专题 4 微分方程及差分方程

（A 组）基础题

1.【考点定位】 可降阶的微分方程；可分离变量的微分方程。

【答案】$y=\dfrac{c_1}{x^2}+c_2$，c_1,c_2为任意常数

【解】令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入方程得 $x\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+3p=0$，分离变量后两边积分得

$\int\dfrac{1}{p}\mathrm{d}p=-\int\dfrac{3}{x}\mathrm{d}x$，所以 $\ln|p|=-3\ln|x|+c$，从而 $p=\dfrac{c_0}{x^3}$，即 $y'=\dfrac{c_0}{x^3}$，

因此 $y=\int\dfrac{c_0}{x^3}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\dfrac{c_0}{x^2}+c_2=\dfrac{c_1}{x^2}+c_2$，故该方程通解 $y=\dfrac{c_1}{x^2}+c_2$，c_1,c_2为任意常数。

2.【考点定位】一阶线性微分方程；不定积分的换元法。

【答案】$y=\dfrac{2x-1}{2\arcsin x}$

【解】方法一：由题设得 $y'+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}y=\dfrac{1}{\arcsin x}$，由一阶线性微分方程通解公式知

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{\arcsin x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\arcsin x}}\left[\int\frac{1}{\arcsin x}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\arcsin x}}\mathrm{d}x+c\right]$$

$=\dfrac{1}{\arcsin x}\left[\int\dfrac{1}{\arcsin x}\arcsin x\mathrm{d}x+c\right]=\dfrac{1}{\arcsin x}(x+c)$。由于曲线过$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，故

$0=\dfrac{1}{\arcsin\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}+c\right)$，解得 $c=-\dfrac{1}{2}$，故 $y=\dfrac{1}{\arcsin x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2x-1}{2\arcsin x}$。

方法二：由于 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=(y\cdot\arcsin x)'$，所以上述方程为$(y\cdot\arcsin x)'=1$，

$y\arcsin x=x+c$。又曲线过$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，故 $0=\dfrac{1}{2}+c$，解得 $c=-\dfrac{1}{2}$。

因此 $y=\dfrac{1}{\arcsin x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2x-1}{2\arcsin x}$。

3.【考点定位】二阶常系数齐次线性方程解的结构。

【答案】$y''-2y'+2y=0$

【解】设所求方程为 $y''+py'+qy=0$。由通解形式可知 $y_1=\mathrm{e}^x\sin x, y_2=\mathrm{e}^x\cos x$ 是齐次方程的两个线性无关的解，所以齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=1\pm i$，

从而 $r^2+pr+q=(r-r_1)(r-r_2)=r^2-(r_1+r_2)r+r_1r_2=r^2-2r+2$

故所求的方程为 $y''-2y'+2y=0$。

4. 【考点定位】可分离变量的方程。

【答案】$y=\dfrac{2}{x}$

【解】方法一：由 $xy'+y=0$ 知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=0$，从而 $\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，两边积分得 $\int\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y=-\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，解得 $\ln|y|=-\ln|x|+c_0$，从而 $y=\dfrac{c}{x}$。因为 $y(1)=2$，所以 $c=2$，故 $y=\dfrac{2}{x}$。

方法二：$xy'+y=0\Leftrightarrow(xy)'=0$，所以 $xy=c$，即 $y=\dfrac{c}{x}$。又因为 $y(1)=2$，所以 $c=2$，故 $y=\dfrac{2}{x}$。

5. 【考点定位】可分离变量的方程。

【答案】$y=cx\mathrm{e}^{-x}, c$ 为任意常数。

【解】由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 得 $\int\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\int\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x$，所以 $\ln|y|=\ln|x|-x+c_1$，故 $y=cx\mathrm{e}^{-x}$。

6. 【考点定位】一阶线性微分方程解的性质；一阶线性微分方程通解的结构。

【答案】B

【解】因为 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个不同的解，所以 $y_1(x)-y_2(x)$ 是其对应的齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的非零解，故由一阶线性微分方程解的结构知 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为 $y=y_1(x)+c\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$。因此答案选(B)。

【注】①对于一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$，其通解为：

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

其中 $y^*=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 是原方程的一个特解，$Y=c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是其对应的齐次方程的通解。

②若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个不同的解，则其通解为

$$y=y_1(x)+c\left[y_1(x)-y_2(x)\right]=(1+c)y_1(x)+(-c)y_2(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

其中 $c_1+c_2=(1+c)+(-c)=1$。

7. 【考点定位】线性微分方程解的性质及结构。

【答案】D

【解】方法一：由通解形式，所求方程可设为 $y''+py'+qy=f(x)$。由题意知 $r_1=1,r_2=-2$ 是齐次线性微分方程的两个特征根，故 $r^2+pr+q=(r-1)(r+2)=r^2+r-2$，所以 $p=1,q=-2$，从而对应的齐次线性微分方程为 $y''+y'-2y=0$。

又 xe^x 为非齐次线性微分方程 $y''+y'-2y=f(x)$ 的特解，故

$f(x)=\left(x\mathrm{e}^x\right)''+\left(x\mathrm{e}^x\right)'-2\left(x\mathrm{e}^x\right)=(x+2)\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x=3\mathrm{e}^x$, 从而微分方程为 $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$，故答案选（D）。

方法二：对 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$ ①，两边对 x 求导，

$y'=C_1\mathrm{e}^x-2C_2\mathrm{e}^{-2x}+(x+1)\mathrm{e}^x$ ②， 再次求导得

$y''=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{-2x}+(x+2)\mathrm{e}^x$ ③，由①、②解得

$\begin{cases} C_1\mathrm{e}^x=\dfrac{1}{3}\left[2y+y'-(3x+1)\mathrm{e}^x\right] \\ C_2\mathrm{e}^{-2x}=\dfrac{1}{3}\left(y-y'+\mathrm{e}^x\right) \end{cases}$，代入③得

$$y''=\frac{1}{3}\left[2y+y'-(3x+1)\mathrm{e}^x\right]+4\times\frac{1}{3}\left(y-y'+\mathrm{e}^x\right)+(x+2)\mathrm{e}^x=-y'+2y+3\mathrm{e}^x,$$

所以所求方程为 $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$，故答案选（D）。

8.【考点定位】二阶常系数非齐次线性微分方程。

【答案】$y=-2\mathrm{e}^{2x}+C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$，$C_1,C_2$ 为任意常数。

【解】微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 的特征方程为 $r^2-4r+3=0$，解得 $r_1=1,r_2=3$ 。故齐次的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

设 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的特解为 $y^*=\mathrm{e}^{2x}a$，将 y^* 代入 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 得 $-a=2$，故 $y^*=-2\mathrm{e}^{2x}$ 。从而该微分方程的通解为：

$$y=y^*+Y=-2\mathrm{e}^{2x}+C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}，C_1,C_2 \text{为任意常数。}$$

9. 【考点定位】可分离变量的方程。

【答案】$\dfrac{1}{x}$

【解】$xy'+y=0$ 变为 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，所以 $\ln|y|=-\ln|x|+c_1$，得 $y=\frac{c}{x}$，又由于 $y(1)=1$，所以 $c=1$，故 $y=\frac{1}{x}$。

【注】这里向同学们介绍另一种解法：

$xy'+y=0\Leftrightarrow(xy)'=0\Leftrightarrow xy=c$，再由 $y(1)=1$，得 $c=1$，故 $y=\frac{1}{x}$。

10.【考点定位】二阶线性常系数非齐次微分方程

【解】先解齐次方程 $y''-3y'+2y=0$，其对应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，解得 $r_1=1,r_2=2$，所以齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$。

再求原方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的特解。

设特解 $y^*=\mathrm{e}^xQ(x)$，这里 $Q(x)$ 为多项式，代入方程得 $Q''-Q'=2x$，①

设 $Q(x)=a_1x+a_2x^2$，代入①式得 $2a_2-(a_1+2a_2)x=2x$，比较系数得 $\begin{cases}-2a_2=2\\2a_2-a_1=0\end{cases}$，解得

$\begin{cases}a_2=-1\\a_1=-2\end{cases}$，故 $y^*=\left(-2x-x^2\right)\mathrm{e}^x$。原方程的通解为

$$y=\left(-2x-x^2\right)\mathrm{e}^x+C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}，其中 C_1,C_2 为任意常数。$$

【注】在求解二阶线性常系数非齐次方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}P(x)$ 时，(其中 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 为多项式)，很多教材及教辅上给出的方法是先根据 λ 与特征方程的关系设特解 $y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q(x)$ 的形式，其中 $y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q(x)$，然后再代入方程进行计算,具体如下表：

特征方程 $r^2+pr+q=0$	特解 $y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q(x)$ 中 $Q(x)$ 的形式
λ 不是特征方程的根	$Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$
λ 是特征方程的单根	$Q(x)=\left(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n\right)x$
λ 是特征方程的二重根	$Q(x)=\left(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n\right)x^2$

这个方法的一大缺陷是计算量很大，很容易出现计算错误！建议同学们在解这类方程时，换用如下的方法：设 $y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q(x)$，暂时不管多项式 $Q(x)$ 的形式，代入原方程后得到

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)Q(x)=P(x)$$

然后再根据上式设出多项式$Q(x)$的形式并通过比较系数求出$Q(x)$，从而得到一个特解。这种做法即快又准确！我们看三个实例：

① 求$y''-2y'+y=\mathrm{e}^x\left(x^2+x+1\right)$的一个特解。设$y^*=\mathrm{e}^xQ(x)$，这里$\lambda=1,p=-2,q=1$，代入原方程得 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)Q(x)=x^2+x+1$，

所以 $Q''(x)=x^2+x+1$，两次积分取$Q(x)=\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2=\left(\dfrac{1}{12}x^2+\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{2}\right)x^2$，得到特解$y^*=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{12}x^2+\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{2}\right)x^2$。

②求$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x\left(x^2+x+1\right)$的一个特解。设$y^*=\mathrm{e}^xQ(x)$，这里$\lambda=1,p=-3,q=2$，代入原方程得 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)Q(x)=x^2+x+1$，

所以 $Q''(x)-Q'(x)=x^2+x+1$，此时令$Q(x)=b_1x+b_2x^2+b_3x^3$，代入上式可得：

$(2b_2+6b_3x)-\left(b_1+2b_2x+3b_3x^2\right)=x^2+x+1$，比较系数得$\begin{cases}-3b_3=1,\\6b_3-2b_2=1,\\2b_2-b_1=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}b_3=-\dfrac{1}{3},\\b_2=-\dfrac{3}{2},\\b_1=-4。\end{cases}$

$Q(x)=-4x-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3=\left(-4-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{3}x^2\right)x$，得到特解$y^*=\mathrm{e}^x\left(-4-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{3}x^2\right)x$。

③求$y''+3y'+2y=\mathrm{e}^x\left(x^2+x+1\right)$的一个特解。设$y^*=\mathrm{e}^xQ(x)$，这里$\lambda=1,p=3,q=2$，代入原方程得 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)Q(x)=x^2+x+1$，

所以 $Q''(x)+5Q'(x)+6Q(x)=x^2+x+1$，此时令$Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$，代入上式可得：

