קובץ תשובות בנושא - רלציות

שאלה 1.1

הוכח או הפרך:

א. $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

ב. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

תשובה 1.1

א. **לא נכון**. דוגמא נגדית: $A=\{1,2\}$, $B=C=D=\{1\}$ (בידקו !).

ב. **נכון**.

שאלה 1.2

א. תהי $S\subset R\times R$ מוגדרת כך: $S=\{(x,y)\mid x,y\in R\ ,\ x\le 5\ ,\ 3\le y\}$.

מְצאו קבוצות A,B כך ש- $S=A\times B$.

ב. תהי $D\subset R\times R$ מוגדרת כך: $D=\{(x,y)\mid x,y\in R\ ,\ x+y\le 5\}$.

הוכיחו **שלא קיימות** קבוצות A,B כך ש- $D=A\times B$.

הדרכה לסעיף ב: נניח בשלילה שקיימות A,B כאלה... נסו להגיע לסתירה על ידי כך שתקבלו מתוך הנחת השלילה איברים ב- D , שאינם נמצאים ב- D לפי הנתון.

תשובה 1.2

א. $A=\{x\in R\mid x\le 5\}$, $B=\{y\in R\mid 3\le y\}$.

ב. מהגדרת D מתקיים: $(i)\ \ (3,1)\in D$ $(ii)\ \ (1,3)\in D$.

נניח בשלילה שקיימות A,B כך ש- $D=A\times B$.

מהגדרת מכפלה נקבל לפי (i) $3\in A$, ולפי (ii) $3\in B$.

שוב מהגדרת מכפלה, נובע מכך $(3,3)\in A\times B$.

אבל $(3,3)\notin D$! קיבלנו סתירה להנחה $D=A\times B$.

שאלה 1.3

הוכח או הפרך:

א. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

ב. $(A\times B)\cap C=(A\cap C)\times(B\cap C)$

תשובה 1.3

א. נכון.

ב. לא נכון, ודי ברור מראש שזה לא מתקיים: באגף שמאל החיתוך לא ריק אם ורק אם C מכילה זוגות סדורים השייכים ל- $A\times B$, בעוד שאגף ימין לא ריק אםם C מכילה איברים של A ואיברים של B. יתכן ש- C תכיל איברים כאלה וגם כאלה, אבל קל לתת דוגמא שבה זה לא קורה, והשוויון אינו מתקיים. למשל: $A=B=C=\{1\}$. אז $(A\times B)\cap C=\varnothing$, בעוד ש- $(A\cap C)\times(B\cap C)=\{(1,1)\}$.

שאלה 1.4

א. אם $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \varnothing$, מה תוכל לומר על A,B? הוכח.

ב. אם $(A \times P(A)) \cap (P(A) \times A) \neq \varnothing$, מה תוכל לומר על A? היעזר בסעיף א'.

בניסוח הסופי של תשובתך **אסור** שיופיע $P(A)$! תן דוגמא לקבוצה A המקיימת זאת.

תשובה 1.4

א. אם $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \varnothing$ קיימים x,y כך ש- $(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$.

משמע: $(x, y) \in (A \times B)$ וגם $(x, y) \in (B \times A)$.

כלומר: $x \in A, y \in B$ וגם $x \in B, y \in A$.

כלומר: $x, y \in A \cap B$. משמע: $A \cap B \neq \varnothing$.

ב. לפי סעיף א, מהנתון נובע $A \cap P(A) \neq \varnothing$.

משמע: קיים איבר של A שהוא גם קבוצה חלקית של A.

במלים אחרות: קיים $a \in A$, כך ש- a עצמו הוא קבוצה, וכל איברי a הם גם איברים של A.

דוגמא לקבוצה A המקיימת זאת: $A = \{\varnothing\}$.

שאלה 1.5

בשאלה זו U היא קבוצה אוניברסלית המכילה את A,B,

המשלימים של A,B המופיעים בשאלה הם יחסית ל- U,

בעוד שהמשלים של $A \times B$ הוא יחסית ל- $U \times U$.

מצא את הטענה הנכונה מבין 3 הטענות הבאות, **והוכח אותה**. אין צורך להתייחס לטענות השגויות.

א. $(A \times B)' = A' \times B'$

ב. $(A \times B)' = (A' \times U) \cup (U \times B')$

ג. $(A \times B)' = (A' \times B) \cup (A \times B')$

תשובה 1.5

הטענה הנכונה היא ב.

נראה כי x שייך ל- $(A \times B)'$ **אםם** (אם ורק אם) הוא שייך ל- $(A' \times U) \cup (U \times B')$:

ראשית, $x \in (A \times B)'$ **אםם** $x \notin A \times B$.

לפי הנתון בשאלה, נוכל להניח $x \in U \times U$. נסמן אפוא $x = (k, m)$ כאשר $k, m \in U$.

מהגדרת מכפלה קרטזית, $(k, m) \notin A \times B$ **אםם** $k \notin A$ **או** $m \notin B$

(ה"או" שלנו הוא במובנו המתימטי כאן ותמיד: ייתכן שמתקיימים שני התנאים).

כלומר **אםם** $k \in A'$ בעוד $m \in U$ כלשהו, **או** $m \in B'$ בעוד ש- $k \in U$ כלשהו.

מהגדרת מכפלה והגדרת איחוד קבוצות, זה מתקיים **אםם** $(k, m) \in (A' \times U) \cup (U \times B')$.

הראינו את השקילות בין שני התנאים.

שאלה 2.1

עבור יחס R מעל קבוצה A, נסמן ב- R' את המשלים של R ב- $A \times A$.

א. **הוכח**: $(R')^{-1} = (R^{-1})'$.

ב. **הוכח**: אם R סימטרי אז R' סימטרי.

