专题 8 无穷级数

（A 组）基础题

1.【考点定位】比较审敛法。

【答案】B

【解】对于选项(A)：当$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}=0$，从而当$n$足够大时，有$0\le a_n<\dfrac{1}{n}$。

由于调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$可能发散也可能收敛。例如取$a_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$，则有

$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)\ln(n+1)}=0$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$与反常积分

$\int_1^{\infty}\dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\mathrm{d}x$同敛散，而$\int_1^{\infty}\dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\mathrm{d}x=\ln\left[\ln(x+1)\right]\Big|_1^{\infty}=\infty$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

取$a_n=\dfrac{1}{n^2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。综上所述，(A)错误。

对于选项(B)：当$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda\ne0$时，不妨$\lambda>0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lambda$，由比较审敛法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$同敛散。由于调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散 ，故(B)正确。

对于选项(C)：取$a_n=\dfrac{1}{n^2}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，但是$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=1\ne0$；反之当$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$时，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=0$，从而当$n$足够大时，有$0\le a_n<\dfrac{1}{n^2}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。综上所述：

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，反之不真。所以(C)错误。

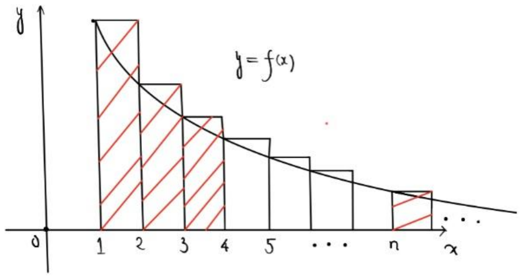
对于选项(D)：这是(B)的逆命题，取$a_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，但$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，

所以(D)错误。综上所述，答案选(B)。

【注】同学们需要熟练掌握如下反映级数与反常积分之间的重要联系的一个结论:

设非负连续函数$f(x)$在$[1,\infty)$上单调递减，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与反常积分$\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$同敛散。

同学们借助下图来记忆和理解：



在几何上$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$表示阴影部分矩形的面积，$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 表示无限延伸的曲边梯形的面积，二者同敛散，即当$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛；当$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散（即为正无穷）时，$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$发散（即为正无穷）。

2.【考点定位】级数的性质。

【答案】B

【解】

对于命题①：级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$(\text{于}s) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛$(\text{于}s)$，反之不真。

例如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+$ 发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n}) = (1-1)+(1-1)+\cdots = 0$ 。故命题①错误。

对于命题②：级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 增加、减少、改变有限项不改变其敛散性。故

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000} = u_{1001}+u_{1002}+\cdots$ 收敛，故命题②正确

对于命题③：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = q > 1 \Rightarrow$从某项$N_0$开始，即$n \ge N_0$时

$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > \frac{q+1}{2} > 1 \Rightarrow |u_n| > |u_{N_0}|\left(\frac{q+1}{2}\right)^{n-N_0} \to \infty$，从而$u_n \not\to 0$，所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，故命题③正确。

对于命题④：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 。

例如：取$u_n = 1+\frac{1}{n^2}$， $v_n = -1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散。

故命题④错误。综上所述：命题②③正确，故答案选(B).

【注】关于级数的以下几条基本性质，要求同学们要深刻理解并能熟练运用：

① $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$;但反之不真。

② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda u_n + k v_n\right)$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda u_n + k v_n\right) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} u_n + k\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 。

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 增加、减少、改变有限项不改变其敛散性。

④ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛（于 S）$\Rightarrow \left(u_1+\cdots+u_{n_1}\right)+\left(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2}\right)+\cdots+\left(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}\right)+\cdots$ 收敛（于 S）；

但反之不真。

3.【考点定位】收敛级数的性质。

【答案】D

【解】对于选项(A)：$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；但反之不真。例如取 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$，则交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ 收敛$\left(\text{于}\ln 2\right)$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。所以（A）错误。

对于选项(B)：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 的敛散性相互之间没有蕴含关系。例如

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。所以(B)错误。

对于选项(C)：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 的敛散性相互之间没有蕴含关系。例如

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，而 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}(n\to\infty)$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 发散。所以(C)错误。

对于选项(D)：由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+a_{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{a_1}{2}$。故(D)正确。

综上所述，答案选(D)。

4.【考点定位】幂级数的收敛半径。

【答案】$\frac{1}{\mathrm{e}}$

【解】该幂级数中 x^n 的系数 $a_n=\frac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}$，由于

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\mathrm{e}^{n+1}-(-1)^{n+1}\right|}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{\left|\mathrm{e}^n-(-1)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{n+1}\left[1-\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\right]}{\mathrm{e}^n\left[1-\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n\right]}=\mathrm{e}\quad,$$

故所求收敛半径为 $R=\frac{1}{l}=\frac{1}{\mathrm{e}}$。

5.【考点定位】收敛级数的性质。

【答案】A

【解】对于选项(A)和(B)：当 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ 收敛于 S 时，对 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 以任意方式添加括号

得到的级数 $(u_1+\ldots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\ldots+u_{n_2})+\ldots$ 仍然收敛于 S，反之不真。

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}+u_{2n}\right)=\left(u_1+u_2\right)+\left(u_3+u_4\right)+\cdots+\left(u_{2n-1}+u_{2n}\right)+\cdots$ 收敛，反之不真。

故（A）正确，（B）错误。

对于选项（C）和（D）：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}-u_{2n}\right)$ 的敛散性相互之间没有蕴含关系。

例如 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}-u_{2n}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots$ 发散。

取 $u_n=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}-u_{2n}\right)=\left(1-1\right)+\left(1-1\right)+\cdots=0$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散。

故(C)，(D)错误。综上所述，答案选(A)。

6.【考点定位】幂级数求和函数；等比级数的和；和函数的性质。

【答案】$\dfrac{1}{(1+x)^2}$

【解】$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}x^n\right]'=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right]'=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)'=\dfrac{1}{(1+x)^2}$。

7.【考点定位】单调有界法则；级数收敛的概念。

【答案】D

【解】首先由$\{u_n\}$单调增加且有界可知$\{u_n\}$存在极限。设为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$， 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(u_2^2-u_1^2\right)+\left(u_3^2-u_2^2\right)+\cdots+\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(u_{n+1}^2-u_1^2\right)=A^2-u_1^2,$$

所以（D）收敛。

（A）、（B）、（C）中的级数都不一定收敛：例如$u_n=2-\dfrac{1}{n}$，则$\{u_n\}$单调增加且有界，但由于$\dfrac{u_n}{n}=\dfrac{2-\frac{1}{n}}{n}\sim\dfrac{2}{n}(n\to\infty)$，所以选项(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$发散；$(-1)^n\dfrac{1}{u_n}=(-1)^n\dfrac{1}{2-\frac{1}{n}}$不趋于$0$，所以选项(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$ 发散。取$u_n=-\dfrac{1}{n}$，则$\{u_n\}$单调增加且有界，由于

$1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=1-\dfrac{-\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n+1}}=1-\dfrac{n+1}{n}=-\dfrac{1}{n}$，所以选项(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散。

综上所述，答案选(D)。

【注】我们对选项(D)做些拓展：记$u_0=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\left[\left(u_1-u_0\right)+\left(u_2-u_1\right)+\cdots+\left(u_n-u_{n-1}\right)\right]=A\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-u_{n-1}\right)=A,$$

所以数列$\{u_n\}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n-u_{n-1}\right)$有相同的敛散性。由此我们得到如下结论：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n-u_{n-1}\right|\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-u_{n-1}\right)\text{收敛}\Leftrightarrow\text{数列}\{u_n\}\text{收敛。}$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n-u_{n-1}\right|$为正项级数，所以我们可以通过正项级数的审敛法来判别数列$\{u_n\}$收敛，这种方法在后面将会用到，请同学们务必重视！

（B 组）提升题

1.【考点定位】定积分的换元法；幂级数求和；幂级数的性质。

【解】方法一：利用幂级数的性质求 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$：

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}u^n\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u^n\right)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-u}\mathrm{d}u=\left[-\ln(1-u)\right]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\ln\left(2+\sqrt{2}\right)。$$

方法二：因为 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}\sin x=\left(\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$，

所以，$\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$。构造幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$， $x\in[-1,1)$，下面计算和函数 $S(x)$：

由于 $S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$，从而

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+0=-\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}(1-t)=\left[-\ln(1-t)\right]\Big|_0^x=-\ln(1-x),x\in(-1,1)。$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)=\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\ln\left(2+\sqrt{2}\right)$。

方法三：先求 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ 的部分和，再取极限：

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}I_k=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^k x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sin^k x\cos x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\left(1-\sin^n x\right)}{1-\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^n x}{1-\sin x}\mathrm{d}\sin x\overset{u=\sin x}{=}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-u}\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{u^n}{1-u}\mathrm{d}u$$
$$=\left[-\ln(1-u)\right]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{u^n}{1-u}\mathrm{d}u=\ln\left(2+\sqrt{2}\right)-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{u^n}{1-u}\mathrm{d}u。$$

