专题 2　一元函数微分学及其应用

（A 组）基础题

1.【考点定位】函数的商的求导法则；函数的单调性。

【答案】A

【解】方法一：

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,g(x)>0$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$$

$\Rightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}$在$[a,b]$上单调递减。

所以$\forall x\in(a,b)$ 有 $\dfrac{f(a)}{g(a)}>\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$。

又 $f(x)$，$g(x)$恒大于零，从而 $f(x)g(b)>f(b)g(x)$。故答案选（A）。

方法二：

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,f(x)>0,g(x)>0\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}<\frac{g'(x)}{g(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}<0$$

$$\Leftrightarrow[\ln f(x)]'-[\ln g(x)]'<0\Leftrightarrow[\ln f(x)-\ln g(x)]'<0\Leftrightarrow\left[\ln\frac{f(x)}{g(x)}\right]'<0$$

$\Rightarrow\ln\dfrac{f(x)}{g(x)}$在区间$[a,b]$上单调递减$\Rightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}$在区间$[a,b]$上单调递减。

同方法一最后的分析可得答案选(A)。

2.【考点定位】极值点的判别；拐点的判别。

【答案】C

【解】由 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 得，$f''(x)=x-[f'(x)]^2$，　　　　①

首先将 $x=0$ 代入上式得，$f''(0)=0-[f'(0)]^2=0$，对①式两边求导得 $f'''(x)=1-2f'(x)f''(x)$，所以

$$f'''(0)=1>0。$$

又由于 $f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{x}$，所以$\exists\delta>0$，使得当$x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$时，$\dfrac{f''(x)}{x}>0$，

列表讨论如下：

x	$(-\delta,0)$	0	$(0,\delta)$
$f''(x)$	−		+
$f(x)$	凸	拐点	凹

所以（C）正确。

又由上表可知，$f'(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 上单减，在 $(0,\delta)$ 上单增；

由于 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)\geq 0$，$x\in(-\delta,\delta)$，从而 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 上单增，故 $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值。

综上所述，答案选（C）。

【注】一般情形下，我们有如下结论：

① $f'(x_0)=0$ $f''(x_0)\neq 0$，$\Rightarrow f(x_0)$ 为极值点；

② $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0 \Rightarrow (x_0,\ f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点；

③ $f^{(1)}(x_0)=\cdots=f^{(k)}(x_0)=0$，$f^{(k+1)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow$ 当 k 为奇数时，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值点；当 k 为偶数时，$(x_0,\ f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点。

3.【考点定位】微分的概念；隐函数的导数；一阶微分形式不变性。

【答案】$(\ln 2-1)\mathrm{d}x$

【解】方法一：

当 $x=0$ 时，$2^0=0+y$，故 $y=1$。方程 $2^{xy}=x+y$ 两边同时对 x 求导得

$$2^{xy}(y+xy')\ln 2=1+y',$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得 $y'(0)=\ln 2-1$，所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=y'(0)\mathrm{d}x=(\ln 2-1)\mathrm{d}x。$$

方法二：两端同时取微分得，$\mathrm{d}(2^{xy})=\mathrm{d}(x+y)$，利用一阶微分形式的不变性可得，

$2^{xy}\ln 2\mathrm{d}(xy)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，从而 $2^{xy}\ln 2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$。又当 $x=0$ 时，$y=1$，

将其代入上式得 $\ln 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，解得 $\mathrm{d}y=(\ln 2-1)\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=y'(0)\mathrm{d}x=(\ln 2-1)\mathrm{d}x$。

【注】在本题中，可将 $2^{xy}=x+y$ 两边取对数变形为 $xy\ln 2=\ln(x+y)$，再两边同时对 x 求导得

$(xy'+y)\ln 2=\dfrac{1+y'}{x+y}$，将 $x=0$，$y=1$ 代入得 $y'(0)=\ln 2-1$。所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=y'(0)\,\mathrm{d}x=(\ln 2-1)\mathrm{d}x。$$

4.【考点定位】隐函数的导数；复合函数求导法则；导数的几何意义。

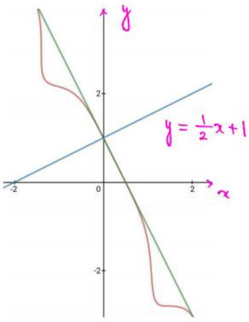
【答案】$y=\dfrac{1}{2}x+1$

【解】由题意可知 $y(0)=1$，方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 两边同时对 x 求导可得

$$\left(2+y'\right)\mathrm{e}^{2x+y}+\left(y+xy'\right)\sin\left(xy\right)=0,$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式可得，$\left(2+y'\right)\mathrm{e}=0$，所以 $y'(0)=-2$，从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线斜率为 $-\dfrac{1}{y'(0)}=\dfrac{1}{2}$。故所求的法线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该隐函数在 $x=0$ 附近的图像和在 $\left(0,1\right)$ 处的法线与切线图像。(如图？)

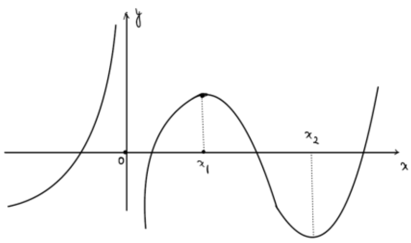


图？

5.【考点定位】函数的单调性与导数的关系。题目有错！！

【答案】D

【解】如图？



图？

可得下表：

x	$(-\infty,0)$	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f(x)$	$\uparrow$	$\uparrow$	极大值点	$\downarrow$	极小值点	$\uparrow$
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+

对照各选项中函数的符号，答案选(D)。

6.【考点定位】极值点的判定；拐点的判定。

【答案】B

【解】由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$ 及 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续知，

$$f'(a)=\lim_{x\to a}f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}(x-a)=-1\cdot 0=0,$$

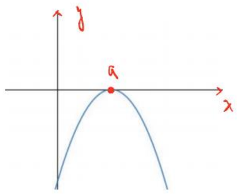
所以 $$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=-1<0,$$

故 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极大值点且 $(a,f(a))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点。综上所述，答案选（B）

【注】作为选择题，可以使用特例法快速得到答案。

由于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，取 $\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则 $f'(x)=-(x-a)$，所以 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2+C$，取 $C=0$，

则 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2$。如图？，一望便知，应选（B）



图？

7.【考点定位】高阶导数；隐函数的导数；复合函数的求导法则；四则运算的求导法则。

【答案】−2

【解】将 $x=0$ 代入方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 可得 $e^y=1$，所以 $y(0)=0$。

方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边关于 x 求导得：

$$e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0, \qquad ①$$

将 $x=0$， $y=0$ 代入方程①可得 $y'=0$。方程①两边关于 x 求导得：

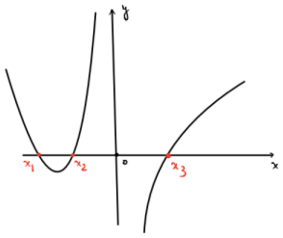
$$e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''+6y'+6y'+6xy''+2=0\quad,\qquad ②$$

将 $x=0$， $y=0$， $y'=0$ 代入方程② 可得 $y''+2=0$，所以 $y''(0)=-2$。

8.【考点定位】函数的单调性；函数的极值。

【答案】C

【解】由 $f'(x)$ 的图象可得如下表格：（如图？）



图？

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,0)$	0	$(0,x_3)$	x_3	$(x_3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值点	↓	极小值点	↑	极大值点	↓	极小值点	↑

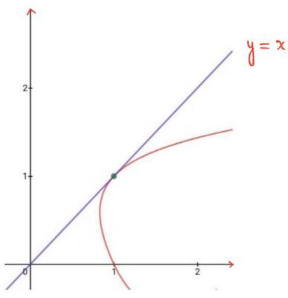
综上所述， $f(x)$ 有两个极大值点 x_1 和 0，两个极小值点 x_2 和 x_3， 故答案选(C)。

9.【考点定位】隐函数的求导；导数的几何意义。

【答案】 $y=x$

【解】方程两端同时对 x 求导，得 $y+xy'+\dfrac{2}{x}=4y^3\cdot y'$ 。将 $x=1$， $y=1$ 代入得，$1+y'+2=4y'$，解得 $y'(1)=1$，从而，点 $(1,1)$ 处切线斜率为 1。所求切线方程为 $y-1=x-1$，即 $y=x$ 。

【注】为方便同学们理解，我们画出该隐函数在点 $(1,1)$ 附近的图像和相应的切线(如图)



图？

10.【考点定位】导数的几何意义。

【答案】$4a^6$

【解】由题设知，x 轴为曲线的切线。设切点为$(x_0,0)$，则$\begin{cases} f(x_0)=x_0^{\ 3}-3a^2x_0+b=0, & ① \\ f'(x_0)=3x_0^{\ 2}-3a^2=0, & ② \end{cases}$

由②式得 $x_0=\pm a$，将 $x_0=\pm a$ 分别代入①式，得：

当 $x_0=-a$ 时，$(-a)^3-3a^2(-a)+b=0$，解得 $b=-2a^3$，从而 $b^2=4a^6$；

当 $x_0=a$ 时，$a^3-3a^2+b=0$，解得 $b=2a^3$，从而 $b^2=4a^6$。

综上所述，$b^2=4a^6$。

11.【考点定位】极值点的判别；拐点的判别。

【答案】C

【解】方法一：因为

$$f(x)=\left|x(1-x)\right|=\begin{cases} x(x-1), x<0, \\ x(1-x), 0\le x\le 1, \\ x(x-1),\ \ x>1, \end{cases}$$

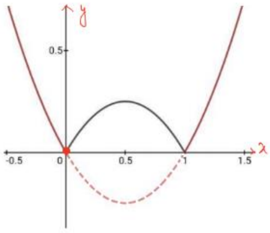
$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1, x<0, \\ 1-2x, 0<x<1, \\ 2x-1,\ \ x>1, \end{cases}\quad f''(x)=\begin{cases} 2, x<0, \\ -2, 0<x<1, \\ 2,\ \ x>1, \end{cases}\quad 且\ f(x)连续。$$

列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−		+		−		+
$f''(x)$	+		−		−		+
$f(x)$	↓ 凹	极小值点，拐点	↑ 凸	极大值点	↓ 凸	极小值点，拐点	↑ 凹

故答案选（C）。

方法二：我们直接画出函数 $f(x)$ 的图像，由抛物线的特点，一望便知应选(C)。如图？



图？

12.【考点定位】极值点的判别。

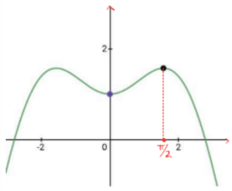
【答案】B

【解】 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x, f''(x)=\cos x-x\sin x$，

又 $f'(0)=f'(\frac{\pi}{2})=0$， $f''(0)=1>0$， $f''(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$，所以 $f(0)$ 是极小值， $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值。

故答案选（B）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该曲线的图像(如图？)



图？

13.【考点定位】连续的概念；左、右导数的概念。

【答案】C

【解】由 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$ 且 $\lim\limits_{h\to0}h^2=0$ 可知，$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $0=\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=f(0)$。

又因为 $1=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)-f(0)}{h^2}\overset{t=h^2}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'_+(0)$。从而 $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)=1$ 存在。

故答案选(C)。

【注】这里 $f'_-(0)$ 不一定等于1，例如：取 $f(x)=|x|$，则 $f(x)$ 满足题设条件，但 $f'_-(0)=-1$。

14.【考点定位】复合函数的导法则。

【答案】C

【解】由 $h(x)=e^{1+g(x)}$ 得 $h'(x)=e^{1+g(x)}\cdot g'(x)$，将 $h'(1)=1, g'(1)=2$ 代入上式可得 $1=e^{1+g(1)}\times2$，解得

$g(1)=-1-\ln2$。故答案选(C)

15.【考点定位】隐函数的导数。

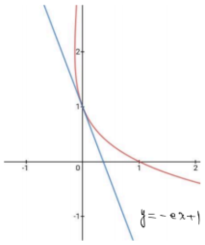
【答案】$-\mathrm{e}$

【解】当 $x=0$ 时，$y=1-0\cdot\mathrm{e}^0=1$，方程 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 两边同时对 x 求导得，

$$y'=-\mathrm{e}^y-x\mathrm{e}^y\cdot y',$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得 $y'(0)=-\mathrm{e}$。

【注】由 $y'(0)=-\mathrm{e}$ 可求得该曲线在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-\mathrm{e}x+1$。(如图？)



图？

16.【考点定位】高阶导数；复合函数的求导法则。

【答案】$2\mathrm{e}^3$

【解】由 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 得 $f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}$，$f'''(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}$。

又由于 $f(2)=1$，所以 $f'''(2)=2\mathrm{e}^{3f(2)}=2\mathrm{e}^3$。

【注】本题中可通过求解微分方程写出 $f(x)$ 的表达式。

事实上，记 $y=f(x)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^y$，所以 $\int \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int \mathrm{d}x$，得 $-\mathrm{e}^{-y}=x+c$。从而，$y=-\ln(-x-c)$，又由 $f(2)=1$ 得 $y=-\ln(-x+2+\mathrm{e}^{-1})$。故

$$f(x)=-\ln(-x+2+\mathrm{e}^{-1})。$$

17.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；导数的几何意义。（题目中要标出仅数一数二）

【答案】$1+\sqrt{2}$

【解】该点切线的斜率为：

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{\cos t}{-\sin t(1+2\cos t)}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})}=-\frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

故该点处法线斜率为 $1+\sqrt{2}$。

18.【考点定位】高阶导数；泰勒公式。

【答案】$\dfrac{(-2)^n n!}{3^{n+1}}$

【解】方法一：由 $y=\dfrac{1}{2x+3}=(2x+3)^{-1}$ 得，

$y'=2\cdot(-1)\cdot(2x+3)^{-2}$， $y''=2^2\cdot(-1)\cdot(-2)(2x+3)^{-3}$ ， $y'''=2^3\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)(2x+3)^{-4}$ ，

$\cdots\ y^{(n)}=2^n(-1)(-2)\cdots(-n)(2x+3)^{-n-1}=(-2)^n n!(2x+3)^{-n-1}$ ，所以

$$y^{(n)}(0)=[(-2)^n n!(2x+3)^{-n-1}]\Big|_{x=0}=\frac{(-2)^n n!}{3^{n+1}}\ 。$$

方法二：因为函数 $y=\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$y=\frac{1}{3}\left[1+\left(-\frac{2}{3}x\right)+\left(-\frac{2}{3}x\right)^2+\cdots+\left(-\frac{2}{3}x\right)^n\right]+o(x^n),$$

所以
$$\frac{1}{3}(-1)^n(\frac{2}{3})^n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!},$$

故
$$y^{(n)}(0)=\frac{(-2)^n n!}{3^{n+1}}。$$

19.【考点定位】函数的凹凸性；隐函数的导数；连续函数的保号性。

【解】对方程 $y\ln y-x+y=0$ 两边关于 x 求导得 $y'\ln y+y'-1+y'=0,$，所以

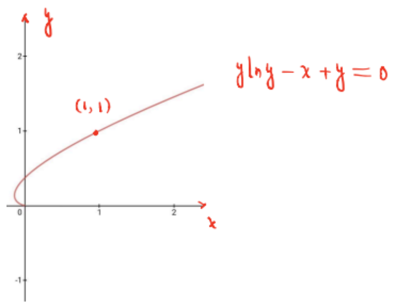
$$y'=\frac{1}{2+\ln y} \qquad ①$$

将 $x=1$，$y=1$代入①式得 $y'(1)=\dfrac{1}{2}$，①式两边再关于 x 求导，得

$$y''=-\frac{1}{(2+\ln y)^2}\bullet\frac{y'}{y}=-\frac{1}{y(2+\ln y)^3}, \qquad ②$$

将 $x=1$，$y=1$代入②式得 $y''(1)=-\dfrac{1}{8}$，又由 $y''=-\dfrac{1}{y(2+\ln y)^3}$ 在 $x=1$ 的邻域内连续，所以在 $x=1$ 附近 $y''<0$，于是函数在 $(1,1)$ 附近是凸的。

【注】为了便于读者理解，我们给出该曲线的图像(如图)。



图？

20.【考点定位】变限积分求导；零点的概念。

【答案】B

【解】由 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$ 得， $f'(x)=2x\cdot\ln(2+x^2)$，由于 $\ln(2+x^2)\geq\ln 2>0$，所以 $f'(x)$=0 的解为 $x=0$，从而 $f'(x)$ 的零点只有一个，故答案选(B)。

21.【考点定位】函数的四则运算的求导法则。

【答案】D

【解】方法一：因为 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2$，所以 $f'(x)=4x^3-9x^2+4x=x(4x^2-9x+4)$，又因为 $4x^2-9x+4=0$ 有两个不同实根 $x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{17}}{8}$，且 $x=0$ 是 $f'(x)$=0 的根，则方程 $f'(x)$=0 有 3 个不同实根，故 $f'(x)$ 恰有 3 个零点，从而答案选(D)。

方法二：由于函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$ 上满足 $f\left(0\right)=f\left(1\right)=f\left(2\right)=0,$ 由罗尔定理知至少存在两点 $\xi_1\in(0,1),\xi_2\in(1,2)$ 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，又由于

$$f'(0)=\left[2x(x-1)(x-2)+x^2\left((x-1)(x-2)\right)'\right]\Big|_{x=0}=0,$$

故 $f'(x)$ 至少存在 3 个零点，又 $f'(x)$ 为三次多项式，故 $f'(x)$ 至多有三个零点，从而 $f'(x)$ 有三个零点。故答案选(D)。

22.【考点定位】隐函数的导数；复合函数的求导法则；导数的几何意义。

【答案】 $y=x+1$

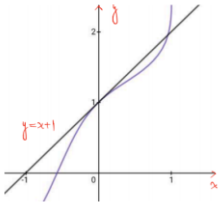
【解】由题意可知 $y(0)=1$，方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边对求导可得

$$(y+xy')\cos xy+\frac{y'-1}{y-x}=1, \qquad ①$$

将 $x=0$， $y=1$ 代入方程①可得 $1+y'-1=1$， 所以 $y'(0)=1$，则曲线在点（0，1）处的切线斜率为 1

故所求切线方程为 $y=x+1$。

【注】为方便同学们理解，我们画出该隐函数在 $x=0$ 附近的图像及所求切线的图像(如图)：



图？

23.【考点定位】拐点的判别。

【答案】$(-1,-6)$

【解】由 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 得 $y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$，所以

