专题 9　仅数一习题

（A 组）基础题

1.【考点定位】傅里叶系数的计算。

【答案】1

【解】

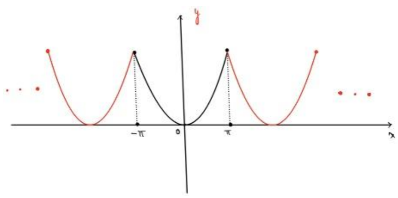
$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{2x}{4}\cos 2x-\frac{2}{8}\sin 2x\right]\Bigg|_0^{\pi}=1。$$

这里$\int x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{2x}{4}\cos 2x-\frac{2}{8}\sin 2x+c$由推广的分部积分得到：

$x^2\downarrow$	$+$	$2x$	$-$	2	$+$	0
$\cos 2x\uparrow$		$\frac{1}{2}\sin 2x$		$-\frac{1}{4}\cos 2x$		$-\frac{1}{8}\sin 2x$

【注】①由于函数$f\left(x\right)=x^2,x\in\left[-\pi,\pi\right]$进行周期延拓后是连续函数且为偶函数，所以由收敛定理知

$$x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,x\in\left[-\pi,\pi\right]，\text{其中 }a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x\left(n=0,1,2,\cdots\right)$$



②若要计算$x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx,x\in\left[-\pi,\pi\right]$中的第一项系数$a_0$，对比①中的表达式，结果是

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3}。$$

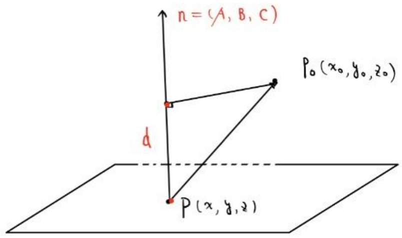
2.【考点定位】点到平面的距离。

【答案】$\sqrt{2}$

【解】点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$\pi:Ax+By+Cz+D=0$的距离公式为：$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

所以点$(2,1,0)$到平面$3x+4y+5z=0$的距离为$d=\frac{\left|3\times 2+4\times 1+5\times 0+0\right|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\frac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$。

【注】同学们需要掌握点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$的距离公式的来历：如图，



$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{PP_0}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PP_0}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{\left|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|(Ax_0+By_0+Cz_0)-(Ax+By+Cz)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{\left|(Ax_0+By_0+Cz_0)-(-D)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}。$$

3.【考点定位】梯度的概念。

【答案】A

【解】由于

$$\mathbf{grad}\, f\Big|_{(0,1)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)\Bigg|_{(0,1)},\text{且}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{-x}{x^2+y^2},$$

所以$\mathbf{grad}\, f\big|_{(0,1)}=\boldsymbol{i}$。故答案选（A）。

4.【考点定位】梯度的概念。

【答案】$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

【解】 记$f(x,y,z)=xy+\frac{z}{y}$，则$f_x'(x,y,z)=y, f_y'(x,y,z)=x-\frac{z}{y^2}, f_z'(x,y,z)=\frac{1}{y}$,

所以$f_x'(2,1,1)=1$ ，$f_y'(2,1,1)=1$，$f_z'(2,1,1)=1$，

故$\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Bigg|_{(2,1,1)}=f_x'(2,1,1)\boldsymbol{i}+f_y'(2,1,1)\boldsymbol{j}+f_z'(2,1,1)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，

或 $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Bigg|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$

5.【考点定位】方向导数。

【答案】D

【解】将 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 单位化得 $\boldsymbol{n}^0=\frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|}\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，由 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\frac{\partial f}{\partial y}=x^2,\frac{\partial f}{\partial z}=2z,\text{所以}\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,0)}=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right|_{(1,2,0)}\bullet\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=(4,1,0)\bullet\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=2\text{。}$$

故答案选（D）。

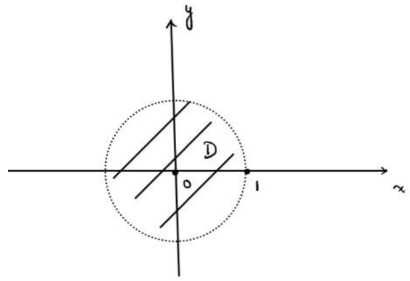
6.【考点定位】平面第二型曲线积分与路径无关的充要条件。

【答案】-1

【解】记 $P=\frac{x}{x^2+y^2-1},Q=\frac{-ay}{x^2+y^2-1}$，

则 P,Q 在区域 D(如图)内有连续的偏导数。由题设，积分与路径无关可知 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2-1\right)^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{\left(x^2+y^2-1\right)^2}$，所以 $\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2-1\right)^2}=\frac{2axy}{\left(x^2+y^2-1\right)^2}$， 故 $a=-1$。



（B 组）提升题

1.【考点定位】空间曲面的法线方程。

【答案】$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$

【解】$x^2+2y^2+3z^2=21$ 变为 $x^2+2y^2+3z^2-21=0$。

记 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则该曲面在 $(1,-2,2)$ 处的法向量

$$\boldsymbol{n}=\left.\left(F_x,F_y,F_z\right)\right|_{(1,-2,2)}=\left.\left(2x,4y,6z\right)\right|_{(1,-2,2)}=2\left(1,-4,6\right),$$

由直线的点向式得所求法线方程为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$。

【注】曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\right)$，

切平面方程为： $F_x(P_0)\left(x-x_0\right)+F_y(P_0)\left(y-y_0\right)+F_z(P_0)\left(z-z_0\right)=0$；

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(P_0)}$。

2.【考点定位】第一类曲面积分的性质；第一类曲线积分的对称性。

【答案】C

【解】积分曲面如图所示。

对于选项(A)：由于 S 关于 yoz 面对称，而被积函数 $f\left(x,y,z\right)=x$ 关于 x 为奇函数，故 $\iint\limits_S x\mathrm{d}S=0$，

又由于 $\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S>0$，所以（A）不正确。

对于选项(B)：因为 S 关于 xoz 面对称，而被积函数 $f\left(x,y,z\right)=y$ 关于 y 为奇函数，故 $\iint\limits_S y\mathrm{d}S=0$，

又由于 $\iint\limits_{S_1} y\mathrm{d}S>0$，所以（B）不正确。

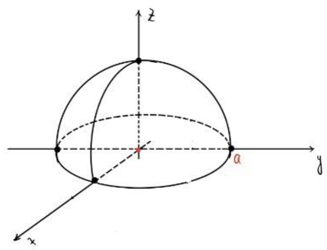
对于选项(C)：由于S关于xoz，yoz面对称，而被积函数$f\left(x,y,z\right)=z$关于x,y均为偶函数，故

$\iint\limits_S \mathrm{z}\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}\mathrm{z}\mathrm{d}S$，再由轮换对称性可得$\iint\limits_{S_1}\mathrm{z}\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_1}\mathrm{x}\mathrm{d}S$，从而$\iint\limits_S \mathrm{z}\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}\mathrm{x}\mathrm{d}S$，故（C）正确。

对于选项(D)：由于 S 关于 yoz 面对称，被积函数 $f\left(x,y,z\right)=xyz$ 关于 x 为奇函数，所以 $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S=0$，

因为在 S_1 上 $xyz>0$，所以 $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S>0$，故（D）不正确。

综上所述，答案选(C)。



3.【考点定位】梯度的概念；散度的概念。

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解】由于 $\mathbf{grad}\,r=\left(\dfrac{\partial r}{\partial x},\dfrac{\partial r}{\partial y},\dfrac{\partial r}{\partial z}\right)$，所以 $\mathrm{div}\left(\mathbf{grad}\,r\right)=\mathrm{div}\left(\dfrac{\partial r}{\partial x},\dfrac{\partial r}{\partial y},\dfrac{\partial r}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}$，

由 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 得 ，

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)=\frac{x}{r},\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r-\dfrac{x^2}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3},$$

同理可得 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac{r^2-y^2}{r^3}$，$\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{r^2-z^2}{r^3}$。

从而

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{grad}\,r\right)=\frac{\left(r^2-x^2\right)+\left(r^2-y^2\right)+\left(r^2-z^2\right)}{r^3}=\frac{3r^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^3}=\frac{3r^2-r^2}{r^3}=\frac{2}{r},$$

故 $$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,r)\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{r}\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2}{3}。$$

【注】①关于梯度，散度和旋度，同学们要了解算符 $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ ：

(i) $\mathbf{grad}f\left(x,y,z\right)=\nabla f\left(x,y,z\right)=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right);$

(ii) $\operatorname{div}\left(P,Q,R\right)=\nabla\bullet\left(P,Q,R\right)=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(P,Q,R\right)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z};$

(iii) $\operatorname{rot}\left(P,Q,R\right)=\nabla\times\left(P,Q,R\right)=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(P,Q,R\right)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$。

② $\operatorname{div}\left(\mathbf{grad}f\left(x,y,z\right)\right)=\nabla\bullet\left(\nabla f\right)=\left(\nabla\bullet\nabla\right)f=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$。

4.【考点定位】可微的条件；空间曲面的法向量；空间曲线的切向量。

【答案】C

【解】对于选项(A)：当函数 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(0,0\right)$ 偏导数存在时，函数在该点不一定可微，所以 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ 不一定是函数在点 $\left(0,0\right)$ 的全微分，故（A)错误。

对于选项(B)：当函数 $f\left(x,y\right)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处可微时，该曲面 $z=f\left(x,y\right)$ 在 $\left(0,0,f\left(0,0\right)\right)$ 点的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-f_x'\left(0,0\right),-f_y'\left(0,0\right),1\right)=\left(-3,-1,1\right)$,故(B)错误。

对于选项(C)、(D)：曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$的参数方程为$\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=f(x,0) \end{cases}$，故曲线在点$\left(0,0,f(0,0)\right)$处的切向量$T=\left(1,0,f_x'(0,0)\right)=(1,0,3)$,故(C)正确，(D)错误。

综上所述，答案选(C)。

【注】关于函数可微、连续、偏导存在、偏导函数连续有如下的关系：

$$\begin{array}{ccc} f_x(x,y),f_y(x,y)\text{在}(x_0,y_0)\text{处连续} \Rightarrow f(x,y)\text{在}(x_0,y_0)\text{处可微} & \Rightarrow & f(x,y)\text{在}(x_0,y_0)\text{处连续} \\ \Downarrow & & \\ f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\text{存在} & & \end{array}$$

5.【考点定位】空间曲面的切平面；平面平行的条件。

【答案】$2x+4y-z-5=0$

【解】曲面$z=x^2+y^2$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(-z_x,-z_y,1)\big|_{(x_0,y_0)}=(-2x,-2y,1)\big|_{(x_0,y_0)}=(-2x_0,-2y_0,1)\text{。}$$

由题设可知$\boldsymbol{n}_1//\boldsymbol{n}_2$，其中$\boldsymbol{n}_2=(2,4,-1)$为平面$2x+4y-z=0$的法方向，所以$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{4}=\frac{1}{-1}$，

得$x_0=1,y_0=2$，从而$z_0={x_0}^2+{y_0}^2=5$，即得$P_0(1,2,5)$，

故所求切面方程为$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即$2x+4y-z-5=0$。

6.【考点定位】方向导数的概念。

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解】由$u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$得，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{6}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{9}$，

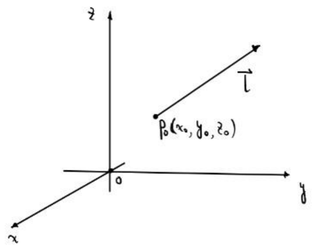
所以$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$，

由于单位向量$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，故所求方向导数为：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,2,3)}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(1,2,3)}\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{。}$$

【注】①请同学们注意，函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微是函数在该点沿任意方向存在方向导数的充分非必要条件，设方向$\vec{l}$的方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{r\to0^+}\frac{f(x_0+r\cos\alpha,y_0+r\cos\beta,z_0+r\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{r}$$
$$\overset{\text{可微性}}{=}\lim_{r\to0^+}\frac{f_x(P_0)r\cos\alpha+f_x(P_0)r\cos\beta+f_x(P_0)r\cos\gamma+o(r)}{r}$$
$$=f_x(P_0)\cos\alpha+f_x(P_0)\cos\beta+f_x(P_0)\cos\gamma=(f_x(P_0),f_x(P_0),f_x(P_0))\bullet(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)。$$



②当函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$不可微甚至偏导函数不存在时，函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$也可能存在沿任意方向的方向导数。例如$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

在点$P_0(0,0,0)$处 $f_x(P_0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$不存在，同理$f_y(P_0),f_z(P_0)$也不存在，但在$P_0(0,0,0)$处沿任意方向$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$的方向导数为：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0,0)}=\lim_{r\to0^+}\frac{f(r\cos\alpha,r\cos\beta,r\cos\gamma)-f(0,0,0)}{r}=\lim_{r\to0^+}\frac{\sqrt{(r\cos\alpha)^2+(r\cos\beta)^2+(r\cos\gamma)^2}}{r}$$
$$=\lim_{r\to0^+}\frac{r}{r}=1。$$

7.【考点定位】高斯公式；三重积分的计算；球面坐标变换。

【答案】$(2-\sqrt{2})\pi R^3$

【解】如图，由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

下面采用两种方法计算$I=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

方法一：采用球坐标。

$$I=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{3}R^3=2\pi R^3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3。$$

方法二：采用柱坐标。由$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{cases}$得$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，即$x^2+y^2=\dfrac{R^2}{2}$，所以

$$I=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}z=2\pi\cdot\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}r\left[\left(R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}-r\right]\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}r\left(R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r-\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}r^2\mathrm{d}r\right]$$

由于

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}r\left(R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(R^2-r^2\right)=\left[-\frac{1}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)R^3,$$

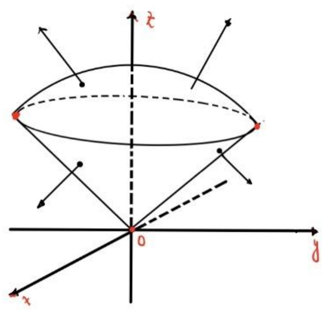
$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}R^3,\text{故 }I=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3。$$

