-2\right)f\left(1\right)=0$， $g\left(2\right)=\left(2-2\right)f\left(2\right)=0$ 。

由罗尔定理可得，存在 $\xi\in\left(1,2\right)$，使得 $g'(\xi)=0$，即得 $f\left(\xi\right)=\left(2-\xi\right)\mathrm{e}^{\xi^2}$ 。

方法二：

> 分析： $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2} \Leftrightarrow f(\xi)-(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}=0 \Leftrightarrow [f(x)-(2-x)\mathrm{e}^{x^2}]\big|_{x=\xi}=0$，只需说明
>
> $h(x)=f(x)-(2-x)\mathrm{e}^{x^2}$ 在 $x=1,2$ 处异号即可。

令 $h(x)=f(x)-(2-x)\mathrm{e}^{x^2}$，则有

① $h(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续；

② $h(1)=f(1)-(2-1)\mathrm{e}=-\mathrm{e}<0$， $h(2)=f(2)=\int_1^2 \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t>0$

由零点定理可知，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $h(\xi)=0$，从而 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$

（2）方法一：

> 分析： $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot\mathrm{e}^{\eta^2} \Leftrightarrow \dfrac{f(2)}{\ln 2}=\dfrac{\mathrm{e}^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}=\dfrac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}}=\dfrac{f'(\eta)}{(\ln x)'\big|_{x=\eta}}$ 。

设 $g(x)=\ln x$，由柯西中值定理知，存在 $\eta\in(1,2)$ 使得 $\dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\dfrac{\mathrm{e}^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}=\eta\mathrm{e}^{\eta^2}$，所以 $\dfrac{f(2)}{\ln 2}=\eta\mathrm{e}^{\eta^2}$，即得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot\mathrm{e}^{\eta^2}$ 。

方法二：

> 分析： $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot\mathrm{e}^{\eta^2} \Leftrightarrow f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot f'(\eta) \Leftrightarrow f(2)\cdot\dfrac{1}{\eta}-\ln 2\cdot f'(\eta)=0$
>
> $\Leftrightarrow [f(2)\ln x-\ln 2\cdot f(x)]'\big|_{x=\eta}=0$ 。
>
> 只需说明 $F(x)=f(2)\ln x-\ln 2\cdot f(x)$ 满足罗尔定理的条件。

令 $F(x)=f(2)\ln x-\ln 2\cdot f(x)$，则 $F(x)$ 满足：

① $F'(x)=f(2)\dfrac{1}{x}-\ln 2\cdot f'(x)=f(2)\dfrac{1}{x}-\ln 2\cdot \mathrm{e}^{x^2}$， $x\in[1,2]$；

② $F(1)=f(2)\ln 1-\ln 2\cdot f(1)=0$， $F(2)=f(2)\ln 2-\ln 2 f(2)=0$ 。

由罗尔定理可知，存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $F'(\eta)=0$，即 $f(2)\cdot\dfrac{1}{\eta}-\ln 2\cdot \mathrm{e}^{\eta^2}=0$，故 $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot \mathrm{e}^{\eta^2}$ 。

（C 组）拔高题

1.【考点定位】柯西中值定理；分部积分法；变限积分求导；罗尔定理。

【证明】

分析 ：由罗尔定理知，要证 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，只需要证明 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$ 在三个点的值相等

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,(0\le x\le \pi)$，则 $F(0)=0,F'(x)=f(x)$,

因为 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$，所以 $F(\pi)=F(0)=0$。又因为 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，所以

$$0=\int_0^{\pi}\cos x\cdot F'(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}F(x)\left(=F(x)\cdot\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x,$$

由拉格朗日中值定理可知，$\exists\eta\in(0,\pi)$ 使得 $\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x=\left(F(\eta)\sin\eta\right)\cdot\left(\pi-0\right)=0$，即得 $F(\eta)\sin\eta=0$，由于 $\sin\eta\neq 0$，所以 $F(\eta)=0$。这样就得到 $F(0)=F(\eta)=F(\pi)=0$，由罗尔定理知：$\exists\xi_1\in(0,\eta)$ 使得 $F'(\xi_1)=f(\xi_1)=0$，$\exists\xi_2\in(\eta,\pi)$ 使得 $F'(\xi_2)=f(\xi_2)=0$,

故在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$ 。

2.【考点定位】拉格朗日中值定理；罗尔定理；泰勒公式;可导与可微的的关系。

【证明】(I)对于$(-1,1)$内的任一$x\neq 0$，由拉格朗日中值定理可知存在$\theta(x)\in(0,1)$，使得$f(x)-f(0)=f'\left(\theta(x)\cdot x\right)\cdot x$，即$f\left(x\right)=f\left(0\right)+x\cdot f'\left(\theta(x)\cdot x\right)$，假设$\theta_1(x)\neq\theta(x)$且$\theta_1(x)\in(0,1)$，使得$f(x)=f(0)+x\cdot f'\left(\theta_1(x)\cdot x\right)$，则

$$f'\left(\theta_1(x)\cdot x\right)=f'\left(\theta(x)\cdot x\right)=\frac{f(x)-f(0)}{x},$$