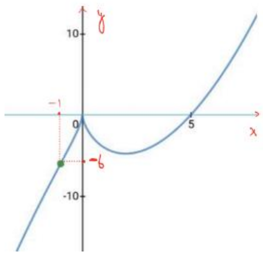
$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$，$y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10}{9}\cdot\frac{x+1}{x^{\frac{4}{3}}}$。

由 $y''=0$ 解得，$x=-1$，在 $x=0$ 处 y'' 不存在。列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	−	0	+	不存在	+
$f(x)$	凸	拐点	凹	非拐点	凹

当 $x=-1$ 时，$y=(-1-5)\times(-1)^{\frac{2}{3}}=-6$。综上所述，该曲线的拐点为 $(-1,-6)$。

【注】为方便同学们理解，我们画出该函数的图像(如图)



图？

24.【考点定位】函数的单调性；变限积分求导；定积分的不等式的性质。

【答案】A

【解】方法一：令 $f(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x,(x>0)$，则 $f(1)=0$。因为

$$f'(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{x}=\frac{\sin x-1}{x}\le 0,\quad x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以

当$0<x<1$时$f(x)>f(1)=0$；当$x>1$时$f(x)<f(1)=0$。

故当$0<x<1$时，$f(x)>0$，也即是 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt>\ln x$。

综上所述，答案选(A)。

方法二：由于$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t(x>0)$，故由题意知

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{\sin t}{t}\right)\mathrm{d}t<0 \Leftrightarrow \int_1^x\left(\frac{1-\sin t}{t}\right)\mathrm{d}t<0$$，由于被积函数

$\frac{1-\sin t}{t}\geq 0 \quad (t>0)$，故由定积分不等式的性质知，$0<x<1$。综上所述，答案选(A)。

【注】设连续函数$g(x)\geq 0$，且在任何区间上不恒为0，则对于定积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$有以下重要且常用的结果：

①$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0\Leftrightarrow b>a$;②$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x<0\Leftrightarrow b<a$;③$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow b=a$。

25.【考点定位】幂指函数变形公式：$u^v=\mathrm{e}^{v\ln u}$；复合函数的求导法则；函数的单调性；一元函数的最值。

【答案】$\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$

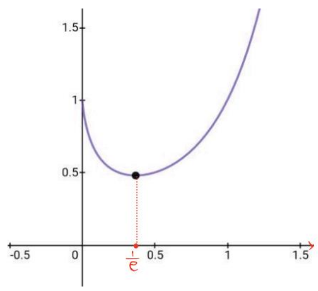
【解】因为$y=x^{2x}=\mathrm{e}^{2x\ln x}$，所以$y'=(\mathrm{e}^{2x\ln x})'=x^{2x}\cdot(2+2\ln x),x\in(0,1]$，令$y'=0$解得$x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

列表讨论如下：

x	$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$
y'	$-$	0	+
y	↓	最小值点	↑

故$y\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$是$y=y(x)$在(0, 1）上的最小值。

【注】为方便同学们理解，我们画出该函数的图像(如图)



图？

26.【考点定位】高阶导数；隐函数的导数；复合函数的求导法则。

【答案】-3

【解】将 $x=0$ 代入方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 可得 $\mathrm{e}^y=1$，所以 $y(0)=0$。

方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 两边关于 x 求导可得，

$$y+xy'+\mathrm{e}^y\cdot y'=1, \qquad ①$$

将 $x=0,y=0$ 代入方程①可得 $y'(0)=1$，方程①两边关于 x 求导可得

$$y'+y'+xy''+\mathrm{e}^y\cdot(y')^2+\mathrm{e}^y\cdot y''=0, \qquad ②$$

将 $x=0,y=0$，$y'(0)=1$ 代入方程②可得，$2+1+y''=0$，所以，$y''(0)=-3$。

27.【考点定位】高阶导数；泰勒公式。

【答案】$-2^n(n-1)!$

【解】方法一：

因为 $y'=(1-2x)^{-1}(-2), y''=(-1)(-2)^2(1-2x)^{-2}, y'''=(-1)(-2)(-2)^3(1-2x)^{-3}$，

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(-2)^n(1-2x)^{-n},$$

所以 $$y^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!。$$

方法二：泰勒公式法

由泰勒公式可得 $$\ln(1-2x)=(-2x)-\frac{(-2x)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}+o\left(x^n\right)。$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^n\right),$$

所以 $$(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

故 $$f^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!。$$

【注】这里我们再介绍一种分解法：$\ln(1-2x)=\ln\left[2\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]=\ln2+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)$，

利用 $\left[\ln(a-x)\right]^{(n)}=\left[\left(\ln(a-x)\right)'\right]^{(n-1)}=\left(-\frac{1}{a-x}\right)^{(n-1)}=-\frac{(n-1)!}{(a-x)^n}$ 可得：

$$\left[\ln(1-2x)\right]^{(n)}=\left[\ln2+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]^{(n)}=\left[\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^n}$$ ，所以 $f^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!$。

28.【考点定位】拐点的判别。

【答案】3

【解】由 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 得，$y'=3x^2+2ax+b, y''=6x+2a$，由题设可知，$y\big|_{x=-1}=0, y''\big|_{x=-1}=0,$ 故

$\begin{cases}-1+a-b+1=0\\ -6+2a=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}$，故 $b=3$。

29.【考点定位】变限积分求导；函数的单调性；一元函数的极值。

【解】
$$f(x)=\int_1^{x^2}x^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+x^2\mathrm{e}^{-x^4}\cdot2x-x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^4}\cdot2x=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0, x=\pm1$, 列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+		−	0	+
$f(x)$	↓	极小值点	↑	极大值点	↓	极小值点	↑

故 $f(x)$ 的单减区间为 $(-\infty,-1]$，$[0,1]$，单增区间为 $[-1,0]$，$[1,+\infty)$。$f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处取得极小值，且极小值

$f(\pm1)=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 点取得极大值，且极大值

$$f(0)=-\int_1^0 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t^2=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})。$$

30.【考点定位】导数的物理意义；复合函数的求导法则。

【答案】3cm/s

【解】方法一：如图？设对角线长为 $s(t)$，则 $s(t)=\sqrt{l^2(t)+\omega^2(t)}$，对 t 求导得，

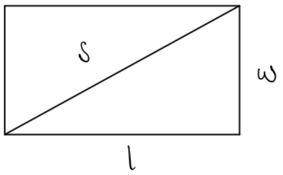
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{l^2(t)+\omega^2(t)}}\left(2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}+2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{1}{\sqrt{l^2(t)+\omega^2(t)}}\left(l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}+\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right),$$

将 $l=12\text{cm}$，$\omega=5\text{cm}$，$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2\text{cm}/s$，$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=3\text{cm}/s$，代入上式得 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=3\text{cm}/s$。

方法二：设对角线长为 $s(t)$，则 $s^2(t)=l^2(t)+\omega^2(t)$，两边对 t 求导得，

$$s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}+\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},$$

当 $l=12\text{cm}$，$\omega=5\text{cm}$ 时，$s=13\text{cm}$，又由于 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2\text{cm}/s$，$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=3\text{cm}/s$，代入上式得 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=3\text{cm}/s$。



图?

31.【考点定位】导数的几何意义；隐函数的导数。

【答案】$y=-2x$

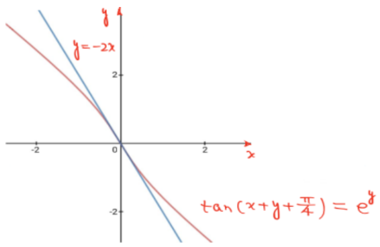
【解】方程 $\tan(x+y+\frac{\pi}{4})=e^y$ 两边对 x 求导可得

$$\sec^2(x+y+\frac{\pi}{4})(1+y')=e^y\cdot y',$$

将 $x=0$，$y=0$ 代入上式可得 $2(1+y'(0))=y'(0)$，所以 $y'(0)=-2$。所求切线方程为：$y-0=-2(x-0)$，即 $y=-2x$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该隐函数在 $x=0$ 附近的图像和在 $(0,0)$ 处的切线图像。

如图？所示：



图?

32.【考点定位】导数的定义；函数的四则运算的求导法则。

【答案】A

【解】方法一：利用导数定义可得

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\ldots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot(\mathrm{e}^{2x}-2)\ldots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(\mathrm{e}^{2x}-2)(\mathrm{e}^{3x}-3)\ldots(\mathrm{e}^{nx}-n)=(-1)(-2)\ldots[-(n-1)]=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!。$$

方法二：记 $(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\ldots(e^{nx}-n)=g(x)$，则 $f(x)=(e^x-1)g(x)$，

因为 $f'(x)=e^x\cdot g(x)+(e^x-1)\cdot g'(x)$，

所以 $$f'(0)=g(0)=(-1)(-2)\ldots[-(n-1)]=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\text{。}$$

方法三：由多个可导函数的乘积的求导公式：

$$\left[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\right]=f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)+f_1(x)f_2'(x)\cdots f_n(x)+\cdots+f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x)\text{。}$$

得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left[\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)\right]'\\&=\left(\mathrm{e}^x-1\right)'\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)+\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)'\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)+\cdots+\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)'\\&=\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)+\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(2\mathrm{e}^{2x}\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)+\cdots+\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(n\mathrm{e}^{nx}\right),\end{aligned}$$

所以 $f'(0)=1(1-2)(1-3)\cdots(1-n)+0+\cdots+0=(-1)^{n-1}(n-1)!$。

故答案选(A)。

【注】这里我们以三个函数为例来推导以下多个可导函数的乘积的求导公式:

$$\begin{aligned}&\left[f_1(x)f_2(x)f_3(x)\right]'=\left[f_1(x)\left(f_2(x)f_3(x)\right)\right]'\\&=f_1'(x)\left(f_2(x)f_3(x)\right)+f_1(x)\left(f_2(x)f_3(x)\right)'\\&=f_1'(x)\left(f_2(x)f_3(x)\right)+f_1(x)\left(f_2'(x)f_3(x)+f_2(x)f_3'(x)\right)\\&=f_1'(x)f_2(x)f_3(x)+f_1(x)f_2'(x)f_3(x)+f_1(x)f_2(x)f_3'(x)\text{。}\end{aligned}$$

33.【考点定位】隐函数的导数；复合函数的求导法则。

【答案】1

【解】将 $x=0$ 代入方程 $x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ 得 $-y+1=\mathrm{e}^y$ 解得 $y=0$，

方程 $x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ 两端同时对 x 求导，得

$$2x-y'=\mathrm{e}^y\cdot y',\qquad ①$$

将 $x=0,y=0$ 代入①式得，$0-y'(0)=y'(0)$，得 $y'(0)=0$，①式两端再同时对 x 求导得

$$2-y''=\mathrm{e}^y\cdot(y')^2+\mathrm{e}^y\cdot y'',\qquad ②$$

将 $x=0,y=0$，$y'(0)=0$ 代入②式得，$2-y''(0)=y''(0)$，解得 $y''(0)=1$。

【注】方程 $-y+1=\mathrm{e}^y$ 仅有唯一解 $y=0$。原因如下:

令 $\varphi(y)=\mathrm{e}^y+y-1$，则 $\varphi'(y)=\mathrm{e}^y+1>0$。故，$\varphi(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单增，从而 $\varphi(y)$ 至多只有一个零点。又 $\varphi(0)=0$，从而 $\varphi(y)=\mathrm{e}^y+y-1$ 有唯一解 $y=0$。故方程 $-y+1=\mathrm{e}^y$ 仅有唯一解 $y=0$。

34.【考点定位】曲率。

【答案】$\left(-1,0\right)$

【解】由 $y=x^2+x$ 得 $y'=2x+1$，$y''=2$。代入曲率计算公式 $k=\dfrac{\left|y''\right|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ 得 $k=\dfrac{2}{\left(1+\left(2x+1\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，

由 $k=\dfrac{2}{\left(1+\left(2x+1\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 解得 $x=-1$ 或 0（舍），故所求的点为 $\left(-1,0\right)$。

35.【考点定位】反函数的求导法则；变限积分求导。

【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}$

【解】由 $y=f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ 可知, 当 $y=0$ 时 $\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t=0$，所以 $x=-1$。

再由反函数的求导法则可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\Bigg|_{x=-1}=\frac{1}{(\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t)'}\Bigg|_{x=-1}=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}\Bigg|_{x=-1}=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}。$$

【注】这里 $\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t=0$ 的解为 $x=-1$ 是因为被积函数 $\sqrt{1-\mathrm{e}^t}$ 非负。

36.【考点定位】高阶导数；参数方程确定的函数的导数。

【答案】$\sqrt{2}$

【解】因为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(\sin t)'=\cos t$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(t\sin t+\cos t)'=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$，

所以 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{(t)'}{\cos t}=\sec t$，

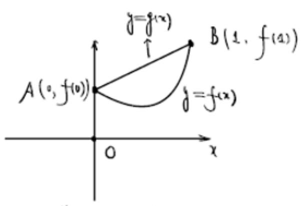
故 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}。$$

37.【考点定位】函数的凹凸性；凸、凹函数的几何特征

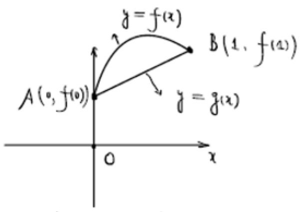
【答案】D

【解】首先 $y=f\left(0\right)\left(1-x\right)+f\left(1\right)x$ 是过 $\left(0,f\left(0\right)\right)$，$\left(1,f\left(1\right)\right)$ 的线段。

当 $f''(x)\geq 0$ 时 $f(x)$ 为凹函数；当 $f''(x)\leq 0$ 时，$f(x)$ 为凸函数。（如图？）



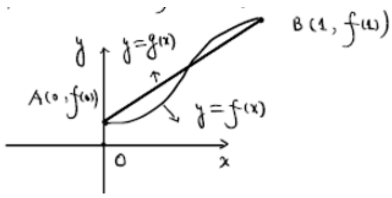
图① $f''(x)\geq 0$ 的情形.



图② $f''(x)\leq 0$ 的情形.

由凹，凸函数的几何特征知（D）正确。

当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单增，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系不确定，如图所示：



综上所述，答案选（D）。

38.【考点定位】一元函数的极值；微分方程的初值问题；可分离变量的微分方程。

【解】方程 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}$ 分离变量得 $(1+y^2)\mathrm{d}y=(1-x^2)\mathrm{d}x$，

两边同时积分得 $$\int(1+y^2)\mathrm{d}y=\int(1-x^2)\mathrm{d}x$$

解得 $$x^3+y^3-3x+3y=c。\qquad ①$$

将 $y(2)=0$ 代入上式，得 $c=2$，于是 $x^3+y^3-3x+3y=2$。

再由 $x^2+y^2y'=1-y'$ 得 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}$，令 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=0$，解得驻点为 $x=-1,x=1$。将 $x=-1$ 代入方程①，得 $y^3+3y=0$，解得 $y=0$；将 $x=1$ 代入方程①，得 $y^3+3y-4=0$，即 $(y-1)(y^2+y+4)=0$，解得 $y=1$。

下面用两种方法求 $y(x)$ 的极值。

方法一：$y''=\left(\dfrac{1-x^2}{1+y^2}\right)'=\dfrac{-2x(1+y^2)-(1-x^2)(2yy')}{(1+y^2)^2}$

当 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ 时，$y'=0,y''=2>0$，所以 $x=-1$ 为 $y(x)$ 的极小值点，极小值为 $y=0$;

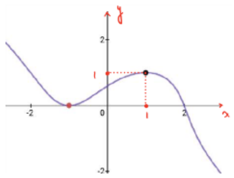
当$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$时，$y'=0,y''=-1<0$，所以$x=1$为$y(x)$的极大值点，极大值为$y=1$。

方法二：由$y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{1+y^2}$列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	−	0	+	0	−
y	↓	极小值点	↑	极大值点	↓

所以$x=-1$为$y(x)$的极小值点，极小值为$y=0$; $x=1$为$y(x)$的极大值点，极小值为$y=1$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出这个函数的图像(如图？)



图？

39.【考点定位】隐函数的导数；一元函数的极值。

【解】方程$y^3+xy^2+x^2y+6=0$求导得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0,$$

解得 $y'=-\dfrac{y^2+2xy}{x^2+2xy+3y^2}$，即 $f'(x)=-\dfrac{y^2+2xy}{x^2+2xy+3y^2}$

令$f'(x)=-\dfrac{y^2+2xy}{x^2+2xy+3y^2}=0$，解得$y=0$，$y=-2x$。

将当$y=0$，$y=-2x$时分别代入方程$y^3+xy^2+x^2y+6=0$。

当$y=0$时，不满足方程。

当$y=-2x$时，得$(-2x)^3+x(-2x)^2+x^2(-2x)+6=0$，解得$x=1$，于是$\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$。

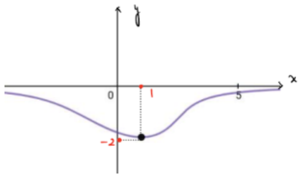
又由于

$$f''(x)=\left(-\frac{y^2+2xy}{x^2+2xy+3y^2}\right)'$$

$$=-\frac{(2yy'+2y+2xy')(x^2+2xy+3y^2)-(y^2+2xy)(x^2+2xy+3y^2)'}{(x^2+2xy+3y^2)^2}$$

将 $x=1$，$y=-2,y'=0$ 代入上式可得 $f''(1)=\frac{4}{9}>0$，则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，且极小值为 $f(1)=-2$。

【注】①为了方便同学们理解，我们画出这个隐函数的图像。(如图？)



图？

②在求 $f''(1)$ 时，我们也可以通过等式

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$$

两边对 x 再次求导得：

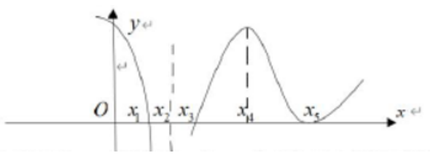
$$3\left(2y(y')^2+y^2y''\right)+2yy'+2\left(yy'+x(y')^2+xyy''\right)+2(y+xy')+2xy'+x^2y''=0,$$

将 $x=1$， $y=-2,y'=0$ 代入上式可得 $f''(1)=y''\Big|_{x=1}=\frac{4}{9}$。

40.【考点定位】一元函数的极值；拐点的判别。（题目中没有图形）

【答案】B

【解】如图所示



列表讨论如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	(x_2,x_3)	x_3	(x_3,x_4)	x_4	(x_4,x_5)	x_5	$(x_5,+\infty)$
$f'(x)$	+		−		−		+		+		+
$f''(x)$	−		−		+		+		−		+

