专题 7　二重积分

（A 组）基础题

1.【考点定位】二重积分的直角坐标计算；二重积分的极坐标计算。

【答案】D

【解】对于选项(A)：由 $x^2+y^2=2y$ 得 $x^2+(y-1)^2=1$，从而 $y=1\pm\sqrt{1-x^2}$，所以区域

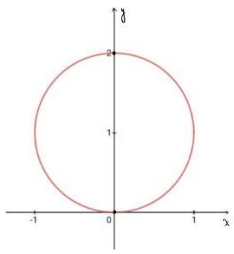
$D:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le 1+\sqrt{1-x^2}\end{cases}$，故 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$，因此$(A)$错误。

对于选项(B)：由 $x^2+y^2=2y$ 得 $x^2=2y-y^2$，从而 $x=\pm\sqrt{2y-y^2}$，所以区域

$D:\begin{cases}0\le y\le 2\\ -\sqrt{2y-y^2}\le x\le\sqrt{2y-y^2}\end{cases}$，故 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$，因此$(B)$错误。

对于选项(C)和(D)：由 $x^2+y^2=2y$ 得 $r^2=2r\sin\theta$，$r=2\sin\theta,\theta\in[0,\pi]$，所以区域 D 的极坐标表示为：$D\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\ 0\le r\le 2\sin\theta\end{cases}$，故 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$，因此$(C)$错误，$(D)$正确。

综上所述，答案选(C)。



【注】在直角坐标系下，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 中的面积微元 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，在极坐标系下 $\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。

2.【考点定位】二重积分的性质。

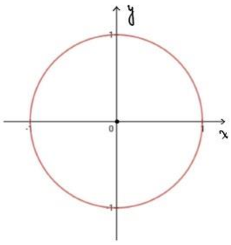
【答案】A

【解】如图，当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$1\ge\sqrt{x^2+y^2}\ge(x^2+y^2)\ge(x^2+y^2)^2\ge 0$，

因为 $\cos t$ 在 $[0,1]$ 上单调递减所以 $\cos\sqrt{x^2+y^2}\le\cos(x^2+y^2)\le\cos(x^2+y^2)^2$，

故 $\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma>\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma\ge\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，即 $I_3>I_2>I_1$，

因此答案选(A)。



【注】利用极坐标，可以计算出 I_1, I_2

$$I_1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1 r\cos r\mathrm{d}r=2\pi\left(r\sin r+\cos r\right)\Big|_0^1=2\pi\left(\sin 1+\cos 1-1\right);$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos r^2\mathrm{d}r=\pi\int_0^1\cos r^2\mathrm{d}r^2=\pi\left(\sin r^2\right)\Big|_0^1=\pi\sin 1\text{。}$$

I_3 可以表示为 $I_3=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos r^4\mathrm{d}r=\pi\int_0^1\cos r^4\mathrm{d}r^2\overset{u=r^2}{=}\pi\int_0^1\cos u^2\mathrm{d}u$

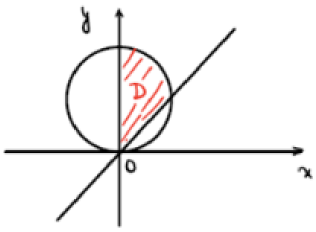
3.【考点定位】二重积分的计算。

【答案】$\dfrac{7}{12}$

【解】如图，由 $x^2+y^2=2y$ 得 $r^2=2r\sin\theta$，$r=2\sin\theta$，所以积分区域为 $D:\begin{cases}0\le r\le 2\sin\theta,\\ \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

$$I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta\bullet\cos\theta\bullet r\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\bullet\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\mathrm{d}r$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\sin\theta=\frac{4}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{12}\text{。}$$



4.【考点定位】定积分的几何应用；二重积分的几何应用。

【答案】$4\ln 2$

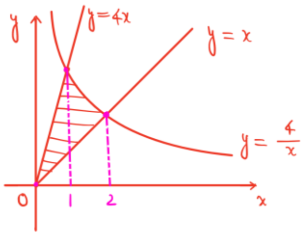
【解】 如图所示。

方法一：由 $\begin{cases}y=4x\\ y=\dfrac{4}{x}\end{cases}$ 可得直线 $y=4x$ 与曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 交点为 $(1,4)$，由 $\begin{cases}y=x\\ y=\dfrac{4}{x}\end{cases}$ 可得直线 $y=x$ 与曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 的交点为 $(2,2)$，所以平面区域 D 的面积为

$$\sigma=\int_0^1(4x-x)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 3x\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^2\Big|_0^1+\left(4\ln x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=4\ln 2。$$

方法二：由二重积分的几何意义可知平面区域 D 的面积

$$\sigma=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{4x}\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^{\frac{4}{x}}\mathrm{d}y=\int_0^1 3x\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)\mathrm{d}x=4\ln 2\ 。$$



5.【考点定位】二重积分的计算。

【答案】$\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$。

【解】积分区域如图所示，记 $I=\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 。

方法一：$D:\begin{cases}-y\le x\le y\\0\le y\le 1\end{cases}$

$$I=\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y^2\overset{u=y^2}{=}\frac{1}{3}\int_0^1 u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{3}(u+1)\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)。$$

其中 $\int u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-(u+1)\mathrm{e}^{-u}+c$

$u\downarrow$	+	1	—	0
$\mathrm{e}^{-u}\uparrow$		$-\mathrm{e}^{-u}$		e^{-u}

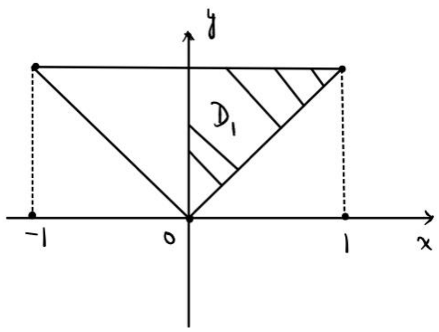
方法二：如图所示，积分区域 D 关于 y 轴对称，其位于第一象限的部分为 D_1: $\begin{cases}x\le y\le 1,\\0\le x\le 1,\end{cases}$

$$I=\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\overset{\text{对称性}}{=}2\iint_{D_1}x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

记 $f(x)=\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$，则 $f(1)=0$， $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x^2}$ ，所以，

$$I=2\int_0^1 x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\frac{x^3}{3}=2\left[\frac{x^3}{3}f\left(x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'\left(x\right)\mathrm{d}x\right]=2\left[0+\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{3}\int_0^1 u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)。$$



（B 组）提升题

1.【考点定位】二重积分的计算；二重积分的对称性。

【解】记 $I=\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

方法一：积分区域为 $D:\begin{cases}-1\le y\le x,\\-1\le x\le 1。\end{cases}$

$$I=\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-1}^x y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}y$$，由于

$$\int_{-1}^x y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}y=\int_{-1}^x\left(1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\right)\mathrm{d}\frac{y^2}{2}\overset{u=\frac{y^2}{2}}{=}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x^2}\left(1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{e}^u\right)\mathrm{d}u$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(\mathrm{e}^u\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+x\left(\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2}\right),$$

所以 $I=\int_{-1}^1\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+x\left(\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2}\right)\right]\mathrm{d}x\overset{奇偶性}{=}2\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$。

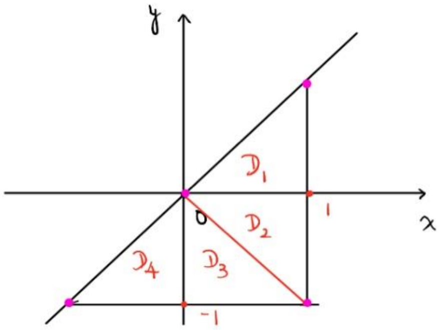
方法二：如图，将 D 分为 D_1,D_2,D_3,D_4 四个部分，其中 D_1,D_2 关于 x 轴对称， D_3,D_4 关于 y 轴对称。

$$I=\iint\limits_{D_1\cup D_2}y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3\cup D_4}y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由于 $\iint\limits_{D_1\cup D_2} y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]dxdy=\iint\limits_{D_1}\left[y\left(1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right)+(-y)\left(1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right)\right]dxdy=0$，

$\iint\limits_{D_3\cup D_4} y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]dxdy=\iint\limits_{D_3}\left[y\left(1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right)+y\left(1+(-x)e^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right)\right]dxdy$

$=2\iint\limits_{D_3} ydxdy=2\int_0^1 dx\int_{-1}^{-x} ydy=2\int_0^1\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)dx=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=-\frac{2}{3}$，故 $I=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$。



2【考点定位】累次积分交换积分次序。

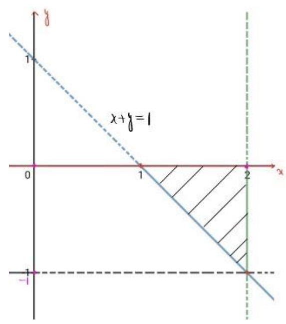
【答案】$\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$

【解】对于累次积分 $\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx$，当 $-1\le y\le 0$ 时，$1\le 1-y\le 2$，所以

$$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=-\int_{-1}^0 dy\int_{1-y}^2 f(x,y)dx。$$

