שאלה 1.1

בכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבע אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיימו.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\varnothing \;;\; \{\varnothing\}$ ב. $\{1\} \;;\; \{\{1\}\}$

ג. $\{1\} \;;\; \{\varnothing, \{1\}\}$ ד. $\varnothing \;;\; \{\varnothing, \{1\}\}$

ה. $\{\{1\}\} \;;\; \{\varnothing, \{1\}\}$ ו. $\{\{\varnothing\}\} \;;\; \{\varnothing, \{1\}\}$

ז. $\varnothing \;;\; P(\{1\})$ ח. $P(\varnothing) \;;\; P(\{\varnothing\})$

תשובה 1.1

א. שניהם. ב. $x \in y$ ג. $x \in y$ ד. שניהם

ה. $x \subseteq y$ ו. אף אחד מהם ז. שניהם ח. שניהם.

שאלה 1.2

נתונות הקבוצות:

$$A_1 = \varnothing \quad A_2 = \{\varnothing\} \quad A_3 = \{\text{David}, \varnothing\} \quad A_4 = \{A_2, A_3\}$$

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מצא את כל ערכי i,j $(1 \le i, j \le 4)$

עבורם מתקיים התנאי הנתון באותו סעיף. **בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק**.

א. $A_i \subseteq A_j$

ב. $A_i \in A_j$

ג. A_i הוא איבר של איבר של A_j (ציין גם את "איבר הביניים")

ד. $A_i \cap A_j = \phi$

ה. $A_i \cap A_j = A_2$

תשובה 1.2

א. כל קבוצה חלקית לעצמה. A_1 חלקית לכולן. $A_2 \subseteq A_3$.

שימו לב ש- A_2 ו- A_3 **אינן** חלקיות ל- A_4.

ב. $A_1 \in A_2$, $A_1 \in A_3$, $A_2 \in A_4$, $A_3 \in A_4$. שימו לב למשל ש- $A_2 \notin A_3$.

ג. A_1 היא איבר של איבר של A_4. "איבר הביניים" יכול להיות A_2, ויכול להיות A_3.

ד. בקבוצות הנתונות, $A_i \cap A_j = \varnothing$ עבור **כל** $i \ne j$, **פרט** ל- $A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_2 = \{\varnothing\}$.

בנוסף כמובן $A_1 \cap A_1 = \varnothing$.

ה. $A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_2 = A_2 \cap A_2 = A_2$.

שאלה 1.3

בכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבע אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\{\varnothing\}\ ;\ \{\varnothing\}$

ב. $\varnothing\ ;\ \{\{\varnothing\}\}$

ג. $\varnothing\ ;\ \{\varnothing,\ \{1\}\}$

ד. $\{\varnothing\}\ ;\ \{\varnothing,\{1\}\}$

ה. $\{\{1\}\}\ ;\ \{\varnothing,\ \{1\}\}$

ו. $\{\{\varnothing\}\}\ ;\ \{\varnothing,\{1\}\}$

ז. $\{\varnothing\}\ ;\ P(\{1\})$

ח. $P(\varnothing)\ ;\ P(P(\varnothing))$

תשובה 1.3

א. $x \subseteq y$ ב. $x \subseteq y$ ג. שניהם. ד. $x \subseteq y$

ה. $x \subseteq y$ ו. אף אחד ז. $x \subseteq y$ ח. שניהם.

שאלה 1.4

תהיינה: $X = \varnothing$, $Y = \{\varnothing\,,\mathbf{foo}\}$, $Z = \{\varnothing\,,\{\varnothing\}\}$ (**foo** הוא עצם כלשהו שאינו קבוצה).

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X \cup Y = Y$

ב. $\{X\} \in Y$

ג. $Y \cap Z = X$

ד. $\{X\} \cup Y = Y$

ה. $X \cup \{Y\} = Y$

ו. $|\,X \cup Y \cup Z\,| = 4$

ז. $Z \subseteq P(Y)$

ח. $Y \in P(Y)$

תשובה 1.4

א. נכון ב. לא נכון ג. לא נכון

ד. נכון ה. לא נכון ו. לא נכון

ז. נכון ח. נכון

שאלה 2.1

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך - הבא דוגמא נגדית.
לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת.

א. אם $A-B=C$ אז $A-C=B$.

