专题 1　函数、极限与连续

（A 组）基础题

1.【考点定位】极限的四则运算法则；左、右极限；重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty,\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$。

【解】记 $f\left(x\right)=\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{x},x>0\\ \dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x},x<0\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}\right)-\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=2-1=1,$

且

$$\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}}}{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+1}\right)+1=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1}\right)+1=0+1=1,$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1。$$

【注】在求 $\lim\limits_{x\to0^{\pm}}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}$ 时，可以用如下换元法：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}\xlongequal{u=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2+u}{1+u^4}=0;\lim_{x\to0^-}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}\xlongequal{u=e^{\frac{1}{x}}}\lim_{u\to0}\frac{2+u}{1+u^4}=2.$$

2.【考点定位】两边夹(夹逼)准则；极限的四则运算法则。

【答案】D

【解】$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)\Leftrightarrow 0\le f(x)-\varphi(x)\le g(x)-\varphi(x)$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x)-\varphi(x)\right)=0$，所以由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=0$。

当 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=A$ 时，

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(f(x)-\varphi(x)\right)+\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\varphi(x)\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0+A=A;$

当 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(f(x)-\varphi(x)\right)+\varphi(x)\right]$ 不存在。

综上所述，答案选(D)。

3.【考点定位】斜渐近线方程；泰勒公式。

【答案】$y=2x+1$

【解】方法一：由于

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left((2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2x\cdot\frac{1}{x}\right)-1=2-1=1。$$

故斜渐近线方程为 $y=2x+1$。

方法二：当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to 0$，从而 $e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$，

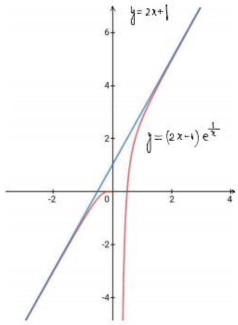
所以

$$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}=(2x-1)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2x+1+\left(-\frac{1}{x}+2x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2x+1+\alpha$$

由于当 $x\to\infty$ 时，$-\frac{1}{x}\to 0, 2x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)=2\cdot\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\to 0$，所以 $\alpha=-\frac{1}{x}+2x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$

故斜渐近线方程为 $y=2x+1$。

【注】①为了方便同学们理解，我们画出该函数及其斜渐近线的图像，如图?。



图?

②这里我们对方法二说明如下:

当 $x\to\infty$ 时，曲线 $y=f\left(x\right)$ 以 $y=kx+b$ 为斜渐近线 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx-b\right)=0$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)-kx-b=\alpha \Leftrightarrow f\left(x\right)=kx+b+\alpha$，这里 $\alpha\to 0$。

所以，我们只要将 $y=f\left(x\right)$ 改写为 $f\left(x\right)=kx+b+\alpha$，其中当 $x\to\infty$ 时，$\alpha\to 0$，就说明了斜渐近线为 $y=kx+b$。这是一种求斜渐近线及水平渐近线的重要方法。

4.【考点定位】分子有理化；极限的四则运算法则；洛必达法则。

【答案】$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【解】方法一：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2x+1}=\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{6}。$$

方法二：分子有理化

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(x^2+x-2\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(1-x\right)}{\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-2\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(x+2\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{-2}{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

5.【考点定位】无穷小的比较；等价无穷小替换。

【答案】B

【解】当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim \frac{1}{2}x^2\cdot x^2=\frac{1}{2}x^4$；$x\sin(x^n)\sim x\cdot x^n=x^{n+1}$；$\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$。由题设可得，$4>n+1>2$，所以正整数 $n=2$。

故答案选（B）。

6.【考点定位】等价无穷小替换。

【答案】$\frac{1}{1-2a}$

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n(1-2a)+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}。$$

7.【考点定位】单调有界法则。

【解】因为

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\frac{x_n+(3-x_n)}{2}=\frac{3}{2},(n=1,2,\ldots),$$

所以数列 $\{x_n\}$ 有上界。因为

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}},(n=2,3,\ldots)$$

其中 $0<x_1<3$，$0<x_{n+1}\le\frac{3}{2},(n=1,2,\ldots)$。

所以 $$x_{n+1}-x_n=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\ge 0,(n=1,2,\ldots)。$$

即数列 $\{x_n\}$ 当 $n\ge 2$ 时单调递增且有上界，故由单调有界法则可知数列 $\{x_n\}$ 的极限存在。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)}$$

所以$l=\sqrt{l(3-l)}$ ， 解得$l=\dfrac{3}{2}$或$l=0$，因为$x_n>0$，所以$l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ge x_2>0$

$$\text{因此 } l=\frac{3}{2}, \quad \text{故 } \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}。$$

【注】在此题中，证明数列$\{x_n\}$单调时，除了可以采用作差以外，还可以采用作商的方法：由于$0<x_n\le\dfrac{3}{2}(n=2,3,\cdots)$，所以

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{(3-x_n)x_n}}{x_n}=\sqrt{\frac{3-x_n}{x_n}}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}\ge\sqrt{\frac{3}{\frac{3}{2}}-1}=1(n=2,3,\cdots),$$

故$0<x_n\le x_{n+1}(n=2,3,\cdots)$。

8.【考点定位】连续的概念；等价无穷小的替换。

【答案】-2

【解】因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{\frac{x}{2}}=-2,$$

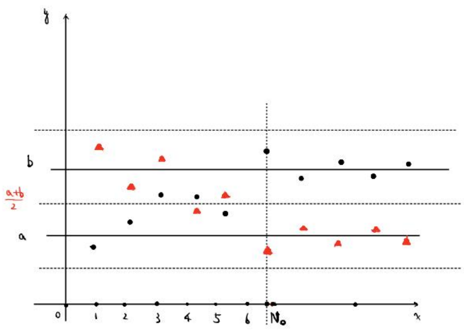
$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}ae^{2x}=a$，$f(0)=a$. 由于$f(x)$在$x=0$处连续，所以

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，即得$a=-2$。

9.【考点定位】极限的保序性；极限的四则运算；无穷大与无穷小的关系。

【答案】D

【解】我们回顾一下数列极限的保序性：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$a<b$，则存在正整数$N_0$，当$n>N_0$时，有$a_n<b_n$（如图？）。



图？

其中▲代表$\left(n,a_n\right)$，●代表$\left(n,b_n\right)$，存在N_0，当$n>N_0$时，$a_n<\dfrac{a+b}{2}<b_n$，从而$a_n<b_n$，但是当$n\le N_0$时，不一定有$a_n<b_n$。

对于选项(A) 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0<\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$可知，存在正整数$N_0$，当$n>N_0$时，有$a_n<b_n$成立，但是当$n\le N_0$时，不一定有$a_n<b_n$，例如$a_n=\dfrac{1}{n},b_n=1-\dfrac{2}{n}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，但$a_1>b_1,a_2>b_2$。所以（A）不正确。

对于选项(B) 由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1<\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$知，(注意，这里由$c_n$非负知$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$中的$\infty$为$+\infty$)存在正整数$N_0$，当$n>N_0$时，有$b_n<c_n$，但$n\le N_0$时，不一定有$b_n<c_n$成立。例如$b_n=1+\dfrac{2}{n}$，$c_n=n^2$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，但是$b_1>c_1$。所以（B）不正确。

对于选项(C) 当$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$是未定式，有可能存在，也有可能不存在。例如，取$a_n=\dfrac{1}{n}\to 0,c_n=n\to\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$；取$a_n=\dfrac{1}{n}\to 0$，$c_n=n^2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot c_n=\infty$（不存在）。所以（C）不正确。

对于选项(D) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_nc_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{c_n}=1\times 0=0$得$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$。

综上所述，答案选（D）。

10.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；等价无穷小替换。

【答案】$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}\ln\cos x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(\cos x-1\right)\right]}{\ln\left(1+x^2\right)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。

11.【考点定位】无穷小的比较；等价无穷小替换。

【答案】-4

【解】方法一：$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\dfrac{1}{4}a$，所以$a=-4$。

方法二：因为当$x\to 0$时，$\left(1-ax^2\right)^{\frac{1}{4}}-1\sim\dfrac{1}{4}\left(-ax^2\right)$，$x\sin x\sim x^2$，由题

设可知，$-\dfrac{a}{4}=1$，所以 $a=-4$。

12.【考点定位】无穷大与无界的关系；连续函数的性质。

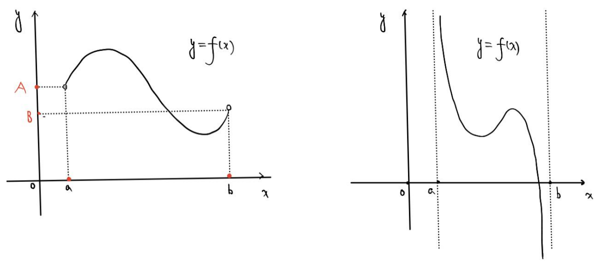
【答案】A

【解】我们常用以下方法判断 $f(x)$ 在开区间内的有界性：

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界；

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界。

如图？：



图？

因为 $$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}=-\frac{1}{18}\sin3,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{1}{4}\sin2,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{1}{4}\sin2,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}=-\sin1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}=-\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=-\infty,$$

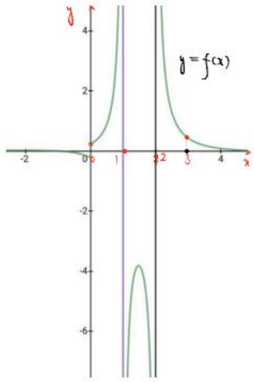
$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-2)}{(x-2)^2}\cdot\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)}{(x-2)^2}\cdot\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to3^-}\frac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{1}{2}\sin1。$$

故答案选（A）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图？。



图？

13.【考点定位】等价无穷小替换。

【答案】$a=1$，$b=-4$。

【解】由 $5=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)$ 且 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x-b)\sin x=0$ 知 $\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=1-a=0,$ 解得 $a=1$。将 $a=1$ 代入上述极限，得

$$5=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}(\cos x-b)=1-b。$$

解得 $b=-4$。综上所述，$a=1$，$b=-4$。

【注】$\lim\limits_{x\to\bullet}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to\bullet}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\bullet}g(x)=\lim\limits_{x\to\bullet}\frac{f(x)}{\left(f(x)/g(x)\right)}=\frac{0}{A}=0$。

14.【考点定位】连续的概念；间断点的分类。

【答案】D

【解】
$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}f(\frac{1}{x})\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim_{u\to\infty}f(u)=a。$$

（1）当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0=g(0)$。此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

（2）当 $a\neq0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=a\neq0=g(0)$。此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 点不连续。

故 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值相关。

故答案选（D）。

15.【考点定位】幂指函数的变形：$u^v = \mathrm{e}^{v\ln u}$；等价无穷小替换。

【解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}} - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{2+\cos x}{3}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x - 1}{3}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}\text{。}$$

16.【考点定位】斜渐近线方程； 泰勒公式。

【答案】$y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$

【解】方法一：因为

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - 2x^2 - x}{2(2x+1)}$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x+2} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4+\dfrac{2}{x}} = -\frac{1}{4}\text{。}$$

所以斜渐近线方程为 $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$。

方法二：：我们用两种方式将 $y = \dfrac{x^2}{2x+1}$ 改写为 $y = kx + b + \alpha$ 的形式，其中

$\alpha \to 0, (x\to\infty)$。

方式 1：当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+1} = x\cdot\frac{x}{2x+1} = \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{2x}} = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{2x}\right)\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{x}{2}o\left(\frac{1}{2x}\right),$$

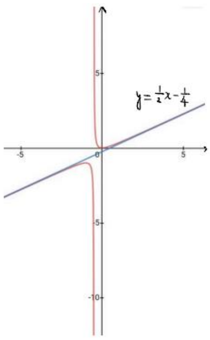
记$\alpha=\frac{x}{2}\cdot o\left(\frac{1}{2x}\right)$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\cdot o\left(\frac{1}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{o\left(\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{2x}}=0$，从而

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\alpha\text{。}$$

方式 2：$y=\frac{x^2}{2x+1}=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1/4}{2x+1}$，其中$\alpha=\frac{1/4}{2x+1}\to 0,(x\to\infty)$

故曲线$f(x)=\frac{x^2}{2x+1}$的斜渐近线方程为$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数及其斜渐近线的图像，如图?。



图?

17.【考点定位】斜渐近线方程；泰勒公式。

【答案】$y=x+\frac{3}{2}$

【解】方法一：

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left((1+\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}-1\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\text{。}$$

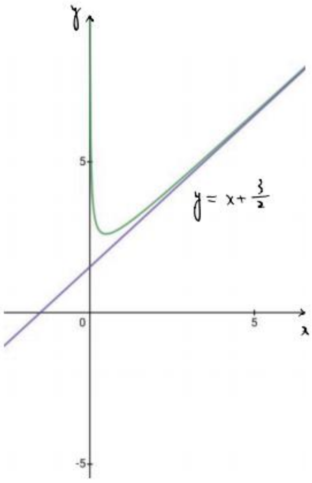
所以该曲线斜渐近线方程为$y=x+\frac{3}{2}$。

方法二：当 $x\to+\infty$ 时

$$y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{x^{\frac{3}{2}}(1+\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=x(1+\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}=\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})\right)=x+\frac{3}{2}+\alpha$$，其中

$\alpha=x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)=0$，故该曲线的渐近线方程为 $y=x+\frac{3}{2}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数及其斜渐近线的图像，如图？。



图？

18.【考点定位】等价无穷小替换。

【答案】2

【解】因为当 $x\to\infty$ 时，$\frac{2x}{x^2+1}\to 0$，所以 $\sin\frac{2x}{x^2+1}\sim\frac{2x}{x^2+1}$。

于是 $$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}=2$$。

19.【考点定位】间断点的分类。

【答案】D

【解】$f(x)$ 在 $x=0,1$ 处无定义，在其余点处 $f(x)$ 连续。

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}\overset{u=\frac{x}{x-1}}{=}\lim\limits_{u\to0}\frac{1}{e^u-1}=\infty$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。

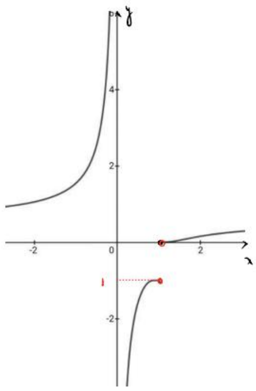
又 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}\overset{u=\frac{x}{x-1}}{=}\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{1}{e^{u}-1}$，其左、右极限分别为

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{e^{u}-1}=-1，\ \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{e^{u}-1}=0$$

从而 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃间断点）。

综上所述，答案选（D）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图？。



图？

20.【考点定位】等价无穷小替换

【答案】2

【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$ 。

21.【考点定位】$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$；等价无穷小替换；无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量；幂指函数极限公式：$\lim u^{v}=e^{\lim v\ln u}$。

【答案】1

【解】方法一：记 $x_n=(\dfrac{n+1}{n})^{(-1)^n}$，则

$$x_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\begin{cases}\dfrac{2k+1}{2k}, & n=2k\\ \left(\dfrac{2k-1+1}{2k-1}\right)^{-1}, & n=2k-1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2k+1}{2k}, & n=2k\\ \dfrac{2k-1}{2k}, & n=2k-1\end{cases}。$$

且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2k+1}{2k}=1,\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2k-1}{2k}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n})^{(-1)^n}=1$。

方法二：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}}=1$。

22.【考点定位】水平渐近线方程；无穷小与有界量的乘积仍为无穷小。

【答案】$y=\dfrac{1}{5}$

【解】由于 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{4\sin x}{x}}{5-\dfrac{2\cos x}{x}}$。又当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，

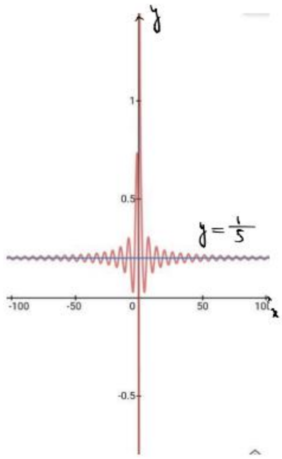
$|4\sin x|\le 4$，$|2\cos x|\le 2$，从而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(4\sin x)\right]=0,\lim_{x\to\infty}\frac{2\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(2\cos x)\right]=0$$ ，于是

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin x}{x}}{5-\dfrac{2\cos x}{x}}=\frac{1+0}{5-0}=\frac{1}{5}\text{。}$$

所以曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{5}$。

【注】①为了方便同学们理解，我们画出该函数及其水平渐近线的图像，如图？。



图？

②同学们可能会想到使用洛必达法则计算

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1+4\cos x}{5+2\sin x}$$

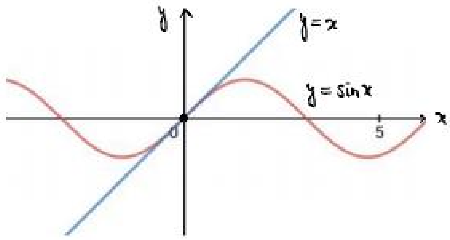
由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4\sin x}{5+2\cos x}$ 不存在，所以这里不能使用洛必达法则。

23.【考点定位】单调有界法则；数学归纳法；幂指函数极限公式：$\lim u^{v}=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；等价无穷小替换；泰勒公式；归结原理。

分析：由$0<x_1<\pi$及递推式$x_{n+1}=\sin x_n$，我们不难看出

$$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi,0<x_3=\sin x_2<x_2<\pi,\cdots$$

这里我们利用了一个常用且重要的常识性结果：当$x>0$时，$x>\sin x$（如图）



图?