$\left(2b_2\right)+5\left(b_1+2b_2x\right)+6\left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)=x^2+x+1$，比较系数得$\begin{cases}6b_2=1,\\10b_2+6b_1=1,\\2b_2+5b_1+6b_0=1,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}b_2=\dfrac{1}{6},\\b_1=-\dfrac{1}{9},\\b_0=\dfrac{11}{54}。\end{cases}$ $Q\left(x\right)=\dfrac{11}{54}-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{1}{6}x^2$，得到特解 $y^*=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{11}{54}-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{1}{6}x^2\right)$。

同学们可以看到，这种方法计算量小且不易出错，相比传统的做法要优越的多！

11.【考点定位】微分方程解的概念；一阶线性微分方程解的性质。

【答案】A

【解】因为$\lambda y_1+\mu y_2$是$y'+p(x)y=q(x)$的解，所以

$$\begin{aligned}&\left(\lambda y_1+\mu y_2\right)'+p\left(x\right)\left(\lambda y_1+\mu y_2\right)=\lambda\left(y_1'+p\left(x\right)y_1\right)+\mu\left(y_2'+p\left(x\right)y_2\right)\\&=\lambda q\left(x\right)+\mu q\left(x\right)=\left(\lambda+\mu\right)q\left(x\right)=q\left(x\right)\end{aligned}$$

故 $\lambda+\mu=1$ ①；

又因为$\lambda y_1-\mu y_2$是$y'+p(x)y=0$的解，所以

$$\begin{aligned}&\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)'+p\left(x\right)\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)=\lambda\left(y_1'+p\left(x\right)y_1\right)-\mu\left(y_2'+p\left(x\right)y_2\right)\\&=\lambda q\left(x\right)-\mu q\left(x\right)=\left(\lambda-\mu\right)q\left(x\right)=0,\end{aligned}$$

故$\lambda-\mu=0$ ②。联立①、②得 $\begin{cases}\lambda+\mu=1,\\\lambda-\mu=0,\end{cases}$ 解得$\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$。

【注】设$y_1,y_2,\cdots,y_n$是一阶线性非齐次方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个解，$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数，则有①当$c_1+c_2+\cdots+c_n=1$时，$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$是$y'+p(x)y=q(x)$的解；

②当$c_1+c_2+\cdots+c_n=0$时，$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$是$y'+p(x)y=0$的解。

12.【考点定位】 一阶线性微分方程；满足初始条件的特解。

【答案】 $y=\mathrm{e}^{-x}\cdot\sin x$

【解】由一阶线性微分方程的通解公式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\cdot \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{-x}\left(\int \mathrm{e}^{-x}\cdot\cos x\cdot \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int\cos x\mathrm{d}x+c\right)$$

$=\mathrm{e}^{-x}\left(\sin x+c\right)$，又因为 $y(0)=0$，所以 $c=0$，故 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$。

【注】如果同学们遗忘了通解公式，可以用常数变易法或者积分因子法求解，具体过程如下:

①常数变易法

先求解齐次方程 $y'+y=0$,方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\mathrm{d}x$，两边积分得 $\int\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\mathrm{d}x$，所以 $\ln|y|=-x+c_1$，从而 $y=c\mathrm{e}^{-x}$；

再解非齐次方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$，

令 $y=c(x)\mathrm{e}^{-x}$, 代入方程得 $c'(x)=\cos x$, 所以 $c(x)=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+c$, 从而 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(\sin x+c\right)$。

又因为 $y(0)=0$，所以 $c=0$，故 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$。

②积分因子法

方程两边同乘 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x}$ 得 $\mathrm{e}^{x}\left(y'+y\right)=\cos x$，从而 $\left(\mathrm{e}^{x}y\right)'=\cos x$，所以

$\mathrm{e}^{x}y=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+c,$ 故 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(\sin x+c\right)$。又因为 $y(0)=0$，所以 $c=0$，故 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$。

13.【考点定位】一阶线性微分方程。

【答案】$\sqrt{x}$

【解】方法一：原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{3y^2-x}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{3y^2-x}{y}=3y-\dfrac{x}{y}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{x}{y}=3y$，故

$$x=\mathrm{e}^{\int -\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int 3y\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\cdot\mathrm{d}y+c\right]=\frac{1}{y}\left[\int 3y^2\mathrm{d}y+c\right]=\frac{1}{y}\left[y^3+c\right]=y^2+\frac{c}{y},$$

又由于 $y(1)=1$，所以 $c=0$，从而得到 $x=y^2$，故 $y=\sqrt{x}$。

方法二：原方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 是形如 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 的方程，其中 $P=y$, $Q=x-3y^2$。由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以这是一个全微分方程，因此我们可用全微分方程的求解方法求解。

其一：由于 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-3y^2\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}y^3=\mathrm{d}(xy-y^3)$，

故通解为 $xy-y^3=c$，又由于 $y(1)=1$，所以 $c=0$，从而 $xy-y^3=0$，得 $y=\sqrt{x}$。（因为 $y(1)=1>0$）。

其二：设 $\mathrm{d}U(x,y)=y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y$，则 $U(x,y)=\int y\mathrm{d}x+\varphi(y)=xy+\varphi(y)$，

又由 $x-3y^2=\dfrac{\partial U}{\partial y}=x+\varphi'(y)$ 得 $\varphi(y)=-y^3$，故 $U(x,y)=xy-y^3$，从而方程的通解为 $xy-y^3=c$，

又由于 $y(1)=1$，所以 $c=0$，从而 $xy-y^3=0$，得 $y=\sqrt{x}$。

14.【考点定位】 二阶常系数线性方程通解的结构；微分方程解的概念。(题目有错！！！)

【答案】 e^x

【解】因为齐次方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为 $r^2+r-2=0$ ，特征根为

$r_1=-2,r_2=1$ 。所以该方程的通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$，将 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 代入方程

$f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，可得 $2C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^x$ ，所以 $C_1=1,C_2=0$ ，故 $f(x)=\mathrm{e}^x$。

【注】此题还有如下一种特殊解法：$\begin{cases} f''(x)+f'(x)-2f(x)=0, & ① \\ f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x, & ② \end{cases}$，方程②两边求导得：

$f''(x)+f'(x)=2\mathrm{e}^x$ ③，由③−①得 $2f(x)=2\mathrm{e}^x$，从而 $f(x)=\mathrm{e}^x$。直接检验可知

$f(x)=\mathrm{e}^x$ 满足①、②，故 $f(x)=\mathrm{e}^x$。

15.【考点定位】二阶常系数齐次线性微分方程

【答案】 $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ c_1,c_2 为任意常数

【解】该微分方程的特征方程为 $r^2-r+\dfrac{1}{4}=0$，解得 $r_1=r_2=\dfrac{1}{2}$，故该方程的通解为 $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$，

c_1,c_2 为任意常数。

16.【考点定位】考查二阶常系数线性非齐次微分方程解的反问题、二阶线性常微分方程解的性质以及通解的结构。

【答案】 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{2x}$， C_1,C_2 为任意常数。

【解】由题设可知：$y_1-y_3=\mathrm{e}^{3x}$，$y_2-y_3=\mathrm{e}^x$ 是对应齐次方程的两个线性无关的解且 $y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是非齐次方程的一个特解，所以非齐次方程的通解为 $y=-x\mathrm{e}^{2x}+C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^x$， C_1,C_2 为任意常数。

17.【考点定位】二阶线性常系数齐次微分方程。

【答案】 $y=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$，其中 c_1,c_2 为任意常数。

【解】该方程的特征方程为 $r^2+2r+3=0$，解得 $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i$，因此通解为

$y=c_1\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{2}x+c_2\mathrm{e}^{-x}\sin\sqrt{2}x=\mathrm{e}^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x\right)$，其中$c_1,c_2$为任意常数。

18.【考点定位】可分离变量方程；一阶微分方程初值问题。

【答案】$y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$

【解】$2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y^2-2=0$变为$\dfrac{2y}{y^2+2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，两边积分得$\int\dfrac{2y}{y^2+2}\mathrm{d}y=\int\mathrm{d}x$，解得$\ln(y^2+2)=x+c$，因为$y(0)=1$，所以$c=\ln3$，则$\ln(y^2+2)=x+\ln3$，所以$y^2=3\mathrm{e}^x-2$，由$y(0)=1>0$可知$y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$。

19.【考点定位】二阶常系数线性微分方程解的结构。

【答案】D

【解】由题意知$y''+ay'+by=0$的特征方程$r^2+ar+b=0$的两个特征根为$r_1=r_2=-1$,所以

$$r^2+ar+b=(r-1)^2=r^2-2r+1,\text{从而}a=2,b=1,$$

故对应的齐次方程为$y''+2y'+y=0$。又由于e^x是$y''+2y'+y=C\mathrm{e}^x$的特解，所以$\left(\mathrm{e}^x\right)''+2\left(\mathrm{e}^x\right)'+\mathrm{e}^x=c\mathrm{e}^x$，解得$c=4$，综上所述，$a=2,b=1,c=4$。故答案选（D）。

20.【考点定位】高阶常系数齐次线性方程解的结构。

【答案】$y=c_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(c_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$。

【解】$y'''-y=0$的特征方程为$r^3-1=0$，分解因式得$(r-1)(r^2+r+1)=0$，从而得到特征根为$r_1=1$，

$r_{2,3}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，故方程的通解为$y=c_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(c_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$。

（B组）提升题

1.【考点定位】高阶线性常系数齐次微分方程解的结构。

【答案】 B

【解】设所求方程为 $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$。由题设可知因为该方程的特征根为 $-1,-1,1$，

所以 $r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = (r+1)^2(r-1) = (r^2+2r+1)(r-1) = r^3 + r^2 - r - 1,$

故所求方程为 $y''' + y'' - y' - y = 0$。答案选(B)。

2.【考点定位】 导数的定义；可分离变量方程；一阶微分方程初值问题；幂指函数极限公式 $\lim u^v = \mathrm{e}^{\lim v\ln u}$。

【解】由 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 可得 $\mathrm{e}^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，所以

$$\frac{1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{f(x+hx)}{f(x)}-1\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}\cdot\frac{x}{f(x)}$$

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，所以当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+hx)-f(x)}{hx} = f'(x)$，从而

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{x\cdot f'(x)}{f(x)}$，即 $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2}$，分离变量可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$，两边积分得 $\int\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y = \int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$，解得

$y = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$，所以 $1 = \lim\limits_{x\to+\infty} c\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = c$，即 $c=1$。故 $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$。

3.【考点定位】二阶可降阶微分方程。

【答案】 $y = \sqrt{x+1}$

【解】 令 $y' = p$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得，$yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0$，所以 $\int\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = \int -\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，

积分得 $\ln|p| = -\ln|y| + c_1$，所以 $p = \dfrac{c}{y}$，又由于 $y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$，

所以 $c = \dfrac{1}{2}$，故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2y}$，分量变量后积分得 $\int 2y\mathrm{d}y = \int\mathrm{d}x$，所以 $y^2 = x + c_2$。