$f(x)$	单增、凸	极值点	单减、凸	拐点	单减、凹	极值点	单增、凹	拐点	单增、凸	拐点	单增、凹

从而该曲线有两个极值点，三个拐点，故答案选（B）。

41.【考点定位】导数的物理意义；复合函数的求导法则。

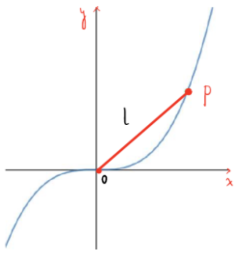
【答案】$2\sqrt{2}v_0$

【解】令 $P\left(x(t),y(t)\right)$（如图？），则 $y(t)=x^3(t)$，$l=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}$，

从而 $$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{2x(t)x'(t)+6x^5(t)x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}}=\frac{\left(x(t)+3x^5(t)\right)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}}。$$

又由 P 横坐标时间的变化率为 v_0 知 $x'(t)=v_0$，所以在 $(1,1)$ 点处，即 $x(t)=1$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0。$$



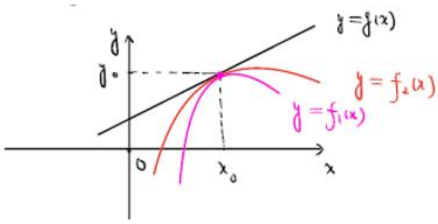
图？

42.【考点定位】曲率；函数的凸凹性的几何特征；一元函数的极值。

【答案】A

【解】方法一：数形结合法

由 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$ 及 $f_i''(x)$ 连续知，$f_i(x)$ 在 x_0 的某个领域内为凸函数；由两条曲线 $y=f_1(x),y=f_2(x)$ 有公切线 $y=g(x)$，由凸曲线的特点知，$f_i(x)\le g(x)(i=1,2)$。又由于 $y=f_1(x)$ 在点 (x_0,y_0) 的曲率比 $y=f_2(x)$ 在点 (x_0,y_0) 的曲率大，故 $f_1(x)$ 比 $f_2(x)$ 弯曲的程度高，故 $f_1(x)\le f_2(x)$ 从而得到下图？：



图？

由图？可知：在 x_0 的某个邻域内有： $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$，故应选（A）。

方法二：首先说明 $f_i(x)\le g(x)$， $x\in U(x_0,\delta)$ 。

事实上， $g(x)=f_i(x_0)+f_i'(x_0)(x-x_0)$，令 $H(x)=f_i(x_0)-g(x)$，则

$$H'(x_0)=0,\quad H''(x_0)=f_i''(x_0)<0,$$

所以 x_0 为 $H(x)$ 的极大值点，故 $H(x)\le H(x_0)=0$，而得 $f_i(x)\le g(x)$， $x\in U(x_0,\delta)$ 。

又由于 (x_0,y_0) 处 $y=f_1(x)$ 的曲率比 $y=f_2(x)$ 曲率大知，

$$\frac{|f_1''(x_0)|}{[1+(f_1'(x_0))^2]^{\frac{3}{2}}}>\frac{|f_2''(x_0)|}{[1+(f_2'(x_0))^2]^{\frac{3}{2}}}，且 f_1'(x_0)=f_2'(x_0)，即$$

$\left|f_1''(x_0)\right|>\left|f_2''(x_0)\right|$，又 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$，从而 $f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0$。

记 $h(x)=f_1(x)-f_2(x)$，则 $h'(x_0)=0$， $h''(x_0)<0$，从而 x_0 为 $h(x)$ 的极大值点，故当 $x\in U(x_0,\delta)$，有 $h(x)\le h(x_0)=0$，所以 $f_1(x)\le f_2(x)$， $x\in U(x_0,\delta)$ 。

综上所述：当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$ 。

【注】对于涉及凹凸性、曲率大小的选择题，我们可以直接将相关信息翻译为图像信息，结论往往一目了然或者可以由图像获得解题思路。

43.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；高阶导数。

【答案】 $-\frac{1}{8}$

【解】由

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\sin t(1+\mathrm{e}^t)-(\cos t)\cdot\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}=-\frac{(1+\mathrm{e}^t)\cdot\sin t+\mathrm{e}^t\cos t}{(1+\mathrm{e}^t)^3},$$

得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{8}。$$

44.【考点定位】不定积分的第一换元法；函数的单调性。

【答案】C

【解】 $\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}f(x)=\dfrac{1}{2}f^2(x)+C$

令 $F(x)=\dfrac{1}{2}f^2(x)$ ，则 $F'(x)=f(x)\cdot f'(x)>0$，所以 $F(x)$ 为单调递增函数，从而 $F(1)>F(-1)$，即 $f^2(1)>f^2(-1)$, 所以 $|f(1)|>|f(-1)|$。故答案选(C)。

45.【考点定位】泰勒公式；函数的奇偶性。

【答案】0

【解】方法一：由于 $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^4)$， x^3 的系数为 0，

又 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)$，

故 $\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}=0$，解得 $f^{(3)}(0)=0$。

方法二：由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 为奇函数， $f''(x)$ 为偶函数， $f^{(3)}(x)$ 为奇函数。

故 $f^{(3)}(0)=0$。

【注】本题也可以直接求出 $f^{(3)}(x)$,但计算量较大。请同学们动手试一试。

46.【考点定位】隐函数的导数；一元函数的极值。

【解】方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两边关于 x 求导可得 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ ①

解得 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}$。令 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=0$，解得驻点为 $x=-1,x=1$。将 $x=-1$ 代入方程①，得 $y^3+3y=0$，解得 $y=0$；将 $x=1$ 代入方程①，得 $y^3+3y-4=0$，即 $(y-1)(y^2+y+4)=0$，解得 $y=1$。

下面用两种方法求 $y(x)$ 的极值。

方法一： $y''=\left(\dfrac{1-x^2}{1+y^2}\right)'=\dfrac{-2x(1+y^2)-(1-x^2)(2yy')}{(1+y^2)^2}$

当 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ 时， $y'=0,y''=2>0$，所以 $x=-1$ 为 $y(x)$ 的极小值点，极小值为 $y=0$;

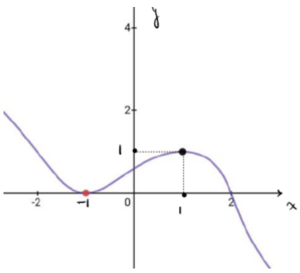
当 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 时， $y'=0,y''=-1<0$，所以 $x=1$ 为 $y(x)$ 的极大值点，极大值为 $y=1$。

方法二：由 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{1+y^2}$ 列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↓	极小值	↑	极大值	↓

所以 $x=-1$ 为 $y(x)$ 的极小值点，极小值为 $y=0$; $x=1$ 为 $y(x)$ 的极大值点，极大值为 $y=1$。

【注】①为方便同学们理解，我们画出这个函数的图像(如图)



图?

②此题是 A—38 题稍作变形而来。

47.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；曲率。

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解】由于

$$\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t(-\sin t),\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

所以

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t,得y'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\tan t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1,$$

从而

，

$$y''\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{dy'}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t\sin t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sec^4 t}{3\sin t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{3},$$

故所求曲率为：

$$K=\left(\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=\frac{2}{3}。$$

48.【考点定位】零点定理；函数的单调性。

【答案】D

【解】方法一：令 $f(x)=x^5-5x+k$，则 $f'(x)=5x^4-5=5(x^2-1)(x^2+1)=5(x-1)(x+1)(x^2+1)$。

令 $f'(x)=0$ 可得两个驻点 $x=-1,x=1$，列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	极大值点	$\downarrow$	极小值点	$\uparrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-5x+k)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-5x+k)=+\infty$。

我们画出 $f(x)$ 的图像(如图？(a))

所以当 $f(-1)=4+k>0$，且 $f(1)=-4+k<0$，即 $-4<k<4$ 时，函数 $f(x)$ 恰有 3 个不同的零点，即方程 $x^5-5x+k=0$ 恰有 3 个不同的实根。

方法二：采用分离参数法　$x^5-5x+k=0$ 变形为

$$5x-x^5=k$$

令 $g(x)=5x-x^5$，则 $g'(x)=5-5x^4=5(1-x^2)(x^2+1)=5(1-x)(1+x)(x^2+1)$

令 $g'(x)=0$ 可得两个驻点 $x=-1,x=1$，列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+	0	−
$g(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$

由 $g(-1)=-4,g(1)=4$，$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-x^5)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-x^5)=-\infty$

我们画出 $g(x)$ 的大致图像(如图？(b))

所以当 $-4<k<4$ 时， $y=g(x)$ 与 $y=k$ 有三个交点，即方程 $x^5-5x+k=0$ 恰有 3 个不同的实根。

故答案选(D)。

(a) (b)

图？

49.【考点定位】导数的定义；一元函数的极值。

【答案】B

【解】由于

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,\quad \lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} x|x|=\lim_{x\to0^-}\left(-x^2\right)=0,\quad f(0)=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。由于

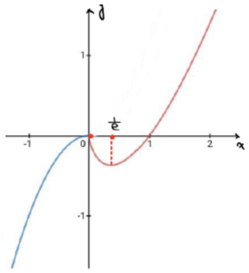
$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{x}=-\infty,\quad f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x|x|}{x}=0。,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。又 $f'(x)=\begin{cases}-2x, x<0\\1+\ln x, x>0\end{cases}$，令 $f'(x)=0$ 解得驻点为 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，列表如下讨论：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值点	↓	极小值点	↑

综上所述：$x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点，极值点（极大值点）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出 $f(x)$ 的图像(如图？)



图?

50.【考点定位】拐点的判定。

【答案】B

【解】$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x=x\cos x-\sin x$，$y''=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$，

当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$时，由$y''=0$得$x=0$，$x=\pi$。列表讨论如下：

x	$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$	0	$(0,\pi)$	π	$\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$
y''	−	0	−	0	+
y	凸		凸	拐点	凹

所以拐点坐标为$(\pi,-2)$。故答案选（B）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$时的图像。(如图?)

图?

51.【考点定位】导数定义；函数的单调性；幂指函数变形公式：$u^v=e^{v\ln u}$。

【解】当$x>0$时，$f'(x)=\left(x^{2x}\right)'=\left(e^{2x\ln x}\right)'=2e^{2x\ln x}(1+\ln x)=2x^{2x}(1+\ln x)$,，

当 $x<0$ 时　　$f'(x)=\left(xe^x+1\right)'=(x+1)e^x$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(xe^x+1\right)=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{x^{-1}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x^{-1}}{-x^{-2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}-2x}=1,\ f(0)=1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(xe^x+1\right)-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(xe^x+1\right)-1}{x}=1,$$
$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。故

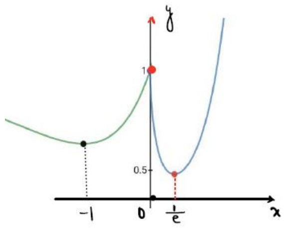
$$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(1+\ln x), & x>0,\\ (x+1)e^x, & x<0。\end{cases}$$

令 $f'(x)=0$ 可得 $x=\frac{1}{e}$ 以及 $x=-1$。列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	+	不存在	$-$	0	+
$f(x)$	↓	极小值点	↑	极大值点	↓	极小值点	↑

综上所述：$x=-1$ 为极小值点，且极小值为 $f(-1)=1-e^{-1}$；$x=0$ 为极大值点，且极大值为 $f(0)=1$；$x=\frac{1}{e}$ 为极小值点，且极小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出 $f(x)$ 的图像(如图？)



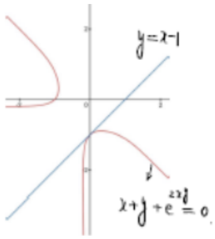
图？

52.【考点定位】导数的几何意义；隐函数的导数；复合函数的求导法则。

【答案】$y=x-1$

【解】方程 $x+y+e^{2xy}=0$ 两边对 x 求导得 $1+y'+e^{2xy}(2y+2xy')=0$。将 $x=0,y=-1$ 代入上式得 $1+y'(0)-2=0$，所以 $y'(0)=1$。所求切线方程为 $y-(-1)=1\cdot(x-0)$， 即 $y=x-1$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出隐函数在 $x=0$ 附近的图像及相应的切线图像(如图？)



图？

53.【考点定位】莱布尼兹公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(u)^{(n-k)}(v)^{(k)}$；泰勒公式。

【答案】A

【解】方法一：由 $f(x)=x^2\ln(1-x)$ 得，

$$f^{(n)}(x)=C_n^0[\ln(1-x)]^{(n)}x^2+C_n^1[\ln(1-x)]^{(n-1)}(x^2)'+C_n^2[\ln(1-x)]^{(n-2)}(x^2)''+\cdots+C_n^n(\ln(1-x))(x^2)^{(n)}$$

$$=[\ln(1-x)]^{(n)}x^2+n[\ln(1-x)]^{(n-1)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2!}[\ln(1-x)]^{(n-2)}\cdot 2\ ,$$

所以， $f^{(n)}(0)=n(n-1)[\ln(1-x)]^{(n-2)}\Big|_{x=0}=n(n-1)[-\frac{(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}]\Big|_{x=0}=-n(n-1)\big((n-3)!\big)=-\frac{n!}{n-2}$。

方法二： 由 $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})$，

得 $f(x)=x^2\ln(1-x)=-x^3-\frac{x^4}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n-2}+o(x^n)$。

又由于 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$，

所以，$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{1}{n-2}$，故 $f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{n-2}$。故答案选（A）。

【注】请同学们注意以下常用的常识性结论：

$$\left[\ln(a-x)\right]'=-\frac{1}{a-x},\left[\ln(a-x)\right]^{(n)}=\left(\left[\ln(a-x)\right]'\right)^{(n-1)}=-\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n-1)}=-\frac{(n-1)!}{(a-x)^n}。$$

54.【考点定位】连续的概念；极值点的判别；导数的定义；洛必达法则；等价无穷小替换。

【答案】 D

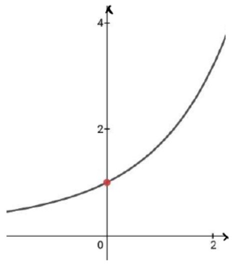
【解】由 $\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1=f\left(0\right)$ 知， $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。

又由于 $f'\left(0\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$，

故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$。

从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，但 $x=0$ 不是驻点，所以 $x=0$ 不是极值点。故答案选（D）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像(如图？)。



图？

【注】这里向考数学一、三的同学们介绍另一种解法：

由 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}, x\neq0,\\ 1, x=0,\end{cases}$ 得

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-1\right]=\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\left(x\neq0\right)$$

又由于 $f(0)=1$，所以 $f(x)=1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\cdots$，这表明 $f'(0)=\dfrac{1}{2!}$。故答案选（D）

55.【考点定位】复合函数的求导法则。

【答案】$\dfrac{\sin\left(\mathrm{e}^{-1}\right)}{2\mathrm{e}}$

【解】$y'=(\cos\mathrm{e}^{-\sqrt{x}})'=-\sin\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)'=-\left(\sin\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}})=\dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\sin\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$，

从而 $y'\Big|_{x=1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}\cdot\sin\mathrm{e}^{-1}}{2}=\dfrac{\sin\left(\mathrm{e}^{-1}\right)}{2\mathrm{e}}$。

56.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；高阶导数。（题目有问题， $y=4(t-1)e^t+t^2$ ）

【答案】$\frac{2}{3}$

【解】 由于 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{4t\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=\frac{2t(2\mathrm{e}^t+1)}{2\mathrm{e}^t+1}=2t$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2}{2\mathrm{e}^t+1}$，

故 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=\frac{2}{3}。$$

（B 组）提升题

1.【考点定位】莱布尼兹公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$；泰勒公式。

【解】方法一：取 $u=\ln(1+x)$，$v=x^2$，因为$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$，

由莱布尼茨公式，$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$ 知，

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\left[x^2\cdot\ln(1+x)\right]^{(n)}=C_n^0\left[\ln(1+x)\right]^{(n)}\cdot x^2+C_n^1\left[\ln(1+x)\right]^{(n-1)}\cdot 2x+C_n^2\left[\ln(1+x)\right]^{(n-2)}\cdot 2+0+\cdots+0\\&=\left[\ln(1+x)\right]^{(n)}\cdot x^2+n\cdot\left[\ln(1+x)\right]^{(n-1)}2x+n(n-1)\cdot\left[\ln(1+x)\right]^{(n-2)}。\end{aligned},$$

从而，$$f^{(n)}(0)=n(n-1)\cdot\left[\ln(1+x)\right]^{(n-2)}\big|_{x=0}=n(n-1)(-1)^{n-3}\frac{(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\Big|_{x=0}=(-1)^{n-3}\frac{n!}{n-2}。$$

方法二： $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式为

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-3}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2}),$$

故 $$x^2\ln(1+x)=x^2[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-3}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})]$$

$$=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\cdots+(-1)^{n-3}\frac{x^n}{n-2}+o(x^n)。$$

由于 $f(x)$ 的麦克劳林展开式为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$。

对比 x^n 的系数知 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^{n-3}\frac{1}{n-2}$，解得 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}\frac{n!}{n-2}$。

【注】

2.【考点定位】函数的微分；复合函数的求导法则。

【答案】D

【解】因为 $y=f(x^2)$，所以 $y'=2xf'(x^2)$，则 $\mathrm{d}y=2xf'(x^2)\Delta x$。由题意可知，

$$\text{当 } x=-1,\ \Delta x=-0.1 \text{ 时，} \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=-1\\ \Delta x=-0.1}}=\left[2xf'(x^2)\Delta x\right]\Big|_{\substack{x=-1\\ \Delta x=-0.1}}=-2\cdot f'(1)\cdot(-0.1)=0.1,$$

所以　$f'(1)=0.5$。

3.【考点定位】拐点的判别。

【答案】C

【解】

$$y'=2(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)=4(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$y''=4\left[(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)\right]=4\left(3x^2-12x+11\right),$$

令 $y''=0$，可得 $x_1=\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}$，$x_2=\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}$。

下面用两种方法确定拐点。

方法一：列表讨论如下

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	拐点	凸	拐点	凹

所以，曲线有两个拐点。

方法二：$y'''=4(6x-12)=24(x-2)$，由于 $y'''(x_1)\neq 0, y'''(x_2)\neq 0$，所以 $(x_1,y(x_1)),(x_2,y(x_2))$ 为该曲线的两个拐点。故答案选(C)。

4.【考点定位】函数的凹凸性；泰勒公式。

【解】方法一：数形结合法

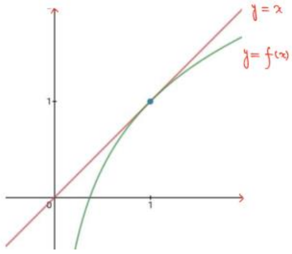
由 $f'(x)$ 严格单调减小知，$f(x)$ 为凸函数

由于 $f(1)=f'(1)=1$ 知，曲线 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)，\text{即 } y=x。$$

注意凸函数的几何特性：曲线上任一点处的切线在曲线上方(如图？)。可得，

$$f(x)<x, x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$$



图？

方法二：令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g'(x)=f'(x)-1$，从而 $g'(1)=f'(1)-1=0$。

由 $f'(x)$ 严格单调减小知，当 $f'(x)>1, x\in(1-\delta,1)$; $f'(x)<1, x\in(1,1+\delta)$

进而得到下表：

x	$(1-\delta,1)$	1	$(1,1+\delta)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↑	最大值点	↓

由于 $g(1)=f(1)-1=0$，故 $g(x)<0, x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$

即 $f(x)<x, x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$。故答案选(A)。

【注】若将条件 $f'(x)$ 严格单调减小加强为 $f''(x)<0$，则我们有更加简洁的做法：

将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处展开得：

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2，\xi \text{ 介于 } 1 \text{ 与 } x \text{ 之间，}$$

由于 $f''(x)<0$ 且 $f(1)=f'(1)=1$，所以当 $x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ 时，

$$f(x)<f(1)+f'(1)(x-1)=1+x-1=x,$$

故答案选（A）。

5.【考点定位】变限积分求导；导数的几何意义；导数的定义；可导与可微的关系。

【解】由于 $y'=\left(\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt\right)'=e^{-\arctan^2 x}\frac{1}{1+x^2}$，所以 $y'|_{x=0}=1$

再由 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(0,0)$ 处有相同切线知 $f(0)=0$， $f'(0)=y'\big|_{x=0}=1$，

故所求切线方程为 $y=x$。

下面用两种方法计算所求极限：

方法一：利用导数的定义

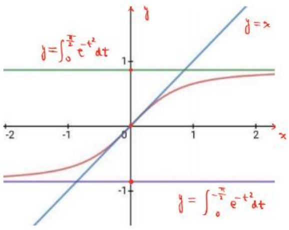
$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}\cdot 2=2f'(0)=2\text{。}$$

方法二：利用可导与可微的关系

由 $f'(0)=1$ 可得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$，从而 $f\left(\frac{2}{n}\right)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$，

故 $$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=2+\lim_{n\to\infty} n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)=2\text{。}$$

【注】为了方便同学们理解，我们画出曲线 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 及其在 $(0,0)$ 处的切线。同时请同学们注意 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 有两条水平渐近线： $y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t, y=\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 如图?



