

מבנה הבחינה :

בבחינה שש שאלות.

עליך לענות על חמש מתוך שש השאלות.

כל שאלה מזכה ב- 20 נקודות.

הנחיות :

כל תשובה תתחיל בעמוד חדש.

### שאלה 1 (10 נק' לכל סעיף)

- א. צייר דוגמא של עץ אדום-שחור בעל 4 צמתים שחורים ו-4 צמתים אדומים.  
ב. האם אפשר לבנות עץ אדום-שחור בעל 3 צמתים שחורים ו-6 צמתים אדומים? התשובה חייבת להיות מנומקת היטב.

### שאלה 2 (סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 15 נק')

- נתון מערך  $A[1..n]$  המכיל  $n$  איברים שונים זה מזה. זוג אינדקסים  $(i, j)$  נקרא היפוך אם  $i < j$  ו- $A[i] > A[j]$ .  
א. איזה מערך של איברים מן הקבוצה  $\{1, 2, \dots, n\}$  מכיל את המספר הגבוה ביותר של היפוכים? כמה היפוכים הוא מכיל?  
ב. כתוב אלגוריתם המחשב את מספר ההיפוכים בתמורה כלשהי של  $n$  איברים בזמן  $\Theta(n \cdot \lg n)$  במקרה הגרוע.  
רמז: פתרון אפשרי מבוסס על הרחבה של מיון-מיזוג.

### שאלה 3 (כל סעיף 10 נק')

- א. נתבונן בשגרת החלוקה  $\text{PARTITION}(A, p, r)$ , כפי שהיא מתוארת בספר הלימוד (עמ' 143). מחליפים את השורה ה-1 בשורה

$$x \leftarrow A[r]$$

האם האלגוריתם מיון-מהיר עדיין פועל כהלכה? הסבר.

- ב. נתבונן בשגרת החלוקה  $\text{RANDOMIZED-PARTITION}(A, p, r)$ , כפי שהיא מתוארת בספר הלימוד (עמ' 150). מוחקים את השורה ה-2; בשגרה  $\text{PARTITION}(A, p, r)$  מחליפים את השורה ה-1 בשורה

$$x \leftarrow A[i]$$

האם האלגוריתם מיון-מהיר האקראי עדיין פועל כהלכה? הסבר.

### שאלה 4 (כל סעיף 10 נק')

- א. איבר של מערך  $A[1..n]$  נקרא איבר רוב, אם ערכו מופיע במערך יותר מאשר  $n/2$  פעמים. כתוב אלגוריתם שזמן הביצוע שלו ליניארי, הקובע האם קיים במערך איבר רוב.  
ב. כתוב אלגוריתם שזמן הביצוע שלו ליניארי, הקובע האם קיים במערך איבר שערכו מופיע יותר מאשר  $n/3$  פעמים.

### שאלה 5 (20 נקודות)

הצע מבנה נתונים  $S$  שבאמצעותו ניתן לממש את כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות המבוקשת:

1.  $INSERT(k, R, S)$  - הכנס ל- $S$  את הרשומה  $R$  בעלת המפתח  $k$ ;

2.  $DELETE(k, S)$  - מחק מ- $S$  רשומה כלשהי בעלת המפתח  $k$ ;

3.  $FIND(k, S)$  - מצא ב- $S$  רשומה כלשהי בעלת המפתח  $k$ ;

4.  $MODE(k, S)$  - החזר את ערך מפתח בעל שכיחות גבוהה ביותר.

את הפעולות  $INSERT$ ,  $DELETE$  ו- $FIND$ , יש לבצע בזמן  $O(\lg n)$ , כאשר  $n$  הוא מספר המפתחות השונים ב- $S$  (מספר הרשומות יכול להיות הרבה יותר גדול מ- $n$ ). את הפעולה  $MODE$  יש לבצע בזמן  $O(1)$ .

הערה: ניקוד חלקי (15 נקודות) יינתן עבור מימוש שבו זמני הביצוע של כל הפעולות הם  $O(\lg n)$ .

### שאלה 6 (20 נקודות)

סדרה של  $n$  פעולות מתבצעת על מבנה נתונים. עלות הפעולה ה- $i$  היא  $i$  יחידות אם  $i$  היא חזקה מדויקת של 3; אחרת, העלות היא 1. השתמש בשיטת הצבירה לקביעת העלות לשיעורין של כל פעולה.

סוף!