方法三：直角坐标。空间区域$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D\\\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{cases}$，其中$D=\left\{(x,y)\Big|x^2+y^2\le\dfrac{R^2}{2}\right\}$

$$I=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z=\iint_D\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\left[\left(R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}-r\right]r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\left[\left(R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}-r\right]r\mathrm{d}r\overset{\text{同方法二}}{=}\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi R^3。$$

所以，原式$=3I=\left(2-\sqrt{2}\right)\pi R^3$。



8.【考点定位】第一型曲面积分的对称性。

【答案】$\frac{4}{3}\sqrt{3}$

【解】方法一：

$I=\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S+\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S$，因为$\Sigma$关于$yOz$面对称，所以$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S=0$，由轮换对称性得，

$$\oiint\limits_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S,$$

所以$I=\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}S$，

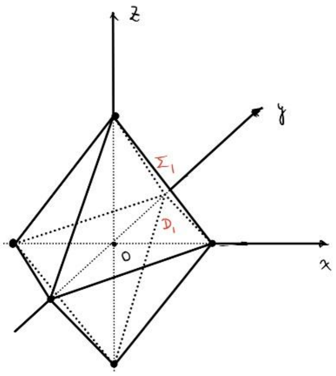
因为曲面Σ的面积$S=8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=4\sqrt{3}$，故$I=\frac{1}{3}S=\frac{4\sqrt{3}}{3}$。

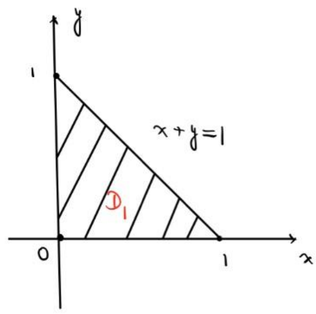
方法二：同方法一中的分析，$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S=0$

$$\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=8\iint\limits_{\Sigma_1}|y|\mathrm{d}S=8\iint\limits_{D_1}y\sqrt{1+\left(z_x\right)^2+\left(z_y\right)^2}\mathrm{d}\sigma=8\iint\limits_{D_1}y\sqrt{1+1+1}\mathrm{d}\sigma=8\sqrt{3}\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}\sigma=8\sqrt{3}\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\mathrm{d}x$$

$$=8\sqrt{3}\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y=8\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}。$$

其中Σ_1：$z=1-x-y,(x,y)\in D_1, D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1-y, 0\le y\le 1\right\}$。





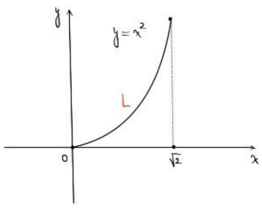
9.【考点定位】第一类曲线积分的计算。

【答案】$\frac{13}{6}$

【解】

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(1+4x^2\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{12}\left[\left(1+8\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{13}{6}。$$



10.【考点定位】三重积分的对称性；三重积分的球坐标计算法；三重积分的直角坐标计算法。

【答案】$\frac{4}{15}\pi$

【解】这里采用三种方法计算该积分：

方法一：如图(a)利用轮换对称性及球坐标。由轮换对称性知

$$\iiint_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

故

$$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{3}\times 2\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}\pi。$$

方法二：如图(a)直接采用球坐标。由于$\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\0\le\varphi\le\pi\\0\le r\le 1\end{cases}$，所以

$$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left(r\cos\varphi\right)^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\cdot\mathrm{d}\cos\varphi=-\frac{2\pi}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\times\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{4\pi}{15}。$$

方法三：采用直角坐标

方式 1：先二后一法

$$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\pi z^2\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z\overset{\text{偶函数}}{=}2\pi\int_0^1 z^2\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4\pi}{15}。$$

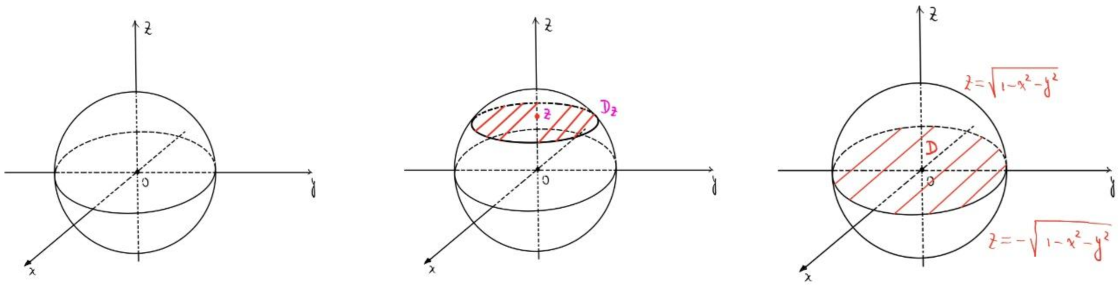
其中$D_z=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1-z^2\right\}$,如图(b)

方式 2：先一后二法

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\iint\limits_{D}\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{极坐标}}{=}\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4\pi}{3}\int_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}r\mathrm{d}r=\frac{-2\pi}{3}\int_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\left(1-r^2\right)=\frac{-2\pi}{3}\times\left[\frac{2}{5}\left(1-r^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_0^1=\frac{4\pi}{15}。$$

其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$,如图(c)。



(a) (b) (c)

11.【考点定位】第一类曲面积分的计算。

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

【解】如图，Σ：$z=1-x-y,(x,y)\in D$,其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 1-x,0\le x\le 1\right\}$。

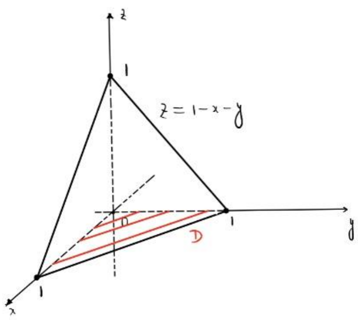
或者 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1-y,0\le y\le 1\right\}$

方法一:$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{D} y^2\cdot\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D} y^2\cdot\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^2\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\frac{1}{3}(1-x)^3\mathrm{d}x$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{4}(1-x)^4\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{12}。$$

方法二:$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{D} y^2\cdot\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D} y^2\cdot\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}y^2\mathrm{d}x$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 y^2(1-y)\mathrm{d}y=\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}。$$



12.【考点定位】空间曲面的切平面。

【答案】A

【解】设 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$，则 $F_x'(0,1,-1)=(2x-y\sin xy+1)\Big|_{(0,1,-1)}=1$，

$$F_y'(0,1,-1)=(-x\sin xy+z)\Big|_{(0,1,-1)}=-1, F_z'(0,1,-1)=y\Big|_{(0,1,-1)}=1,$$

故曲面在点 $(0,1,-1)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(F_x'(0,1,-1),F_y'(0,1,-1),F_z'(0,1,-1)\right)=(1,-1,1)$，

所以该点的切平面方程为 $1\cdot(x-0)-1\cdot(y-1)+1\cdot(z+1)=0$，即 $x-y+z=-2$。故答案选（A）。

13.（13 题与 12 题题目、答案均重复，13 题答案已删除，作者直接修改 12 题答案即可，为保持与习题分册序号对应，答案序号先不要改，后续请排版公司改）

14.【考点定位】空间曲面的切平面。

【答案】$2x-y-z=1$

【解】由 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 得，

$z_x(1,0)=\left[2x(1-\sin y)-y^2\cos x\right]\Big|_{(1,0)}=2$，$z_y(1,0)=\left[-x^2\cos y+2y(1-\sin x)\right]\Big|_{(1,0)}=-1$，

所以曲面在 $(1,0,1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-z_x(1,0),-z_y(1,0),1\right)=(-2,1,1)$，

故所求切平面为 $-2(x-1)+1\cdot(y-0)+1\cdot(z-1)=0$，即 $2x-y-z-1=0$。

15.【考点定位】旋度的概念。

【答案】$\mathbf{rot}A=(0,1,y-1)$

【解】由旋度的计算公式得

$$\mathbf{rot}A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & z \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & z \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & z \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ x+y+z & xy \end{vmatrix}$$

$$=0\cdot i+j+(y-1)k=(0,1,y-1)，故 \mathbf{rot}A=(0,1,y-1)。$$

【注】$\mathbf{rot}A=\nabla\times A=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\times A$

16.【考点定位】旋度的概念。

【答案】$\vec{i}-\vec{k}$

【解】由旋转计算公式得 $\mathrm{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & zx\end{vmatrix}=y\vec{i}-z\vec{j}-x\vec{k}$，

故 $\mathbf{rot}\vec{F}(1,1,0)=(y,-z,-x)\big|_{(1,1,0)}=(1,0,-1)$ 或 $\vec{i}-\vec{k}$

17.【考点定位】空间曲面的切平面。

【答案】B

【解】设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(-z_x(x_0,y_0),-z_y(x_0,y_0),1\right)=(-2x_0,-2y_0,1),$$

从而 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $-2x_0(x-x_0)-2y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$，即

$$-2x_0x-2y_0y+z+(x_0^2+y_0^2)=0,$$

由切平面过点 $(1,0,0),(0,1,0)$ 得 $\begin{cases}-2x_0+x_0^2+y_0^2=0\\ -2y_0+x_0^2+y_0^2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_0=1\\ y_0=1\end{cases}$，

故所求平面方程为：$z=0$ 与 $-2x-2y+z+2=0$ 即 $2x+2y-z=2$。答案选（B）。

18.【考点定位】第二类曲面积分；二重积分的对称性。

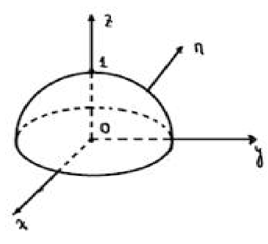
【答案】$\dfrac{32}{3}$

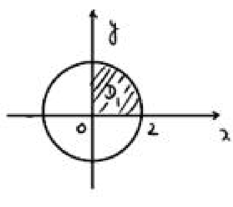
【解】由 $x^2+y^2+4z^2=4$ 得 $4z^2=4-(x^2+y^2)$，因为 Σ 取上侧，所以

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{4-x^2-\left(4-x^2-y^2\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 4}|y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{对称性}}{=}4\iint_{D_1}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=4\times 1\times\frac{8}{3}=\frac{32}{3}。$$

这里 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，故应填 $\dfrac{32}{3}$。





19.【考点定位】高斯公式；三重积分的对称性；三重积分的意义。

【答案】4π

【解】由高斯公式可得

$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial x^2}{\partial x}+\frac{\partial y^2}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}(2x+2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

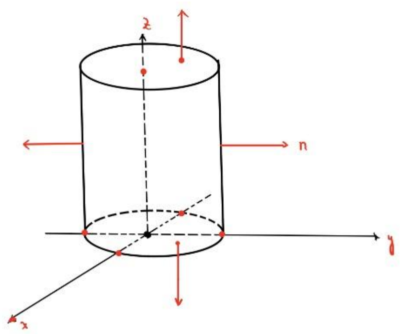
如图，由于空间区域为以椭圆 $x^2+4y^2=4$ 为准线，以平行于 z 轴的动直线为曲线的柱面，该区域关于 xoz, yoz 对称，由三重积分的对称性知

$$\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\ \iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\ \iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=V(\Omega)=\pi\times2\times1\times2=4\pi。$$

从而 $$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(2x+2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi。$$

【注】$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 等于柱体的体积，而柱体底面为椭圆，高为 2，故

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\times2\times1\times2=4\pi。$$



（C 组）拔高题

1.【考点定位】格林公式。

【解】记 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2},\ Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，则 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-\left(4x^2+y^2\right)+y\cdot2y}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\left(4x^2+y^2\right)-x\cdot8x}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}。$$

如图，作椭圆 $\Gamma:4x^2+y^2=\varepsilon^2$，即 $\dfrac{x^2}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\varepsilon^2}=1$，其中 $\varepsilon>0$ 足够小，顺时针方向记作 Γ^-，逆时针方向记作 Γ^+,L 与 Γ^- 所围区域为 Δ，由格林公式得：

$$I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L+\Gamma^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{\Gamma^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{\Delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{\Gamma^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$=\oint_{\Gamma^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 。

下面用两种方法计算 $\oint_{\Gamma^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ ：

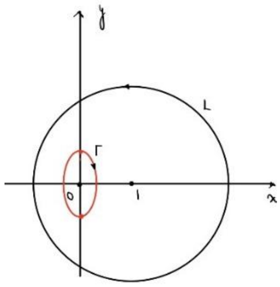
方法一：$\oint_{\Gamma^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma^+}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{\Gamma^+}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\overset{\text{格林公式}}{=}\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{4x^2+y^2\le\varepsilon^2}\left[\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{4x^2+y^2\le\varepsilon^2}2\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot\pi\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\pi \text{ 。}$$

方法二：Γ^+：

$$\begin{cases} x=\dfrac{\varepsilon}{2}\cos\theta, \\ y=\varepsilon\sin\theta, \end{cases}\theta\in[0,2\pi]$$

$\oint_{\Gamma^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\frac{\left[-\varepsilon\sin\theta\cdot\left(-\frac{\varepsilon}{2}\sin\theta\right)+\frac{\varepsilon}{2}\cos\theta\cdot\varepsilon\cos\theta\right]}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta=\pi$。故 $I=\pi$ 。



2.【考点定位】高斯公式：一阶线性微分方程。

【解】

记 $P=xf(x),Q=-xyf(x),R=-\mathrm{e}^{2x}z,S$ 围成的区域为 Ω，不妨 S 取外侧，由高斯公式得：

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega\left[xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}\right]\mathrm{d}v\text{；}$$

由题设，对于任意的 S，有 $\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,所以

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0,(x>0)\text{，即 } f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\text{，}$$

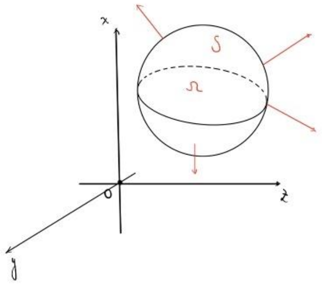
这是一阶线性微分方程，其通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\cdot\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{x-\ln x}\left(\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\cdot\mathrm{e}^{\ln x-x}\mathrm{d}x+c\right)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\left(\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\cdot x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+c\right),$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\left(\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+c\right)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\left(\mathrm{e}^{x}+c\right)$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ 得 $1=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\left(\mathrm{e}^{x}+c\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{x}+c}{x}$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\mathrm{e}^{x}+c\right)=c+1=0$，从而 $c=-1$，