因此，我们猜测$\{x_n\}$单调递减有下界 0.

（1）【证明】利用数学归纳法证明:$0<x_{n+1}<x_n<\pi(n=1,2,\cdots)$。

① 当$n=1$时，由于$0<x_1<\pi$，所以$x_2=\sin x_1<x_1<\pi$, 且$x_2=\sin x_1>0$，从而

$$0<x_2<x_1<\pi;$$

② 假设当$n=k$时，$0<x_{k+1}<x_k<\pi$成立，则当$n=k+1$时，由$0<x_{k+1}<\pi$可得

$$x_{k+2}=\sin x_{k+1}<x_{k+1}<\pi, 且\ x_{k+2}=\sin x_{k+1}>0，从而\ 0<x_{k+2}<x_{k+1}<\pi。$$

由数学归纳法可知：$0<x_{n+1}<x_n<\pi(n=1,2,\cdots)$成立。

因为数列$\{x_n\}$单调递减且有下界，所以由单调有界法则可知数列$\{x_n\}$的极限存在，设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

在$x_{n+1}=\sin x_n$两边同时取极限

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sin x_n，得\ a=\sin a,$$

所以$a=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

（2）【解】 由于$x_{n+1}=\sin x_n$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，所以由归结原理知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{\sin x - x}{x}}$$

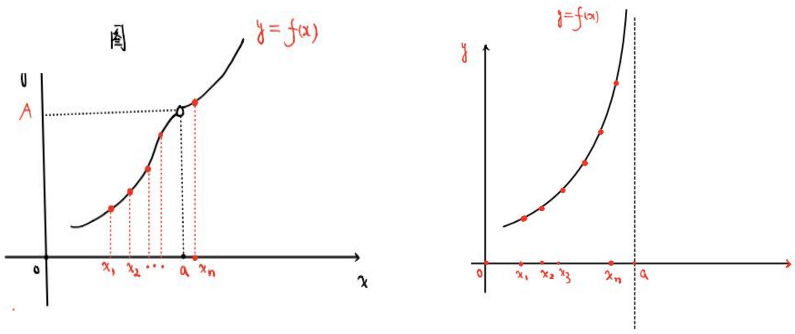
$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x^3}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}。$$

【注】这里归结原理是指：若① $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A(\infty)$；② $x_n \to a, (n\to\infty)$，且 $x_n \neq a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A(\infty)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$。这样数列的极限就归结为函数的极限来求。

如图？所示：



（a）： $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的情形　　（b）： $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 的情形

图？

24.【考点定位】 洛必达法则；等价无穷小替换；泰勒公式。

【答案】$-\dfrac{1}{6}$

【解】方法一：洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} + \sin x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}}{6x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=-\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}。$$

方法二：泰勒公式

由于 $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right),\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)$，

所以 $\arctan x-\sin x=\left(x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right)=-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=-\frac{1}{6}。$$

25.【考点定位】间断点的分类；极限的四则运算法则；变量代换。

【答案】A

【解】在 $[-\pi,\pi]$ 上，$f(x)$ 无定义的点为 $x=-\frac{\pi}{2},0,1,\frac{\pi}{2}$，其余点处均连续。

因为 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=\frac{(e^{\frac{-2}{\pi}}+e)}{\frac{-\pi}{2}(e^{\frac{-2}{\pi}}-e)}\cdot\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty，$$

故 $x=-\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}$，

其中 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}\overset{u=e^{\frac{1}{x}}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u+e}{u-e}=1,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}\overset{u=e^{\frac{1}{x}}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{u+e}{u-e}=-1,$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点(跳跃间断点)；

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}\cdot\dfrac{\tan x}{x}\right)=\tan 1\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\infty$，

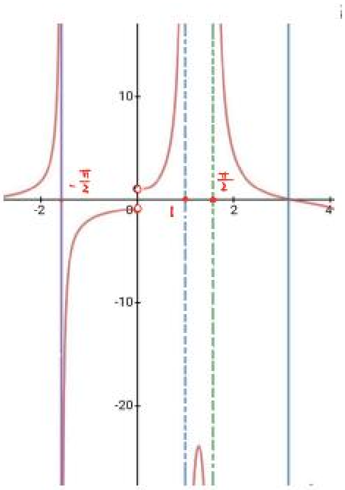
故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\dfrac{e^{\frac{2}{\pi}}+e}{\frac{\pi}{2}(e^{\frac{2}{\pi}}-e)}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，

故 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。

综上所述，答案选（A）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图？。



图？

26.【考点定位】无穷小的比较；等价无穷小替换；泰勒公式。

【答案】B

【解】对于选项(A)：当 $x\to 0^+$ 时，$1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}$ 。

对于选项(B)：

方法一：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}-\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0-(-1)=1。$$

方法二：当 $x\to 0^+$ 时

$$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)=[x+o(x)]-\left[-\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+o(x)\right]$$

$$=\sqrt{x}+\frac{3}{2}x+o(x)=\sqrt{x}+\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2+o\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)=\sqrt{x}+o\left(\sqrt{x}\right)\sim\sqrt{x}\ ;$$

方法三：当 $x\to 0^+$ 时

$$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\left[1+\left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1\right)\right]\sim\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1=\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\sqrt{x}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$$ 。（因为 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\to 1$）。

对于选项(C)：当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$ 。

对于选项(D)：当 $x\to 0^+$ 时，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x$ 。

综上所述，当 $x\to 0^+$ 时仅有 $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$ ，

故答案选（B）。

27.【考点定位】间断点的分类；等价无穷小替换；洛必达法则。

【答案】A

【解】$f(x)$ 在 $x=0,1$ 处无定义，在其余点处均连续。

由于
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\cdot\sin x=\lim_{x\to 0}x\ln|x|,$$

其中
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0\ ,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0,$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

由于

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\cdot\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{|x-1|}=\sin1\cdot\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{|x-1|}$$

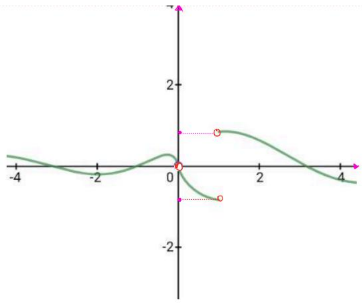
$$=\sin1\cdot\lim_{x\to1}\frac{x-1}{|x-1|},$$

其中 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\sin1\cdot\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=\sin1$， $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\sin1\cdot\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{-(x-1)}=-\sin1$ 。

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

故答案选（A）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图？。



图？

28.【考点定位】间断点的分类；变限积分求导；洛必达法则。

【答案】B

【解】因为 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，所以 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，

又因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点。故答案选(B)。

29.【考点定位】左、右极限；连续的概念。

【答案】1

【解】

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1,|x|\le c,\\ \dfrac{2}{|x|},|x|>c,\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{2}{x},x<-c,\\ x^2+1,-c\le x\le c,\\ \dfrac{2}{x},x>c.\end{cases}$$ 显然， $f(x)$ 在 $x\ne\pm c$ 处连续。

又由于

$$\lim_{x\to -c^-} f(x)=\lim_{x\to -c^-}\left(-\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{c},\lim_{x\to -c^+} f(x)=\lim_{x\to -c^+}\left(x^2+1\right)=c^2+1,\ f(-c)=c^2+1\text{；}$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^-}\left(x^2+1\right)=c^2+1,\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^+}\frac{2}{x}=\frac{2}{c},\ f(c)=c^2+1\text{。}$$

所以当且仅当 $\frac{2}{c}=c^2+1$ 时函数 $y=f(x)$ 在 $x=\pm c$ 处连续，故有

$$c^3+c-2=0,$$

由于 $c^3+c-2=\left(c^3-1\right)+\left(c-1\right)=(c-1)(c^2+c+1)+(c-1)=(c-1)(c^2+c+2)$，

所以 $(c^2+c+2)(c-1)=0$，又因为 $c^2+c+2=\left(c+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$，所以 $c=1$。

30.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则； 拉格朗日中值定理。

【答案】$\frac{3}{2}\mathrm{e}$

【解】方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\sin x}{\frac{2}{3}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cdot x}{\frac{2}{3}x}=\frac{3}{2}\mathrm{e}$。

方法二：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\left(\mathrm{e}^{1-\cos x}-1\right)}{\frac{1}{3}x^2}=3\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}\mathrm{e}$。

方法三：设 $f(t)=\mathrm{e}^t$，则 $f(t)$ 在 $\left[\cos x,1\right]$ 上连续可导，由拉格朗日中值定理可知 $\exists\xi\in\left(\cos x,1\right)$ 使 $f(1)-f(\cos x)=f'(\xi)\left(1-\cos x\right)$，即 $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}=\mathrm{e}^{\xi}\left(1-\cos x\right)$，由于 $\cos x<\xi<1$，故当 $x\to 0$ 时，$\xi\to 1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\xi}=\lim\limits_{\xi\to 1}\mathrm{e}^{\xi}=\mathrm{e}$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\xi}\left(1-\cos x\right)}{\frac{1}{3}x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}e\text{。}$$

31.【考点定位】间断点的分类；洛必达法则。

【答案】C

【解】当分母 $\sin\left(\pi x\right)$ 为零，即当 $x=k$（k 为整数）时，函数 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 无定义，

其余点均为连续点。

当分子 $x-x^3\neq 0$，即 $x\neq -1,0,1$ 时

$$\lim_{x\to k} f(x)=\lim_{x\to k}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\infty,\ k\neq -1,0,1\text{ 为整数},$$

故 $x=k$（$k\neq -1,0,1$,且 k 为整数）均为 $f(x)$ 的无穷间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\dfrac{2}{\pi}$，所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

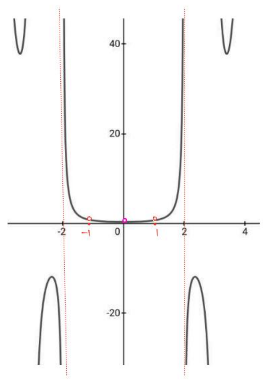
因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\dfrac{1}{\pi}$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\dfrac{2}{\pi}$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

综上所述，函数 $f(x)$ 有 3 个可去间断点，分别为 $-1,0,1$。

故答案选(C)

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图?



图?

32.【考点定位】间断点的分类。

【答案】B

【解】函数 $f(x)$ 在 $x=-1,0,1$ 处无定义，在其余点处均连续。

因为 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x+1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\infty$，所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点；

因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+1}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\cdot\dfrac{x}{|x|}$，

其中 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\cdot\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\cdot\dfrac{x}{-x}=-1$，

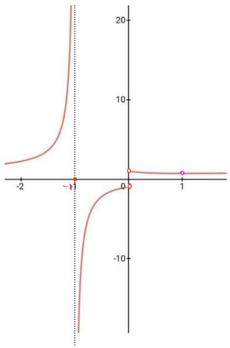
故$x=0$为$f(x)$的跳跃间断点；

因为$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$x=1$为$f(x)$的可去间断点。

综上所述：$f(x)$的无穷间断点只有$x=-1$。

故答案选（B）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图?



图?

33.【考点定位】渐近线方程。

【答案】$y=2x$

【解】先求垂直渐近线

因为$y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，所以该曲线无垂直渐近线。

再求斜渐近线(水平渐近线)

方法一：当$x\to\infty$时，

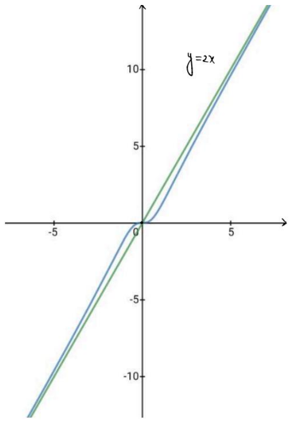
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2，\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0，$$

所以该曲线有斜渐近线为$y=2x$。

方法二：由于 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}=2x+\dfrac{-2x}{x^2+1}=2x+\alpha$，（这里 $\alpha=\dfrac{-2x}{x^2+1}\to 0$），

故该曲线有斜渐近线 $y=2x$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像及其斜渐近线，如图?



图?

34.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；等价无穷小替换。

【答案】C

【解】

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left[\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right)+1\right]}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}}=\mathrm{e}^{a-b}。$$

故答案选（C）。

【注】请同学们注意一个常用的结果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=\begin{cases}0,m>n\\ \dfrac{a_n}{b_n},m=n\\ \infty,m<n\end{cases}$$，其中 a_n,b_m 都不为零。

35.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；等价无穷小替换。

【答案】$\sqrt{2}$。

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\left(\frac{1+2^x}{2}-1\right)\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1+2^x}{2}-1\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{2x}}=e^{\frac{\ln 2}{2}}=\sqrt{2}。$$

36.【考点定位】渐近线方程。

【答案】C

【解】先求垂直渐近线

$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 在 $x=\pm 1$ 处无定义，在其余点处均连续。

由于 $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$，所以 $x=1$ 是该曲线的垂直渐近线；

由于 $\lim\limits_{x\to -1}y=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}\neq\infty$，所以 $x=-1$ 不是该曲线的垂直渐近线；

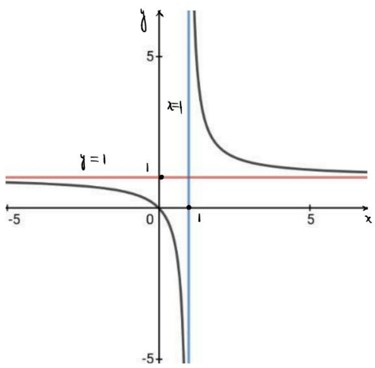
再求斜渐近线(水平渐近线)

因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x(x^2-1)}=0,b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以该曲线有水平渐近线 $y=1$。

综上所述，该曲线有两条渐近线，分别为 $x=1,y=1$。

故答案选(C)

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像及其渐近线，如图?



图?

37.【考点定位】无穷小的比较。

【答案】D

【解】对于选项(A)： 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot o\left(x^2\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}=0$，所以$x\cdot o\left(x^2\right)=o\left(x^3\right)$。

故(A)正确。

对于选项(B) ： 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x\right)\cdot o\left(x^2\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x\right)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}=0\times 0=0$，所以

$o\left(x\right)\cdot o\left(x^2\right)=o\left(x^3\right)$。故(B)正确。

对于选项(C)： 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}=0+0=0$，所

以$o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)=o\left(x^2\right)$。故（C）正确。

对于选项(D) ： 例如，取$\alpha=x^2,\beta=x^3$，则$\alpha=o\left(x\right),\beta=o\left(x^2\right)$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha+\beta}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^3}{x^2}=1$，所以$\alpha+\beta$不是比$x^2$高阶的无穷小。正确的结果如下：

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x\right)+o\left(x^2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x\right)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}\cdot x\right)=0+0=0$ ，

所以$o\left(x\right)+o\left(x^2\right)=o\left(x\right)$。故（D）不正确。综上所述，答案选(D)。

38.【考点定位】间断点的分类；等价无穷小替换。

【答案】C

【解】函数$f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$在$x=-1,0,1$无定义，在其余处均连续。

由于 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{(x+1)}=\infty$，

所以$x=-1$为$f(x)$的第二类间断点；

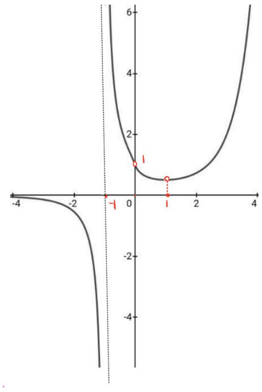
由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)}=1$，

所以$x=0$为$f(x)$的可去间断点；

由于$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。综上所述，函数 $f(x)$ 有 2 个可去间断点。故答案选（C）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图?



