תדריך ליחידה 3
בקורס אלגברה לינארית 1- 20109

ביחידה זו מוגדרים המושגים הבסיסיים ביותר באלגברה לינארית, כגון **צרופים לינאריים, תלות לינארית, פרישה ובסיסים** עבור המרחב $\mathbf{R}^n$. בהמשך, ביחידה 7, נחזור על אותם מושגים במסגרת יותר כללית של **מרחב לינארי**, כמובן התכונות אותן תכונות בשני המקרים ולכן היחידה הזאת חשובה במיוחד.

<u>סעיף א'</u>: סיכום של התכונות של הפעולות חיבור וכפל בסקלר שהוגדרו על $\mathbf{R}^n$ ביחידה הקודמת. קבוצת $\mathbf{R}^n$ שבה מוגדרות הפעולות האלה נקראת **המרחב הלינארי** $\mathbf{R}^n$ או **המרחב** $\mathbf{R}^n$.

<u>סעיף ב'</u>: הפרוש הגיאומטרי של המרחבים $\mathbf{R}^2$ ו-$\mathbf{R}^3$ ברור: $\mathbf{R}^2$ מזדהה עם המישור ו-$\mathbf{R}^3$ עם המרחב. ניתן לזהות את איברי $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^3$) עם נקודות במישור (במרחב) או עם וקטורים במישור (במרחב). לכן המרחבים האלה הם מקור לדוגמאות רבות שיעזרו בהבנת מושגים ותכונות מופשטים.

- *פרוש גיאומטרי של כפל בסקלר*: עמ' 56
  אם $\underline{a}\in\mathbf{R}^2$ ($\underline{a}\in\mathbf{R}^3$) ו-$\underline{a}\neq\underline{0}$, קבוצת הנקודות $\{\lambda\underline{a}\mid\lambda\in\mathbf{R}\}$ הוא הישר המוגדר על-ידי $\underline{a}$ והעובר דרך הראשית ונקרא <u>הישר הנקבע ע"י</u> $\underline{a}$. במילים אחרות, נקודה $\underline{b}\in\mathbf{R}^2$ ($\underline{b}\in\mathbf{R}^3$) נמצא על הישר הנקבע ע"י $\underline{a}$ אם ורק אם קיים סקלר λ כך ש- $\underline{b}=\lambda\underline{a}$. הביטוי $\lambda\underline{a}$, $\lambda\in\mathbf{R}$ נקרא <u>הצגה פרמטרית של הישר הנקבע ע"י</u> $\underline{a}$.
  <u>הערה</u>: בגלל הזיהוי בין נקודה לוקטור המתאים היוצא מן הראשית, הפרוש הזה תקף גם לגבי וקטורים (כלומר אפשר להחליף את המילה "נקודה" במילה "וקטור").

- *פרוש גיאומטרי של החיבור*: עמ' 58-59
  יהיו $\underline{b},\underline{a}$ שני וקטורים במישור (במרחב).
  - אם $\underline{b},\underline{a}$ לא נמצאים על אותו ישר שיוצא מהראשית, אז $\underline{a}+\underline{b}$ מתקבל ע"י כלל המקבילית, כלומר זהו וקטור האלכסון שיוצא מן הראשית במקבילית ששתיים מצלעותיה הן הוקטורים $\underline{b},\underline{a}$.
  - אם $\underline{b},\underline{a}$ נמצאים על אותו ישר שיוצא מהראשית, אז קיים סקלר λ כך ש- $\underline{b}=\lambda\underline{a}$ ולכן $\underline{a}+\underline{b}=(1+\lambda)\underline{a}$.

<u>סעיפי ג', ד'</u>: הצגה פרמטרית של המרחבים $\mathbf{R}^2$ ו-$\mathbf{R}^3$.
להלן התוצאות החשובות בסעיף זה:

- *טענה ד' (עמ' 62)*: הצגה של כל וקטור כצרוף לינארי של $\underline{a}_2,\underline{a}_1$ שני וקטורים שונים מאפס שלא נמצאים על אותו ישר שיוצא מהראשית. אומרים על שני וקטורים כאלה שהם **פורשים את** $\mathbf{R}^2$ ו-$\lambda_1\underline{a}_1+\lambda_2\underline{a}_2$, כאשר λ_2,λ_1 סקלרים, נקרא <u>הצגה פרמטרית של</u> $\mathbf{R}^2$.
- *עמ' 64, פסקה לפני טענה ה:* הכללה של הטענה הקודמת לכל מישור העובר דרך הראשית ב-$\mathbf{R}^3$.

שימו לב: הטענות א', ב', ג' (עמ' 60-61) וטענות ה', ו' (עמ' 64-65) עוסקות בהצגות פרמטריות של ישרים ומישורים **שלא** עוברים דרך הראשית. נושא זה שולי בקורס שלנו , הוא מפיק דרכים להמיר בעיות גיאומטריות לבעיות באלגברה לינארית. דוגמאות מוצגות **בסעיף ד'**. ***ניתן לא להעמיק בחלק הזה של החומר.***

<u>סעיף ה'</u>: (עמ' 67-68) הרחבה של המושגים של "ישר ומרחב" ל- $\mathbf{R}^n$: אין שום קושי.