ב. אם $A\subseteq B$ אז $A-B=\varnothing$.

ג. אם $A-B=\varnothing$ אז $A\subseteq B$.

ד. אם $A\subseteq B$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

תשובה 2.1

א. לא נכון. דוגמא נגדית: $C=\varnothing$, $B=\{1,2\}$, $A=\{1\}$ (השלימו).

למען העניין, דוגמא נגדית נוספת: $A=C=\varnothing$, B קבוצה לא-ריקה כלשהי.

ב. נכון.

הוכחה: נניח בשלילה ש- $A-B$ אינה ריקה. יהי אפוא $x\in A-B$.

כלומר, לפי הגדרת הפרש, $x\in A$, $x\notin B$.

אך נתון $A\subseteq B$, כלומר מהגדרת קבוצה חלקית, כל איבר של A הוא איבר של B.

סתירה למה שהראינו על x. לכן לא קיים x כאמור למעלה, משמע $A-B$ ריקה.

ג. נכון. נניח בשלילה ש- A **אינה** חלקית ל- B. כלומר קיים $x\in A$ כך ש- $x\notin B$.

משמע $x\in A-B$. לכן $A-B\neq\varnothing$.

ד. נכון. תהי $X\in P(A)$. משמע $X\subseteq A$. נתון כי $A\subseteq B$.

משני אלה ומטרנזיטיביות ההכלה נקבל $X\subseteq B$.

כלומר $X\in P(B)$. הראינו שכל איבר של $P(A)$ הוא איבר של $P(B)$, לכן $P(A)\subseteq P(B)$.

שאלה 2.2

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **"אלגברה של קבוצות"**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר" !

א. $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

ב. $(A-B)\cup(B-C)=(A\cup(B-C))-(B\cap C)$

ג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

תשובה 2.2

א. מהגדרת $\oplus$, $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

נבחר U המכילה את A,B ונרשום $=(A\cap B')\cup(B\cap A')$

בעזרת דיסטריבוטיביות החיתוך מעל האיחוד $=(A\cup B)\cap(A\cup A')\cap(B'\cup B)\cap(B'\cup A')$

לפי טענה כי $A\cup A'=B\cup B'=U$.

וכעת ניתן לזרוק את U מהחיתוך.

נקבל בהמשך לשוויון המקורי, $= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$

בעזרת כלל דה-מורגן $= (A \cup B) \cap (B \cap A)'$

ולבסוף, $= (A \cup B) - (B \cap A)$

ב. $(A - B) \cup (B - C) = (A \cap B') \cup (B \cap C')$

מכאן בעזרת שימוש חוזר בפילוג של האיחוד מעל החיתוך:

$= (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup C')$

נזרוק את $B' \cup B$ (נימוק ר' בצעד דומה בהוכחת סעיף א' למעלה):

$= (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup C')$

שימוש בכלל דה-מורגן בגורם הימני, וכינוס שני האיברים השמאליים בעזרת חוק הפילוג:

$= (A \cup (B \cap C')) \cap (B \cap C)'$

$= (A \cup (B - C)) - (B \cap C)$

ג. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap B') \cap (C \cap D')$

בעזרת קיבוץ (אסוציאטיביות) וחילוף החיתוך: $= (A \cap C) \cap (B' \cap D')$

ולפי כלל דה-מורגן: $= (A \cap C) \cap (B \cup D)'$

$= (A \cap C) - (B \cup D)$

שאלה 2.3

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך - הבא דוגמא נגדית.
לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת.

א. אם $A \cup B = C$ אז $C - A = B$.

ב. אם $C - A = B$ אז $A \cup B = C$.

ג. אם עבור קבוצות מסוימות A,B,X,Y מתקיים:

$A \cup X = A \cup Y$ ו- $B \cap X = B \cap Y$ אז $X = Y$.

ד. אם $A \subseteq B$ אז $P(A) \subseteq P(B)$.

ה. אם $C - A = B$ ו- $A \subseteq C$ אז $A \cup B = C$.

תשובה 2.3

א. לא נכון. דוגמא נגדית: $A = B = C = \{1\}$ (או קבוצה **לא ריקה** אחרת כלשהי).

ב. לא נכון. דוגמא נגדית: $A = \{1\}$ (או קבוצה **לא ריקה** אחרת כלשהי), $B = C = \varnothing$.