ג. **הפרך** ע"י דוגמא נגדית את הטענה: "אם R אנטי-סימטרי אז R' אנטי-סימטרי".

ד. **הפרך** ע"י דוגמא נגדית את הטענה: "אם R אנטי-סימטרי אז R' אינו אנטי-סימטרי".

ה. **הוכח**: אם R רפלקסיבי אז R' אינו רפלקסיבי.

ו. תן דוגמא ליחס R מעל $A = \{1,2,3\}$ כך ש- R טרנזיטיבי וגם R' טרנזיטיבי.

כמובן עליך להראות שהדוגמא שלך מקיימת את האמור.

תשובה 2.1

א. נרשום סדרה של תנאים שקולים (שני תנאים, כלומר טענות, א', ב', נקראים **שקולים** אם מתוך א' נובע ב' ומתוך ב' נובע א'. במלים אחרות, " א' **אם ורק אם** ב' ".

ובקיצור: " א' **אסם** ב' ").

נתחיל מ- $(x,y) \in (R')^{-1}$. לפי הגדרת יחס הפוך, זה שקול ל- $(y,x) \in R'$.

לפי הגדרת משלים של קבוצה, זה שקול ל- $(y,x) \notin R$. וזה שקול ל- $(x,y) \notin R^{-1}$

מדוע המעבר האחרון תקף? כללית מהגדרת יחס הפוך, $(y,x) \in R$ שקול ל- $(x,y) \in R^{-1}$; מכאן נסיק כללית ש-

$(y,x) \notin R$ שקול ל- $(x,y) \notin R^{-1}$.

אנו מסתמכים על כך שאם **א'** שקול ל- **ב'** אז **לא א'** שקול ל- **לא ב'**.

קל להראות זאת בדרך השלילה, כאשר נזכור ש- "א שקול ל-ב" פירושו: "אם א אז ב , ואם ב אז א".

נמשיך את הפיתוח - לפי הגדרת משלים של קבוצה, התנאי הקודם שקול ל- $(x,y) \in (R^{-1})'$.

קיבלנו: $(x,y) \in (R')^{-1}$ **אסם** $(x,y) \in (R^{-1})'$. משמע $(R')^{-1} = (R^{-1})'$.

ב. מהגדרת יחס סימטרי, כדי להראות ש- R' סימטרי עלינו להראות: $(R')^{-1} = R'$.

לפי סעיף א, $(R')^{-1} = (R^{-1})'$.

R סימטרי, לכן $R^{-1} = R$. נציב בנוסחה הקודמת ונקבל $(R')^{-1} = R'$, כמבוקש.

ג. תהי $A = \{1,2\}$, נתבונן ביחס הבא מעל A: $R = \{(1,1)\}$.

R אנטי-סימטרי אבל R' אינו אנטי-סימטרי (מדוע?).

אגב, יכולנו לקחת גם $R = \varnothing$ עם אותה A, או עם A כלשהי בת יותר מאיבר אחד.

ד. תהי $A = \{1,2\}$, נתבונן ביחס הבא מעל A: $R = \{(1,2)\}$.

R אנטי-סימטרי וגם R' אנטי-סימטרי (מדוע?).

ה. אם R רפלקסיבי , אז R מכיל את כל הזוגות מהצורה (x,x) כאשר $x \in A$.

לכן R' אינו מכיל אף זוג כזה. בהנחה ש- A **אינה ריקה** (!) זה אומר ש- R' אינו רפלקסיבי.

ו. יש דוגמאות רבות, הנה אחת: $R = \{(1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (1,3)\}$. השלימו בעצמכם את הבדיקה.

שאלה 2.2

תהי $A=\{1,2,3\}$. R,S הם יחסים מעל A, ומתקיים $R \subseteq S$. **הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות**. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת.

א. אם R רפלקסיבי אז S רפלקסיבי.

ב. אם S רפלקסיבי אז R רפלקסיבי.

ג. אם R סימטרי אז S סימטרי.

ד. אם S סימטרי אז R סימטרי.

ה. אם R אנטי-סימטרי אז S אנטי-סימטרי.

ו. אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי.

ז. $S^{-1} \subseteq R^{-1}$.

ח. $(R^{-1} \cap S) \cup (S^{-1} \cap R)$ הוא יחס סימטרי.

תשובה 2.2

א. נכון: R רפלקסיבי פירושו $I_A \subseteq R$. נתון $R \subseteq S$. לכן $I_A \subseteq S$.

ב. לא נכון, למשל $S = I_A$ רפלקסיבי , $R = \{(1,1)\ ,(2,2)\}$ אינו רפלקסיבי, ו- $R \subseteq S$.

ג. לא נכון, למשל $R = \varnothing$ הוא סימטרי, $S = \{(1,2)\}$ אינו סימטרי, ומתקיים $R \subseteq S$.

ד. לא נכון, למשל $R = \{(1,2)\}$ אינו סימטרי, $S = \{(1,2)\ ,(2,1)\}$ הוא סימטרי, ו- $R \subseteq S$.

ה. לא נכון, למשל $R = \{(1,2)\}$ הוא אנטי-סימטרי, $S = \{(1,2)\ ,(2,1)\}$ אינו אנטי-סימטרי, ומתקיים $R \subseteq S$ (אגב אפשר גם לקחת $R = \varnothing$ בדוגמא זו!).

ו. נכון: יהי S יחס אנטי-סימטרי ויהי $R \subseteq S$. נוכיח ש- R אנטי-סימטרי.
עלינו להראות שאם $(x,y) \in R$ וגם $(y,x) \in R$ אז $x = y$.
מכיוון ש- $R \subseteq S$, מההנחה $(x,y) \in R$, $(y,x) \in R$ נובע $(x,y) \in S$, $(y,x) \in S$.
נתון ש- S אנטי-סימטרי, לכן $x = y$.

