Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

J. C. Rosales y P. A. García Sánchez

Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

Capítulo 5

Espacios vectoriales y aplicaciones lineales

1. Espacios y subespacios

Sea K un cuerpo. Diremos que un conjunto V tiene estructura de espacio vectorial sobre K si

1) en V hay una operación $+$ de forma que $(V, +)$ es un grupo abeliano,
2) existe una aplicación $K \times V \to V$, $(a, \overrightarrow{v}) \mapsto a\overrightarrow{v}$ verificando
   I) $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$,
   II) $(a + b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$,
   III) $a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$,
   IV) $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

A los elementos de V los llamamos vectores y a los de K escalares. La aplicación descrita arriba se conoce como producto por escalares.

Ejercicio 49: Probar que si K es un cuerpo, entonces para cualesquiera enteros positivos n y m,

a) K^n,
b) $\{a(x) \in K[x]$ tales que $\mathrm{gr}(a(x)) \leq n\}$,
c) $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$,

son espacios vectoriales sobre K.

Ejercicio 50: Encuentra un espacio vectorial de cardinal 81.

Propiedades que se deducen de la definición.

1) $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (el elemento neutro de $+$ en V).
2) $a\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
3) Si $a\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, entonces $a = 0$ o $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
4) $-(a\overrightarrow{u}) = (-a)\overrightarrow{u} = a(-\overrightarrow{u})$.
5) $a(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} - a\overrightarrow{v}$.
6) $(a - b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} - b\overrightarrow{u}$.
7) Si $a\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v}$ y $a \neq 0$, entonces $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
8) Si $a\overrightarrow{u} = b\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, entonces $a = b$.

<u>En adelante V denotará un espacio vectorial sobre un cuerpo K.</u>

Un subconjunto U de V es un subespacio vectorial de V si

1) $U \neq \emptyset$,
2) si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in U$, entonces $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \in U$ (U es un subgrupo de $(V, +)$),
3) si $a \in K$ y $\overrightarrow{u} \in U$, entonces $a\overrightarrow{u} \in U$.

Las dos últimas propiedades se pueden substituir por

2') si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in U$ y $a, b \in K$, entonces $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in U$ (U es cerrado para combinaciones lineales de sus elementos).

Ejercicio 51: Demuestra que $\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ tales que $x + y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$.

Ejercicio 52: Encuentra todos los elementos de $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_3^2$ tales que $x + y = 0\}$.

- Un subespacio vectorial de V es un espacio vectorial sobre K, con la misma suma y producto por escalares.
- La intersección de subespacios vectoriales de V es de nuevo un subespacio vectorial de V.

Sea S un subconjunto no vacío de V. El subespacio vectorial de V generado por S es la intersección de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S. A dicho subespacio lo denotaremos por $\langle S\rangle$.

- Si $S = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$, entonces
$$\langle S\rangle = \{a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_n\overrightarrow{u}_n \text{ tales que } a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Ejercicio 53: Calcula todos los elementos del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^3$ generado por $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2)\}$.

Sean $U_1, \ldots, U_n$ subespacios vectoriales de V. El subespacio vectorial suma de $U_1, \ldots, U_n$ es
$$U_1 + \ldots + U_n = \{\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \overrightarrow{u}_n \text{ tales que } \overrightarrow{u}_1 \in U_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n \in U_n\}.$$

- $U_1 + \cdots + U_n = \langle U_1 \cup \cdots \cup U_n\rangle$.
- Si $U_1 = \langle S_1\rangle, \ldots, U_n = \langle S_n\rangle$, entonces $U_1 + \cdots + U_n = \langle S_1 \cup \cdots \cup S_n\rangle$.

Sean U y W subespacios vectoriales de V. Decimos que V es suma directa de U y W, y lo denotamos por $V = U \oplus W$, si todo vector $\overrightarrow{v} \in V$ se puede expresar de forma única como $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$, con $\overrightarrow{u} \in U$ and $\overrightarrow{w} \in W$. En dicho caso, diremos que los subespacios vectoriales U y W son complementarios.

- $V = U \oplus W$ si, y sólo si, $V = U + W$ y $U \cap W = \{\overrightarrow{0}\}$.