再由 $y\big|_{x=0} = 1$ 得 $c_2 = 1$，所以 $y^2 = x+1$，由于 $y\big|_{x=0} = 1$，故 $y = \sqrt{x+1}$。

【注】①在求解过程中，由 $y^2 = x+1$ 可得 $y = \pm\sqrt{x+1}$，又由于 $y\big|_{x=0} = 1$，所以只能取 $y = \sqrt{x+1}$；

②这里向同学们介绍另一种解法：$yy'' + y'^2 = 0 \Leftrightarrow (yy')' = 0 \Leftrightarrow yy' = c$，由初值条件

$y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$ 得 $yy' = \dfrac{1}{2}$，所以 $2y\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$，积分得 $\int 2y\mathrm{d}y = \int\mathrm{d}x$，所以 $y^2 = x + c_2$。

再由 $y\big|_{x=0}=1$ 得 $c_2=1$，所以 $y^2=x+1$，由于 $y\big|_{x=0}=1$，故 $y=\sqrt{x+1}$。

4.【考点定位】洛必达法则；泰勒公式；二阶线性常系数非齐次微分方程。

【答案】 C

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}$，下面用两种方法求此极限。

方法一：利用泰勒公式

由 $y(0)=0, y'(0)=0$ 得

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=\frac{y''(0)}{2!}x^2+o(x^2),$$

又由于 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$，将 $x=0$ 代入得 $y''(0)=\mathrm{e}^0=1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=2$$ 。故答案选（C）。

方法二：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)},$$

又由于 $y''(0)+py'(0)+qy(0)=\mathrm{e}^0=1$，故 $y''(0)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}=2$。故答案选（C）。

【注】作为选择题，可以采用特例法。这里取 $p=0, q=0$，则方程变为 $y''=\mathrm{e}^{3x}$，故

$y'=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+c_1, y=\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}+c_1x+c_2$，由 $y(0)=0, y'(0)=0$ 得 $y=\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2 。$$

5.【考点定位】微分方程解的定义；可分离变量的微分方程方程；齐次方程。

【答案】A

【解】方法一：由 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 知 $y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，将 y, y' 代入微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 得

$$\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\ln x}+\varphi(\ln x),$$

从而 $\varphi(\ln x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{-1}{(\ln x)^2}$，所以 $\varphi(u)=-\dfrac{1}{u^2}$，因此 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)=-\dfrac{y^2}{x^2}$，

故答案选（A）。

方法二：令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu$，两端同时对 x 求导 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入原微分方程得

$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$，从而 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$ ①，由 $y=\frac{x}{\ln x}$ 是原方程得解知，$u=\frac{y}{x}=\frac{1}{\ln x}$ 是①的解，所以

$$\varphi(\ln x)=x\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=x\cdot\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln^2 x}，从而 \varphi(u)=-\frac{1}{u^2}，因此 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}，$$

故答案选（A）。

6.【考点定位】 一阶线性微分方程初值问题。

【答案】$y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$

【解】原方程 $\left(y+x^3\right)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 变为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{2x}=\frac{x^2}{2}$，由一阶线性微分方程的通解公式知

$$y=\mathrm{e}^{-\int(-\frac{1}{2x})\mathrm{d}x}\left[\int\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\sqrt{x}\left[\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+c\right]==\frac{1}{5}x^3+c\sqrt{x}，$$

又因为 $y\big|_{x=1}=\frac{6}{5}$，所以 $\frac{6}{5}=\frac{1}{5}+c$，解得 $c=1$，故 $y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$。

7.【考点定位】二阶常系数线性非齐次方程解的性质。

【答案】 A

【解】对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i$。

所以方程 $y''+y=x^2+1$ 的特解形式可设为 $y_1^*=ax^2+bx+c$，

方程 $y''+y=\sin x$ 的特解形式可设为 $y_2^*=x\left(A\sin x+B\cos x\right)$，

故原方程的特解形式可设为 $y^*=y_1^*+y_2^*=ax^2+bx+c+x\left(A\sin x+B\cos x\right)$。

8.【考点定位】一阶线性微分方程。

【答案】$y=\frac{x}{3}(\ln x-\frac{1}{3})$

【解】原方程 $xy'+2y=x\ln x$ 变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\ln x$，所以

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\ln x\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\frac{1}{x^2}\left[\int x^2\ln x\mathrm{d}x+c\right]，由于$$

$$\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \ln x\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^2\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\frac{1}{3}x^3\right),$$

所以 $y=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\frac{1}{3}x^3\right)+c\right)=\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+\frac{c}{x^2}$。

又由于 $y(1)=-\frac{1}{9}$，所以 $c=0$，故 $y=\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$。

9.【考点定位】 可降阶的微分方程；一阶线性微分方程。

【解】令 $y'=p$，则 $y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ 代入原方程可得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x+p^2)=p$ ①，

方程①可化为线性方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}-\frac{1}{p}x=p$，其通解为 $x=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p}\left(\int p\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p}\cdot\mathrm{d}p+c\right)=p(p+c)$，

因为 $y'(1)=1$，所以 $x=1$ 时，$p=1$，从而 $1=c+1$，即 $c=0$，所以 $x=p^2$。

又因为 $p(1)=y'(1)=1>0$，所以 $p=\sqrt{x}$，即 $y'=\sqrt{x}$，故 $y=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_0$，再由 $y(1)=1$

可得 $c_0=\frac{1}{3}$。故所求的特解为 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$。

【注】考研数学大纲中，数一和数学二要求掌握如下两种形式的二阶可降阶方程：

① $y''=f(x,y')$，此时令 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，原方程变为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$。

② $y''=f(y,y')$，此时令 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程变为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$。

10.【考点定位】齐次方程。

【答案】$\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$

【解】令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入方程得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\frac{1}{2}u^3$，所以 $\int\frac{\mathrm{d}u}{u^3}=\int-\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$，

从而 $-\frac{1}{2}u^{-2}=-\frac{1}{2}\ln x+c$，由 $y|_{x=1}=1$，即 $u(1)=1$，得 $c=-\frac{1}{2}$，

故　$u^2=\frac{1}{1+\ln x}$，所以 $u=\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}$（因为 $u(1)=1$），因此 $y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$。

11.【考点定位】一阶线性微分方程。

【答案】$y=x\left(-\mathrm{e}^{-x}+c\right)$，其中$c$为任意常数

【解】由题意知$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}y=x\mathrm{e}^{-x}$，由一阶线性微分方程的通解公式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int(-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=x\left(\int x\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x+c\right)=x\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+c\right)=x\left(-\mathrm{e}^{-x}+c\right),$$

其中c为任意常数。

12.【考点定位】高阶常系数线性齐次方程解的结构。

【答案】 D

【解】由通解形式为$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$可知，三阶常系数线性齐次方程

$y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$对应的特征根为$r_1=1,r_{2,3}=\pm 2i$，所以

$r^3+a_2r^2+a_1r+a_0=(r-1)(r-2i)(r+2i)=(r-1)\left(r^2+4\right)=r^3-r^2+4r-4$，故所求的方程为

$y'''-y''+4y'-4y=0$。答案选(D)。

13.【考点定位】二阶线性常系数非齐次微分方程解的结构。

【答案】$y=x+2-x\mathrm{e}^x$

【解】由$y''+ay'+by=0$ 的通解为$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$ 知，特征方程$r^2+ar+b=0$ 的解为

$r_1=r_2=1$ ，所以$r^2+ar+b=(r-1)^2=r^2-2r+1$ ，即$a=-2,b=1,$

因此非齐次方程为 $y''-2y'+y=x$ ①，设方程①的特解为$y^*=a+bx$ ，代入方程①得，

$-2b+(a+bx)=x$ ，所以$\begin{cases}b=1\\-2b+a=0\end{cases}$ ，解得$\begin{cases}b=1\\a=2\end{cases}$ ，从而$y^*=2+x$，故方程①的通解为

$y=2+x+(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$。由$y(0)=2,y'(0)=0$，得$\begin{cases}2=2+C_1\\0=1+C_1+C_2\end{cases}$，解得$\begin{cases}C_1=0\\C_2=-1\end{cases}$，故所求解为

$y=2+x-x\mathrm{e}^x$。

14.【考点定位】高阶常系数线性齐次方程解的结构。

【答案】$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$，$C_1,C_2,C_3$为任意常数

【解】原方程的特征方程为$r^3-2r^2+r-2=0$，即$(r-2)(r^2+1)=0$，所以特征根为$r_1=2,r_{2,3}=\pm i$。

故原方程的通解为$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$，$C_1,C_2,C_3$为任意常数。

15.【考点定位】 二阶常系数线性方程特解的形式； 解的叠加原理。

【答案】 C

【解】 $y''-\lambda^2y=0$的特征方程为$r^2-\lambda^2=0$，解得$r_{1,2}=\pm\lambda$。故$y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}$的特解为$y_1^*=e^{\lambda x}\cdot ax$，$y''-\lambda^2y=e^{-\lambda x}$的特解为$y_2^*=e^{-\lambda x}\cdot bx$。由解的叠加原理可得原方程的特解形式为：$y^*=y_1^*+y_2^*=e^{\lambda x}\cdot ax+e^{-\lambda x}\cdot bx=x\left(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x}\right)$，故答案选（C）。

【注】解的叠加原理是指：若y_i^*是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$的特解，则

$\sum_{i=1}^{n}y_i^*$是$y''+p(x)y'+q(x)y=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$的一个特解。

16.【考点定位】一阶微分方程初值问题；可分离变量的方程；齐次方程。

【答案】 $y=xe^{2x+1}$。

【解】原方程可化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}\text{ ，①}$$

令$\frac{y}{x}=u$，则$y=xu$，$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$，代入方程①得$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u$，分离变量得$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$，两边积分可得$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}$，所以$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+c_0$，从而$\ln u-1=cx$，即得$\ln\frac{y}{x}-1=cx$，因此$y=xe^{cx+1}$。又因为$y(1)=e^3$，所以$c=2$，故所求特解为$y=xe^{2x+1}$。

17. 【考点定位】 一阶线性微分方程解的性质。（题目有错误！！！）

【答案】 A

【解】方法一：由题意知$Y=y_2-y_1=2\sqrt{1+x^2}$是$y'+p(x)y=0$的解，且$(1+x^2)^2$为$y'+p(x)y=q(x)$的解，故

$$p(x)=-\frac{Y'}{Y}=-\frac{2\times\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\times 2x}{2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{x}{1+x^2},$$

将$(1+x^2)^2$代入$y'+p(x)y=q(x)$得，$q(x)=2(1+x^2)\cdot 2x-\dfrac{x}{1+x^2}\cdot(1+x^2)^2=3x\left(1+x^2\right)$。

故答案选（A）。

方法二：由题设可得$\begin{cases} y_1'+p\left(x\right)y_1=q\left(x\right) \\ y_2'+p\left(x\right)y_2=q\left(x\right) \end{cases}$，即$\begin{cases} -y_1\cdot p\left(x\right)+q\left(x\right)=y_1' \\ -y_2\cdot p\left(x\right)+q\left(x\right)=y_2' \end{cases}$，由克莱姆法则得，