ז. לא נכון. דוגמא נגדית: $R = \varnothing$, $S = \{(1,2)\}$.

ח. נכון: יהי K היחס הנתון בסעיף זה. נחשב את K^{-1} .

$$K^{-1} = ((R^{-1} \cap S) \cup (S^{-1} \cap R))^{-1} = (R^{-1} \cap S)^{-1} \cup ((S^{-1} \cap R))^{-1}$$

$$= (R \cap S^{-1}) \cup (S \cap R^{-1})$$

ולפי חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד

$$= (R^{-1} \cap S) \cup (S^{-1} \cap R) = K$$

הראינו $K = K^{-1}$, לכן K סימטרי (זו הגדרת יחס סימטרי !)

שאלה 2.3

עבור יחס R מעל קבוצה A, נסמן ב- R' את המשלים של R ב- $A\times A$.

א. הוכח: $(R')^{-1}=(R^{-1})'$.

ב. הוכח בעזרת הסעיף הקודם: $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$.

הדרכה: היעזר בזהות שהכרנו לגבי קבוצות: $X-Y=X\cap Y'$. נמק היטב כל צעד.

ג. הוכח או הפרך: אם R,S סימטריים אז $R-S$ סימטרי.

ד. (אין קשר לסעיפים הקודמים) הוכח או הפרך:

אם R אנטי-סימטרי ו- $S\subseteq R$ אז S אנטי-סימטרי.

תשובה 2.3

א. נרשום סדרה של תנאים שקולים (שני תנאים, כלומר טענות, א׳, ב׳, נקראים **שקולים** אם מתוך א׳ נובע ב׳ ומתוך ב׳ נובע א׳. במלים אחרות, "א׳ **אם ורק אם** ב׳". ובקיצור: "א׳ **אםם** ב׳").

נתחיל מ- $(x,y)\in(R')^{-1}$.

לפי הגדרת יחס הפוך, זה שקול ל- $(y,x)\in R'$.

לפי הגדרת משלים של קבוצה, זה שקול ל- $(y,x)\notin R$.

וזה שקול ל- $(x,y)\notin R^{-1}$

מדוע המעבר האחרון תקף? כללית מהגדרת יחס הפוך,

$(y,x)\in R$ שקול ל- $(x,y)\in R^{-1}$; מכאן נסיק כללית ש- $(y,x)\notin R$ שקול ל- $(x,y)\notin R^{-1}$.

אנו מסתמכים על כך שאם **א׳ שקול ל- ב׳** אז **לא א׳ שקול ל- לא ב׳**.
קל להראות זאת בדרך השלילה, כאשר נזכור ש- "א שקול ל-ב" פירושו:
"אם א אז ב , ואם ב אז א". נמשיך את הפיתוח -

לפי הגדרת משלים של קבוצה, התנאי הקודם שקול ל- $(x,y)\in(R^{-1})'$.

קיבלנו: $(x,y)\in(R')^{-1}$ **אםם** $(x,y)\in(R^{-1})'$. משמע $(R')^{-1}=(R^{-1})'$.

ב. ניעזר בזהות על קבוצות $R-S=R\cap S'$.

מכאן: $(R-S)^{-1}=(R\cap S')^{-1}=R^{-1}\cap((S')^{-1})=R^{-1}\cap((S^{-1})')=R^{-1}-S^{-1}$

נעזרנו בסעיף א של השאלה הנוכחית!

ג. נכון! יהיו R,S יחסים סימטריים מעל A. עלינו להראות ש- $R-S$ סימטרי, כלומר לפי הגדרת יחס סימטרי עלינו להראות ש- $(R-S)^{-1}=R-S$.

לפי הסעיף הקודם, $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$. מכיוון ש- S,R סימטריים, $R=R^{-1}$, $S=S^{-1}$. נציב ונקבל $(R-S)^{-1}=R-S$.

ד. נכון! R אנטי-סימטרי משמע אם $(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$ אז $x=y$.

כעת, מכיוון ש- S חלקי ל- R, אם $(x,y)\in S$ וגם $(y,x)\in S$, מתקיים $(x,y)\in R$ וגם $(y,x)\in R$, ולכן $x=y$. כלומר גם S אנטי-סימטרי.

שאלה 2.4

R,S הם יחסים מעל קבוצה A. I הוא יחס היחידה (הזהות) מעל A. הוכח או הפרך :

א. $R^2R^3 = R^5$

ב. $R^2R^{-1} = R$

ג. $(R^2)^{-1} = (R^{-1})^2$

ד. $(R-I)^2 = R^2 - I$

ה. $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$

תשובה 2.4

א. נכון, מיידי מההגדרה של חזקה של רלציה.

(הגדרה זו כשלעצמה מסתמכת על תכונת האסוציאטיביות של כפל רלציות).

ב. לא. דוגמא נגדית : $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ג. כן.

ד. לא. דוגמא נגדית : $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ה. כן.

שאלה 2.5

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות :

א. $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$.

ב. אם R,S סימטריות אז $R \oplus S$ סימטרית.

ג. אם R,S אנטי-סימטריות אז $R \oplus S$ אנטי-סימטרית.

תשובה 2.5

א. נכון. *(i)* $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ *(ii)* $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

נוכיח בנוסף : *(iii)* $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$:

נפתח סדרת תנאים **השקולים זה לזה** :

$(x,y) \in (R-S)^{-1}$ (שקול לתנאי הבא מהגדרת יחס הפוך)

$(y,x) \in R - S$ (שקול לתנאי הבא מהגדרת הפרש קבוצות)

$(y,x) \in R$ וגם $(y,x) \notin S$ (שקול לתנאי הבא מהגדרת יחס הפוך)

$(x,y) \in R^{-1}$ וגם $(x,y) \notin S^{-1}$ (שקול לתנאי הבא מהגדרת הפרש קבוצות)

$(x,y) \in R^{-1} - S^{-1}$

הראינו ש- $(x,y) \in (R-S)^{-1}$ אםם $(x,y) \in R^{-1} - S^{-1}$, ומכאן השוויון *(iii)*.

