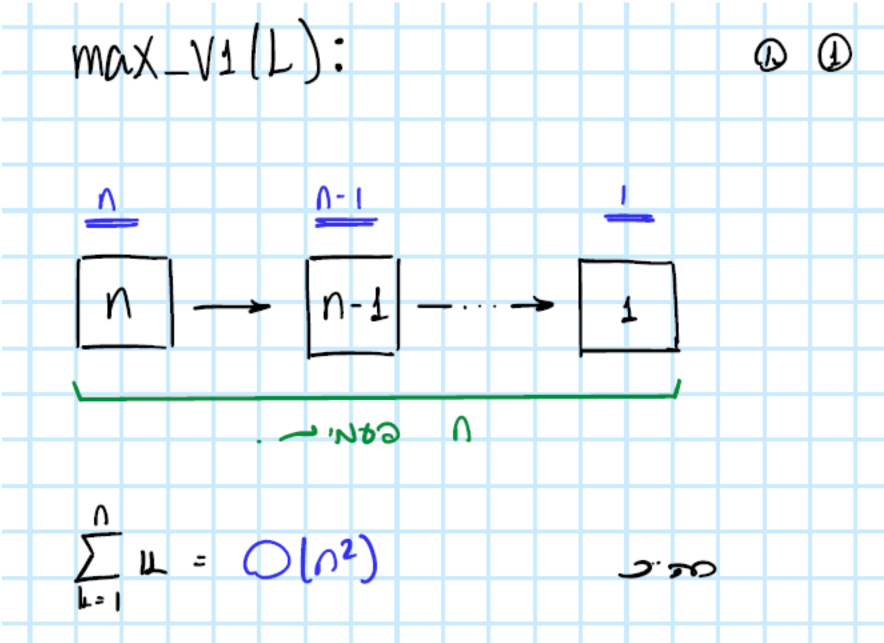
תרגיל 4:

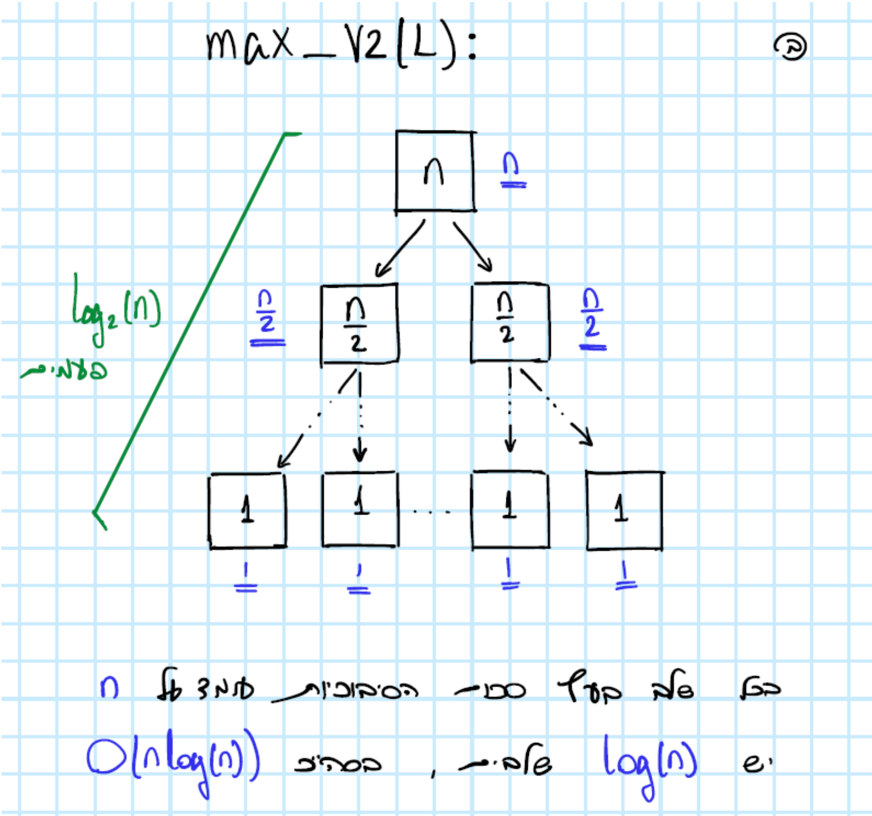
שאלה 1:

1. א. הדיאגרמה משורטטת על הצד מטעמי נוכחות, שכן הקריאה הרקורסיבית היא יחידה ולכן ניתנת לתיאור כשרשרת קריאות:



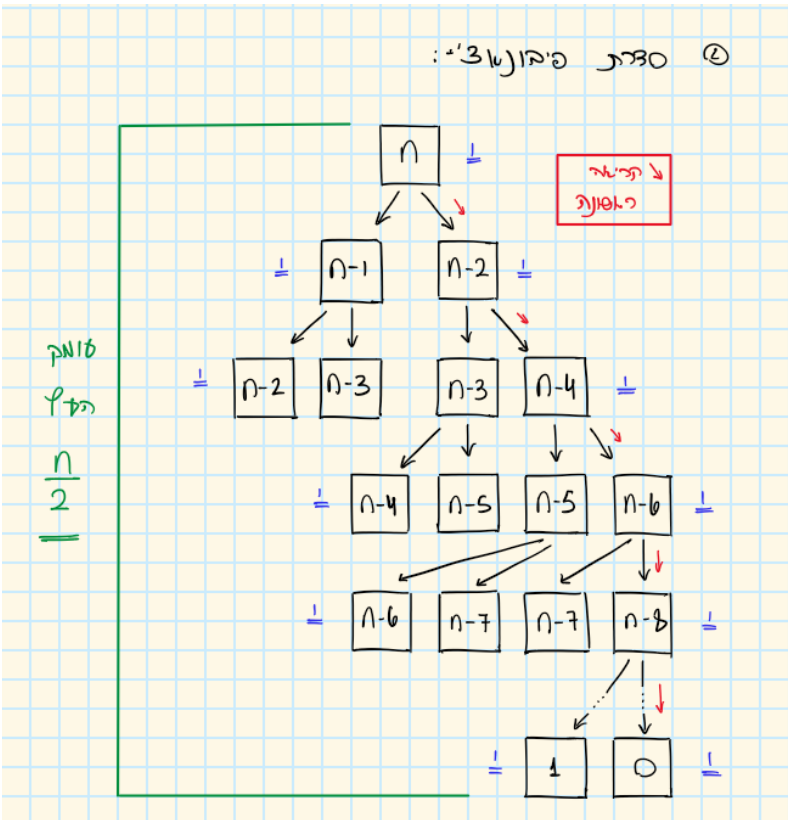
סיבוכיות הפונק' כתובה בכתב יד וההסבר הוא ישיר, נכתוב זאת פה בשנית ליתר ביטחון: $O(n^2)$

ב. הפעם בפונק' יש שתי קריאות ולכן אנחנו מקבלים מבנה של עץ בינארי, בו לכל צומת שתי צמתות בנות למעט העלים:



גם כאן סיבוכיות הפונק' כתובה בכתב יד, נכתוב אותה עם זאת בשנית: $O(n \cdot \log n)$

2. סדרת פיבונאצ'י עם ממואיזציה:



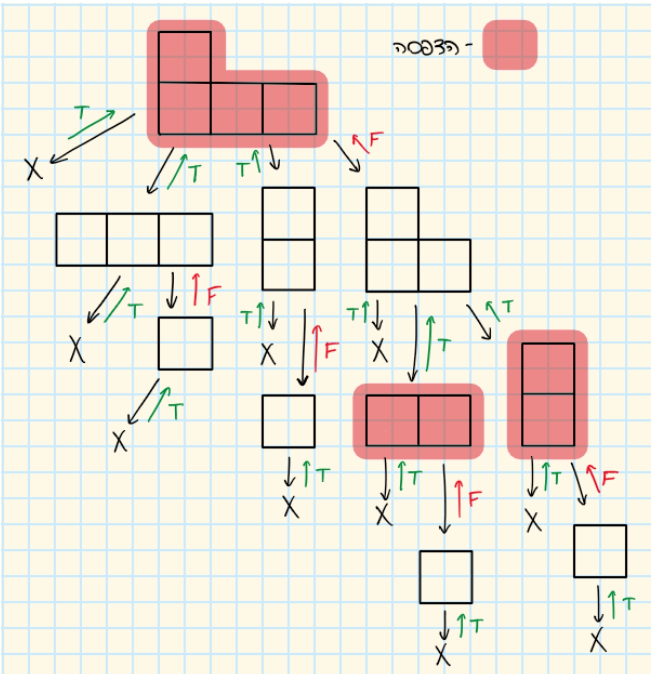
בהנחה ש-n זוגי

בכל שלב ברקורסיה אנחנו תחילה יורדים לאיבר n-2 ולכן מדלגים על המספרים האי זוגיים בקריאות הראשונות, לכן גובה עץ הרקורסיה הוא $\frac{n}{2}$, אמנם בדרך חזרה למעלה אנחנו שומרים במילון את המספרים האי זוגיים בכל פעם שפונק' מתפנה לקריאה השנייה שלה של n-1. בסה"כ אנחנו מקבלים עץ מסדר הגודל שנראה בתמונה, סדר גודל של: $4 \cdot \frac{n}{2} = 2n$ קריאות.

