

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

- תהי $A = \{1, 2, 3\}$. תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל A .
תהי $t: M \rightarrow M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הטרנזיטיבי שלו.
(8 נק') א. הוכח או הפרך: לכל $R, S \in M$, אם $t(R) \subseteq t(S)$ אז $R \subseteq S$.
(8 נק') ב. הוכח או הפרך: לכל $R \in M$, $t(R^2) = (t(R))^2$.
(9 נק') ג. הוכח (!): $t(R^{-1}) = (t(R))^{-1}$.

שאלה 2

- נתבונן בסדרות אינסופיות של מספרים טבעיים:
סדרות מהצורה (a_0, a_1, a_2, \dots) , כאשר לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.
סדרה נקראת **מחזורית** אם היא בנויה מסדרה סופית שחוזרת על עצמה.
דוגמאות: הסדרה $(7, 7, 7, 7, \dots)$ היא מחזורית.
הסדרה $(1, 7, 5, 5, 1, 7, 5, 5, \dots)$ היא מחזורית.
הסדרה $(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$ אינה מחזורית.
תהי K קבוצת הסדרות האינסופיות ה**מחזוריות** של מספרים טבעיים.
מהי עוצמת K ? הוכיחו.
אם אתם בונים התאמה חד-חד-ערכית כלשהי, הקפידו לוודא ולהוכיח שהיא אכן חד-חד-ערכית.

שאלה 3

- תהי A קבוצת המחרוזות באורך 5, הבנויות בעזרת האותיות a, b, c, d, e, f (במחרוזות באורך 5 כמובן לא יכולות להופיע כל 6 האותיות). למשל $aaef \in A$.
נגדיר יחס שקילות מעל A :
שתי מחרוזות ייקראו שקולות אם הן שוות, או נבדלות רק בסדר האותיות.
למשל $aaeeb$ שקולה ל- $aeaeab$, אך אינה שקולה ל- $aaaeb$.
סעיפים ב, ג, ד עוסקים ביחס השקילות הזה. אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.
(4 נק') א. כמה איברים יש ב- A ?
(7 נק') ב. כמה מחלקות שקילות יש? תני תשובה סופית מספרית.
(7 נק') ג. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aaabb$? הוכיחי.
(7 נק') ד. מצאי מחלקת שקילות שיש בה בדיוק 60 איברים. רשמי איבר אחד מתוך המחלקה, אין צורך לרשום את כל אברי המחלקה. הוכיחי שגודל המחלקה שהבאת הוא 60.

שאלה 4

לקראת האביב, שוב יש במכולת השכונתית מבצע: 20 ארטיקים בהנחה. כרגיל יש במכולת ארטיקים ב-4 טעמים. הפעם יש במכולת 50 ארטיקים בטעם לימון, 20 ארטיקים בטעם אננס, 8 ארטיקים בטעם קולה ו-8 ארטיקים בטעם אבטיח. בכמה דרכים יכול יוסי לבחור 20 ארטיקים? אין חשיבות לסדר הבחירה, וארטיקים בעלי אותו טעם נחשבים זהים. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית.**

הדרכה:

- (i) אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרכים אחרות.
(ii) למרות שיש במכולת כמות סופית של ארטיקים מכל טעם, בחירה של חלק מהטעמים הנתונים שקולה לבחירה מתוך כמות לא מוגבלת, בשל נתוני השאלה.

שאלה 5

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים x_1, x_2, \dots , סימן פרדיקט דו-מקומי R , סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 המתפרש כרגיל כשוויון וסימני הכמתים \forall, \exists . אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים. תהי J אינטרפרטציה של L לעולם $P(N)$. הסימן R מתפרש ב- J כיחס ההכלה: $R(x_1, x_2)$ פירושו $x_1 \subseteq x_2$. בכל אחד מהסעיפים הבאים, רשום תבנית בשפה L , שהפירוש שלה ב- J הוא מה שנאמר בסעיף. כתיב מקוצר מותר.

(5 נק') א. x_1 היא הקבוצה הריקה.

אפשר לסמן תבנית זו בקיצור $\psi(x_1)$ ולהיעזר בה בסעיפים הבאים.

(10 נק') ב. ב- x_2 יש בדיוק איבר אחד.

(10 נק') ג. x_1, x_2 זרות זו לזו (אין להן איברים משותפים).

מהצחח!