Ejercicio 54: Sean $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x + y = 0\}$ y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x - y = 0\}$. Demuestra que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Maxima 28:

El conjunto K^n con K un cuerpo y n un entero positivo es un espacio vectorial. Para el caso $n = 3$, el producto por escalares está definido así.

```
(%i1) a*[x,y,z];
```

(%o1) $$[a\,x, a\,y, a\,z]$$

Y la suma de vectores se hace componente a componente.

```
(%i2) [x_1,y_2,z_3]+[x_2,y_2,z_2];
```

(%o2) $$[x\_2 + x\_1, 2\,y\_2, z\_3 + z\_2]$$

Veamos que el conjunto de vectores de la forma $(x, y, 0)$, con $x, y \in K$, es un subespacio de K^3.

```
(%i3) a*[x_1,y_1,0]+b*[x_2,y_2,0];
```

(%o3) $$[b\,x\_2 + a\,x\_1, b\,y\_2 + a\,y\_1, 0]$$

Lo mismo ocurre con los de la forma (x, x, x).

```
(%i4) a*[x,x,x]+b*[x,x,x];
```

(%o4) $$[b\,x + a\,x, b\,x + a\,x, b\,x + a\,x]$$

2. Bases

Un conjunto de vectores $S \subseteq V$ es linealmente dependiente si existen n un entero positivo, $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\} \subseteq S$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tales que $a_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0}$. En caso contrario, decimos que S es un conjunto de vectores linealmente independientes.
Ejercicio 55: Demuestra que los vectores $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes.

- S es un conjunto de vectores linealmente dependientes si y sólo si existe $\overrightarrow{v} \in S$ tal que $\overrightarrow{v} \in \langle S \setminus \{\overrightarrow{v}\}\rangle$.
- Si $\overrightarrow{0} \in S$, entonces S es un conjunto de vectores linealmente dependientes.
- Si S es un conjunto de vectores linealmente dependientes, entonces para todo $\overrightarrow{v} \in V$, $S \cup \{\overrightarrow{v}\}$ también es un conjunto de vectores linealmente dependientes.
- Si S, $\sharp S \geq 2$, es un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces para todo $v \in S$ $S \setminus \{\overrightarrow{v}\}$ también es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Maxima 29:
Veamos si $\{(1, 2), (0, 1)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{Q}^2$.

```
(%i1) solve(x*[1,2]+y*[0,1],[x,y]);
```

(%o1) $$[[x = 0, y = 0]]$$

Ahora probamos con $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6)\}$ en $\mathbb{Q}^3$, y vemos que son dependientes.

```
(%i2) solve(x*[1,2,3]+y*[2,4,6],[x,y]);
```

solve: dependent equations eliminated: (2 3)

(%o2) $$[[x = -2\,\%r6, y = \%r1]]$$

Una base de V es un subconjunto S de vectores linealmente independientes de V tal que $V = \langle S\rangle$.

- Si $B = \{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ es una base de V, entonces para todo vector $\overrightarrow{v} \in V$, existen $a_1, \ldots, a_n \in K$ únicos tales que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_n\overrightarrow{v}_n$.

A la n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ se le llama coordenadas del vector $\overrightarrow{v}$ respecto de la base B.
Ejercicio 56: Demuestra que $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_5^2$. Calcula las coordenadas del vector $(2, 4)$ respecto de dicha base.

Teorema de la base. Todo espacio vectorial distinto de $\{\overrightarrow{0}\}$ tiene al menos una base. Además todas sus bases tienen el mismo cardinal.

Al cardinal de una base de V lo denotamos por $\dim(V)$, y nos referiremos a él como la dimensión de V.
Ejercicio 57: Prueba que $\dim(K^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(K)) = nm$ y $\dim(\{a(x) \in K[x]$ tales que $\mathrm{gr}(a(x)) \leq n\}) = n + 1$.

Teorema de ampliación a base. Si $\dim(V) = n$ y $\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de V, entonces $m \leq n$. Además existen $\overrightarrow{v}_{m+1}, \dots, \overrightarrow{v}_n \in V$, de forma que $\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_m, \overrightarrow{v}_{m+1}, \dots, \overrightarrow{v}_n\}$ es una base de V.
Ejercicio 58: Amplia $\{(1,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

- Si $\dim(V) = n$, entonces cualquier conjunto de vectores de V linealmente independientes de cardinal n es una base de V.

Ejercicio 59: Prueba que $\{(1,2,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_3^3$.