图?

39.【考点定位】数列极限的性质。

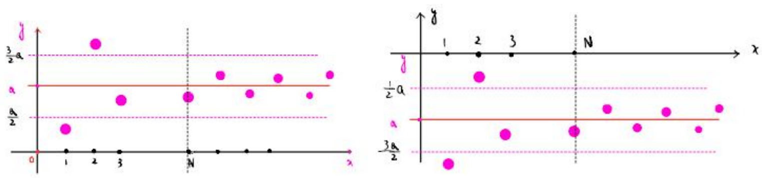
【答案】A

【解】对于选项(A)和(B)

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a \neq 0$。取 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2} > 0$，则 $\exists N > 0$，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|a_n - a| < \dfrac{|a|}{2}$ 成立，

从而当 $n > N$ 时有：$|a_n| = |(a_n - a) + a| \geq |a| - |a_n - a| > |a| - \dfrac{|a|}{2} = \dfrac{|a|}{2}$。(如图所示)

故（A）正确，(B)错误。



$a > 0$ 的情形　　　　$a < 0$ 的情形

（a）　　　　（b）

图?

对于选项(C)：

取 $a_n = a - \dfrac{2}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a - \dfrac{2}{n}\right) = a$，但 $a_n = a - \dfrac{2}{n} < a - \dfrac{1}{n}$，故（C）错误。

对于选项(D)

取 $a_n=a+\frac{2}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{2}{n}\right)=a$，但 $a_n=a+\frac{2}{n}>a+\frac{1}{n}$，故（D）错误。

综上所述，答案选(A)。

40.【考点定位】渐近线方程

【答案】C

【解】对于选项(A)：由于 $y=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以该曲线无垂直渐近线。

又由于 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin x-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在，

从而该曲线无斜渐近线及水平渐近线,所以该曲线无渐近线。

对于选项(B)： 由于 $y=x^2+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以该曲线无垂直渐近线。又由于 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\infty+0=\infty$，从而该曲线没有斜渐近线及水平渐近线,所以该曲线无渐近线。

对于选项(C)：$y=x+\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，在其余点处均连续。由于

$\lim\limits_{x\to0}\left(x+\sin\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}x+\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}=0+\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\neq\infty$，从而该曲线无垂直渐近线；

由于 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\frac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，从而该曲线有斜渐近线 $y=x$。

对于选项(D)： $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，$\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+\sin\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}x^2+\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$

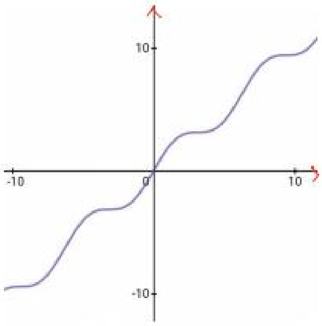
$=0+\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\neq\infty$，故该曲线无垂直渐近线；

又由于 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$,

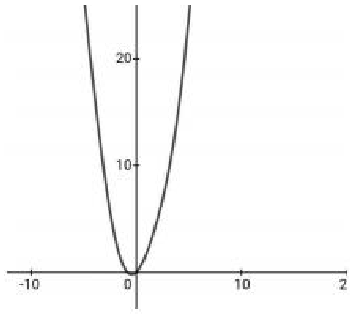
从而该曲线无斜渐近线及水平渐近线，故该曲线无渐近线。

综上所述,答案选（C）。

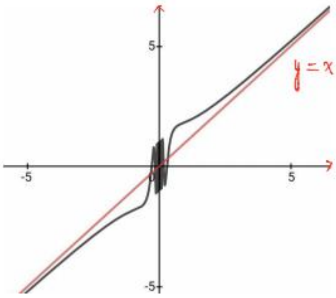
【注】为了方便同学们理解，我们画出各选项中函数的图像及其渐近线，如图?



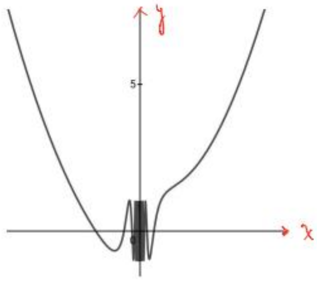
（A）选项



（B）选项



（C）选项



（D）选项

图?

41.【考点定位】无穷小的比较；等价无穷小替换。

【答案】B

【解】因为当 $x \to 0^{+}$ 时，

$$a_1 = x\left(\cos\sqrt{x}-1\right) = -x\left(1-\cos\sqrt{x}\right) = -x\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2 = -\frac{1}{2}x^2,$$

$$a_2 = \sqrt{x}\cdot\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right) \sim \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x} = x^{\frac{5}{6}},\quad a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1=\left(1+x\right)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}x,$$

所以按照从低阶到高阶的排序是 a_2， a_3， a_1。

故答案选(B)。

42.【考点定位】斜渐近线方程；等价无穷小替换；泰勒公式。

【答案】 $y = x+2$

【解】方法一：

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)=1,$$

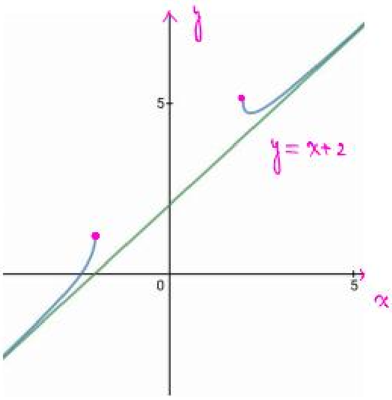
$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2}{x}=2。$$

所以该曲线的斜渐近线为 $y=x+2$.

方法二：当 $x\to\infty$ 时， $y=x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)=x\left[1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=x+2+\alpha$ ，

（这里 $\alpha=x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$ ），所以该曲线的斜渐近线为 $y=x+2$ 。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像及其斜渐近线，如图?



图?

43.【考点定位】幂指函数极限公式： $\lim u^v=e^{\lim v\ln u}$ ；等价无穷小替换。

【答案】-2

【解】由

$$e=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin kx}\ln\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{kx}\ln\left(1-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{kx}\frac{-2\tan x}{1+\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x}{kx(1+\tan x)}}=e^{-\frac{2}{k}},$$

得 $-\frac{2}{k}=1$，所以 $k=-2$

44.【考点定位】函数的四则运算；连续的概念。

【答案】D

【解】 由于函数 $f\left(x\right)$ 分段点为 $x=0$，函数 $g\left(x\right)$ 分段点为 $x=0,-1$，所以 $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 分段点为 $x=0,-1$，从而易得：

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax,x\le -1,\\ -1+x,-1<x<0\\ x+1-b,,x\ge 0\end{cases},$$

当 $x\ne -1,0$ 时，$f(x)+g(x)$ 都连续。

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)+g(x)\right)=1-b,\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f(x)+g(x)\right)=-1$，$f(0)+g(0)=1-b$ 及 $f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，得 $1-b=-1$，所以 $b=2$；

由 $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(f(x)+g(x)\right)=-2,\lim\limits_{x\to -1^-}\left(f(x)+g(x)\right)=1+a$，$f(-1)+g(-1)=1+a$ 及 $f(x)+g(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，得 $1+a=-2$，所以 $a=-3$；

综上所述：$a=-3$，$b=2$。

故答案选（D）。

45.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；洛必达法则。

【答案】$4\mathrm{e}^2$

【解】$\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(x+2^x)}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(x+2^x-1)]}{x}}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2^x-1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2^x\ln 2}{1}}=\mathrm{e}^{2+2\ln 2}=4\mathrm{e}^2$,

46.【考点定位】无穷小的比较；泰勒公式；洛必达法则。

【答案】C

【解】方法一：由于 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$，所以

$$x-\tan x=x-\left(x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)=-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\sim -\frac{1}{3}x^3，故 k=3。$$

方法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan^2 x}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{kx^{k-1}}=\dfrac{-1}{k}\lim\limits_{x\to 0}x^{3-k}$

由题设可知 $k=3$。此时 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\dfrac{-1}{3}$。

故答案选(C)。

47.【考点定位】间断点的分类；等价无穷小替换。

【答案】C

【解】当 $x=-1,0,1,2$ 时，函数 $f(x)$ 无定义，其余点均为连续点。

因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}{-3(\mathrm{e}^{-1}-1)}\lim\limits_{x\to-1}\ln|1+x|=\infty$，所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{-2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点；

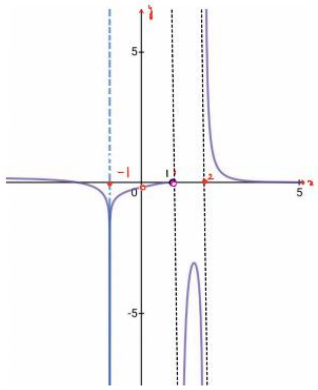
因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\dfrac{\ln2}{1-\mathrm{e}}\lim\limits_{x\to1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$，其中

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{\ln2}{1-\mathrm{e}}\lim\limits_{x\to1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{\ln2}{1-\mathrm{e}}\lim\limits_{x\to1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\dfrac{\mathrm{e}\ln3}{\mathrm{e}^2-1}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$，所以 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。

综上所述，$f(x)$ 有 3 个第二类间断点，分别为 $x=-1,1,2$。故答案选(C)

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像， 如图?



图?

48.【考点定位】左、右极限；幂指函数极限公式：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$。

【解】

$$\lim_{x\to0^+}\left(a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(a\arctan\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\pi a}{2}+\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\pi a}{2}+\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)}=\frac{\pi a}{2}+\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(a\arctan\frac{1}{x}+(1-x)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^-}a\arctan\frac{1}{x}+\lim_{x\to0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=-\frac{\pi a}{2}+\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^-}x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-\frac{\pi a}{2}+\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^-}x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=-\frac{\pi a}{2}+\mathrm{e}^{-1}。$$

由极限$\lim\limits_{x\to0}\left(a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right)$存在可得，$\frac{\pi a}{2}+\mathrm{e}=-\frac{\pi a}{2}+\mathrm{e}^{-1}$，解得$a=\frac{1}{\pi}$（$\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}$）。

（B 组）提升题

1.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【答案】$-\frac{1}{6}$

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}$。

下面利用两种方法求该极限。

方法一：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{6\left(1+x^2\right)}=-\frac{1}{6}。$$

方法二：利用泰勒公式

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]-x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{2x^3}=-\frac{1}{6}。$$

2.【考点定位】极限与无穷小的关系：$\lim\limits_{x\to\bullet}f\left(x\right)=A\Leftrightarrow f\left(x\right)=A+\boldsymbol{\alpha}$，其中

$\boldsymbol{\alpha}\to0\left(x\to\bullet\right)$；极限的四则运算法则；洛必达法则；泰勒公式。

【答案】C

【解】方法一：由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$得，$\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\alpha$，其中$\boldsymbol{\alpha}\to0\left(x\to0\right)$;

所以 $f\left(x\right)=\dfrac{\alpha x^{3}-\sin 6x}{x}$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{6+\dfrac{\alpha x^{3}-\sin 6x}{x}}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^{3}+6x-\sin 6x}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^{3}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^{2}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\times 36x^{2}}{x^{2}}=36。$$

方法二：由泰勒公式可得，当 $x\to 0$ 时，

$$\sin 6x=6x-\frac{(6x)^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)=6x-36x^{3}+o\left(x^{3}\right),$$

由
$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-36x^{3}+o\left(x^{3}\right)+xf\left(x\right)}{x^{3}}$$

$$=-36+\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf\left(x\right)}{x^{3}}=-36+\lim_{x\to 0}\frac{6+f\left(x\right)}{x^{2}},$$

可得
$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f\left(x\right)}{x^{2}}=36。$$

方法三：$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f\left(x\right)}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf\left(x\right)}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin 6x+xf\left(x\right)\right)+\left(6x-\sin 6x\right)}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf\left(x\right)}{x^{3}}+\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\left[6x-\dfrac{(6x)^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)\right]}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{36x^{3}+o\left(x^{3}\right)}{x^{3}}=36。$$

故答案选(C)。

【注】对于选择题，有时我们可以采用特例法求解。在此题中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^{3}}=0$，作为特例，我们取 $\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^{3}}=0$，即 $f(x)=\dfrac{-\sin 6x}{x}$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f\left(x\right)}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{6-\dfrac{\sin 6x}{x}}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^{3}}=36。$$

3.【考点定位】连续的概念。

【答案】D

【解】由于 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\mathrm{e}^{bx}\right)=a+\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{bx}=\infty$，从而 $b<0$。设 $g(x)=a+\mathrm{e}^{bx}$，则 $g(x)$ 的值域为 $(a,+\infty)$。又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其分母 $g(x)\neq 0$，从而 $a\geq 0$。故答案选(D)。

4.【考点定位】幂指函数极限公式 $\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；间断点的分类；等价无穷小替换。

【解】当 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 时，

$$f(x)=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}(\frac{\sin t}{\sin x}-1)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}},$$

由于 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x}{\sin x}\to 1$，所以 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点；

当 $x\to\pi^+$ 时，$\dfrac{x}{\sin x}\to-\infty$，当 $x\to\pi^-$ 时，$\dfrac{x}{\sin x}\to+\infty$，所以，

$\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=0,\ \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}=+\infty,$ 因此 $x=\pi$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

同理可说明：$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。

5.【考点定位】幂指函数极限公式 $\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；拉格朗日中值定理。

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解】分别计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x,\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]$。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+c}{x-c}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{2c}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c};$$

由拉格朗日中值定理可得，存在 $\xi\in(x-1,x)$，使得

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\left[x-(x-1)\right]=f'(\xi)$$

因为 $x-1<\xi<x$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\xi\to\infty$，从而

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}。$$

由题设可得 $e^{2c}=e$，解得 $c=\dfrac{1}{2}$。

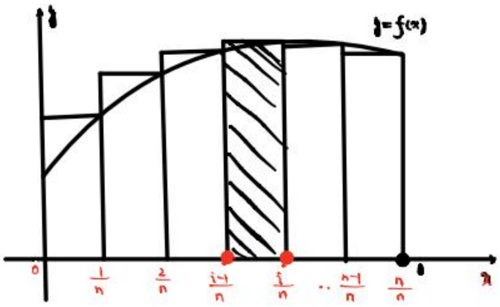
6.【考点定位】定积分定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。（如图？）

【答案】$\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$。

【解】

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi}=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{2}x}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^1\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x=\sqrt{2}\left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}。$$



图？ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

7.【考点定位】洛必达法则；可微与可导的关系。

【解】方法一：由于 $h\to 0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是 h 的高阶无穷小，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$$

从而，

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=af(0)+bf(0)-f(0)=(a+b-1)f(0)=0,$$

由于 $f(0)\neq 0$，故 $a+b-1=0$，即

$$a+b=1, \qquad ①$$

由于 $0=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}$

$=af'(0)+2bf'(0)=(a+2b)f'(0)$，且 $f'(0)\neq 0$，

所以 $a+2b=0$ ， ②

联立①,②式得$\begin{cases} a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases}$，解得$a=2,b=-1$。

方法二：由于$f(x)$在$x=0$处可导，故$f(x)$在$x=0$点可微，从而

$f(x)-f(0)=f'(0)x+o(x)$，即$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$，

所以 $f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h)$，$f(2h)=f(0)+f'(0)\cdot 2h+o(h)$，因此，

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=a\left[f(0)+f'(0)h+o(h)\right]+b\left[f(0)+2f'(0)h+o(h)\right]$$

$$=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h),$$

由题设可知$\begin{cases}(a+b-1)f(0)=0, \\ (a+2b)f'(0)=0,\end{cases}$又由于$f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$，所以