因为 $0\le\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{u^n}{1-u}\mathrm{d}u\le\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}u^n\mathrm{d}u=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{n}\to 0,$ 所以由夹逼准则知 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{u^n}{1-u}\mathrm{d}u=0$。

故 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(2+\sqrt{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{u^n}{1-u}\mathrm{d}u\right] = \ln\left(2+\sqrt{2}\right)$。

2.【考点定位】条件收敛与绝对收敛关系。

【答案】B

【解】对于选项(A)，(C)：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + |a_n|\right)$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n - |a_n|\right)$ 发散。所以(A),(C)都错误；

对于选项(B)，(D)：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + |a_n|\right)$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n - |a_n|\right)$ 收敛。所以(B)正确，(D)错误。

综上所述，答案选（B）。

【注】记 $p_n = \frac{1}{2}\left(a_n + |a_n|\right), q_n = \frac{1}{2}\left(|a_n| - a_n\right)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 收敛。

3.【考点定位】函数展开为幂级数；有理函数分解为部分分式的和。

【解】设 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{(2-x)(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2-x}$，则

$x = A(2-x) + B(1+x) = (-A+B)x + (2A+B)$，比较系数得 $\begin{cases} -A+B=1, \\ 2A+B=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$，所以

$$f(x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}。$$

由于 $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x\in(-1,1)$；$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n, x\in(-2,2)$。

所以 $f(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^n} + (-1)^{n+1}\right] x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^n} + (-1)^{n+1}\right] x^n, x\in(-1,1)$。

4.【考点定位】函数展成幂级数。

【解】

方法一：因为$f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x-4\right)\left(x+1\right)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+1}\right)$，

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{\left(x-1\right)-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\left(x-1\right)^n,\left|\frac{x-1}{3}\right|<1,$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{\left(x-1\right)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\left(x-1\right)^n,\left|-\frac{x-1}{2}\right|<1,$$

所以$f\left(x\right)=-\dfrac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}\left(x-1\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{1}{2^{n+1}}\left(x-1\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}+\dfrac{\left(-1\right)^n}{2^{n+1}}\right)\right]\left(x-1\right)^n$，

由$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1,\\ \left|-\dfrac{x-1}{2}\right|<1,\end{cases}$得所求收敛区间为$\left(-1,3\right)$。

方法二：令$x-1=t$，则$x=t+1$，

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\left(x-4\right)\left(x+1\right)}=\frac{1}{\left(t-3\right)\left(t+2\right)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+2}\right)$$

由于

$$\frac{1}{t-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}t^n;\ \frac{1}{t+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{t}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2^{n+1}}t^n,$$

所以

$$f\left(x\right)=\frac{1}{5}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}t^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2^{n+1}}t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{\left(-1\right)^n}{2^{n+1}}\right)\right]t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{\left(-1\right)^n}{2^{n+1}}\right)\right]\left(x-1\right)^n,$$

由$\begin{cases}\left|\dfrac{t}{3}\right|<1,\\ \left|-\dfrac{t}{2}\right|<1,\end{cases}$得$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1,\\ \left|-\dfrac{x-1}{2}\right|<1,\end{cases}$，故所求收敛区间为$\left(-1,3\right)$。

【注】将函数$f\left(x\right)$展开为$x-x_0$的幂级数时，可以采用如下间接方法---换元法：

$$f\left(x\right)\overset{x-x_0=t}{=}f\left(t+x_0\right)=g\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n。$$

例如：将$f\left(x\right)=\ln x$展开为$x-2$的幂级数时，除了采用直接法求泰勒系数外，还可以采用间接法：

$$\ln x \overset{x-2=t}{=} \ln(2+t)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) \overset{u=\frac{t}{2}}{=} \ln 2+\ln(1+u)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}u^n$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t}{2}\right)^n=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}t^n=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n, x\in(0,4]。$$

5.【考点定位】幂级数的收敛域。

【答案】$(1,5]$

【解】$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t=2$ 处收敛，在 $t=-2$ 处发散。

由幂级数收敛域的特点知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛域为 $(-2,2]$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为

$-2<x-3\le 2$，即 $1<x\le 5$，故应填 $(1,5]$。

6.【考点定位】正项级数比较审敛法；收敛级数的必要条件。

【答案】C

【解】对于选项(A)和(B):由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 不一定是正项级数，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 的敛散性之间没有蕴含关系。例如，取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ 且

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故(A)错误；

取 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故(B)错误。

对于选项(C)和(D)：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，由收敛级数的必要条件知 $\lim_{n\to\infty}|b_n|=0$，又由于 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，所以

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2b_n^2}{|b_n|}=\lim_{n\to\infty}a_n^2|b_n|=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^2\cdot\lim_{n\to\infty}|b_n|=0$。由比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛，从而选(C)正确，(D)错误。

综上所述，答案选(C)。

【注】在选项(A)中，如果将条件加强为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。判别的方法与(C)相同。

7.【考点定位】幂级数的性质；二阶线性常系数齐次微分方程。

【解】（I）由 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可得，$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$，所以

$$S''(x)-S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n-a_{n-2}\right]x^{n-2}$$

由于 $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2)$，故 $S''(x)-S(x)=0$ 。

（II）$S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $r^2-1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm 1$，所以 $S(x)=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$ 。由 $a_0=3,a_1=1$ 得 $S(0)=a_0=3,S'(0)=a_1=1$，所以 $\begin{cases}3=c_1+c_2\\1=c_1-c_2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c_1=2\\c_2=1\end{cases}$，故 $S(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 。

【注】对于收敛半径大于零的幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，通过逐项求导可得系数与和函数有如下关系：

$$a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$$ 。特别地，$a_0=S(0),a_1=S'(0)$。

8.【考点定位】收敛域；收敛半径；和函数的性质；幂级数的和函数；等比级数的和。

【解】记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，$x^n$ 的系数为 $a_n=(n+1)(n+3)$ 。

由 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}=1$ 可知该幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{l}=1$ 。

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 发散；

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$ 发散。

故幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$ 。下面计算和函数 $S(x)$：

由于 $a_n=(n+1)(n+3)=(n+1)+(n+1)(n+2)$，故

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)+(n+1)(n+2)\right]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''=\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\left(\frac{x-1+1}{1-x}\right)'+\left(\frac{x^2-1+1}{1-x}\right)''$$
$$=\left(1+\frac{1}{1-x}\right)'+\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}=\frac{3-x}{(1-x)^3},x\in(-1,1)。$$

【注】对于形如$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_0+c_1n+\cdots+c_kn^k\right)x^n$的幂级数，我们可按如下步骤快速的求出和函数：

第一步：将系数$c_0+c_1n+\cdots+c_kn^k$改写为：

$$c_0+c_1n+\cdots+c_kn^k=b_0+b_1(n+1)+b_2(n+2)(n+1)+\cdots+b_k(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)$$

通过比较$n^j\left(j=0,1,2,\cdots,k\right)$的系数确定$b_0,b_1,\cdots,b_k$；

第二步：

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_0+c_1n+\cdots+c_kn^k\right)x^n\\&=b_0\sum_{n=0}^{\infty}x^n+b_1\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+b_2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\cdots+b_k\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)x^n\\&=b_0\sum_{n=0}^{\infty}x^n+b_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'+b_2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\cdots+b_k\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+k}\right)^{(k)}\\&=b_0\left(\frac{1}{1-x}\right)+b_1\left(\frac{x}{1-x}\right)'+b_2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\cdots+b_k\left(\frac{x^k}{1-x}\right)^{(k)}\end{aligned}$$

注意

$$\left(\frac{x^m}{1-x}\right)^{(m)}=\left(\frac{x^m-1+1}{1-x}\right)^{(m)}=\left(\frac{x^m-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}\right)^{(m)}=\left[-\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)+\frac{1}{1-x}\right]^{(m)}=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(m)}$$
$$=\frac{m!}{(1-x)^{m+1}},$$

因此$S(x)=b_0\cdot\frac{1}{1-x}+b_1\frac{1}{(1-x)^2}+b_2\frac{2!}{(1-x)^3}+\cdots+b_k\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$。

例如：$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3+2n+4n^2\right)x^n$：

第一步：$3+2n+4n^2=b_0+b_1(n+1)+b_2(n+2)(n+1)$，比较$n^j\left(j=0,1,2\right)$的系数得

$\begin{cases}b_2=4\\3b_2+b_1=2\\2b_2+b_1+b_0=3\end{cases}$,解得$\begin{cases}b_2=4\\b_1=-10\\b_0=5\end{cases}$，即$3+2n+4n^2=5-10(n+1)+4(n+2)(n+1)$；

第二步：

$$S(x)=5\sum_{n=0}^{\infty}x^n-10\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$$

$$=5\sum_{n=0}^{\infty}x^n-10\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'+4\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''=\frac{5}{1-x}-10\left(\frac{x}{1-x}\right)'+4\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{5}{1-x}-\frac{10}{(1-x)^2}+\frac{8}{(1-x)^3}。$$

