TEORÍA DE ALGORITMOS

RELACIÓN DE PROBLEMAS 1

1. Demostrar

   (a) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow \exists c, d \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}/n \geq n_0, d{*}g(n) \leq f(n) \leq c{*}g(n)$

   (b) $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

2. Demostrar

   (a) $Lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

   (b) $Lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \quad pero \quad f(n) \notin \Theta(g(n))$

   (c) $Lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \quad pero \quad f(n) \notin \Theta(g(n))$

   (d) $\Theta(f^2(n)) = \Theta(f(n))^2$

3. Demostrar

   (a) $\forall k > 0,\ k * f \in O(f)$

   (b) Si $f \in O(g)$ y $h \in O(g)$ entonces $(f + h) \in O(g)$,
   Si $f \in O(g)$ entonces $(f + g) \in O(g)$

   (c) Si $f \in O(g)$ y $g \in O(h)$ entonces $f \in O(h)$

   (d) $n^r \in O(n^5)$ si $0 \leq r \leq 5$

   (e) $n^k \in O(b^n)$ $\forall b > 1$ y $k \geq 0$

   (f) $log_b n \in O(n^k)$ $\forall b > 1$ y $k > 0$

   (g) $Max(n^3, 10n^2) \in O(n^3)$

   (h) $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1}), \forall k \in \aleph$

   (i) $log_a n \in \Theta(log_b n)$ $\forall a, b > 1$

   (j) $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in \Theta(log n)$

(k) $f \in O(g) \Leftrightarrow \frac{1}{f} \in \Omega(\frac{1}{g})$

(l) $f(n) = c * g(n)\ c > 0 \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$

4. Demostrar

   (a) $f(n) \in O(n^a)$ y $g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n)g(n) \in O(n^{a+b})$

   (b) $f(n) \in O(n^a)$ y $g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(n^{max(a,b)})$

5. Encontrar el menor entero k tal que $f(n) \in O(n^k)$:

   (a) $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$

   (b) $f(n) = \frac{1}{(n+1)}$

   (c) $f(n) = \frac{1}{(n-1)}$

   (d) $f(n) = (n-1)^3$

   (e) $f(n) = \frac{(n^3+2n-1)}{(n+1)}$

   (f) $f(n) = \sqrt{n^2 - 1}$

6. Demostrar por inducción que existe $c > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \geq c * n^3$$

7. Sean $f(n)$ y $g(n)$ asintóticamente no negativas. Demostrar la veracidad o falsedad de :

   (a) $Max(f(n), g(n)) \in O(f(n) + g(n))$

   (b) $Max(f(n), g(n)) \in \Omega(f(n) + g(n))$

8. Expresar en notación $O(\cdot)$ el orden de un algoritmo cuyo $T(n)$ fuese $f(n)$ si:

(a) $f(n) = log(n!)$

(b) $f(n) = n!$

9. Dadas las siguientes funciones de n:

   (a) $f_1(n) = n^2$

   (b) $f_2(n) = n^2 + 1000n$

   (c) $f_3(n) = \begin{cases} n & n\ impar \\ n^3 & n\ par \end{cases}$

   (d) $f_4(n) = \begin{cases} n & n \leq 100 \\ n^3 & n > 100 \end{cases}$

   Indicar para cada par (i, j) si se da o no: $f_i(n) \in O(f_j(n))$ o si $f_i(n) \in \Omega(f_j(n))$ (o ambos)

10. Decir cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y demostrarlo:

    (a) $2^{n+1} \in O(2^n)$

    (b) $(n+1)! \in O(n!)$

    (c) $\forall f : \aleph \rightarrow \Re^+,\ f(n) \in O(n) \Rightarrow f^2(n) \in O(n^2)$

    (d) $\forall f : \aleph \rightarrow \Re^+,\ f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

11. Sea x un número real, $0 < x < 1$. Ordenar las tasas de crecimiento de las siguientes funciones:

    $nlog(n)$, n^8, n^{1+x}, $(1+x)^n$, $(n^2 + 8n + log^3(n))^4$, $\frac{n^2}{log(n)}$

    Demostrar las respuestas.