$q\left(x\right)=\dfrac{\begin{vmatrix} -y_1 & y_1' \\ -y_2 & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -y_1 & 1 \\ -y_2 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{y_2y_1'-y_1y_2'}{y_2-y_1}=\dfrac{\dfrac{6x\left(1+x^2\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}=3x\left(1+x^2\right)$。故答案选（A）。

18.【考点定位】微分方程解的概念。

【答案】$y'-y=2x-x^2$

【解】设所求方程为$y'+p(x)y=q(x)$　①。

方法一：由$y=x^2-\mathrm{e}^x$，$y=x^2$为①的特解可知，$Y=x^2-\left(x^2-\mathrm{e}^x\right)=\mathrm{e}^x$为$y'+p(x)y=0$的解，从而$\left(\mathrm{e}^x\right)'+p(x)\left(\mathrm{e}^x\right)=0$，所以$p(x)=-1$。又由$y=x^2$为①的特解可得

$$q(x)=\left(x^2\right)'+p(x)\cdot x^2=2x-x^2。$$

故所求的方程为$y'-y=2x-x^2$。

方法二：将$y=x^2-\mathrm{e}^x$，$y=x^2$分别代入方程可得$\begin{cases} 2x-\mathrm{e}^x+p(x)\cdot(x^2-\mathrm{e}^x)=q(x), \\ 2x+p(x)\cdot x^2=q(x), \end{cases}$

解得$p(x)=-1$，$q(x)=2x-x^2$，故所求的方程为$y'-y=2x-x^2$。

19.【考点定位】 解的叠加原理。

【答案】 C

【解】齐次方程$y''-4y'+8y=0$的特征方程为$r^2-4r+8=0$，解得特征根为

$$r_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=2\pm 2i。$$

对于非齐次方程$y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}$，由于$\lambda=2$不是特征根，故其特解形式可设为$y_1^*=A\mathrm{e}^{2x}$；

对于非齐次方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}\cdot\cos 2x$，由于 $\lambda+i\beta=2+2i=r_2$ 是特征根，故其特解形式可设为

$y_2^*=x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$。

由解的叠加性原理得方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为

$y^*=y_1^*+y_2^*=A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$。故答案为 (C)。

【注】 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x\right]$ 的特解形式可设为：

$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_n^{(1)}(x)\cos\beta x+R_n^{(2)}(x)\sin\beta x\right]$，$R_n^{(1)}(x),R_n^{(2)}(x)$ 都是 n 次多项式，其中

$n=\max\{l,m\}$， $k=\begin{cases}0,\lambda+i\beta\text{不是特征根},\\1,\lambda+i\beta\text{是特征根。}\end{cases}$

（C 组）拔高题

1.【考点定位】 二阶常系数线性非齐次微分方程。

【解】先解对应的齐次方程 $y''-2y'=0$。

其特征方程为 $r^2-2r=0$，解得 $r_1=0,r_2=2$，所以齐次方程的通解 $Y=c_1+c_2\mathrm{e}^{2x}$。

再求原方程 $y''-2y'-\mathrm{e}^{2x}=0$ 的特解。

设特解 $y^*=\mathrm{e}^{2x}Q(x)$，代入原方程得 $Q''(x)+2Q'(x)=1$，设 $Q(x)=ax$，代入上式得，$2a=1$，

所以 $a=\dfrac{1}{2}$，故 $y^*=\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}$。

因此原方程的通解为 $y=\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}+c_1+c_2\mathrm{e}^{2x}$，从而 $y'=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(2x+1)+2c_2\mathrm{e}^{2x}$，又由于

$y(0)=1,y'(0)=1$，所以 $\begin{cases}1=c_1+c_2\\1=\dfrac{1}{2}+2c_2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}c_1=\dfrac{3}{4}\\c_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$，因此所求的解为

$$y=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{3}{4}。$$

2.【考点定位】导数的物理意义；可分离变量的方程；一阶微分方程初值问题 。

【解】设2000年初为起始点，即$t=0$，第t年湖泊中污染物A的总量为m，浓度为$\frac{m}{v}$，则在时间段$[t,t+\mathrm{d}t]$，排入湖泊中A的量为$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\mathrm{d}t=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t$，流出湖泊的水中的$A$的量为$\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}\mathrm{d}t=\frac{m}{3}\mathrm{d}t$，所以在该时间段$\mathrm{d}t$内湖泊中污染物$A$的改变量为$\mathrm{d}m=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t$，分离变量积分得

$\int\frac{\mathrm{d}m}{m-\frac{m_0}{2}}=\int-\frac{1}{3}\mathrm{d}t$，易得$m=\frac{1}{2}m_0+Ce^{-\frac{t}{3}}$，因为$m(0)=5m_0$，所以$C=\frac{9}{2}m_0$，则$m=\frac{m_0}{2}\left(1+9e^{-\frac{t}{3}}\right)$，

令$m=m_0$，得$t=6\ln 3\approx 6.59$，故至多需经过7年，湖泊中的污染物A的含量降至m_0以内。

3.【考点定位】导数的定义；可分离变量的方程。

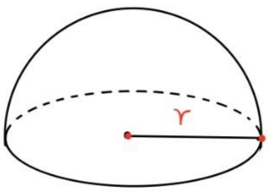
【解】如图，设t时刻雪球的半径为$r=r(t)$，

则t时刻半球的体积为$v(t)=\frac{2}{3}\pi r^3(t)$，半球的面积为$s(t)=2\pi r^2(t)$，

由题意可知$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=-ks(t)$，从而$\frac{2}{3}\pi\cdot 3r^2\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-k\cdot 2\pi r^2$，整理得$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-k$，所以$r(t)=-kt+C$。

当$t=0$时$r(0)=r_0$，则$C=r_0$，故$r(t)=-kt+r_0$，又经过3小时后，雪堆融化了其体积的$\frac{7}{8}$，从而3小时后剩余的体积为$\frac{2}{3}\pi r^3(3)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi r_0^3$，从而$r^3(3)=\frac{1}{8}r_0^3$，即$r(3)=\frac{1}{2}r_0$，从而$r_0-3k=\frac{1}{2}r_0$，

解得$k=\frac{1}{6}r_0$。要使雪堆融化，则$-kt+r_0=0$，得$t=\frac{r_0}{k}=\frac{r_0}{\frac{1}{6}r_0}=6$，因此雪堆全部融化完需要6小时。



4.【考点定位】 二阶常系数非齐次线性微分方程；分部积分法。

【解】由于$f'(x)=g(x)$，且$g'(x)=2e^x-f(x)$，所以$f''(x)+f(x)=2e^x$，记$y=f(x)$，则$y''+y=2e^x$。$y''+y=0$的特征方程为$r^2+1=0$，解得$r_1=-i,r_2=i$，从而$y''+y=0$的通解为$Y=c_1\cos x+c_2\sin x$，c_1,c_2为任意常数。

设$y^*=e^x\cdot a$为$y''+y=2e^x$的特解，代入$y''+y=2e^x$，得$2ae^x=2e^x$，所以$a=1$，

故 $y^*=\mathrm{e}^x$，从而 $y''+y=2\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=y^*+Y=\mathrm{e}^x+c_1\cos x+c_2\sin x$，即

$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\mathrm{e}^x$。由 $f(0)=0$，知 $0=c_1+1$，解得 $c_1=-1$。又由于

$f'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x+\mathrm{e}^x$ 且 $g(0)=f'(0)=2$，故 $2=c_2+1$，解得 $c_2=1$，从而

$f(x)=\sin x-\cos x+\mathrm{e}^x$。

下面利用两种方法来求 $I=\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$。

方法一：

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}\frac{1}{1+x}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}\mathrm{d}x+\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}\mathrm{d}x$$，又由于 $f'(x)=g(x)$，故

$$I=\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x=\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)=\frac{f(\pi)}{1+\pi}=\frac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{1+\pi}。$$

方法二：

$$I=\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]'\mathrm{d}x=\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}=\frac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{1+\pi}。$$

【注】对于方法一可能是我们较容易想到的方法，这是由于通过分析我们可以看出

$\frac{1}{(1+x)^2}=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'$，且 $f'(x)=g(x)$，这让我们容易想到利用分部积分法将 $\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}\mathrm{d}x$ 消掉。对于方法二，需要同学们熟练的掌握导数的四则运算法则。另外，若将 $f(x),g(x)$ 求出后直接代入被积函数，虽然也能做出，但计算量较大，不建议采用这种方法。

5.【考点定位】导数的几何意义；齐次方程；可分离变量的方程；一元函数的最值。

【解】(I) 曲线 L 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，这里 (X,Y) 为切线上的动点。

令 $X=0$ 得切线在 y 轴上的截距为：$Y=y-xy'$。由题设条件可知

$$y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\qquad ①$$

方程①可化为齐次方程 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1},\qquad ②$$

令$\frac{y}{x}=u$，则$y=xu$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入方程②得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\sqrt{u^2+1},$$

分离变量得$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，两边积分得 $\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，所以

$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=-\ln x+c_1$，从而$u+\sqrt{u^2+1}=\frac{c}{x}$，所以$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{c}{x},(x>0)$

因此$y+\sqrt{x^2+y^2}=c,(x>0)$，又因为曲线过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以曲线$L$的方程为

$y+\sqrt{x^2+y^2}+=\frac{1}{2}$，移项得$\sqrt{x^2+y^2}+=\frac{1}{2}-y$，两边平方整理得：

曲线L的方程为 $y=\frac{1}{4}-x^2,(x>0)$。

（II）如图，曲线位于第一象限部分的在$P(x,y)$点处的切线方程为 $Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x)$，

令$X=0$得$Y=x^2+\frac{1}{4}$，令$Y=0$得$X=\frac{1}{2x}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$，则切线与两坐标轴所围区域的面积

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2,$$

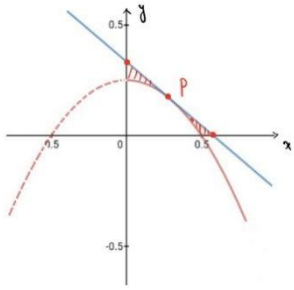
曲线与轴及轴与第一象限所围成的面积为$S_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$，

切线与两坐标轴以及曲线所围成的面积为$S(x)=S_1-S_0=\frac{1}{4x}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{12},x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$。

由$S'(x)=\frac{1}{4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(3x^2-\frac{1}{4}\right)$可得$S(x)$的驻点$x=\frac{\sqrt{3}}{6}$，列表讨论如下：

x	$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2}\right)$
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$	↓	最小值点	↑

故 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$S(x)$ 最小，所求的切线为 $Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}$。



6.【考点定位】差分方程。

【答案】$W_t=1.2W_{t-1}+2$

【解】由题意知 $W_t=W_{t-1}+0.2W_{t-1}+2=1.2W_{t-1}+2$，故 W_t 满足的差分方程为 $W_t=1.2W_{t-1}+2$。