Ejercicio 60: Calcula una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\{(1,2,1),(2,4,2),(1,3,2),(2,5,3)\}.$$

Maxima 30: Calculemos una base del subespacio vectorial U de $\mathbb{Q}^3$ generado por $\{(1,2,3),(1,1,1),(3,2,1)\}$.
[commandchars=
{}]

```
(%i1) C:matrix([1,2,3],[1,1,1],[3,2,1]);
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como las operaciones elementales por filas en la matriz C no alteran los sistemas de generadores,

```
(%i2) triangularize(C);
```

(%o2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nos dice que $\{(1,2,3),(0,-1,-2)\}$ es una base de U.

Maxima 31: Veamos que $B = \{(1,1,1),(1,2,1),(0,0,2)\}$ es una base de $\mathbb{Z}_5^3$, calculemos las coordenadas de $(2,3,4)$ respecto de esa base.

```
(%i1)  modulus:5$
(%i2)  solve(x*[1,1,1]+y*[1,2,1]+z*[0,0,2],[x,y,z]);
```

(%o2) $$[[x = 0, y = 0, z = 0]]$$

Al ser tres generadores linealmente independientes en $\mathbb{Z}_5^3$, el conjunto dado es una base.

```
(%i3)  solve(x*[1,1,1]+y*[1,2,1]+z*[0,0,2]-[2,3,4],[x,y,z]);
```

(%o3) $$[[x = 1, y = 1, z = 1]]$$

Maxima 32: Sean U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$ generados por $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$ y $\{(1,2,3),(0,0,2)\}$, respectivamente. ¿Es $\mathbb{Z}_5^3 = U + W$?

```
(%i1)  modulus:5$
```

```
(%i2) D:matrix([1,1,1],[1,2,1],[1,2,3],[0,0,2]);
```

(%o2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i3) triangularize(D);
```

(%o3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, una base para $U+W$ es $\{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,2)\}$, por lo que $U+W=\mathbb{Z}_5^3$.

Maxima 33: Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$ generado por $\{(1,1,1)(2,1,3),(4,3,5)\}$, calculemos un complementario de U.

Primero buscamos una base para U, aplicando operaciones elementales al sistema de generadores que nos dan.

```
(%i1) modulus:false$
(%i2) E:matrix([1,1,1],[2,1,3],[4,3,5])$
(%i3) triangularize(E);
```

(%o3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora probamos a añadir un vector que sea independiente con los dos anteriores.

```
(%i4) F:matrix([1,1,1],[0,-1,1],[1,0,0])$
(%i5) triangularize(F);
```

(%o6)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De esta forma la recta generada por $(1,0,0)$ es un complemento de U en $\mathbb{Q}^3$.

Maxima 34: Veamos ahora la dimensión del subespacio de $\mathbb{Z}_7^4$ generado por

$$\{(2,4,3,4),(4,1,6,1),(3,3,3,3),(5,0,6,0)\}.$$

```
(%i1) modulus:7$
(%i2) G:matrix([2,4,3,4],[4,1,6,1],[3,3,3,3],[5,0,6,0])$
(%i3) triangularize(G);
```

(%o3)
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la dimensión es dos, al tener dos filas no nulas en su forma reducida.

3. Ecuaciones del cambio de base

Sean $B = \{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n\}$ y $B' = \{\overrightarrow{v}'_1, \dots, \overrightarrow{v}'_n\}$ dos bases de V. Sea $\overrightarrow{x} \in V$. Entonces existen $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in K$ tales que $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{v}_n$ y $\overrightarrow{x} = x'_1\overrightarrow{v}'_1 + \cdots + x'_n\overrightarrow{v}'_n$. Queremos ver qué relación hay entre las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ respecto de B y de B'. Para ello utilizaremos las coordenadas de los vectores de B respecto de B'. Supongamos que

$$\begin{gathered}\overrightarrow{v}_1 = a_{11}\overrightarrow{v}'_1 + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{v}'_n,\\ \vdots \\ \overrightarrow{v}_n = a_{n1}\overrightarrow{v}'_1 + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{v}'_n.\end{gathered}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= x_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{v}_n = x_1(a_{11}\overrightarrow{v}'_1 + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{v}'_n) + \cdots + x_n(a_{n1}\overrightarrow{v}'_1 + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{v}'_n)\\ &= (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{n1})\overrightarrow{v}'_1 + \cdots + (x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn})\overrightarrow{v}'_n = x'_1\overrightarrow{v}'_1 + \cdots + x'_n\overrightarrow{v}'_n.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left.\begin{gathered}x'_1 = x_1a_{11} + \cdots + x_na_{n1}\\ \vdots\\ x'_n = x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn}\end{gathered}\right\},$$

que se conocen como las ecuaciones de cambio de base de B a B'. Éstas se pueden también expresar en forma matricial

$$(x'_1 \dots x'_n) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

A la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ se le llama matriz de cambio de base de B a B'. Esta matriz es siempre regular y su inversa, A^{-1} es justamente la matriz de cambio de base de B' a B.