12. Demostrar que:

    - $log(n) \in O(\sqrt{n})$ pero $\sqrt{n} \notin O(log(n))$

TEORIA DE ALGORITMOS

1.- El tiempo de ejecucion de un algoritmo A esta descrito por la recurrencia

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

otro algoritmo B tiene un tiempo de ejecucion dado por,

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$$

¿cual es el mayor valor de la constante a que hace a B asintoticamente mas rapido que A?

2.- Resolver las siguientes recurrencias

a) $T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$	$n\geq 2$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$
b) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$	$n\geq 2$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$
c) $T(n) = 5T(n-1) + 8T(n-2) + 4T(n-3)$	$n\geq 3$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$
d) $T(n) = 2T(n-1) + 1$	$n\geq 1$, $T(0) = 0$
e) $T(n) = 2T(n-1) + n$	$n\geq 1$, $T(0) = 0$
f) $T(n) = 2T(n-1) + n + 2^n$	$n\geq 1$, $T(0) = 0$
g) $T(n) = 4T(n/2) + n$	$n>2$, $T(1) = 1$, $T(2) = 6$
h) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$	$n>1$, considerar $c_i > 0\ \forall i$.
i) $T(n) = 2T(n/2) + n\cdot\log(n)$	$n>1$, considerar $c_i > 0\ \forall i$
j) $T(n) = 3T(n/2) + cn$	$n>1$, considerar c constante y $c_i > 0\ \forall i$
k) $T(n) = 2T(n/2) + \log(n)$	$n\geq 2$, $T(1) = 1$
l) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log(n)$	$n\geq 4$, $T(2) = 1$
m) $T(n) = 5T(n/2) + (n\log(n))^2$	$n\geq 2$, $T(1) = 1$
n) $T(n) = T(n/2)\cdot T^2(n/4)$	$n \geq 4$, $T(1) = 1$, $T(2) = 4$
o) $T(n) = n\cdot T^2(n/2)$	$n > 2$, $T(1) = 6$, $T(2) = 72$
p) $T(n) = \sqrt{n}\cdot T(\sqrt{n}) + n$	$n\geq 4$, considerar $c_i > 0\ \forall i$
q) $T(n) = 2T(n-1) + 3^n$	$n \geq 1$, considerar $c_i > 0\ \forall i$

2.h) Demostrar: $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1}),\ \forall k \in \aleph$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \le n \cdot n^k = n^{k+1}$$

$$Sean \left.\begin{matrix} n_0 = 1 \\ c = 1 \end{matrix}\right\} \forall n \ge n_0, \sum_{i=1}^{n} i^n \le c \cdot n^{k+1}$$

$$Luego \sum_{i=1}^{n} i^k \in O(n^{k+1})$$

2.h) Demostrar: $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1}),\ \forall k \in \aleph$

Por inducción sobre n

$n=1 \quad \sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k = 1 = 1^{k+1} = n^{k+1} \Rightarrow$ *se cumple*

Supongamos que es cierto para $n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^k \in \Omega(n^{k+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \,/\, \forall n \ge n_0, \sum_{i=1}^{n} i^k \ge c \cdot n^{k+1}$

¿$n+1$?

$\sum_{i=1}^{n+1} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^k + (n+1)^k \underset{hip}{\ge} c \cdot n^{k+1} + (n+1)^k \ge c \cdot n^{k+1}$. *Con lo que* $\sum_{i=1}^{n+1} i^k \in \Omega(n^{k+1})$

2.j) $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in \Theta(\log_2 n)$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in O(\log_2 n)$$

Por inducción:

$n=2 \quad \sum_{i=1}^{n} i^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \le 2 \cdot 1 = 2 \cdot \log_2 2$

Sup. para $n \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \,/\, \forall n \ge n_0, \sum_{i=1}^{n} i^{-1} \le c \cdot \log n$

¿$n+1$?

