בשאלות 1,2 סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף העמוד

בשאלות הנ"ל יתכן ויש כמה טענות נכונות או אין בכלל טענות נכונות או כל הטענות נכונות.

שאלה 1:

א. (3%) אם $x \in B \setminus A$ וכן $y \notin A$, אז $\{x, y\} \subseteq (B \oplus A)$

ב. (3%) אם $\{x, y\} \subseteq (B \oplus A)$, וכן $x \notin A$, אז $y \in B \setminus A$

ג. (3%) אם $\{C, D\} \subseteq P(B \oplus A)$ אז $(C \cap D) \subseteq B \oplus A$

ד. (3%) אם $P(B \oplus A) \neq \{\varnothing\}$ אז $(A \cup B) \neq \varnothing$

שאלה 2:

תהינה $A = \{1\},\ B = \{2,3\}$. נגדיר יחס R המוגדר מעל $A \times B$ באופן הבא: $R = \begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) \\ (1,3) & (1,2) \end{pmatrix}$

שאלה 2.1:

א. (3%) R רפלקסיבית.

ב. (3%) R סימטרית.

ג. (3%) R אנטיסימטרית.

ד. (3%) R טרנזיטיבית

שאלה 2.2: בהמשך לנתוני ההתחלה בשאלה, נגדיר רלציה T מעל $A \times B$ בצורה הבאה: $T = R \oplus I_{A \times B}$.

א. (3%) $|T| = 4$

ב. (3%) T רלצית שקילות, עם מחלקת שקילות 1.

ג. (3%) $I_{A \times B} \setminus T$ רלצית סדר חלקי.

ד. (3%) $T \setminus R = I_{A \times B}$

שאלה 3:

(14%) הוכח או הפרך את הטענה: $\overline{A} \cup (C \setminus B) \subseteq C \oplus (\overline{A} \cup \overline{B})$.

אם הטענה נכונה, הוכח אותה ע"י שימוש במושג השייכות של איברים (לא ע"י אלגברה של קבוצות ולא בדיאגראמות ון). אם הטענה לא נכונה, הבא דוגמא נגדית.

תשובה: יהי $x \in \overline{A} \cup (C \setminus B)$, אז מתקיים אחד בדיוק מהשלושה:

1. $x \in C \setminus B \quad x \in A$
2. $x \notin C \setminus B \quad x \notin A$
3. $x \in C \setminus B \quad x \notin A$

מהמקרה השלישי קל למצוא דוגמא נגדית – כי משמעותו היא $(x \in C \quad x \in \overline{A})$ ואז $x \notin C \oplus (\overline{A} \cup \overline{B})$.

נבנה דוגמא כזו בצורה פשוטה: $U = \{2,3,4\} \quad C = \{4\} \quad B = \{3\} \quad A = \{2\}$. כמובן ש-$4 \in \overline{A} \cup (C \setminus B)$, אבל $4 \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \quad 4 \in C$, לכן אינו בהפרש הסימטרי שלהם.

שאלה 4:

<u>סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף השאלה</u>

א. (5%) נתונות 20 נקודות במישור שאף 3 מהן אינן על אותו ישר. כל נקודה נצבעת באחד מ-9 צבעים. לאחר מכן מעבירים ישר דרך כל זוג נקודות. בהכרח יווצר משולש עם קודקודים בצבע זהה.

ב. (5%). מספר המחוברים הרציונליים בפיתוח של $\left(\sqrt[5]{3}+7\right)^{35}$ הינו 8.

ג. (5%) מקדם X^5 בפיתוח $\left(2X+3X^2+\frac{2}{X^2}\right)^5$ שווה לסכום כל המקדמים הבינומיים בפיתוח $(a+b)^5$.

ד. (5%) מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-1716 כפול ממספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-858.