השוויון הנדרש בסעיף זה, $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$, נובע כעת מהגדרת הפרש סימטרי, תוך שימוש בשוויונים האמורים. *(i)* , *(ii)*, *(iii)*

ב. נכון. כדי להראות ש- $R\oplus S$ סימטרית עלינו להראות ש- $(R\oplus S)^{-1}=R\oplus S$

(יחס סימטרי הוא יחס ההפוך לעצמו - הגדרה 2.11).

מסעיף א', $(R\oplus S)^{-1}=R^{-1}\oplus S^{-1}$.

מכיון ש- R,S סימטריות, הרי שוב לפי הגדרת יחס סימטרי, $S^{-1}=S$, $R^{-1}=R$.

קיבלנו $(R\oplus S)^{-1}=R\oplus S$ כמבוקש.

ג. לא נכון. דוגמא נגדית: $A=\{1,2\}$, $R=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (השלימו החישוב).

שאלה 3.1

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל יחס R, $(R^3)^4=R^{12}$.

ב. לכל יחס R, $R\cdot R^{-1}=I_A$.

ג. אם R הוא יחס סימטרי ו- S יחס אנטי-סימטרי אז $R\cap S$ הוא סימטרי ואנטי-סימטרי.

ד. אם R הוא יחס טרנזיטיבי מעל קבוצה לא-ריקה A , אז R מכיל לפחות 3 זוגות סדורים של אברי A.

תשובה 3.1

א. **נכון**. נובע ישירות מהגדרת חזקה של יחס.

ב. **לא נכון**. דוגמא נגדית: יהי R היחס הריק מעל קבוצה לא ריקה כלשהי.

אפשר גם להביא דוגמאות בהן R לא ריק.

ג. **לא נכון**. דוגמא נגדית: $A=\{1,2\}$, $R=\{(1,2),(2,1)\}$, $S=\{(1,2)\}$.

אז $R\cap S=S$, ו- S אינו סימטרי.

ד. **לא נכון**. למשל היחס הריק מעל קבוצה כלשהי הוא טרנזיטיבי.

גם יחס שמכיל זוג סדור אחד ויחיד מעל קבוצה כלשהי הוא טרנזיטיבי.

אגב, ראו שאלון רב-ברירה עם פתרונות בנושא יחסים, באתר הקורס, לגבי תכונות שונות של היחס הריק.

שאלה 3.2

לכל אחד מהיחסים הבאים ולכל אחת מהתכונות הבאות, בדוק אם היחס מקיים את התכונה. הוכח כל טענה.
התכונות: רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות, טרנזיטיביות. בנוסף, אם היחס הוא יחס שקילות - ציין זאת. שים לב שיחס יכול להיות סימטרי ואנטי-סימטרי בעת ובעונה אחת, כך שאם הראית שיחס הוא סימטרי, זה לא מוכיח שהוא אינו אנטי-סימטרי.

היחסים:

א. היחס R מעל $N-\{0\}$ המוגדר כך: $(n,m)\in R$ אםם n מתחלק ללא שארית ב- m.

ב. הסגוֹר הסימטרי של היחס R מהסעיף הקודם.

ג. היחס S מעל קבוצת הממשים השונים מאפס, המוגדר כך: $(x,y)\in S$ אםם $x\cdot y>0$.

תשובה 3.2

א. R רפלקסיבי: לכל $n \in N - \{0\}$, n מתחלק בעצמו ללא שארית, כלומר $(n,n) \in R$.

R אינו סימטרי: למשל $(2,1) \in R$ אך $(1,2) \notin R$. מכיון ש- R אינו סימטרי, הוא אינו יחס שקילות. R הוא אנטי-סימטרי: לכל $m,n \in N - \{0\}$, אם m מתחלק ב- n וגם n מתחלק ב- m אז $n = m$ (תכונה ידועה. אפשר להוכיח אותה למשל מתוך כך שאם m מתחלק ב- n אז $n \le m$, והיחס $\le$ הוא אנטי-סימטרי).

שימו לב ש**מתוך כך ש- R אנטי-סימטרי לא נובע שהוא אינו סימטרי !**

ראו דוגמאות בעניין זה בשאלון רב-ברירה בנושא יחסים, באתר הקורס.

R טרנזיטיבי: אם m מתחלק ב- n, משמע $m = n \cdot a$ עבור a טבעי חיובי כלשהו.

אם n מתחלק ב- k משמע $n = k \cdot b$ עבור b טבעי חיובי כלשהו.

ביחד נקבל $m = k \cdot b \cdot a$, לכן m מתחלק ב- k.

ב. הסגור הסימטרי של R הוא $R \cup R^{-1}$.

בסעיף הקודם ראינו ש- R רפלקסיבי, כלומר $I_A \subseteq R$. כעת, $R \subseteq R \cup R^{-1}$ לכן גם $I_A \subseteq R \cup R^{-1}$, כלומר גם $R \cup R^{-1}$ רפלקסיבי.

$R \cup R^{-1}$ סימטרי. $R \cup R^{-1}$ אינו אנטי-סימטרי, כי $(1,2)$ וגם $(2,1)$ שייכים אליו, ו- $1 \neq 2$.

$R \cup R^{-1}$ **אינו** טרנזיטיבי: למשל $(2,1) \in R \cup R^{-1}$, $(1,3) \in R \cup R^{-1}$ (כי $(3,1) \in R$), אך $(2,3) \notin R \cup R^{-1}$.