$\int_{-1}^0 dy\int_{1-y}^2 f(x,y)dx$ 的积分区域为 y 型区域 $\begin{cases}1-y\le x\le 2,\\ -1\le y\le 0。\end{cases}$ 如图，将其转化为 x 型区域

$D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 1-x\le y\le 0\end{cases}$，所以 $\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=-\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 f(x,y)dy=\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$。

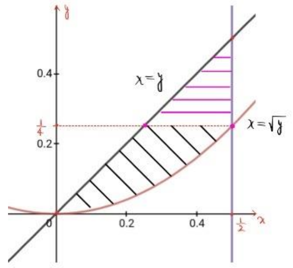


【注】关于积分换序及直角坐标与极坐标的相互转化

3.【考点定位】累次积分交换积分次序。

【答案】$\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

【解】如图，将 y 型积分区域转化成 x 型积分区域 D: $\begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$，故原式$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$。



4.【考点定位】二重积分的性质；二重积分的计算。

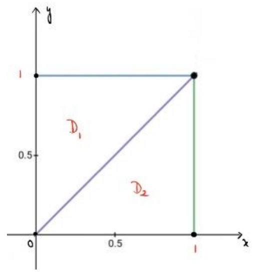
【解】记 $f(x,y)=e^{\max\{x^2,y^2\}}$，如图，积分区域 D 由 D_1,D_2 两部分构成。

由于 $f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{y^2},(x,y)\in D_1 \\ \mathrm{e}^{x^2},(x,y)\in D_2 \end{cases}$ 其中 D_1 可表为 $\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ 0\le x\le y \end{cases}$，$D_2$ 可表示为 $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le x \end{cases}$，

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\mathrm{e}-1。$$



5.【考点定位】二重积分的计算。

【答案】a^2

【解】方法一：$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} g(y-x)\mathrm{d}y$

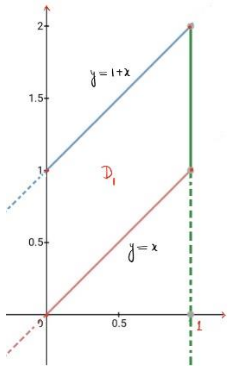
由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y-x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y-x)\mathrm{d}(y-x)$

$$\overset{u=y-x}{=}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{0} g(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 g(u)\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u=0+a+0=a，$$

故 $I=\int_{-\infty}^{+\infty} af(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=a\int_0^1 a\mathrm{d}x=a^2$。

方法二：由于 $f(x)g(y-x)=\begin{cases} a^2,0\le y-x\le 1,0\le x\le 1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}=\begin{cases} a^2,x\le y\le 1+x,0\le x\le 1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$，

（如图所示）所以 $I=\iint\limits_{D_1} a^2\mathrm{d}\sigma=a^2S\left(D_1\right)=a^2\times1=a^2$ 。



6【考点定位】累次积分交换积分次序；变限积分求导。

【答案】B

【解】方法一：由于

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x\overset{\text{积分换序}}{=}\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x$$

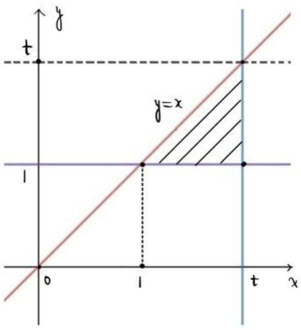
所以 $F'(t)=(t-1)f(t)$，从而 $F'(2)=f(2)$，故答案选（B）。

方法二：设 $G'(x)=f(x)$，则 $\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=G(t)-G(y)$，从而

$F(t)=\int_1^t\left[G(t)-G(y)\right]\mathrm{d}y=G(t)(t-1)-\int_1^t G(y)\mathrm{d}y$，所以

$F'(t)=\int_1^t\left[G(t)-G(y)\right]\mathrm{d}y=G'(t)(t-1)+G(t)-G(t)=f(t)(t-1)$

从而 $F'(2)=f(2)$，故答案选（B）。



7.【考点定位】二重积分的对称性；二重积分的性质。

【答案】B

【解】方法一：记 $g(x,y)=\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}$，由于区域 D 关于 $y=x$ 对称，所以

$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D g(y,x)\mathrm{d}\sigma$，从而

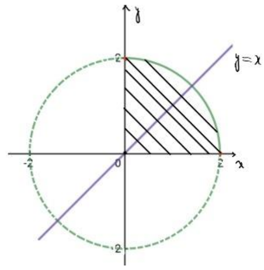
$$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D\left[g(x,y)+\mathrm{g}(y,x)\right]\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D\frac{a\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}\right)+b\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}\right)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\pi。$$

故答案选(D)。

方法二：作为选择题，通过观察选项，可采用特例法。由于 $f(x)$ 为正值连续函数，取 $f(x)=1$ 则

$$\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\frac{a+b}{2}\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\pi。$$



8.【考点定位】极坐标计算二重积分与直角坐标计算二重积分的转化。

【答案】C

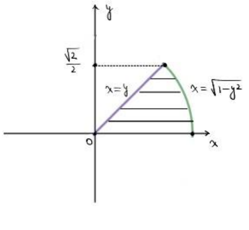
【解】积分区域的极坐标表示为$D:\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\0\le r\le1\end{cases}$（如图），转化为直角坐标表示为：

y 型区域 $D:\begin{cases}y\le x\le\sqrt{1-y^2}\\0\le y\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 或 x 型区域 $D:\begin{cases}0\le y\le x\\0\le x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\cup\begin{cases}0\le y\le\sqrt{1-x^2}\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x\le1\end{cases}$

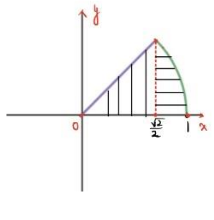
故 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

或 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

对比各个选项，答案为(C)。



y 型区域



x 型区域

9【考点定位】二重积分的计算。

【解】方法一：记D位于第一象限的部分为D_1，则由积分区域的对称性可得，

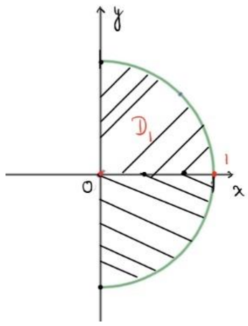
$$I=\iint_{D_1}\left[\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}+\frac{1+x(-y)}{1+x^2+(-y)^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\frac{2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{2r}{1+r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(1+r^2\right)}{1+r^2}=\frac{\pi}{2}\left[\ln\left(1+r^2\right)\Big|_0^1\right]=\frac{\pi\ln 2}{2}。$$

方法二：若在考试过程中没有注意到对称性，也可以直接计算：

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1+r^2\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}r\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^3}{1+r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{2}+0=\frac{\pi\ln 2}{2}。$$

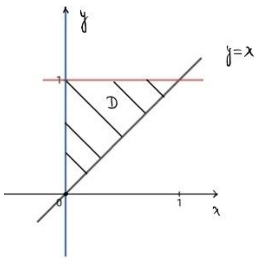


10.【考点定位】二重积分的计算。

【解】将积分区域表示为y型区域D：$\begin{cases}0\le x\le y\\0\le y\le 1\end{cases}$，所以$I=\iint_D\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x$，

由于$\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x=-\frac{1}{y}\int_0^y\left(y^2-xy\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(y^2-yx\right)=-\frac{1}{y}\cdot\frac{2}{3}\left(y^2-xy\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y=\frac{2}{3}y^2$,

故$\iint_D\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{2}{3}y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{9}y^3\Big|_0^1=\frac{2}{9}$。



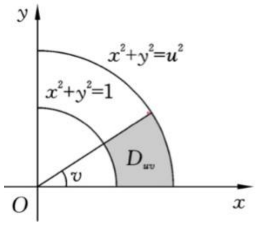
11.【考点定位】利用极坐标计算二重积分；变限积分求导；多元函数的偏导数。

【答案】A

【解】区域 D_{uv} 的极坐标表示为 $D_{uv}:\begin{cases}0\le\theta\le v\\1\le r\le u\end{cases}$，

$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^v\mathrm{d}\theta\int_1^u\frac{f\left(r^2\right)}{r}r\mathrm{d}r=\int_0^v\mathrm{d}\theta\int_1^u f\left(r^2\right)\mathrm{d}r=v\int_1^u f\left(r^2\right)\mathrm{d}r,$$

所以 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=v\cdot f\left(u^2\right)$，故答案选（$A$）。