$\sum_{i=1}^{n+1} i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} i^{-1} + \frac{1}{n+1} \underset{hip}{\le} c \cdot \log n + \frac{1}{n+1} \le c \cdot \log n + \log n = (c+1) \cdot \log$

Luego $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in O(\log n)$

3.i) Demostrar: $f(n) \in O(n^a), g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O(n^{a+b})$

$f(n) \cdot g(n) \underset{\text{regla del producto}}{\in} O(n^a \cdot n^b) = O(n^{a+b})$

3.ii) Demostrar: $f(n) \in O(n^a), g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(n^{\max(a,b)})$

$f(n) + g(n) \underset{\text{regla de la suma}}{\in} O(\max(n^a, n^b)) = O(n^{\max(a,b)})$

4. Encontrar el menor entero k tal que $f(n) \in O(n^k)$

i) $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{13n^2 + 4n - 73}{n^k} = \begin{cases} +\infty & k < 2 \Rightarrow f(n) \notin O(n^k) \\ 13 & k = 2 \Rightarrow f(n) \in O(n^k) \\ 0 & k > 2 \Rightarrow f(n) \in O(n^k) \end{cases}$$

Luego $k = 2$

4. Encontrar el menor entero k tal que $f(n) \in O(n^k)$

ii) $f(n) = \frac{1}{(n+1)}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{1/(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{(n+1)^{-1}} = \begin{cases} +\infty & k > -1 \Rightarrow f(n) \in O(n^k) \\ 1 & k = -1 \Rightarrow f(n) \in O(n^k) \\ 0 & k < -1 \Rightarrow f(n) \notin O(n^k) \end{cases}$$

Luego $k = -1$

4. Encontrar el menor entero k tal que $f(n) \in O(n^k)$

vi) $f(n) = \sqrt{n^3 - 1}$

6. Sean f(n) y g(n) asintóticamente no negativas. Demostrar la veracidad o falsedad de:

6.a) $Max(f(n), g(n)) \in O(f(n) + g(n))$

$Max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n), \forall n \underset{\substack{n_0=1 \\ c=1}}{\Rightarrow} Max(f(n), g(n)) \in O(f(n) + g(n))$

6.b) $Max(f(n), g(n)) \in \Omega(f(n) + g(n))$

6. Sean f(n) y g(n) asintóticamente no negativas. Demostrar la veracidad o falsedad de:

6.a) $Max(f(n), g(n)) \in O(f(n) + g(n))$

$Max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n), \forall n \underset{\substack{n_0=1 \\ c=1}}{\Rightarrow} Max(f(n), g(n)) \in O(f(n) + g(n))$

6.b) $Max(f(n), g(n)) \in \Omega(f(n) + g(n))$

$Max(f(n), g(n)) \geq \frac{1}{2}(f(n) + g(n)), \forall n \underset{\substack{n_0=1 \\ c=1/2}}{\Rightarrow} Max(f(n), g(n)) \in \Omega(f(n) + g(n))$

7. Expresar en notación O el orden de un algoritmo cuyo T(n) fuese f(n) si:

7.a) $f(n) = \log(n!)$

$T(n) = \log(n!) = \log(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1) = \log n + \log(n-1) + \cdots + \log(1) \leq n \cdot \log(n)$

Luego $T(n) = \log(n!) \in O(n \log n)$

7. Expresar en notación O el orden de un algoritmo cuyo T(n) fuese f(n) si:

7.b) $T(n) = n!$

$n! \in O(n!)$ (como cota menor)

También:

$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 1 \leq n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^n \Rightarrow n! \in O(n^n)$

O también (por 7.a) $n! = 2^{\log_2(n!)} \leq 2^{n \log_2 n}$

En general: $n! \in O(a^{n \log_a n}) \quad \forall a > 1$

Que es lo mismo que la expresión anterior, ya que $a^{n \log_a n} =$
$a^{n \log_a n} = a^{\log_a n^n} = n^n$