ג. לא נכון. דוגמא נגדית: $A = \{1\}$, $B = \{3\}$, $X = \{2\}$, $Y = \{1,2\}$.

בכל אחת מהדוגמאות הללו, השלימו בעצמכם את הבדיקה שזו אכן דוגמא נגדית.

ד. נכון. תהי $X \in P(A)$. משמע $X \subseteq A$. נתון כי $A \subseteq B$.

משני אלה ומטרנזיטיביות נקבל $X \subseteq B$.

כלומר $X \in P(B)$.

הראינו שכל איבר של $P(A)$ הוא איבר של $P(B)$, לכן $P(A) \subseteq P(B)$.

ה. נכון. הוכחה: מהנתון, $A \cup B = A \cup (C - A)$.

$A \cup (C - A) = A \cup C$. מכיוון ש- $A \subseteq C$, נקבל $A \cup C = C$.

בסה"כ קיבלנו $A \cup B = C$ כמבוקש.

שאלה 2.4

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.
לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת.

א. אם $A \cap B = \varnothing$ אז $A - B = A$.

ב. $A \subseteq P(A)$.

ג. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

תשובה 2.4

א. נכון. נוכיח: $A - B$ היא קבוצת כל אברי A שאינם שייכים ל- B. לכן כללית $A - B \subseteq A$.
מצד שני, נתון $A \cap B = \varnothing$, כלומר אין ל- A איברים משותפים עם B. לכן אם $x \in A$ אז הוא אינו ב- B, כלומר $x \in A - B$. לכן $A \subseteq A - B$. משתי ההכלות יחד, $A - B = A$.

ב. לא נכון. דוגמא נגדית: נקח $x \neq \varnothing$ כלשהו, ותהי $A = \{x\}$. אז $P(A) = \{\varnothing, A\}$.
כעת $x \in A$, אבל $x \notin P(A)$ (כי $x \neq \varnothing$ ו- $x \neq \{x\}$). הראינו איבר של A שאינו ב- $P(A)$,
לכן A אינה חלקית ל- $P(A)$.

ג. נכון. התנאי $X \in P(A \cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי $X \subseteq A \cap B$.
$X \subseteq A$ וגם $X \subseteq B$.
שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה שקול ל- $X \in P(A)$ וגם $X \in P(B)$.
ומהגדרת חיתוך, זה שקול ל- $X \in P(A) \cap P(B)$.
קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אסם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$,
ולכן שתי הקבוצות שוות.

שאלה 3.1

הוכח את הטענות א׳-ד׳. U היא קבוצה אוניברסלית, המכילה את כל הקבוצות שבשאלה.

שים לב: **בטענות ״אם ורק אם״ יש להוכיח שני כיוונים**.

א. כלל הצמצום: אם $X \oplus A = Y \oplus A$ אז $X = Y$.

הדרכה: היעזר באסוציאטיביות של $\oplus$ ובתכונות אחרות שלה.

ב. $A \oplus B = \varnothing$ אם ורק אם $A = B$.

ג. $A \oplus B = U$ אם ורק אם $A = B'$.

ד. $A \oplus B = A$ אם ורק אם $B = \varnothing$.

תשובה 3.1

א. נניח $X \oplus A = Y \oplus A$. נבצע בשני האגפים הפרש סימטרי עם A:

$$(X \oplus A) \oplus A = (Y \oplus A) \oplus A$$

לפי אסוציאטיביות נקבל $X \oplus (A \oplus A) = Y \oplus (A \oplus A)$

בנוסף $A \oplus A = \varnothing$, ולכן קיבלנו: $X \oplus \varnothing = Y \oplus \varnothing$

לכן $X = Y$.

ב. כיוון אחד (אם $A = B$) מיידי: $A \oplus A = \varnothing$.

כיוון שני: אם $A \oplus B = \varnothing$ משמע $A \oplus B = A \oplus A$ (כי כאמור $A \oplus A = \varnothing$).

מכאן לפי כלל הצמצום משמאל שהוכחנו למעלה בסעיף א׳: $B = A$.

ג. אם $A = B'$, הוכחנו כבר את כיוון 1.

כיוון שני: נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיף ב׳:

נניח $A \oplus B = U$. כאמור בכיוון הראשון של סעיף זה, $A \oplus A' = U$.