因此所求的函数为 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}$。



3.【考点定位】三重积分的计算；重心的概念。

【解】如图建立空间直角坐标系。设 $P_0(0,0,R)$,球体密度为 $\rho(x,y,z)=k\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]$

设重心位置为 $G(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，则

$$\overline{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v}$$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$。

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2+R^2-2Rz\right)\mathrm{d}v\overset{\text{对称性}}{=}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2+R^2\right)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^5+\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v=\frac{4}{3}\pi R^5+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^2\bullet r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^5+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi R^5+2\times2\pi\times\frac{1}{5}R^5=\frac{32}{15}\pi R^5$$。

$$\iiint\limits_{\Omega}z\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\left(x^2+y^2+z^2+R^2-2Rz\right)\mathrm{d}v\overset{\text{对称性}}{=}\iiint\limits_{\Omega}-2Rz^2\mathrm{d}v$$

$$=-2R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^2\cos^2\varphi\bullet r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=-2R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\mathrm{d}r$$

$$=(-2R)\times2\pi\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{R^5}{5}=-\frac{8}{15}\pi R^6$$

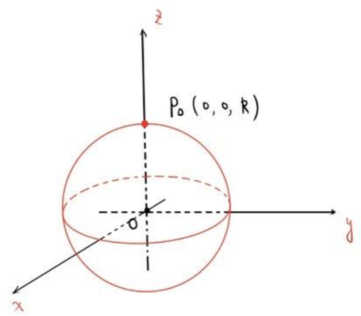
故

$$\bar{z}=\frac{-\frac{8}{15}\pi R^6}{\frac{32}{15}\pi R^5}=-\frac{R}{4}$$

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v},\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v}$$

由对称性得 $\iiint\limits_{\Omega} x\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v=0,\iiint\limits_{\Omega} y\left[x^2+y^2+(z-R)^2\right]\mathrm{d}v=0,$ 所以 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$。

故所求重心位置为 $G\left(0,0,-\frac{R}{4}\right)$。



Ω：$x^2+y^2+z^2\le R^2$

4.【考点定位】空间立体的体积；空间曲面的侧面积；微分方程的物理应用。

【解】如图，设 t 时刻雪堆的体积为 $V(t)$,侧面积为 $S(t)$。

用平行于 xoy 面的平面截曲面 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ 所得截面 $D_z: x^2+y^2\le\frac{1}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]$,

其面积为 $A(z)=\pi\left(\frac{1}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]\right)=\frac{\pi}{2}\left[h^2(t)-h(t)z\right]$，从而

$$V(t)=\int_0^{h(t)}A(z)\mathrm{d}z=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi\left[h^2(t)-h(t)z\right]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

曲面 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t)$，则

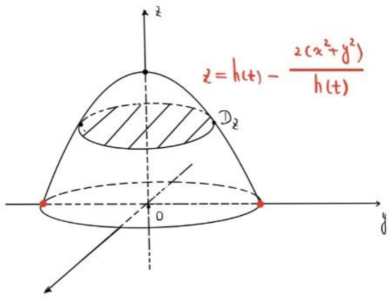
$$S(t)=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2(t)}\sqrt{\frac{h^2(t)+16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\frac{1}{h(t)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\times\frac{1}{32}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left(h^2(t)+16r^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(h^2(t)+16r^2\right)=\frac{\pi}{16h(\mathrm{t})}\times\frac{2}{3}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}=\frac{13}{12}\pi h^2(t)$$ 。

由题设可知 $\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=-0.9S(t)$，所以 $\frac{3}{4}\pi h^2(t)\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=-0.9\times\frac{13\pi}{12}h^2(t)$，故 $\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{13}{10}$，所以 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$ 。由 $h(0)=130$ 得， $C=130$ 所以 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$ 。

令 $h(t)=0$ 得，$-\frac{13}{10}t+130=0$，从而 $t=100$ 。故雪堆全部融化所需要的时间为100小时。

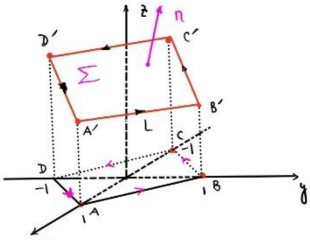


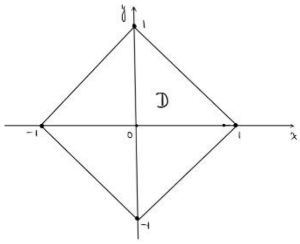
5.【考点定位】斯托克斯公式。

【解】如图所示，记 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 上的部分，取上侧， Σ 在 xoy 面上的投影区域 $D:|x|+|y|\le 1$ 。 由 $\Sigma:z=2-x-y$,取上侧知，其法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，由斯托克斯公式可得

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\left[(-2y-4z)-(6x+2z)+(-2x-2y)\right]\mathrm{d}S$$ ，

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_D(-2x+2y-12)\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{对称性}}{=}-12\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24$$





6.【考点定位】第二型曲线积分与路径无关的条件；第二型曲线积分的计算；全微分的原函数。

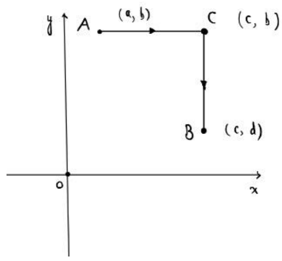
【解】 (1)记 $P=\dfrac{1+y^2f\left(xy\right)}{y}=yf\left(xy\right)+\dfrac{1}{y},Q=\dfrac{x\left[y^2f\left(xy\right)-1\right]}{y^2}=xf\left(xy\right)-\dfrac{x}{y^2}$，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=f\left(xy\right)+xyf'\left(xy\right)-\dfrac{1}{y^2},\dfrac{\partial Q}{\partial x}=f\left(xy\right)+xyf'\left(xy\right)-\dfrac{1}{y^2},\left(y>0\right)$，

所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故在上半平面 $\left(y>0\right)$ 该曲线积分与路径无关。

（2）这里采用两种方法计算积分 I。

方法一：取特殊路径计算，如图



由于该曲线积分与路径无关，选取路径 $A\left(a,b\right)$ 到 $C\left(c,b\right)$，再到 $B\left(c,d\right)$ 的折线段，于是，

$$I=\int_a^c\frac{1}{b}\left[1+b^2f\left(bx\right)\right]\mathrm{d}x+\int_b^d\left[cf(cy)-\frac{c}{y^2}\right]\mathrm{d}y=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf\left(bx\right)\mathrm{d}x+\int_b^d cf\left(cy\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{c}{y}\bigg|_b^d\right)$$

$$=\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)+\int_a^c f\left(bx\right)\mathrm{d}\left(bx\right)+\int_b^d f\left(cy\right)\mathrm{d}\left(cy\right)=\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)+\int_{ab}^{bc}f\left(u\right)\mathrm{d}u+\int_{cb}^{cd}f\left(u\right)\mathrm{d}u$$

$$=\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)+\int_{ab}^{cd}f\left(u\right)\mathrm{d}u\overset{ab=cd}{=}\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)+0=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}。$$

故 $I=\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$

方法二：求全微分 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数

方式 1：利用微分的运算法则及一阶微分的形式不变性可得

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\left[yf\left(xy\right)+\frac{1}{y}\right]\mathrm{d}x+\left[xf\left(xy\right)-\frac{x}{y^2}\right]\mathrm{d}y=f\left(xy\right)\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right)+\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=f\left(xy\right)\mathrm{d}\left(xy\right)+\frac{1}{y}\mathrm{d}x+x\mathrm{d}\frac{1}{y}=f\left(xy\right)\mathrm{d}\left(xy\right)+\mathrm{d}\frac{x}{y}=\mathrm{d}F\left(xy\right)+\mathrm{d}\frac{x}{y}=\mathrm{d}\left[F\left(xy\right)+\frac{x}{y}\right]$$

其中，$F'\left(u\right)=f\left(u\right)$。

故 $I=\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\left[F\left(xy\right)+\frac{x}{y}\right]\bigg|_{(a,b)}^{(c,d)}=\left[F\left(cd\right)+\frac{c}{d}\right]-\left[F\left(ab\right)+\frac{a}{b}\right]\overset{ab=cd}{=}\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$

方式 2:利用偏积分法求原函数。设 $\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则

$$u(x,y)=\int P\mathrm{d}x+\varphi(y)=\int\left[yf(xy)+\frac{1}{y}\right]\mathrm{d}x+\varphi(y)=\int yf(xy)\,\mathrm{d}x+\frac{x}{y}+\varphi(y)$$

$$=\int f(xy)\,\mathrm{d}(xy)+\frac{x}{y}+\varphi(y)=F(xy)+\frac{x}{y}+\varphi(y),$$

其中 $F'(u)=f(u)$，

再由 $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q$ 得 $xf(xy)-\dfrac{x}{y^2}+\varphi'(y)=xf(xy)-\dfrac{x}{y^2}$，从而 $\varphi'(y)=0$，取 $\varphi(y)=0$，则

$$u(x,y)=F(xy)+\frac{x}{y},$$

故 $I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\left[F(xy)+\dfrac{x}{y}\right]\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}=\left[F(cd)+\dfrac{c}{d}\right]-\left[F(ab)+\dfrac{a}{b}\right]\overset{ab=cd}{=}\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$。

7.【考点定位】方向导数与梯度的关系；多元函数的条件最值；拉格朗日乘数法。

【解】（1）因为 $h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度方向的方向导数最大，又因为梯度为

$$\mathbf{grad}\,h(x_0,y_0)=\left(h_x'(x_0,y_0),h_y'(x_0,y_0)\right)=\left(y_0-2x_0,x_0-2y_0\right),$$

所以 $h(x,y)$ 在点 M 处沿方向 $\left(y_0-2x_0,x_0-2y_0\right)$ 的方向导数最大，并且梯度的模为方向导数的最大值，

故 $g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$。

（2）由（1）知 $g(x,y)=\sqrt{5x^2+5y^2-8xy}$，求 $g(x,y)$ 的最大值即是求

$f(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 的最大值，限制条件为 $x^2+y^2-xy=75$，即 $75-x^2-y^2+xy=0$

设 $L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda\left(75-x^2-y^2+xy\right)$

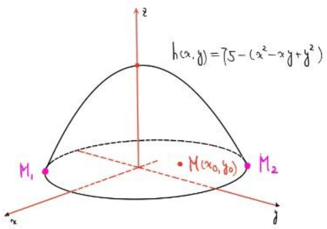
令 $\begin{cases}L_x'=10x-8y+\lambda(y-2x)=0 & ①\\ L_y'=10y-8x+\lambda(x-2y)=0 & ②\\ L_\lambda'=75-x^2-y^2+xy=0 & ③\end{cases}$，由①+②得 $(x+y)(2-\lambda)=0$，若 $x+y=0$，即 $y=-x$，

代入③可得 $\begin{cases}x=5\\y=-5\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=-5\\y=5\end{cases}$；若 $\lambda=2$，代入①可得 $y=x$，将 $y=x$ 代入③可得 $\begin{cases}x=5\sqrt{3}\\y=5\sqrt{3}\end{cases}$，或

$\begin{cases}x=-5\sqrt{3}\\y=-5\sqrt{3}\end{cases}$。由于 $f(5,-5)=f(-5,5)=450,f\left(\pm5\sqrt{3},\pm5\sqrt{3}\right)=150$，所以点 $M_1(5,-5)$ 或

$M_2(-5,5)$ 可作为攀登起点。

【注】为了方便同学们理解，我们画出高度函数的图像和攀登起点



8.【考点定位】三重积分的球面坐标计算；二重积分的极坐标计算；变限积分求导。

(1)【解】区域$\Omega(t)$的球坐标表示为$\begin{cases}0\le\varphi\le\pi\\0\le\theta\le2\pi\\0\le r\le t\end{cases}$，

于是 $\iiint\limits_{\Omega(t)}f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)\mathrm{d}r$；

区域$D(t)$的极坐标表示为$\begin{cases}0\le\theta\le2\pi\\0\le r\le t\end{cases}$，

于是 $\iint\limits_{D(t)}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r$；

$\int_{-t}^t f\left(x^2\right)\mathrm{d}x\overset{\text{偶函数}}{=}2\int_0^t f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_0^t f\left(r^2\right)\mathrm{d}r$。

则 $$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma}=\frac{4\pi\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)\mathrm{d}r}{2\pi\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)\mathrm{d}r}{\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r};$$

$$G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^t f\left(x^2\right)\mathrm{d}x}=\frac{2\pi\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r}{2\int_0^t f\left(r^2\right)\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r}{\int_0^t f\left(r^2\right)\mathrm{d}r}。$$

$$F'(t)=\frac{2f\left(t^2\right)\cdot t^2\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r-2tf\left(t^2\right)\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r\right]^2}=\frac{2tf\left(t^2\right)\int_0^t f\left(r^2\right)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r\right]^2}$$

因为$f(x)$恒大于零，所以当$t>0$时，$F'(t)>0$，故$F(t)$在$(0,+\infty)$内单调递增。

(2)【证明】因为

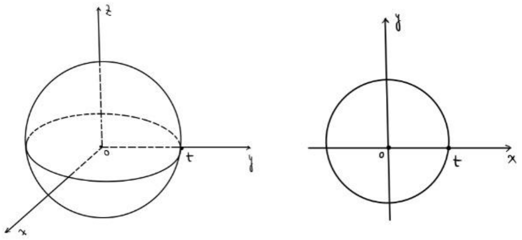
$$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)=\frac{2\int_0^t f\left(r^2\right)\bullet r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f\left(r^2\right)r\mathrm{d}r}-\frac{2\int_0^t f\left(r^2\right)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f\left(r^2\right)\mathrm{d}r}=2\bullet\frac{\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)\mathrm{d}r\bullet\int_0^t f\left(r^2\right)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r\right]^2}{\int_0^t f\left(r^2\right)r\mathrm{d}r\bullet\int_0^t f\left(r^2\right)\mathrm{d}r}$$

令 $\varphi\left(t\right)=\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f\left(r^2\right)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r\right]^2$，则 $\varphi\left(0\right)=0$，