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases},$$

解得$a=2,b=-1$。

8.【考点定位】连续的概念；变量代换；洛必达法则。

【解】首先，函数$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right)$上连续。

由于$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right)=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right)$

$$\underline{\underline{x=1+t}}\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{\sin\pi(1+t)}+\frac{1}{\pi t}\right)=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{\pi t}-\frac{1}{\sin\pi t}\right)$$

$$\underline{\underline{u=\pi t}}\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{\sin u}\right)=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to 0^-}\frac{\sin u-u}{u\sin u}=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to 0^-}\frac{\sin u-u}{u^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to 0^-}\frac{\cos u-1}{2u}=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}u^2}{2u}=\frac{1}{\pi}$$

要使$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续，只需定义$f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}$。

9.【考点定位】连续的概念；等价无穷小替换；洛必达法则；间断点的分类。

【解】$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-6a\text{；}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}4\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{2}=2a^2+4\text{；}$$

① 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即

$$-6a=2a^2+4=6\text{，解得，}a=-1\text{。}$$

所以当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

② 当 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq f(0)$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，即

$$-6a=2a^2+4\neq6\text{，}$$

解得 $a=-2$。所以当 $a=-2$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。

【注】在求 $\lim\limits_{x\to0^\pm}f(x)$ 时，也可以使用泰勒公式。

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}=-6a\text{，}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2!}+o(x^2)\right)+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{(1+\frac{a^2}{2})x^2+o(x^2)}{x^2}=2a^2+4\text{。}$$

10.【考点定位】间断点的分类。

【答案】0

【解】当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0}{1}=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx-x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-\dfrac{x}{n}}{x^2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{x}$。

所以，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x\neq 0,\\ 0,x=0.\end{cases}$。因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点。

应填 0。

11.【考点定位】定积分的定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$；定积分的换元法。

【答案】B

【解】$I=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\dfrac{1}{n})^2(1+\dfrac{2}{n})^2\ldots(1+\dfrac{n}{n})^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\dfrac{i}{n})=2\int_0^1\ln(1+x)dx$，

$=2\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}\left(1+x\right)\overset{u=1+x}{=}2\int_1^2\ln u\mathrm{d}u=2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$。

故本题答案选（B）。

【注】①$I=2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x=\left(2x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\right)=2\left(2\ln 2-1\right)=4\ln 2-2$。

②$I=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\ldots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$，

上式右端可视为 $f(x)=2\ln x$ 在 $[1,2]$ 上的特殊划分 $1<1+\dfrac{1}{n}<1+\dfrac{2}{n}<\ldots<1+\dfrac{n}{n}=2$ 下取

$\xi_i=1+\dfrac{i}{n}\in\left[1+\dfrac{i-1}{n},1+\dfrac{i}{n}\right],i=1,2,\ldots,n$ 的一个和式的极限，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}=\dfrac{1}{n}$，

故 $I=\int_1^2 2\ln x\mathrm{d}x$。

12.【考点定位】无穷小的比较；洛必达法则；变限积分求导。

【答案】 B

【解】方法一：由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x^m}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\left(x^2\right)}{mx^{m-1}}\overset{m=1}{=}1,$$

故当$x\to0^+$时，$\alpha\sim x$；

由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{x^n}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{x^n}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{(\tan x)\cdot2x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x^2}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{nx^{n-3}}\overset{n=3}{=}\frac{2}{3},$$

故当$x\to0^+$时，$\beta\sim\frac{2}{3}x^3$；

由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}{x^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2kx^{k-2}}\overset{k=2}{=}\frac{1}{4}$$

故当$x\to0^+$时，$\gamma\sim\frac{1}{4}x^2$。

从而α,β,γ分别是当$x\to0^+$时的 1，3，2 阶无穷小，故答案选（B）。

方法二：由于$\alpha'=\left(\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t\right)'=\cos x^2$，故当$x\to0^+$时$\alpha'\to1$，从而$\alpha\sim x$；

$\beta'=\left(\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t\right)'=\tan x\cdot2x$，故当$x\to0^+$时$\beta'\sim2x^2$，从而$\beta\sim\frac{2}{3}x^3$；

$\gamma'=\left(\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t\right)'=\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$，故当$x\to0^+$时，$\gamma'\sim\frac{1}{2}x$从而$\gamma\sim\frac{1}{4}x^2$。

故当$x\to0^+$时α,β,γ分别是x的 1，3，2 阶无穷小，因此答案选（B）。

【注】①无穷小阶的比较主要看$f(x)$是否等价于kx^λ(k,λ为常数)再根据λ的大小来确定无穷小的阶。

③ 我们对方法二作如下说明:

若 (i)当$x\to\bullet$时，$\alpha(x)\to0,\beta(x)\to0$; (ii) $\lim\limits_{x\to\bullet}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=1$,则由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to\bullet}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\bullet}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=1，即\alpha(x)\sim\beta(x)。$$

13.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式；极限的四则运算法则。

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}$。

下面用两种方法计算该极限：

方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-\sin^2 2x}{4x^4}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{8x-4\sin 2x\cos 2x}{16x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4x-\sin 4x}{8x^3}。$$

由洛必达法则以及等价无穷小替换可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-\sin 4x}{8x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos 4x}{24x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3},$$

或者利用泰勒公式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-\sin 4x}{8x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4x-\left[4x-\frac{1}{3!}(4x)^3+o\left(x^3\right)\right]}{8x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{32}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{8x^3}=\frac{4}{3}$$

故，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\frac{4}{3}。$$

方法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x\cos x)(x+\sin x\cos x)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)(2x+\sin 2x)}{4x^4}$$

下面采用两种方式计算该极限：

其一，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)(2x+\sin 2x)}{4x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin 2x}{x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left(2+\frac{\sin 2x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}=\frac{1}{4}\cdot(2+2)\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=\frac{4}{3}\text{。}$$

其二，

$$\lim_{x\to0}\frac{(2x-\sin 2x)(2x+\sin 2x)}{4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\left[2x-\left(2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o\left(x^3\right)\right)\right]\cdot\left[2x+2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o\left(x^3\right)\right]}{4x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]\left[4x-\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]}{4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{16}{3}x^4+o\left(x^4\right)}{4x^4}=\frac{4}{3}\text{，}$$

故 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\frac{4}{3}\text{。}$$

14.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【解】方法一：$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{3}{2}\text{。}$$

方法二：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{3}{2}\text{。}$$

15.【考点定位】极限的四则运算法则；等价无穷小替换；泰勒公式。

【答案】$\frac{3}{4}$

【解】$I=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}。$$

下面用两种方法求上式中的极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}$。

方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arcsin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}。$$

方法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x(x+o(x))-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2},$$

所以 $I=\dfrac{3}{4k}$，又由题设 $I=1$ 得 $\dfrac{3}{4k}=1$，故 $k=\dfrac{3}{4}$。

【注】我们再提供一种方法供大家参考

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x\arcsin x)^{\frac{1}{2}}-1+1-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x\arcsin x)^{\frac{1}{2}}-1}{kx^2}-\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x-1)^{\frac{1}{2}}-1}{kx^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{kx^2}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^2}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}=\frac{3}{4k}$$

所以 $I=\dfrac{3}{4k}$，又由题设 $I=1$，所以 $\dfrac{3}{4k}=1$，故 $k=\dfrac{3}{4}$。

16.【考点定位】连续的概念；变限积分求导；洛必达法则；等价无穷小替换。

【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解】

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，故 $a=\dfrac{1}{3}$。

17.【考点定位】渐近线方程；极限的四则运算法则；洛必达法则。

【答案】D

【解】先求垂直渐近线

函数 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(e^x+1)$ 在 $x=0$ 点处无定义，在其它点处均连续。由于

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0}\ln(e^x+1)=\infty ,$$

所以 $x=0$ 为该曲线的一条垂直渐近线；

再求斜渐近线（水平渐近线）

方法一：由于

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+\ln(e^x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln\left(e^x+1\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x+1}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)=0 。$$

所以该曲线有一条斜渐近线 $y=x$；

由于 $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\right)=0$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=0+0 ,$$

故 $y=0$ 为该曲线的水平渐近线。

方法二：当 $x\to+\infty$ 时，由于

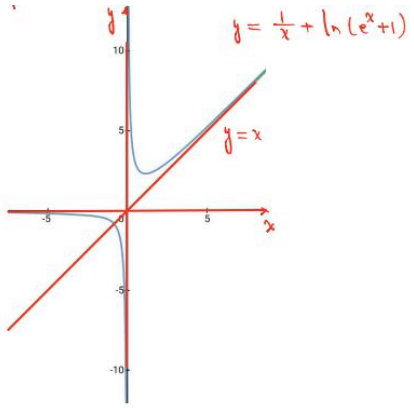
$$y=\frac{1}{x}+\ln(e^x+1)=\ln\left[e^x\left(e^{-x}+1\right)\right]+\frac{1}{x}=\ln e^x+\ln\left(e^{-x}+1\right)+\frac{1}{x}=x+\alpha,$$

其中$\alpha=\ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)+\dfrac{1}{x}\to 0+0=0$，所以该曲线有一条斜渐近线$y=x$；

当$x\to-\infty$时，由于$y=\dfrac{1}{x}+\ln(\mathrm{e}^{x}+1)\to 0+0=0$，故$y=0$为该曲线的水平渐近线。

综上所述，该曲线有三条渐近线，分别为$y=0,y=x,x=0$。故答案选（D）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该曲线及三条渐近线的图像，如图?



图?

18.【考点定位】洛必达法则；无穷小量与有界量的乘积仍然为无穷小量。

【答案】0

【解】因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+2}{2^x\ln^2 2+6x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x\ln^3 2+6}=0$，

又因为$|\sin x+\cos x|\le 2$，故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0$。

19.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

下面用三种方法求：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$。

方法一：$I\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\left[1-\cos(\sin x)\right]}{3x^2}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{x^2}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{6}\text{。}$$

方法二：$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{\sin^3 x}\overset{t=\sin x}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+o\left(t^3\right)\right)}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{6}t^3+o\left(t^3\right)}{t^3}=\frac{1}{6}\text{。}$$

方法三：当 $x\to0$ 时 $\sin x\to0$， $\sin\left(\sin x\right)=\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3!}+o\left(\sin^3 x\right)$，

所以

$$\sin x-\sin\left(\sin x\right)=\frac{\sin^3 x}{3!}+o\left(\sin^3 x\right)\sim\frac{\sin^3 x}{6}\sim\frac{x^3}{6},$$

故

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}\text{。}$$

综上所述，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\dfrac{1}{6}$。

【注】我们对方法三作如下说明:

由泰勒公式可得，若 $x\to\bullet$ 时，$\varphi(x)\to0$，则

$$\sin\left(\varphi\left(x\right)\right)=\varphi\left(x\right)-\frac{\varphi^3\left(x\right)}{3!}+o\left(\varphi^3\left(x\right)\right),$$

从而 $\varphi(x)-\sin(\varphi(x))\sim\dfrac{\varphi^3(x)}{6}$，这个结论可直接使用。

20.【考点定位】连续的概念；等价无穷小替换。

【答案】2

【解】 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}[xf(x)]^2}{x^2f(x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}f(x)$，

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，从而 $1=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1}{2}f(0)$，故 $f(0)=2$。

21.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【解】

方法一：

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}。$$

下面用两种方式求该极限：

（1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$；

（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right]-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$；

故原式 $=-\dfrac{1}{6}$。

方法二：

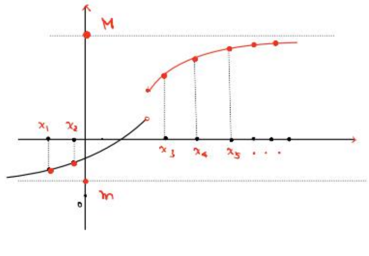
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}。$$

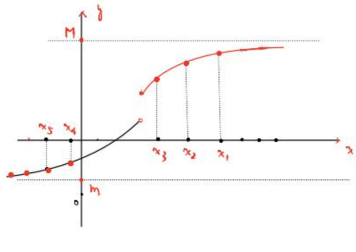
22.【考点定位】单调有界法则。

【答案】B

【解】首先，由 $f(x)$ 有界可知，数列 $\{f(x_n)\}$ 为有界数列。由单调有界法则可得，只要 $\{f(x_n)\}$ 单调就可以得出 $\{f(x_n)\}$ 收敛。又由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，不妨设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增，则当 $\{x_n\}$ 单调递增时，$\{f(x_n)\}$ 单调递增(如图？(a))；当 $\{x_n\}$ 单调递减时，$\{f(x_n)\}$ 单调递减(如图?(b))。从而可得(B)正确。



（a）



（b）

图？

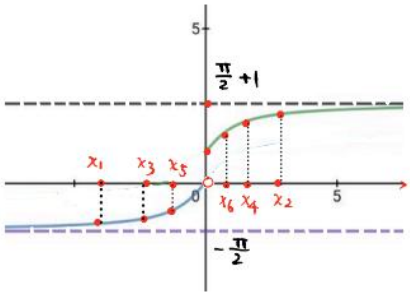
对于选项(A)：

如果 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，那么（A）正确，事实上，若 $x_n \to a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(a\right)$。

否则不一定正确。例如，取 $f(x)=\begin{cases}\arctan x+1, x\geq 0\\ \arctan x, x<0\end{cases}$，$x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\to 0$，则 $f(x)$ 单调有

界，且 $f(x_n)=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)+1, n为偶数,\\ -\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right), \quad n为奇数,\end{cases}$ 这时 $\{x_n\}$ 收敛，但 $f(x_{2n})\to 1, f(x_{2n-1})\to 0,$从

而 $\{f(x_n)\}$ 发散(如图？)。

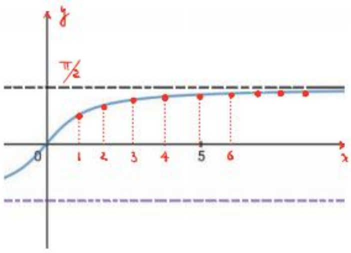


图？

对于选项(C)和(D)，如果取 $f(x)=\arctan x$ 以及 $x_n=n$，这时，

$f(x_n)=\arctan n\to\dfrac{\pi}{2},(n\to\infty)$，即 $\{f(x_n)\}$ 收敛，但 $\{x_n\}$ 发散，所以（C）不正确。

另外，$\{f(x_n)\}$ 单调递增，但 $\{x_n\}$ 发散，所以（D）不正确。(如图)



图？

综上所述，答案选（B）。

23.【考点定位】等价无穷小替换；极限的四则运算法则；洛必达法则；泰勒公式。

【解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$$

下面用三种方法计算上式中的极限：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$。

方法一：$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{x(1+\tan x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\tan x)}{x(1+\tan x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\tan x)}{x(1+\tan x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{1}{2}。$$

方法二：当 $x\to 0$ 时，

$$\tan x\to 0, \ln(1+\tan x)=\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x+o\left(\tan^2 x\right),$$

所以

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x+o\left(\tan^2 x\right)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}+\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^2}+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$

方法三：

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x+\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2},$$

由于 $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{\tan^2 x}\overset{t=\tan x}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\left(t-\frac{1}{2}t^2+o\left(t^2\right)\right)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2+o\left(t^2\right)}{t^2}=\frac{1}{2}\text{，所以}I=\frac{1}{2}\text{。}$$

故原式$=\dfrac{1}{2}I=\dfrac{1}{4}$。

24.【考点定位】无穷小的比较；等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【答案】 A

【解】方法一：由 $$1=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$

得 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-a\cos ax\right)=0$，所以$1-a=0$，故$a=1$。从而

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b},$$

所以$b=-\dfrac{1}{6}$。

综上所述$a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$。

方法二：

由 $$1=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-[ax-\frac{(ax)^3}{3!}+o(x^3)]}{-bx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3+o(x^3)}{-bx^3}$$

得$\begin{cases}1-a=0,\\ \dfrac{a^3}{6}=-b,\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\ b=-\dfrac{1}{6}\end{cases}$。

故答案选（A）。

25.【考点定位】无穷大量的比较；洛必达法则；极限的保序性。

【答案】C

【解】 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{10}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}}}=0\text{；}$$

又由于 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{10}}}\right)^{10}\text{，}$$

且 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{10}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{10}x^{-\frac{9}{10}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{x^{\frac{1}{10}}}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

由极限的保序性知，当x充分大，即$\exists x_0>0$，当$x>x_0$时，有$f(x)<g(x)<h(x)$。

故答案选(C)。

【注】一般情形下，设$\alpha>0$，$\beta>0,a>1$为常数，则有

① $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha=0^{\alpha}=0\ ;$$

② $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{a^x}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^{\frac{x}{\beta}}}\right)^\beta=0^\beta=0\ 。$$