于是，由罗尔定理可知，存在ξ介于点$\theta(x)\cdot x$与$\theta_1(x)\cdot x$之间，使得$f''(\xi)=0$，这与$f''(x)\neq 0$，$x\in(-1,1)$相矛盾，所以仅有唯一的$\theta(x)\in(0,1)$，使得$f(x)=f(0)+x\cdot f'\left(\theta(x)\cdot x\right)$。

(II)这里采用三种方法证明：

方法一：由(I)知$f(x)=f(0)+x\cdot f'\left(\theta(x)\cdot x\right),x\in\left(-1,1\right)$且$x\neq 0$，

从而$f'\left(\theta(x)\cdot x\right)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，所以

$$f''\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(\theta(x)\cdot x\right)-f'\left(0\right)}{\theta(x)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'\left(0\right)}{\theta(x)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}\cdot\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)-f'\left(0\right)x}{x^2},$$

由于$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)-f'\left(0\right)x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(x\right)-f'\left(0\right)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f''\left(x\right)}{2}=\frac{f''\left(0\right)}{2}$，所以

$f''\left(0\right)=\dfrac{1}{2}f''\left(0\right)\cdot\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}$。又因为$f''\left(0\right)\neq 0$，所以$\dfrac{1}{2}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}=1$，故$\displaystyle\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$。

方法二：

将函数$f(x)$在$x=0$处展开到二阶可得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),$$

由于
$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+x\cdot f'\left(\theta(x)\cdot x\right),$$

所以 $f\left(0\right)+x\cdot f'\left(\theta(x)\cdot x\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+\dfrac{1}{2}f''\left(0\right)x^2+o\left(x^2\right)$，从而

$$\left[f'\left(\theta(x)\cdot x\right)-f'\left(0\right)\right]x=\frac{1}{2}f''\left(0\right)x^2+o\left(x^2\right),$$

两边同除x^2再取极限得，

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}f''\left(0\right)+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(\theta(x)\cdot x\right)-f'\left(0\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'\left(\theta(x)\cdot x\right)-f'\left(0\right)}{\theta(x)x}\cdot\theta(x)=f''\left(0\right)\lim_{x\to 0}\theta(x),$$

所以$\dfrac{1}{2}f''\left(0\right)=f''\left(0\right)\cdot\displaystyle\lim_{x\to 0}\theta(x)$，又由于$f''\left(0\right)\neq 0$，故$\displaystyle\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$。

方法三：将函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开到二阶可得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)\text{，} \quad ①$$

由于

$$f(x)=f(0)+x\cdot f'\left(\theta(x)\cdot x\right)\text{，} \quad ②$$

$$f'\left(\theta(x)\cdot x\right)=f'(0)+f''(0)\theta(x)\cdot x+o(x) \quad ③$$

将③代入②得，

$$f(x)=f(0)+x\cdot\left[f'(0)+f''(0)\theta(x)x+o(x)\right]=f(0)+f'(0)x+f''(0)\theta(x)x^2+o\left(x^2\right) ④$$

对比①与④可得

$$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\theta(x)x^2+o\left(x^2\right)\text{，所以}$$

$$\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=f''(0)\theta(x)x^2+o\left(x^2\right)\text{，}$$

又由于 $f''(0)\neq 0$ ，从而 $\theta(x)=\dfrac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o\left(x^2\right)}{f''(0)x^2}$，故

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o\left(x^2\right)}{f''(0)x^2}=\frac{1}{2}\text{。}$$

3.【考点定位】定积分的不等式性质；闭区间连续函数的性质。

【证明】

分析 由于 $g(x)>0$，故

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\Leftrightarrow m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\le M$$

$$\Leftrightarrow\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x\Leftarrow mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x),$$

这里，$m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x),M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$。

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最小值 m，最大值 M，从而

$$m\le f(x)\le M,x\in\left[a,b\right]\text{。}$$

又因为 $g(x)>0$，所以 $m\cdot g(x)\le f(x)\cdot g(x)\le M\cdot g(x)$，所以

$$\int_a^b m\cdot g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b M\cdot g(x)\mathrm{d}x\text{，}$$

即

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\text{，}$$

又由于$\int_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x>0,$　　　所以 $m\le\dfrac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\le M$ 。

由介值定理知，存在$\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$，即

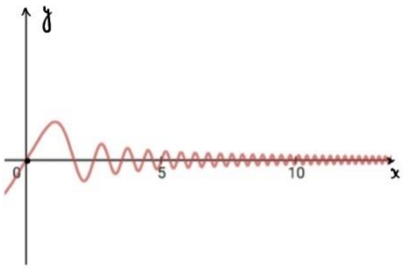
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x。$$