$\varphi'\left(t\right)=t^2 f\left(t^2\right)\int_0^t f\left(r^2\right)\mathrm{d}r+f\left(t^2\right)\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)\mathrm{d}r-2tf\left(t^2\right)\cdot\int_0^t rf\left(r^2\right)\mathrm{d}r=f\left(t^2\right)\cdot\int_0^t f\left(r^2\right)\left(t-r\right)^2\mathrm{d}r$

由 $f\left(x\right)$ 恒大于零可知当 $t>0$ 时，$\varphi'\left(t\right)>0$，所以 $\varphi\left(t\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，故 $t>0$ 时，

$\varphi\left(t\right)>\varphi\left(0\right)=0$，即 $F\left(t\right)-\dfrac{2}{\pi}G\left(t\right)>0$，故 $F\left(t\right)>\dfrac{2}{\pi}G\left(t\right)$。



$\Omega\left(t\right)$　　　　$D\left(t\right)$

9.【考点定位】格林公式；定积分的性质。（题目有小错误）

【证明】(1) 由格林公式可得

$$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D\left[\frac{\partial\left(xe^{\sin y}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(-ye^{-\sin x}\right)}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D e^{\sin y}\mathrm{d}\sigma+\iint_D e^{-\sin x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^\pi e^{\sin y}\mathrm{d}y+\int_0^\pi\mathrm{d}y\int_0^\pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi e^{\sin y}\mathrm{d}y+\pi\int_0^\pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(\int_0^\pi e^{\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^\pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x\right)=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D\left[\frac{\partial\left(xe^{-\sin y}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(-ye^{\sin x}\right)}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D e^{-\sin y}\mathrm{d}\sigma+\iint_D e^{\sin x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^\pi e^{-\sin y}\mathrm{d}y+\int_0^\pi\mathrm{d}y\int_0^\pi e^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\left(\int_0^\pi e^{-\sin y}\mathrm{d}y+\int_0^\pi e^{\sin x}\mathrm{d}x\right)$$

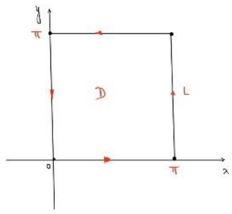
$$=\pi\left(\int_0^\pi e^{\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^\pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x\right)=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x,$$

故 $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$。

(2) 由 (1) 得 $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x$，由于

$$e^{\sin x}+e^{-\sin x}\geq 2\sqrt{e^{\sin x}\cdot e^{-\sin x}}=2,$$

所以 $\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\geq\int_0^\pi 2\mathrm{d}x=2\pi$，故 $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\geq 2\pi^2$。



【注】①由泰勒展开式可得：

$$e^{\sin x}+e^{-\sin x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\sin x)^n}{n!}=2\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin^{2n}x}{(2n!)}=2\left(1+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^4 x}{4!}+\cdots\right)。$$

我们进一步可将（2）中的结论加强为：

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)dx\geq 2\pi\int_0^{\pi}\left(1+\frac{\sin^2 x}{2!}\right)dx=2\pi\left[\pi+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{5}{2}\pi^2$$

②在（1）的证明中，我们也可以直接利用对称性进行证明：

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D\left[\frac{\partial\left(xe^{\sin y}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(-ye^{-\sin x}\right)}{\partial y}\right]d\sigma=\iint_D\left[e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right]d\sigma$$

$$=\iint_D e^{\sin y}d\sigma+\iint_D e^{-\sin x}d\sigma=\iint_D e^{\sin x}d\sigma+\iint_D e^{-\sin x}d\sigma=\iint_D\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)d\sigma。$$

10.【考点定位】高斯公式；三重积分的计算；第二型曲面积分的计算。

【解】这里采用两种方法计算该积分

方法一：利用高斯公式。

Σ_1：$z=0,(x,y)\in D$，取下侧，这里 D：$x^2+y^2\leq 1$，Σ_1与Σ 所围区域记为Ω。

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy-\iint_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$I_1=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy\overset{\text{高斯公式}}{=}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial\left(2x^3\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(2y^3\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(3\left(z^2-1\right)\right)}{\partial z}\right)dv$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(6x^2+6y^2+6z\right)dv=6\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv+6\iiint_{\Omega}zdv,$$

由于

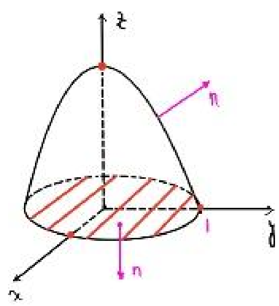
$$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv=\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy\int_0^{1-x^2-y^2}dz=\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(x^2+y^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\left(1-r^2\right)rdr=2\pi\int_0^1\left(r^3-r^5\right)dr=\frac{\pi}{6};$$

$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z\left[\pi\left(1-z\right)\right]\mathrm{d}z=\pi\int_0^1\left(z-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{6}$；所以 $I_1=6\times\frac{\pi}{6}+6\times\frac{\pi}{6}=2\pi$。

$I_2=\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}3\left(0-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$。

故 $I=I_1-I_2=2\pi-3\pi=-\pi$。



方法二：化为二重积分。

曲面 Σ：$z=1-x^2-y^2,\left(x,y\right)\in D$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(-z_x,-z_y,1\right)=\left(2x,2y,1\right)$。这里 D：$x^2+y^2\le 1$,

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[2x^3\cdot\left(-z_x\right)+2y^3\cdot\left(-z_y\right)+3(z^2-1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}\left[2x^3\cdot\left(2x\right)+2y^3\cdot\left(2y\right)+3(z^2-1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}\left[2x^3\cdot\left(2x\right)+2y^3\cdot\left(2y\right)+3\left(\left(1-x^2-y^2\right)^2-1\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\left[4\left(x^4+y^4\right)+3\left(\left(1-x^2-y^2\right)^2-1\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_{D}\left(x^4+y^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint\limits_{D}\left(1-x^2-y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-3\pi$$

其中

$$\iint\limits_{D}\left(x^4+y^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\left[4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta\right]=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4};$$

$$\iint\limits_{D}\left(1-x^2-y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)^2 r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1\left(1-r^2\right)^2 r\mathrm{d}r=-\pi\int_0^1\left(1-r^2\right)^2\mathrm{d}\left(1-r^2\right)$$

$$=-\frac{\pi}{3}\left(1-r^2\right)^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3};\text{故}I=4\times\frac{\pi}{4}+3\times\frac{\pi}{3}-3\pi=-\pi。$$

11.【考点定位】欧拉方程。

【答案】$y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2},\left(c_1,c_2\text{为任意常数}\right)$。

令$x=\mathrm{e}^t$,则原方程化为：$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y+4\mathrm{D}y+2y=0,\left(\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$,整理得$\left(\mathrm{D}^2+3\mathrm{D}+2\right)y=0$,

即$y''(t)+3y'(t)+2y=0$。其特征方程为$:r^2+3r+2=0$,解得$r_1=-1,r_2=-2$,故

$$y=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2},(c_1,c_2\text{为任意常数})。$$

12.【考点定位】第二型曲线积分的计算；格林公式。

【解】方法一：利用参数方程。

如图（a）曲线L的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以

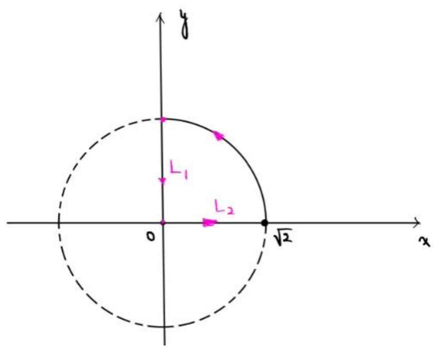
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2+2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}\pi-\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{3}{2}\pi。$$

方法二：利用格林公式。

如图(b),将L与L_1：$x=0\left(y\in\left[0,\sqrt{2}\right]\right)$及$L_2:y=0,\left(x\in\left[0,\sqrt{2}\right]\right)$沿逆时针方向构成封闭曲线，所围成的区域记为D，由格林公式得

$$\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\int_{L+L_1+L_2}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x-\int_{L_1+L_2}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\iint_D 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{3}{2}\pi。$$



13.【考点定位】第二类曲线积分与路径无关的等价条件；第二类曲线积分性质。(题目有错误)

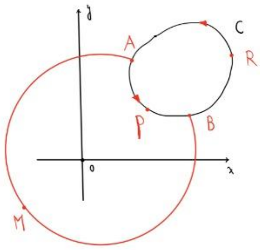
（I）【证明】如图，在曲线C上任取两点A,B作绕原点的一条封闭曲线$\overset{\frown}{AMBRA}$，及另一条封闭曲线$\overset{\frown}{AMBPA}$，由题设知 $\oint_{\overset{\frown}{AMBRA}}\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\oint_{\overset{\frown}{AMBPA}}\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ ，

由第二类曲线积分的可加性知:

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\int_{\widehat{BRA}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}+\int_{\widehat{APB}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=\int_{\widehat{BRA}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\int_{\widehat{BPA}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\int_{\widehat{AMBRA}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\int_{\widehat{AMBPA}}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4},$$

从而对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$。



(II)【解】设 $P=\frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4},Q=\frac{2xy}{2x^2+y^4}$，由（I）知曲线积分与路径无关，从而 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)\left(2x^2+y^4\right)-\varphi(y)4y^3}{\left(2x^2+y^4\right)^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y\left(2x^2+y^4\right)-2xy\cdot 4x}{\left(2x^2+y^4\right)^2}$，

故
$$\frac{2x^2\varphi'(y)+y^4\varphi'(y)-\varphi(y)4y^3}{\left(2x^2+y^4\right)^2}=\frac{-4x^2y+2y^5}{\left(2x^2+y^4\right)^2},$$

比较分子得
$$\begin{cases} 2x^2\varphi'(y)=-4x^2y & ① \\ y^4\varphi'(y)-4y^3\varphi(y)=2y^5 & ② \end{cases},$$

由①知 $\varphi'(y)=-2y$，得 $\varphi(y)=-y^2+c$，将 $\varphi(y)$ 代入②式得 $y^4(-2y)-4y^3\left(-y^2+c\right)=2y^5$，解得 $c=0$，因此 $\varphi(y)=-y^2$。

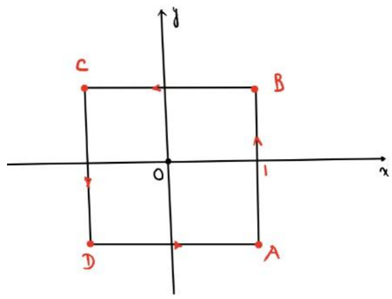
【注】进一步，我们可以算出常数 $I=\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$，其中 L 为围绕原点的分段光滑简单闭曲线。

事实上，$I=\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\oint_L \frac{-y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$，取如图一条特殊的围绕原点的分段光滑曲线：$L$ 为正方形区域 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\right\}$ 的正向边界，则

$$I=\int_{AB}\frac{-y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}+\int_{BC}\frac{-y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}+\int_{CD}\frac{-y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}+\int_{DA}\frac{-y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{2y}{2+y^4}\mathrm{d}y+\int_{1}^{-1}\frac{-1}{2x^2+1}\mathrm{d}x+\int_{1}^{-1}\frac{-2y}{2+y^4}\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\frac{-1}{2x^2+1}\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}\frac{2y}{2+y^4}\mathrm{d}y=0。$$

即这个常数为零。



14.【考点定位】高斯公式；第二类曲面积分的计算。

【答案】2π

【解】方法一：利用高斯公式。

记$\sum_1$: $z=1$，$x^2+y^2\le 1$取上侧，其单位法向量为$\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$。

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(2y)}{\partial y}+\frac{\partial 3(z-1)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}6\mathrm{d}v=6\times\frac{1}{3}\pi=2\pi。$$

由于

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}[x\cdot 0+2y\cdot 0+3(z-1)\cdot 1]\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}3(z-1)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}0\mathrm{d}S=0,$$

故$I=2\pi-0=2\pi$。

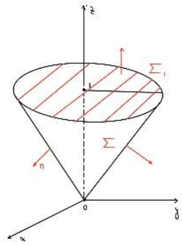
方法二：化为二重积分。

Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2}$的法向量：$n=(z_x,z_y,-1)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[x\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\cdot\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+3(z-1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{-x^2-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+3\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left[\frac{-r^2\left(\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)}{r}+3(r-1)\right]r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\left(\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(3r^2-3r\right)\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(3r^2-3r\right)\mathrm{d}r=3\pi\times\frac{1}{3}-2\pi\left(1-\frac{3}{2}\right)=2\pi。$$



【注】在例 10 和本题中，对于第二类曲面积分，我们均采用了两种方法进行计算。这两种方法同学们都需要熟练掌握，有时采用高斯公式化为三重积分比直接化为二重积分的计算量小，有时直接化为二重积分比高斯公式的计算量小。在考试中，更多的是采用高斯公式。

15.【考点定位】复合函数偏导法则；格林公式。

【证明】由格林公式，对 D 内的任意分段光滑的有方向的简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

等价于 $$\frac{\partial\left(-xf(x,y)\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(yf(x,y)\right)}{\partial y},$$

即 $-f(x,y)-xf_1'(x,y)=f(x,y)+yf_2'(x,y)$，即 $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)+2f(x,y)=0$，

下面证明 $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)+2f(x,y)=0$。

由于 $t>0$ 时，都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，等式两边同时对 t 求导得，

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y),$$

取 $t=1$，则有 $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y)$，即 $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)+2f(x,y)=0$。

故对 D 内的任意分段光滑的有方向的简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$，

【注】①一般情形下，若函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数，且对于任意 $t>0$，都有

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y),(n\text{为整数})$$

则称 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数。对于 n 次齐次函数，我们有如下结果：

$$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=nf(x,y)。$$

事实上，等式 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ 两边同时对 t 求导得

$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)$，取 $t=1$，则有 $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=nf(x,y)$。

例如，$f(x,y)=x^2+xy$ 满足 $f(tx,ty)=(tx)^2+(tx)(ty)=t^2(x^2+xy)=t^2f(x,y)$，

直接验证得到：$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=x(2x+y)+yx=2(x^2+xy)=2f(x,y)$。