7.【考点定位】 积分方程；可分离变量的微分方程。

【解】对于积分方程 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$， ①

两边对 x 求导得 $g\left(f(x)\right)f'(x)=(x^2+2x)\mathrm{e}^x$，由于 $g(f(x))=x$，故

$$xf'(x)=(x^2+2x)\mathrm{e}^x，②$$

又由于 $x=0$ 时，$\left(\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{x=0}=\int_0^{f(0)}g(t)\mathrm{d}t=\int_0^0 g(t)\mathrm{d}t=0$，$\left(x^2\mathrm{e}^x\right)\Big|_{x=0}=0$，所以方程①等价于方程②。

当 $x\neq 0$ 时，②变为 $f'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$，所以 $f(x)=\int(x+2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(x+1)\mathrm{e}^x+C$，

由 $f(0)=0$ 得，$0=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1+C$，所以 $C=-1$，故 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-1$。

8.【考点定位】一阶线性微分方程；旋转体的体积。

【解】$x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(-\frac{2}{x})y=-1$，所以

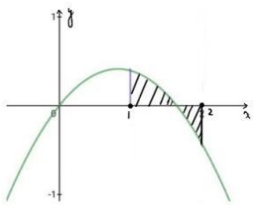
$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int(-1)\cdot\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=x^2\left(-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+c\right)=x+cx^2，$$

旋转体的体积为：$V(c)=\int_1^2\pi y^2\mathrm{d}x=\int_1^2\pi(x^2+2cx^3+c^2x^4)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{7}{3}+\frac{15c}{2}+\frac{31}{5}c^2\right)$，

$V'(c)=\pi\left(\frac{62}{5}c+\frac{15}{2}\right)$， $V''(c)=\frac{62}{5}\pi>0$，由 $V'(c)=0$ 得 $c=-\frac{75}{124}$，故当 $c=-\frac{75}{124}$ 时，$V(c)$ 最小。

综上所述：所求解为$y=x-\dfrac{75}{124}x^2$。

【注】①为了方便同学们理解，我们画出所求曲线的图像以及相应的平面图形（阴影部分）



②对$V(c)=\pi\left(\dfrac{7}{3}+\dfrac{15}{2}c+\dfrac{31}{5}c^2\right)$直接使用配方法也可以得到结果。

9.【考点定位】导数四则运算法则； 一阶线性方程通解公式；一阶微分方程初值问题。

【解】（1）由$F(x)=f(x)g(x)$，可得$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$。

因为 $f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x)$，

所以 $F'(x)=g^2(x)+f^2(x)=\left(f(x)+g(x)\right)^2-2f(x)g(x)$，

又因为$f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x$，所以$F(x)$满足一阶线性微分方程

$$F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}。$$

（2）方程$F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}$的通解为$F(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}(\int 4\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c)=\mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{e}^{4x}+c)$

因为$f(0)=0$，所以$F(0)=0$，得$c=-1$，故$F(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$。

【注】事实上，我们可以求出$f(x),g(x)$：由$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x)$及$f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x$可得

$f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，从而$f(x)=\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}\left[\int 2\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}+c\right)$，再由$f(0)=0$可得

$c=-1$，故$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x},g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$。

10.【考点定位】反函数的导数与高阶导数；二阶常系数非齐次线性方程通解的结构。

【解】(I) 因为 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{y'} \quad ①,$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y'}\right)}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3} \quad ②,$$

将①②代入原方程可得 $-\dfrac{y''}{(y')^3}+(y+\sin x)\left(\dfrac{1}{y'}\right)^3=0$，化简得 $y''-y=\sin x$ ，

即 $y=y(x)$ 满足的方程为：$y''-y=\sin x$。

(II) 方程 $y''-y=\sin x$ 对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的特征方程为 $r^2-1=0$ ，

解得特征根为 $r_1=1,r_2=-1$ ，所以齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 。

设非齐次方程的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$，代入方程可得：

$-2A\cos x-2B\sin x=\sin x$，比较系数得 $A=0,B=-\dfrac{1}{2}$ ，所以 $y^*=-\dfrac{1}{2}\sin x$，故方程

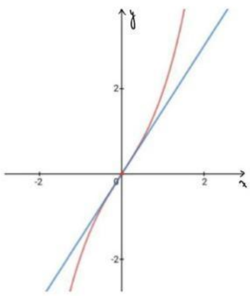
$y''-y=\sin x$ 得通解为 $y=-\dfrac{1}{2}\sin x+C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$。因为 $y(0)=0$ ，所以 $C_1+C_2=0$。

又因为 $y'=-\dfrac{1}{2}\cos x+C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-x},y'(0)=\dfrac{3}{2}$ ，所以 $-\dfrac{1}{2}+C_1-C_2=\dfrac{3}{2}$。由 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\C_1-C_2=2\end{cases}$，解得

$C_1=1,C_2=-1$。因此，所求的特解为 $y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$。

【注】由初值条件 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 知，该积分曲线过点 $(0,0)$ 且在该点处的切线方程为：$y=\dfrac{3}{2}x$。

如图所示：



11.【考点定位】导数的几何意义；曲线的长度；可分离变量的方程；一阶微分方程初值问题

【解】(1) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$，这里 (X,Y) 为法线上的动点，

令 $X=0$，得 $Y=y+\dfrac{x}{y'}$，则 Q 点为 $\left(0,y+\dfrac{x}{y'}\right)$。因为线段 PQ 被 x 轴平分，所以点 $P(x,y)$ 与 Q 的纵

坐标相反，即 $\left(y+\dfrac{x}{y'}\right)=-y$，即 $2yy'=-x$。分离变量得到 $2y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$，两边积分得 $\int 2y\mathrm{d}y=\int -x\mathrm{d}x$，

所以 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=C$。因为该曲线过 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $C=\dfrac{1}{2}$。故曲线 $y=f(x)$ 的方程 $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}},(0<x<1)$。

(2) 由弧长公式可得

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x,$$

下面用两种方法求曲线 $y=f\left(x\right)$ 的弧长。

方法一：曲线 $y=f\left(x\right)$ 是椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{1/2}=1$ 在第一象限的部分，其参数方程可写为：$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\end{cases},t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以

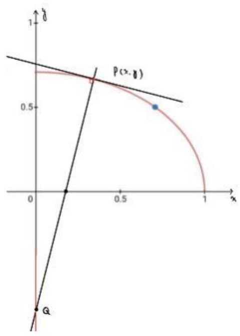
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left[\left(\cos t\right)'\right]^2+\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)'\right]^2}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+\frac{1}{2}\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sin^2 t\right)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{2}}l。$$

方法二：曲线 $y=f\left(x\right)$ 的弧长为

$$S=\int_0^1\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{2\left(1-x^2\right)}}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{\frac{2-x^2}{2\left(1-x^2\right)}}\mathrm{d}x\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2-\sin^2 t}{2\cos^2 t}}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{2}}l。$$



【注】①曲线 $y=\sin x$ 在任一区间 $x\in\left[a,b\right]$ 上的弧长 $l=\int_a^b\sqrt{1+\left[\left(\sin x\right)'\right]^2}\mathrm{d}x=\int_a^b\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$，

被积函数 $\sqrt{1+\cos^2 x}$ 的原函数不是初等函数，我们常称这个积分“积不出来”。

②椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积 $A=\pi ab$，由其参数方程 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},t\in\left[0,2\pi\right]$ 可得椭圆的周长为：

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left[\left(a\cos t\right)'\right]^2+\left[\left(b\sin t\right)'\right]^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos^2 t}\mathrm{d}t。$$

这个积分的原函数也不是初等函数。我们常称椭圆的周长存在但“求不出来”。当

$b^2=a^2-b^2$，即 $a^2=2b^2$ 或者离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos^2 t}\mathrm{d}t=4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$，

它正好是曲线 $y=\sin x$ 在一个周期 $\left[0,2\pi\right]$ 上的弧长 $l=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\left[\left(\sin x\right)'\right]^2}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ 的 b 倍。

12.【考点定位】 定积分的几何应用；变限积分求导；可分离变量的方程；导数的物理意义。

【解】（1）如图，设 t 时刻液面的高度为 y，此时液面的面积为 $A(t)=\pi\varphi^2(y)$。因为液面的面积以

$\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大，所以 $\dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\pi\varphi^2(y)}{\mathrm{d}t}=\pi$，则 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi^2(y)}{\mathrm{d}t}=1$，即 $\varphi^2(y)=t+C$。由

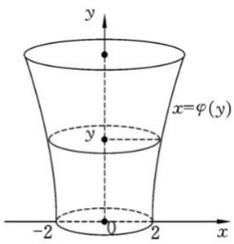
题意可知 $t=0$ 时 $\varphi(y)=2$，所以 $C=4$，则 $\varphi^2(y)=t+4$，即 $t=\varphi^2(y)-4$。

（2）液面的高度为 y 时，液体的体积为 $v(t)=\pi\int_0^y\varphi^2(u)\mathrm{d}u$。当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入

液体时， $\pi\int_0^y\varphi^2(u)\mathrm{d}u=3t=3\varphi^2(y)-12$，方程两边对 y 求导 得 $\pi\varphi^2(y)=6\varphi(y)\varphi'(y)$，分离变

量得 $\dfrac{6\mathrm{d}\varphi(y)}{\varphi(y)}=\pi\mathrm{d}y$，两边积分 $\int\dfrac{6}{\varphi(y)}\mathrm{d}\varphi(y)=\int\pi\mathrm{d}y$，得 $\varphi(y)=C\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y}$。因为 $\varphi(0)=2$，所以 $C=2$，

故所求曲线方程为 $x=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y}$。



13.【考点定位】导数的物理意义；可分离变量的方程；反常积分。

【解】由牛顿第二定律可得 $m\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{v}=-\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t$，两边积分 $\int\dfrac{1}{v}\mathrm{d}v=-\dfrac{k}{m}\int\mathrm{d}t$，得

$\ln v=-\dfrac{k}{m}t+c_1$，所以 $v=C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$。由于 $v(0)=700$，所以 $C=700$，从而 $v=700\cdot\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$，所以飞机滑

行的最长距离为

$$s=\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}700\cdot\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t=-\frac{700m}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{700m}{k}=\frac{700\times9000}{6.0\times10^6}=1.05,$$

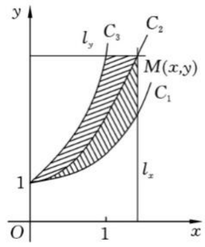
故飞机滑行的最长距离为 1.05 Km。

14.【考点定位】平面图形的面积；积分方程。

【解】如图，由题意知，$S_1(x)=\int_0^x\left[e^t-\frac{1}{2}\left(1+e^t\right)\right]dt=\int_0^x\frac{1}{2}\left(e^t-1\right)dt$，$S_2(y)=\int_1^y\left[\ln u-\varphi(u)\right]du$，且

$S_1(x)=S_2(y), x=\ln y$，故$\int_0^{\ln y}\frac{1}{2}(e^t-1)dt=\int_1^y\left[\ln u-\varphi(u)\right]du$。两端同时对 y 求导，得

$\frac{1}{2}\left(e^{\ln y}-1\right)\cdot\frac{1}{y}=\ln y-\varphi(y)$，从而$\varphi(y)=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$，所以曲线$C_3$的方程为$x=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$。