9.【考点定位】利用已知函数的幂级数展开求数项级数的和。

【答案】B

【解】由选项的特点，我们应该利用 sin$x$,cos$x$ 的幂级数展开。

由 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$， $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$，可得 $\sin 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$， $\cos 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$。

所以，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\cos 1+2\sin 1,$

故答案选（B）。

10.【考点定位】$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$；利用换元法求幂级数的和函数。

【答案】$\cos\sqrt{x}$

【解】因为 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n}\overset{t=\sqrt{x}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\cos t=\cos\sqrt{x}。$$

（C 组）拔高题

1.【考点定位】收敛半径的求法；收敛区间的概念；比较审敛法；比值法。

【解】幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$ 中，x^n 的系数 $a_n=\frac{1}{\left[3^n+(-2)^n\right]n}$。

由于 $l=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[3^n+(-2)^n\right]n}{\left[3^{n+1}+(-2)^{n+1}\right](n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right]n}{3^{n+1}\left[1+\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)}=\frac{1}{3},$

所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{l}=3$, 故该级数的收敛区间为 $\left(-3,3\right)$ 。

当 $x=-3$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\left(-2\right)^n}\cdot\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\left(-2\right)^n}\cdot\frac{\left(-3\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{3^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{3^n+\left(-2\right)^n-\left(-2\right)^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left[\frac{1}{n}-\frac{\left(-2\right)^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(-1\right)^n}{n}-\frac{\left(-1\right)^n\left(-2\right)^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(-1\right)^n}{n}-\frac{2^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}\right]。$$

交错级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}$ 收敛；对于正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}$，其通项 $u_n=\dfrac{2^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{\left(n+1\right)\left[3^{n+1}+\left(-2\right)^{n+1}\right]}}{\dfrac{2^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot3^n\left[1+\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n\right]}{\left(n+1\right)\cdot3^{n+1}\left[1+\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{n+1}\right]}=\frac{2}{3}<1$$ ，所以

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}$ 收敛，从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-1\right)^n\frac{1}{n}-\frac{2^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}\right]$ 收敛。

当 $x=3$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\left(-2\right)^n}\cdot\frac{3^n}{n}$ ，由于 $\dfrac{3^n}{n\left[3^n+\left(-2\right)^n\right]}=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\cdot\left[1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right]}\sim\dfrac{1}{n}\left(n\to\infty\right)$ ，而调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较审敛法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\left(-2\right)^n}\cdot\frac{3^n}{n}$ 发散。

综上所述：该级数收敛区间为 $\left(-3,3\right)$，且在 $x=-3$ 处收敛，在 $x=3$ 处发散。

2.【考点定位】函数展开为幂级数；幂级数的运算；利用幂级数求数项级数的和。

【解】由于 $\left(\arctan x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-\left(-x^2\right)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n},x\in\left(-1,1\right)$

所以 $\arctan x=\displaystyle\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n t^{2n}\mathrm{d}t+\arctan 0=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in\left(-1,1\right)$ 。

从而当 $x\in\left[-1,0\right)\cup\left(0,1\right]$ 时，

$$f\left(x\right)=\frac{1+x^2}{x}\arctan x=\frac{1+x^2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}=\left(1+x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}\cdot x^{2n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}\cdot x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}\cdot x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{-2}{4n^2-1}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{2}{1-4n^2}\cdot x^{2n},$$

当$x=0$时，$f\left(0\right)=1,1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{2}{1-4n^2}\cdot x^{2n}=1$。故$f\left(x\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{2}{1-4n^2}\cdot x^{2n},x\in\left[-1,1\right]$。

取$x=1$得$f\left(1\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{2}{1-4n^2}\cdot 1$，由于$f\left(1\right)=2\arctan 1=\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\left(-1\right)^n}{1-4n^2}$，

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{1-4n^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$。

3.【考点定位】一阶线性微分方程；幂级数求和。

【解】由$f_n'\left(x\right)=f_n\left(x\right)+\frac{x^n}{n}\cdot e^x$得，$f_n'\left(x\right)+\left(-1\right)f_n\left(x\right)=\frac{x^n}{n}\cdot e^x$

由一阶线性微分方程通解公式知

$$f_n\left(x\right)=e^{-\int(-1)dx}\left[\int x^{n-1}e^x\cdot e^{\int(-1)dx}dx+c\right]=e^x\left[\int x^{n-1}\cdot e^x\cdot e^{-x}dx+c\right]=e^x\left[\int x^{n-1}dx+c\right]=e^x\left(\frac{x^n}{n}+c\right)。$$

由$f_n\left(1\right)=\frac{e}{n}$得，$\frac{e}{n}=e\left(\frac{1}{n}+c\right)$，从而$c=0$，故$f_n\left(x\right)=\frac{x^n}{n}\cdot e^x$。

所以$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cdot e^x=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$。下面求幂级数$S\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数：

$S\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛域为$\left[-1,1\right)$。由于$S'\left(x\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},x\in\left(-1,1\right)$，所以

$S\left(x\right)=\int_0^x S'\left(t\right)dt+S\left(0\right)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt+S\left(0\right)=-\ln\left(1-x\right),x\in\left(-1,1\right)$。

由于$S\left(x\right)$在收敛域$\left[-1,1\right)$上连续，所以$S\left(-1\right)=\lim_{x\to-1^+}S\left(x\right)=\lim_{x\to-1^+}\left[-\ln\left(1-x\right)\right]=-\ln 2$，故

$S\left(x\right)=-\ln\left(1-x\right),x\in\left[-1,1\right)$，因此$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-e^x\ln\left(1-x\right),x\in\left[-1,1\right)$。

4.【考点定位】幂级数的性质；二阶线性常系数微分方程。

（I）【证明】由 $y(x)=1+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$

得 $y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$，$y''(x)=\frac{x}{1!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$，

所以 $y''(x)+y'(x)+y(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$。又由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$，

故 $y(x)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$。

（II）由 $y(x)=1+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 得 $y(0)=1, y'(0)=0$。再结合(I)

可知 $y(x)$ 为初值问题 $\begin{cases} y''+y'+y=\mathrm{e}^x, \\ y(0)=1, y'(0)=0, \end{cases}$ 的解。齐次方程为 $y''+y'+y=0$ 的特征方程为

$r^2+r+1=0$，解得 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以齐次方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)。$$

再求 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 的特解。设特解 $y^*=\mathrm{e}^x\cdot a$，代入原方程可得 $3a=1$，所以 $y^*=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x$，故

$$y=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)。$$

从而 $y'=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{1}{2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$，

由 $y(0)=1, y'(0)=0$，所以 $\begin{cases} 1=\frac{1}{3}+c_1, \\ 0=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}c_2-\frac{1}{2}c_1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} c_1=\frac{2}{3}, \\ c_2=0. \end{cases}$ 故

$$y(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, x\in(-\infty,+\infty)。$$

5.【考点定位】绝对收敛与条件收敛的概念；收敛级数的性质；级数收敛的定义；比较审敛法；极限的保号性。

【答案】C

【解】$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$的部分和为

$$s_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{u_n}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}},$$

又因为$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，所以$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{n}}=1$，从而$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$，所以$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{u_1}$，因

此级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$收敛。

由$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1>0$可知，$\exists N\in N^{+}$，当 $n>N$时$u_n>0$，不妨$u_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right),$$

由于$\frac{1}{u_n}\sim\frac{1}{n},\frac{1}{u_{n+1}}\sim\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$，所以由比较审敛法知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_{n+1}}$都发散，

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$发散，即$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|$发散。

综上所述，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$条件收敛。

【注】作为选择题，当同学们对于抽象的级数一时间找不到思路时，可以尝试用特例法。由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，

可取特例$u_n=n$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，由于

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$收敛且$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$

发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$条件收敛。

6.【考点定位】函数展开为幂级数；利用幂级数展开求数项级数的和；幂级数的收敛域。

【解】方法一：由于

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\cdot\frac{-2(1+2x)-(1-2x)\cdot 2}{(1+2x)^2}=\frac{-4}{(1+2x)^2+(1-2x)^2}=\frac{-2}{1+4x^2}=\frac{-2}{1-(-4x^2)}\overset{t=-4x^2}{=}\frac{-2}{1-t}$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}t^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-4x^2\right)^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 4^n\cdot x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}\cdot x^{2n},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)。$$

所以

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+f(0)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}\cdot t^{2n}\right)\mathrm{d}t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)。①$$

下面确定 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 的幂级数展开式成立的范围：

函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq\frac{1}{2}\right\}$ 且在定义域内 $f(x)$ 连续。①中右边的幂级数 $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$ 的收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，　$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛；

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 收敛。

故 $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$ 的收敛域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，从而在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上连续。

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，

$$\left[\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left[\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