ג. מהגדרת S ומתכונות ידועות של כפל במספרים ממשיים, $(x,y) \in S$ אס"ם x,y בעלי אותו סימן (שניהם חיוביים או שניהם שליליים). נחלק אפוא את הממשיים השונים מאפס לשתי מחלקות: חיוביים ושליליים. כאמור, $(x,y) \in S$ **אס"ם** x,y **שייכים לאותה מחלקה** של החלוקה הנ"ל. **לכן S הוא יחס שקילות, המתאים לחלוקה זו !**

לכן הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. שימו לב שלא בדקנו את 3 התכונות המאפיינות יחס שקילות, אלא הוכחנו שזהו יחס שקילות ע"י כך שמצאנו את החלוקה המתאימה. זוהי דרך לגיטימית לגמרי.

S **אינו** אנטי-סימטרי כי $(1,2) \in S$, $(2,1) \in S$ ו- $1 \neq 2$.

שאלה 3.3

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים. $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים: $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

היחסים הבאים מוגדרים מעל $\mathbf{N} - \{0\}$. עבור כל אחד מהם, ציין אם הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי, טרנזיטיבי. נמק. כמובן ייתכן שליחס יהיו כמה מהתכונות יחד.

א. היחס J: $(x,y) \in J$ אםם קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $x / y = 2^n$.

ב. היחס K: $(x,y) \in K$ אםם קיים $n \in \mathbf{Z}$ כך ש- $x / y = 2^n$.

(למי שזקוק לרענון: $2^{-n} = 1/2^n$, $2^0 = 1$).

ג. היחס L: $(x,y) \in L$ אםם קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $x / y = 2^n$ או שקיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $x / y = 3^n$.

שימו לב ששלושת היחסים מוגדרים מעל הקבוצה $\mathbf{N} - \{0\}$.

תשובה 3.3

א. **רפלקסיבי**. הוכחה: לכל $x \in \mathbf{N}-\{0\}$, $x/x=1=2^0$, ולכן $(x,x) \in J$.

אינו סימטרי: למשל $(2,1) \in J$ אבל $(1,2) \notin J$ (נמקו).

אנטי-סימטרי. הוכחה: נשים לב כללית שאם קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $x/y=2^n$ אז בפרט $x \geq y$.

כעת, נניח $(x,y) \in J$ וגם $(y,x) \in J$. לכן $x \geq y$ וגם $y \geq x$, כלומר $x=y$.

משמע J אנטי-סימטרי.

טרנזיטיבי. הוכחה: אם $(x,y) \in J$ וגם $(y,z) \in J$,

משמע קיימים $n,m \in \mathbf{N}$ כך ש- $x/y=2^n$ ו- $y/z=2^m$.

מכאן $x/z=(x/y)\cdot(y/z)=2^n \cdot 2^m=2^{n+m}$.

$n+m$ גם הוא ב- $\mathbf{N}$ ולכן $(x,z) \in J$. לפיכך J טרנזיטיבי.

ב. **רפלקסיבי**, מאותה סיבה ש- J רפלקסיבי.

סימטרי: אם $(x,y) \in K$ משמע קיים $n \in \mathbf{Z}$ כך ש- $x/y=2^n$,

מכאן $y/x=2^{-n}$. מכיוון ש- $(-n) \in \mathbf{Z}$, קיבלנו $(y,x) \in K$. לכן K סימטרי.

אינו אנטי-סימטרי: למשל $(2,1) \in K$ וגם $(1,2) \in K$ אבל $1 \neq 2$.

טרנזיטיבי: ההוכחה מקבילה לגמרי להוכחה למעלה ש- J טרנזיטיבי, כאשר בכל מקום בהוכחה במקום $\mathbf{N}$ נרשום $\mathbf{Z}$!

ג. **רפלקסיבי**: מאותה סיבה כמו שני הקודמים.

אינו סימטרי: למשל $(2,1) \in L$ אבל $(1,2) \notin L$ (נמקו).

אנטי-סימטרי: ההוכחה שנתנו לאנטי-סימטריות של J טובה גם עבור L.

לא טרנזיטיבי:

למשל $(12,6) \in L$ ו- $(6,2) \in L$ אבל $(12,2) \notin L$, כי $12/2=6$ אינו חזקה של 2 או של 3.

שאלה 3.4

לכל אחת מהטענות א-ג קבע איזו מהאפשרויות הבאות נכונה:

(a) לכל קבוצה לא-ריקה A ויחסים R,S מעל A - הטענה נכונה.

(b) לכל קבוצה לא-ריקה A ויחסים R,S מעל A - הטענה אינה נכונה.

(c) יש קבוצה לא-ריקה ויחסים מעליה, עבורם הטענה נכונה, ויש קבוצה לא-ריקה ויחסים מעליה שעבורם הטענה אינה נכונה.

בכל מקרה, הוכח את קביעתך!

א. אם R,S הם יחסים סימטריים אז $R \oplus S$ סימטרי.

ב. אם R,S אנטי-סימטריים אז $R \oplus S$ אנטי-סימטרי.

ג. אם R,S טרנזיטיביים אז $R \oplus S$ טרנזיטיבי.

תשובה 3.4

א. נכון. יחס סימטרי הוא יחס השווה ליחס ההפוך לו.

נתון ש- R,S סימטריים , משמע $R=R^{-1}$, $S=S^{-1}$.

נציב זאת בשוויון $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$

ונקבל: $(R \oplus S)^{-1} = R \oplus S$.

שוב, מהגדרת רלציה סימטרית, שוויון זה אומר בדיוק ש- $R \oplus S$ סימטרית.

ב. לעתים כן ולעתים לא. דוגמא נגדית: $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (השלימו).

מצד שני, דוגמא שעבורה מתקיימים התנאים: $R = S = \varnothing$ מעל A כלשהיא.