12.【考点定位】二重积分的计算。

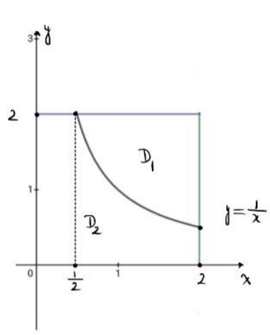
【解】如图所示。$\max\{xy,1\}=\begin{cases}xy,(x,y)\in D_1,\\1,(x,y)\in D_2\end{cases}$，$\iint\limits_D\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

$$由于\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac12}^2\mathrm{d}x\int_{\frac1x}^2xy\mathrm{d}y=\int_{\frac12}^2x\mathrm{d}x\int_{\frac1x}^2y\mathrm{d}y=\int_{\frac12}^2\frac12x\left(4-\frac1{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac12\int_{\frac12}^2\left(4x-\frac1x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(x^2-\frac12\ln x\right)\Big|_{\frac12}^2=\frac{15}{4}-\ln2,$$

$$\iint\limits_{D_2}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1+\int_{\frac12}^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac1x}\mathrm{d}y=1+\int_{\frac12}^2\frac1x\mathrm{d}x=1+2\ln2,$$

$$所以\quad\iint\limits_D\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{15}{4}-\ln2+1+2\ln2=\frac{19}{4}+\ln2。$$

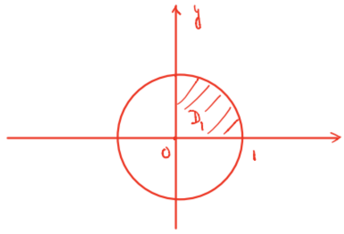


13.【考点定位】二重积分的对称性；利用极坐标计算二重积分。

【答案】$\dfrac{\pi}{4}$

【解】$\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{对称性}{=}4\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^14r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\times1=\frac{\pi}{4}$

这里区域 D_1 如下图阴影部分所示。



14.【考点定位】二重积分的对称性；二重积分不等式的性质。

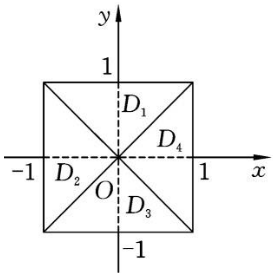
【答案】A

【解】设 $f(x,y)=y\cos x$，则 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，关于 y 是奇函数。

由于 D_2,D_4 关于 x 轴对称，由二重积分的对称性知 $I_2=I_4=0$，

又 $x\in[-1,1]$ 时 $\cos x>0$，所以 $\forall(x,y)\in D_1$ 时 $y\cos x>0$ 从而 $I_1>0$，$\forall(x,y)\in D_3$ 时

$y\cos x<0$，从而 $I_3<0$。故答案选（A）。



【注】这里 I_1,I_3 可以具体计算出来：

$$I_1=\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} y\cos x dx=\int_0^1 ydy\int_{-y}^{y}\cos x dx=\int_0^1 2y\sin y dy=2(-y\cos y+\sin y)\Big|_0^1=2(\sin 1-\cos 1);$$

$$I_3=\int_{-1}^0 dy\int_{-y}^{y} y\cos x dx=\int_{-1}^0 ydy\int_{-y}^{y}\cos x dx=\int_{-1}^0 2y\sin y dy=2(-y\cos y+\sin y)\Big|_{-1}^0=-2(\sin 1-\cos 1)。$$

15.【考点定位】二重积分的定义；定积分的定义。

【答案】D【解】方法一：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{1}{\left(i+\dfrac{i}{n}\right)\left[1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right]}\bullet\dfrac{1}{n^2}$。如图所示：被积函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}$，积分区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，将 D 按如图方式分割。取 $\left(\dfrac{i}{n},\dfrac{j}{n}\right)$ 对应的函数值 $f\left(\dfrac{i}{n},\dfrac{j}{n}\right)=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\left[1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right]}$，阴影区域面积为 $\dfrac{1}{n}\bullet\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^2}$。从而

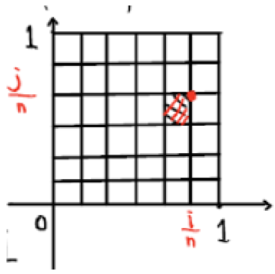
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\left(i+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\bullet\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\bullet\frac{1}{n^2}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$$

故答案选（D）。

方法二：利用定积分的定义：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\left(i+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\bullet\frac{1}{n^2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\bullet\frac{1}{n}\right)\bullet\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\bullet\frac{1}{n}\right)$$

$$\to\left(\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\right)\bullet\left(\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y\right)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$$ ，故答案选(D)。



16.【考点定位】二重积分的对称性；利用直角坐标计算二重积分。

【答案】D

【解】 方法一：直接用直角坐标计算。

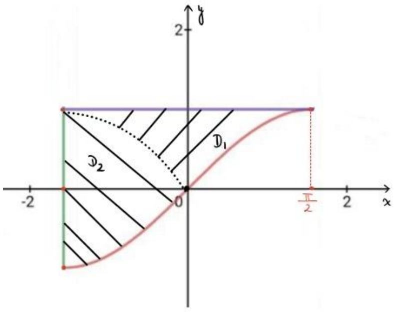
$$\iint_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}x^5(1-\sin^2x)-(1-\sin x)\right)\mathrm{d}x\overset{\text{奇偶性}}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)\mathrm{d}x=-\pi。$$

方法二：作辅助线 $y=-\sin x$，将 D 划分为 D_1 与 D_2，其中 D_1 关于 y 轴对称，D_2 关于 x 轴对称，又 x^5y 关于 x 及 y 均是奇函数，所以

$$\iint_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}\mathrm{d}y=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x=-\pi$$

故答案选（D）。

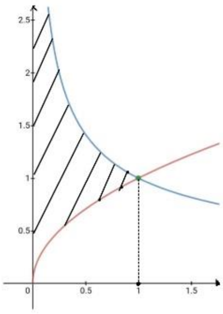


17.【考点定位】二重积分的计算；分部积分法。

【解】如图，积分区域表示为x型区域 $D:\begin{cases}\sqrt{x}\le y\le \dfrac{1}{\sqrt{x}}\\ 0<x\le 1\end{cases}$；

$$I=\iint\limits_D e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}e^x xy\mathrm{d}y=\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}y\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}xe^x\left(\frac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)e^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\left(1-x^2+2x-2\right)e^x\right]\Big|_0^1\ =\frac{1}{2}\left[-\left(x-1\right)^2e^x\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}。$$



【注】对$\int\left(1-x^2\right)e^x\mathrm{d}x$使用如下推广的分部积分法：

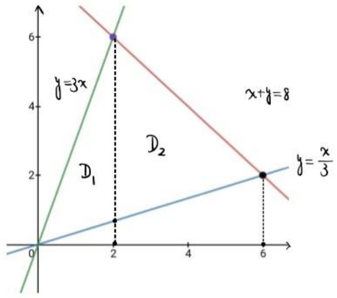
$\left(1-x^2\right)\downarrow$	+	$(-2x)$	−	(-2)	+	0
$e^x\uparrow$		e^x		e^x		e^x

18.【考点定位】二重积分的计算。

【解】如图，$y=3x$与$x+y=8$的交点为（2, 6），直线$x=3y$，$x+y=8$的交点为$(6,2)$。将积分区域D分为D_1, D_2两部分，其中D_1：$\begin{cases}\dfrac{1}{3}x\le y\le 3x\\ 0\le x\le 2\end{cases}$，$D_2:\begin{cases}\dfrac{1}{3}x\le y\le 8-x\\ 2\le x\le 6\end{cases}$。则

$$\iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x}\mathrm{d}y+\int_2^6 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\int_0^2 x^3\mathrm{d}x+\int_2^6 x^2\left(8-\frac{4}{3}x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}x^4\Big|_0^2+\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4\right)\Big|_2^6=\frac{416}{3}。$$



19.【考点定位】二重积分的对称性；二重积分的不等式性质。

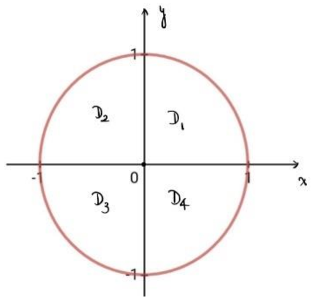
【答案】B

【解】因为D_1， D_3这两个区域均是关于直线$y=x$对称的，所以

$$I_1=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1}\left[(y-x)+(x-y)\right]dxdy=0，\quad I_3=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_3}\left[(y-x)+(x-y)\right]dxdy=0。$$

在D_2上， $y-x\geq 0$则$I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，在$D_4$上， $y-x\leq 0$则$I_4=\iint\limits_{D_4}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$。

综上所述，答案选(B)。



【注】这里I_2,I_4可以具体计算出来：

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3};$$

$$I_4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=-2\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}。$$

20.【考点定位】二重积分的对称性；二重积分的不等式性质。

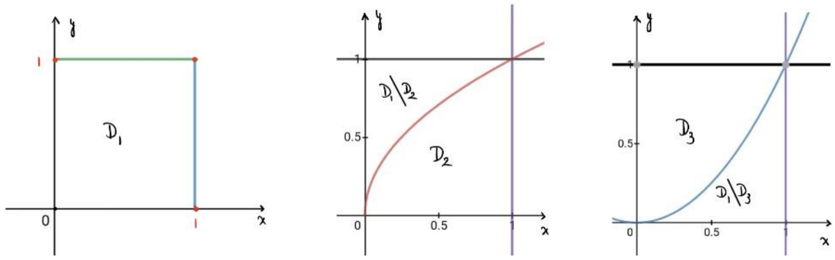
【答案】D

【解】对于J_1：因为D_1关于直线$y=x$对称，所以$J_1=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1}\left(\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