故当x足够大时，有$\ln^\alpha x<x^\beta<a^x$，这个结果在选择题与填空题中可直接使用。

26.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式；极限的四则运算法则。

【答案】C

【解】方法一：因为$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，所以$1=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1-ax)e^x}{x}$。

下面用两种方法计算该极限：

其一，$$\lim_{x\to0}\frac{1-(1-ax)e^x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}[ae^x-(1-ax)e^x]=a-1;$$

其二，$$\lim_{x\to0}\frac{1-(1-ax)e^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-ax)[1+x+o(x)]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(a-1)x+o(x)}{x}=a-1\ 。$$

所以，$a-1=1$，从而$a=2$。

方法二：

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-e^x}{x}+ae^x\right)=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x}+a\lim_{x\to0}e^x=-1+a\ 。$$

所以，$a-1=1$，从而 $a=2$。

27.【考点定位】导数的定义；可导与可微的关系；极限的四则运算法则。

【答案】B

【解】方法一：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$$

$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$。

方法二：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，从而

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+o(x)=f'(0)\cdot x+o(x),,$$

$$f(x^3)=f(0)+f'(0)x^3+o\left(x^3\right)=f'(0)x^3+o\left(x^3\right),$$

于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(f'(0)x+o(x)\right)-2\left(x^3 f'(0)+o\left(x^3\right)\right)}{x^3}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f'(0)x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=-f'(0)$。故答案选（B）。

28.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{\mathrm{e}^x-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\right]}{\mathrm{e}^x-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$，

下面用两种方法求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$。

方法一：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(x+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}。$$

方法二：利用泰勒公式

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x\right)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}。$$

故
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}。$$

29.【考点定位】拉格朗日中值定理；函数的单调性；单调有界准则。

【证明】（Ⅰ）这里用三种方法证明：$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

方法一：令 $f(x)=\ln x$，由拉格朗日中值定理可得，$\exists\xi\in(n,n+1)$，使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi)[(n+1)-n]=f'(\xi)=\frac{1}{\xi},$$

因为$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$，所以$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

方法二：由于$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，故只需证明

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)。$$

令 $f(x)=\ln(1+x)-x$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$。

当$x>0$时，$f'(x)<0$；又由于$f(0)=0$，所以当$x>0$时，$f(x)<f(0)=0$；

故$\ln(1+x)<x(x>0)$。

令$g(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$，则$g'(x)=\ln(1+x)>0$，$x>0$，故$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，又$g(0)=0$，因此当$x>0$时，$g(x)>g(0)=0$，从而$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)(x>0)$。

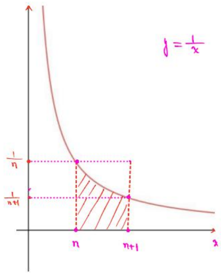
综上所述：$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

方法三：

首先$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\ln x\Big|_n^{n+1}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$，又由于$f(x)=\frac{1}{x}$在$[n,n+1]$上

单调递减，所以 $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$，且 $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x>\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$，（如图？）

故 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。



图？

（Ⅱ）先证明 $\{a_n\}$ 单调。

$$a_{n+1}-a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

由（Ⅰ）知 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，所以 $a_{n+1}-a_n<0$，即 $a_{n+1}<a_n$，故 $\{a_n\}$ 单调递减。

再证明 $\{a_n\}$ 有下界。由 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 得，

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

$$=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln n=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0,$$

所以 $\{a_n\}$ 有下界，由单调有界法则知 $\{a_n\}$ 收敛。

【注】在(II)中也可以用如下方法证明 $\{a_n\}$ 有界：（参考图？）

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n>\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\ln n$$

$$=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0。$$

30.【考点定位】无穷小的比较；洛必达法则；泰勒公式。

【答案】C

【解】方法一：因为

$$f(x)=3\sin x-\sin 3x=3\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right)-\left((3x)-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)\right)$$

$$=4x^3+o(x^3)\sim 4x^3$$，所以 $k=3$， $c=4$。

方法二：由于当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 cx^k 是等价无穷小，故

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}=\frac{3}{ck}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^{k-1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{3}{ck}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3\sin 3x}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{3}{ck}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+9\cos 3x}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=\frac{24}{ck(k-1)(k-2)}\lim_{x\to 0}x^{3-k}$$。

故 $k=3$，$\dfrac{24}{ck(k-1)(k-2)}=1$，可得 $c=4$。

故答案选（C）。

31.【考点定位】极限的四则运算法则；洛必达法则；泰勒公式；等价无穷小替换。

【解】（1）$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x(1+x)-\sin x}{x\sin x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=1+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=1+0=1;$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-a}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+1}\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)-x\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}x^{1-k}\cdot$$

由于当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，故 $k-1=0$，解得 $k=1$。

【注】对于第(2)问，我们提供另一种解法：利用等价无穷小的传递性得

$$f(x)-a=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1+x}{x}=(1+x)\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

$$\sim\frac{x-\sin x}{x\sin x}\sim\frac{x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}=\frac{\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{x^2}\sim\frac{1}{6}x$$

所以 $k=1$

32.【考点定位】单调有界法则。

【答案】B

【解】由 $a_n>0$ 知，$S_n-S_{n-1}=a_n>0(n\geq 2)$，所以 $\{S_n\}$ 单调递增。当 $\{S_n\}$ 有界时，由单调有界法则知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$，即 $\{a_n\}$ 收敛于 0；当 $\{a_n\}$ 收敛时，$\{S_n\}$ 不一定有界，例如：取 $a_n=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，但 $S_n=n\to+\infty$。

综上所述：$\{S_n\}$ 有界是 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件。

故答案选（B）。

33.【考点定位】定积分的定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解】

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}。$$

34.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；洛必达法则；等价无穷小替换。

【答案】$\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$

【解】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln\tan x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln(1+(\tan x-1))}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}$，

下面用两种方法计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}$。

方法一：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$；

方法二：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}=-\sqrt{2}。$$

故原式 $=\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$。

35.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【答案】$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ 的求法，见例 28。

36.【考点定位】一元函数的最值；单调有界法则。

【解】（1）由于 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=1$。

方法一：列表讨论如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↓	最小值	↑

因此 $x=1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，且最小值 $f(1)=1$。

方法二：由于 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}$，且 $f''(1)=-1+2=1>0$，从而 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，又因为 $x=1$ 为 $f(x)$ 唯一的驻点，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，且最小值 $f(1)=1$。

（2）由（1）知 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geq 1$，又因为 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，所以 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1\leq \ln x_n+\dfrac{1}{x_n}$，

故 $\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{x_n}$，由于 $x_n>0$，所以 $x_{n+1}>x_n$。因此 $\{x_n\}$ 单调递增。又由于

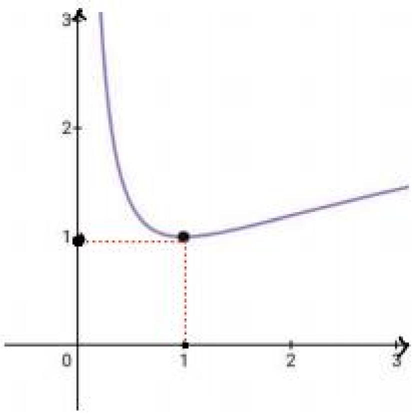
$\ln x_n<\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，所以 $x_n<\mathrm{e}$，从而数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，故由单调有界法则

知，数列 $\{x_n\}$ 极限存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}\right)\leq 1,$$

所以 $\ln a+\dfrac{1}{a}\leq 1$，又由于 $\ln a+\dfrac{1}{a}\geq 1$，故 $\ln a+\dfrac{1}{a}=1$，从而 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

【注】为方便同学们理解，我们由(1) 中方法一的讨论画出函数 $f(x)$ 的图像(如图)



图？

37.【考点定位】无穷小的比较；等价无穷小替换。

【答案】 C

【解】由 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$ 得 $\sin\alpha(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$。又由于 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\alpha(x)=\arcsin\frac{\cos x-1}{x};$$

又因为当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\cos x-1}{x}\sim\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=-\dfrac{1}{2}x$，所以

$$\alpha(x)=\arcsin\frac{\cos x-1}{x}\sim\frac{\cos x-1}{x}\sim-\frac{1}{2}x。$$

所以，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是与 x 同阶但是不等价的无穷小。

故答案选（C）。

38.【考点定位】洛必达法则；泰勒公式。

【答案】 D

【解】方法一：由

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x^{3-k}}{1+x^2}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}x^{3-k}\neq 0$$

知，$k=3$，$c=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{3}$。

方法二：由 $\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ 得，$x-\arctan x=\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)\sim\dfrac{1}{3}x^3$，

所以 $c=\dfrac{1}{3}$，$k=3$。

故答案选（D）。

39.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；变限积分求导；变量代换；泰勒公式。

【解】由洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]。$$

下面用三种方法计算该极限。

方法一：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $x\to+\infty$ 时，$t=\dfrac{1}{x}\to 0^+$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^t-1\right)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}。$$

方法二：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2}}{-\dfrac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{2}。$$

方法三：由于 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{x^2}+o(\dfrac{1}{x^2}),(x\to+\infty)$ 。所以

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}+o(\frac{1}{x^2})-1\right)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{2}+x^2\cdot o(\frac{1}{x^2})]=\frac{1}{2}。$$

【注】①当 $\lim\limits_{x\to\cdot}g(x)=\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也可以使用洛必达法则，不需要验证分子 $f(x)$ 的极限是否为无穷大。

②本题中的分子是无穷大量，事实上，由于当 $x>0$ 时，

$\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\xi}x^2>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$，所以当 $t>1$ 时，$t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t>t^2(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2})-t=\dfrac{1}{2}$，则

$$\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t>\int_1^x\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\to+\infty,(x\to+\infty)。$$

40.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【答案】D

【解】由题意可知 $\arctan x=\dfrac{x}{1+\xi^2}$，解得

$$\xi^2=\frac{x}{\arctan x}-1=\frac{x-\arctan x}{\arctan x},$$

所以 $$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}。$$

下面用两种方法求该极限。

方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$。

方法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\left(x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$，

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=\dfrac{1}{3}$。故答案选（D）。

41.【考点定位】等价无穷小替换；无穷小的比较。

【答案】B

【解】当$x\to0^+$时，$\ln^{\alpha}(1+2x)\sim(2x)^{\alpha}=2^{\alpha}x^{\alpha}$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{2}{\alpha}}$，由题设可知

$\begin{cases}\alpha>1,\\ \dfrac{2}{\alpha}>1,\end{cases}$ 所以，$1<\alpha<2$。故答案选（B）。

42.【考点定位】泰勒公式；洛必达法则。

【答案】D

【解】方法一：

由泰勒公式得，$x\to0$时$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$。所以

$$p(x)-\tan x=a+bx+cx^2+dx^3-\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)$$

$=a+(b-1)x+cx^2+(d-\dfrac{1}{3})x^3+o(x^3)$。

由$p(x)-\tan x=o(x^3)$得，$\begin{cases}a=0,\\ b-1=0,\\ c=0,\\ d-\dfrac{1}{3}=0.\end{cases}$，所以$\begin{cases}a=0,\\ b=1,\\ c=0,\\ d=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$。故答案选（D）。

方法二：

由$0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}$得，$\lim\limits_{x\to0}(a+bx+cx^2+dx^3-\tan x)=0$，从而

$a=0$，又

$$0=\lim_{x\to0}\frac{bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}\underline{\underline{\frac{0}{0}}}\lim_{x\to0}\frac{b+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}$$，从而

$$\lim_{x\to0}\left(b+2cx+3dx^2-\sec^2 x\right)=b-1=0$$，解得 $b=1$。

再由
$$0=\lim_{x\to0}\frac{1+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{2cx+3dx^2-\tan^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{-\tan^2 x}{x^2}+\frac{3dx^2}{x^2}+\frac{2cx}{x^2}\right)=\frac{1}{3}(-1+3d)+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{2c}{x},$$

得 $\begin{cases}c=0\\-1+3d=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}c=0\\d=\dfrac{1}{3}\end{cases}$。

综上所述：$a=0$，$b=1$，$c=0$，$d=\dfrac{1}{3}$。

故答案选（D）。

43.【考点定位】等价无穷小替换；变限积分求导；洛必达法则。

【答案】$\dfrac{1}{2}$。

【解】

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$$。

44.【考点定位】等价无穷小替换。

【答案】6

【解】由

$$2=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{f(x)\cdot 2x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}f(x)$$。

可得 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=6$。

45.【考点定位】定积分的定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$； 分部积分法。

【答案】$\sin1-\cos1$

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\ldots+n\sin\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\left(\sin\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}(-\cos x)=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x$$

$$=-\cos 1+\sin x\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1。$$

46. 【考点定位】斜渐近线方程。

【答案】$y=x+\dfrac{\pi}{2}$

【解】方法一： $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan\left(1+x^2\right)}{x}=1+0=1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x^2}+\lim_{x\to\infty}\arctan\left(1+x^2\right)=\frac{\pi}{2}。$$

故斜渐近线方程 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$。

方法二：

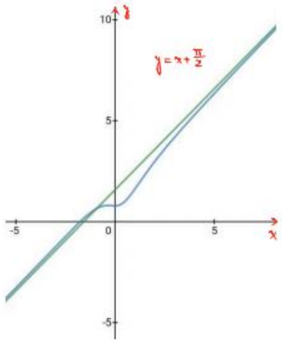
$$y=\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)=x+\frac{-x}{1+x^2}+\frac{\pi}{2}+\left(\arctan\left(1+x^2\right)-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=x+\frac{\pi}{2}+\left(\frac{-x}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)-\frac{\pi}{2}\right)=x+\frac{\pi}{2}+\alpha$$

其中 $\alpha=\left(\dfrac{-x}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)-\dfrac{\pi}{2}\right)\to 0+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=0\left(x\to\infty\right)$

故斜渐近线方程 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该曲线及其斜渐近线的图像(如图？)



图？

47.【考点定位】定积分的换元法；洛必达法则；变限积分求导。

【解】令 $x-t=u$，则 $t=x-u,\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，故

$$\int_0^x \sqrt{x-t}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int_x^0 \sqrt{u}\mathrm{e}^{x-u}\left(-\mathrm{d}u\right) =\int_0^x \sqrt{u}\mathrm{e}^{x-u}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\int_0^x \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u,$$

从而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x\int_0^x \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}。$$

48.【考点定位】函数的连续性；函数的单调性。

【答案】D

【解】设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

对于选项（A），$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0\Leftrightarrow \sin a=0\Rightarrow a=k\pi\left(k\in Z\right)$，所以（A）错误；

对于选项（B）：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0\Leftrightarrow a+\sqrt{|a|}=0\Rightarrow a=0$ 或 -1，所以（B）错误；

对于选项（C）：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+{x_n}^2)=0\Leftrightarrow a+a^2=0\Rightarrow a=0$ 或 -1，所以（C）错误；

对于选项（D）：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0\Leftrightarrow a+\sin a=0$，由于 $f(x)=x+\sin x$ 满足：

$f'(x)=1+\cos x\geq0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，又由于 $f(0)=0$，所以 $a=0$。

综上所述，答案选（D）。

49.【考点定位】定积分定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$；分部积分法。

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)d\left(x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}。$$

50.【考点定位】左、右极限；连续的概念；等价无穷小替换。

【答案】A

【解】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2}{ax}=\dfrac{1}{2a},\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b,f(0)=b$

由题设可得，$\dfrac{1}{2a}=b$，所以 $ab=\dfrac{1}{2}$。

故答案选（A）。

51.【考点定位】渐近线方程的求法。(注：此题重复了，和 A 组 42 题相同)应该删除

【答案】$y=x+2$

【解】方法一：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)}{x}=1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}(x+x\arcsin\frac{2}{x}-x)=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2}{x}=2。$$

所以该曲线的斜渐近线为 $y=x+2$.