图?

6.【考点定位】函数四则运算的求导法则；复合函数的求导法则；导数的定义；连续的概念。

【答案】$\lambda>2$（题目是否有错误？）

【解】当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}\text{。}$$

由于当 $x\to 0$ 时 $\cos\frac{1}{x}$ 极限不存在，但 $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1$ 有界。故当 $\lambda>1$ 时 $f'(0)=0$ 存在，

当 $\lambda\le 1$ 时 $f'(0)$ 不存在，所以 $\lambda>1$。

当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}$，

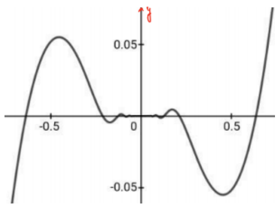
再由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续知 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0$，于是

$$0=\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}\right)=0+\lim_{x\to 0} x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x},$$

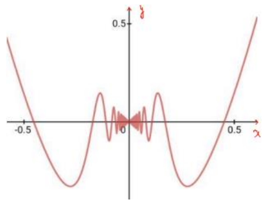
从而，$\lim\limits_{x\to 0} x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x}=0$，可得 $\lambda-2>0$，即 $\lambda>2$。

【注】为了方便同学们理解，我们以 $\lambda=3$ 为例画出 $f(x)=\begin{cases} x^3\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ 及其导数

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\cos\dfrac{1}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ 的图像。如图?



(a) $f(x)=\begin{cases} x^3\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$



(b) $f'(x)=\begin{cases} 3x^2\cos\dfrac{1}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$

图?

7.【考点定位】导数的定义；间断点的分类。

【答案】D

【解】因为 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，故 $x=0$ 处 $g(x)$ 无定义。由于 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(0)=0$。

又由于 $f'(0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$。

从而 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点，故答案选(D)。

8.【考点定位】零点定理；函数单调性。

【解】曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数即为方程 $4\ln x+k=4x+\ln^4 x$ 根的个数，也即是函数

$f(x)=\ln^4 x-4\ln x+4x-k$ 零点的个数。

$$f'(x)=\frac{4\ln^3 x}{x}-\frac{4}{x}+4=\frac{4(\ln^3 x-1+x)}{x},$$

由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$。列表讨论如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↓	最小值点	↑

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值，且最小值为 $f(1)=4-k$。

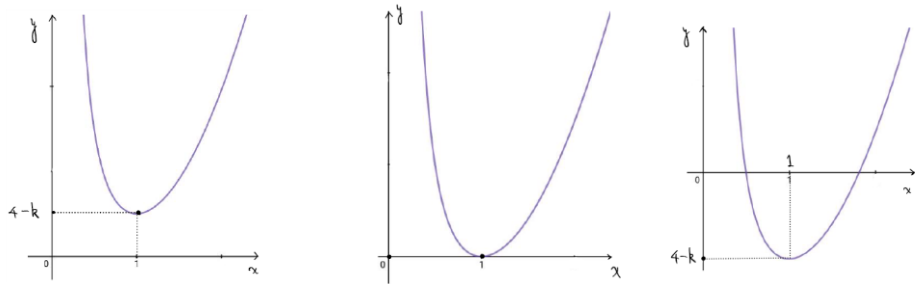
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln^4 x-4\ln x+4x-k)=+\infty,$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln^4 x-4\ln x+4x-k)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x\left(\ln^3 x-4\right)+4x-k\right]=+\infty$。讨论如下：

① 当 $f(1)=4-k>0$，即 $k<4$ 时，$f(x)$ 无零点，即两条曲线无交点；（如图？(a)）

② 当 $f(1)=4-k=0$，即 $k=4$ 时，$f(x)$ 有唯一零点，即两条曲线有一个交点；（如图？(b)）

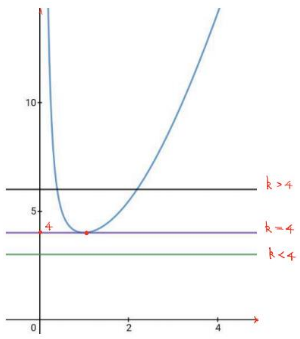
③ 当 $f(1)=4-k<0$，即 $k>4$ 时，$f(x)$ 有两个零点，即两条曲线有两个交点。（如图？(c)）



(a)　　(b)　　(c)

图？

【注】由 $4\ln x+k=4x+\ln^4 x$ 分离参数得 $\ln^4 x-4\ln x+4x=k$，我们可以通过 $g\left(x\right)=\ln^4 x-4\ln x+4x$ 的图像讨论交点的个数。如图？



图？

9.【考点定位】 导数的定义；函数极限的局部保号性。

【答案】C

【解】由导数定义可知，极限 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$。

又由函数极限存在的局部保号性可知，$\exists\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$ 。

所以，当 $-\delta<x<0$ 时，$f(x)<f(0)$；当 $0<x<\delta$ 时，$f(x)>f(0)$。故(C)正确，(D)错误。

对于选项(A)，(B)：当函数在 $x=0$ 处可导时，函数在 $x=0$ 的附近不一定可导，即使在 $x=0$ 的附近可导，也不一定有 $f'(x)$ 与 $f'(0)$ 同号，所以函数不一定具有单调性。所以(A)，(B)都是错误的。为了让同学们对上述分析有直观的理解，我们用下例来说明：

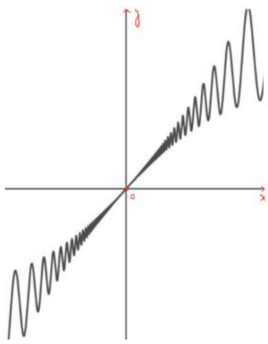
取 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), x\neq 0,\\ 0, \qquad\qquad\qquad x=0.\end{cases}$，则

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}>0,$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{2}+2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}+2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$。

由于 $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}<0, f'\left(\dfrac{1}{2n\pi+\pi}\right)=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}>0,(n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$，

所以，$f'(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不保号，从而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不具有单调性。如图?所示：

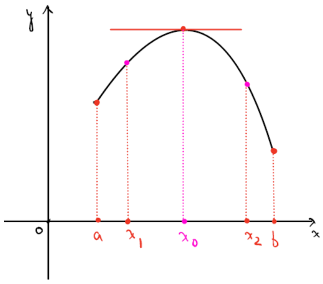


图?

10.【考点定位】 导数的定义；函数极限的保号性。

【答案】D

【解】方法一：数形结合法。如图?



图？

由条件 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f'(a)>0,\ f'(b)<0$ 知：存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $[a,a+\delta]$ 上单调增加，在 $[b-\delta,b]$ 上单调减小。由图？可以得到(A),(B)正确，且函数 $f(x)$ 在 (a,b) 有最大值点 x_0，从而 $f'(x_0)=0$，所以(C)正确。很明显， $f(x)$ 不一定有零点。故答案选(D)

方法二：

对于选项(A)：由于 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f'_+(a)=f'(a)$，又 $f'(a)>0$，故

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0。$$

由函数极限的保号性知，$\exists\delta>0$ 使对于任意的 $x\in(a,a+\delta)\subset(a,b)$ 有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$。又 $x-a>0$，从而 $f(x)-f(a)>0$，即 $f(x)>f(a)$。从而至少存在一点 $x_0\in(a,a+\delta)\subset(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$，故（A）正确。

对于选项(B)：由于 $f'_-(b)=f'(b)<0$ ，故 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$。

由函数极限的保号性知，$\exists\delta>0$ 使对于任意的 $x\in(b-\delta,b)\subset(a,b)$ 有 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$，又 $x-b<0$。从而 $f(x)-f(b)>0$，即 $f(x)>f(b)$。从而至少存在一点 $x_0\in(b-\delta,b)\subset(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$ 成立，故（B）正确。

对于选项(C)：由于 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f'(a)>0$， $f'(b)<0$，有零点定理知 $\exists x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$。故（C）正确。

对于选项(D)。取 $f(x)=-x^2+2$，则 $f'(x)=-2x$，且 $f'(-1)=2>0,\ f'(1)=-2<0$，但函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上无零点。故(D)错误。

综上所述，答案选（D）。

11.【考点定位】周期函数的定义；定积分的换元法；变限积分求导；一元函数的最值。

(1)证明：这里采用两种方法：

方法一：因为 $f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，所以 $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，令 $t=u+\pi$，则 $u=t-\pi$，则

$$f(x+\pi)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\mathrm{d}(u+\pi)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|-\sin u|\mathrm{d}u=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数。

方法二：令 $g(x)=f(x+\pi)-f(x)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t-\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，则

$$g'(x)=\left(\left|\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)\right|-\left|\sin(x+\pi)\right|\right)-\left(\left|\sin\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)\right|-|\sin x|\right)$$
$$=(|\cos x|-|\sin x|)-(|\cos x|-|\sin x|)=0,$$

所以 $g(x)$ 恒为常数。又由于 $g(0)=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t-\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\sin t\mathrm{d}t=1-1=0,$

所以 $g(x)=0,$ 即得 $f(x)=f(x+\pi)$，故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数。

(2)【解】由(1)可知 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数，所以求得 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最值即知函数 $f(x)$ 的最值。当 $0\le x\le\pi$ 时，

$$f'(x)=\left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$

令 $f'(x)=|\cos x|-|\sin x|=0$，解得 $x_1=\frac{\pi}{4},x_2=\frac{3}{4}\pi$，因为

$$f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=-\cos t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1,\quad f(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin t\mathrm{d}t=-\cos t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=\sqrt{2},$$

$$f(\frac{3}{4}\pi)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\mathrm{d}t=-\cos t\Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}+\cos t\Big|_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}=2-\sqrt{2},$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\mathrm{sint}\mathrm{d}t=\cos t\Big|_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}=1。$$

比较以上四个值得 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $2-\sqrt{2}$。故 $f(x)$ 的值域为 $\left[2-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$。

【注】这里我们可以算出 $f(x)$ 在一个周期 $[0,\pi]$ 上的表达式:

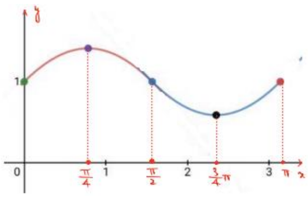
当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时， $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=(-\cos t)\Big|_x^{x+\frac{\pi}{2}}=\sin x+\cos x$；

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，

$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_x^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=(-\cos t)\Big|_x^{\pi}+(\cos t)\Big|_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}};$$

$$=1+\cos x+1-\sin x=2+\cos x-\sin x;$$

故 $f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 2+\cos x-\sin x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]。\end{cases}$ 其图像如图？所示。



图？

12.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；高阶导数；函数的凹凸性。

【答案】$(-\infty,1]$。

【解】 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3t^2-3}{3t^2+3}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t(t^2+1)-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{3t^2+3}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$

又由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2+3>0$，所以 x 关于 t 单调增加，且

$$\lim_{t\to+\infty}x=\lim_{t\to+\infty}\left(t^3+3t+1\right)=+\infty,\ \lim_{t\to-\infty}x=\lim_{t\to-\infty}\left(t^3+3t+1\right)=-\infty。$$

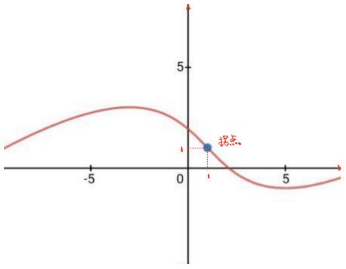
所以可以得到如下表格：

t	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	−	0	+
y	凸	拐点	凹

故曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 的取值范围为 $\left(-\infty,1\right]$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该参数方程表示的曲线的图像，如图?



图?

13.【考点定位】导数的几何意义。

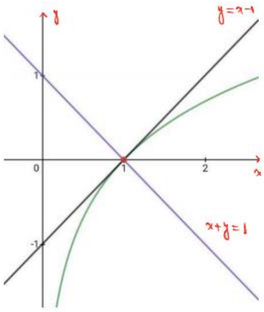
【答案】$y=x-1$

【解】设曲线切点为 $P(x_0,y_0)$，由 $y=\ln x$ 得 $y'=\dfrac{1}{x}$，在 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率

$$k_1=y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}\text{。}$$

由于直线 $x+y=1$ 的斜率为 $k_2=-1$，故由题设可知，$\dfrac{1}{x_0}=1$。所以 $x_0=1$，$y_0=\ln 1=0$，于是可得所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$，即 $y=x-1$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出相应的图像，如图？。



图?

14.【考点定位】零点定理；函数的单调性；函数的极值；函数的奇偶性。

【解】采用分离参数法：

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-a=0 \Leftrightarrow a=2x^3-9x^2+12x$，

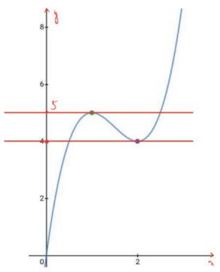
令 $g(x)=2x^3-9x^2+12x$，则 $g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，由 $g'(x)=0$ 得

$x_1=1$ 和 $x_2=2$。列表讨论如下

x	$(-\infty,1)$	1	(1, 2)	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	$\uparrow$	极大值点	$\downarrow$	极小值点	$\uparrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-9x^2+12x\right)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-9x^2+12x\right)=+\infty$。

函数在 $x=1$ 处取得极大值 $g(1)=5$，在 $x=2$ 处取得极小值 $g(2)=4$。如图？所示



图？

当 $a=4$ 或 $a=5$ 时，$y=g(x)$ 与 $y=a$ 有两个交点，即 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 有两个不同的零点。故答案选(B)。

15.【考点定位】利用极限表示的函数；导数定义；夹逼准则。

【答案】C

【解】当 $|x|>1$ 时，有 $|x|^{3n}<1+|x|^{3n}<2\cdot|x|^{3n}$，从而

$$\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}<\sqrt[n]{2\cdot|x|^{3n}}, \text{即} |x|^3<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}<\sqrt[n]{2}|x|^3,$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}|x|^3=|x|^3$。故由夹逼准则知当，$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=|x|^3$；

当 $|x|\le 1$ 时，有 $1\le 1+|x|^{3n}\le 2$，从而 $1\le\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2}\to 1$，由夹逼准则知当，$|x|\le 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=1$。

所以 $f(x)=\begin{cases}-x^3, x<-1\\ 1, -1\le x\le 1,\\ x^3, x>1\end{cases}$ 则 $x\ne -1$ 及 $x\ne 1$ 时，$f(x)$ 均可导。

因为
$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{3x^2}{1}=3,$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^3-1}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-1^-}\frac{-3x^2}{1}=-3,$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1-1}{x+1}=0。$$

所以 $f'_-(1)\neq f'_+(1)$，$f'_-(-1)\neq f'_+(-1)$，故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 以及 $x=1$ 处均不可导。

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个不可导点。

【注】①请同学们注意以下重要且常用的结果:

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 均为非负常数，则有

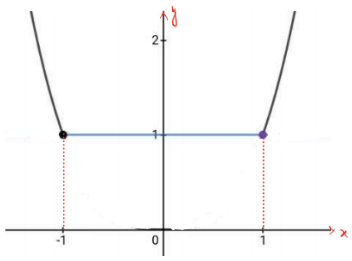
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_k}=\max\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k\}。$$

事实上，不妨 $a_1=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则有 $a_1{}^n\le a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_k{}^n\le a_1{}^n+a_1{}^n+\cdots+a_1{}^n=ka_1{}^n$，

从而，$a_1\le\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_k}\le\sqrt[n]{k}a_1\to a_1\,(n\to\infty)$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_k}=a_1=\max\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k\}$。

②为了方便同学们理解，我们画出函数 $f(x)$ 的图像，如图? 。



图?