Ejercicio 61: Sean $B = \{(1,1,0),(1,2,1),(1,1,2)\}$ y $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ dos bases de $\mathbb{Z}_5^3$. Calcula las ecuaciones de cambio de base de B a B'.

Maxima 35: Supongamos que K es $\mathbb{Z}_5$ y $V = \mathbb{Z}_5^2$.

```
(%i1) modulus:5;
```

(%o1) 5

Elegimos dos bases, $B = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ y $B' = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$.

```
(%i2) v1:[1,2];v2:[0,3];
```

(%o2) $[1,2]$

(%o3) $[0,3]$

```
(%i4) u1:[1,1];u2:[2,0];
```

(%o4) $[1,1]$

(%o5) $[2,0]$

Calculamos las coordenadas de $\overrightarrow{u}_1$ y $\overrightarrow{u}_2$ respecto de B.

```
(%i6) solve(a11*v1+a12*v2-u1,[a11,a12]);
```

(%o6) $$[[a11 = 1, a12 = -2]]$$

```
(%i7) solve(a21*v1+a22*v2-u2,[a21,a22]);
```

(%o7) $$[[a21 = 2, a22 = 2]]$$

Así la matriz de cambio de base de B' a B es la siguiente.

```
(%i8) A:matrix([1,-2],[2,2]);
```

(%o8) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El vector $\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$ tiene coordenadas $(1, 1)$ en B'. Veamos cuáles son sus coordenadas en B.

```
(%i9) [1,1].A;
```

(%o9) $$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos el resultado.

```
(%i10) u1+u2=3*v1;
```

(%o10) $$[3, 1] = [3, 6]$$

```
(%i11) mod(%,5);
```

(%o11) $$[3, 1] = [3, 1]$$

La matriz de cambio de base de B a B' es la inversa de A.

```
(%i12) A^^(-1);
```

(%o12) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Maxima 36: Dadas las bases de $\mathbb{Q}^3$, $B = \{(1, 2, 3), (0, 3, 1), (0, 0, 4)\}$ y $B' = \{(1, 1, 1), (0, 2, 3), (0, 0, 7)\}$, veamos cuál es la matriz de cambio de base de B a B' y la de B' a B.

```
(%i1) modulus:false$
(%i2) solve(x*[1,1,1]+y*[0,2,3]+z*[0,0,7]-[1,2,3],[x,y,z]);
```

(%o2) $$[[x = 1, y = \tfrac{1}{2}, z = \tfrac{1}{14}]]$$

```
(%i3) solve(x*[1,1,1]+y*[0,2,3]+z*[0,0,7]-[0,3,1],[x,y,z]);
```

(%o3) $$[[x = 0, y = \tfrac{3}{2}, z = -\tfrac{1}{2}]]$$

```
(%i4) solve(x*[1,1,1]+y*[0,2,3]+z*[0,0,7]-[0,0,4],[x,y,z]);
```

(%o4) $$[[x = 0, y = 0, z = \tfrac{4}{7}]]$$

```
(%i5) [x,y,z],%o2;
```

(%o5) $$[1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{14}]$$

```
(%i6) [x,y,z],%o3;
```

(%o6) $$[0, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}]$$

```
(%i7) [x,y,z],%o4;
```

(%o7) $$[0, 0, \tfrac{4}{7}]$$

La matriz de cambio de base de B a B' es

```
(%i8) H:matrix(%o5,%o6,%o7);
```

(%o8)
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

y la de B' a B es

```
(%i9) J:invert(%);
```

(%o9)
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{12} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Si las coordenadas de un vector respecto de la base B son $(1,1,1)$, sus coordenadas respecto de B' son

```
(%i10) [1,1,1].H;
```

(%o10)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

4. Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial

Supongamos que $\dim(V) = n$ y que U es un subespacio vectorial de V de dimensión r. Sea $B = \{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ una base de V, y $B_U = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_r\}$ una base de U. Supongamos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}_1 &= a_{11}\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{v}_n, \\ &\vdots \\ \overrightarrow{u}_r &= a_{r1}\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_{rn}\overrightarrow{v}_n. \end{aligned}$$

Sea $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{v}_n$ un vector de V. Veamos qué tienen que verificar las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ para que $\overrightarrow{x} \in U$.