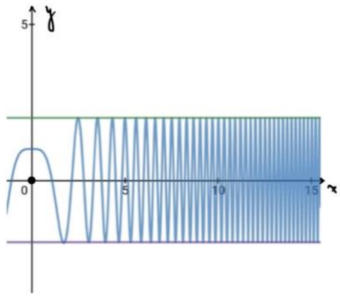
4.【考点定位】 函数极限的性质；拉格朗日中值定理。

【答案】 B

【解】对于选项(A)，如果 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$，这时 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在，所以(A)不正确。如下图





$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$　　　　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$

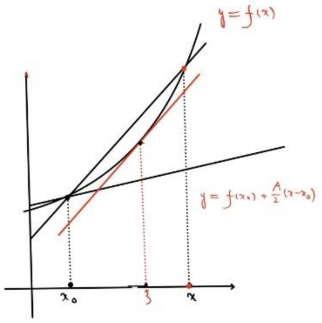
对于选项(B)，当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$存在时，如果$A\neq0$，不妨设$A>0$，则$\forall\boldsymbol{\varepsilon}>0,$

$\exists x_0>0$，当$x>x_0$时$\left|f'(x)-A\right|<\boldsymbol{\varepsilon}$，取$\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{A}{2}$，则$x>x_0$时，$f'(x)>\dfrac{A}{2}$。

由拉格朗日中值定理可知，$\exists\boldsymbol{\xi}\in(x_0,x)$使得$f(x)-f(x_0)=f'(\boldsymbol{\xi})(x-x_0)>\dfrac{A}{2}(x-x_0),$即

$f(x)>f(x_0)+\dfrac{A}{2}(x-x_0),(x\to+\infty)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，这与$y=f(x)$有界是矛盾的，

所以必有$A=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，故选项(B)正确。如图所示：



对于选项(C)(D),如果 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$，这时 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ 但 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1\neq 0$，所以(C) (D)都不正确。综上所述，答案选(B)。

5.【考点定位】函数的单调性；柯西中值定理；拉格朗日中值定理。

【证明】(1)由于 $f'(x)>0$，$\forall x\in(a,b)$ 有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增。又由于 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，故 $\lim\limits_{x\to a^+} f(2x-a)=0$。又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $\lim\limits_{x\to a^+} f(2x-a)=f(a)$，所以 $f(a)=0$，从而 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f(x)>f(a)=0$。

(2)令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$\varphi(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，又由于 $f(x)>0$

故 $F'(x)=f(x)\neq 0$，由柯西中值定理知，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{F'(\xi)},\text{即得}\ \frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}。$$

(3) 分析:

$$f'(\eta)\left(b^2-a^2\right)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$$

$$\overset{\text{由(2)}}{\Leftrightarrow}\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}=\frac{2\xi}{f(\xi)}\Leftarrow f'(\eta)=\frac{f(\xi)}{\xi-a}\overset{f(a)=0}{\Leftrightarrow} f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}。$$

由于 $f(a)=0$，$f(x)$ 在 $[a,\xi]$ 上连续，在 (a,ξ) 内可导，故由拉格朗日中值定理知

$\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $\quad f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=\dfrac{f(\xi)}{\xi-a}$，所以 $f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$。

从而由(2)知 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}=\dfrac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$，故 $f'(\eta)\left(b^2-a^2\right)=\dfrac{2\xi}{(\xi-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

其中 $\eta\in(a,\xi)$ 与 ξ 相异。

6.【考点定位】变限积分求导；分部积分法；定积分的性质；

【证明】$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$,

则 $F(a)=G(a)=0, F'(x)=f(x), G'(x)=g(x)$，由题设可得，

$$\begin{aligned}&\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b] \Leftrightarrow F(x)\geq G(x),\\&\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow F(b)=G(b)\end{aligned}$$ 。由于

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\mathrm{d}F(x) = \left[xF(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x = bF(b) - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\mathrm{d}G(x) = \left[xG(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b G(x)\mathrm{d}x = bG(b) - \int_a^b G(x)\mathrm{d}x,$$

所以 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x - \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b F(x)\mathrm{d}x + \int_a^b G(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\mathrm{G}(x) - F(x)\right)\mathrm{d}x \leq 0$

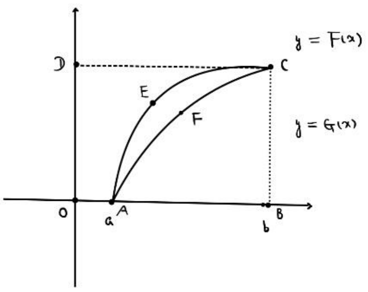
故 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$ 。

【注】本题中的结果 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b xF'(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b xG'(x)\mathrm{d}x$ 具有明确的几何意义，为了拓展同学们的视野，我们做如下说明：如图

$$\int_a^b xF'(x)\mathrm{d}x = bF(b) - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x = S\left(\text{曲边梯形}OAECD\right)$$

$$\int_a^b xG'(x)\mathrm{d}x = bG(b) - \int_a^b G(x)\mathrm{d}x = S\left(\text{曲边梯形}OAFCD\right)$$

