תוכן עניינים

1. מבוא לקומבינטוריקה - עקרון החיבור ועקרון הכפל

שאלה מס' 1.

א) כמה מספרים שלמים יש בין 32 ל- 87 -

1) לא כולל שני מספרים הנ"ל?

2) כולל שני מספרים הנ"ל?

ב) כמה מספרים שלמים יש בין המספרים השלמים n_1 ו- n_2 $(n_1 > n_2)$. כולל שני מספרים אלה?

ג) מהו מספר האיברים בסדרה $m, m+1, m+2, \ldots, m+k$?

שאלה מס' 2.

א) המספר הגדול ביותר בין 312 מספרים שלמים עוקבים הוא 747. מהו המספר הקטן ביותר ביניהם?

ב) מהו המספר ה- 47 בסדרה 75, 76, 77,...?

שאלה מס' 3.

א) כמה מספרים שלמים, שמתחלקים ב- 13, יש בין 7 ל- 3000?

ב) כמה מבין המספרים האלה אינם מתחלקים ב- 5?

שאלה מס' 4.

בליגה מסוימת של כדרגל יש 12 קבוצות. מהו מספר המשחקים בכל מחזור? מהו מספר המשחקים שכל קבוצה תשחק בעונה, אם היא משחקת פעמיים עם כל קבוצת אחרת? מהו המספר הכולל של משחקים שיתקיימו בעונה?

שאלה מס' 5.

לאיש אחד 7 זוגות גרביים שחורות ו- 9 זוגות גרביים חומות. הוא מוציא גרב מהמגרה באופן אקראי. מהו מספר הגרביים המינימלי שעליו להוציא מהמגרה כדי להיות בטוח שיהיו בינהם:

א) שתי גרביים שחורות.

ב) שתי גרביים חומות.

ג) שתי גרביים מאותו צבע?

שאלה מס' 6.

בחדר 4 דלתות. מה מספר האפשרויות השונות להיכנס לחדר בדלת אחת ולצאת בדלת אחרת?

שאלה מס' 7.

חנות מוכרת חולצות של שלושה יצרנים, ב- 7 מידות וב- 6 צבעים (המידות והצבעים זהים עבור כל היצרנים). כמה סוגים שונים של חולצות ניתן לקנות בחנות זו? כמה זוגות שונים של חולצות מסוגים שונים אפשר לקנות בחנות זו?

שאלה מס' 8.

בכיתה מסוימת 20 תלמידים לומדים פיסיקה, ו- 14 תלמידים לומדים כימיה. 5 תלמידים אינם לומדים אף אחד משני המקצועות. קבע את מספר התלמידים בכיתה בכל אחד מהמקרים הבאים:

א) אין תלמידים הלומדים פיסיקה וכימיה גם יחד.

ב) 6 תלמידים לומדים את שני המקצועות.

ג) כל תלמיד הלומד כימיה, לומד גם פיסיקה.

שאלה מס' 9.

כמה מספרים תלת-ספרתיים שונים זה מזה אפשר לרשום בעזרת הספרות 1,2,3, כאשר במספר אין 2 ספרות שוות. (הצעה: רשום את כל המספרים האלה, וספור).

שאלה מס' 10.

א) נתונות שתי קבוצות: $A = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$

$B = \{ 2,4,6,8,10,12,14,16,18 \}$

מהו מספר האיברים בכל אחת מהקבוצות $A-B, A\cup B, A\cap B, B-A$?

ב) רשום את כל התת-קבוצות, בנות 5 איברים, של הקבוצה. $C = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$

ג) רשום את כל התת-קבוצות, בנות 2 איברים, של הקבוצה C לעיל.

שאלה מס' 11.

בכיתה 18 בנים ו- 16 בנות. מהו מספר המשלחות השונות בנות 2 תלמידים שאפשר לבחור בכיתה זו:

א) אם בוחרים רק בנים.

ב) אם בוחרים רק בנות.

ג) אם בוחרים בן אחת ובת אחת.

ד) אם בוחרים 2 תלמידים בלי להתייחס למינם.

שאלה מס׳ 12.

א) רשום את כל האפשרויות להושיב ארבעה אנשים a, b, c, d על ספה. מה מספרן?

ב) רשום את כל האפשרויות לחלק את ארבעת האנשים הללו סביב שולחן עגול. מהו מספר האפשרויות?

ג) מהו מספר האפשרויות לשלוח 2 אנשים מהקבוצה הזו לביצוע משימה מסוימת, ואת השניים האחרים לביצוע משימה אחרת, שונה מקודמתה?

ד) מהו מספר האפשרויות לחלק את ארבעת האנשים לשתי קבוצות בנות 2 אנשים כל אחת?

שאלה מס׳ 13.

א) בכיתה אחת 30 תלמידים, ובאחרת 28. מהו מספר התלמידים בשתי הכיתות?

ב) מה מספר האפשרויות לבחור תלמיד אחת מבין תלמידי שתי הכיתות האלה, לביצוע תפקיד מסוימת?

שאלה מס׳ 14.

ממשאל שנערך באספה מסוימת של דוברי אנגלית ודוברי צרפתית עלה, כי 40 אנשים מדברים אנגלית ו- 30 אנשים מדברים צרפתית. כמה אנשים נוכחו באספה לכל היותר? לכל הפחות?

שאלה מס׳ 15.

א) כמה מספרים בני 2 ספרות שונות, המתחילים ב- 5 או ב- 7, אפשר ליצור מהספרות: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9?

ב) כמה מספרים בני 2 ספרות שונות, הקטנים מ- 50, אפשר ליצור מהספרות הנ״ל?

שאלה מס׳ 16.

מתוך 250 תלמידים, 220 משתתפים בשיעורי התעמלות ו- 90 משתתפים בשיעורי מוסיקה. כמה תלמידים משתתפים גם בשיעורי התעמלות וגם בשיעורי מוסיקה, אם ידוע כי כל תלמיד חייב ללמוד לפחות אחד משני מקצועות אלה?

שאלה מס׳ 17.

כמה מספרים שלמים, שלא מתחלקים ב- 5 ולא ב- 7, יש בין 1 ל- 100 (כולל 100)?

שאלה מס' 18.

בקופסה יש 70 כדורים: 20 לבנים, 20 כחולים, 20 אדומים, 8 ירוקים ו- 2 צהובים. מוציאים באקראי כדורים מן הקופסה, בלי להחזירם. מהו המספר הקטן ביותר של כדורים שיש להוציא, כדי להיות בטוח שיהיו ביניהם לפחות 10 כדורים מאותו צבע?

שאלה מס' 19.

A, B ו- C הן קבוצות. נתון:

$$|A| = 50,\ |B| = 70,\ |C| = 40,\ |A \cap B| = 25,\ |A \cap C| = 20,\ |B \cap C| = 22,$$

$$|A \cap B \cap C| = 8.$$

מצא את $|A \cup B \cup C|$.

שאלה מס' 20.

מתוך 10 ספרי אלגברה ו- 6 ספרי גיאומטריה יש לבחור שני ספרים, אחד מכל מקצוע. כמה זוגות שונים כאלה אפשר לבחור?

שאלה מס' 21.

בכיתה של 30 תלמידים בוחרים ועד, המורכב משני תלמידים. מהו מספר הועדים האפשריי?

שאלה מס' 22.