综上所述，$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$。　　②

在②中取 $x=\frac{1}{2}$ 得，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$，所以 $0=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，

故$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$。

方法二：这里向同学们介绍另一种方法，以拓宽同学们的视野，尤其是同学们进一步熟悉反正切函数。

注意 $\tan\left(\arctan\frac{1-2x}{1+2x}\right)=\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\left(\arctan 2x\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\left(\arctan 2x\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan 2x\right)$,

由此可知，当 $x\neq\frac{1}{2}$时，$\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{\pi}{4}-\arctan 2x$，所以，

$$f\left(x\right)=\frac{\pi}{4}-\arctan 2x\overset{t=2x}{=}\frac{\pi}{4}-\arctan t=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}t^{2n+1}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]。$$

取 $x=\frac{1}{2}$得，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+1}$，所以 $0=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}$，故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$。

7.【考点定位】比值审敛法；幂级数求收敛域；幂级数求和函数；一元函数求极值。（题干有错误！）

【解】记 $f\left(x\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$，$u_n(x)=(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$，则由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}x^2=x^2\text{ 可得}$$

当 $x^2<1$，即 $-1<x<1$时，$f\left(x\right)$绝对收敛；当 $x^2>1$，即 $x<-1$或 $x>1$时，$f\left(x\right)$发散。

当 $x=\pm1$时，数项级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$收敛。综上所述，$f\left(x\right)$的收敛域为$[-1,1]$。

下面求和函数为 $f(x)$：因为 $f'(x)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=\frac{-x}{1+x^2},x\in\left(-1,1\right)$，

所以 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\int_0^x\frac{-t}{1+t^2}\mathrm{d}t+1=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2}=-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+1,x\in\left(-1,1\right)$。

由 $f\left(x\right)$在收敛域$[-1,1]$上连续可得，$f\left(1\right)=\lim_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to1^-}\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+1\right]=-\frac{1}{2}\ln 2+1$,

$f\left(-1\right)=\lim_{x\to-1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to1^-}\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+1\right]=-\frac{1}{2}\ln 2+1$, 故 $f(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+1,x\in\left[-1,1\right]$。

令 $f'(x)=\dfrac{-x}{1+x^2}=0$ 可得 $x=0$，列表讨论如下：

x	$[-1,0)$	0	$(0,1]$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↑	极大值	↓

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，且极大值为 $f(0)=1$。

【注】①对于缺项幂级数，我们通常采用本题中所展示的方法求其收敛域。

②本题中的和函数还可以利用已知的常用幂级数展开式来求：

$$f\left(x\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}=1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(x^2\right)^n\overset{t=x^2}{=}1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$$

$$\overset{t\in(-1,1]}{=}1-\frac{1}{2}\ln\left(1+t\right)=1-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right),x\in[-1,1]。$$

8.【考点定位】幂级数的性质；一阶线性微分方程。

【解】(I) 由 $S(x)=\dfrac{x^4}{2\cdot4}+\dfrac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\dfrac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$，可得

$$S'(x)=\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot4}+\frac{x^7}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots\right)'=\frac{x^3}{2}+x\left(\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots\right)=\frac{x^3}{2}+xS(x)$$

所以 $S\left(x\right)$ 满足的一阶微分方程为：$S'(x)-xS(x)=\dfrac{x^3}{2}$。

(II) 由 $S'(x)-xS(x)=\dfrac{x^3}{2}$ 得，$S(x)=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left[\int\dfrac{x^3}{2}\mathrm{e}^{\int -x\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left[\int\dfrac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{d}x+c\right]$。

由于 $$\int\frac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{d}x=\int\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{d}\frac{x^2}{2}\overset{u=\frac{x^2}{2}}{=}\int u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-(u+1)\mathrm{e}^{-u}=-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

所以 $S(x)=-\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)+c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，又由 $S(0)=0$ 得 $c=1$，故 $S(x)=-(\dfrac{x^2}{2}+1)+ce^{-\frac{x^2}{2}}$。

【注】①在考试中，第(I)问的结论写为初值问题 $\begin{cases}S'(x)-xS(x)=\dfrac{x^3}{2},\\ S\left(0\right)=0.\end{cases}$ 也是正确的。

②在第（II）问中，也可以不通过求解微分方程得到$S(x)$：

$$S(x)=\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots=\frac{x^4}{(1\cdot2)2^2}+\frac{x^6}{(1\cdot2\cdot3)2^3}+\frac{x^8}{(1\cdot2\cdot3\cdot4)2^4}+\cdots$$

$$=\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^4}{4!}+\cdots\overset{t=\frac{x^2}{2}}{=}\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots=\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\right)-(1+t)$$

$$=\mathrm{e}^t-(1+t)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)。$$

9.【考点定位】零点定理；函数单调性的判定；p 级数；比较审敛法。

【证明】令$f(x)=x^n+nx-1,x\in[0,+\infty)$，因为$f(0)=-1<0,f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}>0$，且$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上连续。由零点定理可知，$\exists x_n\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$使得$f(x_n)=0$。由于$f'(x)=nx^{n-1}+n>0,x\in[0,+\infty)$，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，故$x_n$是$f(x)$在$[0,+\infty)$上的唯一零点，即方程$x^n+nx-1=0$存在唯一正实根$x_n$。因为$0<x_n<\frac{1}{n}$，所以当$\alpha>1$时，$0<x_n{}^{\alpha}<\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$，又因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$收敛，所以由比较审敛法可知，当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n{}^{\alpha}$收敛。

【注】本题中的结论“当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n{}^{\alpha}$收敛。”可以加强为$\sum_{n=1}^{\infty}x_n{}^{\alpha}$收敛$\Leftrightarrow\alpha>1$。

事实上由$f\left(\frac{1}{2n}\right)=\left(\frac{1}{2n}\right)^n+\frac{1}{2}-1=\left(\frac{1}{2n}\right)^n-\frac{1}{2}\le0,f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}>0$可知$\frac{1}{2n}\le x_n<\frac{1}{n}$，从而$\frac{1}{2^{\alpha}}\frac{1}{n^{\alpha}}\le x_n{}^{\alpha}<\frac{1}{n^{\alpha}}$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}x_n{}^{\alpha}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$同敛散，因此$\sum_{n=1}^{\infty}x_n{}^{\alpha}$收敛$\Leftrightarrow\alpha>1$。

10.【考点定位】比值审敛法；幂级数求收敛域；幂级数求和函数

【解】记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$，$u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}\cdot x^2=x^2，所以$$

当$x^2<1$，即$-1<x<1$时，该幂级数收敛；当$x^2>1$，即$x<-1$或$x>1$时，该幂级数发散；

$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(2n-1)}$收敛；$x=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$收敛。

故该幂级数收敛域为$[-1,1]$。下面求和函数：

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)\cdot(2n-1)}$，令$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)\cdot(2n-1)}$，则有

$$S_1'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1},$$

$$S_1''(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1),$$

从而 $S_1'(x)=\int_0^x S_1''(t)\mathrm{d}t+S_1'(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+0=\arctan x$，

$$S_1(x)=\int_0^x S_1'(t)\mathrm{d}t+S_1(0)=\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t=(t\arctan t)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),x\in(-1,1)。$$

所以$S(x)=2xS_1(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),x\in(-1,1)$。由于和函数$S(x)$在收敛域$[-1,1]$上连续，所以

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\left[2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2)\right]=\frac{\pi}{2}-\ln2,$$

$$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=\lim_{x\to1^-}\left[2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2)\right]=-\frac{\pi}{2}+\ln2。$$

故$S(x)=xS_1(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),x\in[-1,1]$。

【注】本题中的和函数还可以利用已知的常用幂级数展开式来求:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n)\cdot(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)x^{2n+1}$$

$$=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x^2)^n$$

由于$\arctan x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$，所以

$$S(x)=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(x^2\right)^n=2x^2\arctan x-x\ln\left(1+x^2\right),x\in\left[-1,1\right]。$$

11.【考点定位】幂级数的性质；幂级数求和函数；$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x,x\in\left(-\infty,+\infty\right)$。

（Ⅰ）【证明】由 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-\infty<x<+\infty)$ 得，$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$，

代入 $y''-2xy'-4y=0$ 得，$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$。①

由于 $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n$，$2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n$，所以①变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0，从而$$

$$(2a_2-4a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n\right]x^n=0，$$

因此 $\begin{cases}2a_2=4a_0\\(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+2)a_n=0\left(n=1,2,\cdots\right)\end{cases}$，故 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n(n=1,2,\cdots)$。

（Ⅱ）【解】由 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 得 $a_0=0$ $a_1=1$。所以 $a_2=2a_0=0$，从而由

$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n(n=1,2,\cdots)$ 得 $a_4=0,\cdots,a_{2n}=0,\cdots$。再由 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n(n=0,1,2,\cdots)$，

得 $a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{2}{2n}\cdot\frac{2}{2n-2}a_{2n-3}=\cdots=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{1}\cdot a_1=\frac{1}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$，

