2. תמורות וחליפות.

שאלה מס' 1.

בכיתה 30 תלמידים. יש לבחור ועד המורכב מ- 3 תלמידים, אחד הוא יו"ר, שני גזבר ושלישי מזכיר. כמה ועדים כאלה ניתן לבחור?

תשובה:

$$P(30,3)=30\cdot 29\cdot 28=24360$$

שאלה מס' 2.

לפי תור שנקבע בהגרלה, 5 כלות בוחרות חתנים מתוך 8 גברים. כמה סידורי זוגות שונים יכולים להיווצר כתוצאה מבחירה זו?

תשובה:

$$P(8,5)=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=6720$$

שאלה מס' 3.

רשום את כל החליפות בנות 3 איברים, מתוך הקבוצה בת 5 איברים $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

תשובה:

יש בסה"כ $P(5,3)=5\cdot 4\cdot 3=60$ חליפות. לכל שלישיית מספרים שניקח יש 6 תמורות שונות (סידורים שונים) של המספרים. אלו הן 10 השלישיות האפשריות (שמכל אחת ייווצרו 6 חליפות):

$$(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)$$

שאלה מס' 4.

חשב:

א) $P(7,3)$ ב) $P(10,4)$ ג) $P(n,4)$ ד) $P(5,1)$ ה) $P(5,5)$

תשובה:

א. $P(7,3)=7\cdot 6\cdot 5=210$

ב. $P(10,4)=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040$

ג. $P(n,4)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)$

ד. $P(5,1)=5$

ה. $P(5,5)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5!$

שאלה מס' 5.

הוכח באמצעות הנוסחה (הוכחה אלגברית) ובאמצעות נימוק המבוסס על פירוש הנוסחאות (הוכחה קומבינטורית):

א) P (n,1) + P(m,1) = P(n+m,1).

ב) P(n,n) = P(n,n-1).

תשובה:

א. אלגברית: $P(n,1)+P(m,1)=\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{m!}{(m-1)!}=n+m=\frac{(n+m)!}{(n+m-1)!}=P(n+m,1)$

קומבינטורית: $P(n,1)$ - מספר האפשרויות לבחור נציג אחד מתוך n מועמדים.

$P(m,1)$ - מספר האפשרויות לבחור נציג אחד מתוך m מועמדים.

$P(n+m,1)$ - מספר האפשרויות לבחור נציג אחד מתוך n+m מועמדים. ניתן לבדוק מה מספר האפשרויות לבחור את הנציג מתוך n המועמדים הראשונים, ולהוסיף לזה את מספר האפשרויות לבחור אותו מ-m המועמדים האחרונים. שתי האפשרויות ביחד יכסו את כל האופציות לבחירת הנציג מ תוך n+m מועמדים.

ב. אלגברית: $P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=n!=\frac{n!}{\left[n-(n-1)\right]!}=P(n,n-1)$

קומבינטורית: $P(n,n)$ - מספר האפשרויות לבחור מתוך n מועמדים, n נציגים לשיבוץ ל-n תפקידים.

$P(n,n-1)$ - מספר האפשרויות לבחור מתוך n מועמדים, n-1 נציגים לשיבוץ ל-n-1 תפקידים. אבל אם נבצע בחירה זו, הרי בחרנו בכך גם את המועמד שלא ישובץ לתפקיד (המועמד שנשאר), ובכך נוכל לתת תשובה גם למשמעות של $P(n,n)$.

שאלה מס' 6.

א) כמה מספרים בין 1,000 ל- 10,000 הם בעלי ספרות אי- זוגיות בלבד, שכולן שונות זו מזו (כלומר, מורכבים מספרות שונות מתוך הספרות 1, 3, 5, 7, 9)?

ב) כמה מספרים בתחום הזה בעלי ספרות זוגיות שונות? (גם "0" היא ספרה זוגית).

תשובה:

א.בוחרים מתוך 5 ספרות (מועמדים), 4 ספרות (נציגים) למספר הנבנה: $P(5,4)=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

ב. בדומה לסעיף א', אבל כאן נצטרך להפחית את כל הסידורים בהם הספרה 0 שמאלית: $P(5,4)-P(4,3)=5\cdot4\cdot3\cdot2-4\cdot3\cdot2=96$

שאלה מס' 7.