对于 J_2：$J_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1\setminus D_2}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_1\setminus D_2}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于在区域 $D_1\setminus D_2$ 上满足 $x-y<0$，所以 $\iint\limits_{D_1\setminus D_2}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$，故 $J_2=-\iint\limits_{D_1\setminus D_2}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$。

对于 J_3，$J_3=\iint\limits_{D_3}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1\setminus D_3}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_1\setminus D_3}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于在区域 $D_1\setminus D_3$ 上满足 $x-y>0$，从而 $\iint\limits_{D_1\setminus D_3}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，故 $J_3=-\iint\limits_{D_1\setminus D_3}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$。，

综上所述 $J_2>J_1>J_3$，答案选（D）。



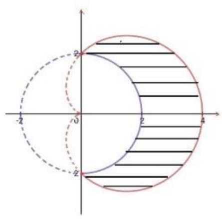
21.【考点定位】二重积分的对称性；利用极坐标计算二重积分；瓦里士公式。

【解】积分区域如图所示，

$$\iint\limits_{D}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2}^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{2}^{2(1+\cos\theta)}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left[(1+\cos\theta)^3-1\right]\mathrm{d}\theta\overset{\text{偶函数}}{=}\frac{16}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\left(3\cdot\frac{1!!}{2!!}\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{2!!}{3!!}+\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=5\pi+\frac{32}{3}。$$



22.【考点定位】二重积分的计算；瓦里士公式。

【解】方法一：设 D 位于第一象限的部分为 D_1，则由对称性可得，

$$\iint\limits_{D}(x+1)^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\left(x^2+2x+1\right)\mathrm{d}\sigma\overset{\text{对称性}}{=}2\iint\limits_{D_1}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}\sigma+2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=\pi+2\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}\sigma$$

由于

$$2\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}\sigma \overset{\text{极坐标}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\left(r\cos\theta\right)^2 r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\mathrm{d}r=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

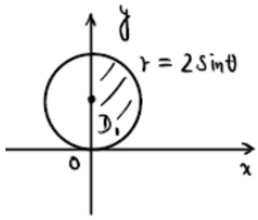
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4\theta-\sin^6\theta\right)\mathrm{d}\theta=8\times\left(\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=8\times\left(\frac{3}{8}-\frac{15}{48}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}。$$

所以 $\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5}{4}\pi$。。

方法二：将积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\left(y-1\right)^2\le 1\right\}$ 平移为 $D'=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，则

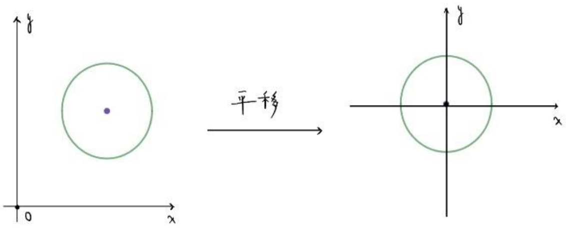
$$\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D'}\left(x+1\right)^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D'}(x^2+2x+1)\mathrm{d}\sigma\overset{\text{对称性}}{=}\iint\limits_{D'}(x^2+1)\mathrm{d}\sigma=\pi+\iint\limits_{D'}x^2\mathrm{d}\sigma$$

$$\overset{\text{对称性}}{=}\pi+\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi。$$



【注】若 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2\le R^2\right\}$，将 D 平移为 $D'=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$ 则有：

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D'}f\left(x+a,y+b\right)\mathrm{d}\sigma$$



这样往往可以起到简化计算的效果。

23.【考点定位】累次积分交换积分次序；分部积分；变限积分求导。

【答案】$\ln\sec 1$

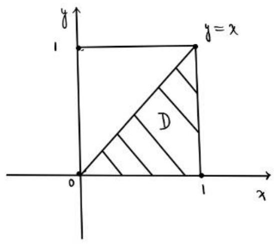
【解】方法一：

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x\overset{\text{积分换序}}{=}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\tan x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x$$

$$=\left(-\ln\cos x\right)\Big|_0^1=\ln\sec 1。$$

方法二：记 $f(y)=\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx$，则 $f'(y)=-\frac{\tan y}{y}$，$f(1)=0$，所以

$$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx=\int_0^1 f(y)dy=yf(y)\Big|_0^1-\int_0^1 yf'(y)dy=\int_0^1 y\cdot\frac{\tan y}{y}dy=\left(-\ln\cos y\right)\Big|_0^1=\ln\sec 1。$$



24.【考点定位】变限积分求导；分部积分法；累次积分交换积分次序。

【答案】$\frac{1}{4}\left(\cos 1-1\right)$

【解】方法一：记 $g\left(x\right)=\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}dt$，则 $g'\left(x\right)=\frac{\sin x^2}{x},g\left(1\right)=0,$ 从而

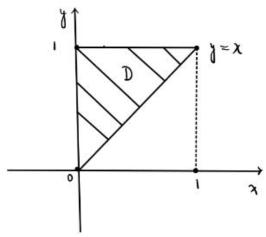
$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xg\left(x\right)dx=\int_0^1 g\left(x\right)d\frac{x^2}{2}=\left[\frac{1}{2}x^2g\left(x\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot g'\left(x\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{\sin x^2}{x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2dx=-\frac{1}{4}\int_0^1(\sin x^2)d(x^2)=\frac{1}{4}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\cos 1-1)。$$

方法二：

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx\int_1^x\frac{\sin y^2}{y}dy=-\int_0^1 xdx\int_x^1\frac{\sin y^2}{y}dy\overset{积分换序}{=}-\int_0^1\frac{\sin y^2}{y}dy\int_0^y xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 y\sin y^2dy=-\frac{1}{4}\int_0^1(\sin y^2)d(y^2)=\frac{1}{4}\cos y^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\cos 1-1)。$$



25.【考点定位】累次积分交换积分次序；分部积分法。（题目有错误！！）

【答案】$\frac{1}{18}\left(1-2\sqrt{2}\right)$。

【解】方法一：由于 $f\left(x\right)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt$ 得 $f\left(1\right)=0,f'\left(x\right)=\sqrt{1+x^4}$，所以

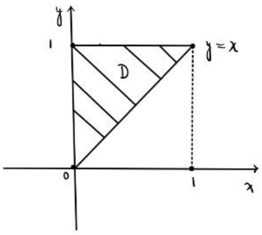
$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\cdot\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}\left(1+x^4\right)=-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\left(1+x^4\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{18}\left(1-2\sqrt{2}\right)。$$

方法二：

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2\cdot\int_1^x\sqrt{1+y^4}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1\sqrt{1+y^4}\mathrm{d}y\overset{\text{积分换序}}{=}-\int_0^1\sqrt{1+y^4}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 y^3\sqrt{1+y^4}\mathrm{d}y=-\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+y^4}\mathrm{d}\left(1+y^4\right)=-\frac{1}{12}\times\frac{2}{3}\left(1+y^4\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{18}\left(1-2\sqrt{2}\right)。$$



26.【考点定位】累次积分交换积分次序；分部积分法。

【答案】$\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

【解】积分区域如图所示。

方法一：

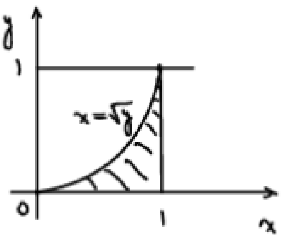
$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x\overset{\text{积分换序}}{=}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(1+x^3\right)$$

$$=\frac{2}{9}\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

方法二：记 $f(y)=\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x$，则 $f(1)=0$， $f'(y)=-\frac{1}{2}\left(1+y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}$，

$$I=\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=yf(y)\Big|_0^1-\int_0^1 yf'(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\left(1+y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(1+y^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\left(1+y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)。$$



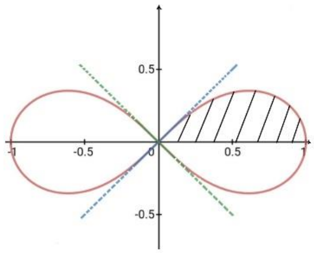
27.【考点定位】利用极坐标变换计算二重积分。

【解】令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则曲线$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2,\left(x\ge0,y\ge0\right)$，可化为极坐标

$$r^4=r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=r^2\cos2\theta，即 r=\sqrt{\cos2\theta}\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)，$$如图。于是

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}r^2\sin\theta\cos\theta r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\left(\frac{r^4}{4}\bigg|_0^{\sqrt{\cos2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\sin2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\mathrm{d}\left(\cos2\theta\right)=-\frac{1}{48}\cos^3 2\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}$$



（C 组）拔高题

1.【考点定位】利用极坐标计算求二重积分；定积分的换元法。

【解】，将半圆$y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$即$\left(y+a\right)^2=\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2ay=0\left(y\ge-a\right)$转化为极

坐标方程：令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$代入上式得 $r^2+2ar\sin\theta=0\Leftrightarrow r=-2a\sin\theta$。如图，