方法二：当 $x\to\infty$ 时，$y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=x\left[1+\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=x+2+\alpha$，（这里

$\alpha=x\cdot o\left(\dfrac{1}{x}\right)\to0$），所以该曲线的斜渐近线为 $y=x+2$。

52.【考点定位】极限的四则运算法则；洛必达法则；泰勒公式。

【解】方法一：由

$$2=\lim_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=\lim_{x\to+\infty}x[(a+\frac{b}{x})e^{\frac{1}{x}}-1]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+\frac{b}{x})e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{(a+bt)e^t-1}{t},$$

可得 $\lim\limits_{t\to0^+}[(a+bt)e^t-1]=a-1=0$，所以 $a=1$。

下面利用三种方式来确定 b 的值。

方式①：由 $2=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+bt)e^t-1}{t}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{be^t+(1+bt)e^t}{1}=\lim\limits_{t\to0^+}[(1+bt+b)e^t]=b+1$，可得 $b=1$。

方式②：由 $2=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+bt)e^t-1}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+bt)(1+t+o(t))-1}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+b)t+o(t)}{t}$ $=b+1$，可得 $b=1$。

方式③：由 $2=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+bt)e^t-1}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\left[\frac{e^t-1}{t}+be^t\right]=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{t}+\lim\limits_{t\to0^+}be^t=b+1$，可得 $b=1$。故 $a=1$，$b=1$。

方法二：由 $2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(axe^{\frac{1}{x}}-x\right)+be^{\frac{1}{x}}\right]=b+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(axe^{\frac{1}{x}}-x\right)$得，

$$2-b=\lim_{x\to+\infty}\left(axe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ae^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{ae^t-1}{t},$$

从而 $\lim\limits_{t\to0^+}\left(ae^t-1\right)=a-1=0$, 所以 $a=1$，进而 $2-b=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ae^t-1}{t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^t-1}{t}=1$, 故 $b=1$。综上所述，$a=1$，$b=1$。

方法三：$(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x=(ax+b)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x=(a-1)x+(a+b)+\alpha$

其中 $\alpha=ax\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{b}{x}+b\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\to0\left(x\to\infty\right)$

由题设可得 $2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(a-1)x+(a+b)+\alpha\right]=(a+b)+\lim\limits_{x\to+\infty}(a-1)x$，

所以 $\begin{cases}a-1=0,\\a+b=2,\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=1$。

53.【考点定位】等价无穷小替换；幂指函数极限公式$\lim u^{v}=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；泰勒公式。

【答案】B

【解】由$1=\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^{x}+ax^{2}+bx)^{\frac{1}{x^{2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2}}\ln(\mathrm{e}^{x}+ax^{2}+bx)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2}}\ln[1+(\mathrm{e}^{x}+ax^{2}+bx-1)]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+ax^{2}+bx-1}{x^{2}}}$

得
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+ax^{2}+bx-1}{x^{2}}=0。$$

所以，
$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+ax^{2}+bx-1}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{[1+x+\frac{x^{2}}{2!}+o(x^{2})]+ax^{2}+bx-1}{x^{2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)x+(\frac{1}{2}+a)x^{2}+o(x^{2})}{x^{2}},$$

故$b=-1$，$a=-\frac{1}{2}$，应选（B）。

【注】我们也可以利用洛必达法则由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+ax^{2}+bx-1}{x^{2}}=0$确定其中的参数$a$，$b$。

请同学们自己试一试。

54.【考点定位】裂项求和；重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$；幂指函数极限公式：$\lim u^{v}=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；等价无穷小替换。

【答案】$\frac{1}{\mathrm{e}}$

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

下面可用两种方法计算该极限

方法一：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\mathrm{e}^{-1}$。

方法二：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(-\frac{1}{n+1}\right)}=\mathrm{e}^{-1}$，

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}。$$

55.【考点定位】三角函数和差化积；等价无穷小替换；拉格朗日中值定理。

【答案】B

【解】方法一：由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b$ 得，$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-a\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$，从而

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{f(x)-a}{2}\cdot\cos\frac{f(x)+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\frac{f(x)-a}{2}}{x-a}\cdot\cos\frac{f(x)+a}{2}$$
$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-a}{x-a}\cos\frac{f(x)+a}{2}\right)=b\cos a。$$

方法二：同“方法一”中的分析可得 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$，对函数 $g(t)=\sin t$ 使用拉格朗日中值定理得，存在介于 $f(x)$ 与 a 之间的点 ξ，使得

$$\sin f(x)-\sin a=g\left(f(x)\right)-\mathrm{g}(a)=g'(\xi)\left(f(x)-a\right)=\cos\xi\left(f(x)-a\right),$$

这里 $\xi\to a\left(x\to a\right)$。

因此 $$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\xi\frac{f(x)-a}{x-a}=b\cos a。$$

选项（D）的错误在于 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不一定连续，尽管 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$，但 $f(a)$ 不一定等于 a。故答案选（B）。

56.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式。

【答案】-1

【解】$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)-\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\mathrm{e}^x+1}{x^2}。$$

下面使用两种方法求该极限：

方法一：$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\mathrm{e}^x+1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^x}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\mathrm{e}^x}{2}=\frac{-1-1}{2}=-1;$$

方法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)\right)+1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-1$。

故原式$=-1$。

57.【考点定位】无穷小的比较；变限积分求导；洛必达法则；等价无穷小替换。

【答案】D

【解】方法一：

对于选项（A）：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{kx^{k-3}}\overset{k=3}{=}\dfrac{1}{3}$，

故当$x\to 0^+$时，$\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t\sim\dfrac{1}{3}x^3$。

对于选项(B)：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x^3})}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{kx^{k-\frac{5}{2}}}\overset{k=\frac{5}{2}}{=}\dfrac{2}{5}$，

故当 $x\to 0^+$

时，$\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t\sim\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$。

对于选项（C）：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(\sin x)^2\cos x}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\sin x)^2}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{kx^{k-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{kx^{k-3}}\overset{k=3}{=}\dfrac{1}{3}$，故当$x\to 0^+$时，$\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t\sim\dfrac{1}{3}x^3$。

对于选项(D)：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[\sin(1-\cos x)]^{\frac{3}{2}}\cdot\sin x}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}\cdot x}{kx^{k-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{3}{2}}}{kx^{k-2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3}{2\sqrt{2}kx^{k-2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{2}kx^{k-5}}\overset{k=5}{=}\dfrac{1}{10\sqrt{2}}$，

故当$x\to 0^+$时，$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t\sim\dfrac{1}{10\sqrt{2}}x^5$。

综上所述，当$x\to 0^+$时，$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t$的阶数最高，故答案选（D）。

方法二：当$x\to 0^+$时，

对于选项（A）：由于$\left[\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t\right]'=\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$，故$\int_0^x(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t\sim\frac{1}{3}x^3$。

对于选项（B）：由于$\left[\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t\right]'=\ln(1+\sqrt{x^3})\sim x^{\frac{3}{2}}$，故$\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t\sim\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$。

对于选项（C）：由于$\left[\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t\right]'=\sin(\sin x)^2\cdot\cos x\sim x^2$，故$\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t\sim\frac{1}{3}x^3$。

对于选项（D）：由于$\left[\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t\right]'=[\sin(1-\cos x)]^{\frac{3}{2}}\cdot\sin x\sim(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}x\sim(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}x^4$。

故$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t\sim\frac{1}{10\sqrt{2}}x^5$。故答案选（D）。

58.【考点定位】已知极限求参数；等价无穷小替换；泰勒公式；洛必达法则。

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{-\mathrm{e}}{2b}\lim_{n\to\infty}n^{a-1}$$

由当$n\to\infty$时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$与$\frac{b}{n^a}$为等价无穷小知，$\frac{-\mathrm{e}}{2b}\lim_{n\to\infty}n^{a-1}=1$,所以$a=1$，

$-\frac{\mathrm{e}}{2b}=1$，解得$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。故$a=1$，$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。

【注】我们还可以利用下面两种方式求a，b。请同学们细细体会。

（1）$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\xi}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)$，其中$\xi$是介于$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$与1之间。故当$n\to\infty$时，$\xi\to 1$，从而

$$\mathrm{e}^{\xi}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)\sim \mathrm{e}\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right)\sim-\frac{\mathrm{e}}{2n},$$

故，$-\frac{\mathrm{e}}{2n}=\frac{b}{n^a}$，解得$a=1$，$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。

（2）$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1\right)=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1}-1\right)$$

$$=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)\sim \mathrm{e}\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim-\frac{\mathrm{e}}{2n}(n\to\infty),$$

从而$-\frac{\mathrm{e}}{2n}=\frac{b}{n^a}$，解得$a=1$，$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。

59.【考点定位】斜渐近线方程。

【解】方法一：

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1+x}}{x(1+x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\mathrm{e}^{-1}。$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}(y-\mathrm{e}^{-1}x)\ =\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\mathrm{e}^{-1}x\right]\ =\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{x^x}{(1+x)^x}-\mathrm{e}^{-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\mathrm{e}^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\mathrm{e}^{-1}\right)=\mathrm{e}^{-1}\lim_{x\to+\infty}x\left(\mathrm{e}^{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right)=\mathrm{e}^{-1}\lim_{x\to+\infty}x\left(1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\mathrm{e}^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\mathrm{e}^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}。$$

所以曲线的斜渐近线为$y=\mathrm{e}^{-1}x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$。

方法二：当$x\to+\infty$时，

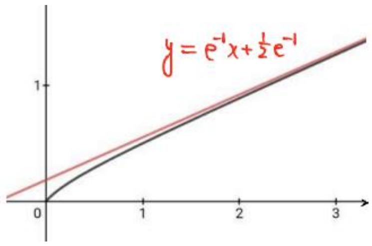
$$y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}=x\frac{x^x}{(1+x)^x}=x\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=x\mathrm{e}^{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=x\mathrm{e}^{-x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}$$

$$=x\mathrm{e}^{-1+\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}^{-1}x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}^{-1}x\left(1+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)+o\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-1}x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\mathrm{e}^{-1}x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}+\left(\mathrm{e}^{-1}x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

其中$\alpha=\mathrm{e}^{-1}x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{e}^{-1}\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\to 0\left(x\to+\infty\right)$，所以曲线的斜渐近线为$y=\mathrm{e}^{-1}x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$。

【注】为方便同学们理解，我们画出该曲线及其斜渐近线的图像(如图？)



图？

60.【考点定位】定积分的定义：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i),\text{这里}\xi_i\in\left[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}\right],i=1,2,\ldots,\ m\text{。}$$

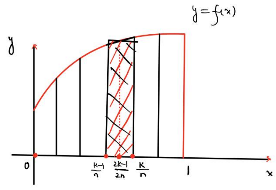
【答案】B

【解】注意$\frac{2k-1}{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{k}{n}\right)$为区间$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$的中点(如图？)，故

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$，立即可得（A）错误，（B）正确。

选项（C）和（D）是将$[0,1]$区间进行$2n$等分，从而$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$，所以（C），（D）都是错误的。

综上所述，答案选（B）。



图？：$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

【注】在考试中，作为一种解答选择题的方法，同学们可以尝试特例法，在本题中，取 $f(1)=1$，通过计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 及各选项，可快速将（A）（C）（D）排除。

61.【考点定位】常见函数的泰勒展开式；求泰勒公式的间接法。

【答案】A

【解】方法一：由 $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^4)$，得

$$f(x)=\sin x\cdot\frac{1}{1+x^2}=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\cdot\left(1-x^2+x^4+o(x^4)\right)=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3),$$

所以，$P(x)=x-\frac{7}{6}x^3$ 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式，故 $a=1,b=0,c=-\frac{7}{6}$。

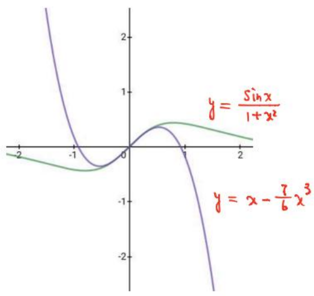
方法二：这里向同学们介绍求泰勒多项式的一种间接法——长除法，请同学们仔细体会。

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\cdots}{1+x^2}=x-\frac{7}{6}x^3+\cdots,$$

$$\begin{array}{r|l} & x-\frac{7}{6}x^3+\cdots \\ \hline 1+x^2 & x-\frac{x^3}{3!}+\cdots \\ & x+x^3 \\ \hline & -\frac{7}{6}x^3+\cdots \\ & -\frac{7}{6}x^3+\cdots \\ \hline & \cdots \end{array}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $x-\frac{7}{6}x^3$。故答案选（A）。

【注】为了使同学们加深对泰勒公式的认识，我们画出 $f(x)$ 及其在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式的图像，如图？。



图？：$\frac{\sin x}{1+x^2}=x-\frac{7x^3}{6}+o(x^3)$

62.【考点定位】泰勒多项式。

【答案】D

【解】$f(x)$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为

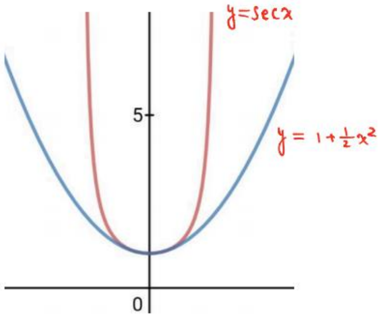
$$P(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

由 $f(x)=\sec x$ 得，$f'(x)=\sec x\tan x, f''(x)=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$，所以

$$f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=1,$$

从而 $P(x)=1+0x+\frac{1}{2!}x^2=1+\frac{1}{2}x^2$，故 $a=0, b=\frac{1}{2}$。答案选(D)。

【注】①为了使同学们加深对泰勒公式的认识，我们画出 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的图像及其在 $x=0$ 处的 2 阶泰勒多项式的图像，如图？。



图？：$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$

②请同学们尝试用长除法解答此题。

63.【考点定位】无穷小的比较；变限积分求导；洛必达法则；等价无穷小替换。

【答案】C

【解】因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt}{x^7}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{x^6}-1)\cdot2x}{7x^6}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^7}{7x^6}=0$，所以当 $x\to0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的高阶无穷小，故应选（C）。

【注】这里再向同学们补充介绍两种方法。

① 由 $\left[\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt\right]'=\left(e^{x^6}-1\right)\cdot2x\sim2x^7$ 可得 $\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt\sim\frac{1}{4}x^8$；

② $\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt=\int_0^{x^2}\left(t^3+\cdots\right)dt=\frac{1}{4}x^8+\cdots\sim\frac{1}{4}x^8$，所以 $\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt=o(x^7)$。

（C 组）拔高题

1.【考点定位】 变限积分求导；等价无穷小替换；二重积分中值定理。

【解】方法一：记 $F(u)=\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x F(u)\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{\frac{3}{2}x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot2x}{2x}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}。$$

方法二：这里我们提供另一种解法供同学们参考

当 $x>0$ 时，$\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\iint\limits_D\arctan(1+t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u$，

由二重积分中值定理得(积分区域如图？（a）所示)，$\exists(\xi,\ \eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D\arctan(1+t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u=\arctan(1+\eta)S(D)=\arctan(1+\eta)\int_0^x u^2\mathrm{d}u=\frac{x^3}{3}\arctan(1+\eta)$$

其中区域 $D=\left\{(u,t)\middle|0\le u\le x,0\le t\le u^2\right\}$，当 $x\to0^+$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$

故 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^3}{3}\arctan(1+\eta)}{\frac{1}{2}x^3}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}。$$

当 $x<0$ 时，

$$\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u=-\int_x^0\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=-\iint\limits_D\arctan(1+t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

由二重积分中值定理得(积分区域如图？（b）所示)，$\exists(\xi,\ \eta)\in D$，使得

$$-\int_x^0[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u=-\iint\limits_D\arctan(1+t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

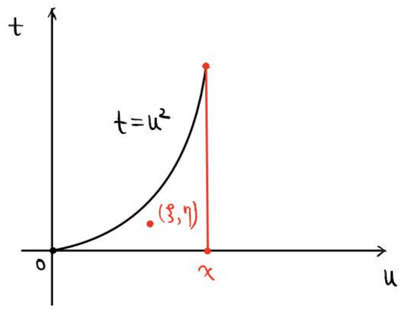
$$=-\arctan(1+\eta)S(D)=-\arctan(1+\eta)\int_x^0u^2\mathrm{d}u=\frac{x^3}{3}\arctan(1+\eta),$$

其中区域 $D=\left\{(u,t)\middle|x\le u\le0,0\le t\le u^2\right\}$，当 $x\to0^-$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，故