כמה מלים בנות שתי אותיות, שלפחות אחת מהן היא א', אפשר ליצור מהאותיות א', ב', ג', ו- ד'?

הערה: מלה היא סדרה סופית של אותיות (ולא דוקא שונות) מתוך האלפבית הנתון.

שאלה מס' 23.

על מדף מונחים 10 ספרים שונים באנגלית, 8 ספרים שונים בצרפתית ו- 12 ספרים שונים בעברית. יש לבחור 2 ספרים, כך שיהיו בשפות שונות. בכמה אופנים ניתן לבצע זאת?

שאלה מס' 24.

בכמה אופנים אפשר להעמיד שני צריחים מאותו צבע על לוח שחמט, כך שהאחד לא יכול להכות את האחר?

שאלה מס' 25.

בבית מסוים 7 כניסות. בכמה אופנים שונים אפשר להיכנס ולצאת מהבית, בלי לעבור פעמיים באותה כניסה? מהו מספר האופנים להיכנס ולצאת, אם מסירים הגבלה זו?

שאלה מס' 26.

א) כמה מלים שונות באורך 4 אפשר להרכיב מ- 4 אותיות a, b, c, d, כאשר כל אות יכולה להופיע יותר מפעם אחת במלה?

ב) כמה מלים שונות מתחילות ב- a או ב- b?

ג) כמה מלים שונות אפשר ליצור, אם כל אות יכולה להופיע רק פעם אחת במלה?

ד) כמה מלים שונות מתחילות ב- a או ב- b, עם ההגבלה ב- ג'?

שאלה מס' 27.

בחנות נעליים יש 21 סוגי נעלי נשים, כל אחד ב- 8 מידות וב- 6 צבעים, ו- 7 סוגים של נעלי גברים, כל אחד ב- 9 מידות וב- 3 צבעים. כמה סוגי נעלים שונים בחנות הנ"ל?

שאלה מס' 28.

א) בכמה מספרים בין 1,000 ל- 10,000 מופיעות הספרות 3, 5, 7, 8 בלבד?

ב) בכמה מספרים בתחום הזה מופיעות הספרות 0, 3, 5, 7, 8 בלבד?

שאלה מס' 29.

א) כמה מספרים, בני 4 ספרות לכל היותר, אפשר ליצור מהספרות 1, 2, 3, 4, 5?

ב) כמה מספרים אלו הם אי-זוגיים?

שאלה מס' 30.

כמה מלים בנות 4 אותיות אפשר ליצור מהאותיות a,b,c,d,e,f,g,h, כאשר:

א) כל אות יכולה להופיע יותר מפעם אחת במלה (בחירת האותיות עם החזרה).

ב) כל אות יכולה להופיע לכל היותר פעם אחת במלה (בחירת האותיות בלי החזרה).

הערות:

- את בנית המלים ב- א' אפשר לתאר כך: בוחרים אות, מתוך 8 האותיות הנתונות, ורושמים אותה בתחילת המלה (במקום הראשון). מחזירים את האות לקבוצת האותיות, ובוחרים שוב אות (אפשר כמובן גם לבחור את האות שהוחזרה). זו תהיה האות השניה במלה. וכך האלה. בניה כזו של מלים מכונה בשם בחירה (של האותיות) עם החזרה.
- את בנית המלים ב- ב' אפשר לתאר באופן הבא: בוחרים אות עבור המקום הראשון במלה, ואין מחזירים אותה לקבוצת האותיות. מתוך האותיות שנותרו בוחרים אות עבור המקום השני, וכך הלאה. בחירה כזו של אותיות נקראת בחירה בלי החזרה.

2. תמורות וחליפות.

שאלה מס׳ 1.

בכיתה 30 תלמידים. יש לבחור ועד המורכב מ- 3 תלמידים, אחד הוא יו״ר, שני גזבר ושלישי מזכיר. כמה ועדים כאלה ניתן לבחור?

שאלה מס׳ 2.

לפי תור שנקבע בהגרלה, 5 כלות בוחרות חתנים מתוך 8 גברים. כמה סידורי זוגות שונים יכולים להיווצר כתוצאה מבחירה זו?

שאלה מס׳ 3.

רשום את כל החליפות בנות 3 איברים, מתוך הקבוצה בת 5 איברים { 1, 2, 3, 4, 5 }.

שאלה מס׳ 4.

חשב:

א) $P(7,3)$ ב) $P(10,4)$ ג) $P(n,4)$ ד) $P(5,1)$ ה) $P(5,5)$

שאלה מס׳ 5.

הוכח באמצעות הנוסחה (הוכחה אלגברית) ובאמצעות נימוק המבוסס על פירוש הנוסחאות (הוכחה קומבינטורית):

א) $P(n,1) + P(m,1) = P(n+m,1)$.

ב) $P(n,n) = P(n,n-1)$.

שאלה מס׳ 6.

א) כמה מספרים בין 1,000 ל- 10,000 הם בעלי ספרות אי- זוגיות בלבד, שכולן שונות זו מזו (כלומר, מורכבים מספרות שונות מתוך הספרות 9 ,7 ,5 ,3 ,1)?

ב) כמה מספרים בתחום הזה בעלי ספרות זוגיות שונות? (גם "0" היא ספרה זוגית).

שאלה מס׳ 7.

כמה מספרים שלמים n, שכל ספרותיהם שונות זו מזו, מקיימים את אי - השוויון $n > 65{,}000$?

שאלה מס׳ 8.

א) מהו מספר החליפות של 4 איברים מתוך 6 האותיות a, b, c, d, e, f?

ב) כמה מתוך החליפות הנ״ל מתחילות ב- a?

ג) כמה מתוך החליפות הנ״ל מכילות את a?

שאלה מס׳ 9.

הוכח את הנוסחה: $P(n,k) = P(n-1,k) + kP(n-1,k-1)$

א) על-ידי שימוש באלגברה.

ב) על-ידי שיקולים קומבינטוריים.

שאלה מס׳ 10.

בכמה אופנים אפשר להושיב 6 אורחים על ספה?

שאלה מס׳ 11.

בכמה אופנים אפשר להושיב 6 אורחים סביב שולחן עגול, כאשר אין הבדל בין המקומות סביב השולחן מנקודת ראותם של האורחים?

שאלה מס׳ 12.

רשום את כל התמורות של האיברים a, b, c, d, e המתחילות ב-d. הבדל מהן את התמורות המתחילות ב-dc.

שאלה מס׳ 13.

כאשר בתמורה של n מספרים $1,2,\ldots,n$ לא נשמר סדר עולה (משמאל לימין). מדברים על הפרות סדר בתמורה. כל הופעה של מספר לפני מספר קטן ממנו נקראת **הפרת סדר**.

לדוגמא: בתמורה 31528764 יש הפרות סדר כדלקמן: 3 לפני 1, 3 לפני 2. 5 לפני 2, 5 לפני 4. 8 לפני 7, 8 לפני 6, 8 לפני 4. 7 לפני 6, 7 לפני 4. 6 לפני 4. בסך הכל 10 הפרות סדר.

א) מהו מספר הפרות הסדר בתמורות הבאות: 17425683, 51286743.

ב) רשום את כל התמורות של 1,2,3,4, ומצא בכל אחת מהן את מספר הפרות הסדר. בכמה מהן יש מספר זוגי של הפרות סדר?