故 $$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n!}\overset{t=x^2}{=}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=x\mathrm{e}^t=x\mathrm{e}^{x^2}。$$

12.【考点定位】定积分的几何应用；级数收敛的定义；和函数；逐项求导；等比级数。

【解】如图，曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 的交点为 $\left(0,0\right),\left(1,1\right)$，所以

$$a_n=\int_0^1\left(x^n-x^{n+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

所以 $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$，该级数的部分和为：

$\sigma_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$，故 $S_1=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$。

这里采用三种方法求 $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$：

方法一：$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 的部分和

$$\begin{aligned}A_n&=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(x^3-x^4\right)\mathrm{d}x+\cdots+\int_0^1\left(x^{2n-1}-x^{2n}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[\left(x-x^2\right)+\left(x^3-x^4\right)+\cdots+\left(x^{2n-1}-x^{2n}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-x^2+x^3-x^4+\cdots+x^{2n-1}-x^{2n}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{x-x^{2n+1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{1+x}\mathrm{d}x=\left(x-\ln\left(1+x\right)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{1+x}\mathrm{d}x=\left(1-\ln 2\right)-\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{1+x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $0<\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{1+x}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^{2n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+2}$，所以由极限的夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{1+x}\mathrm{d}x=0$，

故 $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\ln 2\right)-\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{1+x}\mathrm{d}x\right]=1-\ln 2$。

方法二：$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，

由于 $\ln\left(1+x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,x\in\left(-1,1\right]$，取 $x=1$ 得 $\ln 2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，所以

$$S_2=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\ln 2。$$

方法三：$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，令 $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$，

其收敛域为 $\left(-1,1\right]$。由于 $f'\left(x\right)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right]'=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}x^{n-1}=\frac{x}{1+x},x\in\left(-1,1\right)$，

所以 $f\left(x\right)=\int_0^x f'\left(t\right)\mathrm{d}t+f\left(0\right)=\int_0^x\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t=x-\ln\left(1+x\right),x\in\left(-1,1\right)$，故

$S_2=f\left(1\right)=\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x-\ln\left(1+x\right)\right)=1-\ln 2$。

13. 考点定位】幂级数求收敛域；幂级数的性质；幂级数求和函数。

【解】令 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\cdot x^2\right|=\left|x^2\right|=x^2,$$

所以当 $x^2<1$，即 $-1<x<1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 绝对收敛；

当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 发散。

当 $x=-1$ 时数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(-1)^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{3n-2}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$ 收敛；

当 $x=1$ 时数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛，综上所述，该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$。

设幂级数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n},x\in[-1,1]$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}\mathrm{d}t==x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(-t^2\right)^{n-1}\mathrm{d}t=x\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=x\arctan x,x\in(-1,1)。$$

由于 $S(x)$ 在收敛域 $[-1,1]$ 上连续，所以 $S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x\arctan x=\dfrac{\pi}{4}$,

$S(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}S(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x\arctan x=\dfrac{\pi}{4}$。故 $S(x)=x\arctan x,x\in[-1,1]$。

14.【考点定位】莱布尼兹判别法；阿贝尔定理。

【答案】C

【解】由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $\{a_n\}$ 单调减小，所以由莱布尼兹判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛。又由于 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 无界，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处发散，从而由阿贝尔定理知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[0,2)$，故答案选（C）。

【注】作为选择题，本题可采用特例法，取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，则 $\{a_n\}$ 满足：

① $\{a_n\}$ 单调减小，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；　　② $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 无界。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n}\overset{t=x-1}{=}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$，易求得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$，所以 $-1\le x-1<1$，即 $0\le x<2$，故所求收敛域为 $[0,2)$。

15.【考点定位】幂级数求收敛域；幂级数求和函数。

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\dfrac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}x^{2(n+1)}\right|}{\left|\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}\right|}=x^2$，当 $x^2=1$ 得 $x=\pm1$，所以收敛半径 $R=1$。

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}$ 发散，故收敛域为 $(-1,1)$。

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n},x\in(-1,1)$，由于 $\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}=(2n+1)+\dfrac{2}{2n+1}$，

所以 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n}=S_1(x)+2S_2(x)$，

其中 $S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n},S_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n}$。

下面分别求 $S_1(x)$ 和 $S_2(x)$：

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},$$

当 $x\neq0$ 时，

$$\begin{aligned}S_2(x)&=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\right)dt=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\&=\frac{1}{2x}\left(\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^x\right)=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，由 $S_2(x)=1+\dfrac{1}{3}x^2+\cdots$ 知 $S_2(0)=1$。

故 $$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 3, & x=0。\end{cases}$$

16.【考点定位】绝对收敛与条件收敛的概念；比较审敛法极限形式；莱布尼兹判别法。

【答案】D

【解】由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$收敛，由于$\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\sim\sqrt{n}\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$，由比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$收敛，从而$\alpha-\frac{1}{2}>1$，解得$\alpha>\frac{3}{2}$。由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛知$0<2-\alpha\le 1$，解得$1\le\alpha<2$。所以，$\frac{3}{2}<\alpha<2$。故答案选（D）。

【注】以下结论同学们需要熟练掌握：设p为常数，则：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$发散$\Leftrightarrow p\le 0$;（ii）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$条件收敛$\Leftrightarrow 0<p\le 1$;

（iii）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$绝对收敛$\Leftrightarrow p>1$。

17.【考点定位】比较判别法；p级数；莱布尼兹判别法。

【答案】D

【解】对于交错级数，我们有莱布尼兹判别法：

$$\{a_n\}\text{单调递减且}\lim_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0。\text{反之都不真。}$$

对于选项(A):缺少条件必要条件$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,例如取$a_n=\frac{1}{n}+1$，满足$a_n>a_{n+1}$,但

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+(-1)^{n-1}\right]$，所以(A)错误。

对于选项(B)：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$，得不到结论$a_n>a_{n+1}$。例如，取正项级数$a_n=\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，但

$a_1=0,a_2=\frac{3}{4},a_3=\frac{2}{9},a_4=\frac{5}{16},\cdots$显然不单减。所以（B）错误。

对于选项（C）：取$a_n=\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln^2(x+1)}$同敛散。由于

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{1}{\ln 2}$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。但当$p>1$时，

$\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^p\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{n^{p-1}}{\ln^2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{p-1}}{\ln^2(n+1)}=\infty$。所以(C)错误。

对于选项（D）：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，且$p>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，如果$\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$存在，

由比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故（D）正确。

综上所述，答案选(D)。

18.【考点定位】收敛级数的必要条件；夹逼准则；比较审敛法；比较审敛法的极限形式；

（I）【证明】由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由级数收敛的必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。下面采用三种方法证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$：

方法一：

由于$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$，所以$0<a_n=\cos a_n-\cos b_n\le 1-\cos b_n$。又因为$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\cos b_n)=0$，故夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

方法二：

由$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$知$0<\cos a_n<1,0<\cos b_n<1$，又由$\cos a_n-a_n=\cos b_n$可知

$\cos b_n\le\cos a_n$。因为$\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，故$0<a_n<b_n<\frac{\pi}{2}$。故由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

方法三：利用反函数的连续性。

记$y=f(x)=\cos x-x$，由于$f'(x)=-\sin x-1\le 0,$所以$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递减且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，因此$y=f(x)$存在反函数$x=f^{-1}(y)$，且反函数在$(-\infty,+\infty)$内连续。又因为$f(0)=1$，所以$f^{-1}(1)=0$。由$\cos a_n-a_n=\cos b_n$得$f(a_n)=\cos b_n$，所以$a_n=f^{-1}(\cos b_n)$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f^{-1}(\cos b_n)=f^{-1}(1)=0$。

（2） 方法一：由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2\left(1-\cos b_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2\left(1-\left(\cos a_n-a_n\right)\right)}\overset{\text{归结原则}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2\left(1-\cos x+x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\left(\sin x+1\right)}=\frac{1}{2},$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，故由比较审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛。（这里用到了等价无穷小$2\left(1-\cos b_n\right)\sim b_n^2$）

方法二：由于$a_n\to 0,b_n\to 0\left(n\to\infty\right)$，所以由泰勒公式可得：

$$\cos a_n-a_n=1-\frac{a_n^2}{2}+o\left(a_n^2\right)-a_n=1-a_n+o\left(a_n\right),\cos b_n=1-\frac{b_n^2}{2}+o\left(b_n^2\right)。$$

代入等式$\cos a_n-a_n=\cos b_n$得，$1-a_n+o\left(a_n\right)=1-\frac{b_n^2}{2}+o\left(b_n^2\right)$，从而

$a_n+o\left(a_n\right)=\frac{b_n^2}{2}+o\left(b_n^2\right)$。又由于$a_n+o\left(a_n\right)\sim a_n,\frac{b_n^2}{2}+o\left(b_n^2\right)\sim\frac{b_n^2}{2}$，所以