显然有：$S\left(\text{曲边梯形}OAECD\right) \leq S\left(\text{曲边梯形}OAFCD\right)$，即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$



7.【考点定位】函数的单调性；定积分的分部积分法。

【证明】方法一：

分析：$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geq f(a)g(1)$

$$\Leftrightarrow \int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x - f(a)g(1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow G(a) = \int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x - f(a)g(1) \geq 0。$$

令 $G(u) = \int_0^u g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x - f(u)g(1)$，则

$$G(1)=\int_0^1 g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(1)g(1)$$

$$=\int_0^1\left[g(x)f'(x)+f(x)g'(x)\right]\mathrm{d}x-f(1)g(1)=\left[f(x)g(x)\right]\Big|_0^1-f(1)g(1)=0。$$

$$G'(u)=g(u)f'(u)-f'(u)g(1)=f'(u)[g(u)-g(1)],$$

由于 $g'(x)\geq 0$，所以当 $u\in[0,1]$ 时，$g(u)-g(1)\leq 0$。又由于 $f'(x)\geq 0$，所以 $G'(u)\leq 0$，从而 $G(u)$ 在 $[0,1]$ 上单减。又由于故当 $a\in[0,1]$ 时，$G(a)\geq G(1)=0$，即得

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geq f(a)g(1)。$$

方法二：由于 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(a)g(a)-\int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x$，

所以 $$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(a)g(a)+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x。$$

从而原命题等价于证明

$$f(a)g(a)+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geq f(a)g(1),$$

即证 $$\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geq f(a)[g(1)-g(a)]。$$

由于 $\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(a)[g(1)-g(a)]=\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-\int_a^1 f(a)g'(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_a^1\left[f(x)-f(a)\right]g'(x)\mathrm{d}x,$$

又由于 $f'(x)\geq 0$，$g'(x)\geq 0$，所以当 $x\in[a,1]$ 时，$f(x)-f(a)\geq 0$，从而

$$[f(x)-f(a)]\cdot g'(x)\geq 0, x\in[a,1],$$

故 $\int_a^1\left[f(x)-f(a)\right]g'(x)\mathrm{d}x\geq 0$，所以 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geq f(a)g(1)$。

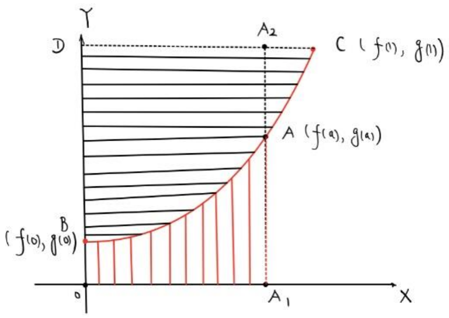
【注】此题中的不等式有明确的命题背景与几何含义：如图，设参数方程 $\begin{cases}X=f(x)\\Y=g(x)\end{cases}, x\in[0,1]$ 表示的曲线为弧 BAC，其中 $B\left(f(0),g(0)\right),A\left(f(a),g(a)\right),C\left(f(1),g(1)\right)$。由 $f'(x)\geq 0, g'(x)\geq 0$ 知 X,Y 都关于参数 x 单调增加。曲边梯形 BOA_1A 的面积为：

$$S_{曲边梯形BOA_1A}=\int_0^a g(x)\mathrm{d}f(x)=\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x;$$

曲边三角形 BCD 的面积为：$S_{曲边三角形BCD}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x;$

很明显 $S_{曲边梯形BOA_1A}+S_{曲边三角形BCD}\geq S_{矩形DOA_1A_2}$，即

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geq f(a)g(1)\text{。}$$



8.【考点定位】函数有界的概念；拉格朗日中值定理。（换地方！！！）

【答案】C

【解】对于选项(A)，取 $f(x)=\frac{1}{x}$ 则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 内连续，但 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，故(A)错误。

对于选项(B)，取 $f(x)=\frac{1}{x}$ 则 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内连续，但 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 内无界，故(B)错误。

对于选项(C)，由于 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，所以 $\exists M>0$ 使得 $|f'(x)|\leq M$ 。取定 $x_0\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理知，

$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$，即 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$，其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间，从而

$$|f(x)|=|f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)|\leq|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|\leq|f(x_0)|+M(1-0)=|f(x_0)|+M$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界。

对于选项(D)，取 $f(x)=\sqrt{x}$ 则 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 内有界，但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界。

综上所述，答案选(C)。

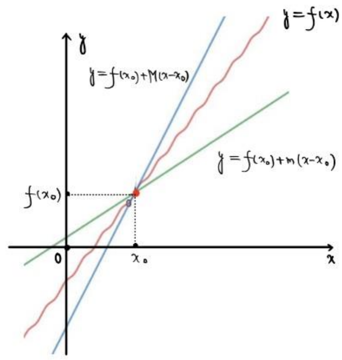
【注】这里我们将对选项(C)的分析过程作一些拓展：设 $m\leq f'(x)\leq M, x\in I$，取定 $x_0\in I$，则

$$\forall x\in I, f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\text{，}$$