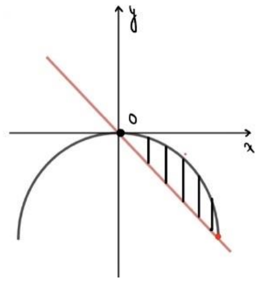
积分区域D的极坐标表示为：$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le0\\ 0\le r\le-2a\sin\theta\end{cases}$，记$I=\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$，则

$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\dfrac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r$，先计算$\int_0^{-2a\sin\theta}\dfrac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r$： 令$r=2a\sin t$，则

$$\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r=\int_0^{-\theta}\frac{4a^2\sin^2 t}{2a\cos t}\cdot2a\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{-\theta}2a^2\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2a^2\int_0^{-\theta}\frac{1-\cos2t}{2}\mathrm{d}t=a^2\left(t-\frac{1}{2}\sin2t\right)\bigg|_0^{-\theta}=2a^2\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)。$$

故 $$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 2a^2\left(\frac{1}{2}\sin2\theta-\theta\right)\mathrm{d}\theta=-a^2\left(\frac{1}{2}\cos2\theta+\theta^2\right)\bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^0=-a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}\right)=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)。$$



2.【考点定位】利用极坐标变换计算二重积分。

【解】积分区域D的极坐标表示为$\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le\sqrt{\pi}\end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left(r^2-\pi\right)}\sin\left(r^2\right)r\mathrm{d}r=\mathrm{e}^{\pi}\cdot 2\pi\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2}\sin\left(r^2\right)\cdot r\mathrm{d}r$$

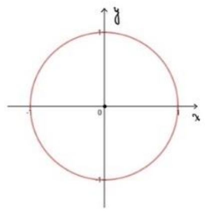
$$=\pi\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2}\sin\left(r^2\right)\mathrm{d}r^2\overset{u=r^2}{=}\pi\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-u}\sin u\mathrm{d}u。$$

由于 $\int\mathrm{e}^{-u}\sin u\mathrm{d}u=\int\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}\left(-\cos u\right)=-\mathrm{e}^{-u}\cos u-\int\cos u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$

$$=-\mathrm{e}^{-u}\cos u-\int\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}\sin u=-\mathrm{e}^{-u}\cos u-\mathrm{e}^{-u}\sin u-\int\sin u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u。$$

所以 $$\int\mathrm{e}^{-u}\sin u\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}\left(\cos u+\sin u\right)+C。$$

故 $I=\pi\mathrm{e}^{\pi}\cdot\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}\left(\cos u+\sin u\right)\right]\Big|_0^{\pi}=\pi\mathrm{e}^{\pi}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi}+\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{2}\left(1+\mathrm{e}^{\pi}\right)$。



3.【考点定位】二重积分的对称性；利用极坐标计算二重积分。

【解】由于积分区域 D 关于 x 轴对称，所以

$$I=\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint_D y\mathrm{d}\sigma\overset{\text{对称性}}{=}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma。$$

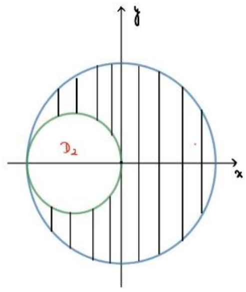
记区域$D_1:x^2+y^2\le 4$，区域$D_2:\left(x+1\right)^2+y^2\le 1$，则$D=D_1\setminus D_2$，所以

$$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

区域 D_1 的极坐标表示为$\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le 2\end{cases}$，$D_2$ 的极坐标表示为$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{2}\\ 0\le r\le -2\cos\theta\end{cases}$。于是

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16\pi}{3}-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\left(\sin\theta\right)$$

$$=\frac{16}{3}\pi-\frac{8}{3}\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}。$$

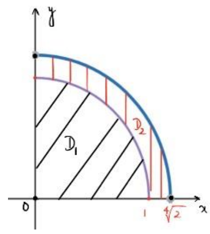


4.【考点定位】利用极坐标计算二重积分；取整函数。

【解】取整函数$\left[1+x^2+y^2\right]=\begin{cases}1,(x,y)\in D_1\\ 2,(x,y)\in D_2\end{cases}$，其中 D_1:$\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0\le r\le 1\end{cases}$ D_2:$\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1\le r\le\sqrt[4]{2}\end{cases}$。所以

$$\iint\limits_D xy\left[1+x^2+y^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}。$$



5.【考点定位】二重积分的计算。

【解】方法一：如图所示，将积分区域 D 分为 D_1,D_2 两部分，记 $I=\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma$。

$$\left|x^2+y^2-1\right|=\begin{cases}x^2+y^2-1,(x,y)\in D_1\\ 1-\left(x^2+y^2\right),(x,y)\in D_2\end{cases}$$，其中 D_2：$x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0$。

$$I=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\left[1-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma-2\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma-2\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma+\frac{\pi}{2}-1$$

由于 $$\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{3}+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8},$$

所以 $$I=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\text{。}$$

方法二：在计算 $I=\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\left[1-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}\sigma$ 时，

区域 D_1 的表示稍显复杂，但仍然可以直接计算，

$$\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\left[1-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma+\frac{\pi}{2}-1$$

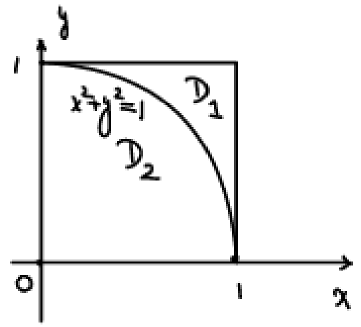
由于 $$\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^1\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}\right]\mathrm{d}x\overset{x=\sin\theta}{=}\frac{2}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{3}\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta-\frac{2}{3}\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8},$$

$\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}$，所以 $I=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$。

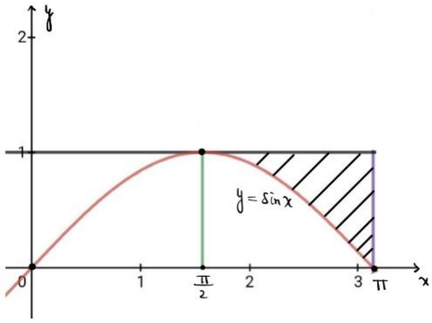


6.【考点定位】累次积分交换积分次序；反三角函数。

【答案】B

【解】当 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ 时，由 $y=\sin x$ 得 $y=\sin(\pi-x)$，由于 $\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\pi-x=\arcsin y$，从而 $x=\pi-\arcsin y$。将积分区域 D 由 x 型区域转化为 y 型区域：$D:\begin{cases}\pi-\arcsin y\le x\le\pi\\ 0\le y\le 1\end{cases}$。

（如图所示），故 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$。因此答案选(B)。



7.【考点定位】二重积分的对称性；利用极坐标变换计算二重积分。

【解】积分区域 D 如图所示，记 D_1 为积分区域 D 在第一象限的部分。 因为区域 D 关于 x 轴，y 轴均对称，且 $f(-x,y)=f(x,y)$，$f(x,-y)=f(x,y)$。所以 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

记 D_1 中满足 $|x|+|y|\le 1$ 部分为 D_{11}，D_1 中满足 $1\le|x|+|y|\le 2$ 部分为 D_{12}，因为 D_1 可表示为

$\begin{cases}0\le y\le 1-x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$，所以 $\iint\limits_{D_{11}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1x^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\int_0^1x^2(1-x)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{12}$。

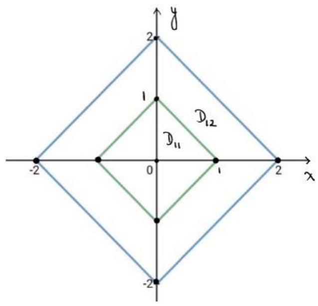
D_{12} 的极坐标表示为 $\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r\le\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}\end{cases}$，所以

$$\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\overset{u=\theta-\frac{\pi}{4}}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec u\mathrm{d}u\overset{\text{偶函数}}{=}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec u\mathrm{d}u=\sqrt{2}\left[\ln|\sec u+\tan u|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$=\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$。

故 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\left[\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$。



8【考点定位】利用极坐标变换计算二重积分；平移变换。

【解】方法一：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 即 $x^2+y^2=2(x+y)$ 的极坐标方程为 $r^2=2r(\cos\theta+\sin\theta)$ 化简得 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$，所以积分区域 D 的极坐标表示为：$\begin{cases}0\le r\le 2(\cos\theta+\sin\theta)\\ \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$ 如图（a）。

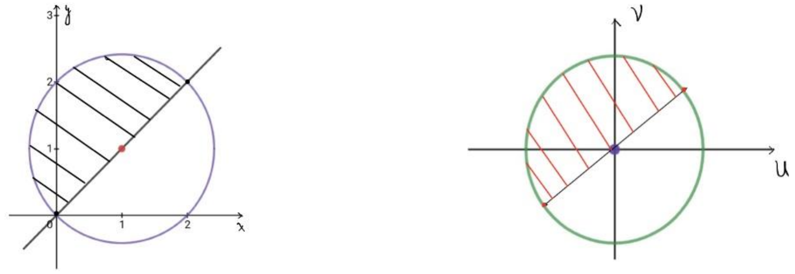
$$\iint_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^3\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{2}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{2}{3}\left[0-\left(\sqrt{2}\right)^4\right]=-\frac{8}{3}。$$