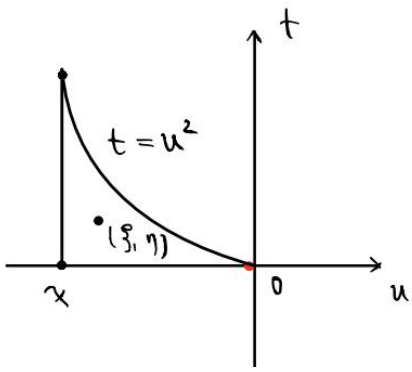
$$\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x^3}{3}\arctan(1+\eta)}{\frac{1}{2}x^3}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}。$$

综上所述：

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\frac{\pi}{6}。$$



（a） $x>0$ 的情形



（b） $x<0$ 的情形

图？

2.【考点定位】泰勒公式；无穷小的比较；洛必达法则。

【证明】方法一：由泰勒公式可得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)(x\to0)，$$

分别取 $x=h,2h,3h$ 得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2!}h^2+o(h^2)，$$

$$f(2h)=f(0)+f'(0)\cdot2h+\frac{f''(0)}{2!}(2h)^2+o(h^2)，$$

$$f(3h)=f(0)+f'(0)\cdot3h+\frac{f''(0)}{2!}(3h)^2+o(h^2)，$$

于是

$\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)$

$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)h+(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)\frac{f''(0)}{2!}h^2+o(h^2)$。

由 $\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)=o(h^2)$ 可得

因为 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0$，所以

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1, \\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0, \\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0, \end{cases}$$

又因为该线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以该线性方程组有唯一解。故存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使得当 $h\to 0$ 时，

$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小。

方法二：由 $$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}$$

得 $$\lambda_1 f(0)+\lambda_2 f(0)+\lambda_3 f(0)-f(0)=0,$$

因为 $f(0)\neq 0$，所以

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \quad 。 \qquad ①$$

又由

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h},$$

得 $$\lambda_1 f'(0)+2\lambda_2 f'(0)+3\lambda_3 f'(0)=0 \ 。$$

因为 $f'(0)\neq 0$，所以

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0 \quad , \qquad ②$$

进而有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)}{2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)$$

因为 $f''(0)\neq 0$，所以

$$\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0, \qquad ③$$

联立①，②，③得

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1, \\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0, \\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0 \end{cases}$$

同方法一知该线性方程组有唯一解，故结论成立。

【注】$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}$ 是一个三阶范德蒙行列式，其值为

$$D=(2-1)\cdot(3-1)\cdot(3-2)=2\neq 0。$$

利用初等变换或克莱姆法则，我们可以求出 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ：由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

得，$\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=1$。

3.【考点定位】定积分的换元法；重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$。

【答案】 B

【解】因为 $$na_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} nx^{n-1}\cdot\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}(1+x^n)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1+x^n\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\left(\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} na_n=-1+\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}=-1+\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^{\frac{3}{2}}=\left(1+\mathrm{e}^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}-1。$$

故答案选(B)。

4.【考点定位】 定积分的换元法；洛必达法则；积分中值定理；连续的概念；变限积分求导。

【解】由于

$$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = -\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}(x-t) \overset{u=x-t}{=} -\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u} = 1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} 1-\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{xf(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}。$$

在这里，我们用两种方法计算 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{xf(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$。

方法一：

由积分中值定理可得，存在ξ点介于 0 和x之间，使得$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = xf(\xi)$，从而

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{xf(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{xf(x)+xf(\xi)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)+f(\xi)}$$

$=\dfrac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\dfrac{1}{2}$，故原式$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$。

方法二：

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{xf(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)+\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}},$$

因为 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1} = f(0),$$

所以 $$I=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2},$$

故原式$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$。

【注】这里向同学们再提供一种简洁的方法。

首先，我们利用洛必达法则可得如下结论（这些结论同学们以后可直接使用）：

①设 $f(x)$ 连续，$f(0)\neq 0$，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(0)x+o(x)$。

事实上，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(0)x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{1}=0$。

（同学们可用形式运算 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \ =\int_0^x\left[f(0)+\alpha\right]dt=f(0)x+o(x)$ 来记忆该结论，其中 $\alpha=f(t)-f(0)$ 是 $t\to 0$ 时的无穷小量）

②设 $f(x)$ 连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim ax^n$（$a\neq 0$, n 为正整数），则

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{a}{n+1}x^{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)。$$

事实上，由 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^{n+1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(n+1)x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^n}{(n+1)x^n}=\frac{a}{n+1}$$

可得 $$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\frac{a}{n+1}x^{n+1}。$$

（同学们可用形式运算：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \ =\int_0^x\left(at^n+o\left(t^n\right)\right)\mathrm{d}t \ =\dfrac{a}{n+1}x^{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)$ 来记忆该结论）。

现在，我们利用上述结论求解该题：当 $x\to 0$ 时，$xf(x)\sim f(0)x,(f(0)\neq 0)$，

分子为：

$$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=x\left[f(0)x+o(x)\right]-\left(\frac{1}{2}f(0)x^2+o(x^2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}f(0)x^2+o\left(x^2\right)\sim\frac{1}{2}f(0)x^2,$$

分母为：$x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x\left(f(0)x+o(x)\right)\sim f(0)x^2$，故原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(0)x^2}{f(0)x^2}=\dfrac{1}{2}$。

5.【考点定位】无穷小的比较；洛必达法则；泰勒公式。

【解析】方法一：因为 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，

所以

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)(1+Bx+Cx^2),$$
$$=1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3+o(x^3)$$

由题设 $e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o\left(x^3\right)$ 可得

$$\begin{cases}1+B=A\\ \frac{1}{2}+B+C=0\\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0\end{cases},$$

解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$。

方法二：由 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，可得 $e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax=o(x^3)$，

由

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2\right]-A}{3x^2},$$

得 $$\lim_{x\to 0}\left[e^x\left((1+B)+(B+2C)x+Cx^2\right)-A\right]=0,$$

即得， $$1+B-A=0, \quad ①$$

由

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2\right]-A}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left[(1+2B+2C)+(B+4C)x+Cx^2\right]}{6x}$$

。

得 $$\lim_{x\to 0}e^x\left[(1+2B+2C)+(B+4C)x+Cx^2\right]=0,$$

即得， $$1+2B+2C=0, \quad ②$$

从而

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left[(1+2B+2C)+(B+4C)x+Cx^2\right]}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(1+2B+2C)+(B+4C)x+Cx^2}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{B+4C}{6}$$

即得， $$B+4C=0。 \quad ③$$

联立方程①，②，③可得

$$\begin{cases}1+B-A=0\\1+2B+2C=0\\B+4C=0\end{cases}，解得 A=\frac{1}{3}，B=-\frac{2}{3}，C=\frac{1}{6}。$$

6.【考点定位】函数的凹凸性；拉格朗日中值定理。

【答案】选（D）

【解】当$u_2>u_1$时，$f(2)>f(1)$，由拉格朗日中值定理知，$\exists\xi_0\in(1,2)$，使得

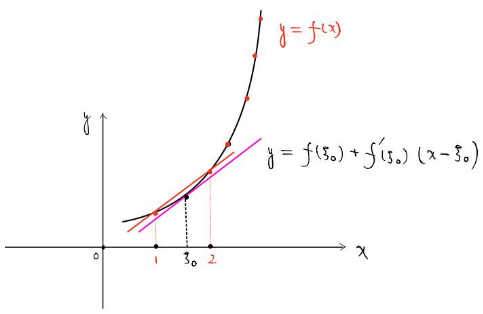
$$f'(\xi_0)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)>0。$$

又由$f''(x)>0$，$x\in(0,+\infty)$知，$f(x)$在$(0,+\infty)$为凹函数，从而曲线$y=f(x)$上任一点处的切线都在该曲线的下方。故

$$f(x)\geq f(\xi_0)+f'(\xi_0)(x-\xi_0)，$$（如图？）

从而 $$u_n=f(n)\geq f(\xi_0)+f'(\xi_0)(n-\xi_0)\to+\infty，$$

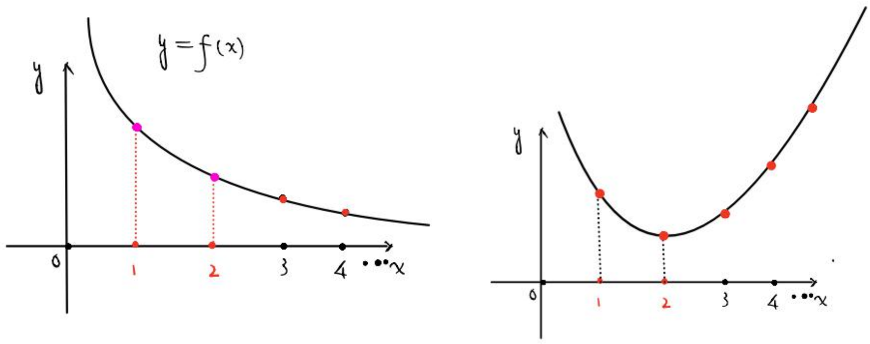
故选项（D）正确，同时说明了（C）必错误。



图？

当$u_1>u_2$时，$\{u_n\}$有可能收敛，也有可能发散。（如图？）

图？(a)中，$u_1>u_2$，满足$\{u_n\}$收敛；图？（b）中$u_1>u_2$，满足$\{u_n\}$发散。



（a）　　　　（b）

图？

综上所述，答案选（D）。

7.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v = \mathrm{e}^{\lim v\ln u}$；洛必达法则；等价无穷小替换。

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}$，下面计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}$。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1\right)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\left(1-\ln x\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1,$$

故 原式$=\mathrm{e}^{-1}$。

【注】对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}$，我们介绍另外一种求法：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1\right)}{\ln x},$$

设 $f(t)=\mathrm{e}^t$，则 $f(t)$ 在 $\left[0,\dfrac{\ln x}{x}\right]$ 上满足拉格朗日中值定理，从而存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{\ln x}{x}\right)$，使

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1=f\left(\frac{\ln x}{x}\right)-f(0)=f'(\xi)\left(\frac{\ln x}{x}-0\right)=\mathrm{e}^{\xi}\cdot\frac{\ln x}{x},$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，从而 $x\to+\infty$ 时 $\xi\to 0$，由此可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\xi}\cdot\dfrac{\ln x}{x}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi+\ln\dfrac{\ln x}{x}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi+\ln\ln x-\ln x}{\ln x}$$

$$=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi}{\ln x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=-1+0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=-1$$

8.【考点定位】定积分的性质；分部积分法；夹逼(两边夹)准则。

【解】（Ⅰ）当 $x>0$ 时，$0<\ln(1+x)<x$。事实上，令 $g(x)=\ln(1+x)-x$，有

$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1<0$，则 $g(x)<g(0)=0$，即 $0<\ln(1+x)<x$。

所以，当 $0<t<1$ 时，$0<\ln(1+t)<t$，所以 $0<|\ln t|[\ln(1+t)]^n<t^n|\ln t|$，从而

$$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t>\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\ 。$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $0\le u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$，且

$$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=-\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t\mathrm{d}t^{n+1}=-\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\to 0,(n\to\infty),$$

由夹逼准则得，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

【注】①这里我们用到了一个常用的常识性结果：

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{-\alpha}x^\alpha=0(\alpha>0)，故\lim_{t\to0}\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t=0。$$

②我们还可以利用以下方法来计算 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$：

$$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=-\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=\int_0^1 t^n\ln\frac{1}{t}\mathrm{d}t\underset{t=e^{-u}}{\overset{u=\ln\frac{1}{t}}{=}}\int_{+\infty}^0\mathrm{e}^{-nu}\cdot u\cdot(-\mathrm{e}^{-u})\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-(n+1)u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^{+\infty}[(n+1)u]\mathrm{e}^{-(n+1)u}\mathrm{d}[(n+1)u]\overset{x=(n+1)u}{=}\frac{1}{(n+1)^2}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)^2}\Gamma(2)=\frac{1}{(n+1)^2}。$$

9.【考点定位】等价无穷小替换；分子有理化；洛必达法则；泰勒公式；

极限的四则运算法则。

【解】方法一：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x-\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}}{2}=-\frac{1}{2}。$$

方法二：分子有理化

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+2\sin x)-(x+1)^2}{x^2\left[\sqrt{1+2\sin x}+(x+1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-x^2-2x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x}-\frac{1}{2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}。$$

方法三：利用泰勒公式

由于 $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$，且 $x\to0$ 时，$\sin x\to0$，

所以 $$(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2\sin x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(2\sin x)^2+o(\sin^2 x)$$

$$=1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)-x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}。$$

10.【考点定位】变限积分求导；洛必达法则；定积分的性质。

【解】记 $f(x)=\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$，由于 $\ln(1+x^2)>0,(x>0)$ 且单调递增，故 当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x) \geq \int_1^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \geq \int_1^x \ln 2\mathrm{d}t = (x-1)\ln 2 \to +\infty,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$。由 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^\alpha} = 0$，所以 $\alpha > 0$。

又由 $0 = \lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x^\alpha} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^{3-\alpha}}{\alpha}$ 得，$\alpha < 3$；

再由 $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^\alpha} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$，得 $\alpha > 1$，此时

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(1+x^2)\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \frac{2}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^\alpha(1+\frac{1}{x^2})} = 0 \quad。$$

综上所述，α 的取值范围为 $1 < \alpha < 3$。

【注】我们也可以由

$$\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t > \int_{\frac{x}{2}}^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t > \int_{\frac{x}{2}}^x \ln[1+(\frac{x}{2})^2]\mathrm{d}t = \ln[1+(\frac{x}{2})^2]\int_{\frac{x}{2}}^x 1\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x}{2}\ln(1+\frac{x^2}{4}) \to +\infty (x\to+\infty)$$

得出 $$\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \to +\infty, (x\to+\infty)。$$

11.【考点定位】函数的单调性；零点定理；单调有界法则。

【解析】（I）令 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1, (n>1)$，则 $f_n(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ 上连续，

且 $$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} - 1 = -\frac{1}{2^n} < 0，\ f_n(1) = n-1 > 0，$$

由零点定理，$f_n(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内至少有一个零点。

又因为 $f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 0, x \in (0, +\infty)$，

则 $f_n(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个零点，即方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 在 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根。

（II）方法一：由（I）可知$x_n \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，所以数列$\left\{x_n\right\}$有界。

又由于$f_n\left(x\right)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，$f_{n+1}\left(x\right)=x^{n+1}+x^n+\cdots+x-1$，故

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{n+1}$。

当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，由于$x^{n+1}>0$，所以$f_n\left(x\right)<f_{n+1}\left(x\right)$。

由（I）可知$x_n \in \left(\frac{1}{2},1\right)$为$f_n\left(x\right)=0$的根， $x_{n+1} \in \left(\frac{1}{2},1\right)$为$f_{n+1}\left(x\right)=0$的根，所以

$f_n\left(x_{n+1}\right)<f_{n+1}\left(x_{n+1}\right)=0=f_n\left(x_n\right)$

又由于$f_n\left(x\right)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递增，所以$x_n>x_{n+1}$，即数列$\left\{x_n\right\}$单调递减，由单调有界法则可知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

由$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1$得$\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$，其中$\frac{1}{2}<x_n<x_1<1$，取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1 \quad ，即\ \frac{a}{1-a}=1,$$

解得$a=\frac{1}{2}$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

方法二：由(I)知$f_n\left(x\right)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1,\left(n>1\right)$在$\left(0,+\infty\right)$内单调递增，且

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2^n}<0\left(n>1\right),$$

又由于

$$f_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)-1>\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)-1=0,$$

即$f_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)>f_n\left(x_n\right)$，所以，进一步得到了 $\frac{1}{2}<x_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$。

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}$,故由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}。$$

方法三：记 $f_n\left(x\right)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1,\left(n>1\right)$，则由(1)知

$f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2^n}<0,f_n\left(x_n\right)=0$。

又由于 $f_n'\left(x\right)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}\geq 1,x\in\left(0,+\infty\right)$，$\left(n>1\right)$，故由拉格朗日中值定理得，

存在 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},x_n\right)$，使得 $\left|f_n\left(x_n\right)-f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|=\left|f_n'(\xi)\left(x_n-\dfrac{1}{2}\right)\right|=\left|f_n'(\xi)\right|\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|\geq\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|$，

所以 $\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|\leq\left|f_n\left(x_n\right)-f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|=\left|0-\left(-\dfrac{1}{2^n}\right)\right|=\dfrac{1}{2^n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，

因此由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$。

12.【考点定位】极限的四则运算法则；等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式；拉格朗日中值定理。