$a_n\sim\frac{b_n^2}{2}$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}{b_n}=\frac{1}{2}$，故由比较审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛。

方法三：由$0<a_n<b_n<\frac{\pi}{2}$及$\cos a_n-a_n=\cos b_n$得

$$0<\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\frac{-\sin\xi_n\left(a_n-b_n\right)}{b_n}=\sin\xi_n\left(1-\frac{a_n}{b_n}\right)<\sin\xi_n<\xi_n<b_n,$$

且正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由比较审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛。

【注】在(I)的方法中，方法三具有一般性，请同学们仔细体会如下结论：

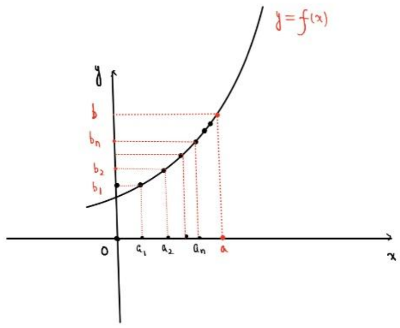
设函数$y=f\left(x\right)$在区间I上连续且单调，其值域为J，$b=f\left(a\right)$，$\left\{a_n\right\}\subset I,b_n=f\left(a_n\right)$。

则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的充要条件为$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$。(如图所示)

事实上，当$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$时，由$y=f\left(x\right)$连续可知，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(a_n\right)=f\left(a\right)=b$。

反之，当$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$时，由函数$y=f\left(x\right)$在区间$I$上连续且单调知，$y=f\left(x\right)$有反函

$x=f^{-1}\left(y\right)$且反函数连续，从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f^{-1}\left(b_n\right)=f^{-1}\left(b\right)=a$。故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$。



19.【考点定位】拉格朗日中值定理；比较审敛法；绝对收敛的概念；等比级数；数列与级数的关系。

【证明】（I）因为 $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$，所以 $x_{n+1}-x_n=f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right),(n=2,3\cdots)$，由拉格朗日中值定理可知，$\exists\xi_n$ 介于 x_{n-1} 与 x_n 之间，使得 $f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)=f'\left(\xi_n\right)\left(x_n-x_{n-1}\right)$，所以

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|f'\left(\xi_n\right)\left(x_n-x_{n-1}\right)\right|=\left|f'\left(\xi_n\right)\right|\left|x_n-x_{n-1}\right|,(n=1,2\cdots),$$

因为 $f'(x)<\dfrac{1}{2}$, 所以 $\left|x_{n+1}-x_n\right|\le\dfrac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|,n=(1,2\cdots)$, 从而有

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|\le\frac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left|x_{n-1}-x_{n-2}\right|\le\cdots\le\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{n-1\text{个}}\left|x_2-x_1\right|=\frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|,$$

又因为等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|x_{n+1}-x_n\right|$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$ 绝对收敛。

（II）由（I）可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$ 收敛，则它的部分和数列 $\left\{s_n\right\}$ 收敛, 因为部分和

$$s_n=\left(x_2-x_1\right)+\left(x_3-x_2\right)+\cdots+\left(x_{n+1}-x_n\right)=x_{n+1}-x_1,$$

则 $x_{n+1}=x_1+s_n$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1+s_n\right)=x_1+\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在。

以下证明 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由 $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)$，即 $a=f(a)$, 由拉格朗日中值定理可知, $\exists\xi$ 介于 a 与 0 之间, 使得 $a-1=f(a)-f(0)=f'(\xi)a$, 所以 $a=\dfrac{1}{1-f'(\xi)}$。因为 $0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}<1-f'(\xi)<1$，从而 $1<a<2$，故 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$。

【注】此题的命题背景是所谓的压缩映射，同学们有必要做些了解：

①定义：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足：$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty)$，有 $\left|f(x')-f(x'')\right|\le q\left|x'-x''\right|$，其中

$0\le q<1$为常数，则称$f\left(x\right)$为压缩映射。显然，压缩映射必为连续函数。

例如，$f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}x+3$满足$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|x'-x''\right|$,所以$f\left(x\right)$是压缩映射；$g\left(x\right)=\dfrac{2}{3}\sin x$满足$\left|g\left(x'\right)-g\left(x''\right)\right|=\dfrac{2}{3}\left|\sin x'-\sin x''\right|\overset{\text{中值定理}}{=}\dfrac{2}{3}\left|\cos\xi\cdot\left(x'-x''\right)\right|\le\dfrac{2}{3}\left|x'-x''\right|$，所以$g\left(x\right)$是压缩映射。

②（$f\left(x\right)$为压缩映射的充分条件）若$\left|f'\left(x\right)\right|\le q<1,x\in\left(-\infty,+\infty\right)$，其中$q$为常数，则$f\left(x\right)$为压缩映射。事实上，$\forall x',x''\in\left(-\infty,+\infty\right)$，有$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|\overset{\text{中值定理}}{=}\left|f'\left(\xi\right)\cdot\left(x'-x''\right)\right|\le q\left|x'-x''\right|$，所以$f\left(x\right)$是压缩映射。

③压缩映射存在唯一的不动点，即存在唯一的$a\in\left(-\infty,+\infty\right)$，使得$f\left(a\right)=a$，或者说曲线$y=f\left(x\right)$与$y=x$有且仅有一个交点。下面我们利用本题中所给出的方法证明该结论:

先证存在性：任取$x_0\in\left(-\infty,+\infty\right)$，令$x_{n+1}=f\left(x_n\right)\left(n=0,1,2,\cdots\right)$，则

$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|f'\left(\xi_n\right)\left(x_n-x_{n-1}\right)\right|\le q\left|x_n-x_{n-1}\right|\left(n=1,2,3,\cdots\right)$，从而

$\left|x_n-x_{n-1}\right|\le q\left|x_{n-1}-x_{n-2}\right|\le q^2\left|x_{n-2}-x_{n-3}\right|\le\cdots\le q^{n-1}\left|x_1-x_0\right|,\left(n=1,2,3,\cdots\right)$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|x_n-x_{n-1}\right|$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_n-x_{n-1}\right)$收敛。设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_n-x_{n-1}\right)=s$，则

$s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_n-x_{n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(x_1-x_0\right)+\left(x_2-x_1\right)+\cdots+\left(x_n-x_{n-1}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-x_0\right)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-x_0$，故

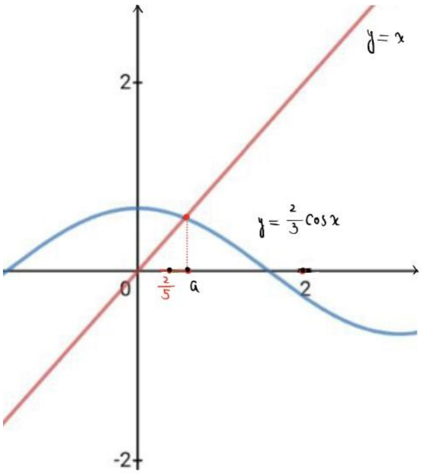
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=s+x_0$，记$a=s+x_0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，也就是说数列$\left\{x_n\right\}$是收敛的。再由$x_{n+1}=f\left(x_n\right)$两边取极限得$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)$，所以$f\left(a\right)=a$，即$x=a$为函数$f\left(x\right)$的不动点。

再证唯一性：设$f\left(a'\right)=a'$，则$\left|a'-a\right|=\left|f\left(a'\right)-f\left(a\right)\right|\le q\left|a'-a\right|$,从而$\left(1-q\right)\left|a'-a\right|\le 0$,由于$\left(1-q\right)>0$,所以$\left|a'-a\right|=0$,即$a'=a$。综上所述，压缩映射$f\left(x\right)$存在唯一的不动点。

④当$\left|f'\left(x\right)\right|\le q<1,x\in\left(-\infty,+\infty\right)$时，仿照（II）中的方法可以给出$f\left(x\right)$的不动点的范围估计。

由$a=f\left(a\right)$得$a-f\left(0\right)=f\left(a\right)-f\left(0\right)=f'\left(\xi\right)\left(a-0\right)=f'\left(\xi\right)a$，所以$a=\dfrac{f\left(0\right)}{1-f'\left(\xi\right)}$。又因为$\left|f'\left(\xi\right)\right|\le q$,即$-q\le f'\left(\xi\right)\le q$,所以$a\in\left[\dfrac{f\left(0\right)}{1+q},\dfrac{f\left(0\right)}{1-q}\right]$或者$a\in\left[\dfrac{f\left(0\right)}{1-q},\dfrac{f\left(0\right)}{1+q}\right]$。例如

$f(x)=\dfrac{2}{3}\cos x$ 满足 $\left|f'(x)\right|=\left|-\dfrac{2}{3}\sin x\right|\le\dfrac{2}{3}$，从而为压缩映射。又由于 $f(0)=\dfrac{2}{3}$，故其不动点 $a\in\left[\dfrac{f(0)}{1+q},\dfrac{f(0)}{1-q}\right]=\left[\dfrac{2}{5},2\right]$，如图所示:



图中 a 为不定点。

20.【考点定位】绝对收敛的概念；正项级数比较审敛法。

【答案】A

【解】方法一:因为

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|\left|\sin(n+k)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$,

所以由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|$ 收敛，即该级数绝对收敛，故答案选（A)。

方法二:

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\le\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\sim\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|$ 收敛，即该级数绝对收敛，

故答案选（A)。

21.【考点定位】收敛域；逐项求导；比值判别法；逐项积分；和函数连续性；比较判别法；等比级数。

【解】记 $u_n(x)=\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{x^{2n+4}}{(n+2)(2n+3)}}{\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}}\right|=x^2$，

由 $x^2<1$ 得 $|x|<1$ 时，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 收敛区间为 $(-1,1)$。

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$。

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)},x\in[-1,1]$，因为

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}\right]'=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}，\quad S''(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2},x\in(-1,1)，$$

所以 $S'(x)=\int_0^x S''(t)\mathrm{d}t+S'(0)=\int_0^x\dfrac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\left[\ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right|\right]\Bigg|_0^x=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，

$$\begin{aligned}S(x)&=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^x\ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t=\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}(1+t)+\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}(1-t)=\int_1^{1+x}\ln u\mathrm{d}u+\int_1^{1-x}\ln u\mathrm{d}u\\&=(u\ln u-u)\Big|_1^{1+x}+(u\ln u-u)\Big|_1^{1-x}=(1+x)\ln(1+x)-x+(1-x)\ln(1-x)+x\\&=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)。\end{aligned}$$

由于和函数 $S(x)$ 在收敛域 $[-1,1]$ 上连续，所以

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\left[(x+1)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)\right]=2\ln2,$$

$$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[(x+1)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)\right]=2\ln2，$$

故 $S(x)=\begin{cases}(x+1)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x),x\in(-1,1)\\2\ln2,x=\pm1\end{cases}$。

【注】在计算 $S(\pm1)$ 时，我们用到了如下常识的结果：

$$\lim_{t\to0^+}t\ln t=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{t^{-1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{t^{-1}}{-t^{-2}}=\lim_{t\to0^+}(-t)=0。$$

一般地，当 $\alpha>0$ 时 $\lim\limits_{t\to0^+}t^{\alpha}\ln t=0$。这个结果可以直接使用。

22【考点定位】数列的递推式；幂级数逐项求导；比值审敛法；可分离变量的微分方程；

【证明】(1)这里采用两种方法证明：

方法一：分析　同学们需要熟悉以下常识性结果：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径不小于 1 的充分条件为数列$\{|a_n|\}$有界，即存在常数$M>0$，使得$|a_n|\le M$。详见注。

利用数学归纳法证明$|a_n|\le 1, n=1,2,\cdots$

①当$n=0,1$时，$a_0=1,a_1=0$，结论显然成立；

②假设$n=k-1,k(k\ge 1)$时结论成立，则由$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$得

$$|a_{k+1}|=\frac{1}{n+1}|na_k+a_{k-1}|\le\frac{1}{n+1}\left(n|a_k|+|a_{k-1}|\right)\le\frac{1}{n+1}(n+1)=1,$$

即$n=k+1$时结论也成立。由归纳法知，$|a_n|\le 1, n=1,2,\cdots$

所以$\forall x\in(-1,1)$，有 $|a_n x^n|\le|x^n|$，由比较审敛法知$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$必收敛，故$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径不小于 1。

方法二：因为　$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$知$(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}$，变形得

$(n+1)(a_{n+1}-a_n)=-(a_n-a_{n-1})$，即$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=-\frac{1}{n+1}$，累乘得：

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\cdot\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}\cdots\cdot\frac{a_2-a_1}{a_1-a_0}=(-\frac{1}{n+1})\cdot(-\frac{1}{n})\cdots\cdot(-\frac{1}{2})=(-1)^n\frac{1}{(n+1)!},$$

从而 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1-a_0}=(-1)^n\frac{1}{(n+1)!}$。又$a_0=1,a_1=0$，所以$a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$，

再累加得：

$$(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_1-a_0)=(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}+(-1)^n\frac{1}{n!}+\cdots+(-1)\frac{1}{1!},$$

即
$$a_{n+1}=a_0+\frac{(-1)}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}=1+\frac{(-1)}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-1}。$$

由此可得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，从而幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径等于 1。

(2)因为$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$, 所以

$$(1-x)S'(x)=S'(x)-xS'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_n]x^n$$

又由于$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$，所以$(n+1)a_{n+1}-na_n=a_{n-1}$，故

$$(1-x)S'(x)=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=xS(x)\text{。}$$

即 $$(1-x)S'(x)-xS(x)=0,x\in(-1,1) \qquad ③\text{。}$$

记$y=S\left(x\right)$，则③变为$(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=0,x\in(-1,1)$，分离变量得$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x$，两边积分得

$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x$，解得$\ln|y|=-x-\ln(1-x)+c_1$，所以$y=\frac{c\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$，又由$S(0)=a_0=1$知$c=1$，故

$$S(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}\text{。}$$

【注】同学们需要熟悉以下常识性结果：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径不小于 1 的充分条件为数列$\{|a_n|\}$有界，即存在常数$M>0$，使得$|a_n|\le M$。事实上，当$|a_n|\le M$时，$\forall x\in(-1,1)$，有$|a_nx^n|\le M|x^n|$，由比较审敛法知$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$必收敛，故$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径不小于 1。

这个结论可以直接使用。

23.【考点定位】泰勒公式；比较审敛法。

【答案】C

【解】由于 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right),\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$，

所以 $\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right),\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$,

从而 $\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=(k+1)\frac{1}{n}+\frac{k}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

当 $k+1\neq0$ 时，$\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim\frac{k+1}{n}$，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 发散；

当 $k+1=0$ 时，$\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim\frac{-1}{2n^2}$，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛。

所以 $k+1=0$，即 $k=-1$，故答案选（C）。

24.【考点定位】函数展开成幂级数。（答案不对题！）

【解】由 $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$ 得，

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)。$$

又由于

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\left(\frac{1}{1-(-x)}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnx^{n-1},x\in(-1,1),$$

所以

$$\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n,x\in(-1,1)。$$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n,x\in(-1,1)$。

由展开式的唯一性得 $a_n=\begin{cases}(-1)^{2k-1+1}(2k-1+1),n=2k-1\\ \frac{(-1)^k2^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{2k+1}(2k+1),n=2k\end{cases}=\begin{cases}2k, & n=2k-1\\ \frac{(-1)^k2^{2k}}{(2k)!}-(2k+1),n=2k\end{cases}$。

或 $a_n=\begin{cases}n+1, & n=1,3,5,\ldots\\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}2^n}{n!}-(n+1),n=0,2,4,\cdots。\end{cases}$

25.【解析】条件收敛与绝对收敛；正项级数敛散性判别。

【答案】B

【解】对于选项(A)和(B)：

$\left|u_n v_n\right| = \left|nu_n \cdot \frac{v_n}{n}\right| = \left|\frac{v_n}{n}\right| \cdot \left|nu_n\right|$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_n}{n}\right| = 0$，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|u_n v_n\right|}{\left|nu_n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_n}{n}\right| = 0$。

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|nu_n|$ 收敛，所以由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$ 收敛，则（A）错误，（B）正确。

对于选项(C)和(D)：由 $\frac{\left|u_n\right|}{\left|nu_n\right|} \to 0$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|nu_n|$ 收敛知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；但 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 可能收敛也可能发散，例如取 $v_n = (-1)^n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，取 $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}(n \geq 2), v_1 = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ 条件收敛，同时 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 也收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 可能收敛也可能发散，所以（C），（D）都错误。综上所述，答案选（B）。

26.【考点定位】阿贝尔定理。

【答案】A

【解】由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛区间为 $(-R,R)$，所以由阿贝尔定理知，当 $r \in (-R,R)$ 时，

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n r^n\right| = \left|a_1 r\right| + \left|a_2 r^2\right| + \left|a_3 r^3\right| + \cdots + \left|a_n r^n\right| + \cdots$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{2n} r^{2n}\right| = \left|a_2 r^2\right| + \left|a_4 r^4\right| + \left|a_6 r^6\right| + \cdots$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛，即 $r \in (-R,R) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散 $\Rightarrow |r| \geq R$。

因此答案选（A）。

【注】当 $|r| \geq R$ 时，$\sum a_{2n}r^{2n}$ 可能收敛也可能发散。特别地，当 $|r| = R$ 时，$\sum a_{2n}r^{2n}$ 可能收敛也可能发散。

27.【考点定位】收敛半径的概念；比较判别法；收敛区间的概念；级数收敛的必要条件。

【答案】B

【解】方法一：

由 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n t^n$ 的收敛半径 $R=4$。由于幂级数逐项求导或积分不