כמה מספרים שלמים n, שכל ספרותיהם שונות זו מזו, מקיימים את אי - השוויון $n > 65,000$?

תשובה:

המספרים יכולים להיות בני 5,6,7,8,9,10 ספרות. לכל אופציה עלינו לחשב את מס' המספרים שמקיימים את התכונה: 10ספרות - $P(10,10)-P(9,9)$, 9 ספרות $P(10,9)-P(9,8)$, 8 ספרות $P(10,8)-P(9,7)$, 7 ספרות $P(10,7)-P(9,6)$, 6 ספרות $P(10,6)-P(9,5)$, ועבור 5 ספרות החישוב קצת יותר מורכב: כדי שהמספר שנקבל יהיה גדול מ-65,000 צריך שהספרה הראשונה תהיה 7 ומעלה או 6 ובמקרה כזה הספרה השניה צריכה להיות 5 ומעלה: $3\cdot P(9,4)+1\cdot 5\cdot P(8,3)$. בסה"כ:

$$\begin{aligned}&P(10,10)-P(9,9)+P(10,9)-P(9,8)+P(10,8)-P(9,7)+\\&+P(10,7)-P(9,6)+P(10,6)-P(9,5)+3\cdot P(9,4)+1\cdot 5\cdot P(8,3)=\\&=10!-9!+10!-9!+\frac{10!}{2}-\frac{9!}{2}+\frac{10!}{6}-\frac{9!}{6}+\frac{10!}{24}-\frac{9!}{24}+3\cdot\frac{9!}{120}+5\cdot\frac{8!}{120}=7041552\end{aligned}$$

שאלה מס' 8.

א) מהו מספר החליפות של 4 איברים מתוך 6 האותיות a, b, c, d, e, f?

ב) כמה מתוך החליפות הנ"ל מתחילות ב- a?

ג) כמה מתוך החליפות הנ"ל מכילות את a?

תשובה:

א. $P(6,4)=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$

ב. אם האות הראשונה a, אז נותר לבחור מתוך 5 הנותרות עוד 3 נציגות: $P(5,3)=5\cdot 4\cdot 3=60$

ג. קל יותר לבדוק כמה לא מכילות את a, $P(5,4)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$, לכן כל היתר – 240, מכילות את a.

שאלה מס' 9.

הוכח את הנוסחה: $P(n,k) = P(n-1,k) + kP(n-1,k-1)$

א) על-ידי שימוש באלגברה.

ב) על-ידי שיקולים קומבינטוריים.

תשובה:

א.

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!} \quad P(n-1,k)+kP(n-1,k-1)=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}+k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}=\frac{(n-k+k)(n-1)!}{(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

ב. בסה"כ רוצים לבחור k נציגים מ-n מועמדים. נחלק את האפשרויות ל-2: מועמד מס' 1 לא נבחר $P(n-1,k)$, או שכן נבחר – ואז יוכל למלא k תפקידים ובכל תפקיד שימלא, נותר לבחור מיתר המועמדים ליתר התפקידים $P(n-1,k-1)$.

שאלה מס' 10.

בכמה אופנים אפשר להושיב 6 אורחים על ספה?

תשובה:

אם בספה 6 מקומות אזי $P(6,6)=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6!=720$

שאלה מס' 11.

בכמה אופנים אפשר להושיב 6 אורחים סביב שולחן עגול, כאשר אין הבדל בין המקומות סביב השולחן מנקודת ראותם של האורחים?

תשובה:

אם בשולחן 6 מקומות ומה שמשנה זה רק מי יושב לצידו של מי, אזי ניתן לקבע את אחד האורחים כנקודת יחוס ולהושיב את יתר ה-5 $P(5,5)=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6!=120$

שאלה מס' 12.