ג) בצע בכל אחת מהתמורות שב- א׳ טרנספוזיציה, דהיינו החלפה הדדית בין מקומותיהם של שני איברים, וחיווכח שזוגיות מספר הפרות הסדר השתנתה בכל מקרה עם ביצוע הטרנספוזיציה.

ד) נסה להוכיח ש- ג׳ נכון באופן כללי, כלומר, שהזוגיות של מספר הפרות הסדר, בתמורה מסוימת, שונה מן הזוגיות של מספר הפרות הסדר, בתמורה המתקבלת ממנה על-ידי טרנספוזיציה.

ה) הראה שאם נבצע בשתי תמורות שונות של n איברים את אותה הטרנספוזיציה, נקבל שוב 2 תמורות שונות.

ו) הוכח כי מספר התמורות הזוגיות (כלומר, התמורות שבהן יש מספר זוגי של הפרות סדר) של n איברים שווה למספר התמורות האי-זוגיות של אותם האיברים, וכי כל אחד ממספרים אלו הוא $0.5\,n!$.

שאלה מס' 14.

מהו מספר התמורות של n מספרים $1,2,3,....,n$ שבהן המספרים 1 ו- 2 :

א) נמצאים זה ליד זה.

ב) אינם נמצאים זה ליד זה.

ג) מהו מספר התמורות של n המספרים הללו, שבהן המספרים 1,2,3 נמצאים כולם בסמיכות?

שאלה מס' 15.

א) מושיבים 7 זוגות סביב שולחן עגול. מהו מספר האפשרויות להושיבם, כך שבין כל שתי נשים ישב גבר?

ב) חזור על השאלה, כאשר מושיבים את כולם על ספסל בן 14 מקומות.

שאלה מס' 16.

הוכח : $P(n,k) = P(n)/P(n\text{-}k)$

א) באופן אלגברי.

ב) על-ידי נימוק קומבינטורי (יהיה לך יותר נוח לענות על השאלה, אם תרשום את הנוסחה בצורה: $P(n,k)\cdot P(n\text{-}k) = P(n)$)

שאלה מס' 17.

בכמה מספרים בין 1000 ל- 9999 כל הספרות שונות זו מזו?

שאלה מס' 18.

א) בכמה אופנים אפשר להושיב 10 אנשים על ספסל, אם a ו- b יושבים תמיד זה ליד זה ו- b ו- c אינם מסכימים לשבת זה ליד זה?

ב) בכמה אופנים אפשר להושיב 10 אנשים על ספסל, אם 4 מהם יושבים כקבוצה (כלומר, אף אחד מהאנשים האחרים אינו מפריד בין אף שניים מהארבעה)?

שאלה מס' 19.

הוכח שמכפלת כל k מספרים עוקבים מתחלקת ב- $k!$.

שאלה מס' 20.

בכיתה 30 תלמידים. יש לבחור 2 תלמידים למשלחת מסוימת. כמה משלחות שונות אפשר לבחור?

שאלה מס' 21.

על מדף מונחים 10 ספרים שונים בעברית, ו- 8 ספרים שונים באנגלית. בכמה אופנים אפשר לבחור מתוך ספרים אלה חבילה המכילה 3 ספרים בעברית ו- 3 ספרים באנגלית?

שאלה מס' 22.

בחינה מורכבת משני חלקים: בראשון 4 שאלות ובשני 6 שאלות. על הסטודנט לענות על 2 שאלות מכל חלק. בכמה אופנים שונים יוכל הסטודנט לבחור את השאלות עליהן יענה?

שאלה מס' 23.

כמה מלים שונות, בנות 9 אותיות, אפשר ליצור מ- 7 a- ים ו- 2 b- ים?

שאלה מס' 24.

3 נשים ו- 5 גברים מתחלקים לשתי קבוצות, בנות 4 אנשים כל אחת, כך שבכל קבוצה יש לפחות אישה אחת. מהו מספר האפשרויות העומדות לרשותם?

שאלה מס' 25.

יש לחלק 4 נשים ו- 10 גברים לשתי קבוצות בנות 7 אנשים, כך שבכל קבוצה תהיה לפחות אישה אחת. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת?

שאלה מס' 26.

הראה, כי מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת 60 איברים שונים ל- 3 קבוצות בנות 8 איברים כל אחת, 4 קבוצות בנות 5 איברים כל אחת, 2 קבוצות בנות 6 איברים כל אחת, קבוצה אחת בת איבר אחת, הוא:

$$\frac{\begin{bmatrix}60\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}52\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}44\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}26\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}21\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{3!\cdot 4!\cdot 2!}=\frac{60!}{(8!)^3\cdot 3!\cdot(5!)^4\cdot 4!\cdot(6!)^2\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!}$$

שאלה מס' 27.

הוכח כי ניתן לחלק 2n איברים ל- n זוגות ב- $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ אופנים.

שאלה מס' 28.

א) בכמה אופנים שונים אפשר לבחור ועד של שלושה תלמידים בכיתה בת 32 תלמידים?

ב) כמה ועדים שונים כאלה ניתן לבחור, אם מחלקים בין שלושת הנבחרים תפקידים: יו"ר, מזכיר, גזבר?

ג) כמה ועדים כאלה ניתן לבחור, כאשר תלמיד x אינו מוכן להיבחר אם תלמיד y נבחר?

שאלה מס' 29.

בכמה אופנים אפשר לארוז 10 ספרים שונים בשתי קופסאות, אם בכל אחת יש מקום ל- 6 ספרים? בדוק שני מקרים:

א) אין מבחינים בין הקופסאות.

ב) מבחינים בין הקופסאות.

שאלה מס' 30.

א) במישור סומנו 18 נקודות, כך שאין שלוש מהן הנמצאות על ישר אחד. כמה ישרים נקבעים על-ידי נקודות אלה (כידוע, שתי נקודות שונות קובעות ישר)?

ב) מתוך 18 נקודות במישור, 7 נמצאות על ישר אחד, ומן הנותרות אין שלוש הנמצאות על ישר אחד. מהו מספר הישרים הנקבעים על-ידי נקודות אלה?

3. תמורות צירופים וחליפות עם החזרה.

שאלה מס' 1.

א) כמה "ידיים" שונות של ברידג' יכול שחקן לקבל? (בחפיסה 52 קלפים, מהם מקבל כל שחקן ברידג' 13 קלפים - אלה מהווים את " יד הברידג' " שלו.)

ב) בכמה אופנים שונים יכולים הקלפים להתחלק בין 4 שחקני ברידג', כאשר אין מבחינים בין השחקנים?

שאלה מס' 2.

כמה שלשות של מספרים שונים ניתן להרכיב מן המספרים 1,2,.......20, אם אין אף שלשה שמכילה שני מספרים עוקבים?

שאלה מס' 3.

א) בכמה אופנים אפשר לשים 6 עצמים שונים ב- 10 תאים שונים, כך שבאף תא לא יהיה יותר מעצם אחד?

ב) חזור על השאלה עבור k עצמים ו- n תאים, כאשר $k \le n$.

שאלה מס' 4.

כמה סימנים שונים אפשר להצפין באמצעות סידורים שונים של 7 אפסים ואחדים, בשורה בת 7 מקומות? רשום את הסידורים השונים של 0 ו- 1 בשורה בת 4 מקומות.

שאלה מס' 5.

מהו מספר האפשרויות לחלק k עצמים שונים ל-n תאים שונים, כאשר אין הגבלה על תכולת התאים?

שאלה מס' 6.