② 反之，若 $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=nf(x,y)$，则对于任意 $t>0$，都有

$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$。事实上，令 $\varphi(t)=\dfrac{f(tx,ty)}{t^n}$，则

$$\varphi'(t)=\left[\frac{f(tx,ty)}{t^n}\right]_t'=\left[f(tx,ty)t^{-n}\right]_t'=f(tx,ty)(-n)t^{-n-1}+t^{-n}\left[xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)\right]$$

$$=t^{-n-1}\left[(tx)f_1'(tx,ty)+(ty)f_2'(tx,ty)-nf(tx,ty)\right]\overset{\begin{cases}u=tx\\v=ty\end{cases}}{=}t^{-n-1}\left[uf_1'(u,v)+vf_2'(u,v)-nf(u,v)\right]=0$$

所以 $\varphi(t)$ 为常数，又由于 $\varphi(1)=\dfrac{f(x,y)}{1^n}=f(x,y)$，故 $\dfrac{f(tx,ty)}{t^n}=f(x,y)$，因此

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)。$$

16.【考点定位】高斯公式；第二类曲面积分的计算；三重积分的计算；二重积分的对称性。

【解】这里采用两种方法计算该积分：

方法一：利用高斯公式。

如图，由于 Σ 不是封闭曲面，且取 Σ 的上侧，因此补面 Σ_1：$z=0$，$(x,y)\in D$ 这里 $D:x+\dfrac{y^2}{4}\le 1$ 且 Σ_1 取下侧。设 $P=xz,Q=2zy,R=3xy$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=z,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=2z,\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$。

设 Σ 与 Σ_1 所围区域为 Ω。Ω 在 xOy 平面投影为 D

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{高斯公式}}{=}\iiint\limits_{\Omega}(z+2z+0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-3\iint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

设 D_z 为纵坐标是 z 的平面截闭区域 Ω 所得的一个平面区域，（如图）则

$$D_z: x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z\left(0\le z\le 1\right),$$

从而

$$3\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^1 z\cdot\pi\cdot\sqrt{1-z}\cdot 2\sqrt{1-z}\,\mathrm{d}z=6\pi\int_0^1 z\left(1-z\right)\mathrm{d}z=6\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\pi。$$

由对称性得，$\iint_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，从而 $I=\pi$。

方法二：化为二重积分。

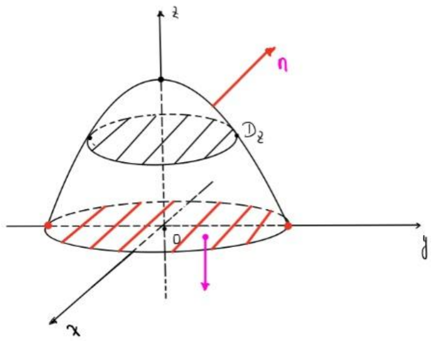
曲面 Σ：$z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4},(x,y)\in D$，取上侧。由 $z_x=-2x,z_y=-\dfrac{y}{2}$ 得，

$$I=\iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left[xz\left(-z_x\right)+2zy\left(-z_y\right)+3xy\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\left[x\left(1-x^2-\frac{y^2}{4}\right)\cdot\left(2x\right)+2y\left(1-x^2-\frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{y}{2}\right)+3xy\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\left[\left(1-x^2-\frac{y^2}{4}\right)\cdot\left(2x^2+y^2\right)+3xy\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{对称性}}{=}\iint_{D}\left(1-x^2-\frac{y^2}{4}\right)\cdot\left(2x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \overset{\text{广义极坐标}\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=2r\sin\theta\end{cases}}{=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)r^2\left(2\cos^2\theta+4\sin^2\theta\right)2r\mathrm{d}r$$

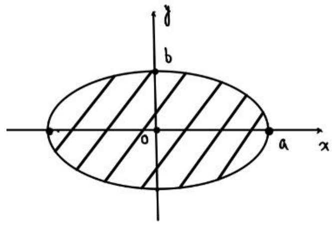
$$=2\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2\theta+4\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)r^3\mathrm{d}r=2\times 6\pi\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\pi。$$



【注】当积分区域是椭圆域 $D=\left\{(x,y)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right.\right\}$ 时（如图），其广义极坐标表示为

$$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases},0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1,$$

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(ar\cos\theta,br\sin\theta)abr\mathrm{d}\theta$。当积分区域为椭圆时，上述广义极坐标变换往往能给我们带来计算上的便利。



17.【考点定位】第二型曲线积分的计算；第一型曲线积分的性质。

【答案】B

【解】设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由题意可知 $x_1<0<x_2,y_1>0>y_2$，则

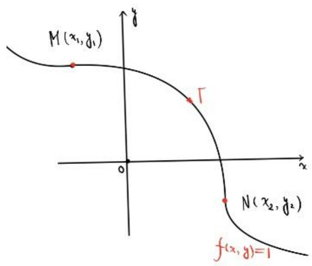
对于选项(A)：$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x=\int_\Gamma 1\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x=x_2-x_1>0$；

对于选项(B)：$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y=\int_\Gamma 1\mathrm{d}y=\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y=y_2-y_1<0$；

对于选项(C)：$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\Gamma 1\mathrm{d}s=s(\Gamma)>0$ ；

对于选项(D)：$\int_\Gamma f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y=f(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}=f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)=1-1=0$。

故答案选（B）。



18.【考点定位】第二类曲线积分的计算；分部积分法；格林公式。

【解】这里用两种方法计算该积分

方法一：利用格林公式

设 L_1 从 $A(\pi,0)$ 到 $O(0,0)$ 的线段，记 $P=\sin 2x$， $Q=2(x^2-1)y$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=0,\frac{\partial Q}{\partial x}=4xy$，

$$\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y=\int_{L+L_1}\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y-\int_{L_1}\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{格林公式}}{=} -\iint_D 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_\pi^0 \sin 2x\mathrm{d}x = -\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^{\sin x} 4xy\mathrm{d}y + \int_0^\pi \sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^\pi 2x\sin^2 x\mathrm{d}x + \int_0^\pi \sin 2x\mathrm{d}x = -2\times\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = -2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

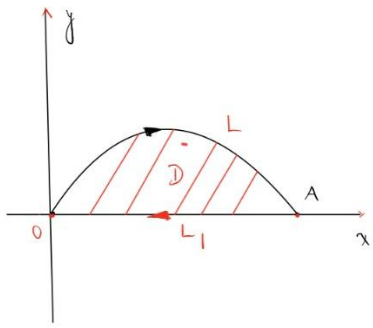
$$= -2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2}。$$

方法二：化为定积分。由 L：$y = \sin x, x \in [0,\pi]$ 可得，

$$\int_L \sin 2x\mathrm{d}x + 2\left(x^2-1\right)y\mathrm{d}y = \int_0^\pi\left[\sin 2x + 2\left(x^2-1\right)\sin x\cos x\right]\mathrm{d}x = \int_0^\pi\left[\sin 2x + \left(x^2-1\right)\sin 2x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi x^2\sin 2x\mathrm{d}x \overset{\text{分部积分}}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_0^\pi = -\frac{\pi^2}{2}$$

$x^2\downarrow$	$+\quad 2x$	$-\quad 2$	$+\quad 0$
$\sin 2x\uparrow$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$	$-\frac{1}{4}\sin 2x$	$\frac{1}{8}\cos 2x$



【注】在方法一中，我们用到了结论：$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$。

19.【考点定位】高斯公式；三重积分的计算；第二类曲面积分的计算；。

【答案】4π

【解】方法一：利用高斯公式。

如图，记 $\Sigma_1 : z = 0$，$x^2 + y^2 \le 4$，取下侧，Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域为 Ω。

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Sigma_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{高斯公式}}{=} \iiint_\Omega\left[\frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v = \iiint_\Omega y\mathrm{d}v \overset{\text{对称性}}{=} 0。$$

由于Σ_1的法向量$n=\left(0,0,-1\right)$，所以

$$\iint_{\Sigma_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 4} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=-4\pi,$$

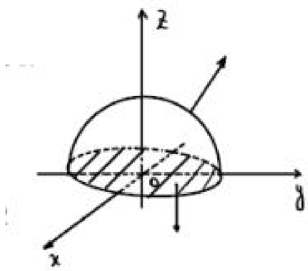
故$I=0-\left(-4\pi\right)=4\pi$。

方法二：化为二重积分。

由Σ：$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ ，$x^2+y^2\le 4$取上侧，得$z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$$I=\iint_{\Sigma}\left[xy\cdot\left(-z_x\right)+x\cdot\left(-z_y\right)+x^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 4}\left(\frac{x^2y+xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{对称性}}{=}\iint_{x^2+y^2\le 4}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{对称性}}{=}\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 4}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=4\pi。$$



20.【考点定位】傅里叶级数；余弦级数；收敛定理。

【解】由题设，$f(x)$对应的余弦级数的系数为：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\pi}=2-\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)\cos nx\mathrm{d}x\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-x^2}{n}\sin nx-\frac{2x}{n^2}\cos nx+\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{4}{n^2},\left(n=1,2,\cdots\right)$$

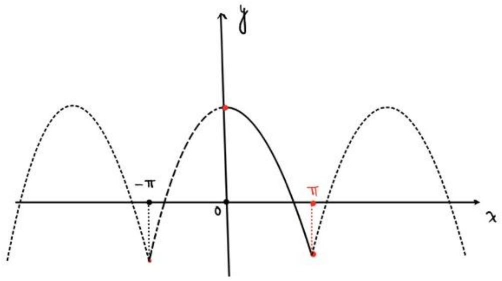
其中$\int\left(1-x^2\right)\cos nx\mathrm{d}x\overset{\text{分部积分}}{=}\dfrac{1-x^2}{n}\sin nx-\dfrac{2x}{n^2}\cos nx+\dfrac{2}{n^3}\sin nx+c$。

$\left(1-x^2\right)\downarrow$	+	$(-2x)$	−	(-2)	+	0
$\cos nx\uparrow$	$\frac{1}{n}\sin nx$		$-\frac{1}{n^2}\cos nx$		$-\frac{1}{n^3}\sin nx$	

所以 $f(x)$ 的余弦级数为：$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$，由收敛定理可知 $s(x)=1-x^2,(0\le x\le\pi)$。

取 $x=0$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出 $f(x)$ 经过偶延拓，再经周期延拓后的图像。



21.【考点定位】曲线的切线；旋转曲面的方程；旋转体的体积。

【解】(I)曲面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转一周得到，所以 S_1 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$。

设椭圆过 $(4,0)$ 的切线切点为 $(x_{0,}y_0)$，方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 两边对 x 求导得，

$\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}\cdot y'=0,故y'=-\frac{3x}{4y}$。从而得 $\begin{cases}-\frac{3x_0}{4y_0}=\frac{y_0}{x_0-4}\\ \frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{3}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=1\\ y_0=\pm\frac{3}{2}\end{cases}$。故切线方程为：

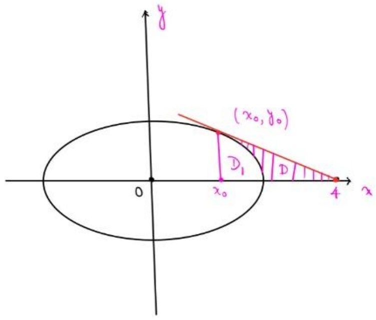
$\frac{x}{4}\pm\frac{y}{2}=1,即y=\pm\frac{1}{2}(x-4)或y^2=\frac{1}{4}(x-4)^2$，故该切线绕 x 轴旋转一周得到的圆锥面 S_2 的方程为 $(x-4)^2=4(y^2+z^2)$。

(II)（如图）区域 $D\cup D_1$ 绕 x 轴旋转一周得到的圆锥体体积为 $V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2(4-1)=\frac{9\pi}{4}$，

D_1 绕 x 轴旋转一周得到的圆锥体体积为：

$$V_2=\int_1^2\pi\left[\sqrt{3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}\right]^2\mathrm{d}x=3\pi\int_1^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=3\pi\left(1-\frac{7}{12}\right)=\frac{5\pi}{4},$$

故所求体积为：$V=V_1-V_2=\pi$。



【注】①椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在某点$(x_{0,}y_0)$处的切线方程为：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$。

②椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在某点$(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$。

这些结论以后可以直接使用。为了使同学们加深印象，我们推导一下①:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$，记$F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$，则椭圆在$(x_{0,}y_0)$处的法向量为

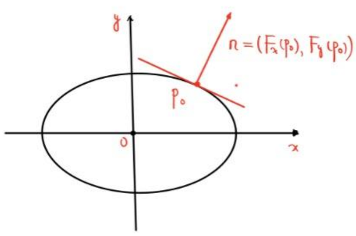
$\boldsymbol{n}=\left(F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0)\right)=\left(\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2}\right)=2\left(\dfrac{x_0}{a^2},\dfrac{y_0}{b^2}\right)$，(如下图)由直线的点法式可得切线

方程为：$\left(\dfrac{x_0}{a^2},\dfrac{y_0}{b^2}\right)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0$，即$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$。

②的推导完全类似，请同学们自己完成。

③本题第（I）问，使用①中的结论，设$(x_{0,}y_0)$为切点，则切线方程为$\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$，

由切线过点$(4,0)$立即可得$x_0=1$，这样求解的过程就会简洁很多。



$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$

22.【考点定位】平面与平面的位置关系；第一类曲面积分的计算；隐函数的偏导数。

【解】记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，则椭球面 $S:F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的法量为 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y-z,2z-y)$，平面 xoy 的法向量为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$。曲面 S 在 P 点处的切平面与 xoy 面垂直的充要条件是：$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=0$，所以 $(2x,2y-z,2z-y)\cdot(0,0,1)=0$，即 $2z-y=0$。故 P 点的轨迹方程为 $C:\begin{cases}2z-y=0 & ①\\ x^2+y^2+z^2-yz=1 & ②\end{cases}$。由①得 $z=\dfrac{y}{2}$，代入②得 $x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1$。故曲面 Σ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+\dfrac{3}{4}y^2\le 1$。（如图所示）

由 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$

$$得, z_x=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{2x}{2z-y}, z_y=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{2y-z}{2z-y},$$