רשום את כל התמורות של האיברים a, b, c, d, e המתחילות ב-d. הבדל מהן את התמורות המתחילות ב-dc.

$$(d,c,a,b,e),(d,c,a,e,b),(d,c,e,a,b),(d,c,e,b,a),(d,c,b,e,a),(d,c,b,a,e)$$
$$(d,b,c,a,e),(d,b,c,e,a),(d,b,a,c,e),(d,b,e,c,a),(d,b,e,a,c),(d,b,a,e,c)$$
$$(d,a,b,c,e),(d,a,c,b,e),(d,a,c,e,b),(d,a,b,e,c),(d,a,e,c,b),(d,a,e,b,c)$$
$$(d,e,b,c,a),(d,e,a,b,c),(d,e,b,a,c),(d,e,c,a,b),(d,e,a,c,b),(d,e,c,b,a)$$

שאלה מס' 13.

כאשר בתמורה של n מספרים $1,2,\ldots,n$ לא נשמר סדר עולה (משמאל לימין). מדברים על הפרות סדר בתמורה. כל הופעה של מספר לפני מספר קטן ממנו נקראת **הפרת סדר**.

לדוגמא: בתמורה 31528764 יש הפרות סדר כדלקמן: 3 לפני 1, 3 לפני 2. 5 לפני 2, 5 לפני 4. 8 לפני 7, 8 לפני 6, 8 לפני 4. 7 לפני 6, 7 לפני 4. 6 לפני 4. בסך הכל 10 הפרות סדר.

א) מהו מספר הפרות הסדר בתמורות הבאות: ,17425683 51286743.

ב) רשום את כל התמורות של 1,2,3,4, ומצא בכל אחת מהן את מספר הפרות הסדר. בכמה מהן יש מספר זוגי של הפרות סדר?

ג) בצע בכל אחת מהתמורות שב- א' טרנספוזיציה, דהיינו החלפה הדדית בין מקומותיהם של שני איברים, וחיווכח שזוגיות מספר הפרות הסדר השתנתה בכל מקרה עם ביצוע הטרנספוזיציה.

ד) נסה להוכיח ש- ג' נכון באופן כללי, כלומר, שהזוגיות של מספר הפרות הסדר, בתמורה מסוימת, שונה מן הזוגיות של מספר הפרות הסדר, בתמורה המתקבלת ממנה על-ידי טרנספוזיציה.

ה) הראה שאם נבצע בשתי תמורות שונות של n איברים את אותה הטרנספוזיציה, נקבל שוב 2 תמורות שונות.

ו) הוכח כי מספר התמורות הזוגיות (כלומר, התמורות שבהן יש מספר זוגי של הפרות סדר) של n איברים שווה למספר התמורות האי-זוגיות של אותם האיברים, וכי כל אחד ממספרים אלו הוא 0.5 n!.

תשובה:

א. 17425683 - 7 לפני 4,2,5,6,3. 4 לפני 2,3. 5 לפני 3. 6 לפני 3. 8 לפני 3. סה"כ 10 הפרות סדר.

51286743 – 5 לפני 1,2,3,4. 8 לפני 6,7,4,3. 6 לפני 4,3. 7 לפני 4,3. 4 לפני 3. סה"כ 13 הפרות סדר.

ב. $(1,2,3,4)$-אין הפרות. $(1,2,4,3)$-הפרה 1. $(1,3,2,4)$-הפרה 1. $(1,4,2,3)$- 2 הפרות. $(1,4,3,2)$- 3 הפרות. $(1,3,4,2)$- 2 הפרות. $(2,3,1,4)$- 2 הפרות. $(2,3,4,1)$- 3 הפרות. $(2,1,3,4)$- 1 הפרות. $(2,1,4,3)$- 2 הפרות. $(2,4,3,1)$- 4 הפרות. $(2,4,1,3)$- 3 הפרות. $(3,2,1,4)$- 3 הפרות. $(3,2,4,1)$- 4 הפרות. $(3,1,2,4)$- 2 הפרות. $(3,1,4,2)$- 3 הפרות. $(3,4,1,2)$- 4 הפרות. $(3,4,2,1)$- 5 הפרות. $(4,3,2,1)$- 6 הפרות. $(4,3,1,2)$- 5 הפרות. $(4,2,3,1)$- 5 הפרות. $(4,1,2,3)$- 3 הפרות. $(4,1,3,2)$- 4 הפרות. $(4,2,1,3)$- 4 הפרות.