当 $x\geq x_0$ 时 $m(x-x_0)\leq f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\leq M(x-x_0)$；

当 $x<x_0$ 时 $m(x-x_0)\geq f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\geq M(x-x_0)$；

从而(如图)曲线 $y=f(x)$ 介于直线 $y=f(x_0)+m(x-x_0)$ 与直线 $y=f(x_0)+M(x-x_0)$ 之间。



9.【考点定位】零点定理；拉格朗日中值定理。

【证明】（I）分析：$f(\xi)=1-\xi \Leftrightarrow f(\xi)+\xi-1=0 \Leftrightarrow [f(x)+x-1]|_{x=\xi}=0$，其几何意义是曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=1-x$ 在 $(0,1)$ 内有交点，我们只需说明 $g(x)=f(x)+x-1$ 在 $[0,1]$ 上满足 $g(0),g(1)$ 异号即可。

令 $g(x)=f(x)+x-1$，则有：

① $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续；

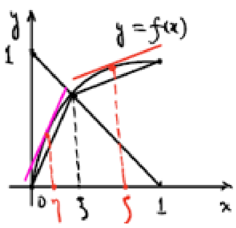
② $g(0)=f(0)+0-1<0, g(1)=f(1)+1-1>0$，由零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$（如图所示）

（II）由罗尔定理知，存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{f(\xi)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi},$$

存在 $\zeta\in(\xi,1)$，使得 $f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$，从而 $\eta,\zeta\in(0,1)$ 且 $\eta\neq\zeta$ 满足：

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1。$$



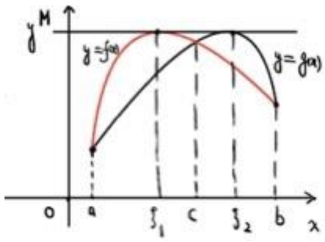
10.【考点定位】 零点定理；罗尔定理。

分析：$f''(\xi)=g''(\xi) \Leftrightarrow f''(\xi)-g''(\xi)=0 \Leftrightarrow [f(x)-g(x)]''|_{x=\xi}=0$，记 $F(x)=f(x)-g(x)$，则结论等价于 $F''(\xi)=0$，从而只需证明 $F(x)$ 在三个不同点处取值相等，而条件已告知我们 $F(a)=F(b)=0$，故只需再找一个点 $c\in(a,b)$ 满足 $F(c)=0$ 即可。

【证明】记 $F(x)=f(x)-g(x)$，由题设 $f(x)$， $g(x)$ 在 (a,b) 上存在相等的最大值，设最大值为 M。且不妨设 ξ_1， $\xi_2\in(a,b)$ 满足 $f(\xi_1)=M, f(\xi_2)=M$。（如图）讨论如下：

①若 $\xi_1=\xi_2$，则取 $c=\xi_1$，此时 $F(c)=f(c)-g(c)=0$；

②若 $\xi_1\neq\xi_2$， $F(\xi_1)=M-g(\xi_1)\geq 0, F(\xi_2)=f(\xi_2)-M\leq 0$，不妨设 $\xi_1<\xi_2$，则由零点定理，存在 $c\in[\xi_1,\xi_2]$ 使得 $F(c)=0$。总之，存在 $c\in(a,b)$ 使得 $F(a)=F(c)=F(b)=0$。由罗尔定理可知，存在 $\eta_1\in(a,c),\eta_2\in(c,b)$ 使得 $F'(\eta_1)=0,F'(\eta_2)=0,$ 再次应用罗尔定理可知，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$。



11.【考点定位】 闭区间连续函数的性质；拉格朗日中值定理。

【证明】（Ⅰ）因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值 m 和最大值 M，即 $m\leq f(x)\leq M, x\in[a,b]$，所以

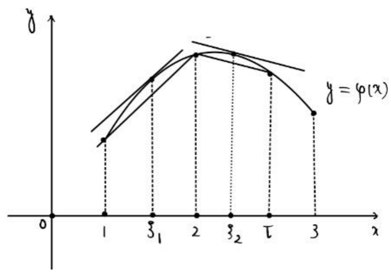
$$m\cdot(b-a)=\int_a^b m\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b M\mathrm{d}x=M\cdot(b-a),$$

从而 $m\leq\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\leq M$，由连续函数的介值性知，存在 $\eta\in[a,b]$ 使得 $f(\eta)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

即
$$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)。$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$\exists\tau\in[2,3]$ 使得 $\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\tau)$，由于 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x$，所以 $\exists\tau\in(2,3]$。如图，由拉格朗日中值定理可知：$\exists\xi_1\in(1,2)$ 使 $\varphi'(\xi_1)=\dfrac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}=\varphi(2)-\varphi(1)$，$\exists\xi_2\in(2,\tau)$ 使 $\varphi'(\xi_2)=\dfrac{\varphi(\tau)-\varphi(2)}{\tau-2}$。因为 $\varphi(2)>\varphi(1)$，所以 $\varphi'(\xi_1)=\varphi(2)-\varphi(1)>0$；因为 $\varphi(2)>\varphi(\tau)$，所以 $\varphi'(\xi_2)=\dfrac{\varphi(\tau)-\varphi(2)}{\tau-2}<0$，再由拉格朗日中值定理可知，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0。$$