(1, 2) (2, 1)	$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1000n} = 1 \Rightarrow \Theta(n^2) = \Theta(n^2 + 1000n)$

(3, 4)

Sea $n_0 = 101, c = 1$

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} n \text{ impar} & f_3(n) = n \leq n^3 = f_4(n) \Rightarrow f_3(n) \in O(f_4(n)) \\ n \text{ par} & f_3(n) = n^3 = n^3 = f_4(n) \Rightarrow f_3(n) \in O(f_4(n)) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_3(n) \in O(f_4(n))$

¿$f_3(n) \in \Omega(f_4(n))$?

Sup. $f_3(n) \in \Omega(f_4(n)) \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ f_3(n) \geq c \cdot f_4(n)$

$$\text{Sea } \left.\begin{matrix} n_1 > n_0 \\ n_1 \text{ impar} \\ n_1 > 1/\sqrt{c} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_3(n_1) \geq c \cdot f_4(n_1) \Rightarrow n_1 \geq c \cdot n_1^3$$

Pero $n_1 > \frac{1}{\sqrt{c}} \Rightarrow n_1^2 > \frac{1}{c} \Rightarrow c > \frac{1}{n_1^2} \Rightarrow c \cdot n^3 > \frac{n_1^3}{n_1^2} = n$ (abs.)

Luego $f_3(n) \notin \Omega(f_4(n))$

(4, 3)

$f_3(n) \in O(f_4(n)) \Rightarrow f_4(n) \in \Omega(f_3(n))$

$f_3(n) \notin \Omega(f_4(n)) \Rightarrow f_4(n) \notin O(f_3(n))$

(1, 3)

Sup. $f_1(n) \in O(f_3(n)) \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ f_1(n) \leq c \cdot f_3(n)$

$$\text{Sea } \left.\begin{matrix} n_1 \geq n_0 \\ n_1 \text{ impar} \\ n_1 > c \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1(n_1) \leq c \cdot f_3(n_1) \Rightarrow n_1^2 \leq c \cdot n_1.\quad n_1 > c \Rightarrow n_1^2 > c \cdot n_1 \text{ (abs.)}$$

Luego $f_1(n) \notin O(f_3(n))$

Sup. $f_1(n) \in \Omega(f_3(n)) \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ f_1(n) \geq c \cdot f_3(n)$

$$\text{Sea } \left.\begin{matrix} n_1 \geq n_0 \\ n_1 \text{ par} \\ n_1 > 1/c \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1(n_1) \geq c \cdot f_3(n_1) \Rightarrow n_1^2 \geq c \cdot n_1^3$$

Pero $n_1 > 1/c \Rightarrow c > 1/n_1 \Rightarrow c \cdot n_1^3 > n_1^2$ (absurdo)

Luego $f_1(n) \notin \Omega(f_3(n))$

(3, 1)

$f_1(n) \notin O(f_3(n)) \Rightarrow f_3(n) \notin \Omega(f_1(n))$

$f_1(n) \notin \Omega(f_3(n)) \Rightarrow f_3(n) \notin O(f_1(n))$

(2, 3)

$$\left.\begin{matrix} \text{Sup. } f_2(n) \in O(f_3(n)) \\ \text{Sabemos } f_1(n) \in O(f_2(n)) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1(n) \in O(f_3(n)) \quad (\text{falso})$$

Luego $f_2(n) \notin O(f_3(n))$

$$\left.\begin{matrix} \text{Sup. } f_2(n) \in \Omega(f_3(n)) \\ \text{Sabemos } f_1(n) \in \Omega(f_2(n)) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1(n) \in \Omega(f_3(n)) \quad (\text{falso})$$

Luego $f_2(n) \notin \Omega(f_3(n))$

(3, 2)