ג. סה"כ בכל תמורה ניתן לבצע 6 טרנספוזיציות (בכל אחת בוחרים זוג מתוך 4 המקומות בינהם מחליפים). לכן כל תמורה תופיע כמקור או כיעד ב-6 טרנספוזיציות, ובסה"כ לכל התמורות יהיו 72 זוגות תמורות שמקשרת בינהן טרנספוזיציה מסוימת ($4!\cdot 6/2$). בסעיף הבא נראה כי זוגיות הפרות הסדר מתהפכת לאחר ביצו טרנספוזיציה.

ד. נניח שביצענו טרנספוזיציה בתמורה מסוימת בין האיבר a_i לאיבר a_j, ונניח כי a_i מופיע לפני a_j (כלומר $i < j$). כעת יתכנו 2 מקרים: $a_i < a_j$ או להיפך $a_i > a_j$. כמובן שיש לנתח רק מקרה אחד כי במקרה ההפוך ניתן להסתכל על הטרנספוזיציה ההפוכה. אנו נניח כי $a_i < a_j$.

נסתכל על תמונת התמורה: החלקים שמעניינים אותנו, ויושפעו מהשינוי יהיו אלו של המספרים הנמצאים בין i, j. כל שאר המספרים לא יושפעו מהשינוי (הבהר לעצמך שאתה מבין למה!). כלומר שאנו מסתכלים על כל המספרים $\{a_k : i < k < j\}$.

1. אם $a_i < a_j < a_k$, תרד הפרת סדר אחת כי העברנו את a_j לפני a_k, אבל תתווסף הפרת סדר אחת כי העברנו את a_i לאחרי a_k.
2. אם $a_k < a_i < a_j$, תתווסף הפרת סדר אחת כי העברנו את a_j לפני a_k, אבל תרד הפרת סדר אחת כי העברנו את a_i לאחרי a_k.
3. אם $a_i < a_k < a_j$, תתווסף הפרת סדר אחת כי העברנו את a_j לפני a_k, ותתווסף הפרת סדר אחת כי העברנו את a_i לאחרי a_k.

בשלוש המקרים הנ"ל מספר הפרות הסדר לא השתנה או השתנה ב-2.

4. העברת האיבר a_i לאחר האיבר ה-a_j, תוסיף הפרה נוספת.

מכאן שקיבלנו שזוגיות הפרות הסדר מתהפכת, כי מ-3 המקרים הראשונים לא השתנתה הזוגיות, ומהמקרה האחרון (יחיד), התווספה הפרה נוספת.

ה. נניח שביצענו טרנספוזיציה בתמורה אחת בין האיבר a_i לאיבר a_j, ובתמורה השניה בין האיבר b_i לאיבר b_j. יתכנו 2 אפשרויות:

1. שני האיברים בתמורה הראשונה זהים בהתאמה לאיברים מהתמורה השניה.
2. לפחות אחד מהאיברים בתמורה הראשונה לא זהה לאיבר המתאים מהתמורה השניה.

אם מקרה 1 הוא הנכון, אזי חייב להיות שוני באחד האיברים האחרים (כי ידוע שהתמורות לא זהות), ואז לאחר הטרנספוזיציה, עדיין נקבל תמורות שונות.
אם מקרה 2 הוא הנכון, אזי חייב להיות שוני באחד האיברים שהחלפנו, ואז לאחר הטרנספוזיציה, עדיין נקבל תמורות שונות, בדיוק במקום אליו הגיעו אותם זוג איברים בשתי התמורות.

ו. הדבר נובע מסעיף ד' - יש בסה"כ $n!$ תמורות שונות. אם נשתמש בעובדה כי לכל תמורה נוכל לבצע טרנספוזיציה במקום מסוים ולקבל תמורה אחרת עם זוגיות הפוכה, וכשנבצע את הפעולה שוב נחזור לתמורה הראשונית, נגיע למסקנה כי יש הקבלה בין כל תמורה זוגית לתמורה אי-זוגית מסוימת ע"י טרנספוזיציה מסוימת. כמובן שזו לא הוכחה (כי אותה תמורה יכולה להיות תוצר של טרנספוזיציות מתמורות שונות), אבל נסתפק בזה לקורס הנוכחי.

שאלה מס' 14.

