

מבנה הבחינה :

בבחינה **שש** שאלות.

עליך לענות על **חמש** מתוך שש השאלות.

כל שאלה מזכה ב- 20 נקודות.

הנחיות :

כל תשובה תתחיל בעמוד **חדש**.

אין לכתוב בצבע אדום.

אין לכתוב בעיפרון.

שאלה 1

(10 נק') א. פתור את נוסחת הנסיגה (פתרון אסימפטוטי הדוק):

$$\begin{cases} T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

(10 נק') ב. נתון מערך $A[n]$ של מספרים ממשיים.

כתוב אלגוריתם המוצא בין כל ההפרשים $|A[i] - A[j]|$, $1 \leq i \neq j \leq n$, את השלישי הקטן ביותר. סיבוכיות האלגוריתם תהיה $O(n \cdot \lg n)$. הוכח.

שאלה 2

הצע מבנה נתונים המבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים:

$BUILD(S)$: בניית המבנה S מתוך סדרה של n מפתחות; זמן: $O(n)$;

$INSERT(S, z)$: הכנסת המפתח z לתוך המבנה S ; זמן: $O(\lg n)$;

$DEL-MIN-MAX(S)$: מחיקת האיבר המינימלי והאיבר המקסימלי מהמבנה S ; זמן: $O(\lg n)$;

$DEL-THIRDS(S)$: מחיקת ערך המיקום ה- $\lfloor n/3 \rfloor$ וערך המיקום ה- $\lceil 2n/3 \rceil$ מהמבנה S ;

זמן: $O(\lg n)$;

הערה: המבנה S יכול להיות מורכב ממבנים פשוטים יותר.

שאלה 3

(13 נק') א. נתונה סדרה של n תת-קטעים של $[0,1]$:

$$[a_i, b_i], \quad 0 \leq a_i < b_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ברצוננו להפוך את סדרת התת-קטעים לסדרה חדשה של תת-קטעים שיהיו זרים זה לזה; כל קטע חדש הוא איחוד של כמה תת-קטעים מקוריים.

כתוב אלגוריתם למציאת הקטעים החדשים; זמן הביצוע הנדרש: $O(n \cdot \lg n)$.

(7 נק') ב. פתור את נוסחת הנסיגה (פתרון אסימפטוטי הדוק):

$$\begin{cases} T(n) = 4T(n/2) + n + \lg n \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

שאלה 4

בהינתן $n < 2^m$ מספרים בעלי m סיביות, הראה כיצד ניתן למצוא מספר נוסף, השונה מכל המספרים הנתונים, בזמן $O(n)$. הנח שהשוואת שני מספרים בעלי m סיביות מתבצעת בזמן קבוע.

שאלה 5

הצע מבנה נתונים המבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים:

$BUILD(S)$: בניית המבנה מתוך סדרה של n מפתחות; זמן: $O(n \cdot \lg n)$;

$INSERT(S, z)$: הכנסת המפתח z לתוך המבנה S ; זמן: $O(\lg n)$;

$OLD(S, k)$: החזרה (ללא מחיקה) בסדר ממין, של k המפתחות שנכנסו הראשונים ל- S ; זמן: $O(\min(n, k \lg k))$;

$NEW(S, k)$: החזרה (ללא מחיקה) בסדר ממין, של k המפתחות שנכנסו האחרונים ל- S ; זמן: $O(\min(n, k \lg k))$.

הערה: המבנה S יכול להיות מורכב מכמה מבנים פשוטים יותר.

שאלה 6

נתון מונה בינרי בן k סיביות התומך בפעולת הקידום $INCREMENT$. ידוע שהעלות לשיעורין של פעולה זו היא $O(1)$.

(10 נק') א. הראה שאם מוסיפים למונה את פעולת הנסיגה $DECREMENT$ (חיסור 1), העלות לשיעורין של שתי הפעולות עלולה להגיע ל- $O(k)$.

(10 נק') ב. מה תהיה העלות לשיעורין של הפעולות בהנחה שהפעולה $DECREMENT$ מופעלת רק כאשר ערך המונה אי-זוגי? הוכח.

סוף!