$f_2(n) \notin O(f_3(n)) \Rightarrow f_3(n) \notin \Omega(f_2(n))$

$f_2(n) \notin \Omega(f_3(n)) \Rightarrow f_3(n) \notin O(f_2(n))$

(1, 4)

$$\text{Sea } \left.\begin{matrix} n_0 = 101 \\ c = 1 \end{matrix}\right\} \underset{n \geq n_0}{\Rightarrow} \begin{matrix} f_1(n) = n^2 \\ f_4(n) = n^3 \end{matrix}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} n^2 \in O(n^3) \\ n^2 \notin \Omega(n^3) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_1(n) \in O(f_4(n)) \\ f_1(n) \notin \Omega(f_4(n)) \end{matrix}$$

(4, 1)

$f_1(n) \in O(f_4(n)) \Rightarrow f_4(n) \in \Omega(f_1(n))$

$f_1(n) \notin \Omega(f_4(n)) \Rightarrow f_4(n) \notin O(f_1(n))$

9. Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y demostrarlo:

9.a) $2^{n+1} \in O(2^n)$ *Cierto*

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n, \quad \forall n \underset{\substack{n_0=1 \\ c=2}}{\Rightarrow} 2^{n+1} \in O(2^n)$$

9. Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y demostrarlo:

9.a) $2^{n+1} \in O(2^n)$ *Cierto*

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n, \quad \forall n \underset{\substack{n_0=1 \\ c=2}}{\Rightarrow} 2^{n+1} \in O(2^n)$$

9.b) $(n+1)! \in O(n!)$ *Falso*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 \Rightarrow$$

$$n! \notin \Omega((n+1)!) \quad \Rightarrow \quad (n+1)! \notin O(n!)$$

9.c) $\forall f : \aleph \to \Re^+,\ f(n) \in O(n) \Rightarrow f^2(n) \in O(n^2)$ *Cierto*

$$f(n) \in O(n) \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph,\ c > 0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ f(n) \leq c \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2(n) \leq c^2 \cdot n^2 \Rightarrow f^2(n) \in O(n^2$$

9.d) $\forall f : \aleph \to \Re^+,\ f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$ Falso

Sea $f(n) = 2n$

$2^{f(n)} = 2^{2n} = 4^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = 0$$

Luego $2^n \notin \Omega(4^n) \Rightarrow 4^n \notin O(2^n) \Rightarrow 2^{f(n)} \notin O(2^n)$

f(n) es un contraejemplo

$n^2 + 8n + \log^3(n) \in O(n^2)$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\log^3(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \log^2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3 \cdot \log^2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3 \cdot \log^2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{6 \cdot \log(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2}{6} = +\infty \Rightarrow \log^3(n) \in O(n^2)$$

Si $f(n) \in O(n^2) \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ f(n) \leq c \cdot n^2 \Rightarrow f(n)^4 \leq c^4 \cdot n^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n)^4 \in O(n^8) \Rightarrow (n^2 + 8n + \log^3(n))^4 \in O(n^8)$

Además $(n^2 + 8n + \log^3(n))^4 \geq n^8 \underset{\substack{n_0=1 \\ c=1}}{\Rightarrow} n^8 \in O((n^2 + 8n + \log^3(n))^4)$

Luego $O(n^8) = O((n^2 + 8n + \log^3(n))^4)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x)^n}{n^8} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x)^n \cdot \log_{1+x} e}{8n^7} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x)^n \cdot \log^8_{1+x} e}{8!}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^8 \in O((1+x)^n) \\ n^8 \notin \Omega((1+x)^n) \Rightarrow (1+x)^n \notin O(n^8) \end{cases}$$

Luego $O(n^8) \lhd O((1+x)^n)$

$O((n^2 + 8n + \log^3(n))^4) \lhd ((1+x)^n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x)^n}{n^8} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x)^n \cdot \log_{1+x} e}{8n^7} = \dots = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x)^n \cdot \log^8_{1+x} e}{8!} = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^8 \in O((1+x)^n) \\ n^8 \notin \Omega((1+x)^n) \Rightarrow (1+x)^n \notin O(n^8) \end{cases}$$