לכן $A \oplus B = A \oplus A'$. לפי כלל הצמצום מסעיף א׳: $B = A'$.

ד. כיוון אחד: אם $B = \varnothing$ אז $A \oplus B = A$. כיוון שני: נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיפים ב, ג.

שאלה 3.2

הוכח את הטענות הבאות בעזרת ***״אלגברה של קבוצות״***: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג ״איבר״. ציין את הזהויות עליהן אתה מסתמך.

א. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

ב. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \oplus B)$

ג. $(A\cup B)\cap(A\cup B')=A$. הדרכה: השתמש בחוק הפילוג לא כדי לפלג, אלא בכיוון ההפוך - לצרף את הגורמים.

תשובה 3.2

א. מהגדרת $\oplus$,

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

לפי ההדרכה לשאלה, נבחר U המכילה את A,B ונרשום

$$=(A\cap B')\cup(B\cap A')$$

בעזרת דיסטריבוטיביות החיתוך מעל האיחוד

$$=(A\cup B)\cap(A\cup A')\cap(B'\cup B)\cap(B'\cup A')$$

$A\cup A'=B\cup B'=U$.

ניתן לזרוק את U מהחיתוך. נקבל בהמשך לשוויון המקורי,

$$=(A\cup B)\cap(B'\cup A')$$

לפי כלל דה-מורגן,

$$=(A\cup B)\cap(B\cap A)'$$

ולבסוף, שוב לפי ההדרכה לשאלה

$$=(A\cup B)-(B\cap A)$$

ב. בסעיף הקודם הראינו כי $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$.

ידוע כי $A\cap B\subseteq A\cup B$. משני אלה, נובע המבוקש.

ג. לפי חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות) של החיתוך מעל האיחוד:

$$(A\cup B)\cap(A\cup B')=A\cup(B\cap B')$$

כאן השתמשנו בחוק הפילוג כדי לכנס איברים, לא כדי לפלג.

$B\cap B'=\varnothing$. נציב זאת ונקבל $A\cup\varnothing$. $A\cup\varnothing=A$. קיבלנו כמבוקש $(A\cup B)\cap(A\cup B')=A$.

שאלה 3.3

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **"אלגברה של קבוצות"**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר".

א. $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ב. $(A\cap B)\cup(A\cap B')=A$

ג. $(A\oplus B)\oplus(B\oplus C)=A\oplus C$

תשובה 3.3

א.

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$$

פילוג החיתוך מעל האיחוד

$= (A \cap C') \cup (B \cap C')$

$= (A - C) \cup (B - C)$

ב. לפי חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות) של האיחוד מעל החיתוך:

$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$

כאן השתמשנו בחוק הפילוג כדי לכנס איברים, לא כדי לפלג.

$B \cup B' = U$. נציב זאת ונקבל $A \cap U$.

מובן ש- $A \cap U = A$ (הנחנו ש- U מכילה את כל הקבוצות שבדיון. בנוסף, אם $A \subseteq U$ אז $A \cap U = A$.

קיבלנו כמבוקש $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

ג. ניעזר בתכונות של הפרש סימטרי.

מאסוציאטיביות:

$(A \oplus B) \oplus (B \oplus C) = A \oplus (B \oplus (B \oplus C))$

ושוב אסוציאטיביות:

$= A \oplus ((B \oplus B) \oplus C))$

$= A \oplus (\varnothing \oplus C)) = A \oplus C$

שאלה 4.1

N היא קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots,\}$.

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid n \le x \le 2n-1\}$ ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

א. מהי A_0?

ב. חשב את $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ (הוכח את תשובתך).

ג. מצא את הקבוצות B_0, B_1.

ד. רשום ביטוי מפורש (בדומה להגדרת A_n בפתח התרגיל) עבור B_n ($n \ge 2$).

ה. חשב את $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n$.

תשובה 4.1

א. $A_0 = \{x \mid 0 \le x \le -1\} = \varnothing$

ב. נוכיח כי $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = \mathbf{N} - \{0\}$:

קל לראות כי לכל n, A_n היא קבוצה של מספרים טבעיים השונים מאפס.

לכן $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \subseteq \mathbf{N} - \{0\}$.

נראה גם הכלה הפוכה ובכך נוכיח שוויון. יהי אפוא $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. אז $1 \le n$.