16.【考点定位】幂指函数的导数；微分的概念。

【答案】$-\pi\mathrm{d}x$

【解】由于

$$y'=\left[(1+\sin x)^x\right]'=\left[\mathrm{e}^{x\ln(1+\sin x)}\right]'=\mathrm{e}^{x\ln(1+\sin x)}\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right],$$

故 $$y'\big|_{x=\pi}=e^{\pi\ln(1+\sin x)}\left[\ln(1+\sin\pi)+\frac{\pi\cos\pi}{1+\sin\pi}\right]=-\pi,$$

从而 $$dy\big|_{x=\pi}=-\pi\cdot dx。$$

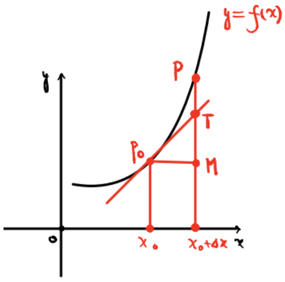
17.【考点定位】函数的微分；函数的单调性、凹凸性；拉格朗日中值定理；泰勒公式。

【答案】A

【解】方法一：数形结合法

由 $f'(x)>0, f''(x)>0$ 可知，$f(x)$ 单调增加且为凹函数(如图？所示)

$\Delta y=MP, dy=MT$，由图可知 $MP>MT>0$，所以 $\Delta y>dy>0$。



图？

方法二：由 $f'(x)>0$，$\Delta x>0$ 知 $dy=f'(x)\Delta x>0$，又由于 $f''(x)>0$，

所以 $f'(x)$ 单增，从而由拉格朗日中值定理得，

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x>f'(x)\Delta x$$

这里 $\xi\in(x,x+\Delta x)$。综上所述：$0<dy<\Delta y$。

方法三：由带拉格朗日余项的二阶泰勒公式可得

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{f''(\xi)}{2!}\Delta x^2,$$

故 $$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\frac{f''(\xi)}{2!}\Delta x^2。$$

又 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，$\Delta x>0$，所以

$$f'(x)\Delta x+\frac{f''(\xi)}{2!}\Delta x^2>f'(x)\Delta x>0,$$

即得 $$\Delta y>dy>0。$$

故答案选(A)。

【注】作为选择题，还可以采用特例法。在本题中，取 $f(x)=x^2$，$x\in(0,+\infty)$。则 $f'(x)=2x>0$，$f'(x)=2x>0$。

直接计算可得：$dy=f'(x)\Delta x=2x\cdot\Delta x$，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=2x\Delta x+\Delta x^2$。故 $0<dy<\Delta y$。

18.【考点定位】连续的概念；导数的定义。

【答案】D

【解】对于选项(A)：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，又由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，故命题(A)正确；

对于选项(B)：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0$，又由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得，

$$0=\lim_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=f(0)+f(0)=2f(0)$$

所以 $f(0)=0$，故命题（B）正确。

对于选项(C)：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 。故命题（C）正确。

对于选项(D)：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)+f(0)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]$

可得，当

$f'(0)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$。

但反之不然，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]$ 存在时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}$ 有可能同时不存在。例如，取 $f(x)=|x|$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-|-x|}{x}=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，即 $f'(0)$ 不存在。故命题(D)错误。

综上所述，答案选（D）。

【注】①当 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$ 时，仿照（C）的分析过程可得：$f(x_0)=0$，且 $f'(x_0)=A$。

这个结论在选择题和填空题中可直接使用；

②设 $m\neq n$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，则

$$f'(x_0)=A \mathrel{\substack{\Rightarrow\\ \not\Leftarrow}} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0+n\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim\left[m\cdot\frac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{m\Delta x}-n\cdot\frac{f(x_0+n\Delta x)-f(x_0)}{n\Delta x}\right]$$

$$=mf'(x_0)-nf'(x_0)=(m-n)A$$ 。

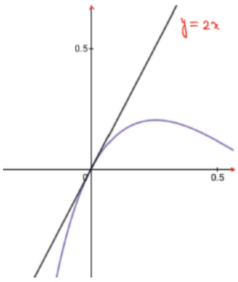
19.【考点定位】参数方程确定的函数的求导法则；变限积分求导；导数的几何意义。

【答案】$y=2x$

【解】 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\cdot\ln(2-t^2)+t^2\frac{-2t}{2-t^2}}{e^{-(1-t)^2}\cdot(-1)}=\frac{2t\cdot\ln(2-t^2)-\frac{2t^3}{2-t^2}}{-e^{-(1-t)^2}},$$

当 $x=0,y=0$ 时，$\begin{cases}\int_0^{1-t}e^{-u^2}du=0,\\ t^2\ln(2-t^2)=0,\end{cases}$ 由于被积函数 $e^{-u^2}>0$，所以 $1-t=0$，故 $t=1$，从而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=2$。所求切线方程为：$y-0=2(x-0)$，即 $y=2x$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该参数方程表示的曲线在 $x=0,y=0$ 附近的图像及所求的切线，如图?



图?

20.【考点定位】导数的几何意义；曲线相切的几何意义。(题目有问题？)

【答案】C

【解】设切点为 (x_0,y_0)，由于两曲线在点 (x_0,y_0) 处相切，所以函数 $y=x^2$ 与 $y=a\ln x$ 在 x_0 处的导数相同, 故

$$2x_0=\frac{a}{x_0}, \qquad ①$$

又 (x_0,y_0) 在曲线上，从而

$$y_0={x_0}^2, \qquad ②$$

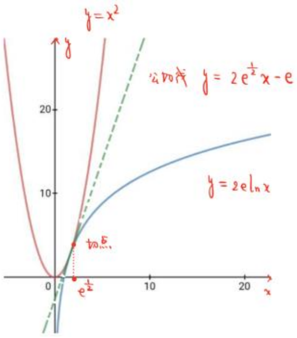
$$y_0=a\ln x_0, \qquad ③$$

由②，③知 $x_0^{\,2}=a\ln x_0$，

又由①式知 $a=2x_0^{\,2}$，从而 $\dfrac{a}{2}=a\ln x_0$。又 $a\neq 0$，故 $\ln x_0=\dfrac{1}{2}$，解得 $x_0=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，从而 $a=2x_0^{\,2}=2\mathrm{e}$。

故答案选(C)。

【注】为了方便同学们理解，我们画出两条曲线及其公切线，如图?



图?

21.【考点定位】隐函数求导；变限积分求导；函数的四则运算法则的求导法则。

【答案】-1

【解】将 $x=0$ 代入方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 可得 $\int_0^y\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$，所以 $y=0$。

方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 可化为：

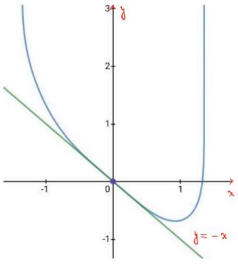
$$\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t \quad , \qquad ①$$

方程①两边关于 x 求导可得：

$$\mathrm{e}^{-(x+y)^2}\cdot(1+y')=\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t+x\cdot\sin x^2 \quad , \qquad ②$$

将 $x=0$，$y=0$ 代入方程②可得 $1+y'=0$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-1$。

【注】①为了方便同学们理解，我们画出该方程表示的曲线在 $x=0,y=0$ 附近的图像及在 $(0,0)$ 点处切线 $y=-x$。如图?



图?

②$\int_0^y e^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 的解为 $y=0$ 是因为被积函数 $e^{-t^2}>0$。

22.【考点定位】高阶导数；由参数方程确定的函数的求导法则；变限积分求导。

【答案】0

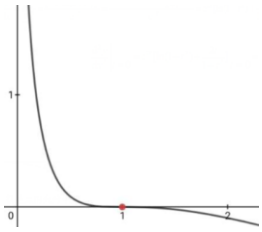
【解】因为 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(\mathrm{e}^{-t})'=-\mathrm{e}^{-t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(\int_0^t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u)'=\ln(1+t^2),$$

所以 $$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\ln(1+t^2)}{-\mathrm{e}^{-t}}=-\mathrm{e}^{t}\ln(1+t^2),$$

则 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{[-\mathrm{e}^{t}\ln(1+t^2)]'}{-\mathrm{e}^{-t}}=\frac{-\mathrm{e}^{t}\ln(1+t^2)-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{t}}{-\mathrm{e}^{-t}}=\mathrm{e}^{2t}[\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}],$$

故 $$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\left.\mathrm{e}^{2t}[\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}]\right|_{t=0}=0。$$

【注】为了方便同学们理解，我们画出该曲线在 $t=0$ 所对应的点 $x=1,y=0$ 附近的图像。如图?



图?

我们还可以发现 $(1,0)$ 是曲线的拐点。

23.【考点定位】一元函数的极值。

【答案】B

【解】记 $y=f\left(g\left(x\right)\right)$，则 y 在 x_0 取极大值的一个充分条件为：

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0,\ \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}<0,$$

下面计算 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x),\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''\left(g(x)\right)\left[g'(x)\right]^2+f'\left(g(x)\right)\cdot g''(x),$$

由于 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，所以 $g'(x_0)=0$ 从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}=f'(a)g'(x_0)=0\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=x_0}=f''(a)[g'(x_0)]^2+f'(a)g''(x_0)=f'(a)g''(x_0),$$

又由于 $g''(x_0)<0$，所以由 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=x_0}<0$ 得 $f'(a)>0$。

综上所述，$f'(a)>0$ 是 $f\left(g\left(x\right)\right)$ 取极大值的一个充分条件，故答案选(B)。

24.【考点定位】复合函数求导法则；驻点的概念。

【答案】C

【解】因为

$$f'(x)=\left[\ln\left|(x-1)(x-2)(x-3)\right|\right]'=\frac{[(x-1)(x-2)(x-3)]'}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

由 $f'(x)=0$ 解得驻点为 $x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{12}}{6}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

【注】① $\ln|g(x)|$ 的导数特点：

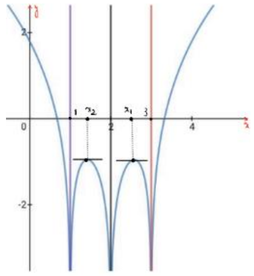
当 $g(x)>0$ 时，$(\ln|g(x)|)'=[\ln g(x)]'=\frac{g'(x)}{g(x)}$；

当 $g(x)<0$ 时，$(\ln|g(x)|)'=[\ln(-g(x))]'=\frac{-g'(x)}{-g(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}$。

总之，当 $g(x)$ 可导且 $g(x)\neq 0$ 时，$\left[\ln|g(x)|\right]'=\frac{g'(x)}{g(x)}$。

② 本题中并没有要求求出驻点的值，由 $f'(x)=0$ 得 $[(x-1)(x-2)(x-3)]'=0$，记 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，则 $g'(x)$ 为二次多项式且 $g(1)=g(2)=g(3)=0$，故由罗尔中值定理知，$\exists\xi_1\in(1,2)$，$\exists\xi_2\in(2,3)$，使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$，且 $g'(x)$ 只有这两个零点，故 $f(x)$ 有两个驻点。

③ 为了方便同学们理解，我们画出函数 $f\left(x\right)$ 的图像及驻点，同时可以看到，该曲线有三条垂直渐近线：$x=1,x=2,x=3$。如图？



图？

25.【考点定位】幂指函数的极限公式：$\lim u^v = \mathrm{e}^{\lim v\ln u}$;；复合函数的求导法则；函数的四则运算法则的求导法则。

【答案】$(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$

【解】由于
$$f(x)=\lim_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{x}{t}\ln(1+3t)}=x\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{x}{t}\cdot 3t}=x\mathrm{e}^{3x},$$

所以
$$f'(x)=(x\mathrm{e}^{3x})'=\mathrm{e}^{3x}+x\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot 3=(1+3x)\mathrm{e}^{3x}\text{。}$$

26.【考点定位】函数的单调性；零点定理。

【证明】令 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$，则
$$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=\frac{3-x^2}{1+x^2}=\frac{(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)}{1+x^2},$$

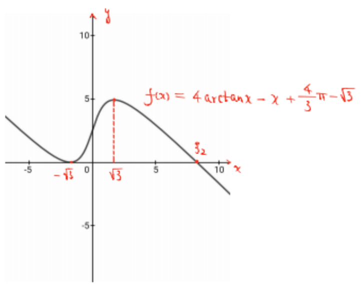
由 $f'(x)=0$ 得 $f(x)$ 的驻点为 $x_1=-\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{3}$，列表讨论如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↓	极小值点	↑	极大值点	↓

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,$$
$$f(-\sqrt{3})=-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}=0,$$
$$f(\sqrt{3})=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0,$$

所以 $f(x)$ 的一个零点为 $x_1=-\sqrt{3}$，另一个零点 $\xi_2\in(\sqrt{3},+\infty)$。

综上所述，方程 $4\arctan x-x+\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根。（其图象如下图？所示）



图？

27.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；导数的几何意义。

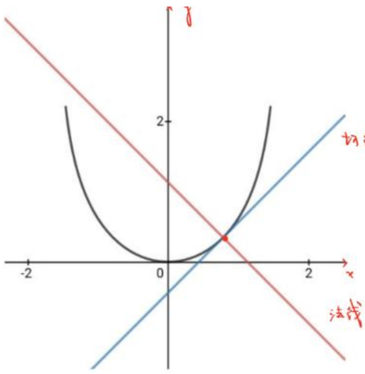
【答案】 $y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

【解】因为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\ln\sqrt{1+t^2})'}{(\arctan t)'}=\frac{[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)]'}{\frac{1}{1+t^2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=t$，

所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=1$。$t=1$时，$x=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，$y=\frac{1}{2}\ln 2$，

故所求法线方程为 $y-\frac{1}{2}\ln 2=-1\cdot(x-\frac{\pi}{4})$，即 $y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$。

【注】为了便于同学们理解，我们画出该参数方程表示的曲线及所求的法线，如图？。



图？

28.【考点定位】导数的定义；导数的几何意义；可导与可微的关系。

【答案】-2

【解】由题意可知 $f(1)=0$，因为 $(x^2-x)'\big|_{x=1}=(2x-1)\big|_{x=1}=1$，又因为曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，所以 $f'(1)=1$。下面我们用两种方法计算所求极限：

方法一：$\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{n}{n+2})-f(1)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1+\frac{-2}{n+2})-f(1)}{\frac{-2}{n+2}}\cdot\frac{-2n}{n+2}$

$$=-2f'(1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=-2。$$

方法二：由 $f(1)=0$，$f'(1)=1$ 得

$$f(1+h)=f(1)+f'(1)h+o(h)=h+o(h)\sim h,(h\to 0),$$

$$\text{所以}\lim_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2}) = \lim_{n\to\infty} nf(1+\frac{-2}{n+2}) = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{-2}{n+2}\right) = -2\text{。}$$

29.【考点定位】曲率；曲率半径；参数方程确定的函数的求导法则；高阶导数。

【答案】C

【解】因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(t^2+7\right)' = 2t$， $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(t^2+4t+7\right)' = 2t+4$，

所以
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{2t+4}{2t} = 1+\frac{2}{t},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1} = 3,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\left(1+\frac{2}{t}\right)'}{2t} = -\frac{1}{t^3},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=1} = -1,$$

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=1} = \frac{1}{\left(1+3^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{10\sqrt{10}},$$

所求曲率半径为

$$R = \frac{1}{K} = 10\sqrt{10}\text{ 。}$$

30.【考点定位】 定积分的计算； 函数的最值。

【解】当 $x \ge 1$ 时， $f\left(x\right) = \int_0^1\left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t = \int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t = x^2-\frac{1}{3}$；

当 $0 < x < 1$ 时， $f\left(x\right) = \int_0^x\left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t + \int_x^1\left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t = \int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t + \int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t$

$$= (x^3-\frac{1}{3}x^3) + \frac{1}{3}(1-x^3) - x^2(1-x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3},$$

所以
$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, 0 < x < 1 \\ x^2 - \frac{1}{3}, \qquad x \ge 1 \end{cases}$$

从而
$$f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, 0 < x < 1, \\ 2x, \qquad x > 1, \end{cases}$$

又由于

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(x^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{2x}{1}=2,\ f'_-(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{4x^2-2x}{1}=2,$$ 所以

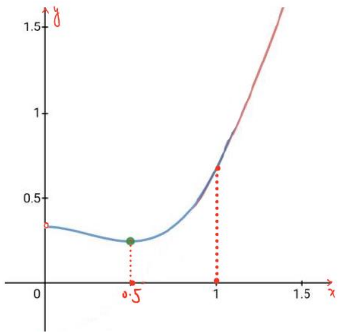
$f'(1)$=2。，故 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x,0<x<1,\\ 2x,x\geq1。\end{cases}$ 由 $f'(x)=0$ 得 $4x^2-2x=0$，从而 $x=\frac{1}{2}$。

列表讨论如下：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	+	+
$f(x)$	↓	最小值	↑		↑

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{1}{2})=\frac{4}{3}\times(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出函数 $f(x)$ 的图像，如图？。



图？

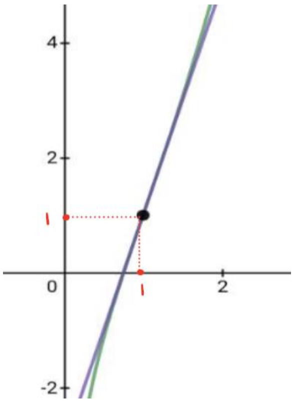
31.【考点定位】 拐点的判定； 导数的几何意义。

【答案】$y=4x-3$

【解】由 $y=x^2+2\ln x$，$(x>0)$ 可得 $y'=2x+\frac{2}{x}$，$y''=2-\frac{2}{x^2}$。令 $y''=0$ 可得 $2-\frac{2}{x^2}=0$，解得 $x=\pm1$，由于 $x>0$，所以 $x=-1$ 舍去，故 $x=1$。因为 $y'''\Big|_{x=1}=\frac{4}{1^3}=4\neq0$，所以该曲线的拐点坐标为 $(1,1)$。

由于 $y'|_{x=1}=\left(2x+\frac{2}{x}\right)\Big|_{x=1}=4,$ 故所求的切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $y=4x-3$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出函数及所求的切线的图像，如图？。



图？

32.【考点定位】微分的定义；可分离变量的方程；满足初始条件的特解。

【答案】2e

【解】由微分的定义可知 $f'(x)=2xf(x)$，记 $y=f(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$，

两边积分得 $\int\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y=\int 2x\mathrm{d}x$，解得 $y=ce^{x^2}$。已知 $f(0)=2$，所以 $c=2$，则 $f(x)=2\mathrm{e}^{x^2}$，故 $f(1)=2\mathrm{e}$。