מטילים שלוש קוביות שונות (שחורה, אדומה ולבנה). כמה תוצאות שונות אפשר לקבל בהטלה כזו?

שאלה מס' 7.

חזור על שאלה הקודמת, כאשר הקוביות זהות.

שאלה מס׳ 8.

א) כמה מספרים בני 6 ספרות אפשר ליצור מהספרות 1,2,3,4?

ב) כמה מספרים כאלה אפשר ליצור מכל 10 הספרות?

ג) כמה מספרים בני 10 ספרות אפשר לרשום בעזרת הספרות 1,2,3, אם הספרה 3 מופיעה בכל אחד מהם פעמיים בדיוק?

שאלה מס׳ 9.

כמה סידורים שונים של דגלים אפשר לקבל מ- 4 דגלים כחולים, 2 דגלים לבנים ו- 3 דגלים אדומים, כאשר כל הדגלים מופיעים בכל סידור? נסח את הבעיה הכללית המתאימה לזו, ופתור אותה.

שאלה מס׳ 10.

א) כמה מספרים בני 6 ספרות אפשר ליצור מהספרות 2,3, ו- 7?

ב) כמה מהם הם מספרים זוגיים?

ג) בכמה מהמספרים הללו מופיעות 2 ספרות 2, 2 ספרות 3 ו- 2 ספרות 7?

ד) כמה מהמספרים האחרונים הם זוגיים?

שאלה מס׳ 11.

כמה מספרים גדולים מ- 4,000,000 בנויים משתי ספרות 7. ספרה 5 אחת, שלוש ספרות 3 וספרה 2 אחת?

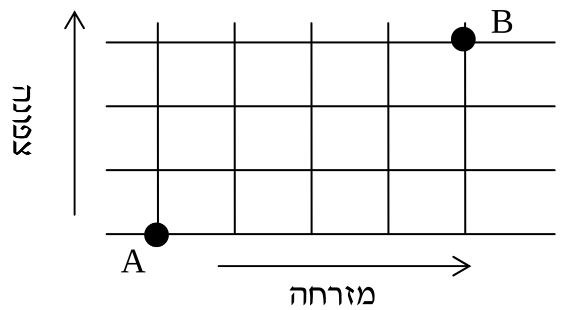
שאלה מס׳ 12.

א) מהן מספר התמורות שאפשר לבנות מהאותיות של המלה aabadaddaa.

ב) מהו מספר התמורות שאפשר לבנות מהאותיות הבאות : a,a,a,a,b,b,b,c,c,c,c,c,d,e,e,e.

שאלה מס׳ 13.

בעיר מסוימת יש רשת רחובות ניצבים זה לזה (ראה איור).



כדי לעבור מ- A ל- B בדרך קצרה ככל שאפשר, יש ללכת 4 בלוקים מזרחה, ו- 3 בלוקים צפונה.

מהו מספר המסלולים השונים האפשריים לטיול כזה? הכלל את התוצאה.

שאלה מס' 14.

הראה על-ידי ספירה, כי עבור כל k, D(2,k)= k+1 D(1,k)=1 .

שאלה מס' 15.

מטילים 3 קוביות זהות. מהו מספר התוצאות השונות שאפשר לקבל?

שאלה מס' 16.

בוחרים ארבע פעמים מספר בין 1 ל- 10 (כולל 1 ו- 10).

א) כמה בחירות כאלה אפשריות, אם מתחשבים בסדר הבחירה?

ב) כמה בחירות שונות אפשריות, אם אין חשיבות לסדר הבחירה?

ג) כמה בחירות, מהסוג האחרון, סכום המספרים שנבחרו הוא זוגי?

שאלה מס' 17.

מהו מספר הפתרונות השלמים הלא-שליליים (להלן נקרא להם פתרונות מטבעיים) של המשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$.

שאלה מס' 18.

בכמה אופנים אפשר לפזר k עצמים זהים, ב- n תאים שונים, כך שכל תא יכיל עצם אחד לפחות? (במקרה זה $(n \le k)$.

שאלה מס' 19.

נתבנון באיור: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8

חלוקה של 8 עצמים זהים בין 3 תאים שונים, כך שבכל תא יהיה עצם אחד לפחות, שקולה להשארת 2 מחיצות בלבד מתוך 7 המחיצות שבין העצמים. הסבר זאת, ומצא את מספר האפשרויות במקרה הנדון.

שאלה מס' 20.

מצא את מספר הפתרונות, בשלמים חיובים, של המשוואה - $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$

שאלה מס' 21.

מצא את מספר הפתרונות של המשוואה - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22$

א) בטבעיים.

ב) בשלמים חיובים.

שאלה מס' 22.

הראה שלשתי המשוואות הבאות יש אותו מספר של פתרונות בטבעיים:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$.

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 5$.

שאלה מס' 23.

מהו מספר האפשרויות לקנות 10 עטים, אם ידוע שאפשר להשיגם ב- 4 צבעים שונים?

שאלה מס' 24.

כמה מספרים שלמים יש בין 1 ל- 10,000, כך שסכום ספרותיהם שווה ל- 9?

שאלה מס' 25.

א) בכמה אופנים אפשר לחלק 18 מכתבים זהים בין 5 תיבות דואר שונות?

ב) חזור על השאלה, במקרה שבכל תיבה צריכים לשים 2 מכתבים לפחות.

שאלה מס' 26.

מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$

המקיימים: $0 \le x_1 \le 25,\ 3 \le x_2 \le 25,\ 0 \le x_3 \le 25,\ 8 \le x_4 \le 25$.

שאלה מס' 27.

מהו מספר הפתרונות של המשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$

א) כאשר הפתרונות הם מספרים טבעיים, המקיימים $(1 \le k \le 5)\ x_k \ge 8$, עבור k אחד לפחות.

ב) כאשר הפתרונות הם שלמים המקיימים: $2 \le x_1,\ 7 \le x_2,\ -4 \le x_3,\ 0 \le x_4,\ -3 \le x_5$.

שאלה מס' 28.

א) רשום את כל הפתרונות בשלמים של המשוואה $x_1+x_2=15$, המקיימים: $-4\le x_1,\ 2\le x_2$.

ב) מהו מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=22$ המקיימים: $-5\le x_1,\ -2\le x_2,\ 3\le x_3, 1\le x_4$?

שאלה מס' 29.

מהו מספר האפשרויות לחלק k עצמים שונים ל- n תאים שונים, אם לתא ה- l –י ($1<l<n$) יש להכניס k_l עצמים, $\sum_{l=1}^{n} k_l = k$? לסדר העצמים בתוך התא אין חשיבות.

שאלה מס' 30.

א) מהו מספר האפשרויות לחלק 12 איש לשלושה צוותים בני 4 אנשים כל אחד, כאשר לכל צוות תפקיד שונה?

ב) כנ"ל, פרט לכך שאין מבדילים בין תפקידי הצוותים. (כאן מדובר בחלוקה של קבוצה של 12 איש ל- 3 קבוצות בנות 4 אנשים כל אחת.

שאלה מס' 31.

מהו מספר האפשרויות לחלק כיתה של 42 תלמידים בין 6 מתרגלים, כך ששני מתרגלים יעבדו עם 8 תלמידים כל אחד, 3 עם 7 תלמידים כל אחד, והמתרגל השישי יעבוד עם 5 תלמידים (אנו מבחינים בין המתרגלים).