מהו מספר התמורות של n מספרים $1,2,3,....,n$ שבהן המספרים 1 ו- 2 :

א) נמצאים זה ליד זה.

ב) אינם נמצאים זה ליד זה.

ג) מהו מספר התמורות של n המספרים הללו, שבהן המספרים 1,2,3 נמצאים כולם בסמיכות?

תשובה:

א. אם המספרים 1 ו-2 נמצאים זה ליד זה, ניתן להסתכל עליהם כאובייקט אחד, ואז יהיו n-1 אובייקטים. את האובייקט המיוחד הזה ניתן לסדר בשני אופנים (12, 21), ואז נקבל בסה"כ $2\left[(n-1)!\right]$.

ב. כל יתר המקרים שנותרים מסעיף א', מקיימים את התנאי. כלומר, מחפשים את מספר האיברים בקבוצה המשלימה של הסידורים, ונקבל בסה"כ $n!-2\left[(n-1)!\right]=(n-2)\left[(n-1)!\right]$.

ג. כמו בסעיף א' כאן נקבל $3!\left[(n-2)!\right]$.

שאלה מס' 15.

א) מושיבים 7 זוגות סביב שולחן עגול. מהו מספר האפשרויות להושיבם, כך שבין כל שתי נשים ישב גבר?

ב) חזור על השאלה, כאשר מושיבים את כולם על ספסל בן 14 מקומות.

תשובה:

א. כאן למעשה הנשים והגברים יושבים לסירוגים. בגלל שהשולחן עגול ניתן לקבע אישה מסוימת במקום מסוים, כנקודת יחוס, ולבדוק מהו מספר התמורות של 7 גברים ו-6 נשים שיושבים לסירוגין (גבר, אשה, גבר...). לכן יש למעשה מקומות השמורים לגברים, ובהם צריך לסדר את 7 הגברים ($7!$), ומקומות השמורים לנשים, ובהם צריך לסדר את 6 הנשים שנותרו ($6!$), ובסה"כ $7!6!$.

ב. ההבדל הוא שכאן יש חשיבות למי שיושב במקום השמאלי ביותר. אם זה גבר אז נקבל תמונה כזו $m_1-f_1-m_2-f_2\ldots m_7-f_7$ (כאשר m מסמן גבר, ו-f מסמן אישה). ואז נקבל $7!$ לסידור הגברים במקומות שהוגדרו מראש, ו-$7!$ לנשים. התמונה האפשרית השניה היא $f_1-m_1-f_2-m_2\ldots f_7-m_7$, וגם פה נקבל $7!$ לסידור הגברים במקומות שהוגדרו מראש, ו-$7!$ לנשים. בסה"כ $2\cdot\left[7!7!\right]$

שאלה מס' 16.

הוכח: $P(n,k) = P(n)/P(n\text{-}k)$

א) באופן אלגברי.

ב) על-ידי נימוק קומבינטורי (יהיה לך יותר נוח לענות על השאלה, אם תרשום את הנוסחה בצורה: $P(n,k)\cdot P(n\text{-}k) = P(n)$)

תשובה:

א. $P(n,k)\cdot P(n\text{-}k) = \dfrac{n!}{(n\text{-}k)!}\cdot(n\text{-}k)!=n!=P(n)$

ב. $P(n,k)$ הוא מספר האפשרויות לבחור k נציגים מתוך n ל-k מקומות שונים. $P(n\text{-}k)$ הוא מספר האפשרויות לסדר n-k נציגים ל-n-k מקומות שונים. כלומר מה שאנו עושים זה לקחת n מקומות שונים, בוחרים k נציגים לסידור ב-k המקומות הראשונים, ואז מסדרים את יתר הנציגים ביתר המקומות. התהליך זהה לחלוטין לסידור מראש של כל הנציגים בכל המקומות, ולא בשני שלבים.

שאלה מס' 17.

בכמה מספרים בין 1000 ל- 9999 כל הספרות שונות זו מזו?