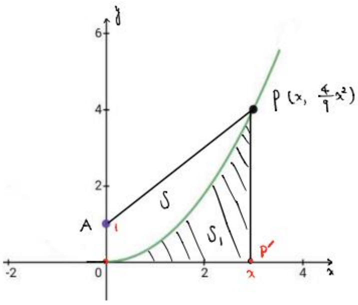
33.【考点定位】定积分的几何应用；导数的物理意义。

【答案】10

【解】设点 P 坐标为 $(x,\dfrac{4}{9}x^2)$，如图？所示。

$$S=S_{梯形OAPP'}-S_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{9}x^2\right)x-\int_0^x\frac{4}{9}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{9}x^2\right)x-\frac{4}{27}x^3=\frac{2}{27}x^3+\frac{1}{2}x$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，当 $x=3$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4$ 时，$\left.\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{x=3}=10$。



图？

34.【考点定位】导数的定义；导数存在的充要条件。

【答案】D

【解】对于选项（A）：由 $f(x)=|x|\sin|x|=\begin{cases} x\sin x, & x\ge 0 \\ x\sin x, & x<0 \end{cases}=x\sin x$ 得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x}=0。$$

对于选项（B）：由 $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}=\begin{cases} x\sin\sqrt{x}, & x\ge 0 \\ -x\sin\sqrt{-x}, & x<0 \end{cases}$ 得

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin\sqrt{x}}{x}=0，$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)\sin\sqrt{-x}}{x}=0，$$

故 $f'(0)=0$。

对于选项（C）：由 $f(x)=\cos|x|$ 得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x}=0。$$

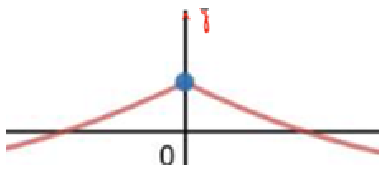
对于选项（D）：由 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}=\begin{cases} \cos\sqrt{x}, & x\ge 0 \\ \cos\sqrt{-x}, & x<0 \end{cases}$ 得

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2}{x}=-\frac{1}{2}，$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\sqrt{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{-x})^2}{x}=\frac{1}{2}。$$

因为 $f'_+(0)\ne f'_-(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在。

【注】为了方便同学们理解，我们画出选项(D)中的函数在 $x=0$ 附近的图像，如图？。



图？：函数 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导。

35.【考点定位】曲率；泰勒公式。

【答案】A

【解】 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切且曲率相等

$$\Leftrightarrow\ f(a)=g(a),\quad f'(a)=g'(a),\quad \frac{|f''(a)|}{[1+f'^2(a)]^{3/2}}=\frac{|g''(a)|}{[1+g'^2(a)]^{3/2}}$$

$$\Leftrightarrow\ f(a)=g(a),\quad f'(a)=g'(a),\ |f''(a)|=|g''(a)|。$$

由于

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+o[(x-a)^2]$$

$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2+o[(x-a)^2]$$

故 $$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{[f(a)-g(a)]+[f'(a)-g'(a)](x-a)+\frac{1}{2!}[f''(a)-g''(a)](x-a)^2+o[(x-a)^2]}{(x-a)^2}$$

$$\Leftrightarrow f(a)=g(a),\quad f'(a)=g'(a),\ f''(a)=g''(a)。$$

这样就得到：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切且曲率相等的充分非必要条件。

综上所述，答案选（A）。

36.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；导数的几何意义。

【答案】$\frac{3\pi}{2}+2$

【解】因为 $$\frac{dx}{dt}=（t-\sin t)'=1-\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=(1-\cos t)'=\sin t,$$

所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\left.\frac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=-1$$

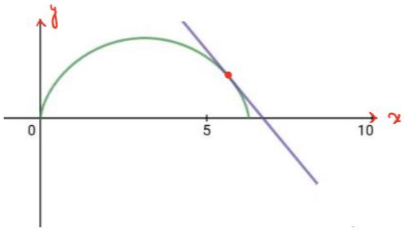
则在 $t=\frac{3\pi}{2}$ 对应点的切线斜率 $k=-1$。

因为 $t=\frac{3\pi}{2}$，所以 $x=1+\frac{3\pi}{2}$，$y=1$，即得切点为 $(1+\frac{3\pi}{2},1)$，从而切线方程为

$$y-1=-(x-1-\frac{3\pi}{2}),\ 即\ y=-x+2+\frac{3\pi}{2}。$$

令 $x=0$，得 $y=2+\frac{3\pi}{2}$，故切线在 y 轴上的截距为 $2+\frac{3\pi}{2}$。

【注】本题中的曲线是一种摆线。为了方便同学们理解，我们画出该曲线的一拱及 $t=\frac{3\pi}{2}$ 对应点的切线，如图？。



图？

37.【考点定位】 一阶微分方程的初值问题； 一阶线性微分方程的通解公式； 函数凹凸性的判定； 拐点的判定。

【解】（1）由一阶线性微方方程通解公式可得方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\left(c+\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot \mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x+c)。$$

已知 $y(0)=0$，所以 $c=0$，则 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 。

（2）由 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 得

$$y'=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$y''=-2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

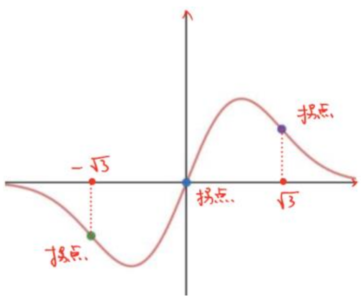
令 $y''=0$，解得 $x=0$， $x=\sqrt{3}$， $x=-\sqrt{3}$。列表讨论如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	−	0	+	0	−	0	+
y	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	凹

$y(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$， $y(0)=0$， $y(\sqrt{3})=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$，

所以凹区间为 $[-\sqrt{3},0]$，$[\sqrt{3},+\infty)$；凸区间为 $(-\infty,-\sqrt{3}]$，$[0,\sqrt{3}]$，拐点为 $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图？。



图？

38.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；高阶导数。

【答案】$-\sqrt{2}$

【解】由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\cdot(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}})=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，

所以
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\frac{1}{t}。$$

又
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3},$$

从而
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\left.\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}。$$

39.【考点定位】函数的单调性；零点定理。

【答案】A

【解】由 $f(x)=ax-b\ln x$ 得，$f'(x)=a-\frac{b}{x},x\in(0,+\infty)$。

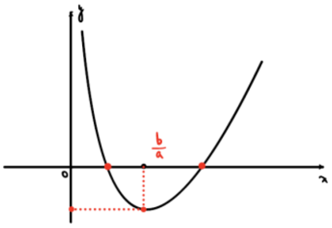
①若 $b\le 0$，则 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 $f(x)$ 与 x 轴至多有一个交点，故此时 $f(x)$ 不可能有两个零点。

②若 $b>0$，则令 $f'(x)=a-\frac{b}{x}=0$，解得 $x=\frac{b}{a}$。列表讨论如下：

x	$\left(0,\frac{b}{a}\right)$	$\frac{b}{a}$	$\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	$\downarrow$	最小值点	$\uparrow$

$f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{b}{a})=a\cdot\frac{b}{a}-b\ln\frac{b}{a}=b-b\ln\frac{b}{a}=b\left(1-\ln\frac{b}{a}\right)$。又由于

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(ax-b\ln x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-b\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(a-b\frac{\ln x}{x})=+\infty$，我们得到 $f(x)$ 的图像如图？所示：



图？

从而，$f(x)$ 有两个零点 $\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=b\left(1-\ln\frac{b}{a}\right)<0 \Leftrightarrow 1-\ln\frac{b}{a}<0 \Leftrightarrow \frac{b}{a}>\mathrm{e}$。

综上所述，答案选(A)。

方法二：这里向同学们提供另一种解法：分离参数法。首先，显然有 $b\neq 0$

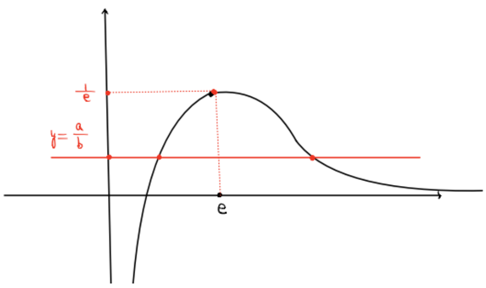
从而 $f\left(x\right)=ax-b\ln x=0 \Leftrightarrow ax=b\ln x \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{\ln x}{x}$。

令 $g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，由 $g'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$ 得 $x=\mathrm{e}$。列表讨论如下

x	$(0,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$g'\left(x\right)$	−	0	+
$g\left(x\right)$	↑	最大值点	↓

$$g\left(\mathrm{e}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}},\ \lim_{x\to 0^+}g\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0。$$

这样我们得到函数 $g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$ 的图像如图？所示：



图？

所以，$f(x)$ 有两个零点 $\Leftrightarrow 0<\frac{a}{b}<\frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \frac{b}{a}>\mathrm{e}$。故答案选(A)。

（C 组）拔高题

1.【考点定位】连续的概念；导数的定义；导数的几何意义；周期函数的导数；可导与可微的关系。

【解】方法一：由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导知，当 $x\to 0$

$f(1+\sin x)=f(1)+f'(1)\sin x+o(\sin x)=f(1)+f'(1)(x+o(x))+o(x)=f(1)+f'(1)x+o(x)$，

$f(1-\sin x)=f(1)+f'(1)(-\sin x)+o(\sin x)=f(1)-f'(1)(x+o(x))+o(x)=f(1)-f'(1)x+o(x)$。

由 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$ 知，

$$8x+\alpha(x)=\left[f(1)+f'(1)x+o(x)\right]-3\left[f(1)-f'(1)x+o(x)\right]=-2f(1)+4f'(1)x+o(x)。$$

所以 $\begin{cases}-2f(1)=0,\\ 4f'(1)=8,\end{cases}$ 得 $f(1)=0$， $f'(1)=2$。

又由于 $f(x+5)=f(x)$，所以 $f(6)=f(1)=0$， $f'(6)=f'(1)=2$，故 $(6,f(6))$ 处的切线方程为

$y-0=2(x-6)$，即 $y=2x-12$。

方法二：由 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$ 及 $f(x)$ 连续可得

$$\lim_{x\to 0}\left[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[8x+\alpha(x)\right]=0,$$

所以 $f(1)-3f(1)=0$，得 $f(1)=0$。再由 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+\alpha(x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+\alpha(x)}{x}=8,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\cdot\frac{f(1-\sin x)-f(0)}{-\sin x}\right]=8,$$

由 $f'(1)$ 存在知， $f'(1)+3f'(1)=8$；所以 $f'(1)=2$。又因为 $f(x+5)=f(x)$，所以 $f(6)=f(1)=0$， $f'(6)=f'(1)=2$。故 $(6,f(6))$ 处的切线方程为 $y-0=2(x-6)$，即 $y=2x-12$。

2.【考点定位】函数极限的局部保号性；左、右导数。

【答案】B

【解】记 $\varphi(x)=\left|f(x)\right|$。

对于选项 (A)，(B)：当 $f(a)=0$ 时，

$$\varphi_+'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|,$$

$$\varphi_-'(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=-|f'(a)|,$$

若 $f'(a)=0$，则 $\varphi_+'(a)=\varphi_-'(a)=0$，此时 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 点可导；

若 $f'(a)\neq 0$，则 $\varphi_+'(a)\neq\varphi_-'(a)$，此时 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 点不可导。（如图 1）

对于选项 (C)，当 $f(a)>0$ 时，由连续函数的局部保号性知 $f(x)$ 在 $x=a$ 的附近为正，从而

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\text{。（如图 2）}$$

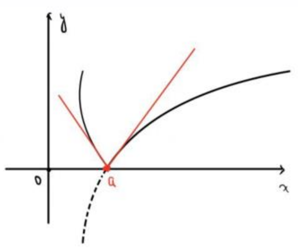
此时 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 点可导。

对于选项 (D)，当 $f(a)<0$ 时，由连续函数的局部保号性知 $f(x)$ 在 $x=a$ 的附近为负，从而

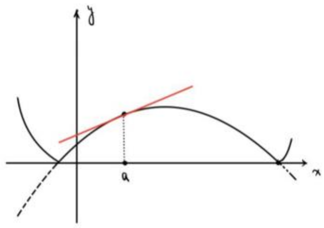
$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)+f(a)}{x-a}=-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-f'(a)\text{（如图 3）}$$

此时 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 点可导。

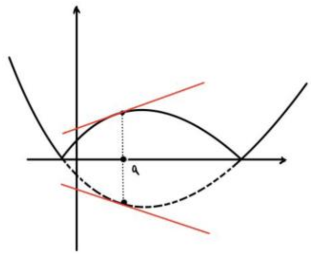
综上所述：$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件为 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$。故答案选 (B)。



（1） $\varphi_+'(a)\neq\varphi_-'(a)$



（2） $\varphi'(a)=f'(a)$



（3） $\varphi'(a)=-f'(a)$

图?:图中将函数 $f(x)$ 位于 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方就得到了 $|f(x)|$。

3.【考点定位】函数的单调性；极值点的判别；渐近线方程；等价无穷小代换；洛必达法则。

【解】$y'=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}+(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\left(1+\dfrac{x-1}{1+x^2}\right)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$

$$=\frac{x^2+x}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\frac{x(x+1)}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x},$$

令 $y'=0$ 解得 $x=0,x=-1$。列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↑	极大值点	↓	极小值点	↑

故 y 的单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(-\infty,-1]$，$[0,+\infty)$，极小值 $y(0)=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$，极大值 $y(-1)=-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$。

因为 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故曲线无垂直渐近线。

当 $x\to-\infty$ 时，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=1,\ b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1\right)-\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\arctan x}{\frac{1}{x}}-1$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-1=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)-1=-2$$，故 $y=x-2$ 为一条斜渐近线。

当 $x\to+\infty$ 时，

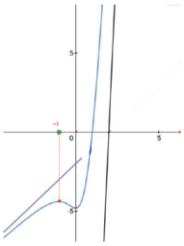
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\right)=\mathrm{e}^{\pi},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-\mathrm{e}^{\pi}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}x\left(\mathrm{e}^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}-1\right)-\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{e}^{\pi}$$

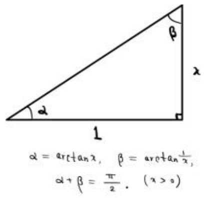
$$=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}-e^{\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-\mathrm{e}^{\pi}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\mathrm{e}^{\pi}=-2\mathrm{e}^{\pi},$$

故另一条斜渐近线为 $y=\mathrm{e}^{\pi}x-2\mathrm{e}^{\pi}=\mathrm{e}^{\pi}(x-2)$。

【注】①为了方便同学们理解，我们画出函数的图像，包括渐近线、极值点、单调区间。如图?



图?



图?

②这里我们向同学们展示另外一种求该曲线的斜渐近线的方法:

首先请同学们注意以下两个简单直观的结果(如图？)

(i) 当 $x>0$ 时，$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$; (ii) 当 $x<0$ 时，$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$。

请同学们试着利用导数 $\left(\arctan x+\arctan\frac{1}{x}\right)'=0$ 证明上述结论。

当 $x\to-\infty$ 时,

$$y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right)}=(x-1)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{1}{x}}=(x-1)\left(1-\arctan\frac{1}{x}+o\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\overset{\arctan\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}{=}(x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=(x-2)+\alpha,$$

这里 $\alpha=\frac{1}{x}+(x-1)\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\to0(x\to-\infty)$，故 $y=x-2$ 为一条斜渐近线。

当 $x\to+\infty$ 时,

$$y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right)}=(x-1)\mathrm{e}^{\pi-\arctan\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\pi}(x-1)\left(1-\arctan\frac{1}{x}+o\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\overset{\arctan\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}{=}\mathrm{e}^{\pi}(x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\mathrm{e}^{\pi}(x-2)+\alpha,$$

这里 $\alpha=\mathrm{e}^{\pi}\left[\frac{1}{x}+(x-1)\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\to0(x\to-\infty)$，故 $y=\mathrm{e}^{\pi}(x-2)$ 为另一条斜渐近线。

4.【考点定位】导数定义。

【答案】B

【解】对于选项 (A)：

由于$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}h^2}{h^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\overset{t=1-\cos h>0}{=}\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{2}f'_+(0)；$$

所以$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在是右导数$f'_+(0)$存在的充要条件，是$f'(0)$存在的必要不充分条件，故(A)错误；

对于选项(B)：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\dfrac{-h}{h}$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\overset{t=1-e^h}{=}-\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-f'(0)。$$

故$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$存在是$f(x)$在$x=0$处可导的充要条件，故（B）正确；

对于选项(C)：若$f(x)$在$x=0$处可导，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}=f'(0)\lim_{h\to 0}\frac{h-\sin h}{h^2}$$

$=f'(0)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cos h}{2h}=f'(0)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}h^2}{2h}=0$，故$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在。

反之，若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=A$存在，则

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-[h-\frac{1}{3!}h^3+o(h^3)]}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot(\frac{1}{6}h)，$$

由于$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{6}h=0$　。所以当$h\to 0$时，$\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}$可能存在也可能不存在，所以$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在不是$f(x)$在$x=0$可导的充要条件，故（C）不正确；

对于选项(D)，若$f(x)$在$x=0$处可导，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)+f(0)-f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot 2-\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2f'(0)-f'(0)=f'(0)。$$

反之，若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=A$存在，但是当$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)}{h}$与$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$都不存在时，极限$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$可以存在，所以$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在不是$f(x)$在$x=0$处可导的充要条件，故（D）不正确。

综上所述，答案选（B）。

【注】①如果取 $f(x)=|x|$，那 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h-\sin h|}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left|h-[h-\frac{1}{6}h^3+o(h^3)]\right|}{h^2}=0$ 存在，但是 $f(x)$

在 $x=0$ 处不可导，由此可得(C)不正确。

②如果取 $f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，它在 $x=0$ 处不可导。但是 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在，由此可得（D）不正确。

5.【考点定位】弹性。

【答案】$-\dfrac{\alpha}{\beta}$

【解】方法一：当 $Q=1$ 时，$AL^{\alpha}K^{\beta}=1$，方程两边对 L 求导可得：$\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}+\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L}=0$，

解得 $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L}=\dfrac{-\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}}=-\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{K}{L}$，所以 K 关于 L 的弹性为 $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L}\cdot\dfrac{L}{K}=-\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{K}{L}\cdot\dfrac{L}{K}=-\dfrac{\alpha}{\beta}$。

方法二：当 $Q=1$ 时，$AL^{\alpha}K^{\beta}=1$，等式两边取对数得：$\ln A+\alpha\ln L+\beta\ln K=0$，两端对 L 求导得

$\alpha\dfrac{1}{L}+\beta\dfrac{1}{K}\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L}=0$，从而得到 K 关于 L 的弹性为 $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L}\cdot\dfrac{L}{K}=-\dfrac{\alpha}{\beta}$。

6.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；极坐标与直角坐标的关系；导数的几何意义。

【解】作极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，这里 $r=1-\cos\theta$，所以曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta,\\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{4}$，$y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。因为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=[(1-\cos\theta)\cos\theta]'=-\sin\theta+\sin 2\theta$，

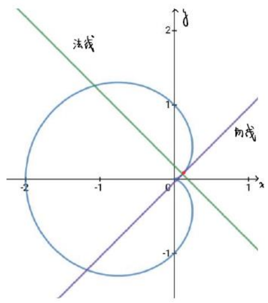
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=[(1-\cos\theta)\sin\theta]'=\cos\theta-\cos 2\theta$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\dfrac{\cos\theta-\cos 2\theta}{-\sin\theta+\sin 2\theta}$。从而所求切线的斜率为

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\dfrac{\cos\theta-\cos 2\theta}{-\sin\theta+\sin 2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1$，所求法线斜率为−1，

故所求的切线方程为 $y-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})=x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4})$，即 $y=x+\frac{5}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

所求的法线方程为 $y-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})=-[x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4})]$，即 $y=-x-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$。

【注】曲线 $r=1-\cos\theta$ 是心形线，为了方便同学们理解，我们画出该曲线及所求的切线与法线，如图?