שאלה מס' 32.

בכיתה של 18 תלמידים יש לבחור שלוש ועדות: אחת של 3 תלמידים, שניה של 4 תלמידים, ושלישית של 5 תלמידים. לכל ועדה תפקיד משלה.

א) מהו מספר הבחירות השונות, אם אסור לאותו תלמיד לכהן ביותר מועדה אחת?

ב) מהו מספר הבחירות השונות אם אין הגבלה כזו?

שאלה מס' 33.

מהו מספר האפשרויות לפזר k עצמים שונים ב- n תאים שונים (יתכן ובתא אחד יהיו מספר עצמים), כאשר יש חשיבות לסדר בו מופיעים העצמים בתוך התא?

שאלה מס' 34.

הראה שיש $\binom{k-1}{n-1}k!$ אפשרויות לפזר k עצמים שונים בתוך n תאים שונים ($n \le k$), כך שכל תא יכיל עצם אחד לפחות, ולסדר העצמים בתוך התא יש חשיבות.

שאלה מס' 35.

הראה שאם בבעיה הקודמת התאים זהים (פרט לזאת, כל שאר התנאים אינם משתנים), הרי מספר האפשרויות הוא $\binom{k-1}{n-1}\frac{k!}{n!}$.

שאלה מס' 36.

א) בכמה אופנים אפשר לפזר 5 כדורים שונים ב- 4 תאים שונים המסומנים ב- $1, 2, 3, 4$?

ב) מהו מספר האפשרויות לעשות זאת, כאשר רק התאים 1 ו- 2 מכילים כדורים, ובכל אחד משניהם כדור אחד לפחות?

שאלה מס' 37.

בכמה אופנים אפשר לתאר המספר 30,030 כמכפלה של 3 גורמים שלמים, שכל אחד מהם גדול מ- 0? לסדר הגורמים אין חשיבות.

שאלה מס' 38.

באלף - בית העברי 22 אותיות. מילה בת ארבע אותיות מעל הא"ב הזה היא כל רביעיה סדורה של אותיות מהא"ב. בכמה מלים כאלה מופיעות 2 (או יותר) אותיות זהות?

שאלה מס' 39.

נתון האלף-בית $\Sigma = \{0,1,2\}$. Σ_8 היא קבוצת המלים באורך 8 מעל אלף-בית זה.

א) מהו מספר המלים ב- Σ_8?

ב) כמה מלים מתוכן מכילות בדיוק ארבע אותיות 0 וארבע אותיות 2?

ג) כמה מלים מתוכן מכילות בדיוק שלושה אותיות 1?

ד) כמה מלים מתוכן מכילות לפחות 0 אחד, 1 אחד, ו- 2 אחד?

שאלה מס' 40.

בכמה אופנים ניתן להושיב 10 אנשים על ספסל בן 10 מקומות, כך ששניים מסוימים מהם, א' ו- ב', לא ישבו זה ליד זה? שני החישובים הבאים סופרים את מספר האפשרויות האלה: $10!-2\cdot 9!=8\cdot 7\cdot 8!+2\cdot 8\cdot 8!$. נמק כל אחד מהם באופן קומבינטורי.

שאלה מס' 41.

מהו מספר האפשרויות להושיב 6 זוגות סביב שולחן עגול, אם כל הגברים יושבים זה ליד זה וכל הנשים יושבות זו ליד זו?

שאלה מס' 42.

בכמה אופנים אפשר להושיב 6 זוגות סביב שולחן עגול, כך שכל שני בני זוג ישבו זה ליד זה?

שאלה מס' 43.

א) יש לחלק 12 תלמידים ו- 4 מורים לשתי קבוצות, שכל אחת מהן תכלול 6 תלמידים ו- 2 מורים. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת?

ב) מהו מספר האפשרויות, כאשר בקבוצה אחת 6 תלמידים ו- 3 מורים ובשניה 6 תלמידים ומורה אחד?

שאלה מס' 44.

בכמה אופנים ניתן לבחור 5 נעליים מתוך 9 זוגות נעליים, כך שלא ייבחר אף זוג?

שאלה מס' 45.

בכמה אופנים אפשר לחלק 5 תפוחים, 6 תפוזים ו-7 אגסים בין 3 ילדים (מניחים כי פירות מאותו סוג זהים).

רמז: אין קשר בין חלוקת פרי זה או אחר. כל אחד אפשר לחלק לחוד.

שאלה מס' 46.

12 תלמידים מתחלקים ל- 3 קבוצות, בנות 4 תלמידים כל אחת. מהו מספר החלוקות שבהן התלמידים x ו- y יהיו בקבוצות שונות?

שאלה מס' 47.

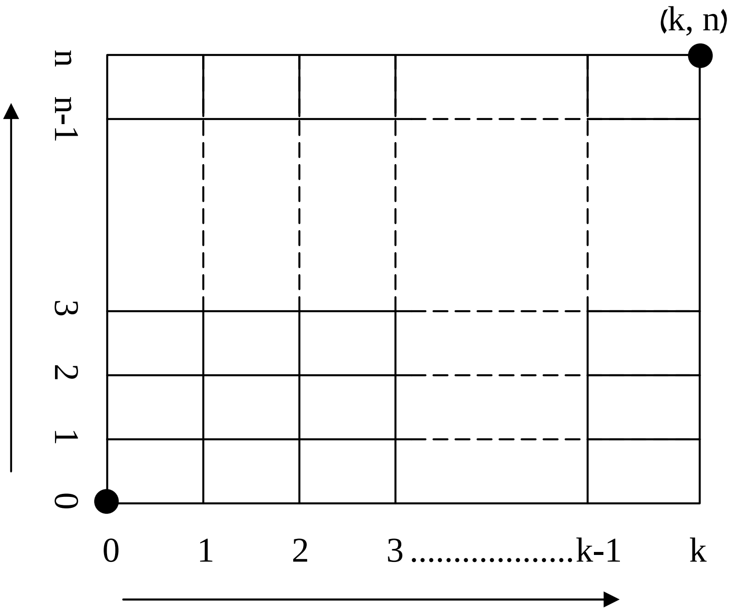
מטילים n קוביות זהות. מהו מספר התוצאות האפשריות של ניסוי כזה?

שאלה מס' 48.

נתונים 3 כדורים לבנים, 1 שחור, 1 ירוק, 1 צהוב. בחר מתוכם 4 כדורים וסדר אותם בשורה. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת, אם 2 סידורים נחשבים שונים, כאשר הם שונים בהרכבם ו/או בסדר הכדורים? (הכדורים הלבנים זהים).

שאלה מס' 49.

נתונה רשת מלבנית (ראה איור)



ברשת זו מתקדמים מהנקודה (0, 0) אל הנקודה (k, n) בצעדים באורך 1, ימינה או למעלה בלבד (אין חזרות שמאלה או למטה). מהו מספר האופנים השונים להגיע מ- (0, 0) אל (k, n)?

שאלה מס' 50.

הכלל את הבעיה הקודמת ל- 3 ממדים. מהו מספר המסלולים בין שתי נקודות ברשת תלת-ממדית כזו, אם המעבר מאחת לשניה דורש 6 הזזות ימינה, 4 הזזות קדימה ו- 7 הזזות למעלה? (בהזזה מתכוונים למהלך של צעד אחד).

שאלה מס' 51.