תשובה:

יש לבחור מבין 10 הספרות 4 ספרות בזו אחר זו, כאשר הספרה 0 לא מופיעה ראשונה. נבחר קודם בלי המגבלה של ה-0 ונקבל $P(10,4)$, ולאחר מכן נחסיר את המצבים הלא רצויים בהם 0 מופיע ראשון, ואז יש לבחור 3 ספרות מתוך 9 - $P(9,3)$, ובסה"כ נקבל $P(10,4)\text{-}P(9,3)=\dfrac{10!}{6!}-\dfrac{9!}{6!}=9\cdot\dfrac{9!}{6!}$

שאלה מס' 18.

א) בכמה אופנים אפשר להושיב 10 אנשים על ספסל, אם a ו- b יושבים תמיד זה ליד זה ו- b ו- c אינם מסכימים לשבת זה ליד זה?

ב) בכמה אופנים אפשר להושיב 10 אנשים על ספסל, אם 4 מהם יושבים כקבוצה (כלומר, אף אחד מהאנשים האחרים אינו מפריד בין אף שניים מהארבעה)?

תשובה:

א. אם a,b יושבים אחד ליד השני ניתן לאחד אותם לאובייקט אחד ונקבל $2\cdot 9!$. אם גם b,c יושבים אחד ליד השני גם, ניתן לאחד אותם לאובייקט אחד שלא ניתן לסדרו פנימית (כי אם למשל a,b מסודרים כך – ba אז כדי ששני התנאים יתקיימו c חייב להיות לפני b, ולהיפך במקרה של סידור ab בו ב חייב להיות אחרי b), ונקבל $2\cdot 8!$. בסה"כ נקבל $2\cdot 9!-2\cdot 8!=16\cdot 8!$.

ב. כאן 4 האנשים הם אובייקט אחד (שניתן לסדרו פנימית), ובסה"כ יש 7 אובייקטים. בסה"כ $7!4!$.

שאלה מס' 19.

הוכח שמכפלת כל k מספרים עוקבים מתחלקת ב- k!.

תשובה:

הסבר אינטואיטיבי: בכל k מספרים עוקבים יש בדיוק מספר אחד המתחלק ב-k, ובדיוק מספר אחד המתחלק ב-k-1, וכך הלאה. לכן מכפלתם תתחלק ב-k!.

הסבר קומבינטורי: נניח שנכפיל את המספרים $n-k+1, n-k+2, \dots n-1, n$, אזי $(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n = \frac{n!}{(n-k)!} = P(n,k)$, וכמובן שזהו מספר שלם כי הוא משקף את מספר החליפות האפשריות של k אנשים מתוך n.

שאלה מס' 20.

בכיתה 30 תלמידים. יש לבחור 2 תלמידים למשלחת מסוימת. כמה משלחות שונות אפשר לבחור?

תשובה: כאן יש לבחור 2 נציגים ואין משמעות לסדר הבחירה שלהם – כלומר $P(30,2)/2!$

שאלה מס' 21.

על מדף מונחים 10 ספרים שונים בעברית, ו- 8 ספרים שונים באנגלית. בכמה אופנים אפשר לבחור מתוך ספרים אלה חבילה המכילה 3 ספרים בעברית ו- 3 ספרים באנגלית?

תשובה: כאן יש לבחור 3 נציגים מקבוצה אחת בת 10 אובייקטים, ו-3 נציגים מקבוצה שניה בת 8 אובייקטים, $P(10,3)\cdot P(8,3)$. בנוסף, כדי למנוע כפילות במניה, יש לחלק במספר החזרות על כל מניה של כל 3 ספרים (3!), ונקבל $\frac{P(10,3)}{3!}\cdot\frac{P(8,3)}{3!}$

שאלה מס' 22.

בחינה מורכבת משני חלקים: בראשון 4 שאלות ובשני 6 שאלות. על הסטודנט לענות על 2 שאלות מכל חלק. בכמה אופנים שונים יוכל הסטודנט לבחור את השאלות עליהן יענה?

תשובה:

כאן יש לבחור 2 נציגים מקבוצה אחת בת 4 אובייקטים, ו-2 נציגים מקבוצה שניה בת 6 אובייקטים, $P(4,2)\cdot P(6,2)$.

שאלה מס' 23.

כמה מלים שונות, בנות 9 אותיות, אפשר ליצור מ- 7 a- ים ו- 2 b- ים?