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,\mathrm{d}\sigma。$$

由于 $x^2+y^2+z^2-yz-1=0$, 所以 $x^2=-(y^2+z^2-yz-1)$，从而

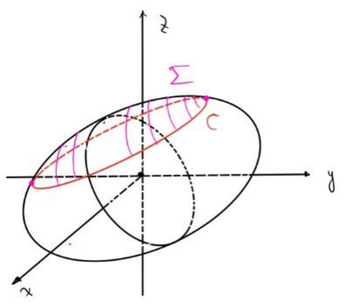
$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{2x}{2z-y}\right)^2+\left(-\frac{2y-z}{2z-y}\right)^2}=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}$$

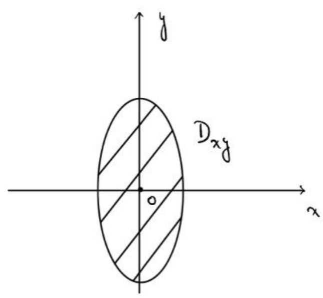
$$=\frac{\sqrt{-4(y^2+z^2-yz-1)+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}$$

因此

$$I==\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}\sigma\overset{对称性}{=}\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\sqrt{3}\cdot S(D_{xy})=\sqrt{3}\left(\pi\times1\times\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=2\pi。$$





23.【考点定位】形心的概念；三重积分的计算。

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解】

$$\overline{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$$

这里采用直角坐标进行计算。

方法一:先二后一法。积分区域

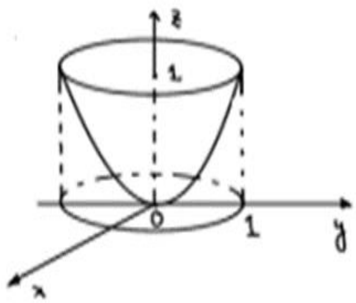
$\Omega:\begin{cases}x^2+y^2\le z\\0\le z\le 1\end{cases}$, $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{2};\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z^2\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{3}$。

方法二：先一后二法。积分区域$\Omega:\begin{cases}x^2+y^2\le z\le 1\\(x,y)\in D\end{cases}$其中$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$,

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)r\mathrm{d}r=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2};$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\left(1-\left(x^2+y^2\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-r^4\right)r\mathrm{d}r=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{3}。$$

故
$$\overline{z}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}。$$



24.【考点定位】第二类曲线积分的计算；格林公式。

【答案】0

【解】方法一:$L=L_1+L_2$，其中$L_1:y=1+x,x\in[-1,0];L_2:y=1-x,x\in[0,1]$.

$I=\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{L_1}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+\int_{L_2}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$。由于

$$\int_{L_1} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}\left[x(1+x)+x^2\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(x+2x^2\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6},$$

$$\int_{L_2} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}\left[x(1-x)-x^2\right]\mathrm{d}x = \int_{0}^{1}\left(x-2x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6},$$

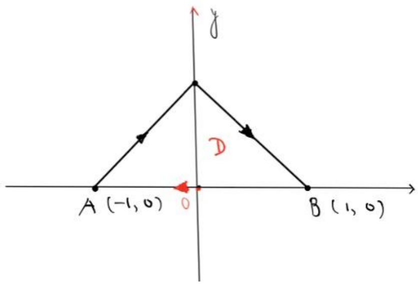
故$I=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$。

方法二：利用格林公式

记Γ为有向线段$\overline{BA}$，则$\Gamma: y=0, x\in[-1,1], I=\oint_{L+\Gamma} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y - \int_{\Gamma} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$。

$$\oint_{L+\Gamma} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = -\iint_D \left[\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma = -\iint_D x\mathrm{d}\sigma \overset{\text{格林公式}}{=} 0;$$

$\int_{\Gamma} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_{1}^{-1} x\cdot 0\mathrm{d}x = 0$。故 $I=0$。



25.【考点定位】第二类曲线积分的计算；斯托克斯公式；二重积分的对称性。

【答案】π

【解】方法一：利用曲线的参数方程。有向曲线$L:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=x+y\end{cases}$的参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \quad \theta\in[0,2\pi]。\\ z=\cos\theta+\sin\theta, \end{cases}$$

$$I=\oint_L xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left[\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)(-\sin\theta)+\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{2}(-\sin\theta+\cos\theta)\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^3\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$\overset{\text{周期性}}{=}\int_{-\pi}^{\pi}\left[-\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^3\theta\right]\mathrm{d}\theta \overset{\text{奇偶性}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \pi。$$

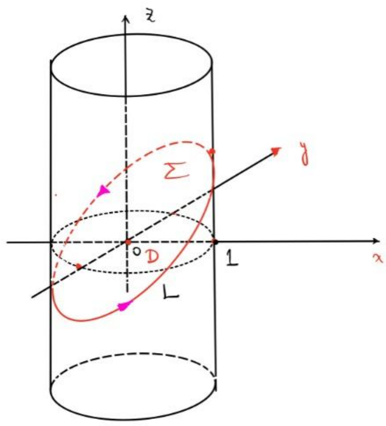
方法二：如图所示，记$\sum$为平面$z=x+y$，是由曲线L所围的部分$z=x+y$，取上侧。

由$\Sigma: z=x+y$得$z_x=1, z_y=1$。其法向量$\boldsymbol{n}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, Σ在xOy面上的投影区域

$D: x^2+y^2\le 1$。由斯托克斯公式得，

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & x & \frac{y^2}{2}\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(-y-x+1)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D}(-y-x+1)\cdot\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D(-y-x+1)\mathrm{d}\sigma\overset{\text{对称性}}{=}\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\pi。$$



26.【考点定位】格林公式；二重积分的计算；第二类曲线积分的计算。

【解】这里采用两种方法计算。

方法一：利用格林公式。记$P=3x^2y,\ Q=x^3+x-2y$

如图，作有向线段$\overline{BO}: x=0, y\in[0,2]$，起点为$B$，终点为$O$，与曲线$L$构成闭曲线，其所围平面区域为$D$，由格林公式可得

$$I=\oint_{L+\overline{BO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{\overline{BO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[\left(3x^2+1\right)-3x^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_2^0(-2y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2 2y\mathrm{d}y=S(D)-4=\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)-4=\frac{\pi}{2}-4。$$

方法二：利用第二类曲线积分的性质及全微分。

$$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3+x-2y\right)\mathrm{d}y=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3-2y\right)\mathrm{d}y+\int_L x\mathrm{d}y$$

由于 $3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3-2y\right)\mathrm{d}y=\left(y\mathrm{d}x^3+x^3\mathrm{d}y\right)-\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}\left(x^3y\right)-\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}\left(x^3y-y^2\right)$，所以

$$\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3-2y\right)\mathrm{d}y=\left(x^3y-y^2\right)\Big|_{O(0,0)}^{B(0,2)}=-4\text{；}$$

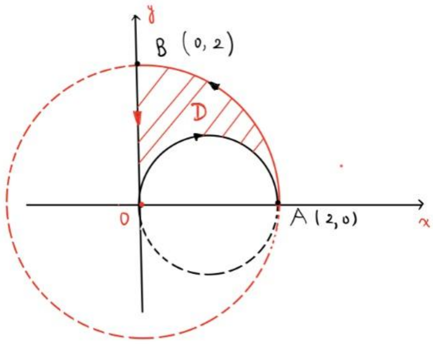
由于 $\int_L x\mathrm{d}y=\int_{\overset{\frown}{OA}}x\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{AB}}x\mathrm{d}y$，其中 $\overset{\frown}{OA}:\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases},\theta\in[0,\pi]$，$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases},\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

所以

$$\int_{\overset{\frown}{OA}}x\mathrm{d}y=\int_{\pi}^{0}(1+\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=-\int_0^{\pi}\left(\cos\theta+\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\cdot2\cos\theta\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi,$$

从而 $\int_L x\mathrm{d}y=-\dfrac{\pi}{2}+\pi=\dfrac{\pi}{2}$, 故 $I=-4+\dfrac{\pi}{2}$。



27.【考点定位】格林公式；二重积分达到最大的条件；曲线积分的计算；瓦里士公式。

【答案】D

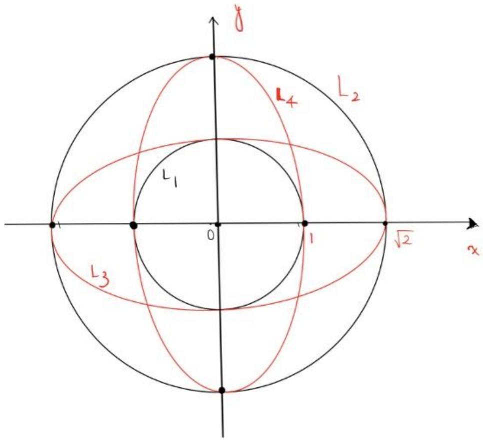
【解】方法一：利用格林公式。

记 $P=y+\dfrac{y^3}{6},Q=2x-\dfrac{x^3}{3}$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2-x^2,\dfrac{\partial P}{\partial y}=1+\dfrac{y^2}{2}$，

由格林公式得

$$I_i=\oint_{L_i}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{D_i}\left[\left(2-x^2\right)-\left(1+\frac{y^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_i}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(i=1,2,3,4\right)\text{。}$$

当被积函数 $1-x^2-\dfrac{y^2}{2}\geq0$，即当积分区域为 $x^2+\dfrac{y^2}{2}\leq1$ 时 I_i 达到最大。又区域 $x^2+\dfrac{y^2}{2}\leq1$ 由曲线 L_4 所围成的区域。故 I_4 最大，故答案选（D)。



方法二：利用参数方程化为定积分逐个计算。

曲线 $L_1: x^2+y^2=1$的参数方程为：$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}(\theta\in[0,2\pi])$，故

$$I_1=\int_0^{2\pi}\left[\left(\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{6}\right)(-\sin\theta)+\left(2\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\sin^2\theta-\frac{\sin^4\theta}{6}+2\cos^2\theta-\frac{\cos^4\theta}{3}\right]\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi。$$

曲线 $L_2: x^2+y^2=2$ 的参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}(\theta\in[0,2\pi])$。

$$I_2=\int_0^{2\pi}\left(\left[\sqrt{2}\sin\theta+\frac{(\sqrt{2}\sin\theta)^3}{6}\right](-\sqrt{2}\sin\theta)+\left[2\sqrt{2}\cos\theta-\frac{(\sqrt{2}\cos\theta)^3}{3}\right](\sqrt{2}\cos\theta)\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta+4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\left(\frac{1}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}。$$

曲线 $L_3: x^2+2y^2=2$ 的参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}(\theta\in[0,2\pi])$。

$$I_3=\int_0^{2\pi}\left(\left(\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{6}\right)\left(-\sqrt{2}\cos\theta\right)+\left[2\sqrt{2}\cos\theta-\frac{\left(\sqrt{2}\cos\theta\right)^3}{3}\right]\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=-\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta+2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-4\times\frac{5\sqrt{2}}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=4\sqrt{2}\times\frac{1!!}{2!!}\frac{\pi}{2}-4\times\frac{5\sqrt{2}}{6}\times\frac{3!!}{4!!}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi。$$

曲线 $L_4:2x^2+y^2=2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}\left(\theta\in[0,2\pi]\right)$

$$I_4=\int_0^{2\pi}\left[\left(\left(\sqrt{2}\sin\theta+\frac{\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^3}{6}\right)\left(-\sin\theta\right)+\left(2\cos\theta-\frac{\left(\cos\theta\right)^3}{3}\right)\sqrt{2}\cos\theta\right)\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta+2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=4\sqrt{2}\left(\frac{1!!}{2!!}\times\frac{\pi}{2}\right)-\frac{8\sqrt{2}}{3}\left(\frac{3!!}{4!!}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi。$$

比较大小可得 I_4 最大，答案选（D）。

【注】①比较两种方法，很明显方法一要简洁得多。方法二中我们用到了以下常用的结论：

(i) $\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta;$

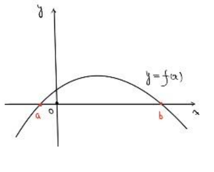
(ii) 瓦里士公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$。

②关于定积分、二重积分、三重积分，我们有如下常用结论：

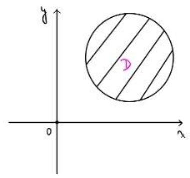
（i）若连续函数 $f(x)$ 满足：当 $x\in[a,b]$ 时 $f(x)\ge 0$; 当 $x\notin[a,b]$ 时 $f(x)<0$。则对于定积分 $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x,(c\le d)$，当 $[c,d]=[a,b]$ 时 $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ 取得最大值。如图(a)。

（ii）若连续函数 $f(x,y)$ 满足：当 $(x,y)\in D$ 时 $f(x,y)\ge 0$; 当 $(x,y)\notin D$ 时 $f(x,y)<0$。则对于二重积分 $\iint\limits_{D'}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，当 $D'=D$ 时 $\iint\limits_{D'}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 取得最大值。如图(b)。

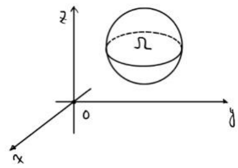
(iii) 若连续函数 $f\left(x,y,z\right)$ 满足：当 $\left(x,y,z\right)\in\Omega$ 时 $f\left(x,y,z\right)\ge 0$; 当 $\left(x,y,z\right)\notin\Omega$ 时 $f\left(x,y,z\right)<0$。则对于三重积分 $\iiint\limits_{\Omega'} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}v$，当 $\Omega'=\Omega$ 时 $\iiint\limits_{\Omega'} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}v$ 取得最大值。如图(c)。



(a)



(b) D 为平面有界闭区域



(c) Ω 为空间有界闭区域

28.【考点定位】空间直线的参数式方程；旋转曲面的方程；形心的概念；三重积分的对称性；三重积分的计算。

【解】（I）如图(a) 直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{AB}=\left(-1,1,1\right)$，由直线的点向式可得，直线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，其参数方程为：$\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=t\end{cases},t\in\left(-\infty,+\infty\right)$，则 L 绕 z 轴旋转所得曲面 Σ 的参数方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=\left(1-t\right)^2+t^2\\ z=t\end{cases},t\in\left(-\infty,+\infty\right)$，消去参数 t 得曲面 Σ 的方程为：$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$。