במישור מסומנות n נקודות. m מהן נמצאות על ישר אחד, ואף שלוש מהשאר אינן על ישר אחד. מהו מספר המשולשים הנקבעים במישור על-ידי נקודות אלו?

שאלה מס' 52.

השתמש בשיקול קומבינטורי להוכחת העובדה, שהמספרים הבאים הם מספרים שלמים:

א) $\frac{(2n)!}{2^n}$ ב) $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$.

4. הבינום של ניוטון. פירוק מולטינומי.

שאלה מס׳ 1.

פתח את הביטויים הבאים:

א) $(x+a)^8$.

ב) $(2x+3)^4$.

ג) $(x-a)^9$.

שאלה מס׳ 2.

א) מהו מקדם של x^7a^4 בפיתוח $(x+a)^{11}$?

ב) מהו מקדם של x^6a^6 בפיתוח $(x+a)^{12}$?

שאלה מס׳ 3.

כמה איברים רציונליים יש בפיתוח $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{5}\right)^{80}$?

שאלה מס׳ 4.

רשום את 6 השורות הראשונות של משולש פסקל.

שאלה מס׳ 5.

על-ידי שימוש במשולש פסקל, הראה: $\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}=\binom{7}{4}$

רמז: $\binom{2}{0}=\binom{3}{0};\ \binom{3}{0}+\binom{3}{1}=\binom{4}{1}$.

שאלה מס׳ 6.

כזכור, מספר התת - קבוצות השונות בנות k איברים של קבוצה A בעלת n איברים הוא: $\binom{n}{k}$.

שים לב: לפי ההגדרה $\binom{n}{0}=1$, בהסכמה עם כך שלקבוצה יש תת-קבוצה ריקה אחת. על-ידי שימוש בנ״ל הוכח, שמספר התת-קבוצות השונות של קבוצה A בעלת n איברים הוא 2^n.

שאלה מס' 7.

א) בשאלון מסוים יש 10 שאלות, לכל שאלה 2 תשובות אפשריות, כן או לא. בכמה אופנים שונים יכול הנשאל לענות על השאלון, אם עליו להשיב על כולו?

ב) חזור על השאלה, אם הנשאל יכול גם להימנע מלענות על שאלה כלשהי.

שאלה מס' 8.

בשאלון n שאלות. מהו מספר האפשרויות למילוי טופס תשובות, אם לכל שאלה יש 2 תשובות אפשריות, ויש לענות על לפחות ממחצית השאלות בתשובה I? (הנח כי n אי-זוגי)

שאלה מס' 9.

הוכח: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0+\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n} = 2^{n-1}\cdot n$

רמז: הוכח תחילה $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

שאלה מס' 10.

הוכח הזהות: $\binom{n}{k}\binom{k}{h} = \binom{n}{h}\binom{n-h}{k-h}$

א) תן הוכחה אלגברית.

ב) תן הוכחה קומבינטורית.

רמז: חשוב על 2 דרכים שונות לקביעת מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים נתונים, ו- h איברים מתוך k האיברים שנבחרו $(h \le k \le n)$.

שאלה מס' 11.

האם $\binom{n}{k}\binom{k}{h}$ שווה ל- $\binom{n}{h}$?

אם כן, הוכח. אם לא, תן נימוק קומבינטורי מדוע אין לחשב את מספר הבחירות של h איברים מתוך n, על-ידי כך שמוצאים את מספר הבחירות של k איברים מתוך n וכופלים מספר זה במספר האפשרויות לבחור h איברים מתוך k האיברים שנבחרו $h \le k \le n$.

שאלה מס' 12.

הוכח את הזהות: $\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$.

שאלה מס' 13.

הוכח: $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$.

שאלה מס' 14.

מצא הוכחה קומבינטורית לשוויון שבשאלה מס' 13. לשם כך, חלק קבוצה בעלת 2n איברים לשתי קבוצות, בנות n איברים כל אחת, וחשב - בשתי דרכים - את מספר זוגות האיברים שאפשר לבנות מקבוצה בת 2n איברים.

שאלה מס' 15.

הוכח את הזהות: $\binom{n+1}{k+1}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n-2}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}$

שאלה מס' 16.

הוכח את הזהויות:

א) $\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$

ב) $\binom{m+n}{m+k}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{k+i}$

שאלה מס' 17.

הוכח: $\binom{n+k+1}{k}=\binom{n+k}{k}+\ldots+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}$

שאלה מס' 18.

הוכח את הזהות: $\binom{n}{k+1}-\binom{n+m+1}{k+1}=\binom{n+m}{k}+\ldots+\binom{n+1}{k}+\binom{n}{k}$

שאלה מס' 19.

הוכח את הזהות שבשאלה מס' 12 : $\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ בדרך אלגברית.

שאלה מס' 20.

חשב את הסכומים :

א) $\sum_{i=2}^{n}i\left(i-1\right)\binom{n}{i}$.

ב) $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

ג) $\sum_{i=0}^{n}2^{i}\binom{n}{i}$.

שאלה מס' 21.

הוכח : $\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+5\binom{n}{5}+\ldots=2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+6\binom{n}{6}+\ldots=n\cdot 2^{n-2}$

שאלה מס' 22.

חשב את הסכום : $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\ldots$

שאלה מס' 23.

חשב את הסכום : $1+2\binom{n}{1}+\ldots+(i+1)\binom{n}{i}+\ldots+\left(n+1\right)\binom{n}{n}$

שאלה מס' 24.

א) הוכח : $\left(k+1\right)\binom{n}{k+1}=n\binom{n-1}{k}$.

ב) מהו הפירוש הקומבינטורי של שוויון זה?

שאלה מס' 25.

א) חשב את $\left(a+b+c\right)^5$.

ב) הראה, על-ידי שיקול קומבינטורי, כי -

$$\left(a+b+c\right)^n=\sum_{\substack{0\le i,j,k\le n\\ i+j+k=n}}\frac{n!}{i!\,j!\,k!}a^ib^jc^k$$

את הרשום מתחת לסימן הסכום יש לפרש בצורה הבאה: i, j, k מקבלים את הערכים של כל הפתרונות השלמים הלא-שליליים האפשריים של המשוואה i + j + k = n.

שאלה מס' 26.

הראה על-ידי שיקול קומבינטורי:

$$\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\right)^n=\sum_{\substack{0\le i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\le n\\ i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=n}}\frac{n!\cdot\left(x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{4_5}x_5^{i_5}\right)}{i_1!\,i_2!\,i_3!\,i_4!\,i_5!}$$

כאשר i_1,i_2,i_3,i_4,i_5 מקבלים את ערכים האפשריים של כל הפתרונות בטבעיים של המשוואה: $i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=n$.

שאלה מס' 27.

רשום את הפיתוחים הבאים:

א) $\left(a+b+c+d\right)^4$.

ב) $\left(x+y+z+u+v\right)^3$.

שאלה מס' 28.

א) מצא את סכום מקדמי הפיתוח $\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^7$.

ב) מהו המקדם של האיבר $a^3b^2c^2de^4$ בפיתוח $\left(a+b+c+d+e\right)^{12}$?

ג) מהו המקדם של האיבר b^5c^7 בפיתוח $\left(a+b+c+d+e\right)^{12}$?

ד) מהו המקדם של האיבר d^{12} בפיתוח $\left(a+b+c+d+e\right)^{12}$?

שאלה מס' 29.