(או קצת כללית יותר, $R = S$, רלציה אנטי-סימטרית כלשהיא מעל A כלשהיא).

יש כמובן גם דוגמאות אחרות.

ג. לעתים כן ולעתים לא. אותן דוגמאות טובות גם כאן (כאשר בהערה "קצת כללית יותר" נקח רלציה טרנזיטיבית במקום אנטי-סימטרית). ויש דוגמאות אחרות.

שימו לב שהרלציה הריקה מעל A כלשהיא היא סימטרית, אנטי-סימטרית וטרנזיטיבית.

ראו דיון בעניין זה בשאלוני "בחן את עצמך" באתר הקורס !

שאלה 3.5

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים. הביטוי $|x|$ מסמן את הערך המוחלט של x.

הוכח כי היחסים J,K,L הבאים **אינם** יחסי שקילות מעל $\mathbf{R}$.

עבור כל אחד מהיחסים, ציין אם הוא רפלקסיבי, אם הוא סימטרי, ואם הוא טרנזיטיבי.

א. היחס J: $(x,y) \in J$ אםם $|x-y| \le 1$.

ב. היחס K: $(x,y) \in K$ אםם x,y שניהם מספרים שלמים.

ג. היחס L: $(x,y) \in L$ אםם $|x-y| = 1$.

תשובה 3.5

א. רפלקסיבי: לכל $x \in \mathbf{R}$, $|x-x| = 0 < 1$, ולכן $(x,x) \in J$.

סימטרי: אם $(x,y) \in J$ אז $|y-x| = |x-y| < 1$, ולכן גם $(y,x) \in J$.

אינו טרנזיטיבי, למשל: $(0,\ 0.7) \in J$, $(0.7,\ 1.5) \in J$ אך $(0,\ 1.5) \notin J$.

ב. אינו רפלקסיבי: למשל $(0.5,\ 0.5) \notin K$.

סימטרי: אם $(x,y) \in K$ אז x,y שניהם שלמים, לכן גם $(y,x) \in K$.

טרנזיטיבי: כן, הוכחה בדומה.

אגב, מהגדרת K, $K = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, כאשר $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

ג. L הוא יחס סימטרי, שאינו רפלקסיבי ואינו טרנזיטיבי. ההוכחה דומה לסעיף א.

לכל אחד מהיחסים הנ"ל חסרה לפחות אחת מ- 3 התכונות הנדרשות מיחס שקילות,

לכן אף אחד מהם אינו יחס שקילות.

שאלה 4.1

א. תן דוגמא ליחס R שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל $A=\{1,2,3\}$,

אך $R \cup R^{-1}$ **אינו** יחס שקילות מעל A. הראה שהדוגמא שנתת מקיימת את הנדרש.

ב. הוכח: אם R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A **כלשהי**

אז $R \cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל A. **נמק בפירוט** כל צעד בהוכחה.

ג. תן דוגמא ליחס R מעל $A=\{1,2,3\}$ כך ש- $R \cup R^2$ **אינו** טרנזיטיבי.

ד. A היא קבוצה בת 11 איברים, E הוא יחס שקילות מעל A, המחלק את A ל- 5

מחלקות: מחלקה אחת בת איבר אחד, שתי מחלקות שבכל אחת מהן 2 איברים

ו- 2 מחלקות שבכל אחת מהן 3 איברים. מהו $|E|$, כלומר כמה זוגות סדורים יש ב- E ?

תשובה 4.1

א. דוגמא: $R = I_A \cup \{(1,2)\,,(1,3)\} = \{(1,1)\,,(2,2)\,,(3,3)\,,(1,2)\,,(1,3)\}$

מתקיים: $R \cup R^{-1} = I_A \cup \{(1,2)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,1)\}$.

$R \cup R^{-1}$ אינו טרנזיטיבי כי נמצאים בו $(3,1)$ ו- $(1,2)$ אבל לא נמצא בו $(3,2)$.

ב. **רפלקסיביות**: אם R רפלקסיבית גם R^{-1} רפלקסיבית.

מכאן ומהגדרת רפלקסיביות, $I_K \subseteq R$ וגם $I_K \subseteq R^{-1}$. לפיכך $I_K \subseteq R \cap R^{-1}$,

משמע (שוב מהגדרת רפלקסיביות): $R \cap R^{-1}$ רפלקסיבית.

סימטריות: $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

בפרט, לכל רלציה R: $(R \cap R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R = R \cap R^{-1}$.

משמע, לפי הגדרת רלציה סימטרית, $R \cap R^{-1}$ היא סימטרית.

טרנזיטיביות: אם R טרנזיטיבית אז כך גם R^{-1} .

מכאן, נקבל כי גם $R \cap R^{-1}$ היא טרנזיטיבית.

ג. דוגמא: $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. מתקיים: $R^2 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

לכן $R \cup R^2 = \{(1,2),(2,3),(3,1),(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

יחס זה אינו טרנזיטיבי כי , למשל, נמצאים בו $(1,2)$ ו- $(2,1)$ אבל לא נמצא בו $(1,1)$.

ד. מהגדרת E , שני איברים של A השייכים לאותה מחלקה עומדים ביחס E זה לזה,

ושני איברים של A שאינם באותה מחלקה אינם עומדים ביחס E זה לזה.

לכן, אם נרשום $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, כאשר באגף ימין אלו 5 המחלקות,

אז מתקיים: $E = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3) \cup (A_4 \times A_4) \cup (A_5 \times A_5)$.

זהו איחוד זר (איחוד של קבוצות זרות) , לכן

$$|E| = |A_1 \times A_1| + |A_2 \times A_2| + |A_3 \times A_3| + |A_4 \times A_4| + |A_5 \times A_5|$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 27$$

שאלה 4.2

לכל $n \in N$, יהי D_n היחס הבא מעל $P(N)$: עבור $X,Y \in P(\mathbb{N})$, $(X,Y) \in D_n$ אםם $|X \oplus Y| \le n$.