方法二：作平移变换 $\begin{cases}x=u+1\\ y=v+1\end{cases}$，则区域 D 变为 $D'=\left\{(u,v)\middle|u^2+v^2\le 2,u\ge v\right\}$，如图，$D'$ 的极坐标表示为 $\begin{cases}0\le r\le\sqrt{2}\\ \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{5\pi}{4}\end{cases}$。从而

$$\iint_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}[(u+1)-(v+1)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D'}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\sqrt{2}}r^2\mathrm{d}r=(\sin\theta+\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cdot\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{8}{3}。$$



(a) (b)

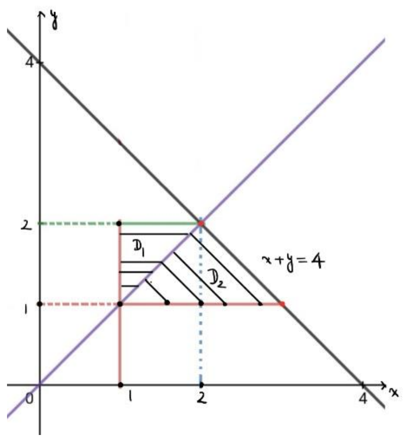
9.【考点定位】累次积分交换积分次序；二重积分的可加性。

【答案】C

【解】$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

这里积分区域 $D=D_1\cup D_2$ 如图所示，表示为 y 型区域为：$\begin{cases}1\le x\le 4-y\\ 1\le y\le 2\end{cases}$。

所以 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_1^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x$， 故答案选（C）。



10.【考点定位】极坐标化直角坐标；定积分的换元法；瓦里士公式。

【解】积分区域的极坐标表示为 $D:\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0\le r\le\sec\theta\end{cases}$，曲线 $r=\sec\theta$ 变为 $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$，即 $r\cos\theta=1$

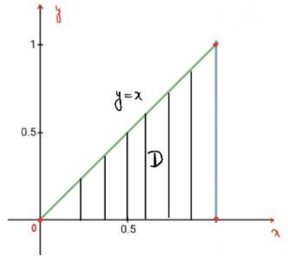
化为直角坐标表示的方程为：$x=1$。如图所示，将积分区域表示为 x 型区域为：$\begin{cases}0\le y\le x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$，

于是，$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint\limits_D (r\sin\theta)\cdot\sqrt{1-(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$=\iint\limits_D y\cdot\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

由于 $\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\int_0^x(1-x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2+y^2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x=\dfrac{1}{3}\left(1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)$，

所以 $I=\dfrac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\overset{x=\sin t}{=}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3!!}{4!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{16}$。



11.【考点定位】平面图形的面积。

【解】以贮藏罐的底面中心为原点，x 轴方向平行于地面建立坐标系，则平放时贮藏罐底面所对应的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，因为油的密度为常量，所以油的质量 $m=\rho\cdot V=\rho\cdot l\cdot s$，其中 S 为底面油的面积，又由于平放时油高为 $\frac{3}{2}b$，故位于 x 轴上方部分油面高为 $\frac{b}{2}$，即 $y=\frac{b}{2}$，此时 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{b^2}=1$ 的 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$，则

$$S=\pi ab-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\frac{b}{2}\right)dx=\pi ab-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{b}{2}\right)dx$$

$$=\pi ab-\frac{2b}{a}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{a^2-x^2}dx+\frac{\sqrt{3}}{2}ab=\pi ab-\frac{2b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{3}}a\cdot\cos t\cdot a\cos tdt+\frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$=\left(\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)ab-2ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 tdt\ =\left(\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)ab-ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}a\cdot\cos t\cdot a\cos tdt+\frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$=\left(\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)ab-\frac{\pi}{3}ab-\frac{ab}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)ab。$$

所以油的质量 $$m=\rho\cdot l\cdot s=\rho\cdot l\cdot a\cdot b\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)。$$

12.【考点定位】二重积分的计算。

【解】区域 D 关于 x 轴对称，$D=D_1\cup D_2$。由 $\begin{cases}x=\sqrt{1+y^2}\\x-\sqrt{2}y=0\end{cases}$ 解得 $A\left(\sqrt{2},1\right)$，$D_1:\begin{cases}0\le y\le 1\\\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\end{cases}$

$$I=\iint_D(x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}\left[(x+y)^3+(x-y)^3\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}2\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}\sigma$$

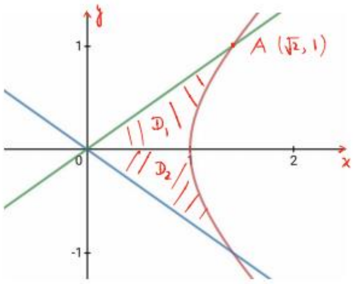
$$=2\iint_{D_1}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}\sigma=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x。$$

由于

$$\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Bigg|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}=\left[\left(\frac{1}{4}\left(1+y^2\right)^2+\frac{3}{2}\left(1+y^2\right)y^2\right)-\left(y^4+3y^4\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+8y^2-9y^4\right),$$

故 $$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+8y^2-9y^4\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{8}{3}-\frac{9}{5}\right)=\frac{14}{15}。$$



13【考点定位】累次积分；二重积分几何意义；变限积分求导；可分离变量方程；一阶微分方程初值问题。

【解】因为

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^t\left[\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^t\left[\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}(x+y)\right]\mathrm{d}x=\int_0^t\left[f(x+y)\Big|_0^{t-x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^t\left[f(t)-f(x)\right]\mathrm{d}x=tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x,$$

又因为

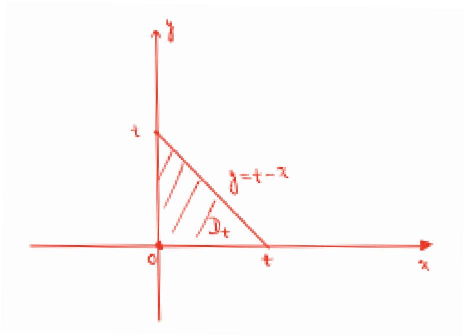
$$\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(t)\iint\limits_{D_t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(t)S_{D_t}=\frac{1}{2}t^2f(t)，$$ 其中 S_{D_t} 为区域 D_t 的面积。

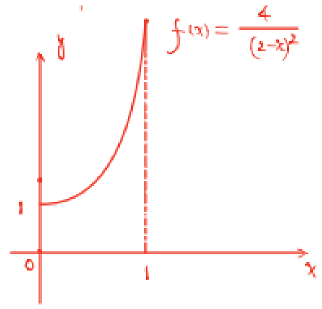
于是，方程 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可化为

$$tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}t^2f(t), \qquad ①$$

方程①两边对 t 求导得 $tf'(t)+f(t)-f(t)=tf(t)+\frac{1}{2}t^2f(t)$，即 $f'(t)=\frac{2}{2-t}f(t)$。

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{f(t)}=\dfrac{2}{2-t}\mathrm{d}t$，两边积分 $\int\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}f(t)=\int\dfrac{2}{2-t}\mathrm{d}t$，解得 $f(t)=\dfrac{C}{(2-t)^2}$。因为 $f(0)=1$，所以 $C=4$，故 $f(t)=\dfrac{4}{(2-t)^2}$，即 $f(x)=\dfrac{4}{(2-x)^2}$。（如图所示）





14.【考点定位】分部积分法；变换积分次序；直角坐标系下的二重积分。

【解】$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)$

$$=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1[xf'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1 x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

由于 $f(x,1)=0$，两端同时对 x 求偏导，得 $f'_x(x,1)=0$，从而 $\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x=0$。

对 $\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序，得 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x$。

从而

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y)=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1 f(1,y)+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x。$$

由 $f(1,y)=0$ 知 $\int_0^1 f(1,y)\mathrm{d}y=0$。

所以 $$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a。$$

【注】在求积分时，若被积函数中出现抽象函数的导数，可首先考虑分部积分法。

15.【考点定位】二重积分的极坐标与直角坐标相互转化。

【答案】B

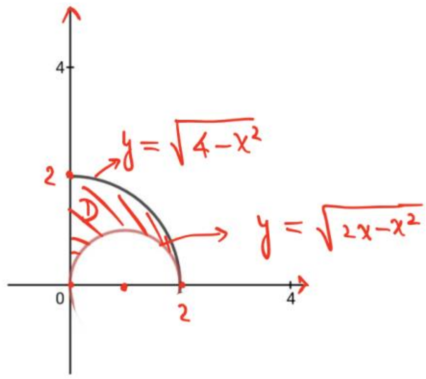
【解】由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2} f\left(r^2\right)r\mathrm{d}r$ 知 $I=\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 的极坐标表示为

$$\begin{cases}2\cos\theta\le r\le 2\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases},$$