חשב את: א) $(x+y+z)^4$. ב) $(2x+y-z)^3$.

שאלה מס' 30.

מה המקדם של:

א) $x^2y^3z^2$ בפיתוח $(x+y+z)^7$.

ב) $x^6y^3z^2$ בפיתוח $(x-2y+3z)^{11}$.

שאלה מס' 31.

מצא את האיברים החופשיים מ- x בפיתוח:

א) $\left(x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^8$ ב) $\left(x^3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^6$ ג) $\left(x^4+1+\frac{1}{x^2}\right)^{20}$.

שאלה מס' 32.

הוכח כי $\binom{n}{i,j,k}+\binom{n}{i,j,k-1}+\binom{n}{i,j-1,k}+\binom{n}{i-1,j,k}=\binom{n+1}{i,j,k}$,

כאן $i+j+k=n$, $\binom{n}{i,j,k}=\frac{n!}{i!\,j!\,k!}$.

שאלה מס' 33.

מהו המספר האיברים בפיתוח: א) $(x+y+z)^6$ ב) $(a+2b+5c+d)^4$ ג) $(s+t+z+u+v)^6$.

שאלה מס' 34.

הוכח:

א) $\sum_{i=0}^{5}\binom{m}{i}\binom{n}{5-i}=\binom{m+n}{5}$ ב) $\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{k}^2=\binom{6}{3}$

ג) $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{k}^2=\binom{20}{10}$

שאלה מס' 35.

הוכח בעזרת האינדוקציה:

א) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

ב) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

שאלה מס' 36.

חשב: $(a+b+c)^2,(a+b+c)^3$.

שאלה מס' 37.

חשב: $\binom{5}{5}+2\binom{5}{4}+\binom{5}{3}+2\binom{5}{2}+\binom{5}{1}+2\binom{5}{0}$.

שאלה מס' 38.

מצא את המקדם של $(xyzw)^{25}$ בפיתוח $(x+y+z+w)^{100}$.

שאלה מס' 39.

פתח את הביטויים הבאים:

א) $\left(x^2-2\sqrt{x}\right)^5$. ב) $\left(x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$.

שאלה מס' 40.

מצא את האיבר החופשי בפיתוח:

א) $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$. ב) $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^9$. ג) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{22}$.

שאלה מס' 41.

הוכח בשיטה הקומבינטורית את הפיתוח ב- $(x+a)^{10}$.

שאלה מס' 42.

חשב את $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}$, $\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\binom{7}{k}$.

5. עקרון ההכלה וההפרדה.

שאלה מס' 1.

במועדון מסוים, על כל חבר לשחק ברידג' או גולף. ידוע כי 30 מחברי המועדון הם שחקני ברידג', ו- 42 הם שחקני גולף. 20 מחברי המועדון משחקים בשני המשחקים. מהו מספר חברי המועדון?

שאלה מס' 2.

בקבוצה של 100 תלמידים 30 מנגנים, 25 מציירים ו- 8 גם מנגנים וגם מציירים. מהו מספר התלמידים, בקבוצה, זו שאינם מנגנים ואינם מציירים?

שאלה מס' 3.

כמה מספרים בין 1 ל- 3000 אינם מתחלקים לא ב- 3 ולא ב- 5?

שאלה מס' 4.

כמה מספרים בין 1 ל- 3000 אינם מתחלקים לא ב- 3,לא ב- 5 ולא ב- 7?

שאלה מס' 5.

רשום נוסחה עבור $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, הדומה לזו שרשמנו עבור $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

שאלה מס' 6.

בבית ספר מסוים יש 200 לומדי צרפתית או איטלקית, או שתי השפות הללו. ידוע שבבית הספר יש 150 לומדי צרפתית ו- 70 לומדי איטלקית. מהו מספר לומדי שתי השפות?

שאלה מס' 7.

בכמה מספרים בני 4 ספרות יש לפחות ספרה אחת 2, ספרה אחת 3 וספרה אחת 4?

שאלה מס' 8.

מהו מספר התמורות של הספרות 1,2,4,6 אשר הספרה הראשונה שבהן גדולה מ- 1 או שהספרה האחרונה שבהן קטנה מ- 3.

שאלה מס׳ 9.

כמה מספרים שלמים וחיוביים, הקטנים מ- 30, זרים ל- 30?

תזכורת: שני מספרים שלמים זרים זה לזה, אם אין להם מחלק משותף פרט ל- 1.

שאלה מס׳ 10.

כמה מספרים שלמים וחיוביים קטנים מ- 1001 זרים ל- 1001?

שאלה מס׳ 11.

בבית ספר, שבו לומדים 120 ילדים, התקיימו בשנת הלימודים שלושה טיולים: א׳, ב׳, ו- ג׳. לטיול א׳ יצאו 40 תלמידים, לטיול ב׳ יצאו 40 תלמידים וגם לטיול ג׳ יצאו 40 תלמידים. 20 תלמידים יצאו רק לטיול א׳, 20 תלמידים יצאו רק לטיול ב׳, ו- 15 תלמידים יצאו רק לטיול ג׳. 10 תלמידים יצאו לטיולים א׳ ו- ב׳. כמה תלמידים יצאו לשלושת הטיולים, וכמה תלמידים לא יצאו לאף טיול?

שאלה מס׳ 12.

מתוך 30 ילדים, 20 לומדים ציור, 14 לומדים מוסיקה ו- 10 לומדים ריקוד. אף ילד אינו לומד את כל שלוש האמנויות, ו- 8 ילדים אינם לומדים אף אחת מהן. כמה ילדים לומדים מוסיקה וריקודים?

שאלה מס׳ 13.

הוכח את הנוסחה:

$$\left|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'\right| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n = |U| - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i$$

שאלה מס׳ 14.

מטילים n קוביות שונות.

א) מהו מספר התוצאות של ההטלה?

ב) מהו מספר התוצאות האפשריות, בהן מופיע כל אחד מהמספרים 1 עד 6 לפחות פעם אחת?

שאלה מס׳ 15.

הוכח שמספר האפשרויות לפזר n כדורים שונים ב- k תאים שונים, באופן שלפחות תא אחד ישאר ריק, הוא $\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n$. **רמז:** הפתרון אנלוגי לפתרון השאלה מס׳ 14.

שאלה מס' 16.

מזכירה שמה מכתבים ב- n מעטפות ממוענות, בלי לקרוא את הכתובות. מהו מספר האפשרויות שאף מכתב לא יגיע לתעודתו?

שאלה מס' 17.

מהו מספר האפשרויות לבחור 5 קלפים מתוך 52 שבחפיסה, כך שיהיה ביניהם לפחות קלף אחד מכל אחד מארבעת הסוגים?

שאלה מס' 18.

מפזרים 25 כדורים זהים בין 6 תאים שונים. מהו מספר התוצאות, שבהן כל אחד משלושת התאים הראשונים מכיל לכל היותר 6 כדורים?

שאלה מס' 19.

מהו מספר התמורות של המספרים מ- 1 עד 10, שבהן אף מספר אי-זוגי אינו נמצא במקומו? (המספרים הזוגיים יכולים להיות בכל מקום שהוא).

שאלה מס' 20.

$$\Theta(n)=n-\sum_{1\le i\le k}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{n}{p_ip_j}+\sum_{1\le i<j<h\le k}\frac{n}{p_ip_jp_h}+\ldots+(-1)^k\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}=$$

$$=n\left(1-\sum_{1\le i\le k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{1}{p_ip_j}+\sum_{1\le i<j<h\le k}\frac{1}{p_ip_jp_h}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{p_1p_2\cdots p_k}\right)=$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

הוכח את המעבר האלגברי האחרון בחישוב הנ"ל.