【解】方法一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2-2\cos x}\left(\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4},$$

下面用两种方式求该极限：

（1）$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1-\cos x\right)}{12x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{12};$$

（2）

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}=\frac{1}{12}。$$

方法二：令 $f(t)=\mathrm{e}^t$，则由拉格朗日中值定理得

$$\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}=f(x^2)-f(2-2\cos x)=f'\left(\xi\right)\left[x^2-(2-2\cos x)\right]$$
$$=\mathrm{e}^{\xi}\left(x^2-2+2\cos x\right),$$

这里 ξ 介于 x^2 与 $2-2\cos x$ 之间。当 $x\to 0$ 时，$\xi\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\xi}\cdot\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\frac{1}{12}。$$

【注】方法二实际上给出了如下结论:

设$f(u)$连续可微，$f'(u_0)\neq 0$。若$x\to x_0$时，有$\varphi_1(x)\to u_0,\varphi_2(x)\to u_0$，则

$$f(\varphi_1(x))-f(\varphi_2(x))=f'(\xi)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\sim f'(u_0)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))。$$

例如：当$x\to 0$时，对于$g(x)=\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)$，由于$f(u)=\ln(1+u)$

满足 $f'(0)=1$，且当$x\to 0$时，$\tan x\to 0$，$\sin x\to 0$，所以

$$g(x)=f(\tan x)-f(\sin x)\sim f'(0)(\tan x-\sin x)=\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3。$$

13.【考点定位】洛必达法则；泰勒公式；三角函数积化和差。

【解】方法一：因为

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2),$$
$$\cos 2x=1-\frac{1}{2!}(2x)^2+o(x^2)=1-2x^2+o(x^2)$$
$$\cos 3x=1-\frac{1}{2!}(3x)^2+o(x^2)=1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2),$$

所以

$$1-\cos x\cos 2x\cos 3x=1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\cdot\left(1-2x^2+o(x^2)\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)$$
$$=1-\left(1-\frac{5}{2}x^2+o(x^2)\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)=1-\left(1-7x^2+o(x^2)\right)=7x^2+o(x^2)\sim 7x^2,$$

由题设可得，$a=7$，$n=2$。

方法二：由积化和差公式可得

$$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=1-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x)\cos 2x=1-\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\cdot\cos 2x$$
$$=1-\frac{1}{4}(1+\cos 4x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x),$$

下面采用两种方式求参数a,n。

其一，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(2x)^2+o(x^2)\right)+\left(1-\frac{1}{2!}(4x)^2+o(x^2)\right)+\left(1-\frac{1}{2!}(6x)^2+o(x^2)\right)\right]$$
$$=7x^2+o(x^2)\sim 7x^2$$

所以$a=7$，$n=2$。

其二，由 $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)}{ax^n}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}(2\sin 2x+4\sin 4x+6\sin 6x)}{anx^{n-1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+4\cos 4x+9\cos 6x}{an(n-1)x^{n-2}}=\frac{14}{n(n-1)a}\lim_{x\to 0}x^{2-n}$$

得

$$\begin{cases}2-n=0,\\ \frac{14}{n(n-1)a}=1,\end{cases},$$

解得 $n=2$， $a=7$ 。

方法三：因为

$$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=1-\cos x+\cos x\cdot(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x\cdot(1-\cos 3x),$$

所以

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x\cdot(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\cos x\cdot\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}}{ax^{n-2}}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\cos x\cdot\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\cos 2x\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}+\frac{9}{2}=7,$$

所以，$1=\frac{7}{a}\lim\limits_{x\to 0}x^{2-n}$，故 $\begin{cases}2-n=0\\ \frac{7}{a}=1\end{cases}$ ，解得 $n=2$ ， $a=7$ 。

方法四：

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\ln[\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x]}}{ax^n}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x+\ln\cos 2x+\ln\cos 3x}{ax^n}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]+\ln[1+(\cos 2x-1)]+\ln[1+(\cos 3x-1)]}{ax^n}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{ax^{n-2}}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]+\ln[1+(\cos 2x-1)]+\ln[1+(\cos 3x-1)]}{x^2}$$

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]+\ln[1+(\cos 2x-1)]+\ln[1+(\cos 3x-1)]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos 2x-1)]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos 3x-1)]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}=-7$$

故$1=\frac{7}{a}\lim\limits_{x\to 0}x^{2-n}$，从而$\begin{cases}2-n=0\\ \frac{7}{a}=1\end{cases}$，解得$n=2$ ，$a=7$。

【注】类似于上面的方法四，我们还有下面的方法:

由于$u\to 0$时，$u\sim\ln(1+u)$，所以有，

$$1-\cos x\cos 2x\cos 3x=-\left(\cos x\cos 2x\cos 3x-1\right)\sim-\ln\left[1+\left(\cos x\cos 2x\cos 3x-1\right)\right]$$
$$=-\ln\cos x\cos 2x\cos 3x=-\left(\ln\cos x+\ln\cos 2x+\ln\cos 3x\right)$$

又由于$\ln\cos x=\ln\left[\left(\cos x-1\right)+1\right]\sim\left(\cos x-1\right)\sim-\frac{1}{2}x^2$, 所以$\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$;

同理有$\ln\cos 2x=-\frac{4}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, $\ln\cos 3x=-\frac{9}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, 从而

$$-\left(\ln\cos x+\ln\cos 2x+\ln\cos 3x\right)=-\left[\left(-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)+\left(-\frac{4}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)+\left(-\frac{9}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right]$$
$$=7x^2+o\left(x^2\right)\sim 7x^2$$

故 $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\sim 7x^2\left(x\to 0\right)$。因此$n=2$ ，$a=7$。

14.【考点定位】幂指函数极限公式：$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}$；等价无穷小替换。

【解】$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos 2x+2x\sin x-1)]}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+2x\sin x}{x^4}}$。

下面用两种方法求指数部分的极限。

方法一：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-1+2x\sin x}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2(\sin x+x\cos x)-2\sin2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x-\sin2x}{2x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-x\sin x-2\cos2x}{6x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-3\sin x-x\cos x+4\sin2x}{12x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{8\cos2x-4\cos x+x\sin x}{12}=\frac{1}{3}。$$

故 $$\lim_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x-1+2x\sin x}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}。$$

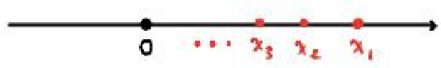
方法二：利用泰勒公式

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-1+2x\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)]-1+2x[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)]}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{3},$$

从而 $$\lim_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x-1+2x\sin x}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}。$$

15.【考点定位】单调有界法则；不等式的证明。

分析：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由 $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 两边取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{x_n}-1)$ 从而 $a\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a-1$，解出 $a=0$，由于 $x_1>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=0$，由此我们猜测：$\{x_n\}$ 单调减小且以 0 为下界（如图？）。



图？

【证明】先用数学归纳法证明：$x_n>x_{n+1}>0$

由于 $x_{n+1}=\ln\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}$，所以 $x_n>x_{n+1}>0$ 等价于 $x_n>\ln\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}>0$ 即 $\mathrm{e}^{x_n}>\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}>1$，

我们先证：当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}>1$。事实上，由拉格朗日中值定理可得，$\exists\xi\in(0,x)$，

使得 $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0}{x-0}=\mathrm{e}^\xi$，又由于 $\mathrm{e}^0<\mathrm{e}^\xi<\mathrm{e}^x$ 所以 $\mathrm{e}^x>\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}>1$。

① 当 $n=1$ 时，由 $x_1>0$ 可得，$\mathrm{e}^{x_1}>\frac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}>1$，所以 $x_1>\ln\frac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}>0$，即 $x_1>x_2>0$；

② 假设 $n=k$ 时，有 $x_k>x_{k+1}>0$，则有 $\mathrm{e}^{x_{k+1}}>\frac{\mathrm{e}^{x_{k+1}}-1}{x_{k+1}}>1$，所以

$x_{k+1}>\ln\frac{\mathrm{e}^{x_{k+1}}-1}{x_{k+1}}>0$，即 $x_{k+1}>x_{k+2}>0$。

由数学归纳法得：$x_n>x_{n+1}>0(n=1,2,3,\ldots)$。由单调有界法则可知 $\{x_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由 $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 两边取极限得，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{x_n}-1\right)$，

所以 $(a-1)e^a+1=0$。令 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+1$，则 $f'(x)=x\mathrm{e}^x$，从而当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单减，在 $(0,+\infty)$ 上单增。又由于 $f(0)=0$，所以 $a=0$。

【注】在上述证明中，关键的一步是证明：当 $x>0$ 时 $\mathrm{e}^x>\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}>1$ 我们也可以利用单调性证明：$x\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^x-1>x$，请同学们试一试。

16.【考点定位】拉格朗日中值定理；三角函数公式：$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$；

等价无穷小替换；洛必达法则；夹逼准则。

【答案】1

【解】方法一：

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x+1)-\arctan x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\left(1+x\right)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-2}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(2x+1\right)}{2\left(1+\left(1+x\right)^2\right)\left(1+x^2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(2+\frac{1}{x}\right)}{2x^4(1+\frac{1}{x^2})[\frac{1}{x^2}+(1+\frac{1}{x})^2]}=1。$$

方法二：由拉格朗日中值定理可知，存在$\xi\in(x,x+1)$，使得

$$\arctan(x+1)-\arctan x=\frac{1}{1+\xi^2}。$$

因为$x<\xi<x+1$，则 $$\frac{x^2}{1+(x+1)^2}<\frac{x^2}{1+\xi^2}<\frac{x^2}{1+x^2},$$

又因为 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x+1)^2}=1,\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1,$$

所以由夹逼准则可得，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2}=1$，即

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2}=1。$$

方法三：因为当$x\to+\infty$时，$\arctan(x+1)-\arctan x\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$，所以

$$\arctan(x+1)-\arctan x\sim\tan\left[\arctan(x+1)-\arctan x\right]$$

$$=\frac{\tan\left[\arctan(x+1)\right]-\tan(\arctan x)}{1+\tan\left[\arctan(x+1)\right]\cdot\tan(\arctan x)}=\frac{x+1-x}{1+x(x+1)}=\frac{1}{x^2+x+1}。$$

于是，$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\arctan(x+1)-\arctan x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}=1。$$

【注】这里再向同学们介绍一种简洁的解法：由于

$$\tan\left(\arctan(x+1)-\arctan x\right)=\frac{(x+1)-x}{1+(x+1)x}=\frac{1}{x^2+x+1},$$

所以，$$\arctan(x+1)-\arctan x=\arctan\frac{1}{x^2+x+1},$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\arctan(x+1)-\arctan x\right]=\lim_{x\to+\infty}x^2\arctan\frac{1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{x^2+x+1}=1。$$

17.【考点定位】定积分的性质；定积分的换元法与分部积分法；夹逼准则。

【解】（1）先证明数列$\{a_n\}$的单调性。下面给出两种方法。

方法一：由于当$x\in(0,1)$时，有$x^{n+1}<x^n$，故$x^{n+1}\sqrt{1-x^2}<x^n\sqrt{1-x^2},x\in(0,1)$，

由定积分的性质知

$$\int_0^1x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x<\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$$

故 $a_{n+1} < a_n$，从而数列 $\{a_n\}$ 单调递减。

方法二： $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t, (n=0,1,2,\cdots)$，

由于 $\sin^{n+1} t < \sin^n t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin^{n+1} t\cos^2 t < \sin^n t\cos^2 t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

故 $a_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t\cos^2 t\mathrm{d}t < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t = a_n$，从而数列 $\{a_n\}$ 单调递减。

再证明 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \ldots)$。这里我们给出两种方法。

方法一：当 $n \geq 2$ 时，$a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x^2} \cdot x\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot x^{n-2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{n-1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} x^{n-2}\mathrm{d}x = \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{n-1}{3}\left(\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right) = \frac{n-1}{3}\left(a_{n-2} - a_n\right)。$$

从而 $3a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_n)$，故 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$。

方法二： 由于 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t$，所以，当 $n \geq 2$ 时，

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t\cos^2 t\mathrm{d}\cos t = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t\mathrm{d}\cos^3 t$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^{n-1} t\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} t\cos^4 t\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\left(1-\sin^2 t\right)\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\cos^2 t\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{3}(n-1)(a_{n-2} - a_n),$$

从而 $3a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_n)$，故 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$。

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$

（2）由（1）知，$a_n < a_{n-1}$，又由于 $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2} > \dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$，所以 $\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1} < a_n < a_{n-1}$，

$$从而\ \frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1\,,$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$。

18.【考点定位】定积分的应用；定积分的分部积分法；等比数列求和。

【解】

$$S_n=\int_0^{n\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x\ 。$$（如图？）

由于 $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x\overset{x=t+k\pi}{=}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(t+k\pi)}\left|\sin(t+k\pi)\right|\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-k\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$，

所以 $$S_n=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-k\pi}\right)\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t\ 。$$

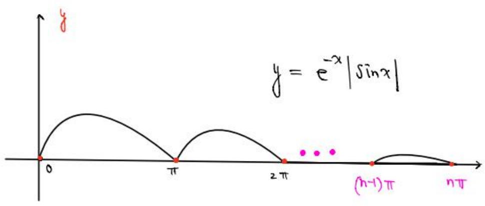
下面计算 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$。

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}(-\cos t)=-\mathrm{e}^{-t}\cos t\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\ =(1+\mathrm{e}^{-\pi})-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\sin t$$

$$=(1+\mathrm{e}^{-\pi})-\left[(\mathrm{e}^{-t}\sin t)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t\right]=(1+\mathrm{e}^{-\pi})-I\ ,$$

所以 $I=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$，从而 $S_n=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-k\pi}=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\cdot\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}$，因此，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2(\mathrm{e}^{\pi}-1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\ 。$$



图？

【注】在计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$ 时，同学们可利用推广的分部积分法快速得到结果：

$\sin t\downarrow$	+	$\cos t$	−	$-\sin t$
$\mathrm{e}^{-t}\uparrow$		$-\mathrm{e}^{-t}$		e^{-t}

$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=(-\mathrm{e}^{-t}\sin t-\mathrm{e}^{-t}\cos t)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$，

所以$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}[-\mathrm{e}^{-t}(\sin t+\cos t)]\Big|_0^{\pi}=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$。

19.【考点定位】定积分的换元法；变限积分求导；分段函数求导；洛必达法则；导数的定义；连续的概念。

【解】由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且$f(x)$连续，所以$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=1\cdot0=0$。

当$x=0$时，$g(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0$；

当$x\neq0$时，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(xt)\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}(xt)\overset{u=xt}{=}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$；

故
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, x\neq0\\ 0,\qquad x=0\end{cases}。$$

下面求$g(x)$的导数。

当$x\neq0$时，

$$g'(x)=\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)'=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{x}\cdot f(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}；$$

当$x=0$时，

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}；$$

综上所述，

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, x\neq0,\\ \dfrac{1}{2}\qquad, x=0。\end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}[\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g'(0)\text{。}$$

故 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

20.【考点定位】等价无穷小替换；洛必达法则；泰勒公式；极限的四则运算法则。

【解】

方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\cdot\sin x-(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1+\sin x\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^x+\cos x\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{x^2}\sin x}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\mathrm{e}^x-\sin x\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{x^2}\cos x+\mathrm{e}^{x^2}\cos x+\mathrm{e}^{x^2}2x\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$

方法二：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\cdot\sin x-(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(\mathrm{e}^x-1)+\sin x\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(\mathrm{e}^x-1)+\sin x\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x^2},$$

其中，$I_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{x^2}=1$。

对于极限 $I_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}$ 可用两种方法求出：

其一，$I_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^x}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x-\mathrm{e}^x}{2}=-\dfrac{1}{2}$；

其二，

$$I_2=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-\left[1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right]+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2};$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=I_1+I_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$

【注】本题中的变限积分 $\int_0^x e^{t^2}dt$ 也可作如下处理。

由于 $e^{t^2}=1+t^2+\frac{1}{2!}t^4+\cdots$，所以

$$\int_0^x e^{t^2}dt=\int_0^x(1+t^2+\frac{1}{2}t^4+\ldots)dt=x+\frac{1}{3}x^3+\cdots=x+o(x),$$

所以

$$I=\lim_{x\to 0}(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1+\int_0^x e^{t^2}dt)-(e^x-1)}{(e^x-1)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)][1+x+o(x)]-[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}。$$