ii. אנחנו נצליח לבצע קריאה עם n שגדול מ-1000, פייתון מגן עלינו מרקורסיה שמגיע לבערך 1000 קריאות, אבל עומק עץ הרקורסיה שלנו הוא בעומק $\frac{n}{2}$ ולכן אנחנו נוכל לקרוא ל-n בגדלים של עד בערך 2000.

iii. מכיוון שהסיבוכיות של כל קריאה בודדת היא $O(1)$ ומניתוח שהראנו כבר בעץ הרקורסיה, סיבוכיות הפונק' כולה ביחס ל-n היא $O(n)$.

3. זלול!:



לפי עץ הרקורסיה ובהתחשב שאנחנו מעוניינים לראות את המהלכים שיובילו את שחקן 0 לניצחון כאשר הצעד הראשון הוא של שחקן 0, ניתן לראות כי הפונק' תדפיס את הפלטים הבאים:

recommended move: [1, 1, 0] --> [1, 0, 0]
recommended move: [2, 0, 0] --> [1, 0, 0]
recommended move: [2, 1, 1] --> [2, 1, 0]

זמני ריצה:

	Memoization	Regular
[5]*2	0.000145 sec	0.002587 sec
[5]*4	0.000843 sec	0.342831 sec
[5]*8	0.020310 sec	Did not finish in a reasonable time…

חיפושים במילון בעבור ממואיזציה:

	key in d	return d[key]
[5]*2	86	65
[5]*4	455	378
[5]*8	8572	7813

שאלה 2:

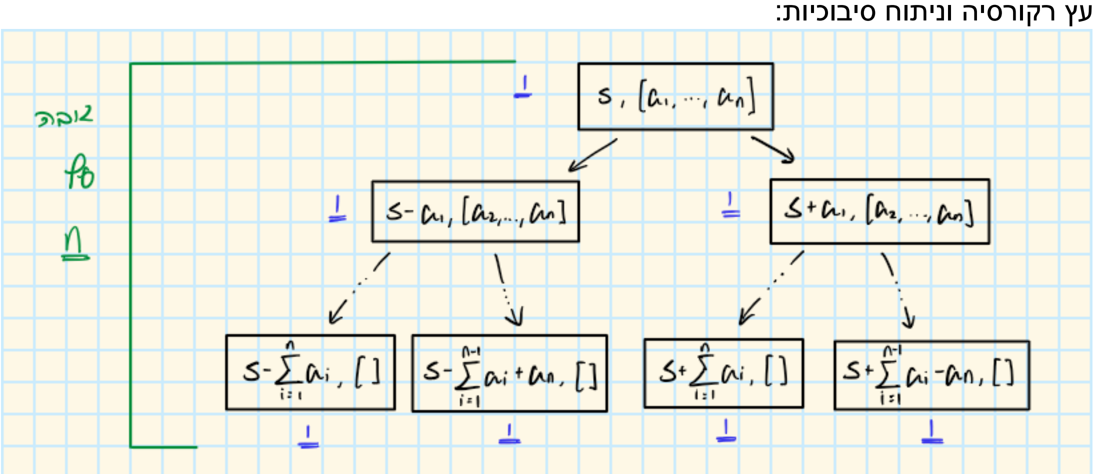
בגישה הפשוטה יותר, כאשר אנחנו משתמשים בחזקה בתוך הרקורסיה, בה אנחנו יודעים לחשב בצורה ישירה את סיבוכיות הפונק' ישירות מההנחות אנחנו מגיעים לסיבוכיות $O(n^2)$.
שכן כל הפעולות האריתמטיות הרצות בכל איטרציה הן מסיבוכיות לינארית ביחס למספר הביטים (חיבור, חיסור) ובהנחות התרגיל מצויין כי הסיבוכיות של חישוב 2^n היא גם $O(n)$, כאשר n יכול לייצג בהתאמה את המספר המקסימלי של ביטים של כל המספרים הנסכמים בפונק'. לכן אנחנו יכולים להניח כי כל קריאה היא מסיבוכיות $O(n)$. סה"כ כפי שצויין בהתחלה, נגיע ל- $O(n^2)$ של כל הרקורסיה.