שאלה מס' 21.

חשב: א) $\Theta(30)$ ב) $\Theta(1001)$ ג) $\Theta(210)=\Theta(2\cdot3\cdot5\cdot7)$

ד) $\Theta(12,600)=\Theta\left(2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\right)$ ה) $\Theta(1,000,000)$.

שאלה מס' 22.

מצא את מספר הפתרונות השלמים של המשוואה:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ המקיימים: $1 \le x_1 \le 6$, $0 \le x_2 \le 8$, $-2 \le x_3 \le 3$, $6 \le x_4 \le 10$.

שאלה מס' 23.

מצא את מספר המספרים בני 7 ספרות, שסכום הוא 19 (אין להתחיל מספר ב- 0).

שאלה מס' 24.

הראה כי מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = k$ המקיימים $x_i < b\ (i = 1,2,3,4,5)$, הוא:

$$\binom{5-1+k}{4} - \binom{k}{1}\binom{5-1+k-b}{4} + \binom{k}{2}\binom{5-1+k-2b}{4} - \binom{k}{3}\binom{5-1+k-3b}{4} + \binom{k}{4}\binom{5-1+k-4b}{4} - \ldots$$

המחוברים בסכום הזה שונים מאפס, כל עוד $5 - 1 + k - mb \ge 0$ הכלל את התוצאה.

שאלה מס' 25.

מפזרים k כדורים שונים ב- n תאים שונים. מה מספר האפשרויות בהן יישארו בדיוק m תאים ריקים?

שאלה מס' 26.

בכמה אופנים אפשר לחלק n מכתבים ל- n מעטפות ממוענות (מכתב אחד לכל מעטפה), כך שבדיוק m מכתבים יגיעו לתעודתם?

בדוק את המקרים הפרטיים: m = 0 (ראה שאלה מס' 16), m = n ו- m = n - 1.

שאלה מס' 27.

בכמה סדרות באורך 4, המורכבות מן הספרות 0, 1, ו- 2, מופעיה הספרה 1 בדיוק פעמיים? בכמה סדרות כאלה היא מופיעה לפחות פעמיים?

שאלה מס' 28.

מהו מספר הסדרות הבינאריות באורך 4, שבהן כל 1 מופיע ליד 1 אחר?

(**הערה:** סדרה בינארית היא סדרה המורכבת מ- 0 ו- 1).

6. עקרון שובך היונים.

שאלה מס׳ 1.

אם ידוע שמספר השערות על ראשו של בן אדם אינו עולה על $\frac{1}{4}$ מיליון, הוכח כי בישראל יש לפחות שני אנשים בעלי אותו מספר שערות על הראש.

שאלה מס׳ 2.

הוכח שבין כל שלושה מספרים שלמים יש שניים שסכומם הוא מספר זוגי.

שאלה מס׳ 3.

א) לפחות אחד משני עצמים x_1 ו- y_1 הוא בעל תכונה P, לפחות אחד משני עצמים x_2 ו- y_2 הוא בעל תכונה P, לפחות אחד משני עצמים x_3 ו- y_3 הוא בעל תכונה P.

הוכח: לפחות שניים מבין x_1, x_2, x_3 או לפחות שניים מבין y_1, y_2, y_3 הם בעלי התכונה P.

ב) הנתונים כמו לעיל, וכן גם עבור הזוגות x_4 ו- y_4, x_5 ו- y_5.

הוכח: לפחות שלושה מבין x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 או לפחות שניים מבין y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 הם בעלי התכונה P.

שאלה מס׳ 4.

הסכום של תשעה מספרים הוא 90.

א) הוכח כי יש ביניהם שלושה מספרים שסכומו לפחות 30.

ב) הוכח כי יש ביניהם ארבעה מספרים שסכומו לפחות 40.

שאלה מס׳ 5.

A היא תת - קבוצה בת 25 מספרים מתוך הקבוצה $\{1, 2, 3, \dots, 150\}$. הוכח כי יש ב- A שני זוגות זרים (כקבוצות)זה לזה של מספרים, כך שסכום המספרים בזוג הראשון שווה לסכום המספרים בזוג השני.

שאלה מס׳ 6.

הוכח כי אפשר לתאר כל מספר רציונלי כשבר עשרוני מחזורי אינסופי.

שאלה מס' 7.

נתונות 6 נקודות במישור, שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד. מחברים כל שתי נקודות בקטע ישר. צובעים כל קטע באחד משני צבעים, לבן או כחול. הוכח כי בכל צביעה כזו נוצר לפחות משולש אחד שכל צלעותיו צבועות באותו צבע.

הערה: משולש כזה נקרא "משולש כרומטי".

שאלה מס' 8.

במישור נתונות 17 נקודות, שאף שלוש מהן אינן על ישר אחד. הקטעים המבחרים כל שתי נקודות נצבעו באופן כלשהו באחד משולשת הצבעים לבן, כחול או צהוב. הוכח הוכח שבמבנה שנתקבל יש לפחות משולש כרומטי אחד.

7. רקורסיה.

שאלה מס' 1.

נתון $f(n) = f(n-1) \cdot q$, $n > 1$

הוכח את הנוסחה: $f(n) = aq^{n-1}$.

שאלה מס' 2.

מהו מספר האפשרויות לפזר n כדורים זהים בתוך k תאים שונים, כך שבכל תא יהיו לפחות 2 כדורים ולכל היותר 4 כדורים?

שאלה מס' 3.

נתון $a_n = 2a_{n-1} + 5$, $a_0 = 1$. מצא ביטוי עבור a_n, והוכח את נכונותו.

שאלה מס' 4.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האפשרויות למתוח קו קרשים באורך n מטר מקרשים לבנים (כל אחד באורך 2 מטר), צהובים (כל אחד באורך 2 מטר)וירוקים (כל אחד באורך של מטר אחד).

שאלה מס' 5.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האזורים הנומרים במישור על-ידי n מעגלים צשכל אחד מהם נחתך עם כל אחד אחר, ואף שלושה מעגלים אינם נחתכים בנקודה אחת.

שאלה מס' 6.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר אפשרויות הבחירה של k עצמים מ- n סוגי עצמים, כאשר מותר לבחור מכל סוג מספר כלשהו של עצמים.

שאלה מס' 7.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שיש להן k זוגות של 1 – ים צמודים ואין להן אף זוג של 0 - ים צמודים.

(לדוגמה: עבור $n = 6$, $k = 3$: 111011 או 101111. עבור $n = 6$, $k = 2$: 110110 או 011011 וגם 101110).

שאלה מס' 8.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שאין בהן 2 אפסים סמוכים.

שאלה מס' 9.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האפשרויות a(n,k) לבחור k מספרים מ- n המספרים 1,2,3,...,n, כך שלא יבחרו שני מספרים עוקבים.

הוכח כי: $a(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$.

שאלה מס' 10.

מהו מספר הסדרות באורך n, הבנויות מהספרות 0, 1, 2, שאין בהן ספרות עוקבות שוות?

שאלה מס' 11.

מצא ביטוי מפורש עבור האיבר ה- n - י של סדרת פיבונצ'י.