由于 $r=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$，

$$r=2\cos\theta\Leftrightarrow r^2=2r\cos\theta\Leftrightarrow x^2+y^2-2x=0\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=1,$$

故 D 的直角坐标表示为 $\begin{cases}\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\\ 0\le x\le 2\end{cases}$，如图所示，因此 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$。



16.【考点定位】利用极坐标变换计算二重积分；换元积分法。

【解】设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则 $0\le\theta\le\pi$，$0\le r\le 1+\cos\theta$

从而 $$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_o^{1+\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta r\cdot\mathrm{d}r=\int_o^{\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^4\mathrm{d}(-\cos\theta)$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(\cos\theta+1-1)(1+\cos)^4\mathrm{d}\cos\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^5\mathrm{d}(\cos\theta+1)+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\mathrm{d}(\cos\theta+1)$$

$$=-\frac{1}{24}(1+\cos\theta)^6\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{20}(1+\cos\theta)^5\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{24}\cdot2^6-\frac{1}{20}\cdot2^5=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}=\frac{16}{15}。$$

17.【考点定位】变换积分次序；直角坐标化为极坐标。

【答案】D

【解析】积分区域为 $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\-\sqrt{1-y^2}\le x\le 1-y\end{cases}$，

因为 $D=D_1+D_2$，其中 $D_1:\begin{cases}-1\le x\le 0\\0\le y\le\sqrt{1-x^2}\end{cases}$，$D_2:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1-x\end{cases}$

所以 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)dx=\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy$。

$=\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy$。则(A)、(B)都不正确。

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，则 D_1 可表示为 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\\0\le r\le 1\end{cases}$，$D_2$ 可表示为 $\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\0\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\end{cases}$

所以 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$。

故(C)不正确，(D)为正确选项。

18.【考点定位】交换积分次序；分部积分法。

【答案】$\dfrac{e-1}{2}$

【解】积分区域 $D\begin{cases}y\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases}$，可表示为 $D\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le x\end{cases}$，

$$\text{则}\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=\int_0^1 dx\int_0^x\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dy=\int_0^1\frac{e^{x^2}}{x}dx\int_0^x dy-\int_0^1\left[\int_0^x e^{y^2}dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx-\left[x\int_0^x e^{y^2}dy\Big|_0^1-\int_0^1 xe^{x^2}dx\right]=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{y^2}dy+\int_0^1 xe^{x^2}dx,$$

因为 $\int_0^1 e^{x^2}dx=\int_0^1 e^{y^2}dy$，所以

$$\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}dx^2=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)。$$

方法二： $$\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=\int_0^1 dy\int_y^1\frac{e^{x^2}}{x}dx-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx。$$

对$\int_0^1 dy\int_y^1\frac{e^{x^2}}{x}dx$交换积分次序，得

$$\int_0^1 dx\int_0^x\frac{e^{x^2}}{x}dy=\int_0^1\frac{e^{x^2}}{x}dx\int_0^x dy=\int_0^1 e^{x^2}dx，$$

因为 $$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx=\int_0^1 e^{y^2}dy\int_y^1 dx=\int_0^1(1-y)e^{y^2}dy=\int_0^1 e^{y^2}dy-\int_0^1 ye^{y^2}dy$$

$$=\int_0^1 e^{y^2}dy-\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1=\int_0^1 e^{y^2}dy-\frac{1}{2}(e-1)，$$

所以 $$\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{y^2}dy+\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1}{2}(e-1)。$$

【注】由于重积分的值只与被积函数及积分区间相关而与积分变量利用何种符号表示无关。故

$$\int_0^1 e^{x^2}dx=\int_0^1 e^{y^2}dy。$$

19.【考点定位】利用极坐标变换计算二重积分。

【解】方法一：积分区域D关于$y=x$对称。

记 $$f(x,y)=\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}，$$

$$I=\iint_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy=\iint_{D_1}\left[f(x,y)+f(y,x)\right]dxdy=\iint_{D_1}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2 r\cdot\sin(\pi r)dr=\frac{\pi}{4}\int_1^2 r\cdot\sin(\pi r)dr=\frac{1}{4\pi}\int_1^2(\pi r)\cdot\sin(\pi r)d\pi r$$

$$\overset{u=\pi r}{=}\frac{1}{4\pi}\int_\pi^{2\pi}u\sin u du=\frac{1}{4\pi}\left[-u\cos u+\sin u\right]\Big|_\pi^{2\pi}=-\frac{3}{4}。$$

方法二： $$I=\iint_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\sin(\pi r)\cdot rdr$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\right)\cdot\left(\int_1^2 r\sin(\pi r)dr\right)，$$

由于 $$\int_1^2 r\sin(\pi r)dr=\frac{1}{\pi^2}\int_1^2\pi r\sin(\pi r)d(\pi r)=\frac{1}{\pi^2}\int_\pi^{2\pi}u\sin u du=-\frac{3}{\pi}，$$

又由于 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta \underline{\underline{\theta=\frac{\pi}{2}-t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta,$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

因此 $$I=\frac{\pi}{4}\times\left(-\frac{3}{\pi}\right)=-\frac{3}{4}。$$

20.【考点定位】二重积分的对称性；直角坐标系下二重积分；极坐标系下二重积分。

【解】方法一：由于区域 D 关于 y 轴对称，所以，

$$\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy-\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=2\iint_{D_1}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy-0$$

$$=2\iint_D\frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2}dxdy=2\iint_D(1-\frac{2y^2}{x^2+y^2})dxdy$$

$$=2\iint_{D_1}dxdy-4\iint_{D_1}\frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-4\int_0^1dy\int_0^y\frac{y^2}{x^2+y^2}dx$$

$$=1-4\int_0^1y^2dy\int_0^y\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y^2}dx=1-4\int_0^1ydy\int_0^y\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}d(\frac{x}{y})$$

$$=1-4\int_0^1y\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^y dy=1-4\int_0^1y\frac{\pi}{4}dy=1-\frac{\pi}{2}。$$

方法二：在极坐标系下 $D_1\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le r\le\csc\theta\end{cases}$，

$$\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy-\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=2\iint_{D_1}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy-0$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\csc\theta}\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}\cdot rdr=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta\int_0^{\csc\theta}rdr$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{2}r^2\Bigg|_0^{\csc\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cot^2-1)d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2\theta-2)d\theta=-\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-2\cdot(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=1-\frac{\pi}{2}。$$

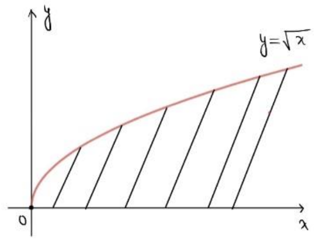
21【考点定位】利用直角坐标计算二重积分；反常积分。

【解】区域 D 可表示为：$\begin{cases}0\le y\le\sqrt{x}\\0\le x\le+\infty\end{cases}$，则 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}\mathrm{d}y$。

由于 $\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}\left(1+x^2+y^4\right)}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1+x^2+y^4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)$,

所以

$$I=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2}\mathrm{d}\sqrt{2}x=\frac{1}{4}\arctan x\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)。$$



22.【考点定位】二重积分的计算。

【解】由 $\begin{cases}y=\sqrt{3\left(1-x^2\right)}\\y=\sqrt{3}x\end{cases}$ 可得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2},y=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则区域 D 可表示成

$$\begin{cases}0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}\\\sqrt{3}x\le y\le\sqrt{3\left(1-x^2\right)}\end{cases},$$

所以

$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3\left(1-x^2\right)}}x^2dy=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}dx-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3dx。$$

因为 $$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cdot\cos^2 tdt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2tdt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t)dt =$$

$$\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{32},$$

所以 $$I=\iint_D x^2dxdy=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{32}-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{16}=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{32}-\frac{1}{16}\right)。$$

23.【考点定位】二次积分；二重积分的对称性。

【答案】C

【解】积分区域 $D=D_1\cup D_2$，其中 $D_1:-1\le x\le 0,-x\le y\le 2-x^2$； $D_2:0\le x\le 1, x\le y\le 2-x^2$ 。

则 $$\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=\iint_D(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为 D 关于 y 轴对称，所以

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0，\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1\left(2-x-x^2\right)\mathrm{d}x=2(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{7}{3},$$

所以 $$\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{7}{3}。$$

答案选（C）。

24.【考点定位】利用直角坐标计算二重积分；定积分的换元法；瓦里士公式。

【解】设参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 所确定的函数为 $y=y(x)$，积分区域可表示为 $D\begin{cases}0\le y\le y(x)\\ 0\le x\le 2\pi\end{cases}$。

记 $I=\iint_D(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left[\left(xy+y^2\right)\Big|_0^{y(x)}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left[xy(x)+y^2(x)\right]\mathrm{d}x$。

由 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 可知，当 $x=0$ 时，$t=0$，当 $x=2\pi$ 时，$t=2\pi$，将其代入上述积分 I 得

$$I=\int_0^{2\pi}\left[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2\right](1-\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)^2\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\sin t(1-\cos t)^2\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t$$