图?

7.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；变限积分求导；高阶导数。

【解】由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(\int_1^{1+2\ln t}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u)'=\frac{\mathrm{e}^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{2\mathrm{e}\cdot t^2}{t(1+2\ln t)}=\frac{2\mathrm{e}\cdot t}{1+2\ln t},$$

故
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{2\mathrm{e}\cdot t}{1+2\ln t}}{4t}=\frac{\mathrm{e}}{2(1+2\ln t)}。$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{\mathrm{e}}{t(1+2\ln t)^2}}{4t}=-\frac{\mathrm{e}}{4t^2(1+2\ln t)^2},$$

当 $x=9$ 时，$9=1+2t^2$ 解得 $t=\pm2$，又 $t>1$，故 $t=2$，从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}=-\left.\frac{\mathrm{e}}{4t^2(1+2\ln t)^2}\right|_{t=2}=-\frac{\mathrm{e}}{4\cdot4\cdot(1+2\ln2)^2}=-\frac{\mathrm{e}}{16(1+2\ln2)^2}。$$

8.【考点定位】函数的表达式；左、右导数。

【解】（Ⅰ）当 $x\in[-2,0)$ 时，$x+2\in[0,2)$，$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=k(x+2)(x^2+4x)$。

（Ⅱ）由于 $f(0)=0$，于是 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{k(x+2)(x^2+4x)}{x}=8k$，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4,$$

$f(x)$在$x=0$处可导的充要条件是$f'_-(0)=f'_+(0)$，即$8k=-4$，故当$k=-\dfrac{1}{2}$时，函数$f(x)$在$x=0$处可导。

9.【考点定位】微分学的经济学应用；函数的单调性。

【解】（I）$E_d=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\cdot\dfrac{P}{Q}=-(-5)\dfrac{P}{100-5P}=\dfrac{P}{20-P}$。

（II）由$R=PQ$得，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q\left(1+\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\dfrac{P}{Q}\right)=Q(1-E_d)$。

当$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}<0$，即$1-E_d<0$时收益$R$为价格$P$的减函数，此时降低价格会增加收益。从而由$1-\dfrac{P}{20-P}<0$解得$10<p<20$，所以当$10<p<20$时，降低价格会增加收益。

10.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；导数的几何意义。

【答案】A

【解】因为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(t^2+2t)'=2t+2$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=[\ln(1+t)]'=\dfrac{1}{1+t}$，

所以
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\frac{1}{2(1+t)^2}。$$

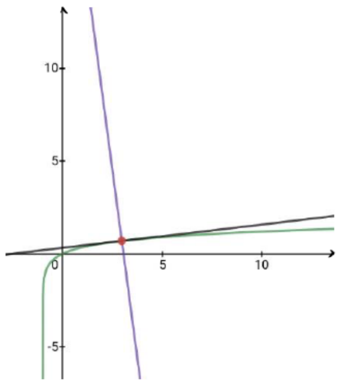
因为$x=3$，所以$t^2+2t=3$，解得$t=1$或$t=-3$。

又因为$y=\ln(1+t)$，所以$t>-1$，故$t=1$，从而$y=\ln 2$，即切点为$(3,\ln 2)$，又由于

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=3}=\left.\dfrac{1}{2(1+t)^2}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{8}$，所以切线斜率为$\dfrac{1}{8}$，此时法线斜率为-8，故法线方程为

$y-\ln 2=-8(x-3)$。令$y=0$，得$x=3+\dfrac{1}{8}\ln 2$，故法线与x轴交点的横坐标为$3+\dfrac{1}{8}\ln 2$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该参数方程表示的曲线及在$(3,\ln 2)$点处的切线与法线。



11.【考点定位】微分学的经济学应用。

【答案】D

【解】因为$\left|\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\dfrac{p}{Q}\right|=\left|\dfrac{-2p}{160-2p}\right|=1$，所以 $p=40$。故答案选（D）。

12.【考点定位】弹性的经济学意义。

【答案】8000

【解】由需求弹性的定义可知$\varepsilon_P=-\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\cdot\dfrac{p}{Q}$，又由于收益函数为$R(p)=pQ(p)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}+Q(p)=Q(p)\left[\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{Q(p)}+1\right]=Q(p)\left(1-\varepsilon_p\right)。$$

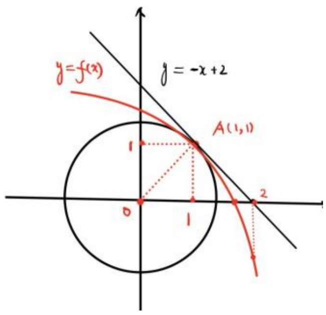
当需求量为 10000 件，价格增加$\mathrm{d}p=1$元时，产品的收益会增加，

$$\mathrm{d}R=Q(p)\left(1-\varepsilon_p\right)\mathrm{d}p=10000(1-0.2)=8000\text{（元）}。$$

13.【考点定位】函数单调性的判定；函数凹凸性的判定；曲率圆的概念；极值点的判定；零点定理；拉格朗日中值定理。

【答案】B

【解】数形结合法



如图所示，因为曲率圆$x^2+y^2=2$在点$(1,1)$附近是凸弧，且$f''(x)$不变号，所以在点$(1,1)$附近满足$f''(x)<0$。又由于曲线$y=f(x)$与曲率圆在点$(1,1)$处具有公切线，且圆$x^2+y^2=2$在点$(1,1)$处的切线为$y=-x+2$，由凸函数的几何特征可得曲线 $y=f(x)$在切线$y=-x+2$的下方，所以

$$f(x)<-x+2,$$

故 $f(2)<-2+2=0$。又由于 $f(1)=1$，故由零点定理知，$f(x)$在$(1,2)$内有零点。

由于曲线在点$(1,1)$处导数为$f'(1)=-1$。由$y''<0$，$x\in(1,2)$，可知$f'(x)$在$(1,2)$内单调递减，则$f'(x)<f'(1)<0$，所以$f(x)$在$(1,2)$内单调递减，则$f(x)$在$(1,2)$内没有极值点。

故答案选（B）。

【注】在考试中，作为选择题，我们将题设信息翻译成图？一眼就能看出选(B)，上述推导过程是为了使过程更加严密。但很明显，我们的推导过程实际上很大程度上借助了图，请同学们一定要重视这种数形结合的方法。

14.【考点定位】拐点的判别。

【答案】C

【解】令$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$，则$x=1$，$x=2$，$x=3$，$x=4$分别是方程$f(x)=0$的单根，2 重根，3 重根，4 重根。

（1）$x=1$，$x=2$不是方程$f''(x)=0$的根，即$f''(1)\neq 0$，$f''(2)\neq 0$，所以$(1,0)$，$(2,0)$都不是拐点；

（2）$x=3$是方程$f''(x)=0$的单根，不是方程$f'''(x)=0$的根，即$f''(3)=0$，$f'''(3)\neq 0$，所以$(3,0)$是拐点；

（3）$x=4$是方程$f''(x)=0$的二重根，$f'''(x)=0$的单根，不是$f^{(4)}(x)=0$的根，即$f''(4)=f'''(4)=0$，$f^{(4)}(x)\neq 0$，所以点$(4,0)$不是拐点。故答案选（C）。

【注】（1）若$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点，类推可得如下结论：

设$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$；

①若n为奇数，则$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；

②若n为偶数，则$(x_0,f(x_0))$不是曲线$y=f(x)$的拐点；

（2）快速判断方程$f(x)=0$的根x_0的重数的方法：若x_0是方程$f(x)=0$的n重根，即$f(x)=(x-x_0)^n g(x)$且$g(x_0)\neq 0$，$g(x)$有n阶导数，则x_0是方程$f'(x)=0$的$n-1$重根，是方程$f''(x)=0$的$n-2$重根，……，是方程$f^{(k)}(x)=0$的$n-k$重根等等。

(3) 由 (1), (2) 知，若多项式$f(x)=A(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_n)^{k_n}$，其中$A\neq 0,x_1,x_2,\cdots,x_n$互异，$k_1,k_2,\cdots,k_n$为正整数，则当$k_i$为偶数时，$x_i$为极值点；当$k_i$为大于 1 的奇数时，$(x_i,0)$为拐点。

15.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；函数的极值；凹凸性的判别；拐点的判别。

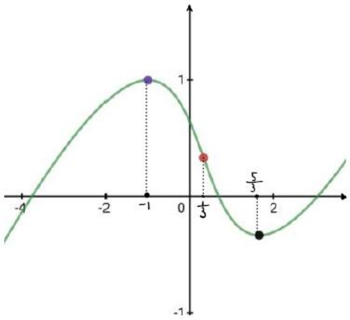
【解】由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t^2+1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t^2-1$，故 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$。令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$=0，解得 $t=\pm1$。

又 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)'\dfrac{1}{t^2+1}=\dfrac{4t}{\left(t^2+1\right)^3}$，由 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$ 得 $t=0$，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t^2+1>0$，故 x 关于 t 为单调增加。又由于 $\lim\limits_{t\to-\infty}x=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}\right)=-\infty,\lim\limits_{t\to+\infty}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}\right)=+\infty$。从而得到下表：

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},\frac{5}{3})$	$\frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3},+\infty)$
$y'(x)$	+		−		−		+
$y''(x)$	−		−		+		+
$y(x)$	单增 凸	极大值点	单减 凸	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$拐点	单减 凹	极小值点	单增 凹

故 $y(x)$ 的凹区间 $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，凸区间 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$，极小值 $y\left(\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$，极大值 $y(-1)=1$，拐点为 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该参数方程表示的曲线，其中凸凹区间、极值点、拐点如图？所示。



图？

16.【考点定位】零点定理；函数的单调性；函数的奇偶性。

【解】令 $f(x)=k\arctan x-x$， 则 $f'(x)=\dfrac{k}{1+x^2}-1=\dfrac{(k-1)-x^2}{1+x^2}$。

①若 $k-1\le0$，即 $k\le1$ 时， $f'(x)\le0$，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，又

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(k\arctan x-x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(k\arctan x-x)=-\infty$。由零点定理知 $f(x)$ 在

$(-\infty,+\infty)$ 有唯一实根且 $f(0)=0$，从而唯一实根为 $x=0$，如图(a)。

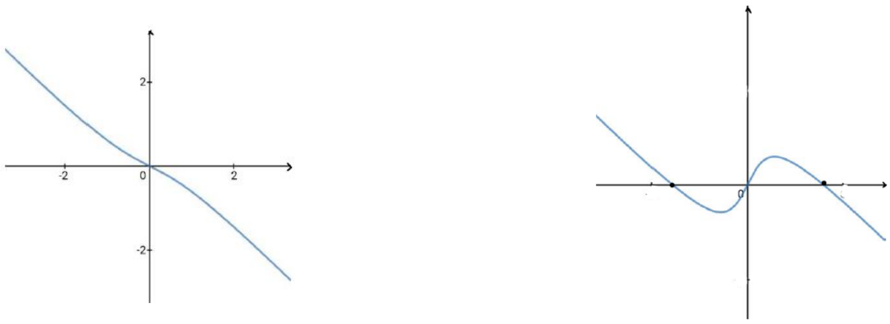
②若 $k-1>0$，即 $k>1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm\sqrt{k-1}$，列表讨论如下：

x	$\left(-\infty,-\sqrt{k-1}\right)$	$-\sqrt{k-1}$	$\left(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1}\right)$	$\sqrt{k-1}$	$\left(\sqrt{k-1},+\infty\right)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↓	极小值点	↑	极大值点	↓

注意 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(k\arctan x-x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(k\arctan x-x)=-\infty, f\left(0\right)=0$，我们得

到函数 $f(x)$ 的图像，如图（b）所示。此时，$f(x)$ 有三个零点。

综上所述，当 $k\le1$ 时方程仅有一实根 $x=0$；当 $k>1$ 时，方程有三个不同实根。



（a）　　　　（b）

图？

17.【考点定位】分段函数的导数；函数的复合；复合函数的求导法则。

【答案】$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

【解】方法一：首先求得 $f(f(x))$ 的表达式

$$f(f(x))=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)} & f(x)\ge1,\\ 2f(x)-1 & f(x)<1\end{cases}$$

由 $f(x)\ge1$ 得 $\begin{cases}x\ge1\\ \ln\sqrt{x}\ge1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1\\ 2x-1\ge1\end{cases}$，解得 $x\ge\mathrm{e}^2$；

由 $f(x)<1$ 得 $\begin{cases}x\ge1\\ \ln\sqrt{x}<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1\\ 2x-1<1\end{cases}$，解得 $x<1$ 或 $1\le x<\mathrm{e}^2$，故

$$f(f(x))=\begin{cases}4x-3 & x<1,\\ 2\ln\sqrt{x}-1 & 1\le x<e^2,\\ \ln\sqrt{\ln\sqrt{x}} & x\ge e^2\end{cases}$$

所以 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=e}=(2\ln\sqrt{x}-1)'\Big|_{x=e}=(\ln x-1)'\Big|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$。

方法二：因为 $y=f(f(x))$ 是由 $y=f(u),u=f(x)$ 复合所得的函数，且 $x=e$ 时，$u=f(x)=\ln\sqrt{x}$ 在 $u=f(e)=\ln\sqrt{e}=\dfrac{1}{2}$ 处可导，$y=f(u)=2u-1$ 在 $u=\dfrac{1}{2}$ 处也可导。所以

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=e}=\left(\frac{dy}{du}\Big|_{u=\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{du}{dx}\Big|_{x=e}\right)=\left[(2u-1)'\Big|_{u=\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[(\ln\sqrt{x})'\Big|_{x=e}\right]=2\cdot\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'\Big|_{x=e}=\frac{1}{e}。$$

方法三：直接使用导数的定义

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=e}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[f(e+\Delta x)]-f[f(e)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\ln\sqrt{e+\Delta x})-f(\ln\sqrt{e})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2\ln\sqrt{e+\Delta x}-1)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(e+\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left[e(1+\frac{\Delta x}{e})\right]-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\ln(1+\frac{\Delta x}{e})-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{e})}{\Delta x}=\frac{1}{e}。$$

18.【考点定位】隐函数的导数；导数的定义。

【答案】1

【解】方法一：

将 $x=0$ 代入方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 得 $y=1$，故 $f(0)=1$。

对方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 两端同时对 x 求导，得

$$y'-1=e^{x(1-y)}\cdot(1-y-xy') \qquad （1）$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入（1）式得 $y'(0)-1=0$，解得 $y'(0)=1$，即 $f'(0)=1$。

所以 $$\lim_{n\to\infty}n[f(\frac{1}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=1。$$

方法二：首先 $f(\dfrac{1}{n})=f(0)+f'(0)\cdot\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})$，下面求出 $f(0),f'(0)$。

将 $x=0$ 代入方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 得 $y=1$，故 $f(0)=1$。

对方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 两端同时对 x 求导，得

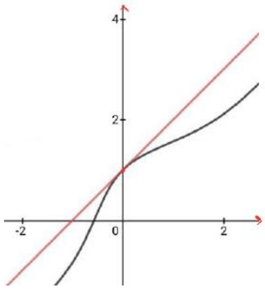
$$y'-1=\mathrm{e}^{x(1-y)}\cdot(1-y-xy') \qquad ①$$

将 $x=0$， $y=1$ 代入①式得 $y'(0)-1=0$，解得 $y'(0)=1$，即 $f'(0)=1$。于是

$$f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})=1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)。$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{1}{n})-1]=\lim\limits_{n\to\infty}n[1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})-1]=\lim\limits_{n\to\infty}n[\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})]=1$。

【注】由 $f(0)=1, f'(0)=1$ 可得该曲线在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$。为了便于同学们理解，我们画出该曲线在 $(0,1)$ 附近的图像及在 $(0,1)$ 处的切线，如图?



图?

19.【考点定位】隐函数的导数；可导与可微的关系。

【答案】A

【解】首先 $f(\frac{2}{n})=f(0)+f'(0)\cdot\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})$，下面求出 $f(0), f'(0)$。

当 $x=0$ 时，代入方程得，$1-\ln y=1$，所以 $y=1$，故 $f(0)=1$。

方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 两边同时对 x 求导得，$-\sin(xy)\cdot[xy'+y]+\dfrac{y'}{y}-1=0$，

将 $x=0$， $y=1$ 代入上式得，$y'\big|_{x=0}=1$，即 $f'(0)=1$。从而， $f(\frac{2}{n})=1+\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})$。于是

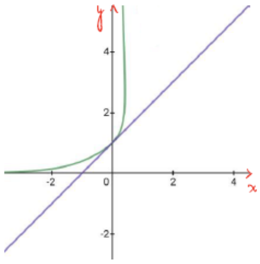
$$\lim_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}n[1+\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})-1]=2。$$

【注】①本题也可以直接利用导数定义：（与 18 题方法一做法类似）

$$\lim_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2。$$

但需事先确定 $f(0)=1$。

②由 $f(0)=1, f'(0)=1$ 可得该曲线在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$。为了便于同学们理解，我们画出该曲线在 $(0,1)$ 附近的图像及在 $(0,1)$ 处的切线，如图?