למשל $(\{1,2,3\}\,,\{1,8\}) \in D_n$ עבור כל $3 \le n$, כי $\{1,2,3\} \oplus \{1,8\} = \{2,3,8\}$, קבוצה בת 3 איברים. הגדרנו אפוא סדרה אינסופית של יחסים מעל $P(\mathbb{N})$.

א. הוכח: $D_0 = I_{P(N)}$ (יחס היחידה מעל $P(N)$).

ב. הוכח: לכל $n \in N$, $D_n \subseteq D_{n+1}$.

ג. הוכח שהסגור הטרנזיטיבי של D_1 הוא יחס שקילות. נסמן אותו באות D.

ד. הוכח שכל הקבוצות **הסופיות** של טבעיים נמצאות באותה מחלקת שקילות לגבי היחס D.

ה. הוכח שקבוצה סופית וקבוצה אינסופית אינן באותה מחלקת שקילות! הדרכה/תזכורת: עצם כלשהו שייך ל- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ אםם הוא שייך לפחות לאחת הקבוצות X_i.

ו. הוכח שמספר מחלקות השקילות המוגדרות על-ידי היחס D הוא אינסופי !

תשובה 4.2

א. מהגדרת D_0, $(X,Y) \in D_0$ אםם $|X \oplus Y| \le 0$.

גודל של קבוצה אינו יכול להיות שלילי, והקבוצה היחידה שגודלה 0 היא הקבוצה הריקה.

לכן $(X,Y) \in D_0$ אםם $X \oplus Y = \varnothing$.

לפי טענה 1 בהדרכה שפורסמה לשאלה, $X \oplus Y = \varnothing$ אםם $X = Y$.

הוכחנו: $(X,Y) \in D_0$ **אםם** $X = Y$. משמע $D_0 = I_{P(N)}$.

ב. מיידי מהגדרת הקבוצות D_n: אם $|X \oplus Y| \le n$ אז $|X \oplus Y| \le n+1$.

ג1. נסמן את הסגור הטרנזיטיבי של D_1 ב- T. $T = \bigcup_{1 \le n \in N} (D_1)^n$.

מהנתון בשאלה, $(D_1)^n = D_n$.

לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות,

$(X,Y) \in T$ אםם קיים n ($1 \le n \in N$) כך ש- $(X,Y) \in D_n$.

כלומר $(X,Y) \in T$ אםם קיים n ($1 \le n \in \mathbb{N}$) כך ש- $|X \oplus Y| \le n$.

כלומר $(X,Y) \in T$ אםם $|X \oplus Y|$ קטן **מאיזשהו** מספר טבעי חיובי.

במלים אחרות, $(X,Y) \in T$ אםם $X \oplus Y$ היא קבוצה סופית.

ג2. ניתן שתי הוכחות לכך ש- T הוא יחס שקילות, הוכחה אחת נביא במלואה, בהוכחה השנייה נשאיר משהו לתרגול...

הוכחה אחת: לפי סעיף ג1,

$(X,Y) \in T$ אםם $X \oplus Y$ היא קבוצה סופית (ייתכן ריקה).

לפיכך:

* T רפלקסיבי: לכל X, $X \oplus X = \varnothing$.
* T סימטרי: אם $X \oplus Y$ היא קבוצה סופית אז $Y \oplus X$ היא קבוצה סופית (כי הן שוות).
* T טרנזיטיבי: הסגור הטרנזיטיבי של יחס כלשהו הוא טרנזיטיבי.

הוכחה שניה, אינה מסתמכת על סעיף ג1:

* T רפלקסיבי: $I_{P(\mathbb{N})} = D_0 \subseteq D_1 \subseteq T$.

* T סימטרי: $T = \bigcup_{1 \le n \in \mathbb{N}} (D_1)^n$. לפי הנתון בשאלה, $(D_1)^n = D_n$.

מהחילופיות של הפעולה $\oplus$ מובן ש- $|X \oplus Y| \le n$ אםם $|Y \oplus X| \le n$ (זו אותה קבוצה).

לכן כל אחד מהיחסים D_n הוא סימטרי.

נשאיר כתרגיל - הוכיחו שאיחוד של קבוצה כלשהי של יחסים סימטריים הוא יחס סימטרי.

* T טרנזיטיבי: הסגור הטרנזיטיבי של יחס כלשהו הוא טרנזיטיבי.

ד. תהיינה A, B קבוצות **סופיות** של טבעיים.

כללית, $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) \subseteq A \cup B$.

לפי טענה 2 בהדרכה שפורסמה לשאלה, איחוד של שתי קבוצות סופיות הוא סופי, ותת-קבוצה של קבוצה סופית היא קבוצה סופית. לכן $A \oplus B$ סופית. לכן, לפי סעיף ג1 כאן, $(A, B) \in T$.

ה.

טענת-עזר 1: אם A אינסופית ו- B סופית אז $A - B$ אינסופית.

הוכחה: $(A - B) \cup B = A$.

לכן, אילו $A - B$ היתה סופית, היינו מקבלים ש- A היא איחוד של שתי קבוצות סופיות. במקרה כזה A היתה סופית. סתירה להנחה.

טענת עזר 2: אם $Y \subseteq X$ ו- Y אינסופית, אז X אינסופית.

הוכחה: אילו X היתה סופית, Y המוכלת ב- X היתה סופית, בסתירה להנחה.

עד כאן טענות העזר.

כעת, תהי A אינסופית ו- B סופית. לפי טענת עזר 1 , $A - B$ אינסופית. לפי טענת עזר 2, גם $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$, המכילה את $A - B$, היא אינסופית. לכן $(A, B) \notin T$.

