Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

J. C. Rosales y P. A. García Sánchez

Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

Capítulo 7

Diagonalización de matrices

1. Matrices diagonalizables

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada que tiene todas sus entradas nulas, salvo eventualmente las de la diagonal. Una matriz cuadrada A es diagonalizable si existen una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que $A = PDP^{-1}$.

La diagonalización de matrices es útil para el cálculo de potencias grandes de una matriz, ya que

$$A^r = (PDP^{-1})^r = PDP^{-1}PDP^{-1} \overset{r}{\cdots} PDP^{-1} = PD^rP^{-1}.$$

En adelante, A representará una matriz cuadrada de orden $n \times n$ sobre un cuerpo K.

Un elemento $\lambda \in K$ es un valor propio de A si existe $x \in K^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tal que $Ax = \lambda x$. En tal caso diremos que x es un vector propio asociado al valor propio λ.

Teorema de caracterización de los valores propios. Un elemento $\lambda \in K$ es un valor propio de A si y sólo si $|A - \lambda I_n| = 0$.

Así los valores propios de A son las raíces del polinomio $|A - \lambda I_n| \in K[\lambda]$, que se conoce como polinomio característico de A, y lo denotaremos por $p_A(\lambda)$. Nótese que $\mathrm{gr}(p_A(\lambda) = n$.

Ejercicio 82: Calcula el polinomio característico y los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Propiedades.

1) Si A es una matriz triangular, entonces sus valores propios son los valores de la diagonal.
2) Los valores propios de A y A^t coinciden.
3) $|A| = 0$ si y sólo si 0 es un valor propio de A.
4) Si A es regular y λ es un valor propio de A, entonces λ^{-1} lo es de A^{-1}.

- Si λ es un valor propio de A, entonces

$$V(\lambda) = \{x \in K^n \text{ tales que } (A - \lambda I_n)x = 0\},$$

(en este caso $0 = (0, \dots, 0) \in K^n$) es un subespacio vectorial de K^n. Dicho subespacio lo llamamos subespacio vectorial propio asociado al valor propio λ.

Ejercicio 83: Encuentra los subespacios propios asociados a los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los valores propios de la matriz A. A la multiplicidad de la raíz λ_i de $P_A(\lambda)$ la llamaremos multiplicidad algebraica de λ_i, mientras que la dimensión de $V(\lambda_i)$ es la multiplicidad geométrica de λ_i.

Ejercicio 84: Calcula las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que su multiplicidad algebraica.

Criterio de diagonalización. A es diagonalizable si, y sólo si, la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de A es n y además para todo valor propio las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden.

- Toda matriz cuadrada y simétrica con coeficientes en $\mathbb{R}$ es diagonalizable.

2. Método para diagonalizar una matriz

1) Calculamos $p_A(\lambda)$, sus raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y sus multiplicidades algebraicas, $m_1, \dots, m_k$.
2) Si $m_1 + \cdots + m_k \neq n$, A no es diagonalizable.
3) En caso contrario, para cada λ_i, calculamos el subespacio propio $V(\lambda_i)$ y su dimensión. Si dicha dimensión no coincide con m_i para algún i, entonces A no es diagonalizable.
4) Llegado este paso, la matriz A es diagonalizable y D es la matriz que tiene en la diagonal m_1 entradas λ_1, m_2 entradas λ_2, y así hasta m_k entradas λ_k. La matriz de paso P se construye colocando en las primeras m_1 columnas una base de $V(\lambda_1)$, a continuación en las siguientes m_2 columnas una base de $V(\lambda_2)$, y así hasta que colocamos en las últimas m_k columnas una base de $V(\lambda_k)$.

Ejercicio 85: Diagonaliza la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 86: Diagonaliza la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -15 & -4 & 3 \\ -35 & -14 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Ejercicio 87: Demuestra que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con coeficientes reales no es diagonalizable.

`Maxima 53:` Sea

```
(%i1) A:matrix([-1,3,3],[0,2,0],[3,-3,-1]);
```

(%o1)
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

El comando `eigenvectors` nos proporciona toda la información para saber si es diagonalizable.

```
(%i2) eigenvectors(A);
```

(%o2)
$$[[[-4,2],[1,2]],[[[1,0,-1]],[[1,0,1],[0,1,-1]]]]$$

La salida nos dice que los valores propios son -4 y 2, con multiplicidades 1 y 2, respectivamente. Además nos da bases para $V(-4)$, $\{(1,0,-1)\}$ y $V(2)$, $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$. Como las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden, y suman 3, A es diagonalizable.

La matriz de paso se calcula poniendo dichas bases una a continuación de la otra en columnas.

```
(%i3) P:matrix([1,1,0],[0,0,1],[-1,1,-1]);
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que efectivamente están bien hechos los cálculos:

```
(%i4) P^^(-1).A.P;
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Podríamos también haber hecho los cálculos paso a paso, calculando primero el polinomio característico de A.

```
(%i5) charpoly(A,x);
```

(%o5) $$(-x-1)^2\,(2-x)-9\,(2-x)$$

Para ver los valores propios, lo factorizamos.

```
(%i6) factor(%);
```

(%o6) $$-(x-2)^2\,(x+4)$$

Y para calcular una base de por ejemplo $V(2)$ utilizamos `nullspace`.

```
(%i7) nullspace(A-2*ident(3));
```

(%o7) $$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$$

Maxima 54:

Veamos para qué valores de a la siguiente matriz es diagonalizable.

```
(%i1) A:matrix([0,1,1],[1,0,-1],[0,0,a]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Calculamos su polinomio característico:

```
(%i2) charpoly(A,x);
```

(%o2) $(a-x)\,x^2+x-a$

```
(%i3) factor(%);
```

(%o3) $-(x-1)\,(x+1)\,(x-a)$

Por lo que si $a \notin \{-1,1\}$, la matriz es diagonalizable.

```
(%i4) eigenvectors(A);
```

(%o4) $[[[a,1,-1],[1,1,1]],[[[1,-1,a+1]],[[1,1,0]],[[1,-1,0]]]]$

Veamos qué ocurre para $a=1$.

```
(%i5) B:subst(1,a,A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i6) eigenvectors(B);
```

(%o6) $[[[-1,1],[1,2]],[[[1,-1,0]],[[1,0,1],[0,1,-1]]]]$

Podemos observar que en este caso la matriz también es diagonalizable.

Por último, para $a = -1$, tenemos:

```
(%i7) C:subst(-1,a,A);
```

(%o7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

```
(%i8) eigenvectors(C);
```

(%o8) $[[[1,-1],[1,2]],[[[1,1,0]],[[1,-1,0]]]]$

lo que nos dice que en este caso la matriz no es diagonalizable, pues la multiplicidad algebraica del valor propio 2 es mayor que la geométrica.

Índice alfabético