12.【考点定位】函数的单调性；泰勒公式；泰勒级数。

【证明】方法一：令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$， $x\in(-1,1)$，

则由 $f(x)=x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$ 得

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x，\quad f(0)=0，$$

$$f''(x)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

$$=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\geq 4-1-1=2>0，\quad x\in(-1,1)，$$

故 $f'(x)$ 在 $x\in(-1,1)$ 内单增。又因为 $f'(0)=0$，故当 $x\in(-1,0)$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$。因此 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调减小，在 $(0,1)$ 上单调增加，又由于 $f(0)=0$，故当 $x\in(-1,1)$ 时， $f(x)\geq f(0)=0$，即得 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$。

方法二：利用泰勒公式

令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$， $x\in(-1,1)$，则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right]-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x，\quad f(0)=0；$$

$$f''(x)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\geq 4-1-1=2，\quad f'(0)=0。$$

由泰勒公式得，存在 ξ 介于 0 与 x 之间，使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\geq x^2\geq 0，$$

故 $$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}\,(-1<x<1)。$$

方法三：利用泰勒级数

令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，

则当 $x\in(-1,1)$ 时，$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$，$\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n$，$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$，

故

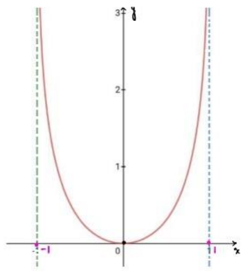
$$\begin{aligned}f(x)&=x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n\right)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-1-\frac{x^2}{2}\\&=x\left[\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)\right]+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)-1-\frac{x^2}{2}\\&=x^2+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{2n-1}+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)x^{2n}\end{aligned}$$

由于 $x^2\ge 0,\left[\frac{2}{2n-1}+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right]x^{2n}\ge\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{(2n)!}\right)x^{2n}\ge 0,(n=2,3,\cdots)$，故 $f(x)\ge 0$，

所以 $$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}。$$

【注】①由方法二和方法三可以看出，结论可以加强为：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{3x^2}{2}$，$x\in(-1,1)$。

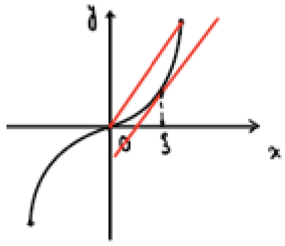
②为了方便同学们理解，我们画出函数 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$ 的图像，



13.【考点定位】 罗尔定理；拉格朗日定理；函数的奇偶性与其异数奇偶性的关系。

【证明】（I）方法一：由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\xi)$。由于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，所以 $f(0)=0$，　从而

$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{1-0}{1-0}=1$，（如图所示）



方法二：

分析：$f'(\xi)=1\Leftrightarrow[f(x)-x]'_{|x=\xi}=0$，令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g'(\xi)=0$，

从而只需证明 $g(x)$ 满足罗尔定理的条件。

令 $g(x)=f(x)-x$，则有：

① $g'(x)=f'(x)-1,x\in[0,1]$；

② $g(0)=f(0)-0$，由于 $f(x)$ 为奇函数，则 $g(0)=0,g(1)=f(1)-1=0$；

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$，即得 $f'(\xi)=1$。

（II）方法一：

分析：$f''(\eta)+f'(\eta)=1\Leftrightarrow f''(\eta)+f'(\eta)-1=0\Leftrightarrow[f'(x)+f(x)-x]'_{|x=\eta}=0$

令 $g(x)=f'(x)+f(x)-x$ 则 $g'(\eta)=0$。从而只需证明 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理的条件。

令 $g(x)=f'(x)+f(x)-x$，由 $f(x)$ 为奇函数且可导知，$f'(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 满足：

① $g'(x)=f''(x)+f'(x)-1,x\in[-1,1]$；

②由 $g(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1)+1-1=f'(1),$

$g(-1)=f'(-1)+f(-1)+1=f'(-1)+[-f(1)]+1=f'(-1)$，

且 $f'(x)$ 为偶函数知 $g(1)=g(-1)$。由罗尔定理知，存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得 $g'(\eta)=0$，即

$$f''(\eta)+f'(\eta)=1。$$

方法二：

分析 $f''(\eta)+f'(\eta)=1\Leftrightarrow f''(\eta)+f'(\eta)-1=0\Leftrightarrow[f'(x)-1]'_{|x=\eta}+[f'(x)-1]_{x=\eta}=0$，

令 $g(x)=f'(x)-1$ 则 $g'(\eta)+g(\eta)=0\Leftrightarrow[\mathrm{e}^{x}g(x)]'\big|_{x=\eta}=\mathrm{e}^{\eta}(g'(\eta)+g(\eta))=0$。从而只需证明 $F(x)=\mathrm{e}^{x}g(x)$ 满足罗尔定理的条件。