El vector $\overrightarrow{x} \in U$ si y sólo si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ tales que $\overrightarrow{x} = \lambda_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_r\overrightarrow{u}_r$, y esto equivale a que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= \lambda_1(a_{11}\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{v}_n) + \cdots + \lambda_r(a_{r1}\overrightarrow{v}_1 + \cdots + a_{rn}\overrightarrow{v}_n) \\ &= (\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{r1})\overrightarrow{v}_1 + \cdots + (\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_r a_{rn})\overrightarrow{v}_n. \end{aligned}$$

Como las coordenadas son únicas,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{r1} \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_r a_{rn} \end{aligned}\right\}.$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de U respecto de la base B.

Ejercicio 62: Dada la base $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$ de $\mathbb{Q}^3$, y U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$ generado por $\{(1,2,1),(1,3,2),(2,5,3)\}$, calcula las ecuaciones paramétricas de U respecto de la base B.

Maxima 37: Sea U el subespacio de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(2,3,4),(2,4,4),(4,6,1)\}$, calculamos a continuación las ecuaciones paramétricas de U respecto de la base $B = \{(1,2,3),(0,3,4)(0,0,6)\}$.

Primero encontramos una base para U, y lo hacemos con el comando `triangularize`.

```
(%i1) modulus:7$
(%i2) K:matrix([2,3,4],[2,4,4],[4,6,1])$
```

```
(%i3) triangularize(K);
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, U tiene como base $\{(2,3,-3),(0,2,0)\}$. Encontremos pues las coordenadas de sus elementos respecto de la base B.

```
(%i4) solve(x*[1,2,3]+y*[0,3,4]+z*[0,0,6]-[2,3,-3],[x,y,z]);
```

(%o4) $$[[x=2, y=2, z=3]]$$

```
(%i5) solve(x*[1,2,3]+y*[0,3,4]+z*[0,0,6]-[0,2,0], [x,y,z]);
```

(%o5) $$[[x=0, y=3, z=-2]]$$

Así un elemento de coordenadas (x,y,z) respecto de la base B estará en U si y sólo si $(x,y,z) = \lambda(2,2,3)+\mu(0,3,5)$ para algún $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}_7$. Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = 2\lambda + 3\mu, \\ z = 3\lambda + 5\mu. \end{cases}$$

5. Aplicaciones lineales

En lo que queda de capítulo suponemos que V y V' son dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K.

Una aplicación $f : V \to V'$ es lineal (o un homomorfismo) si

1) para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$,
2) para todo $a \in K$ y $\vec{v} \in V$, $f(a\vec{v}) = af(\vec{v})$.

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$ (el primer $\vec{0}$ es de V y el segundo de V').
- $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.
- El núcleo de f, $\mathrm{N}(f) = \{\vec{v} \in V$ tales que $f(\vec{v}) = \vec{0}\}$, es un subespacio vectorial de V.
- La imagen de f, $\mathrm{Im}(f)$, es un subespacio vectorial de V'.

Una aplicación lineal es un

1) monomorfismo si es inyectiva,
2) epimorfismo si es sobreyectiva,
3) isomorfismo si es biyectiva.

- Si f es un isomorfismo, también lo es f^{-1}.
- f es un monomorfismo si y sólo si $\mathrm{N}(f) = \{\vec{0}\}$.
- Si $V = \langle\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}\rangle$, entonces $\mathrm{Im}(f) = \langle\{f(\vec{v}_1),\ldots,f(\vec{v}_n)\}\rangle$.
- Si f es un monomorfismo y $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ son linealmente independientes, entonces $\{f(\vec{v}_1),\ldots,f(\vec{v}_n)\}$ también son linealmente independientes.

Ejercicio 63: Demuestra que $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+y, x+z)$ es una aplicación lineal. Calcula $\mathrm{N}(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$. ¿Es f un isomorfismo?

Ejercicio 64: Sea $f : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$, $(x,y) \mapsto (x,y,x+y)$. Calcula una base de $\mathrm{Im}(f)$. ¿Es f un epimorfismo?

Teorema: Las aplicaciones lineales vienen determinadas por la imagen de una base. Sea $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de V, y $\{\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_n\} \subseteq V'$. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ verificando que $f(\vec{v}_1) = \vec{v}'_1, \ldots, f(\vec{v}_n) = \vec{v}'_n$. Además, $\{\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_n\}$ es una base de V' si y sólo si f es un isomorfismo.

Los espacios vectoriales V y V' diremos que son isomorfos si existe un isomorfismo $f : V \to V'$.

- V y V' son isomorfos si y sólo si $\dim(V) = \dim(V')$.

Ejercicio 65: Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(1,2,3),(0,1,2),(1,3,0)\}$. Calcula el cardinal de U.

Maxima 38: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z, y-z)$. Para calcular su núcleo usamos:

```
(%i1)  solve([x+y=0,x+z=0,2*x+y+z=0,y-z=0],[x,y,z]);
```

$solve : dependentequationseliminated : (34)$

(%o1) $$[[x = -\%r1, y = \%r1, z = \%r1]]$$

Así $N(f) = \{(-a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, que tiene como base a $\{(-1,1,1)\}$. Para calcular una base de la imagen, sabiendo que $\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$ es un sistema de generadores, hacemos lo siguiente.

```
(%i2)  f(x,y,z):=[x+y,x+z,2*x+y+z,y-z]$
(%i3)  A:matrix(f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1))$
(%i4)  triangularize(A);
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\{(1,1,2,0),(0,-1,-1,1)\}$.

6. Ecuaciones de una aplicación lineal

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, y $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ y $B' = \{\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_m\}$ bases de V y V', respectivamente. Sean $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n$ y $f(\vec{x}) = x'_1\vec{v}'_1 + \cdots + x'_m\vec{v}_m \in V'$. Queremos estudiar la relación que existe entre las coordenadas de $\vec{x}$ y $f(\vec{x})$.

Supongamos que

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &= a_{11}\vec{v}'_1 + \cdots + a_{1m}\vec{v}'_m, \\ &\vdots \\ f(\vec{v}_n) &= a_{n1}\vec{v}'_1 + \cdots + a_{nm}\vec{v}'_m. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + x_n f(\vec{v}_n) \\ &= x_1(a_{11}\vec{v}'_1 + \cdots + a_{1m}\vec{v}'_m) + \cdots + x_n(a_{n1}\vec{v}'_1 + \cdots + a_{nm}\vec{v}'_m) \\ &= (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{n1})\vec{v}'_1 + \cdots + (x_1a_{1m} + \cdots + x_na_{nm})\vec{v}'_m. \end{aligned}$$

Así

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n \\ &\vdots \\ x'_m &= a_{1m}x_1 + \cdots + a_{nm}x_n \end{aligned}\right\}$$

que se conocen como ecuaciones de la aplicación lineal respecto de las bases B y B'.

Estas ecuaciones se pueden expresar de forma matricial como

$$(x'_1 \dots x'_m) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases B y B'.

- f es un isomorfismo si y sólo si A es regular.

Ejercicio 66: Sea $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$, la aplicación lineal definida por $f(x,y) = (x, x+y, x-y)$. Calcula las ecuaciones de f respecto de las bases $\{(1,1),(1,2)\}$ de $\mathbb{Q}^2$ y $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{Q}^3$.

Ejercicio 67: Sea $f : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^3$ una aplicación lineal tal que $f(1,2) = (2,3,1)$ y $f(2,5) = (3,4,2)$. Calcula la expresión general $f(x,y)$.

Ejercicio 68: Encuentra la matriz asociada a la base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica que $(1,0,0) \in \mathrm{N}(f)$ y $\mathrm{Im}(f) = \langle\{(2,3,1),(3,3,2)\}\rangle$.

`Maxima 39:` Calculemos la expresión matricial de la aplicacion lineal del ejemplo anterior respecto de las bases $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$. Podemos por ejemplo calcular las coordenadas de las imágenes por f de los elementos de B respecto de B'.

```
(%i1) f(x,y,z):=[x+y,x+z,2*x+y+z,y-z]$
(%i2) solve(x*[1,1,1,1]+y*[0,1,1,1]+z*[0,0,1,1]+t*[0,0,0,1]-
      f(1,1,0),[x,y,z,t]);
```

(%o2) $$[[x = 2, y = -1, z = 2, t = -2]]$$

```
(%i3) solve(x*[1,1,1,1]+y*[0,1,1,1]+z*[0,0,1,1]+t*[0,0,0,1]-
      f(1,0,1),[x,y,z,t]);
```

(%o3) $$[[x = 1, y = 1, z = 1, t = 3]]$$

```
(%i4) solve(x*[1,1,1,1]+y*[0,1,1,1]+z*[0,0,1,1]+t*[0,0,0,1]-
      f(0,1,1),[x,y,z,t]);
```

(%o4) $$[[x = 1, y = 0, z = 1, t = -2]]$$

```
(%i5) C:matrix([2,-1,2,-2],[1,1,1,-4],[1,0,1,-2]);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto la expresión matricial es $(x', y', z', t') = (x, y, z)C$.

`Maxima 40:` Tomamos una base $B = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ en $\mathbb{Q}^3$.

