ALGORÍTMICA

Segundo Curso del Grado en Informática

Problemas de eficiencia y notación asintótica

1. Demostrad

   a) $f(n) \in \Theta(g) \Leftrightarrow \exists c, d \in R^+$, $n_0 \in N$ tal que $\forall n \geq n_0$, $d * g(n) \leq f(n) \leq c * g(n)$

   b) $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

2. Demostrad

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in R^+ \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ pero $f(n) \notin \Theta(g(n))$

   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$ pero $f(n) \notin \Theta(g(n))$

   d) $\Theta(f^2(n)) = \Theta(f(n))^2$

3. Demostrad

   a) $\forall k > 0$, $k * f \in O(f)$

   b) Si $f \in O(g)$ y $h \in O(g)$ entonces $(f + h) \in O(g)$
   Si $f \in O(g)$ entonces $(f + g) \in O(g)$

   c) Si $f \in O(g)$ y $g \in O(h)$ entonces $f \in O(h)$

   d) $n^r \in O(n^5)$ si $0 \leq r \leq 5$

   e) $n^k \in O(b^n)\, \forall b > 1$ y $k \geq 0$

   f) $\log_b n \in O(n^k)\, \forall b > 1$ y $k > 0$

   g) $\max(n^3, 10n^2) \in O(n^3)$

   h) $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1})$, $\forall k \in N$

   i) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)\, \forall a, b > 1$

   j) $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in \Theta(log\, n)$

   k) $f \in O(g) \Leftrightarrow \frac{1}{f} \in \Omega(\frac{1}{g})$

   l) $f(n) = c * g(n)$, $c > 0 \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$

4. Demostrad

   a) $f(n) \in O(n^a)$ y $g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n)g(n) \in O(n^{a+b})$

   b) $f(n) \in O(n^a)$ y $g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(n^{\max(a,b)})$

5. Encontrad el menor entero k tal que $f(n) \in O(n^k)$ para:

   a) $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$

   b) $f(n) = \frac{1}{n+1}$

   c) $f(n) = \frac{1}{n-1}$

   d) $f(n) = (n-1)^3$

   e) $f(n) = \frac{n^3+2n-1}{n+1}$

   f) $f(n) = \sqrt{n^2 - 1}$

6. Demostrad por inducción que existe $c > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \geq c * n^3$$

7. Sean $f(n)$ y $g(n)$ asintóticamente no negativas. Demostrad la veracidad o falsedad de:

a) $\max(f(n), g(n)) \in O(f(n) + g(n))$

b) $\max(f(n), g(n)) \in \Omega(f(n) + g(n))$

8. Expresad en notación $O(.)$ el orden de un algoritmo cuyo $T(n)$ fuese $f(n)$ si:

   a) $f(n) = \log(n!)$

   b) $f(n) = n!$

9. Dadas las siguientes funciones de n:

   a) $f_1(n) = n^2$

   b) $f_2(n) = n^2 + 1000n$

   c) $f_3(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ impar} \\ n^3 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

   d) $f_4(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 100 \\ n^3 & \text{si } n > 100 \end{cases}$

   Indicad para cada par (i, j) si se da o no: $f_i(n) \in O(f_j(n))$ o si $f_i(n) \in \Omega(f_j(n))$ (o ambos).

10. Indicad cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y demostradlo:

    a) $2^{n+1} \in O(2^n)$

    b) $(n + 1)! \in O(n!)$

    c) $\forall f : N \to R^+,\ f(n) \in O(n) \Rightarrow f^2(n) \in O(n^2)$

    d) $\forall f : N \to R^+,\ f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

11. Sea x un número real, $0 < x < 1$. Ordenad las tasas de crecimiento de las siguientes funciones:

    $n\log(n), n^8, n^{1+x}, (1 + x)^n, (n^2 + 8n + \log^3(n))^4, \frac{n^2}{\log(n)}$

    Demostrad las respuestas.

12. Demostrad que $\log(n) \in O(\sqrt{n})$ pero $\sqrt{n} \notin O(\log(n))$