令 $F(x)=\mathrm{e}^{x}[f'(x)-1]$，由 $f(x)$ 为可导奇函数知 $f'(x)$ 为偶函数。$F(x)$ 满足：

① $F'(x)=\mathrm{e}^{x}[f''(x)+f'(x)-1],x\in[-1,1]$；

②由（I）知 $F(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}[f'(\xi)-1]=0$，$F(-\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}[f'(-\xi)-1]=\mathrm{e}^{-\xi}[f'(\xi)-1]=0$。

由罗尔定理知，存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$ 使得 $F'(\eta)=0$，即 $\mathrm{e}^{\eta}[f''(\eta)+f'(\eta)-1]=0$，

又由于 $e^{\eta}\neq 0$，所以 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

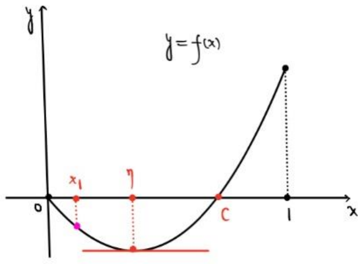
14.【考点定位】函数极限的保号性；零点定理；可导与连续的关系；连续的概念；罗尔定理。

【证明】（I）因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，所以 $\exists\delta>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}<0$，从而 $f(x)<0$。任取 $x_1\in(0,\delta)\subset(0,1)$，则 $f(x_1)<0$，已知 $f(1)>0$。由零点定理，$\exists c\in(x_1,1)\subset(0,1)$，使得 $f(c)=0$。即方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

（II）

分析：由于 $f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=\left[f(x)f'(x)\right]'$，所以 $f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根的充分条件是 $F(x)=f(x)f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三个点的值相等。

令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $F'(x)=f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2,x\in[0,1]$。由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，又由（I）可知 $f(c)=0$，则由罗尔定理可知 $\exists\eta\in(0,c)$ 使得 $f'(\eta)=0$，从而 $F(0)=F(\eta)=F(c)=0$，(如图)。由罗尔定理可知：$\exists\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,c)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$ 即 $f(\xi_1)f''(\xi_1)+[f'(\xi_1)]^2=0$，$f(\xi_2)f''(\xi_2)+[f'(\xi_2)]^2=0$。故方程 $f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。



15.【考点定位】函数的单调性。

分析：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0\Leftrightarrow$ 当 $x>1$ 时，$x-\ln^2 x+2k\ln x-1\geq 0$；当 $0<x<1$ 时，$x-\ln^2 x+2k\ln x-1\leq 0$。记 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$，则 $f(1)=0$，从而只需要证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增即可。

【证明】令 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$，则 $f'(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2k}{x}=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x}$，$f(1)=0$。

记 $\varphi(x)=x-2\ln x+2k$，则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{2}{x}$，从而得到下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	↓	最小值	↑

又由于$k\ge\ln2-1$，所以$\varphi(x)\ge\varphi(2)=2-2\ln2+2k=2\left[k-(\ln2-1)\right]\ge0$，

所以$f'(x)=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x}\ge0$，从而$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以当$x>1$时，

$f(x)>f(1)=0$，当$0<x<1$时，$f(x)<f(1)=0$。所以$(x-1)(x-\ln^2x+2k\ln x-1)\ge0$。

16.【考点定位】 积分中值定理；罗尔定理；拉格朗日中值定理；函数的凹凸性；定积分的不等式性质。

【证明】(1)这里采用三种方法证明。

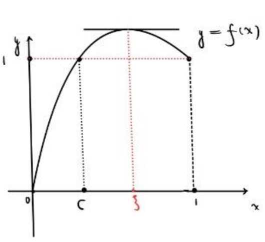
方法一：分析：$f'(\xi)=0\Leftarrow f(x)$在区间$[0,1]$上有两个点的值相等。

令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$，由拉格朗日定理知$\exists c\in(0,1)$使

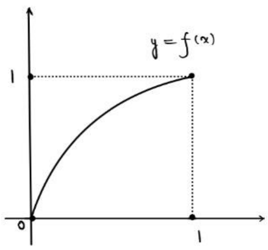
$1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=F'(c)(1-0)=f(c)$（如图a）。由于$f(x)$在$[c,1]$上连续，$(c,1)$可导，且$f(c)=f(1)=1$，故由罗尔定理知$\exists\xi\in(c,1)\subset(0,1)$使$f'(\xi)=0$。

方法二：反证法。

假设$\forall x\in(0,1)$，都有$f'(x)\ne0$。由于$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，所以$f'(x)$必然连续，从而$f'(x)$在区间$(0,1)$内恒为正或者恒为负，所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增或者单调递减。又由于$f(0)<f(1)$，所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，(如图b)从而$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\int_0^1 f(1)\mathrm{d}x=1$，这与$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$矛盾！故必存在$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$。