15【考点定位】 复合函数求导；二阶常系数线性齐次微分方程通解的结构。

【解】
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt}=-\csc t\cdot\frac{dy}{dt}, \qquad ①$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\csc t\cdot\cot t\cdot\frac{dy}{dt}-\csc t\cdot\frac{d^2y}{dt^2}}{-\sin t}=\csc^2 t\cdot\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\cot t\cdot\frac{dy}{dt}\right), \qquad ②$$

将①、②以及$x=\cos t$代入方程

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=0$$

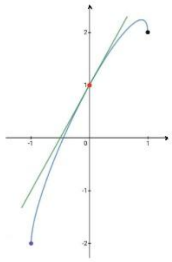
得$\left(1-\cos^2 t\right)\cdot\csc^2 t\cdot\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\cot t\cdot\frac{dy}{dt}\right)-\cos t\cdot\left(-\csc t\cdot\frac{dy}{dt}\right)+y=0$，

整理可得$y''(t)+y(t)=0$。该齐次方程的特征方程为$r^2+1=0$，特征根为$r_{1,2}=\pm i$。所以其通解为

$y=C_1\cos t+C_2\sin t=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$，从而$y'=C_1-\frac{C_2x}{\sqrt{1-x^2}}$，

由$y(0)=1$，以及$y'(0)=2$，可得$C_1=2,C_2=1$，故所求的特解为$y=2x+\sqrt{1-x^2}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该积分曲线，由$y(0)=1$，以及$y'(0)=2$知它在$x=0$所对应点处的切线方程为：$y=2x+1$。



16.【考点定位】反函数的概念；积分方程；一阶微分方程初值问题。

【解】方程$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$两边关于$x$求导得

$$f^{-1}(f(x))\cdot f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x},$$

因为$f^{-1}(f(x))=x$，所以$f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$，从而

$$f(x)=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(\sin x+\cos x\right)}{\sin x+\cos x}=\ln(\sin x+\cos x)+c,x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

将$x=0$代入方程 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$可得 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^0 t\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=0$，

又由于$f^{-1}(t)\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，从而被积函数$f^{-1}(t)\geq 0$且连续单调，所以必有$f(0)=0$，因此$0=\ln 1+c$，

即$c=0$，故$f(x)=\ln(\sin x+\cos x),x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$。

17.【考点定位】 一阶差分方程通解的结构；差分方程的经济学应用；幂级数求和。

【解】我们采用两种方法求解。

方法一：设A_n为第n年提现$(10+9n)$的现值，则$A_n=\dfrac{10+9n}{(1+r)^n}$，由题意可知

$$A\geq\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}(10+9n)\left(\frac{1}{1+r}\right)^n，这里 r=0.05。$$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(10+9n)x^n$，$x\in(-1,1)$，则

$$S(x)=9\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n=9\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'+\sum_{n=1}^{\infty}x^n=9\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'+\frac{x}{1-x}=9\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{x}{1-x}$$

$$=9\left(-1+\frac{1}{(1-x)^2}\right)+\frac{x}{1-x},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(10+9n)\left(\frac{1}{1+r}\right)^n=S\left(\frac{1}{1+r}\right)=9\left[-1+\frac{(1+r)^2}{r^2}\right]+\frac{1}{r}=9\times(-1+441)+20=3980。$$

故 $A\geq 3980$，即 A 至少为 3980 万元。

方法二：设 y_n 是第 n 年提款后余款，则 $y_n=\left(1+0.05\right)y_{n-1}-\left(10+9n\right)$，即 $y_n-1.05y_{n-1}=10-9n$，

这是一阶线性非齐次差分方程，其对应的齐次方程的通解为 $Y_n=C\cdot(1.05)^n$。

设非齐次方程的特解为 $y_n^*=an+b$，代入非齐次方程可得

$a(n+1)+b-1.05(an+b)=-10-9n$，化简得，$-0.05an+a-0.05b=-10-9n$，所以

$\begin{cases}-0.05a=-9\\ a-0.05b=-10\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=180\\ b=3980\end{cases}$，故 $y_n=180n+3980+C\cdot(1.05)^n$。因为 $y_n\geq 0$，所以 $C\geq 0$，

从而 $A=y_0=C+3980\geq 3980$。故 A 至少应为 3980 万元。

18.【考点定位】定积分的几何应用；积分方程；可分离变量的方程。(与 2004 年数二中的大题，专 3C-13 题几乎是同一题)

【解】如图，该旋转体的体积 $V=\int_0^t \pi f^2(x)\mathrm{d}x$，侧面积 $S=\int_0^t 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$，

由题设 $S=2V$ 可得

$$\int_0^t 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x=2\int_0^t \pi f^2(x)\mathrm{d}x，$$

即

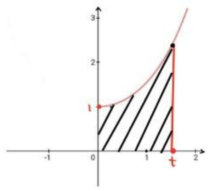
$$\int_0^t f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x。$$

方程两边对 t 求导可得，$f^2(t)=f(t)\cdot\sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}$，化简得 $y'=\sqrt{y^2-1}$，

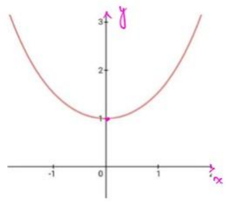
分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\mathrm{d}t$，两边积分 $\int\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\mathrm{d}y=\int\mathrm{d}t$，得 $\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)=t+c_1$，所以

$y+\sqrt{y^2-1}=C\mathrm{e}^t$。又因为 $y(0)=1$，所以 $C=1$，即 $y+\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^t$,移项得 $\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^t-y$，

两边平方后整理得到 $y=\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}$，故 $f\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$。



【注】该曲线 $y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 是一条所谓的悬链线，其图像如图所示，2004 年数学二中的一道大题(专题 3C 组第 13 题)的命题背景也是悬链线 $y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$。如下图：



19.【考点定位】参数方程所确定的函数的导数；变限积分求导；可分离变量的方程。

【解】由于$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2t\mathrm{e}^{-x}=0$，分离变量得$\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，两边积分$\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\int 2t\mathrm{d}t$，得$\mathrm{e}^{x}=t^2+c$，故$x=\ln(t^2+c)$。由$x(0)=0$得$c=1$，故$x=\ln\left(1+t^2\right)$，从而$\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\mathrm{d}u。\end{cases}$

由参数方程所确定函数的导数公式知

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t\ln(1+t^2)}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2),$$

从而
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t\ln\left(1+t^2\right)+\left(1+t^2\right)\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\left(1+t^2\right)\left[\ln\left(1+t^2\right)+1\right]。$$

【注】对于参数方程所确定函数导数，也可利用微分来求。

设$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$所确定函数为$y=y(x)$，则$\begin{cases}\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y=\psi'(t)\mathrm{d}t\end{cases}$，从而$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，

在求二阶导数时，由于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$为$t$的函数，因此$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\end{cases}$，从而$\begin{cases}\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y'=\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'\mathrm{d}t\end{cases}$得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}。$$

以此类推可求该函数三阶及三阶以上的导数，同学们可利用该种方法求该题的导数。

20.【考点定位】定积分的几何应用；积分方程；一阶线性微分方程。

【解】曲边梯形的面积$S(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$，该曲边梯形绕$x$轴旋转一周所得立体体积

$$V(t)=\int_1^t \pi f^2(x)\mathrm{d}x。$$

由题设可知，$V(t)=\pi tS(t)$，所以$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$。

两边求导得 $$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t)，\qquad ①$$

再次求导得 $$2f(t)f'(t)=f(t)+f(t)+tf'(t)，$$

整理得 $$\left(2f(t)-t\right)f'(t)=2f(t)，\qquad ②$$

在①式中取 $t=1$ 得 $f^2(1)=f(1)$，由于 $f(x)>0$，所以 $f(1)=1$。

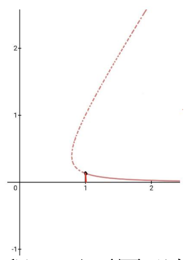
记 $y=f(x)$，则方程②可化为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y}{2y-x}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{2y-x}{2y}=1-\dfrac{x}{2y}$，

即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{2y}x=1$，该方程的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\int 1\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\cdot\mathrm{d}y+c=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\int\sqrt{y}\mathrm{d}y+c\right)=\frac{1}{\sqrt{y}}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+c\right],$$

又由于 $f(1)=1$，所以 $1=\dfrac{2}{3}+c$，得 $c=\dfrac{1}{3}$，故该曲线方程为 $x=\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt{y}}$。

【注】为方便同学们理解，我们画出所求曲线 $x=\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ 的图像如下：实线部分为所求曲线的图象。该曲线是 $x=\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ 的整体图象。



21.【考点定位】可降阶的微分方程；平面图形的面积；旋转体的体积。

【解】设 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入微分方程 $xy''-y'+2=0$ 得 $x\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-p+2=0$，

整理得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\left(-\dfrac{1}{x}\right)p=-\dfrac{2}{x}$，由一阶线性微分方程通解公式知

$$p=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=x\left[\int\left(-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+c\right]=x\left(\frac{2}{x}+c\right)=2+cx,$$

从而 $y'=cx+2$，所以 $y=\int\left(cx+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{c}{2}x^2+2x+c_2=c_1x^2+2x+c_2$，这里 $c_1=\dfrac{c}{2}$。

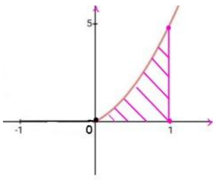
因为曲线过原点，则 $c_2=0$，从而 $y=c_1x^2+2x$。

又因为曲线 $y=c_1x^2+2x$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围平面区域的面积为 2，且 $y(x)\ge 0$，如图，

故 $2=\int_0^1\left(c_1x^2+2x\right)\mathrm{d}x=\frac{c_1}{3}+1$，解得 $c_1=3$，从而 $y=3x^2+2x\left(x\ge 0\right)$。

对 $\forall\left[x,x+\mathrm{d}x\right]\subset\left[0,1\right]$，区间 $\left[x,x+\mathrm{d}x\right]$ 上的体积元素为 $\mathrm{d}V=2\pi x\cdot y\mathrm{d}x=2\pi x(3x^2+2x)\cdot\mathrm{d}x$，

从而所求体积为 $V=\int_0^1 2\pi x\left(3x^2+2x\right)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\left(3x^3+2x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{17}{6}\pi$。



22.【考点定位】导数的几何意义；可分离变量的方程；二阶常系数非齐次线性微分方程。

【解】当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点 $P\left(x,y\right)$ 处的法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{y'}\left(X-x\right)$，其中 $\left(X,Y\right)$ 为法线上的动点。由于法线过原点，故 $0-y=-\frac{1}{y'}\left(0-x\right)$，从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$。

分离变量得 $y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$，两边积分 $\int y\mathrm{d}y=\int -x\mathrm{d}x$，得 $\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1$，即 $x^2+y^2=C$

因为曲线过 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$，所以 $C=\pi^2$，故 $y=\sqrt{\pi^2-x^2}$。

当 $0\le x<\pi$ 时，曲线满足 $y''+y+x=0$，微分方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$，解得特征根为 $r_1=-i,r_2=i$，故齐次方程得通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$。