תשובה: כאן יש לבחור 2 נציגים מקבוצה בת 9 מקומות, בהם יאוישו ה-b-ים. יש לשים לב שכל בחירה נספרת פעמיים, כתלות בסדר הבחירה, לכן בסה"כ $P(9,2)/2$.

שאלה מס' 24.

3 נשים ו- 5 גברים מתחלקים לשתי קבוצות, בנות 4 אנשים כל אחת, כך שבכל קבוצה יש לפחות אישה אחת. מהו מספר האפשרויות העומדות לרשותם?

תשובה:

הנחה: אין זהות לקבוצות. בתנאים אלו תהיה קבוצה אחת עם אשה אחת וקבוצה שניה עם 2 נשים. כאן רק צריך לבחור מתוך 3 הנשים מי תהיה אשה בודדה בקבוצתה, כלומר $P(3,1)$. כעת יש לשבץ את הגברים בקבוצות – יש רק לבחור מתוך 5 הגברים 3 נציגים לקבוצה של האשה האחת, ובזאת בעצם קבענו את כל החלוקה - $P(5,3)/3!$. בסה"כ קיבלנו $P(3,1)\cdot P(5,3)/3!=30$.

שאלה מס' 25.

יש לחלק 4 נשים ו- 10 גברים לשתי קבוצות בנות 7 אנשים, כך שבכל קבוצה תהיה לפחות אישה אחת. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת?

תשובה:

הנחה: אין זהות לקבוצות. בתנאים אלו יתכנו 2 אפשרויות:

1. תהיה קבוצה אחת עם אשה אחת וקבוצה שניה עם 3 נשים
2. בשתי הקבוצות יהיו 2 נשים.

1. כאן רק צריך לבחור מתוך 4 הנשים מי תהיה אשה בודדה בקבוצתה, כלומר $P(4,1)$. כעת יש לשבץ את הגברים בקבוצות – יש רק לבחור מתוך 10 הגברים 6 נציגים לקבוצה של האשה האחת, ובזאת בעצם קבענו את כל החלוקה - $P(10,6)/6!$. בסה"כ קיבלנו $P(4,1)\cdot P(10,6)/6!=840$.

2. כאן רק צריך לבחור מתוך 4 הנשים 2 נשים, כלומר $P(4,2)/2!$. בגלל הסימטריה של מספר הנשים אנו עלולים למנות פעמיים כל חלוקה, לכן יש לחלק ב-2, ובסה"כ $P(4,2)/2\cdot 2=3$. כעת יש לשבץ את הגברים בקבוצות – יש רק לבחור מתוך 10 הגברים 5 נציגים לאחת הקבוצות של 2 הנשים, ובזאת בעצם קבענו את כל החלוקה - $P(10,5)/5!$. בסה"כ קיבלנו $3\cdot P(10,5)/5!=756$.

שאלה מס' 26.

הראה, כי מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת 60 איברים שונים ל- 3 קבוצות בנות 8 איברים כל אחת, 4 קבוצות בנות 5 איברים כל אחת, 2 קבוצות בנות 6 איברים כל אחת, קבוצה אחת בת איבר אחת, הוא:

$$\frac{\begin{bmatrix}60\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}52\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}44\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}26\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}21\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{3!\cdot 4!\cdot 2!}=\frac{60!}{(8!)^3\cdot 3!\cdot (5!)^4\cdot 4!\cdot (6!)^2\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!}$$

תשובה:

נתחיל עם בחירת האיברים לקבוצות של 8 האיברים: את 8 הראשונים נבחר ב-$\begin{bmatrix}60\\8\end{bmatrix}$, את השמיניה השניה נבחר מ-52 הנותרים ב-$\begin{bmatrix}52\\8\end{bmatrix}$, את השמיניה השלישית נבחר מ-44 הנותרים ב-$\begin{bmatrix}44\\8\end{bmatrix}$. בגלל שאין זהות לקבוצות הללו ובכל אחת 8 איברים, נבצע כאן כפילות של ספירה עבור כל חלוקה. כל חלוקה נמנה ב-$3!$ אופנים, לכן יש לחלק ב-$3!$ כי רוצים לספור כל חלוקה כזו פעם אחת.