שאלה 5:

א. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=49$ המקיימים: $i=1,2,3,4$, $8\le x_i\le 23$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: $D(4,17)-4D(4,1)$

ב. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=49$ המקיימים: $i=1,2,3,4$, $3i\le x_i\le 8i$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: מספר הפתרונות של הבעיה הנ"ל שווה למספר הפתרונות של הבעיה הבאה: $x_1+x_2+x_3+x_4=19$ המקיימים: $i=1,2,3,4$, $0\le x_i\le 5i$

נגדיר:

A_i - קבוצת כל הפתרונות בהם $x_i\ge 5i+1$ (כמובן ש-A_4 ריקה, וכך גם חיתוכיה עם כל הקבוצות האחרות).

בחיתוכי 2 קבוצות – רק $A_1\cap A_2$ לא ריקה.

בסה"כ רצוננו ב- $\left|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4\right|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4=|U|-S_1+S_2$

$$|U|=D(4,19)$$

$$S_1=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|=D(4,13)+D(4,8)+D(4,3)+0$$

$$S_2=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_3\cap A_2|+|A_4\cap A_2|+|A_3\cap A_4|=D(4,2)+0+0+0+0+0$$

ונקבל $\left|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4\right|=D(4,19)-[D(4,13)+D(4,8)+D(4,3)]+D(4,2)$

שאלה 6:

א. (8%) נתונות n משפחות בנות 4 נפשות (גבר, אשה, ילד וילדה). מעוניינים לסדר מחדש את המשפחות (כל משפחה תכיל גבר, אשה, ילד וילדה), כך שבסידור החדש כל גבר יהיה עם הילד שלו, וכל אשה תהיה עם הילדה שלה, אבל לא נקבל אף זוג נשוי. מצא יחס רקורסיה למספר האפשרויות לסידור מחדש כמתואר. (קבע בנוסף תנאי התחלה).

תשובה: זו דוגמא לאי-סדר מלא (כל גבר עם בנו הוא אובייקט אחד, וכל אשה ובת היא אובייקט אחד משלים, שלא יותאם לבני המשפחה האחרים): הדרך לחשוב על הנוסחא – ניקח אובייקט זכרי כלשהו (נסמנו ב-1), ולאובייקט זה יכולים להתאים את כל $(n-1)$ האובייקטים הנקביים האחרים. כעת יתכנו 2 אפשרויות:

1. האובייקט הנקבי j הותאם לאובייקט הזכרי 1, וגם להיפך (האובייקט הנקבי 1 הותאם לאובייקט הזכרי j) כלומר התבצעו חילופי זוגות. נותרנו עם $(n-2)$ זוגות שיכולים להסתדר ב-$f(n-2)$ אפשרויות.

2. 1. האובייקט הנקבי j הותאם לאובייקט הזכרי 1, אבל לא להיפך (האובייקט הנקבי 1 לא הותאם לאובייקט הזכרי j). מספר האפשרויות שזה יקרה הוא כמספר האפשרויות לסדר $(n-1)$ אובייקטים לא במקומם (כי במקרה זה האובייקט הנקבי 1 לא מותאם לאובייקט הזכרי j) נותרנו עם $(n-1)$ זוגות שיכולים להסתדר ב-$f(n-1)$ אפשרויות. בסה"כ $f(n)=(n-1)[f(n-1)+f(n-2)]$, כאשר $f(2)=1 \quad f(1)=0$.

ב. (8%) פתור יחס רקורסיבי: $a_n=-a_{n-1}+30a_{n-2}, \quad a_0=5, \quad a_1=3$

תשובה: זהו יחס רקורסיבי לינארי: מפתרון $\alpha^2+\alpha-30=0$, נקבל $\alpha_2=-6 \quad \alpha_1=5$. מכאן נקבל $f(n)=A\cdot 5^n+B\cdot(-6)^n$, ומתנאי ההתחלה נקבל $B=2 \quad A=3$, $f(n)=3\cdot 5^n+2\cdot(-6)^n$.