设 $y''+y=-x$ 的特解为 $y^*=ax+b$，代入上述方程得 $ax+b=-x$，所以 $a=-1,b=0$，故 $y^*=-x$，从而非齐次方程的通解为 $y=-x+C_1\cos x+C_2\sin x$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

下面来确定 C_1,C_2：因为 $y=y(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内光滑，即 $y=y(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 有连续的导函数，所以 $y\left(x\right)$ 在点 $x=0$ 连续且可导。

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}y\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{\pi^2-x^2}=\pi$，$\lim\limits_{x\to 0^+}y\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x+C_1\cos x+C_2\sin x\right)=C_1$，所以 $C_1=\pi$。

又因为

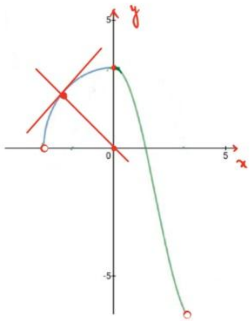
$$y'_-\left(0\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{y(x)-y\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\pi^2-x^2}-\pi}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}\left(\pi^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-2x\right)}{1}=0,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\pi\cos x+C_2\sin x-x-\pi}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\pi\sin x+C_2\cos x-1}{1}=C_2-1$$

所以$C_2-1=0$ ，得$C_2=1$。综上所述：

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ -x+\pi\cos x+\sin x, & 0\le x<\pi。\end{cases}$$

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数$y(x)$的图像，如图所示



当$-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点$P(x,y)$处的法线过原点。

23.【考点定位】参数方程确定的函数的导数；可降阶微分方程；一阶线性微分方程。

【解】因为
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\psi''(t)(1+t)-\psi'(t)}{2(1+t)^2}}{2+2t}=\frac{\psi''(t)(1+t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3},$$

又由于 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$， 从而 $\dfrac{\psi''(t)(1+t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，

整理得
$$\psi''(t)-\frac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t)\qquad ①,$$

令$\psi'(t)=p$，则$\psi''(t)=p'$，代入方程①，得$p'-\dfrac{p}{1+t}=3(1+t)$，

由一阶线性微分方程通解公式得

$$p=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t}\left[\int3(1+t)\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right]=(1+t)\left[\int3(1+t)\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t+C_1\right]=(1+t)(3t+C_1)$$
$$=3t^2+(3+C_1)t+C_1,$$

即$\psi'(t)=3t^2+(3+C_1)t+C_1$。因为$\psi'(1)=6$，所以$6=3+3+C_1+C_1$，解得$C_1=0$，从而

$\psi'(t)=3t^2+3t$，所以$\psi(t)=\int(3t^2+3t)\mathrm{d}t=t^3+\frac{3}{2}t^2+C_2$。

又因为$\psi(1)=\frac{5}{2}$，所以$\frac{5}{2}=1+\frac{3}{2}+C_2$，解得$C_2=0$。故

$$\psi(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2\ (t>-1)。$$

24.【考点定位】导数的经济学应用；可分离变量的方程。

【答案】 $pe^{\frac{p^3-1}{3}}$

【解】由题设$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{R}=1+p^3$，分离变量得$\frac{\mathrm{d}R}{R}=\left(\frac{1}{p}+p^2\right)\mathrm{d}p$，两边积分$\int\frac{\mathrm{d}R}{R}=\int\left(\frac{1}{p}+p^2\right)\mathrm{d}p$，得

$\ln R=\ln p+\frac{p^3}{3}+C$，所以$R(p)=pe^{\frac{p^3}{3}+C}$。因为$R(1)=1$，所以$C=-\frac{1}{3}$，故 $R(p)=pe^{\frac{p^3-1}{3}}$。

25.【考点定位】微分方程的几何应用；二阶可降价的方程。

【解】由$y'=\tan\alpha$可得$y''=\sec^2\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$，所以，$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{\sec^2\alpha}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+(y')^2}$，

代入方程$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$得 $y''=\left[1+(y')^2\right]y'$， ①

下面用两种方法求解方程①。

方法一：令$y'=p$，则$y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程①得，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2$，

两边积分$\int\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\int\mathrm{d}y$，得$\arctan p=y+c_1$，

因为$y=y(x)$与$y=x$相切于原点，所以$y(0)=0,y'(0)=1$，从而$c_1=\frac{\pi}{4}$，因此

$\arctan p=y+\frac{\pi}{4}$，即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\tan(y+\frac{\pi}{4})$，所以$\cot(y+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，两边积分

$\int\cot(y+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}y=\int\ \mathrm{d}x$，得$\ln\left|\sin(y+\frac{\pi}{4})\right|=x+c_2$，所以$y+\frac{\pi}{4}=\arcsin(ce^x)$，

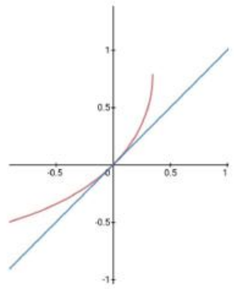
由$y(0)=0$得$\frac{\pi}{4}=\arcsin c$，所以$c=\frac{1}{\sqrt{2}}$，故 $y=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$。

方法二：令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$，代入方程①得，$\dfrac{dp}{dx}=p(1+p^2)$，分量变量得 $\dfrac{dp}{p(1+p^2)}=dx$，两边积分 $\int\dfrac{dp}{p(1+p^2)}=\int dx$，即 $\int(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{1+p^2})dp=x+c_1$，解得 $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2}{1+p^2}=x+c_1$，所 $\ln\dfrac{p^2}{1+p^2}=2x+c_2$。

因为 $y(0)=0,y'(0)=1$，所以 $c_2=-\ln 2$，从而 $\ln\dfrac{p^2}{1+p^2}=2x-\ln 2$，解得 $p=\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$，因此 $y=\int\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}dx=\int\dfrac{de^x}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(e^x)^2}}=\arcsin\dfrac{e^x}{\sqrt{2}}+c_3$。

又因为 $y(0)=0$，所以 $c_3=-\dfrac{\pi}{4}$，故 $y=\arcsin\dfrac{e^x}{\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{4}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该曲线的图像，它在原点处的切线方程为 $y=x$。



26.【考点定位】二阶常系数线性方程通解的结构；变限积分求导；函数拐点的判定。

【解】(Ⅰ)先解齐次方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$，其特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=-2,r_2=1$，

所以 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$，它也满足方程 $f''(x)+f(x)=2e^x$，故将 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ 代入方程 $f''(x)+f(x)=2e^x$，得 $2C_1e^x+5C_2e^{-2x}=2e^x$，所以 $C_1=1,C_2=0$，故 $f(x)=e^x$。

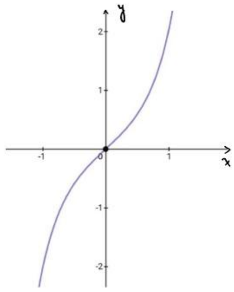
(Ⅱ)由(Ⅰ)可知，$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，

所以 $y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1$，$y''=2x+2(1+2x^2)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	−	0	+
y	凸	拐点	凹

故拐点为 $(0,0)$

【注】为了方便同学们理解，我们画出函数 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的图像。



27.【考点定位】二阶线性齐次方程解的结构；可分离变量的方程。

【解】由于 $y_2\left(x\right)=u\left(x\right)\mathrm{e}^x$ 是微分方程的解，且

$y_2{}'=u'(x)\mathrm{e}^x+u(x)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\left[u'(x)+u(x)\right]$,

$y_2{}''=u''(x)\mathrm{e}^x+2u'(x)\mathrm{e}^x+u(x)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\left[u''(x)+2u'(x)+u(x)\right]$,

代入原方程可得

$$(2x-1)\left[\mathrm{e}^x\left(u''(x)+2u'(x)+u(x)\right)\right]-(2x+1)\left[\mathrm{e}^x\left(u'\left(x\right)+u\left(x\right)\right)\right]+2u(x)\mathrm{e}^x=0$$

整理得 $(2x-1)u''(x)+(2x-3)u'(x)=0$ ①

令 $u'\left(x\right)=p$，则 $u''\left(x\right)=p'$，方程①化为

$$(2x-1)p'+(2x-3)p=0,$$

整理得 $\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x-3}{2x-1}$，分离变量得 $\frac{1}{p}\mathrm{d}p=-\frac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x$，两边积分

$$\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p=\int-\frac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x=-\int\left(1-\frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x,$$

得 $\ln|p|=-x+\ln|2x-1|+c_0$，所以 $p=c_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}$，即 $u'(x)=c_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}$，所以

$u(x)=\int c_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-c_1(2x+1)\mathrm{e}^{-x}+c_2$。由 $u\left(-1\right)=\mathrm{e},u\left(0\right)=-1$ 可得 $\begin{cases}c_1-c_2=1,\\c_1\mathrm{e}+c_2=\mathrm{e},\end{cases}$ 解得

$c_1=1,c_2=0$，故 $u(x)=-(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$, 从而 $y_2(x)=-(2x+1)$。

由于 $y_1\left(x\right),y_2\left(x\right)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关的解，故该微分方程的通解为

$$y=k_1y_1\left(x\right)+k_2y_2\left(x\right)=k_1\mathrm{e}^x-k_2(2x+1)\text{，其中 }k_1,k_2\text{ 为任意常数。}$$

【注】$u(x)=\int c_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-c_1(2x+1)\mathrm{e}^{-x}+c_2$ 可由推广的分部积分法得到，在考试中可以不用写积分过程。

$(2x-1)\downarrow$	$+\quad 2$	$-\quad 0$
$\mathrm{e}^{-x}\uparrow$	$-\mathrm{e}^{-x}$	e^{-x}

28.【考点定位】变限积分求导；积分方程；一阶线性微分方程。

【解】 由于 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}(x-t)\overset{u=x-t}{=}-\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

$$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

故原方程化为 $$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1, \qquad ①$$

方程两边求导得， $$f(x)=xf(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)-\mathrm{e}^{-x},$$

即 $$f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}\ , \qquad ②$$

当 $x=0$ 时，方程①左右两边均等于 0，再次对②求导得，

$$f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^{-x}。 \qquad ③$$

当 $x=0$ 时代入方程②得 $f(0)=-1$。记 $y=f(x)$，则方程③变为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=\mathrm{e}^{-x}$，所以

$$y=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-x}\cdot \mathrm{e}^{\int -1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{x}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+c\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}+c\mathrm{e}^{x},$$

由 $f(0)=-1$ 得 $c=-\frac{1}{2}$，故 $f(x)=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)$。

【注】微分方程的考题在有些情形下以特殊的积分方程的形式来体现，我们往往需要将积分方程化为微分方程，其中的关键是通过求导去掉积分号，其原理如下：

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x)=g'(x)\\ f(x_0)=g(x_0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f''(x)=g''(x)\\ f(x_0)=g(x_0)\\ f'(x_0)=g'(x_0)\end{cases}\Leftrightarrow\cdots\cdots$$

在选取初始点 x_0 时，我们一般选择使得积分项变为 0 的点。

29.【考点定位】导数的几何意义；可分离变量的方程；齐次方程。

【解】如图，设 P 点为 (x,y)，则 P 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$ 可得 $Y_p=y-xy'$。