由于

$$\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} t\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t=16\int_0^{2\pi}\frac{t}{2}\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 \mathrm{d}\frac{t}{2}\overset{u=\frac{t}{2}}{=}16\int_0^{\pi} u\sin^4 u\mathrm{d}u$$

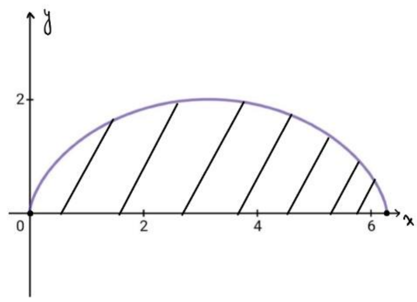
$$=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\mathrm{d}u=16\pi\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi^2,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin t(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 \mathrm{d}(1-\cos t)\overset{u=1-\cos t}{=}\int_0^0 u^2\mathrm{d}u=0,$$

$$\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 \mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3 \mathrm{d}t=16\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^3 \mathrm{d}\frac{t}{2}\overset{u=\frac{t}{2}}{=}16\int_0^{\pi}\sin^6 u\mathrm{d}u=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\mathrm{d}u$$

$$=32\times\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}=5\pi,$$

故 $I=3\pi^2-0+5\pi=3\pi^2+5\pi$。



【注】这里除了多次使用瓦里士公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数。}\end{cases}$ 以外，还用到了以下两个重要且常用的结论，这两个结论在专题四中我们给出了详细的推导过程：

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x。$$

25.【考点定位】二重积分的性质。

【答案】A

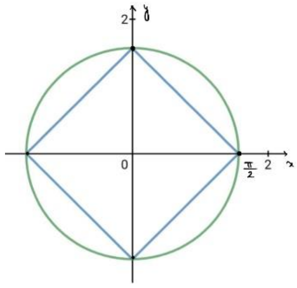
【解】如图，当 $|x|+|y|\le\frac{\pi}{2}$ 时，$x^2+y^2\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$。由于 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ 时，有 $t\ge\sin t$，且 $\sin t+\cos t\ge 1$，

所以 $t\ge\sin t\ge 1-\cos t$。当 $(x,y)\in D$ 时，$0\le\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{\pi}{2}$，从而

$$\sqrt{x^2+y^2}\ge\sin\sqrt{x^2+y^2}\ge 1-\cos\sqrt{x^2+y^2}。$$

所以 $\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即 $I_3<I_2<I_1$。

故答案选（A）。



26.【考点定位】二重积分的计算。

【解】分析：当积分区域用直角坐标不易表示时，可考虑采用极坐标，反之亦然。

将直线 $\left(x^2+y^2\right)^3=y^4$ 化为极坐标方程：$r^6=r^4\cdot\sin^4\theta$，即 $r=\sin^2\theta$，

积分区域 D 关于 y 轴对称，记位于第一象限的部分为 D_1，且 $D_1\begin{cases}0\le r\le\sin^2\theta\\ \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，则

$$I=\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{D_1}[(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{-x+y}{\sqrt{(-x)^2+y^2}})]dxdy$$

$$=2\iint_{D_1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}\frac{r\sin\theta}{r}\cdot rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^2d\cos\theta$$

$$\overset{u=\cos\theta}{=}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-u^2\right)^2du=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-2u^2+u^4\right)du$$

$$=(u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{43\sqrt{2}}{120}。$$

27.【考点定位】利用极坐标变换求二重积分。

【解】令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则区域 D 可表示成 $\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\\ \sec\theta\le r\le2\sec\theta\end{cases}$，（如图所示）

于是

$$I=\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\frac{r}{r\cos\theta}r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\cdot(\frac{1}{2}r^2\Big|_{\sec\theta}^{2\sec\theta})\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}3\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\tan\theta=\frac{3}{2}\sec\theta\cdot\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\sec\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\theta\text{。}$$

所以 $$3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\ln(\sec\theta+\tan\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\ln(\sqrt{2}+1),$$

则 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)],$$

故 $$I=\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]\text{。}$$

28.【考点定位】二重积分的定义；直角坐标系下二重积分；二重积分的对称性；换元积分法；瓦里士公式；极坐标系下二重积分。

【解】设 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$ 则 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+Ax$。

从而

$$\begin{aligned}A&=\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\left[y\sqrt{1-x^2}+Ax\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D Ax\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0\\&=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\overset{\text{令}x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2t\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi,\end{aligned}$$

故 $$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+\frac{3\pi}{16}x\text{。}$$

所以

$$\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(xy\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{16}\pi x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{3}{16}\pi\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{。}$$

由于 D 关于 y 轴对称，且 $xy\sqrt{1-x^2}$ 为关于 x 的奇函数，所以

$$\iint_D xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

则 $$\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{16}\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{16}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3\pi}{16}\cdot\int_0^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{16}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{128}\text{。}$$

29.【考点定位】利用极坐标变换计算二重积分。

【解】积分区域的极坐标表示为 D: $\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0\le r\le 1\text{。}\end{cases}$

方法一：先积 θ 再积 r 。

$$I=\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}\cdot\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^3\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2(1+\sin 2\theta)}\cdot r^3\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^1 r^3\mathrm{e}^{r^2}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2\sin 2\theta}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\text{。}$$

由于 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2\sin 2\theta}\cdot\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2r^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{r^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\left(r^2\sin 2\theta\right)=\frac{1}{2r^2}\mathrm{e}^{r^2\sin 2\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2r^2}\left(\mathrm{e}^{r^2}-1\right)$，所以

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 r\mathrm{e}^{r^2}\left(\mathrm{e}^{r^2}-1\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{e}^{r^2}\left(\mathrm{e}^{r^2}-1\right)\mathrm{d}r^2\overset{u=r^2}{=}\frac{1}{4}\int_0^1\left(\mathrm{e}^u-1\right)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\mathrm{e}^u-1\right)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^u-1\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^u-1\right)^2\Big|_0^1=\frac{1}{8}(\mathrm{e}-1)^2\text{。}$$

方法二：先积 r 再积 θ 。

$$I=\iint_D\mathrm{e}^{(x+y)^2}\cdot\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^3\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}r,$$

由于

$$\int_0^1\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^2\mathrm{d}r^2\overset{u=r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}{=}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\int_0^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{e}^u\cdot u\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\cdot(u-1)\mathrm{e}^u\Big|_0^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)^4}\cdot\left[\left((\cos\theta+\sin\theta)^2-1\right)\mathrm{e}^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}+1\right]$$

所以

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\left(\cos+\sin\theta\right)^4}\left[\left(\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2-1\right)\mathrm{e}^{\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2}+1\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\left(\cos+\sin\theta\right)^3}\left[\left(\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2-1\right)\mathrm{e}^{\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2}+1\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\cos+\sin\theta\right)^3}\left[\left(\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2-1\right)\mathrm{e}^{\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2}+1\right]\mathrm{d}\left(\sin\theta+\cos\theta\right)$$

$$\overset{u=\cos\theta+\sin\theta}{=}\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u^3}\left[\left(u^2-1\right)\mathrm{e}^{u^2}+1\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u}\mathrm{e}^{u^2}-\frac{1}{u^3}\mathrm{e}^{u^2}\right)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u$$

因为

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u}\mathrm{e}^{u^2}-\frac{1}{u^3}\mathrm{e}^{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}\frac{1}{2u^2}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\mathrm{e}^{u^2}\bigg|_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\mathrm{e}^{u^2}\cdot 2u\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\mathrm{e}^{u^2}\bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\mathrm{e}\text{；}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\bigg|_1^{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{4},$$

故 $I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\mathrm{e}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\mathrm{e}^2-\frac{1}{4}\mathrm{e}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}-1\right)^2$。

【注】比较方法一与方法二可见方法二的计算量要小，请读者注意，在极坐标中可以先积θ再积r，也可以先积r再积θ。特别是在区域D为$\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ R_1\le r\le R_2\end{cases}$时，若先积$r$再积$\theta$比较困难，则可考虑先积$\theta$再积$r$。即$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)r\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}r\mathrm{d}r\int_\alpha^\beta f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$。

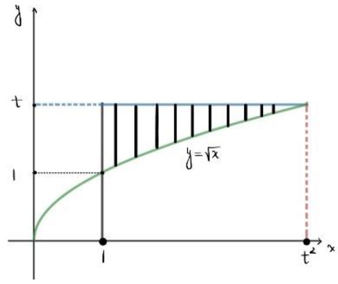
30.【考点定位】累次积分交换积分次序；变限积分求导。

【答案】$\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}$

【解】如图，$f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^t\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y\overset{\text{积分换序}}{=}\int_1^t\mathrm{d}y\int_1^{y^2}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x$,

由于$\int_1^{y^2}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y=-y\cos\frac{x}{y}\Big|_1^{y^2}=y\left(\cos\frac{1}{y}-\cos y\right)$，所以$f(t)=\int_1^t y\left(\cos\frac{1}{y}-\cos y\right)\mathrm{d}y$,

故$f'(t)=t\left(\cos\frac{1}{t}-\cos t\right)$，从而$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}$。


y
t
1
$y=\sqrt{x}$
1
t^2
x