```
(%i1) v1:[1,2,1];v2:[1,1,0];v3:[0,0,3];
```

(%o1) $$[1,2,1]$$

(%o2) $$[1,1,0]$$

(%o3) $$[0,0,3]$$

Y las imágenes de esos vectores respecto de la base usual $\{(1,0),(0,1)\}$ en $\mathbb{Q}^2$.

```
(%i4) fv1:[1,1];fv2:[2,1];fv3:[1,2];
```

(%o4) $$[1,1]$$

(%o5) $$[2,1]$$

(%o6) $$[1,2]$$

La matriz de f asociada a dichas bases es:

```
(%i7) A:matrix(fv1,fv2,fv3);
```

(%o7) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si queremos calcular la imagen de un elemento con coordenadas (x,y,z) respecto de B, sólo tenemos que multiplicar esas coordenadas por A.

```
(%i8) [x,y,z].A;
```

(%o8) $$\begin{pmatrix} z+2\,y+x & 2\,z+y+x \end{pmatrix}$$

Así $f(x,y,z) = (x+2y+z, x+y+2z)$, donde (x,y,z) son coordenadas respecto de B.

Si lo que queremos es la expresión de $f(x,y,z)$, con (x,y,z) coordenadas respecto de la base usual $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, lo que hacemos es calcular primero el cambio de base de B a la base usual, y luego lo multiplicamos por A, obteniendo así la expresión matricial respecto de las bases usuales.

```
(%i9) B:matrix(v1,v2,v3);
```

(%o9) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) B^^-1;
```

(%o10) $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

```
(%i11) AA:%.A;
```

(%o11) $$\begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Veamos que el resultado es el deseado ($\overrightarrow{v}_i$ lo definimos en función de la base usual).

```
(%i12) v1.AA;v2.AA;v2.AA
```

(%o12) $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$

(%o13) $\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$

(%o14) $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$

Por tanto las coordenadas de $f(x,y,z)$ respecto de la base usual de $\mathbb{Q}^2$, con (x,y,z) coordenadas en la base usual de $\mathbb{Q}^3$, la podemos calcular como sigue.

```
(%i17) [x,y,z].AA;
```

(%o17) $\begin{pmatrix}\frac{z}{3}-\frac{4\,y}{3}+\frac{10\,x}{3} & \frac{2\,z}{3}-\frac{2\,y}{3}+\frac{5\,x}{3}\end{pmatrix}$

Maxima 41: Calculemos la expresión de una aplicación lineal $g:\mathbb{Z}_5^3\to\mathbb{Z}_5^2$ tal que $g(1,1,1)=(2,0)$, $g(1,2,1)=(1,1)$ y $g(0,0,2)=(3,3)$.

```
(%i1)  modulus:5$
(%i2)  D:matrix([1,1,1],[1,2,1],[0,0,2])$
(%i3)  E:invert(D)$
(%i4)  F:rat(E);
```

(%o4)/R/ $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

Tenemos así las coordenadas de los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ respecto de la base $\{(1,1,1),(1,2,1),(0,0,2)\}$.

```
(%i5)  G:matrix([2,0],[1,1],[3,3])$
```

Y sus imágenes por g se calculan multiplicando por G.

```
(%i6)  H:F.G;
```

(%o6)/R/ $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

Por tanto $g(x,y,z)=(4x+4y+4z,y+4z)$. Comprobemos si hemos hecho bien los cálculos.

```
(%i7)  g(x,y,z):=[4*x+4*y+4*z,y+4*z]$
(%i8)  rat(g(1,1,1));
```

(%o8)/R/ $[2,0]$

```
(%i9)  rat(g(1,2,1));
```

(%o9)/R/ $[1,1]$

```
(%i10) rat(g(0,0,2));
```

(%o10)/R/ $[-2,-2]$

7. Espacio vectorial cociente

Sea U un subespacio vectorial de V. Definimos en V la siguiente relación de equivalencia: $\overrightarrow{x}\ R\ \overrightarrow{y}$ si $\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\in U$. Denotamos por $\frac{V}{U}$ al conjunto cociente $\frac{V}{R}$.