נראה כי $n \in A_n$ (ולכן הוא שייך לאיחוד הנ"ל):

$x \in A_n$ אםם $n \le x \le 2n-1$. נבדוק את הערך $x = n$. ודאי $n \le n$. מצד שני, $n \le 2n-1$ מתקיים אםם $n+1 \le 2n$, כלומר אםם $1 \le n$. תנאי זה כאמור מתקיים לפי הנחתנו. בכך הראינו את ההכלה השניה ולכן הקבוצות שוות.

ג. $B_0 = A_1 = \{1\}$. $B_1 = A_2 - A_1 = \{2,3\} - \{1\} = \{2,3\}$.

ד.

$$B_n = \left\{x \in \mathbf{N} \mid n+1 \le x \le 2n+1\right\} - \left\{x \in \mathbf{N} \mid n \le x \le 2n-1\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbf{N} \mid n+1 \le x \le 2n+1\right\} \cap \left\{x \in \mathbf{N} \mid n \le x \le 2n-1\right\}'$$

$$= \left\{x \in \mathbf{N} \mid n+1 \le x \le 2n+1\right\} \cap \left(\left\{x \in \mathbf{N} \mid x < n\right\} \cup \left\{x \in \mathbf{N} \mid 2n-1 < x\right\}\right)$$

ניעזר בפילוג. אחד התנאים נופל (נותן תרומה $\varnothing$ לאיחוד) ונקבל:

$$= \left\{x \in \mathbf{N} \mid n+1 \le x \le 2n+1\right\} \cap \left\{x \in \mathbf{N} \mid 2n-1 < x\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbf{N} \mid 2n-1 < x \le 2n+1\right\} = \{2n, 2n+1\}$$

נפטרנו מאחד התנאים בעזרת העובדה שעבור $2 \le n$, $n+1 \le 2n-1$.

ה. האיחוד המבוקש הוא קבוצה של מספרים טבעיים. קל לראות ש- 0 אינו נמצא באיחוד.

נראה כי כל מספר טבעי אחר, m, נמצא באיחוד הנ"ל, ולכן האיחוד הוא $\mathbf{N} - \{0\}$:

עבור $m = 1,2,3$ ראינו זאת בסעיף ג.

אם $4 \le m$ והוא זוגי, אז $m = 2n$ כאשר $2 \le n$, ולפי תוצאת סעיף ד, $m \in B_n$.

אם $4 \le m$ והוא אי-זוגי, אז $m = 2n+1$ כאשר $2 \le n$, ושוב לפי תוצאת סעיף ד, $m \in B_n$.

בכל מקרה, קיבלנו כי m נמצא באחד ה- B_n-ים, ולכן הוא שייך לאיחוד שלהם.

שאלה 4.2

תהי $\mathbf{N}^+$ קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0. לכל $n \in \mathbf{N}^+$ נגדיר קבוצה:

$$B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^+\}$$

(קבוצת כל המספרים שצורתם $n \cdot k$, כאשר $k \in \mathbf{N}^+$).

א. הוכח כי $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$ כאשר $c(n,m)$ הוא הכפולה המשותפת המינימלית של n, m (המספר הטבעי החיובי הקטן ביותר המתחלק ללא שארית ב- n וב- m). **הדרכה**: ניתן להסתמך על הטענה כי כל כפולה משותפת של m, n מתחלקת בכפולה המשותפת המינימלית שלהן.

ב. הסבר מדוע $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n = \varnothing$.

ג. לכל $n \geq 2$ נסמן $D_n = B_n - \bigcup_{1<i<n} B_i$ (בפרט: $D_2 = B_2$, $D_3 = B_3 - B_2$).

עבור איזה ערכים של n קיים: $D_n \neq \varnothing$? כלומר מצא את $\{n \in \mathbf{N}^* \mid D_n \neq \varnothing\}$.

אל תשכח להראות שתשובתך כוללת את **כל** הערכים המקיימים זאת ("הכלה דו-כיוונית").

תשובה 4.2

א. $B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^+\}$, משמע B_n היא קבוצת כל הכפולות של n.

$B_n \cap B_m$ היא אפוא קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0, והמתחלקים הן ב- n והן ב- m:

$B_n \cap B_m = \{nk \mid k \in \mathbf{N}^+\} \cap \{ms \mid s \in \mathbf{N}^+\}$.