图a



图b

方法三：

分析：由费马定理知，只需要证明函数$f(x)$在区间$(0,1)$内有最大值即可。

由于 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，从而在 $[0,1]$ 必有最大值，设最大值为 M ，且 $f(\xi)=M$ 。由于 $f(0)=0, f(1)=1$，所以 $f(x)$ 不为常数，因此 $1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\int_0^1 M\mathrm{d}x=M$，从而 $\xi\in(0,1)$，这样就得到 ξ 为 $f(x)$ 的极大值点并且为可导点，故 $f'(\xi)=0$ 。

（2）这里采用两种方法证明。

方法一：由(1)中的方法三可知， $f(x)$ 在最大值点 $\xi\in(0,1)$，且 $f(\xi)>1$。

将 $f(0)$ 在 ξ 处用泰勒公式展开得：

$$f(0)=f(\xi)+f'(\xi)(0-\xi)+\frac{f''(\eta)}{2!}(0-\xi)^2=f(\xi)+\frac{f''(\eta)}{2!}(0-\xi)^2,\eta\in(0,\xi)。$$

从而 $f''(\eta)=\dfrac{2\left[f(0)-f(\xi)\right]}{\xi^2}=\dfrac{-2f(\xi)}{\xi^2}$，又由于 $f(\xi)>1, 0<\xi^2<1$，所以 $f''(\eta)<-2$。

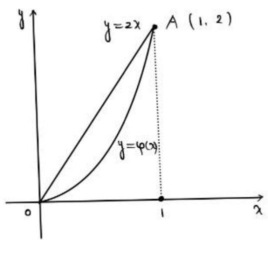
故存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2$。

方法二：反证法。

假设 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f''(x)\ge -2$，即 $\left(f(x)+x^2\right)''\ge 0$ 。令 $\varphi(x)=f(x)+x^2$，

则 $\varphi''(x)>0$，从而 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上为凹函数，且 $\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=f(1)+1=2$，如图所示设 $O(0,0)$，$A(1,2)$，则直线 OA：$y=2x$，由于 $y=\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上为凹函数，故 $\varphi(x)\le 2x$，

从而 $\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$，但 $\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[f(x)+x^2]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，这样得到 $\frac{4}{3}\le 1$，矛盾！故存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2$。



17.【考点定位】 拉格朗日中值定理；定积分的性质。

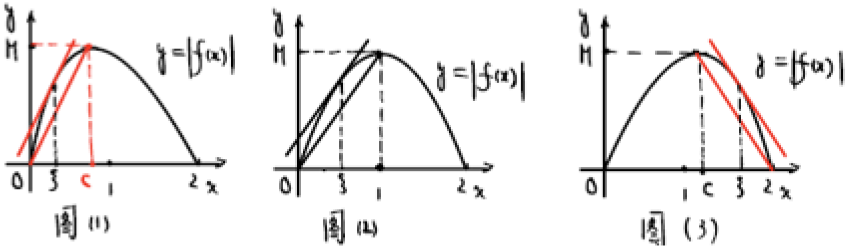
【证明】（1）若 $M=0$，则 $f(x)\equiv 0$，$x\in[0,2]$，此时 $f'(x)=0, x\in[0,2]$，结论显然成立。若 $M>0$，则 $\exists c\in(0,2)$ 使得 $|f(c)|=M$ 。讨论如下：

①当$c\in(0,1)$时，由拉格朗日中值定理可知，存在$\xi\in(0,c)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}$，从而$|f'(\xi)|=\dfrac{|f(c)|}{c}=\dfrac{M}{c}>M$（如图（1）所示）；

②当$c=1$时，由拉格朗日中值定理可知，存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$，从而$|f'(\xi)|=\dfrac{|f(1)|}{1}=M$（如图（2）所示）；

③当$c\in(1,2)$时，由拉格朗日中值定理可知，存在$\xi\in(c,2)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(c)}{2-c}$，从而$|f'(\xi)|=\dfrac{|f(c)|}{2-c}=\dfrac{M}{2-c}>M$（如图（3）所示）；

综上所述：存在$\xi\in(0,2)$使得$|f'(\xi)|\geq M$。



（2）假设$M>0$，由$f(0)=f(2)=0$知，存在$\eta\in(0,2)$使得$f'(\eta)=0$，从而$|f'(x)|$在$[0,2]$上不恒为常数。

设$c\in(0,2)$使得$|f(c)|=M$，不妨设在$[0,c]$上$f'(x)$不恒为常数。则

$$M=|f(c)|=\left|\int_0^c f'(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^c|f'(x)|\mathrm{d}x<\int_0^c M\mathrm{d}x=Mc\,, \qquad ①$$

$$M=|f(c)|=|f(c)-f(2)|=\left|\int_c^2 f'(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_c^2|f'(x)|\mathrm{d}x\leq\int_c^2 M\mathrm{d}x=M(2-c)\,, \qquad ②$$

由①得，$c>1$，由②得$c\leq1$，矛盾，故$M=0$。