图？

20.【考点定位】微分的经济学应用。

【解】(I)该商品的成本函数：$C(Q)=60000+20Q$；

收益函数：$R(Q)=PQ=\left(60-\frac{Q}{1000}\right)Q=60Q-\frac{Q^2}{1000}$；

利润函数：$L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{Q^2}{1000}+40Q-60000$；

所以该商品的边际利润为 $L'(Q)=40-\frac{Q}{500}$。

(II)当 $p=50$ 时 $Q=10000$，从而 $L'(Q)\big|_{Q=10000}=20$，其经济意义：当该产品销售量为 10000 件时，再销售一件增加利润 20 元。

(III)令 $L'(Q)=40-\frac{Q}{500}=0$ 得 $Q=20000$，又 $L''(Q)=-\frac{1}{500}<0$，所以 $Q=20000$ 时 $L(Q)$ 取最大值，此时 $p=60-\frac{20000}{1000}=40$。

综上所述：当定价为 40 元时利润最大。

21.【考点定位】导数的经济应用。

【答案】$20-Q$

【解】因为收益函数为 $R=pQ=\frac{40-Q}{2}Q$，所以边际收益为 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=20-Q$。

22.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；　导数的几何意义；直角坐标与极坐标的关系。

【答案】$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

【解】由极坐标系中的点与直角坐标系中的点的关系知曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases},$$

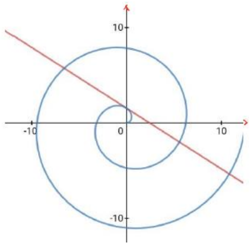
当 $(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时，对应直角坐标系下的坐标为 $(x,y)=(0,\frac{\pi}{2})$，且该点切线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi},$$

从而曲线在点 $(0,\frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为：

$$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)\text{，即 } y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}\text{。}$$

【注】该曲线是一种螺旋线，为了方便同学们理解，我们画出该曲线及所求的切线图像，如图?



图?

23.【考点定位】左、右极限；夹逼准则；左、右导数。

【答案】D

【解】函数图像如图?(a)所示。

先讨论连续性：

首先 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$，下面计算 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$。

当 $x\in(0,1]$ 时，存在唯一的正整数 n，使得 $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$，且 $x\to0^+\Leftrightarrow n\to+\infty$。

故 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$。又由于 $f(0)=0$，从而 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

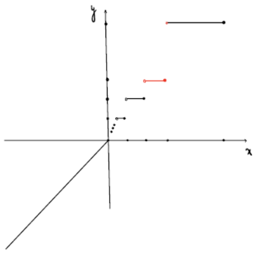
再讨论可导性：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x-0}{x}=1,\ f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x},$$

由于 $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$，所以 $\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n}\to1,\frac{\frac{1}{n}}{x}\geq\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼准则可得，

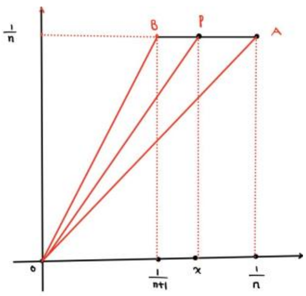
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}=1\text{。}$$

从而 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f'(0)=1$。



图?

【注】当 $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ 时，$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n}\to 1,\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{n}}{x}\geq\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$ 的几何意义如图所示：



图中 $P(x,f(x)),A\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),B\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$，其中 $f(x)=\frac{1}{n}$，显然有如下斜率大小关系：

$$k_{OA}\leq k_{OP}<k_{OB},$$

即 $1\leq\frac{f(x)-f(0)}{x-0}<\frac{n+1}{n}\to 1$，从而由夹逼准则知 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$。

24.【考点定位】高阶导数；变限积分求导。

【答案】$5\times 2^{n-1}$

【解】由 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导得，$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$，

从而 $f''(x)=2+2f'(x)$，$f'''(x)=2f''(x)$，$f^{(4)}(x)=2f'''(x)=2^2f''(x)$，........，

$f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)(n\geq 2)$，所以 $f^{(n)}(0)=2^{n-2}f''(0)=2^{n-2}[2+2f'(0)]$，又由于 $f(0)=1$，

$f'(0)=2+2f(0)=4$，故 $f^{(n)}(0)=2^{n-2}\times[2+2\times 4]=5\times 2^{n-1}$。

【注】该题也可以利用微分方程先将 $y=f(x)$ 求出，再求 $f^{(n)}(0)$。

由 $\begin{cases}f'(x)=2(x+1)+2f(x)\\ f(0)=1\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(-2)y=2(x+1)\\ y(0)=1\end{cases}$，这是一阶线性微分方程。

于是通解为 $y=e^{\int 2dx}[\int 2(x+1)\cdot e^{\int -2dx}dx+c]=e^{2x}[-(x+\frac{3}{2})e^{-2x}+c]=-(x+\frac{3}{2})+ce^{2x}$。

再由 $y(0)=1$ 得 $c=\frac{5}{2}$ ，故 $f(x)=-(x+\frac{3}{2})+\frac{5}{2}e^{2x}$，所以 $f^{(n)}(x)=\frac{5}{2}\times 2^n e^{2x}\quad (n\geq 2)$ ，

因此 $f^{(n)}(0)=5\times 2^{n-1}$。

25.【考点定位】高阶导数；泰勒公式。

【答案】$\frac{1}{2}$

【解】由于 $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$， $\frac{1}{1+ax^2}=\frac{1}{1-\left(-ax^2\right)}=1-ax^2+o(x^2)$，所以

$$f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x[1-ax^2+o(x^2)]=(a-\frac{1}{3})x^3+o(x^3)\text{。}$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 3 阶泰勒公式为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)\text{，}$$

比较 x^3 的系数，得 $\frac{1}{3!}f'''(0)=a-\frac{1}{3}$，所以 $a=\frac{1}{6}f'''(0)+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ 。

26.【考点定位】累次积分交换次序；积分中值定理；零点定理；定积分的分部积分法；函数的单调性。

（1）【解】

由题意知， $$f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt+f(0)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt\text{，}$$

下面用两种方法计算 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx$

方法一：

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=xf(x)\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}xf'(x)dx=\frac{3\pi}{2}f\left(\frac{3}{2}\pi\right)-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}x\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx$$

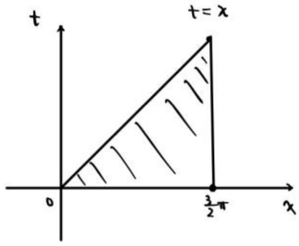
$$=\frac{3\pi}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx-\int_0^{\frac{3\pi}{2}}x\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos xdx=\frac{1}{2}\text{，}$$

方法二：

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}dx\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt\overset{\text{积分换序}}{=}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}dt\int_t^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dx\ =\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\cdot(\frac{3\pi}{2}-t)dt=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(-\frac{1}{2})\cos tdt$$

$$=-\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$。其中积分换顺如图？所示

所以 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上的平均值 $\overline{f}=\dfrac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x}{\frac{3\pi}{2}-0}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3\pi}{2}}=\dfrac{1}{3\pi}$ 。



图?

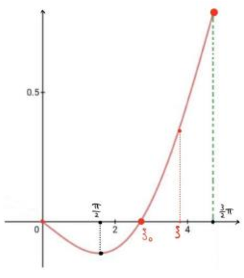
(2) 证明： $f'(x)=\dfrac{\cos x}{2x-3\pi},x\in(0,\dfrac{3\pi}{2})$ ，令 $f'(x)=0$ ，得唯一驻点 $x=\dfrac{\pi}{2}$。列表讨论如下：

x	$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↓	最小值点	↑

由于 $f(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上无零点且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<f\left(0\right)=0$ 。

由积分中值定理知，$\exists\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，使 $f(\xi)=\dfrac{\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x}{\frac{3\pi}{2}}=\dfrac{1}{3\pi}>0$ ，由于当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时 $f(x)<0$，所以 $\exists\xi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$（如图？）。由零点定理知，存在 $\exists\xi_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\xi\right)\subset\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，使得 $f(\xi_0)=0$，又因为 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内只有一个零点。

综上所述， $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点。



图?

27.【考点定位】函数的单调性；零点定理。

【解】设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x},x\in(0,1]$，则 $f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{1+x}}{\ln^2(1+x)}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-x^2+(1+x)\ln^2(1+x)}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$

令 $g(x)=-x^2+(1+x)\ln^2(1+x)$，则

$$g(0)=0，\ g'(x)=-2x+\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)，\ g'(0)=0，$$

$$g''(x)=-2+\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}=2\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{1+x}，$$

注意到 $h(x)=\ln(1+x)-x<0,(x>0)$，事实上，由 $h(0)=0$，$h'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}<0(x>0)$，

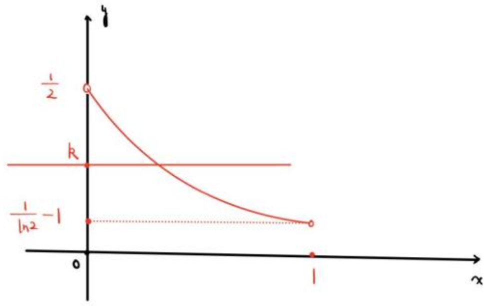
即知 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)<0(x>0)$，从而 $g''(x)<0(x>0)$，因此 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减。

又由 $g'(0)=0$ 知 $g'(x)<0$，进而得到 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减，又由于 $g(0)=0$，所以 $g(x)<0(x>0)$，故

$f'(x)<0(0<x\le 1)$，因此 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减。

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\dfrac{1}{2}$

$f(1)=\dfrac{1}{\ln2}-1$，所以，$\dfrac{1}{\ln2}-1<k<\dfrac{1}{2}$。如图？所示



图？

【注】在解答过程中，由于 $g(0)=g'(0)=0,g''(x)<0(x>0)$，从而当 $x>0$ 时，由泰勒公式得

$g(x)=g(0)+g'(0)x+\dfrac{g''(\xi)}{2}x^2=0+0+\dfrac{g''(\xi)}{2}x^2=\dfrac{g''(\xi)}{2}x^2<0$，这样可以使解答过程简化。

28.【考点定位】微分学的经济学应用。

【答案】$1+(1-Q)e^{-Q}$

【解】由题意知，总成本函数为 $C(Q)=Q\overline{C}(Q)=Q\left(1+e^{-Q}\right)$，所以边际成本为

$$C'(Q)=\left(1+e^{-Q}\right)-Qe^{-Q}=1+(1-Q)e^{-Q}。$$

29.【考点定位】微分学的经济学应用。

【答案】D

【解】因为平均成本$\overline{C}(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}$，所以$\dfrac{\mathrm{d}\overline{C}(Q)}{\mathrm{d}Q}=\dfrac{C'(Q)Q-C(Q)}{Q^2}$。因为$Q=Q_0$时，平均成本$\overline{C}(Q)$最小，所以$\dfrac{\mathrm{d}\overline{C}(Q)}{\mathrm{d}Q}\Big|_{Q=Q_0}=0$，则$C'(Q_0)Q_0-C(Q_0)=0$，即$Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$。故答案选(D)。

30.【考点定位】弹性。（题目有错误，应为$500-p_A{}^2-p_Ap_B+2p_B{}^2$）

【答案】0.4

【解】由于$\eta_{AA}>0$，且边际需求为负，从而

$$\eta_{AA}=-\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}\cdot\frac{p_A}{Q_A}=(2p_A+p_B)\frac{p_A}{500-p_A{}^2-p_Ap_B+2p_B{}^2},$$

当$p_A=10$，$p_B=20$时，$\eta_{AA}=0.4$。

31.【考点定位】导数的经济学应用。

【答案】8

【解】由 $Q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2$可得$P=\dfrac{800}{Q+2}-3$，则利润函数为

$$L(Q)=PQ-C(Q)=\left(\frac{800}{Q+2}-3\right)Q-(100+13Q)=\frac{800Q}{Q+2}-16Q-100,$$

令$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=\dfrac{1600}{(Q+2)^2}-16=0$可得$Q=8$，又由于$\dfrac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}Q^2}\Big|_{Q=8}=\dfrac{-3200}{(Q+2)^3}\Big|_{Q=8}=-3.2<0$，

故$Q=8$时，$L(Q)$取最大值。

32.【考点定位】导数的定义；连续的概念；可导与连续的关系；可导与可微的关系。

【答案】C

【解】对于选项(A)：取$f(x)=|x|$，满足$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{\sqrt{|x|}}=0$，但是$f(x)$在$x=0$处不可导，所以（A）不正确；

对于选项(B)：取$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$，满足$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{|x|}}=0$，但是函数$f(x)$在$x=0$处不连续，从而$f(x)$在$x=0$处不可导，从而（B）不正确；

对于选项$(C),(D)$，如果$f(x)$在$x=0$处可导，那么$f(x)$在$x=0$处必连续，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$。又因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，所以$f(0)=0$。

下面可用两种方法来判定（C）（D） 选项。

方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$存在，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=0$。

但是$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{|x|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{|x|}=f'(0)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$，由于$f'(0)$未必为零，所以$f'(0)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$未必存在。

因此（C）正确，（D）不正确。

方法二：$f(x)-f(0)=f'(0)x+o(x)$，即$f(x)=f'(0)x+o(x)$，则

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(0)x+o(x)}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(0)x+o(x)}{|x|}=f'(0)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$不一定存在，

所以（C）正确，（D）不正确。

综上所述，答案选(C)。

33.【考点定位】函数的单调性。

【答案】B

【解】由$f'(x)>f(x)>0$可得$[\mathrm{e}^{-x}f(x)]'=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]>0$，故$g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$在$[-2,2]$上单调增加，

所以$\forall x_1,x_2\in[-2,2],x_1<x_2$，有$g(x_1)<g(x_2)$，即$\mathrm{e}^{-x_1}f(x_1)<\mathrm{e}^{-x_2}f(x_2)$。又由于$f(x)>0$，所以

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}>\frac{\mathrm{e}^{-x_1}}{\mathrm{e}^{-x_2}}=\mathrm{e}^{x_2-x_1}\text{或}\frac{f(x_1)}{f(x_2)}<\frac{\mathrm{e}^{-x_2}}{\mathrm{e}^{-x_1}}=\mathrm{e}^{x_1-x_2}$$

对于选项(A)：$\dfrac{f(-2)}{f(-1)}<\mathrm{e}^{-2-(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$，所以(A)错误；对于选项(B)：$\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}^{0-(-1)}=\mathrm{e}$，所以(B)正确；

对于选项(C)：$\dfrac{f(1)}{f(-1)}>\mathrm{e}^{1-(-1)}=\mathrm{e}^2$，所以(C)错误；对于选项(D)：$\dfrac{f(2)}{f(-1)}>\mathrm{e}^{2-(-1)}=\mathrm{e}^3$，所以(C)错误。

综上所述，答案选(B)。

【注】本题中所涉及的辅助函数$g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$也可以采用如下方法得到：

$f'(x)>f(x)>0\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1>0\Leftrightarrow[\ln f(x)-x]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1>0\Rightarrow\ln f(x)-x$单调递增$\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\mathrm{e}^{-x}\right)$单调递增，从而$g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$单调递增。

34.【考点定位】函数的凹凸性；渐近线方程。

【解】由 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x}, & x\ge 0,\\ -\dfrac{x^2}{1+x}, & x<0\end{cases}$ 得 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x>0,\\ -\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x<0。\end{cases}$

又当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x|x|}{1+x}}{x}=0$，故 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}, & x>0,\end{cases}$

进而 $f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(1+x)^3}, x<0\\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, x>0\end{cases}$，且 $f''(0)$ 不存在。故无定义的点为 $x=-1$，二阶导数不存在的点为 $x=0$。

列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	+	−	不存在	+
$f'(x)$	凹	凸	拐点	凹

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$[0,+\infty)$ 上为凹函数，在 $(-1,0]$ 上为凸函数。

下面求该曲线的渐近线，$f(x)$ 在 $x\ne -1$ 处均连续，$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$，故 $x=-1$ 是垂直渐近线。

当 $x\to +\infty$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x|x|}{1+x}}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+x}=-1,$$

故 $y=x-1$ 为该曲线的一条斜渐近线；

当 $x\to -\infty$ 时，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^2}{1+x}}{x}=-1,\quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2}{1+x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

故 $y=-x+1$ 为该曲线的另一条斜渐近线。

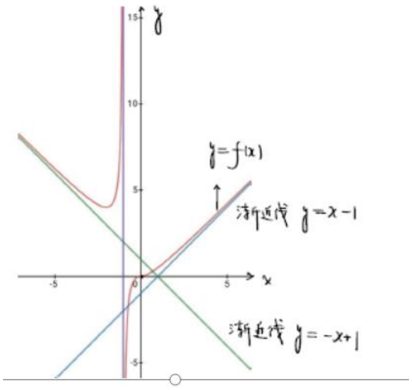
综上所述：该曲线的铅直渐近线为$x=-1$，斜渐近线为$y=x-1$，$y=-x+1$。

【注】①对于斜渐近线的求法，也可利用下面的方法来求：

当$x\to-\infty$时，$f(x)=-\dfrac{x^2}{1+x}=-\dfrac{x^2-1+1}{1+x}=-x+1-\dfrac{1}{1+x}$，且$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$，故$y=-x+1$为一条斜渐近线。

当$x\to+\infty$时，$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{x^2-1+1}{1+x}=x-1+\dfrac{1}{1+x}$，且$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$，故$y=x-1$为另外一条斜渐近线。

②为了方便同学们理解，这里我们画出该曲线的图像及其渐近线。（如图？所示）



图?

35.【考点定位】导数的物理意义。（题目有错误）

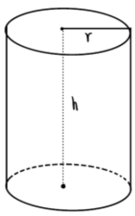
【答案】C

【解】设该圆柱体底面半径为$r=r(t)$，高为$h=h(t)$，则该圆柱体的(如图？)

体积为$V=\pi r^2h$，表面积为$S=2\pi rh+2\pi r^2$。

所以 $\dfrac{dV}{dt}=2\pi rh\dfrac{dr}{dt}+\pi r^2\dfrac{dh}{dt}$，$\dfrac{dS}{dt}=2\pi h\dfrac{dr}{dt}+2\pi r\dfrac{dh}{dt}+4\pi r\dfrac{dr}{dt}$。

由于 $\dfrac{dr}{dt}=2$，$\dfrac{dh}{dt}=-3$，所以当$r=10,h=5$时$\dfrac{dV}{dt}=-100\pi$，$\dfrac{dS}{dt}=40\pi$。故答案选（C）。



图？