- אם ברצוננו להימנע מלהעלות בחזקה בכל איטרציה מחדש, ומכיוון שיש לנו שימוש רק בחזקות מבסיס 2 של n, ניתן ליצור פונק' מעטפת שמחשבת את 2^n פעם אחת ואז קוראת לפונק' רקורסיבית שעובדת עם 2^n במקום n, ובמקום לחסר בכל צעד 1, אנחנו פשוט מחלקים ב-2 ובכך חוסכים את פעולת החזקה.
  אנחנו צריכים להניח שחישוב חזקת 2^n היא מסיבוכיות $O(n)$, אבל אין בידנו להעריך את סיבוכיות הכפל והחילוק, בנוסף לעובדה שהחזקה במדוברת היא חזקה של 2 ולכן יכולות להיות הנחות מקלות לסיבוכיות של המקרה הזה.

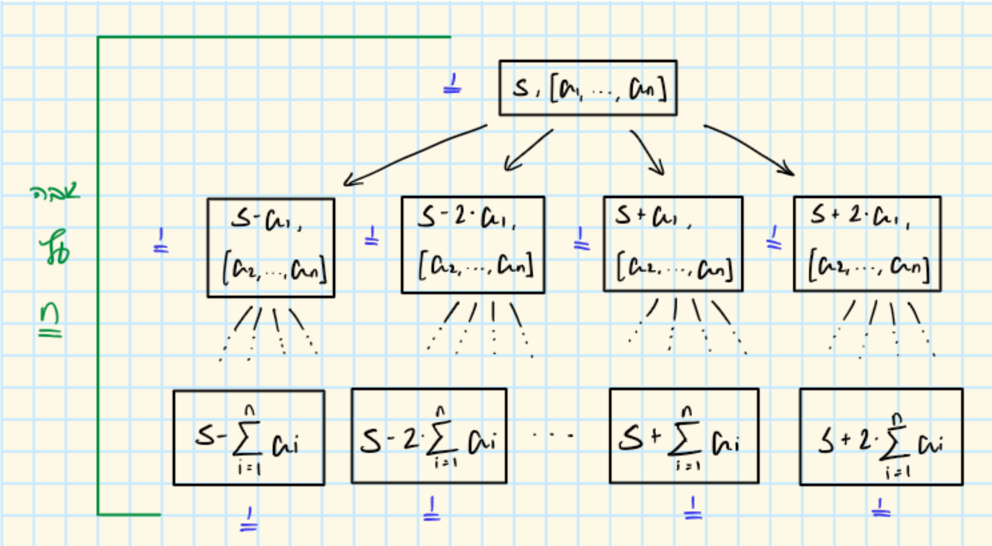
  *כותב את זה ליתר ביטחון 😊

שאלה 3:

1. עץ רקורסיה וניתוח סיבוכיות:

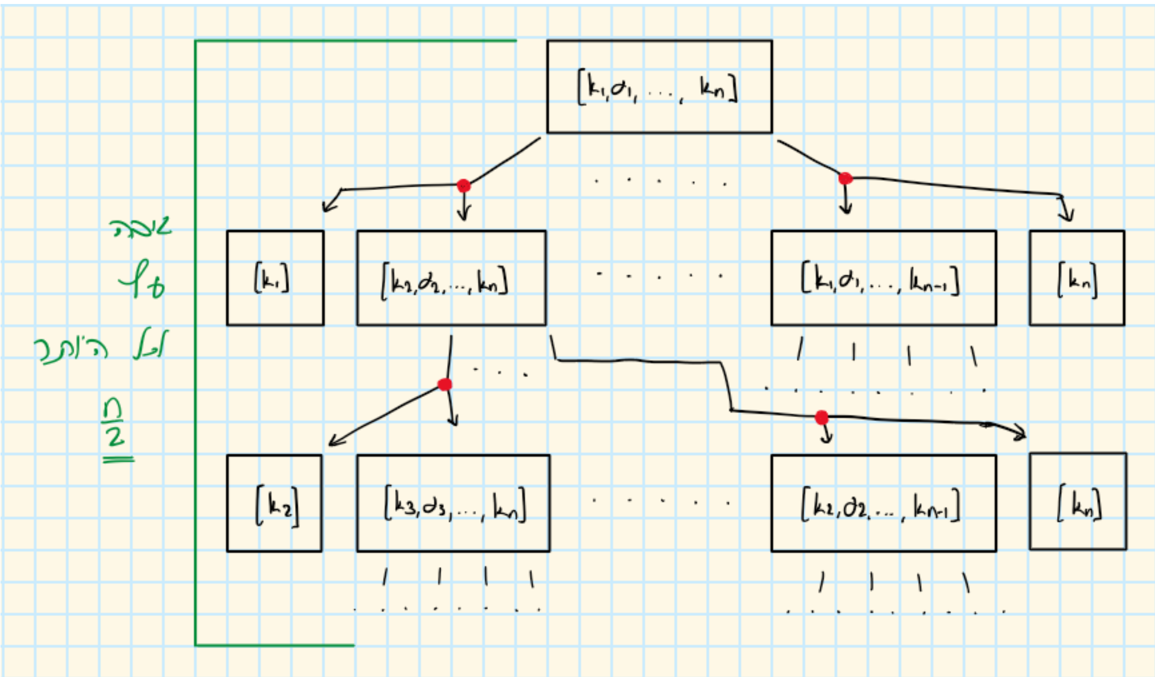


בכל צעד אנחנו מבצעים פעולות מסיבוכיות $O(1)$ (ניתן להימנע מסלייסינג באמצעות *pop* ו-*append*), לכן לפי עץ הרקורסיה, נסכום את את הצעדים שיש לנו בכל קומה בעץ, אם k תסמן את מספר הקומה, נקבל שבכל קומה יש 2^{k-1} צעדים, ואם נסכום את כל הקומות נקבל סכום סדרה הנדסית, סה"כ מסיבוכיות $O(2^n)$.

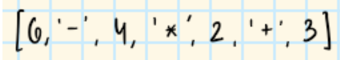


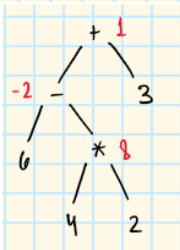
בדומה לעץ של המקרה הקודם, הפעם לכל צומת יש 4 ילדים, נחשב שוב ונקבל סכום סדרה הנדסית הפעם איברי הסדרה הם חזקות של 4 ולכן נקבל סיבוכיות $O(4^n)$ שהיא מוכלת בסיבוכיות $O(5^n)$.

2. שאלת חישוב סוגריים:



זו בעיה יותר מורכבת, לכן תחילה נאפיין את סדר גודלה ולאחר מכן ננתח את שיטת הפתרון: נשים לב שבעבור משוואה נתונה מהצורה המדוברת, מספר האפשרויות לסידור סוגריים במשוואה שקול ושווה למספר העצים מהצורה:





שבהם האופרטורים הם הצמתים והמספרים הם העלים.
אם יש לנו n אופרטורים במשוואה במבנה הנתון, ונסמן שיש לנו t_n עצים אפשריים, אז נשים לב שבאופן רקורסיבי מתקיים ש: $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} t_i \cdot t_{n-i}$

- נוכל לחשוב על כך שיש לנו n אפשרויות לבחור אופרטור. אם בחרנו את האופרטור ה-i מתקבלים שני תתי העצים t_i ו-t_{n-i} שאנחנו כבר מכירים. בשביל לספור את כל האפשרויות בעבור בחירה זו צריך לכפול את מספר האפשרויות לכל אחד מתתי העצים הללו זה בזה. כך סוכמים הכל יחדיו ומקבלים את הנוסחא הנ"ל.

אבל נשים לב! זו בדיוק הנוסחא הרקורסיבית למספרי קטלן! הידד! (וכמובן שהאיברים הראשונים של הסדרה מזדהים).
אז יש לנו נוסחא סגורה לחשב את מספר העצים הנ"ל: $t_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$
כל עץ מתאים בצורה חד חד ערכית ועל (ללא התחשבות באפשרות של התלכדות חישובים שונים לכדי אותה תוצאה) לדרך חישוב יחודית של המשוואה הנתונה.
כעת נוכל להבין בצורה יותר מדוייקת את הסיבוכיות של הפונק' שלנו 😊
נשים לב שהפונק' שקולה במידה מסויימת לחישוב הרקורסיבי של נוסחת קטלן.
בעבור רשימה באורך n, ובאופן שקול אסימפטוטית, בעבור $\frac{n}{2}$ אופרטורים, אנחנו מבצעים פעולות מסיבוכיות $O(1)$ בסדר גודל של $O\left(t_{\frac{n}{2}}\right) = O\left(\frac{2}{n+2} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}\right)$, נשתמש בקירוב סטירלינג בשביל לקבל הערכה אסימפטוטית לביטוי הנ"ל ונקבל:

$$O\left(\frac{2}{n+2} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}\right) = O\left(\frac{2}{n+2} \cdot \left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!}\right)\right) \cong O\left(\frac{2}{n+2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 2^n}{\sqrt{\pi n}}\right)\right)$$

נשים לב כי באופן דומה נעריך את $n!$ ונקבל:

$$O(n!) \cong O\left(\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

כאשר נעריך את שני הביטויים גבולית נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{n+2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 2^n}{\sqrt{\pi n}}\right)}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^n \cdot e^n}{(n+2) \cdot \sqrt{2} \cdot \pi n \cdot n^n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(n+2)} \cdot \left(\frac{2e}{n}\right)^n\right) = 0$$

לכן הביטוי של $n!$ שואף גבולית יותר מהר לאינסוף והסיבוכיות שלנו מוכלת ב-$O(n!)$.

<u>שאלה 5:</u>

נתייחס לכל נקודה שבה אנחנו צריכים לחשב סיבוכיות לכוד ואז נלכד את כל הניתוח יחדיו:

א. אנחנו יודעים שבהינתן שני מספרים a עם n ביטים ו-b עם m ביטים, סיבוכיות חישוב הכפל של ab עומדת על $O(n \cdot m)$.
ב. אנחנו הולכים לבצע מספר מכפלות בזו אחר זו ואסור לנו לפשט את החישוב לכדי גודל אחיד לכל המכפלות כאילו היו אותה מכפלה שוב ושוב, עלינו להתייחס לגודל הפלט. יהיו a ו-b שני מספרים

שלמים עם n ו-m ביטים בהתאמה, נשים לב שבחישוב החזקה שלנו, a^b אנחנו מבצעים $O(m)$ מכפלות של a בעצמו כאשר בכל פעם אנחנו שמים את התוצאה של המכפלה בחזרה ב-a. בהינתן ש-a מספר המיוצג ב-n ביטים אנחנו יודעים להגיד כי $2^{n-1} \le a < 2^n$, לכן מכפלה של a בעצמו נותנת לנו: $2^{2n-2} \le a^2 < 2^{2n}$. באופן כללי נוכל להניח כי כל מכפלה של a בעצמו מוסיפה לנו n ביטים למספר, ועוד הבחנה שרלוונטית לפונק' שלנו, ניתן להניח שכל מכפלה של מספר בעצמו (פרט ל-1 או 0) מכפילה את מספר הביטים.

כעת נייצג את סכום הסיבוכיות של כל הפעולות שתיארנו למעלה לפי מהלך הפקודות בפונק'.

נחסום את מספר המכפלות שלנו מלמעלה באמצעות $2m$ (יש את המקרים של מכפלות נוספות כאשר b אי זוגי), ונשים לב שמכיוון שאנחנו כופלים מספר בעצמו, אז בדומה להסבר ב-א. אנחנו כופלים את מספר הביטים של המספר בעצמו, אמנם נחסום גם את חישוב זה מלמעלה באמצעות $2n^2$ (ההערכה היא $O(n^2)$ אבל בחישבו עצמו אנחנו מגיעים לחישוב שטח "מלבן" של פעולות חיבור מסדר של בערך $2n \times n$).

- אנחנו מקפידים פה על חסמים עליונים מאותו סדר הגודל מכיוון שהם עלולים להתברר רלוונטיים אם נגיע לחישוב מעריכי, אמנם במקרה של הערכת פעולות הכפל, n^2 מספיק לצרכינו כמו שנראה בעוד רגע.

סה"כ:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{2m} n^{2k} = O\left(\sum_{k=1}^{2m} n^{2k}\right) = O\left(\frac{1-n^{4m+2}}{1-n^2}\right) = O(n^{4m})$$

אז לסיכום בהינתן מספרים a, b המיוצגים ע"י n, m ביטים בהתאמה, סיבוכיות חישוב החזקה בשיטה המתוארת בתרגיל היא $O(n^{4m})$.