מכאן, לפי הטענה שבהדרכה, נובע שכל אבר של $B_n \cap B_m$ מתחלק ב $c(n,m)$. משמע:

$B_n \cap B_m \subseteq B_{c(n,m)}$.

מצד שני, כל אבר של $B_{c(n,m)}$ מתחלק ב- $c(n,m)$, ולכן ודאי מתחלק הן ב- n והן ב- m. לפיכך

$B_{c(n,m)} \subseteq B_n \cap B_m$.

משתי ההכלות: $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$.

את הטענה שבהדרכה (כל כפולה משותפת של n, m מתחלקת בכפולה המשותפת המינימלית שלהם) ניתן להוכיח למשל בעזרת פירוק של n, m לגורמים ראשוניים, ובניית $c(n,m)$ מתוך פירוק זה. נושא זה אינו מענייננו בקורס הנוכחי.

ב. נראה כי לכל $m \in \mathbf{N}^+$, m **אינו** שייך לחיתוך הנ"ל. יהי $m \in \mathbf{N}^+$.

מהגדרת B_m, כל אברי B_m גדולים או שווים m. מובן אפוא כי $m \notin B_{m+1}$.

לפיכך m אינו שייך לחיתוך כל ה- B_n-ים.

ג. יהי $n \in \mathbf{N}^+$. אם קיימים $m,k \in \mathbf{N}^+$ כך ש- $n = km$ אז מובן כי $B_n \subseteq B_m$.

אם $1 < m < n$ אז מכך ש- $B_n \subseteq B_m$ ומהגדרת D_n נקבל כי $D_n = \phi$.

לפיכך D_n ריקה עבור כל n המתחלק במספר טבעי השונה מ- 1 ומ- n,

כלומר עבור כל n שאינו ראשוני.

מצד שני, נראה כי אם n ראשוני, אז D_n אינה ריקה:

אם n ראשוני, אז לכל m טבעי המקיים $1 < m < n$, n אינו מתחלק ב- m, ולכן $n \notin B_m$.

מצד שני, תמיד $n \in B_n$. מהגדרת D_n נקבל אפוא $n \in D_n$, ולכן D_n אינה ריקה.

הראינו אפוא שקבוצת ערכי n עבורם $D_n \neq \varnothing$ היא קבוצת המספרים הראשוניים.

שאלה 4.3

נסמן ב- $\mathbf{N}^+$ את קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מאפס.

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל $n \in \mathbf{N}^+$, תהי $A_n = \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2 + \frac{1}{n} \le x \le 2n\right\}$.

למשל $A_2 = \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2.5 \le x \le 4\right\}$.

א. חשב את A_1 ואת $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} A_n$.

ב. חשב את $\bigcap_{1<n \in \mathbf{N}^*} A_n$.

ג. חשב את $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A_n$.

ד. לכל $n \in \mathbf{N}^+$, נסמן $B_n = A_{n+1} - A_n$. הראה כי יש רק ערך אחד של n עבורו B_n היא קטע. הראה כי לכל n אחר, B_n היא איחוד של שני קטעים זרים. ציין מיהם הקטעים. **הערה**: **קטע ב-** $\mathbf{R}$ הוא קבוצה מהצורה $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, או קבוצה המתקבלת מביטוי זה ע״י החלפת אחד או שני סימני $<$ בסימן $\le$.

למשל, לכל $n \in \mathbf{N}^+$, הקבוצה A_n שהוגדרה למעלה היא קטע.

תשובה 4.3

א. נשים לב ש- $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 \le x \le 2\} = \varnothing$. לכן גם החיתוך המבוקש שווה $\varnothing$.

ב. לכל $n \in \mathbf{N}^+$ מתקיים: $2 + \frac{1}{n+1} < 2 + \frac{1}{n}$ ו- $2n < 2(n+1)$.

מכאן ומהגדרת A_n, לכל $n \in \mathbf{N}^+$ מתקיים: $A_n \subseteq A_{n+1}$.

החיתוך המבוקש בשאלה הוא קבוצת המספרים הממשיים השייכים לכל הקבוצות A_n החל מ- $n = 2$. מכיוון שבסדרת הקבוצות A_n, כל קבוצה מוכלת בקבוצה הבאה אחריה, הרי ש- A_2 מוכלת בכולן. לכן החיתוך של כולן (החל מ- A_2 והלאה) שווה A_2,

כלומר $\left\{x \in \mathbf{R} \mid 2.5 \le x \le 4\right\}$.