(II)如图(b) 设形心坐标为 $\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right)$，则 $\overline{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\overline{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\overline{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$

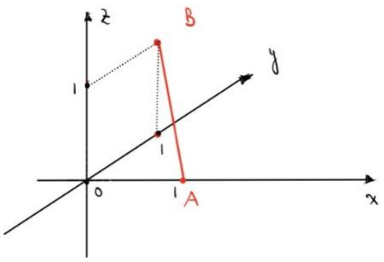
任取 $z\in\left[0,2\right]$ 作垂直于 z 轴的平面可得 Ω 的截面 $D_z: x^2+y^2\le(1-z)^2+z^2$。

于是 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\pi\left(2z^2-2z+1\right)\mathrm{d}z=\pi\left(\dfrac{2}{3}z^3-z^2+z\right)\Big|_0^2=\dfrac{10}{3}\pi,$

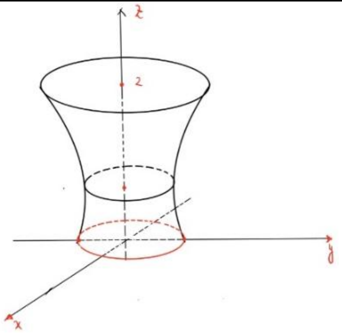
$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{对称性}}{=}\int_0^2 0\mathrm{d}z=0;\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{对称性}}{=}\int_0^2 0\mathrm{d}z=0;$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 z\cdot\pi\left(2z^2-2z+1\right)\mathrm{d}z=\pi\left(\frac{1}{2}z^4-\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_0^2=\frac{14}{3}\pi,$$

从而 $\overline{x}=0,\overline{y}=0,\overline{z}=\dfrac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{10}{3}\pi}=\dfrac{7}{5}$。故 Ω 的形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$。



(a)



(b)

29.【考点定位】高斯公式；两类曲面积分之间的关系；三重积分的计算；三重积分的对称性。(题目有严重错误)

【解】这里采用两种方法计算该积分

方法一：利用高斯

记曲面Σ_1：$z=1,(x,y)\in D$, 其中$D: x^2+y^2\le 1$，方向取下侧。记$P=(x-1)^3, Q=(y-1)^3, R=z-1$, Σ 与Σ_1所围成的区域为Ω，利用高斯公式可得，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{高斯公式}}{=}-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v-\iint\limits_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\left[3\left(x^2+y^2\right)-6(x+y)+7\right]\mathrm{d}v$$

$$\overset{\text{对称性}}{=}\iiint\limits_{\Omega}\left[3\left(x^2+y^2\right)+7\right]\mathrm{d}v=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[3\left(x^2+y^2\right)+7\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[3\left(x^2+y^2\right)+7\right]\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(3r^2+7\right)\left(1-r^2\right)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1\left(3r^2+7\right)\left(1-r^2\right)r\mathrm{d}r$$

$$=\pi\int_0^1\left(3r^2+7\right)\left(1-r^2\right)\mathrm{d}r^2\overset{u=r^2}{=}\pi\int_0^1(3u+7)(1-u)\mathrm{d}u=\pi\int_0^1\left(-3u^2-4u+7\right)\mathrm{d}u=\pi(-1-2+7)=4\pi。$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]\mathrm{d}v=-\iiint\limits_{\Omega}\left[3\left(x^2+y^2\right)-6(x+y)+7\right]\mathrm{d}v$$

因为在Σ_1：$z=1$, 所以$\iint\limits_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

故$I=-4\pi$。

方法二：曲面$\Sigma: z=x^2+y^2,(x,y)\in D$,取上侧，其中

$D: x^2+y^2\le 1,\ z_x=2x, z_y=2y$

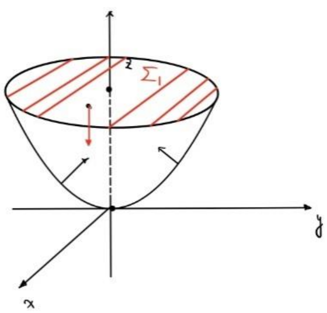
$$I=\iint_{\Sigma}\left[(x-1)^3(-z_x)+(y-1)^3(-z_y)+(z-1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\left[(x-1)^3(-2x)+(y-1)^3(-2y)+(x^2+y^2-1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\left[-2x^4-2y^4+6x^3+6y^3-5x^2-5y^2+2x+2y-1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{对称性}{=}\iint_{D}\left[-2x^4-2y^4-5x^2-5y^2-1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left[-2r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)-5r^2-1\right]r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)-\frac{7}{4}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)\mathrm{d}\theta=-\frac{7\pi}{2}-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{7\pi}{2}-\frac{8}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=-4\pi。$$



30.【考点定位】高斯公式；三重积分的计算。

【解】如图(a),由高斯公式可得

$$I=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial\left(x^2+1\right)}{\partial x}+\frac{\partial(-2y)}{\partial y}+\frac{\partial(3z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}(2x-2+3)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}(2x+1)\mathrm{d}v=V(\Omega)+2\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v。$$

其中$V(\Omega)=\frac{1}{3}\times\left(1\times2\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$。

下面用两种方法计算$J=\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v$：

方法一：先二后一法

$$J=\int_0^1 x\mathrm{d}x\iint_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(1-2x+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}。$$

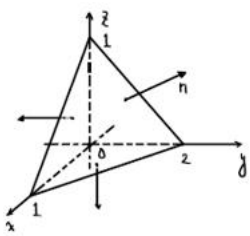
其中 D_x: $\begin{cases} 0 \le y \le 2(1-x) \\ 0 \le z \le 1-x-\dfrac{y}{2} \end{cases}$。如图(b1,b2)

方法二：先一后二法

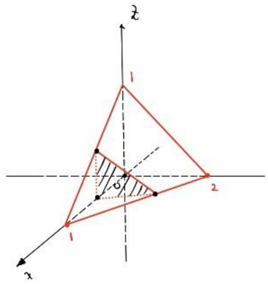
$$J=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}\mathrm{d}z=\iint\limits_D x\left(1-x-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\left(x-x^2-\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[\left(x-x^2\right)(2-2x)-\frac{x}{4}\cdot 4(1-x)^2\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x\overset{1-x=t}{\underset{x=1-t}{=}}\int_0^1(1-t)t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}。$$

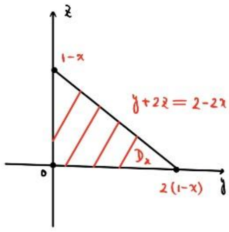
其中 D: $\begin{cases} 0 \le y \le 2(1-x) \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$。如图(c) 故 $I=\dfrac{1}{3}+2J=\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$。



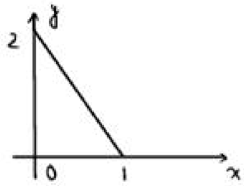
(a)



（b1）



（b2）



（c）

31.【考点定位】第二类曲线积分的计算；一元函数的最值。

【解】由于 $\mathrm{d}f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$，

故 $I(t)=\displaystyle\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=f(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}=f(1,t)-f(0,0)$；

由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$ 得，$f(x,y)=\displaystyle\int(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}\mathrm{d}x+\varphi(y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+\varphi(y)$。

又由于 $f(0,y)=y+1$，所以 $\varphi(y)=y+1$，故 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$；

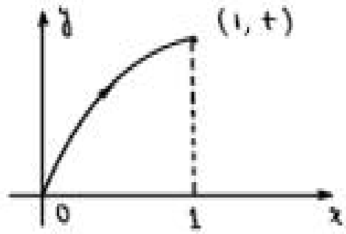
从而 $I(t)=f(1,t)-f(0,0)=(\mathrm{e}^{2-t}+t+1)-1=\mathrm{e}^{2-t}+t$，$I'(t)=-\mathrm{e}^{2-t}+1$。

由 $I'(t)=0$ 得 $t=2$。列表讨论如下：

t	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$

$I'(t)$	+	0	−
$I(t)$	↑	最大值	↓

故$I(t)$的最大值为$I(2)=3$。



32.【考点定位】空间曲线在坐标面上的投影曲线；第一类曲面积分的物理应用；第一类曲面积分的计算。

【解】(I)曲线C的方程为：$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} & ① \\ z^2=2x & ② \end{cases}$，消去$z$得$x^2+y^2=2x$，

故所求投影曲线的方程为$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$。

（II）S的质量为：

$$M=\iint_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S=9\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$$

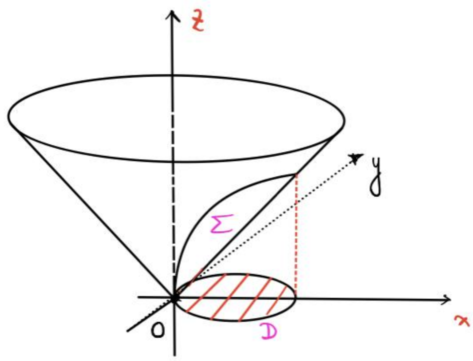
曲面$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$在xoy面上的投影区域为$D: x^2+y^2\le 2x$，如图所示。

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}，所以$$

$$M=9\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=9\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\sqrt{1+\left(z_x\right)^2+\left(z_y\right)^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=9\iint_{D}\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=18\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=48\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\overset{\text{奇偶性}}{=}96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\overset{\text{瓦里士公式}}{=}96\times\frac{2}{3}=64。$$



33.【考点定位】高斯公式；三重积分的计算；第二类曲面积分的计算。

【解】这里采用两种方法计算该积分。

方法一：利用高斯公式。取面Σ_1：$x=0,(y,z)\in D_{yz}$取后侧，其中$D_{yz}:y^2+z^2\le\frac{1}{3}$。

由高斯公式得，

$$I=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[1+3\left(y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}v-0\overset{\text{先二后一}}{=}\int_0^1\mathrm{d}x\iint_{D_x}\left[1+3\left(y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中Ω为Σ与Σ_1所围的封闭区域，$D_x:y^2+z^2\le\frac{1-x^2}{3}\left(0\le x\le1\right)$为横坐标为$x$的平面截闭区域$\Omega$所得到的一个平面区域。由于

$$\iint_{D_x}\left[1+3\left(y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}}\left(1+3r^2\right)r\mathrm{d}r=2\pi\left[\frac{1}{6}\left(1-x^2\right)+\frac{1}{12}\left(1-x^2\right)^2\right]=\frac{\pi}{6}\left[x^4-4x^2+3\right]$$

所以$I=\int_0^1\frac{\pi}{6}\left[x^4-4x^2+3\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3}+3\right)=\frac{14}{45}\pi$，即原式$=\frac{14}{45}\pi$。

方法二:化为二重积分。

Σ：$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2},(y,z)\in D_{yz}$取前侧，其中$D_{yz}:y^2+z^2\le\frac{1}{3}$。

由于$x_y=\frac{-3y}{\sqrt{1-3y^2-3z^2}},x_z=\frac{-3z}{\sqrt{1-3y^2-3z^2}}$，所以

$$I=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^{3}+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left[x+\left(y^{3}+2\right)\left(-x_{y}\right)+z^{3}\left(-x_{z}\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{yz}}\left[\sqrt{1-3y^{2}-3z^{2}}+\left(y^{3}+2\right)\frac{3y}{\sqrt{1-3y^{2}-3z^{2}}}+z^{3}\cdot\frac{3z}{\sqrt{1-3y^{2}-3z^{2}}}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{对称性}}{=}\iint_{D_{yz}}\left[\sqrt{1-3y^{2}-3z^{2}}+\frac{3\left(y^{4}+z^{4}\right)}{\sqrt{1-3y^{2}-3z^{2}}}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-3y^{2}-3z^{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{yz}}\frac{3\left(y^{4}+z^{4}\right)}{\sqrt{1-3y^{2}-3z^{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^{2}}\cdot r\mathrm{d}r+\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{3r^{4}\left(\cos^{4}\theta+\sin^{4}\theta\right)}{\sqrt{1-3r^{2}}}\cdot r\mathrm{d}r$$

因为

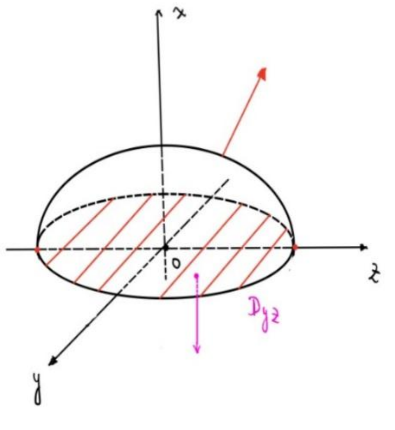
$$\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^{2}}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^{2}}\cdot r\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{3}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^{2}}\mathrm{d}\left(1-3r^{2}\right)=-\frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{2}{3}\left(1-3r^{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2\pi}{9};$$

$$\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{3r^{4}\left(\cos^{4}\theta+\sin^{4}\theta\right)}{\sqrt{1-3r^{2}}}\cdot r\mathrm{d}r=\int_{0}^{2\pi}\left(\cos^{4}\theta+\sin^{4}\theta\right)\mathrm{d}\theta\cdot\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{3r^{4}}{\sqrt{1-3r^{2}}}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=8\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4}\theta\mathrm{d}\theta\right)\cdot\left(\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{3r^{4}}{\sqrt{1-3r^{2}}}\cdot r\mathrm{d}r\right)=8\times\left(\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{3r^{4}}{\sqrt{1-3r^{2}}}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{2}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{3r^{4}}{\sqrt{1-3r^{2}}}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$\overset{r=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t}{=}\frac{1}{6}\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{5}t\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\pi\times\frac{4!!}{5!!}=\frac{4}{45}\pi。$$

所以 $I=\frac{2}{9}\pi+\frac{4}{45}\pi=\frac{14}{45}\pi$。



34.【考点定位】第一类曲线积分的对称性；第一类曲线积分的性质；第一类曲线积分的参数方程计算法。

【解】方法一：由于曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x^{2}+y^{2}+z^{2}=1\\x+y+z=0\end{cases}$ 故由轮换对称性知：