Luego $O(n^8) \triangleleft O((1+x)^n)$

$O((n^2+8n+\log^3(n))^4) \triangleleft ((1+x)^n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8}{\frac{n^2}{\log(n)}} = \lim_{n\to\infty} n^6 \cdot \log(n) = \infty \Rightarrow \begin{cases} \frac{n^2}{\log(n)} \in O(n^8) \\ n^8 \notin O\left(\frac{n^2}{\log(n)}\right) \end{cases}$$

$$\text{Luego } O\left(\frac{n^2}{\log(n)}\right) \triangleleft O(n^8)$$

11. Demostrar que $\log(n) \in O(\sqrt{n})$ *pero* $\sqrt{n} \notin O(\log(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = \infty \Rightarrow \begin{cases} \log(n) \in O(\sqrt{n}) \\ \log(n) \notin \Omega(\sqrt{n}) \Rightarrow \sqrt{n} \notin O(\log(n)) \end{cases}$$

El tiempo de ejecución de un algoritmo A está descrito por la recurrencia

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

Otro algoritmo B tiene un tiempo de ejecución dado por

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$$

¿Cuál es el mayor valor de la constante a que hace a B asintóticamente mas rápido que A?

Resolvemos primero ambas recurrencias:

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

Realizamos el cambio $n = 2^k$ y nos queda:

$$T(2^k) = 7T(2^{k-1}) + 4^k$$
$$t_k = 7t_{k-1} + 4^k$$
$$t_k - 7t_{k-1} = 4^k$$

Por lo tanto la ecuación característica es:

$$(x-7)(x-4)$$
$$t_k = C_1 7^k + C_2 4^k$$

Y finalmente

$$t_n = C_1 7^{\log n} + C_2 n^2 = C_1 n^{\log 7} + C_2 n^2$$

Pasamos ahora a la resolución de la segunda recurrencia:

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$$

Realizamos el cambio $n = 4^k$ y nos queda:

$$T'(4^k) = aT'(4^{k-1}) + 16^k$$
$$t'_k = at'_{k-1} + 16^k$$
$$t'_k - at'_{k-1} = 16^k$$

Por lo tanto la ecuación característica es:

$$(x-a)(x-16)$$
$$t'_k = C_1 a^k + C_2 16^k$$
$$t'_n = C_1 a^{\log n} + C_2 n^2 = C_1 n^{\log a} + C_2 n^2$$

Si comparamos ambas ecuaciones podemos observar que su eficiencia sólo varia en el logaritmo al que está elevado n. Si los igualamos obtendremos el valor de a donde ambas eficiencias son iguales.

Este es el valor que buscamos:

$$\log_2 7 = \log_4 a$$

$$\frac{\log 7}{\log 2} = \frac{\log a}{\log 4} \qquad \log a = \frac{\log 7 \cdot \log 4}{\log 2} = 1.69 \qquad a = 49$$

- **$T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$,** $n \geq 2, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1$

$$t_n = 3t_{n-1} + 4t_{n-2}$$
$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$$

Calculamos la ecuación característica

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x-4)(x+1)$$
$$t_n = C_1 4^n + C_2(-1)^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$$t_0 = C_1 4^0 + C_2(-1)^0 = C_1 + C_2 = 0$$
$$t_1 = C_1 4^1 + C_2(-1)^1 = 4C_1 - C_2 = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$C_1 = 1/5 \qquad C_2 = -1/5$$

$$t_n = \frac{4^n}{5} - \frac{(-1)^n}{5}$$

$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ $\quad n \geq 2, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1$

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$$
$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$

Calculamos el polinomio característico

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$t_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