改变收敛半径，而 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n t^n = t\sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1} = t\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n\right)'$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 收敛半径也为 $R=4$。

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x+1\right)^{2n} \overset{t=(x+1)^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$，故 $|x+1|<2$，解得收敛区间为 $-3<x<1$，即所求收敛区间为 $\left(-3,1\right)$。故答案选（B）。

方法二：特例法。作为选择题，有些情形下可以使用特例法得到正确的选项。

由 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \left(x-2\right)^n$ 的收敛区间为 $\left(-2,6\right)$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n t^n$ 的收敛半径 $R=4$，因此可以取

$na_n=\frac{1}{4^n}$，即 $a_n=\frac{1}{n\cdot 4^n}$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x+1\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 4^n}\left(x+1\right)^{2n}$ 此时

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 4^n}\left(x+1\right)^{2n}}=\frac{\left(x+1\right)^2}{4} \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot 4^{n+1}}\left(x+1\right)^{2(n+1)}}{\frac{1}{n\cdot 4^n}\left(x+1\right)^{2n}}=\frac{\left(x+1\right)^2}{4},$$

由 $\frac{\left(x+1\right)^2}{4}<1$ 解得 $-3<x<1$，即所求收敛区间为 $\left(-3,1\right)$。故答案选（B）。

28.【考点定位】收敛半径的求法；幂级数的性质；可分离变量的微分方程。

【证明】由 $\left(n+1\right)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$，所以 $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1,$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{l}=1$，从而当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛。

下面求和函数：记 $y=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n x^n$$
$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=1+x\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)'+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=1+xy'+\frac{1}{2}y.$$

整理得 $(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\frac{1}{2}y$，所以 $\int\frac{\mathrm{d}y}{1+\frac{1}{2}y}=\int\frac{1}{1-x}$,从而 $2\ln|2+y|=-\ln|1-x|+c_1$，

所以 $\left(y+2\right)^2=\frac{c}{1-x}$，又由于 $x=0$ 时，$y=0$，故 $c=4$。从而 $\left(y+2\right)^2=\frac{4}{1-x}$，由于 a_1=1, 所以

$y'(0)=1,\ y=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}-2$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}-2,(-1<x<1)$。

【注】下面再向同学们介绍一种求此和函数的方法，以拓展同学们的思路：

$$(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}a_n\Rightarrow a_n=\frac{n-\frac{1}{2}}{n}a_{n-1}\Rightarrow a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$$

$$=\frac{n-\frac{1}{2}}{n}\cdot\frac{n-\frac{3}{2}}{(n-1)}\cdots\cdot\frac{\frac{3}{2}}{2}=2\left[\frac{n-\frac{1}{2}}{n}\cdot\frac{n-\frac{3}{2}}{(n-1)}\cdots\cdot\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1}\right]=2\frac{(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}=2\cdot(-1)^nC\left(-\frac{1}{2},n\right)$$

$$故\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=2\sum_{n=1}^{\infty}C\left(-\frac{1}{2},n\right)(-x)^n\overset{t=-x}{=}2\sum_{n=1}^{\infty}C\left(-\frac{1}{2},n\right)t^n=2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}C\left(-\frac{1}{2},n\right)t^n-1\right]$$

$$=2\left[(1+t)^{-\frac{1}{2}}-1\right]=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2,(-1<x<1)。$$

这里我们用到了基本的幂级数展开式：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C(\alpha,n)x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}C(\alpha,n)x^n,\quad(-1<x<1)。$$

其中α不为正整数。

29.【考点定位】二阶线性常系数齐次微分方程；反常积分；等比级数。

【解】（I）方程$y''+2y'+5y=0$的特征方程为$r^2+2r+5=0$，得特征根为$r_{1,2}=-1\pm 2i$，所以

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x),$$

$$从而\ f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[-(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+(-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x)\right]。$$

由于$f(0)=1,f'(0)=-1$，所以$\begin{cases}c_1=1\\2c_2-c_1=-1\end{cases}$，解得$c_1=1,c_2=0$，故所求的函数为

$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)$。

（II）先求a_n，这里我们采用两种方法。

方法一：$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x$。由于

$$\int\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x=\int\cos(2x)\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)=-\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)-2\int\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)+2\int\sin(2x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)+2\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)-4\int\cos(2x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x},$$

所以$\int \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)+c$，从而$a_n=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}\left(2\sin 2x-\cos 2x\right)\Big|_{n\pi}^{+\infty}=\frac{\mathrm{e}^{-n\pi}}{5}$。

方法二：由于$f(x)$满足$y''+2y'+5y=0$，所以$f\left(x\right)=-\frac{1}{5}\left[f''\left(x\right)+2f'\left(x\right)\right]$，从而

$$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\int_{n\pi}^{+\infty}\left[f''\left(x\right)+2f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\left[f'\left(x\right)+2f\left(x\right)\right]\Big|_{n\pi}^{+\infty}$$

由$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos\left(2x\right),f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[-\cos\left(2x\right)-2\sin\left(2x\right)\right]$，知$f(+\infty)=0,f'(+\infty)=0$，所以

$$a_n=-\frac{1}{5}\left[f'\left(x\right)+2f\left(x\right)\right]\Big|_{n\pi}^{+\infty}=\frac{1}{5}\left[f'\left(n\pi\right)+2f\left(n\pi\right)\right]=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}。$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{1}{5}\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{1}{5(\mathrm{e}^{\pi}-1)}$。

30.【考点定位】函数项级数的运算；等比级数；幂级数的性质；和函数的连续性。

【解】$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-nx}+\frac{1}{n\left(n+1\right)}x^{n+1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}x^{n+1}$。

设$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$，这是公比为$\mathrm{e}^{-x}$的等比级数，从而$\mathrm{e}^{-x}<1$即$x>0$时，$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}$收敛，

$$且S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1},\left(x>0\right)。$$

设$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$，由于$l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right|=1$，所以$S_2(x)$的收敛半径为 $R=\frac{1}{l}=1$。

$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛；$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n(n+1)}$收敛。故幂级数

$S_2\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$的收敛域为$[-1,1]$，由此可得$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域为$(0,+\infty)\cap[-1,1]=(0,1]$。

$$S_2'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

$$S_2''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},x\in\left(-1,1\right),$$

所以 $S_2'(x)=\int_0^x S_2''(t)\mathrm{d}t+S_2'(0)=\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+0=-\ln(1-x)$，

$$S_2(x)=\int_0^x S_2'(t)\mathrm{d}t+S_2(0)=\int_0^x -\ln(1-t)\mathrm{d}t=-t\ln(1-t)\Big|_0^x-\int_0^x \frac{t}{1-t}\mathrm{d}t$$
$$=-x\ln\left(1-x\right)-\int_0^x\left[-1+\frac{1}{1-t}\right]\mathrm{d}t=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)=(1-x)\ln(1-x)+x,x\in\left(-1,1\right)$$

由于 $S_2(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以 $S_2(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S_2(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)+x\right]=1$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(1)=S_1\left(1\right)+S_2\left(1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}-1}+1=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}。$$

综上所述，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}+(1-x)\ln(1-x)+x,x\in(0,1)\\ \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},x=1\end{cases}$。

【注】对于 $S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 我们还有如下求法:

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$
$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-x\right)=\left(x-1\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n+x,$$

由于 $\ln\left(1-x\right)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，所以 $S_2(x)=\left(x-1\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n+x=\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)+x$。

31.【考点定位】可分离变量的微分方程；幂级数的收敛域；幂级数求和函数。

【解】(1) 由 $xy_n'-\left(n+1\right)y_n=0$ 得 $\frac{\mathrm{d}y_n}{y_n}=\frac{(n+1)}{x}\mathrm{d}x$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}y_n}{y_n}=\int\frac{n+1}{x}\mathrm{d}x，所以\ \ln\left|y_n\right|=(n+1)\ln\left|x\right|+c_1，$$

故 $y_n\left(x\right)=cx^{n+1}$。又由于 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$，所以 $c=\frac{1}{n(n+1)}$，因此 $y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$，由 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1$ 得收敛半径 $R=\frac{1}{l}=1$。

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛；当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛。

故所求收敛域为 $[-1,1]$。记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1},x\in[-1,1]$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1),$$

所以
$$S'(x)=\int_0^x S''(t)\mathrm{d}t+S'(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x),$$

$$\begin{aligned}S(x)&=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^x-\ln(1-t)\mathrm{d}t=\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}(1-t)\overset{u=1-t}{=}\int_1^{1-x}\ln u\mathrm{d}u=\left(u\ln u-u\right)\Big|_1^{1-x}\\&=\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)+x,\quad x\in\left(-1,1\right)。\end{aligned}$$

由 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续可知，$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\left[(1-x)\ln(1-x)+x\right]=1,$

$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[(1-x)\ln(1-x)+x\right]=2\ln2-1$。

故 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n\left(x\right)=\begin{cases}\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)+x, x\in\left[-1,1\right),\\1, \quad x=1。\end{cases}$。