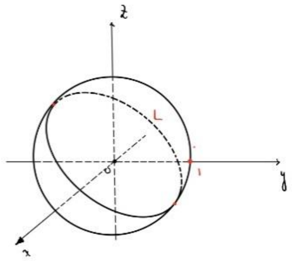
$\oint_L xy\mathrm{d}s=\oint_L xz\mathrm{d}s=\oint_L yz\mathrm{d}s$，故 $\oint_L xy\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(xy+xz+yz)\mathrm{d}s$。

再由曲线 L 的方程 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$ 可得，

$$xy+xz+yz=\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]=\frac{1}{2}[0-1]=-\frac{1}{2},$$

故 $\oint_L xy\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(xy+yz+xz)\mathrm{d}s=-\frac{1}{3}\oint_L\frac{1}{2}\mathrm{d}s=-\frac{1}{6}\oint_L\mathrm{d}s$。

又曲线 L 为平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，且平面过球 $x^2+y^2+z^2=1$ 的球心，所以 L 的长度为 2π，故 $\oint_L xy\mathrm{d}s=-\frac{1}{6}\oint_L\mathrm{d}s=-\frac{1}{6}\cdot2\pi=-\frac{\pi}{3}$。



方法二：曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1 & ①\\x+y+z=0 & ②\end{cases}$，由②得 $z=-x-y$，代入①得

$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$，所以 $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=\frac{1}{2}$，令 $\begin{cases}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\\\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\\y=\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta\end{cases}$，所以曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\\y=\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta\\z=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi]$。

故 $I=\oint_L xy\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\right)\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2+[z'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$

$$\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2+[z'(\theta)]^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta\right)^2}=1,$$

所以 $I=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\right)\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=0-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$,

即原式$=-\dfrac{\pi}{3}$。

【注】这里我们再介绍一种求该曲线参数方程的方法——正交变换法，以拓展同学们的眼界：

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1 & ①\\ x+y+z=0 & ②\end{cases}$，由②得$(1,1,1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$，将$(1,1,1)$单位化得$\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$，取正交矩阵

Q使得其第一行为$\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$：$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}&0\\ \frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{-2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，令$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，则

$x+y+z=0\Leftrightarrow\sqrt3x_1=0\Leftrightarrow x_1=0;x^2+y^2+z^2=1\Leftrightarrow {x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2=1$，这样曲线化为：

$\begin{cases}{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2=1 & ①'\\ x_1=0 & ②'\end{cases}$，所以$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix},\theta\in[0,2\pi]$，

故$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q^T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{-2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$，即$L:\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt6}\sin\theta\\ y=-\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt6}\sin\theta,\theta\in[0,2\pi]\\ z=\frac{-2}{\sqrt6}\sin\theta\end{cases}$

从而

$$I=\oint_L xy\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\frac16\sin^2\theta-\frac12\cos^2\theta\right)\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2+[z'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac16\sin^2\theta-\frac12\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}。$$

35.【考点定位】第一型曲面积分的计算；方向导数与梯度的关系；曲面的面积。

【解】（1）由$z=2+ax^2+by^2$得，$z_x=2ax,z_y=2by$，所以

$$\mathbf{grad}\,z(3,4)=(2ax,2by)\big|_{(3,4)}=(6a,8b)。$$

使方向导数最大的方向为梯度方向，且方向导数的最大值为梯度的模

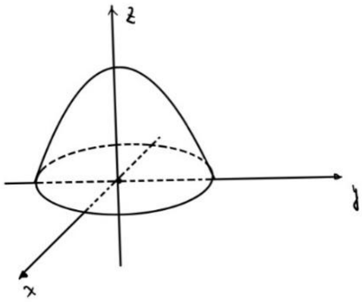
所以 $\begin{cases}(6a,8b)=t(-3,-4),(t>0)\\ \|\mathbf{grad}\,z(3,4)\|=\sqrt{(6a)^2+(8b)^2}=10,\end{cases}$

解得$a=-1,b=-1$。

（2）由(1)得$\Sigma: z=2-x^2-y^2(z\geq 0)$在$xOy$面上的投影区域为$D: x^2+y^2\leq 2$，所以该曲面的面积为：

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}(1+4r^2)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi。$$



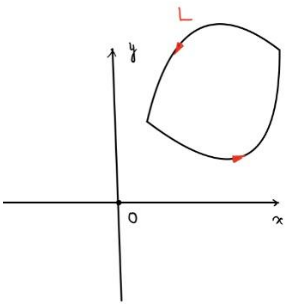
36.【考点定位】格林公式。

【答案】D

【解】由格林公式，对上半平面内的任意有向光滑封闭曲线C，

$$\oint_c P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0\Leftrightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Leftrightarrow\frac{1}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y};$$

所以 $P(x,y)=\int\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y+\varphi(x)=-\frac{1}{y}+\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$在上半平面连续。故答案选（D）。



37.【考点定位】形心的概念；三重积分的计算；二重积分的计算。

【解】设Ω的形心坐标为$\mathrm{G}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v},\bar{y}=\frac{\iiint\limits_\Omega y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v},\bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v}$。

任一点$z\in[0,1]$,过z点作Ω的截面得截面区域$D_z: x^2+(y-z)^2\leq(1-z)^2$。

这是半径为$1-z$的圆域，如图所示。

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}v \overset{\text{先二后一法}}{=} \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi(1-z)^2 \mathrm{d}z = -\frac{1}{3}\pi(1-z)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3};$$

$$\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{对称性}}{=} \int_0^1 0\mathrm{d}z = 0;$$

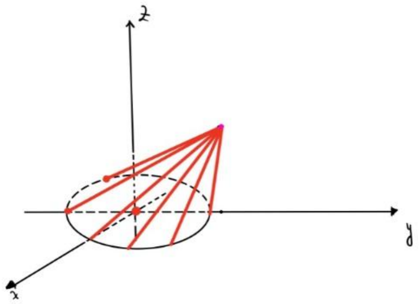
$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v = \int_0^1 z\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 z\pi(1-z)^2 \mathrm{d}z = \pi\int_0^1 z\left(1-2z+z^2\right)\mathrm{d}z = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{12};$$

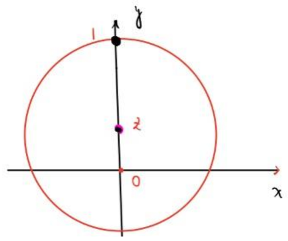
对于 $\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$：

由于 $\iint_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{平移}}{=} \iint_{x^2+y^2\le(1-z)^2} (y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{对称性}}{=} \iint_{x^2+y^2\le(1-z)^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi z(1-z)^2$，

所以 $\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi z(1-z)^2 \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi z\left(1-2z+z^2\right)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}$。

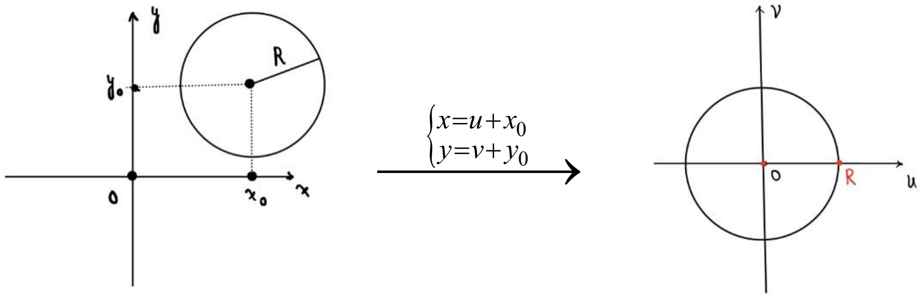
从而 $\bar{x} = \dfrac{0}{\frac{\pi}{3}} = 0, \bar{y} = \dfrac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{4}, \bar{z} = \dfrac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{4}$。故所求形心坐标为 $G\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$。





【注】对于圆心不位于原点的圆域(或圆域的一部分)，我们可以使用平移变换将圆域的圆心变到原点，从而简化计算，具体如下：

$$\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\begin{cases}x=u+x_0\\y=v+y_0\end{cases}}{=} \iint_{u^2+v^2\le R^2} f(u+x_0,v+y_0)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{x^2+y^2\le R^2} f(x+x_0,y+y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$



38.【考点定位】格林公式。

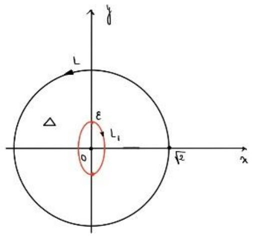
【解】记 $P=\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}$，则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2-8xy}{\left(4x^2+y^2\right)^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2-8xy}{\left(4x^2+y^2\right)^2}。$$

取 L_1：$4x^2+y^2=\varepsilon^2$,($\varepsilon>0$ 足够小)取逆时针方向，(如图)。则

$$I=\int_{L+L_1^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\overset{\text{格林公式}}{=}\iint_{\Delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y\overset{\text{格林公式}}{=}\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\left(\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right)=\pi。$$



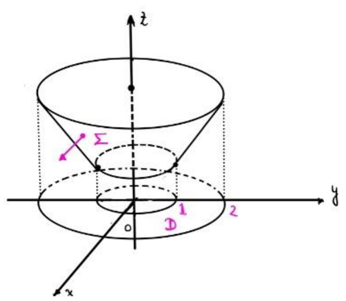
39.【考点定位】第一类曲面积分的计算。

【解】曲面Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in D$，取下侧，其中 $D:1\le x^2+y^2\le 4$。如图所示。

曲面Σ的法方向为 $\vec{n}=\left(z_x,z_y,-1\right)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$，所以

$$I=\iint_D\left\{\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}}\left[xf(xy)+2x-y\right]+\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}}\left[yf(xy)+2y+x\right]-\left[\sqrt{x^2+y^2}f(xy)+\sqrt{x^2+y^2}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\cdot r\mathrm{d}r=\frac{14\pi}{3}。$$



40.【考点定位】欧拉方程。

【答案】x^2

【解】令$x=\mathrm{e}^t$，则方程$x^2y''+xy'-4y=0$变为$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y+\mathrm{D}y-4y=0$，即$(\mathrm{D}^2-4)y=0$，所以

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=0$，其特征方程为$r^2-4=0$，解得$r_1=2$，$r_2=-2$，所以通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^{2t}=c_1\left(\mathrm{e}^t\right)^{-2}+c_2\left(\mathrm{e}^t\right)^2=c_1x^{-2}+c_2x^2,$$

从而$y'=-2c_1x^{-3}+2c_2x$。由初值条件$y(1)=1$，$y'(1)=2$得$\begin{cases}c_1+c_2=1\\-2c_1+2c_2=2\end{cases}$，

解得$c_1=0$，$c_2=1$。故$y=x^2$。

41.【考点定位】二重积分的性质；格林公式。

【解】(1)由二重积分的性质知，当$D=\left\{(x,y)\middle|4-x^2-y^2\ge 0\right\}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$时，$I(D)$最大。

即$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$，因此

$$I(D_1)=\iint\limits_{D_1}\left(4-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(4-r^2\right)\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^2\left(4r-r^3\right)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left(2r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^2=8\pi。$$

(2)这里采用两种方法计算该积分。

方法一：

记$P=\dfrac{x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y}{x^2+4y^2}$，$Q=\dfrac{4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x}{x^2+4y^2}$，则函数$P,Q$在$O(0,0)$处无意义，当$(x,y)\ne(0,0)$时

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\cdot 8y+1\right)\left(x^2+4y^2\right)-\left(x\mathrm{e}^{x+4y^2}+y\right)\cdot 8y}{\left(x^2+4y^2\right)^2}=\frac{8xy\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\left(x^2+4y^2-1\right)+x^2-4y^2}{\left(x^2+4y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\left(8xy\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-1\right)\left(x^2+4y^2\right)-\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4y^2\right)^2}=\frac{8xy\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\left(x^2+4y^2-1\right)+x^2-4y^2}{\left(x^2+4y^2\right)^2}。$$

取椭圆域$D_2:x^2+4y^2\le\varepsilon^2,(\varepsilon>0$足够小$)$，$\partial D_2$表示$D_2$的边界曲线方向取顺时针方向。

记Δ为$\partial D_1+\partial D_2$所围成区域，则

$$\int_{\partial D_1}\frac{\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{\partial D_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\partial D_1+\partial D_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{\partial D_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{格林公式}}{=}\iint\limits_{\Delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial D_2}\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial D_2}\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y\overset{\text{格林公式}}{=}\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_2}\left[\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\cdot 2x-1\right)-\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\cdot 8y+1\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_2}(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}\sigma=-\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\left(\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right)=-\pi\text{。}$$

方法二：

$$\int_{\partial D_1}\frac{\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{\partial D_1}\frac{x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\mathrm{d}x+4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}+\int_{\partial D_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

由于

$$\frac{x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\mathrm{d}x+4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\frac{\mathrm{e}^{x^2+4y^2}}{x^2+4y^2}(x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y)=\frac{\mathrm{e}^{x^2+4y^2}}{2\left(x^2+4y^2\right)}\mathrm{d}\left(x^2+4y^2\right)$$

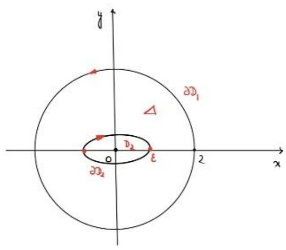
$$\overset{u=x^2+4y^2}{=}\frac{\mathrm{e}^u}{2u}\mathrm{d}u=\mathrm{d}F(u)=\mathrm{d}F\left(x^2+4y^2\right)$$

，这里 $F'(u)=\dfrac{\mathrm{e}^u}{2u}$。

故 $\displaystyle\int_{\partial D_1}\frac{x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\mathrm{d}x+4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0$。又由于

$$\int_{\partial D_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{\partial D_1+\partial D_2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}-\int_{\partial D_2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}\overset{\text{格林公式}}{=}0-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial D_2}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y\overset{\text{格林公式}}{=}\frac{-2}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi\text{。}$$

这里 D_2 及 ∂D_2 同方法一中所述。故 $\displaystyle\int_{\partial D_1}\frac{\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=-\pi$。



【注】椭圆 $x^2+4y^2=\varepsilon^2$ 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{\varepsilon^2}+\dfrac{y^2}{\left(\varepsilon/2\right)^2}=1$，所以 $\displaystyle\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S(D_2)=\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\pi}{2}\varepsilon^2$。