P 点处的法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$，令 $Y=0$ 可得 $X_p=x+yy'$

因为 $X_p=Y_p$，所以 $y-xy'=x+yy'$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x}{y+x}$ ①。

方程①变为齐次方程 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$$ ②，

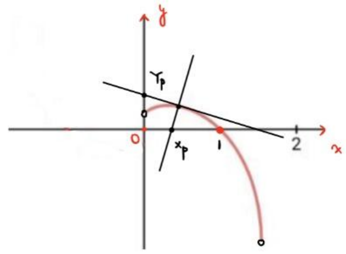
令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入方程②得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u-1}{u+1}$，所以 $\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，

两边积分 $\int\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，得 $\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\arctan u=-\ln x+C$，因此

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)+\arctan\frac{y}{x}=-\ln x+C。$$

因为 $y(1)=0$，所以 $C=0$。故 L 上的坐标 (x,y) 满足的方程为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}=0,x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)。$$



30.【考点定位】 一阶非齐次线性差分方程；线性差分方程解的结构。

【答案】$y_t=t\cdot2^{t-1}+C\cdot2^t$，$C$ 为任意常数。

【解】齐次方程 $y_{t+1}-2y_t=0$ 的通解为 $Y_t=C\cdot2^t$，C 为任意常数。

令 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的特解为 $y_t^*=At2^t$，将其代入原差分方程，得

$$A\cdot(t+1)\cdot2^{t+1}-2A\cdot t\cdot2^t=2^t,$$

解得 $A=\frac{1}{2}$，从而 $y_t^*=\frac{1}{2}t\cdot2^t=t\cdot2^{t-1}$。故该差分方程的通解为

$$y_t=t\cdot2^{t-1}+C\cdot2^t，\ C\text{ 为任意常数。}$$

31.【考点定位】一阶差分方程。

【答案】$y_x=-5+c\cdot2^x$，c 为任意常数。

【解】 $$\Delta^2y_x=\Delta(\Delta y_x)=\Delta(y_{x+1}-y_x)=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$$

代入原方程 $\Delta^2y_x-y_x=5$，得 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$ ①，这是一阶差分方程。

齐次方程 $y_{x+2}-2y_{x+1}=0$ 的通解为 $y_x=c\cdot 2^x$。

设方程①的特解为 $y_x^*=a$，代入①得 $a=-5$，所以 $y_x^*=-5$。

故原方程的通解为 $y_x=-5+c\cdot 2^x$，c 为任意常数。

【注】在考研大纲中，只要求求解一阶差分方程，有些差分方程形式上是二阶差分方程，但实际上是一阶差分方程。

32.【考点定位】一阶线性微分方程；原函数存在定理；周期函数的积分性质。

【解】（1）若 $f(x)=x$ 则 $y'+y=x$，由一阶线性微分方程通解公式知

$$y=\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}\left[\int x\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{-x}\left[\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{-x}\left[\left(x-1\right)\mathrm{e}^{x}+c\right]=x-1+c\mathrm{e}^{-x},$$

其中 c 为任意常数。

（2）由题意知 $f(x+T)=f(x)$，由一阶线性微分方程通解公式知

$$y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{-x}\left[\int \mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x+c\right]。$$

又由于 $f(x)$ 在 R 上连续，所以 $\mathrm{e}^x f(x)$ 在 R 上连续，由原函数存在定理知 $\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$ 为被积函数的一个原函数，从而 $y=\mathrm{e}^{-x}\left[\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+c\right]$。下面求 c 使得 $y(x+T)=y(x)$：

令 $y(x+T)=y(x)$，则 $\mathrm{e}^{-(x+T)}\left[\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+c\right]=\mathrm{e}^{-x}\left[\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+c\right]$，

故 $\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f\left(t\right)\mathrm{d}t+c=\mathrm{e}^T\left[\int_0^x \mathrm{e}^t f\left(t\right)\mathrm{d}t+c\right]$，从而 $\left(\mathrm{e}^T-1\right)c=\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^T\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$，

由于

$$\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^T\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x \mathrm{e}^{t+T}f(t)\mathrm{d}t\overset{f(t)=f(t+T)}{=}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x \mathrm{e}^{t+T}f(t+T)\mathrm{d}\left(t+T\right)$$
$$=\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t-\int_T^{x+T}\mathrm{e}^u f(u)\mathrm{d}u=\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t,$$

所以
$$c=\frac{\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T-1}。$$

故当且仅当 $c=\dfrac{\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T-1}$ 时，有 $y(x+T)=y(x)$，即方程存在唯一以 T 为周期的解。

【注】①解答该题的一个重要的环节是当被积函数连续时$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为被积函数$f(x)$的一个原函数，从而$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+c$；请同学们仔细体会不定积分与变限定积分之间的关系。

②一阶线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)$的通解可以写为：

$y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(t)\mathrm{d}t}\left[\int_{x_0}^{x}Q\left(t\right)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t}P(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t+c\right]$，为了方便起见，可以取$x_0=0$；

满足$y\big|_{x=x_0}=y_0$的特解为$y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(t)\mathrm{d}t}\left[\int_{x_0}^{x}Q\left(t\right)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t}P(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t+y_0\right]$。

③在本题第二问中，我们以$f(x)=\cos x$为例，其通解为$y=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)+ce^{-x}$,周期解只有一个$y=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)$。

33. 【考点定位】 变限积分求导；积分方程；一阶线性微分方程；函数的平均值。

【解】（1）$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{\underset{t=x-u}{=}}-\int_x^0(x-u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$。

原方程化为 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=ax^2$，①

方程①两边求导得， $f(x)+xf(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=2ax$，

即 $f(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=2ax$， ②

当$x=0$时，方程①左右两边相等（都为0），方程②两边再求导得，$f'(x)+f(x)=2a$，

将$x=0$代入方程②得$f(0)=0$，所以

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}\left(\int 2a\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int 2a\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{-x}(2a\mathrm{e}^{x}+c)=2a+c\mathrm{e}^{-x}$$

由$f(0)=0$得$c=-2a$，故$f(x)=2a(1-\mathrm{e}^{-x})$。

（2）因为$f(x)$在$[0,1]$上的平均值为

$\overline{f}=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2a(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=2a\left(x+\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_0^1=2a\mathrm{e}^{-1}$,所以$2a\mathrm{e}^{-1}=1$，故$a=\frac{\mathrm{e}}{2}$。

34.【考点定位】平面图形的面积；导数的几何意义；可降阶的微分方程;可分离变量的微分方程。

【解】如图，曲线在$y=f\left(x\right)$在$M(x,y)$处的切线MT的方程为$Y-y=y'(X-x)$，所以T的坐标为$(x-\frac{y}{y'},0)$，从而ΔMPT的面积为 $S_1=\frac{1}{2}\left[x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right]\cdot y=\frac{y^2}{2y'}$，

又曲线 $y=f(x)$，直线 MP 以及 x 轴所围成图形的面积 $S_2=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$，

由题意知 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\int_0^x y(t)\mathrm{d}t}{\dfrac{y^2}{2y'}}=\dfrac{3}{2}$，整理得 $\dfrac{3y^2}{y'}=4\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$ ①，

方程两边同时对 x 求导，得 $\dfrac{6y\cdot(y')^2-3y^2\cdot y''}{(y')^2}=4y$，整理得 $3yy''=2(y')^2$ ②。

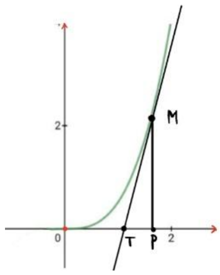
令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入上述方程②得 $3y\cdot p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2p^2$，即 $3y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2p$，

分离变量可得 $\dfrac{3}{p}\mathrm{d}p=\dfrac{2}{y}\mathrm{d}y$，两边积分得 $3\ln|p|=2\ln|y|+C_0$，

从而 $p=C_1y^{\frac{2}{3}}$，所以 $y'=C_1y^{\frac{2}{3}}$，再分离变量可得 $y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$，两边积分 $\int y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y=\int C_1\mathrm{d}x$，

得 $3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$，所以 $y=\left(\dfrac{C_1}{3}x+\dfrac{C_2}{3}\right)^3$。又因为曲线过原点，所以 $C_2=0$，从而 $y=Cx^3$。再由

$y'=3Cx^2$ 且 $y'>0$ 得 $C>0$，故曲线方程为 $y=Cx^3(C>0)$。



35.【考点定位】一阶线性方程通解公式；导数的几何意义；一元函数的最值。

【解】(1) 原方程 $xy'-6y=-6$ 可化为 $y'-\dfrac{6}{x}y=-\dfrac{6}{x}$，其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{6}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\left(-\frac{6}{x}\right)\mathrm{e}^{\int-\frac{6}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^6\left(\int-\frac{6}{x^7}\mathrm{d}x+C\right)=x^6\left(x^{-6}+C\right)=1+Cx^6。$$

因为 $y\left(\sqrt{3}\right)=10$，所以 $C=\dfrac{1}{3}$，故 $y(x)=1+\dfrac{x^6}{3}$。

(2) 设 P 点的坐标为 (x,y)，则 P 点处的法线为 $Y-y=-\dfrac{1}{2x^5}(X-x)$。

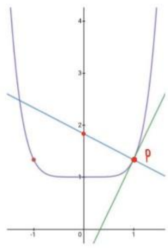
令 $X=0$ 得 $I_y=y+\dfrac{1}{2x^4}=1+\dfrac{1}{3}x^6+\dfrac{1}{2}x^{-4}$，由 $\dfrac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}x}=2x^5-\dfrac{2}{x^5}=\dfrac{2\left(x^{10}-1\right)}{x^5}=0$ 得驻点 $x=\pm1$。

注意 I_y 为偶函数，列表讨论如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\dfrac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}x}$	$-$	0	$+$
I_y	$\downarrow$	最小值点	$\uparrow$

所以当 P 为 $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$ 或 $\left(-1,\dfrac{4}{3}\right)$ 时，I_y 取最小值 $\dfrac{11}{6}$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该曲线 $y=1+\dfrac{x^6}{3}$ 及 I_y 取最小值时的点 $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$ 处的切线和法线。



36.【考点定位】 一阶线性非齐次差分方程。

【答案】$\dfrac{1}{2}t(t-1)+C$，C 为任意常数。

【解】因为 $y_{t+1}-y_t=t$，所以齐次方程 $y_{t+1}-y_t=0$ 的通解为 $Y_t=C$，C 为任意常数。

设 $y_{t+1}-y_t=t$ 的特解为 $y_t^*=t(at+b)$，代入方程得 $(t+1)\left[a(t+1)+b\right]-t(at+b)=t$，整理可得

$2at+(a+b)=t$，则 $\begin{cases}2a=1\\a+b=0\end{cases}$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$，所以 $y_t^*=\dfrac{1}{2}t(t-1)$。

故该差分方程的通解为 $y_t=y_t^*+Y_t=\dfrac{1}{2}t(t-1)+C$，$C$ 为任意常数。