ג. מהגדרת A_n, אם $x \in A_n$ אז $2 < x$. מצד שני, לכל $x > 2$ קיים n טבעי די גדול, שעבורו $1/n < x - 2$ וגם $x < 2n$. עבור אותו n, $x \in A_n$.

לפיכך $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x\}$.

ד. ראשית, כאמור, $A_1 = \varnothing$ ולכן $B_1 = A_2 - \varnothing = A_2$. קבוצה זו היא, כאמור בשאלה, קטע.

יהי כעת $n > 1$.

$$B_n = \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2+\frac{1}{n+1} \le x \le 2n+2\right\} - \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2+\frac{1}{n} \le x \le 2n\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2+\frac{1}{n+1} \le x \le 2n+2\right\} \cap \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2+\frac{1}{n} \le x \le 2n\right\}'$$

$$= \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2+\frac{1}{n+1} \le x \le 2n+2\right\} \cap \left(\left\{x \in \mathbf{R} \mid x < 2+\frac{1}{n}\right\} \cup \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2n < x\right\}\right)$$

$$= \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2+\frac{1}{n+1} \le x < 2+\frac{1}{n}\right\} \cup \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2n < x \le 2n+2\right\}$$

(במעבר האחרון נפטרנו מאחד התנאים בעזרת העובדה שעבור $n > 1$, $2+\frac{1}{n+1} < 2n$).

כל אחת משתי הקבוצות באיחוד זה היא קטע. אך עבור $n > 1$, $2+\frac{1}{n} < 2n$, ולכן כל נקודות הקטע השמאלי קטנות ממש מכל נקודות הקטע הימני, כלומר הקבוצה היא איחוד שני קטעים זרים, ומובן שקבוצה כזו אינה קטע.

שאלה 4.4

לכל $n \in N$, תהי $A_n = \{x \in N \mid n-1 \le x \le 2(n-1)\}$ ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

א. מהי A_0 ?

ב. חשב את $\bigcup_{n \in N} A_n$ (הוכח את תשובתך).

ג. מצא את הקבוצות B_0, B_1, B_2, B_3, B_4.

ד. חשב את $\bigcup_{n \in K} B_n$ כאשר $K = \{0,1,2,3,4\}$.

תשובה 4.4

א. $A_0 = \{x \mid -1 \le x \le -2\} = \varnothing$.

ב. נוכיח כי $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = N$:

הכלה בכיוון אחד: יהי $m \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$. כלומר, מהגדרת איחוד כללי, m שייך לפחות לאחת הקבוצות A_n. מהגדרת A_n, $A_n \subseteq N$. לכן $m \in N$.

הכלה בכיוון שני: יהי $m \in N$. כדי להראות ש- $m \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ עלינו להראות ש- m שייך לפחות לאחת הקבוצות A_n. כלומר עלינו למצוא n טבעי כך ש- $n-1 \le m \le 2(n-1)$.

זה מתקיים עבור $n = m + 1$, כי לכל m טבעי מתקיים $m \le m \le 2m$.

מצאנו n כך ש- $m \in A_n$, לכן $m \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

הראינו הכלה בשני הכיוונים, לכן $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \mathbb{N}$.

ג. נחשב:

$A_0 = \varnothing$, $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1,2\}$, $A_3 = \{2,3,4\}$, $A_4 = \{3,4,5,6\}$, $A_5 = \{4,5,6,7,8\}$

לכן:

$B_0 = A_1 - A_0 = A_1 - \varnothing = \{0\}$,

$B_1 = A_2 - A_1 = \{1,2\} - \{0\} = \{1,2\}$,

$B_2 = A_3 - A_2 = \{2,3,4\} - \{1,2\} = \{3,4\}$,

$B_3 = A_4 - A_3 = \{3,4,5,6\} - \{2,3,4\} = \{5,6\}$.

$B_4 = A_5 - A_4 = \{4,5,6,7,8\} - \{3,4,5,6\} = \{7,8\}$

ד. זהו איחוד 5 הקבוצות שמצאנו בסעיף הקודם, והוא שווה $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

כלומר $\{n \in N \mid 0 \le n \le 8\}$.