באופן דומה נמשיך עם החלוקה לקבוצות בנות 5 האיברים, 6 האיברים, 3 האיברים והאיבר האחרון. כעת נותר להראות שהביטוי בצד השמאלי שווה לימני.

$$\frac{\begin{bmatrix}60\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}52\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}44\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}26\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}21\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{3!\cdot 4!\cdot 2!}=$$

$$=\frac{60!}{8!52!}\frac{52!}{8!44!}\frac{44!}{8!36!}\frac{36!}{5!31!}\frac{31!}{5!26!}\frac{26!}{5!21!}\frac{21!}{5!16!}\frac{16!}{6!10!}\frac{10!}{6!4!}\frac{4!}{3!1!}\frac{1!}{1!0!}=\frac{60!}{(8!)^3\cdot 3!\cdot(5!)^4\cdot 4!\cdot(6!)^2\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!}$$

שאלה מס' 27.

הוכח כי ניתן לחלק 2n איברים ל- n זוגות ב- $\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$ אופנים.

תשובה: ההסבר דומה לשאלה קודמת

$$\left(\frac{\begin{bmatrix}2n\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2n-2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2n-4\\2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}}{2!\cdot 2!\cdot\ldots 2!\cdot 2!}\right)\Big/ n!=\left(\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}\frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}\cdots\frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!}\right)\Big/ n!=\frac{(2n)!}{(2!)^n\, n!}$$

שאלה מס' 28.

א) בכמה אופנים שונים אפשר לבחור ועד של שלושה תלמידים בכיתה בת 32 תלמידים?

ב) כמה ועדים שונים כאלה ניתן לבחור, אם מחלקים בין שלושת הנבחרים תפקידים: יו"ר, מזכיר, גזבר?

ג) כמה ועדים כאלה ניתן לבחור, כאשר תלמיד x אינו מוכן להיבחר אם תלמיד y נבחר?

תשובה:

א. $\binom{32}{3}=4960$.

ב. $\binom{32}{3}\cdot 3!=P(32,3)=29760$.

ג. המקרה שנסנן - x,y נבחרו, צריך לבחור את השלישי - $\binom{30}{1}$. סה"כ $\binom{32}{3}-\binom{30}{1}=4930$

שאלה מס' 29.

בכמה אופנים אפשר לארוז 10 ספרים שונים בשתי קופסאות, אם בכל אחת יש מקום ל- 6 ספרים? בדוק שני מקרים:

א) אין מבחינים בין הקופסאות.

ב) מבחינים בין הקופסאות.

תשובה:

א. 2 אפשרויות–בקופסא מסוימת 4 ובשניה 6 ($\binom{10}{4}$), או בשתיהן 5 ($\frac{1}{2}\binom{10}{5}$), סה"כ $336=\binom{10}{4}+\frac{1}{2}\binom{10}{5}$.

ב. 3 אפשרויות – בקופסא I 4 וב-II 6 ($\binom{10}{4}$), או בשתיהן 5 ($\binom{10}{5}$), או בקופסא I 6 וב-II 4 ($\binom{10}{6}$),סה"כ

$672=\binom{10}{6}+\binom{10}{5}+\binom{10}{4}$.

שאלה מס' 30.

א) במישור סומנו 18 נקודות, כך שאין שלוש מהן הנמצאות על ישר אחד. כמה ישרים נקבעים על-ידי נקודות אלה (כידוע, שתי נקודות שונות קובעות ישר)?

ב) מתוך 18 נקודות במישור, 7 נמצאות על ישר אחד, ומן הנותרות אין שלוש הנמצאות על ישר אחד. מהו מספר הישרים הנקבעים על-ידי נקודות אלה?

תשובה:

א. כל ישר נקבע ע"י בחירת 2 נקודות מתוך ה-18 לכן סה"כ $153=\binom{18}{2}$.

ב. כל ישר נקבע ע"י בחירת 2 נקודות מתוך ה-18 לכן סה"כ $153=\binom{18}{2}$. מזה צריך להפחית את הספירה הכפולה של אותו ישר שעובר דרך 7 הנקודות - $21=\binom{7}{2}$, ולספור פעם אחת את הישר, בסה"כ 133.