<u>סעיפי ו', ז', ח'</u>: חשובים ביותר . עליך ללמוד ולתרגל היטב את המושגים של ***צרוף לינארי, תלות לינארית, פרישה ובסיס.***

מומלץ לתרגם את המונחים לשפה גיאומטרית במישור ובמרחב ולבנות דוגמאות כדי ליצור אצלכם אינטואיציה ולהשלים את ההבנה.

כמה נקודות חשובות:

- בהגדרה II.20 מוגדרת " קבוצת וקטורים בלתי תלויה לינארית", מקובל גם לומר <u>שהוקטורים האלה בלתי תלויים לינארית</u>.

- בשאלות מופיעות לעתים קרובות תוצאות חשובות והן בעצם טענות בקורס. כאן מדובר על **שאלות 61 ו- 62 (עמ' 76), מסקנה בסוף עמ' 76 ושאלה 67 א' ו- ב'.**

- במשפט II.22, שימו לב שאם הוקטורים תלויים לינארית , אז **אחד מהם לפחות** הוא צרוף לינארי של האחרים **ולא** כל אחד מהם!

- בדיקה לאי-תלות של וקטורים: עמ' 78 לאחר שאלה 67.

- בהגדרה II.25, מוגדרת "קבוצת וקטורים פורשת של $\mathbf{R}^n$", <u>ניתן לומר גם שהוקטורים האלה פורשים את</u> $\mathbf{R}^n$.

- בסעיפים קודמים דיברנו על "וקטורים שלא נמצאים על ישר שיוצא מן הראשית", *עכשיו ניתן לומר זאת בצורה יותר פשוטה*: " <u>הוקטורים בלתי תלויים לינארית</u>".

- <u>תזכרו</u> שלמערכת לא הומוגנית יש פתרון אם ורק אם וקטור העמודה ה-$n+1$ במטריצת המקדמים (וקטור זה מתאים לאיברים החופשיים) הוא צרוף לינארי של n הקוטרים הראשונים של אותה מטריצה.
  במלים אחרות, אם $\underline{a}_1,...,\underline{a}_n,\underline{b}$ הם וקטורי העמודות של מטריצת המקדמים, אז יש פתרון אם ורק אם $\underline{b}$ הוא צרוף ליניארי של הוקטורים $\underline{a}_1,...,\underline{a}_n$ (זהו משפט II.19).

- בספר מופיעה דוגמה יחידה של קבוצה פורשת של $\mathbf{R}^n$, הבסיס הסטנדרטי. נביא כאן דוגמאות נוספות:

דוגמה 1: האם הקבוצה $A=\{v_1=(1,-1),v_2=(-2,1),v_3=(1,1)\}$ פורשת את $\mathbf{R}^2$?
נבדוק האם ניתן להציג כל וקטור $u=(a,b)$ ב- $\mathbf{R}^2$ כצרוף לינארי של וקטורי A,
כלומר האם קיימים ממשיים z,y,x כך ש- $u=xv_1+yv_2+zv_3$. זה מוביל אותנו
למערכת שמטריצת המקדמים היא $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & a\\ -1 & 1 & 1 & b\end{array}\right)$ והיא שקולת שורות למטריצה
הקנונית $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -3 & -a-2b\\ 0 & 1 & -2 & -a-b\end{array}\right)$. ניתן להסיק שהמשתנה z חפשי ולמערכת זו יש תמיד פתרון. לכן הקבוצה הנתונה פורשת וזו דוגמה של קבוצה פורשת של $\mathbf{R}^2$ שמכילה יותר מ-2 וקטורים.

דוגמה 2: האם הקבוצה $A=\{(1,2,3),(2,-1,4)\}$ פורשת את $\mathbf{R}^3$?
התשובה היא לא כי קבוצה זו מכילה פחות משלשה וקטורים (משפט II.26).

דוגמה 3: קבוצה בעלת יותר מ- n וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$ אינה בהכרח פורשת את $\mathbf{R}^n$, למשל $A=\{e_1, 2e_1, ..., (n+3)e_1\}$.

- **שימו לב**, יש <u>משפטים שהם דו-כיוונים (אם ורק אם) ויש משפטים שהם חד-כיווניים (אם ...אז)</u>. למשל משפט II.23 אומר: **אם** $k>n$ **אז** הקבוצה תלויה לינארית.
הכיוון ההפוך (במקרה זה) אינו נכון: אם הקבוצה תלויה לינארית, **אי-אפשר להסיק** ש- $k>n$.
לכן שימו לב איך משפט מנוסח כאשר אתם משתמשים בו!

לסיום אני מפנה אתכם ל"בחנו את עצמכם" (באתר הקורס) הדן ביחידה 3. גשו לפתור אותו לאחר שקראתם את היחידה, עברתם על ההוכחות של המשפטים וניסיתם לפתור בעצמכם את השאלות שביחידה.