A continuación calculamos las constantes

$$t_0 = C_1 + C_2 = 0$$
$$t_1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$T(n) = 2T(n-1) + 1$ $\quad n \geq 1, \quad T(0) = 0$

$$t_n = 2t_{n-1} + 1$$
$$t_n - 2t_{n-1} = 1$$

Calculamos la ecuación característica

$$(x-2)(x-1)$$
$$t_n = C_1 2^n + C_2 1^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$$t_0 = C_1 + C_2 = 0$$

Sabemos que:

$T(1) = 2T(0) + 1$, como $T(0) = 0$, $\quad T(1) = 1$

$$t_1 = C_1 2^1 + C_2 1^1 = 2C_1 + C_2 = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = -1$$
$$t_1 = 2^n - 1^n$$

$T(n) = 2T(n-1) + n + 2^n$ $\quad n \geq 1, \quad T(0) = 0$

$$t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n$$
$$t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n$$

Calculamos la ecuación característica

$$(x-2)(x-1)^2(x-2) = (x-1)^2(x-2)^2$$
$$t_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 1^n + C_4 n 1^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$$t_0 = C_1 + C_3 = 0$$

Sabemos que:

$T(1)=2T(0) + 1 + 2^1$, como $T(0) = 0$, $\quad T(1) = 1$

$T(2)=2T(1) + 2 + 2^2$, como $T(1) = 1$, $\quad T(2) = 12$

$T(3)=2T(2) + 3 + 2^3$, como $T(2) = 12$, $\quad T(3) = 35$

$$t_1 = C_1 2 + C_2 2 + C_3 + C_4 = 1$$
$$t_2 = C_1 2^2 + C_2 2 \cdot 2^2 + C_3 1 + C_4 2 \cdot 1 = 12$$
$$t_3 = C_1 2^3 + C_2 3 \cdot 2^3 + C_1 1 + C_3 3 \cdot 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$C_1 = 2 \qquad C_2 = 1 \qquad C_3 = -2 \qquad C_4 = -1$

$$t_n = 2 \cdot 2^n + n2^n - 2 \cdot 1^n - n1^n$$

$T(n) = 4T(n/2) + n$ $\quad n > 2, \quad T(1) = 1 \quad T(2) = 6$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$$

$$t_k - 4t_{k-1} = 2^k$$

La ecuación característica es:

$$(x-4)(x-2)$$

$$t_k = C_1 4^k + C_2 2^k$$

$$t_n = C_1 n^2 + C_2 n$$

$$t_1 = C_1 + C_2 = 1$$

$$t_2 = 4C_1 + 2C_2 = 6$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$C_1 = 2 \qquad C_2 = -1$

Por lo tanto

$t_n = 2n^2 - n$ para n potencia de 2

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$ $\quad n > 1, \quad considerar C_i \succ 0 \ \forall i$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 4^k$$

$$t_k - 4t_{k-1} = 4^k$$

La ecuación característica es:

$$(x-4)(x-4)$$

$$t_k = C_1 4^k + C_2 k 4^k$$

$t_n = C_1 n^2 + C_2 n^2 \log(n)$ para n potencia de 2

$T(n) = 2T(n/2) + n\log(n)$ $\quad n > 1, \quad considerar C_i \succ 0 \ \forall i$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k \log(2^k)$$

$$t_k - 2t_{k-1} = k2^k$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)(x-2)^2$$

$$t_k = C_1 2^k + C_2 k 2^k + C_3 k^2 2^k$$

$t_n = C_1 n + C_2 n\log(n) + C_3 n\log^2 n$ (n potencia de 2)