- El conjunto $\frac{V}{U}$ es un espacio vectorial con las operaciones $[\overrightarrow{x}]+[\overrightarrow{y}]=[\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}]$ y $k[\overrightarrow{x}]=[k\overrightarrow{x}]$. A dicho espacio vectorial se le conoce como espacio vectorial cociente de V sobre U.

- Si $\{\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_m\}$ es una base de U y la ampliamos a una base de V, $\{\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_m, \overrightarrow{u}_{m+1}, \dots, \overrightarrow{u}_n\}$, entonces $\{[\overrightarrow{u}_{m+1}], \dots, [\overrightarrow{u}_n]\}$ es una base de $\frac{V}{U}$. Así
$$\dim\left(\frac{V}{U}\right) = \dim(V) - \dim(U).$$

Primer teorema de isomorfía. Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces los espacios vectoriales $\frac{V}{N(f)}$ e $\mathrm{Im}(f)$ son isomorfos (el isomorfismo viene dado por $[\overrightarrow{v}] \mapsto f(v)$).

- $\dim(V) = \dim(N(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Ejercicio 69: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + y, 3x + z)$. Encuentra una base de $N(f)$.

Segundo teorema de isomorfía. Si U_1 y U_2 son subespacios de V, entonces los espacios vectoriales $\frac{U_2}{U_1 \cap U_2}$ y $\frac{U_1+U_2}{U_1}$ son isomorfos.

- $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$.

Ejercicio 70: Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$, $U = \langle\{(1, 1, 2), (1, 2, 3)\}\rangle$ y $W = \langle\{(1, 0, 0), (2, 1, 3)\}\rangle$, calcula la dimensión de $U \cap W$.

Ejercicio 71: Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^3$ generado por $\{(1, 2, 1)\}$. Calcula un complementario de U.

`Maxima 42`: Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^4$ generado por $\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 0, -1, -2)\}$, calculemos una base del espacio cociente $\mathbb{Q}^4/U$.

```
(%i1)  A:matrix([1,1,1,1],[1,2,3,4],[1,0,-1,-2])$
(%i2)  triangularize(A);
```

(%o2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base de U es {(1,0,-1,-2),(0,2,4,6)}. Ahora la ampliamos a una base de $\mathbb{Q}^4$.

```
(%i3)  B:matrix([1,0,-1,-2],[0,2,4,6],[0,0,1,0],[0,0,0,1])$
(%i4)  determinant(B);
```

(%o4) 2

Una base del cociente es $\{[(0, 0, 1, 0)], [(0, 0, 0, 1)]\}$.

`Maxima 43`: Sea $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ definida por

```
(%i1)  f(x,y,z,t):=[x+y+z,x+z+t,y-t]$
```

Como

```
(%i2)  triangularize(matrix(f(1,0,0,0),f(0,1,0,0),f(0,0,1,0),f(0,0,0,1)));
```

(%o2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deducimos que la imagen de f tiene dimensión 2. Por el primer teorema de isomorfía, su núcleo debería también tener dimensión dos. Comprobémoslo:

```
(%i3) solve(f(x,y,z,t),[x,y,z,t]);
```

$solve : dependentequationseliminated : (1)$

(%o3) $[[x = -\%r3 - \%r2, y = \%r2, z = \%r3, t = \%r2]]$

Maxima 44: Sean U y W los subespacios de $\mathbb{Z}_7^4$ generados por $\{(1,0,1,0),(1,2,1,2),(1,5,1,5)\}$ y $\{(2,3,4,0),(1,5,2,0),(2,3,2,3)\}$, respectivamente. Veamos cuál es la dimensión de $U \cap W$.

Un sistema de generadores para $U+W$ es $\{(1,0,1,0),(1,2,1,2),(1,5,1,5),(2,3,4,0),(1,5,2,0),(2,3,2,3)\}$.

```
(%i1) modulus:7$
```

Las dimensiones de U y W son dos, ya que

```
(%i2) triangularize(matrix([1,0,1,0],[1,2,1,2],[1,5,1,5]));
```

(%o2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

```
(%i3) triangularize(matrix([2,3,4,0],[1,5,2,0],[2,3,2,3]));
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último,

```
(%i4) triangularize(matrix([1,0,1,0],[1,2,1,2],[1,5,1,5],[2,3,4,0],[1,5,2,0],[2,3,2,3]));
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que la dimensión de $U+W$ es 3. Por el Segundo Teorema de Isomorfía, deducimos que la dimensión de $U \cap W$ es 1.

Índice alfabético