$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log(n)$ $\quad n \geq 4, \quad T(2) = 1$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^{k/2}) + k$$

$$t_k = 2t_{k/2} + k$$

A continuación realizamos otro cambio:

$$k = 2^i$$

$$t_i = 2t_{i-1} + 2^i$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)^2$$

$$t_i = C_1 2^i + C_2 i 2^i$$

$$t_k = C_1 k + C_2 k\log(k)$$

$$t_n = C_1 \log(n) + C_2 \log(n) \log^2(n)$$

- ***Resolver la recurrencia***

$T(n) = 5T(n/2) + (n\log(n))^2$

con la condicion inicial

$n \geq 2, \quad T(1) = 1$

$T(n) = 5T(n/2) + (n\log(n))^2$ $\quad n > 2, \quad T(1) = 1$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 5T(2^{k-1}) + (2^k \log(2^k))^2$$

$$T(2^k) = 5T(2^{k-1}) + k^2 4^k \log^2(2)$$

$$t_k - 5t_{k-1} = k^2 4^k \log^2(2)$$

La ecuación característica es:

$$(x-5)(x-4)^3$$

$$t_k = C_1 5^k + C_2 4^k + C_3 k 4^k + C_4 k^2 4^k$$

$$t_n = C_1 n^{\log 5} + C_2 n^2 + C_3 n^2 \log(n) + C_4 n^2 \log^2(n)$$

para n potencia de 2

$T(n) = T(n/2)T^2(n/4)$ $\quad n \geq 4, \quad T(1) = 1 \quad T(2) = 4$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1})\, T^2(2^{k-2})$$

$$t_k = t_{k-1} \cdot t^2_{k-2}$$

Realizamos tambien el siguiente cambio:

$$u_i = \log(t_k)$$

$$\log(t_k) = \log(t_{k-1}) + 2\log(t_{k-2})$$

$$u_i = u_{i-1} + 2u_{i-2}$$

$$u_i - u_{i-1} - 2u_{i-2} = 0$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)(x+1)$$

$$u_i = C_1 2^i + C_2(-1)^i$$

$t_k = 2^{u_i} = 2^{C_1 2^k + C_2(-1)^k} \quad t_n = 2^{C_1 n + C_2(-1)^{\log(n)}}$ n potencia de 2

$T(n) = nT^2(n/2)$ $\quad n > 2, \quad T(1) = 6 \quad T(2) = 72$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2^k T^2(2^{k-1}),\ t_k = 2^k \cdot t^2_{k-1}$$

Realizamos tambien el siguiente cambio:

$$u_i = \log(t_k)$$

$$\log(t_k) = \log(2^k) + 2\log(t_{k-1})$$

$$u_i = k + 2u_{i-1},\ u_i - 2u_{i-1} = k$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)(x-1)^2$$

$$u_i = C_1 2^i + C_2 1^i + C_3 i \cdot 1^i$$

$t_k = 2^{u_i} = 2^{C_1 2^k + C_2 + kC_3} \quad t_n = 2^{C_1 n + C_2 + C_3 \log(n)}$ n potencia de 2

$\mathbf{T(n) = \sqrt{n}\, T(\sqrt{n}) + n}$ $\quad n \geq 4, \quad$ *considerar* $c_i > 0 \, \forall i$

Si dividimos por n nos queda

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + 1$$

tomamos $f(x) = T(x)/x$. Entonces: $f(n) = f(\sqrt{n}) + 1$

Si hacemos $n = 2^k$, nos queda $f(2^k) = f(2^{k/2}) + 1$, y

$$t_k = t_{k/2} + 1$$

A continuación realizamos otro cambio: $k = 2^i$

$$t_i = t_{i-1} + 1$$

La ecuación característica es: $(x-1)^2$

$$t_i = C_1 1^i + C_2 i 1^i$$

$$t_k = C_1 + C_2 \log(k)$$

$$f_n = C_1 + C_2 \log^2(n) = t_n/n$$

$$t_n = C_1 n + C_2 n \log^2(n)$$

$T(n) = 2T(n-1) + 3^n$ $\quad n \geq 1, \quad$ *considerar* $c_i > 0 \, \forall i$

$$t_n = 2t_{n-1} + 3^n$$

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$$

Calculamos la ecuación característica

$$(x-2)(x-3)$$

$$t_n = C_1 2^n + C_2 3^n$$