ו. נראה **אינסוף קבוצות של טבעיים, שכל אחת מהן היא במחלקה אחרת**.

לשם כך עלינו להראות אינסוף קבוצות, שההפרש הסימטרי בין **כל שתים מהן** הוא אינסופי.

אפשר לתת דוגמאות שונות לאוסף כזה של קבוצות, הנה דוגמא אחת:

לכל $0 < n$ טבעי, תהי B_n קבוצת הטבעיים המתחלקים ללא שארית ב- n.

B_1 היא אפוא קבוצת כל הטבעיים, B_2 היא קבוצת הטבעיים הזוגיים, וכו'.

נוכיח שלכל m,n השונים זה מזה, $B_n \oplus B_m$ היא אינסופית, ולכן $(B_n, B_m) \notin T$.

ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח $n < m$.

לכל k טבעי, המספר $a_k = kmn + n = n(km + 1)$ מתחלק ללא שארית ב- n,

ואינו מתחלק ב- m (הוא נותן שארית n בחילוק ב- m, כי הנחנו $n < m$).

זה נכון כאמור לכל k טבעי.

מצאנו אפוא אינסוף מספרים a_k השייכים ל- B_n ואינם שייכים ל- B_m.

לכן $B_n - B_m$ היא אינסופית.

לפיכך גם $B_n \oplus B_m = (B_n - B_m) \cup (B_m - B_n)$ אינסופית.

לכן $(B_n, B_m) \notin T$.

שאלה 4.3

א. L הוא היחס שהוגדר בסעיף ג של שאלה 3. הוכח ש- $L^2 = L^3$ וש- $L \neq L^2$.

ב. הוכח באינדוקציה על n שלכל $n \geq 2$, $L^n = L^2$.

ג. מהו **הסגור הטרנזיטיבי** של היחס L? הוכח.

ד. תן דוגמא ליחס R מעל $\mathbf{N}-\{0\}$ (או מעל $\mathbf{N}$) המקיים: לכל $n \geq 1$, $R^{n+1} \neq R^n$.

הוכח שהיחס שרשמת הוא אכן בעל תכונה זו. היחס אינו חייב להיות דומה ליחסים שהגדרנו כאן - המציאו יחס כיד הדמיון הטובה עליכם.

תשובה 4.3

א1. בשורה האחרונה של התשובה הקודמת אנו רואים לא רק ש- $(12,2) \notin L$

אלא גם, מהגדרת כפל יחסים, ש- $(12,2) \in L^2$! מצאנו איבר של L^2 שאינו ב- L, לכן $L \neq L^2$.

דרך קצת שונה/וריאציה קלה על ההוכחה: בעבר הוכח ש- $L^2 \subseteq L$ **אםם** L טרנזיטיבית. L **אינה** טרנזיטיבית,

לכן **לא מתקיים** $L^2 \subseteq L$, ולכן ודאי **לא מתקיים** $L = L^2$. לפיכך $L \neq L^2$.

א2. נוכיח: $(x, y) \in L^2$ **אםם** קיימים $m,n \in \mathbf{N}$ כך ש- $x/y = 2^m \cdot 3^n$.

כיוון אחד: אם קיימים $m,n \in \mathbf{N}$ כך ש- $x/y = 2^m \cdot 3^n$, משמע $x = 2^m \cdot 3^n \cdot y$.

נסמן $u = 3^n y$. מתקיים: $x/u = 2^m$, $u/y = 3^n$,

לכן $(x,u) \in L$, $(u, y) \in L$. מהגדרת כפל יחסים: $(x, y) \in L^2$.

כיוון שני: יהי $(x, y) \in L^2$. מהגדרת כפל יחסים, קיים $u \in \mathbf{N}-\{0\}$

כך ש- $(x,u) \in L$, $(u, y) \in L$.

מהגדרת L, קיימים $r,s \in \mathbf{N}$ כך ש- $x = a^r u$, $u = b^s y$, כאשר $a,b \in \{2,3\}$.

כעת, אם $a = b = 2$:

קיבלנו $x = 2^{r+s} y$ משמע $x/y = 2^{r+s}3^0$, וזה ביטוי מהצורה $2^m \cdot 3^n$ כנדרש.

אם $a = b = 3$:

מקביל לגמרי למקרה הקודם.

אם $a = 2$, $b = 3$:

קיבלנו $x = 2^r \cdot 3^s \cdot y$ וזה ביטוי מהצורה הנדרשת.

אם $a = 3$, $b = 2$:

קיבלנו $x = 2^s \cdot 3^r \cdot y$ וזה ביטוי מהצורה הנדרשת. בכל מקרה קיבלנו שקיימים $m,n \in \mathbf{N}$ כך ש- $x/y = 2^m \cdot 3^n$.

א3. L רפלקסיבי, ולכן $L^2 \subseteq L^3$.

נותר לראות ש- $L^3 \subseteq L^2$. יהי $(x, y) \in L^3$, נוכיח ש- $(x, y) \in L^2$.

ההנחה $(x,y)\in L^3$ פירושה, מהגדרת כפל יחסים, שקיימים $u,v\in \mathbf{N}-\{0\}$ כך ש:
$(x,u)\in L$, $(u,v)\in L$, $(v,y)\in L$.
כלומר כל אחד מהמספרים x/u , u/v , v/y הוא חזקה טבעית של 2 או של 3.
המספר $x/y=(x/u)\cdot(u/v)\cdot(v/y)$ הוא לכן **מכפלה** של חזקות של 2 ו/או חזקות של 3.

בדומה למה שעשינו בסעיף א2, **נקבץ** במכפלה זו חזקות בעלות אותו בסיס, ונקבל ש- x/y הוא מהצורה 2^n3^m , $n,m\in\mathbf{N}$. האפשרות שרק חזקות של 2 או רק של 3 מופיעות מכוסה כמו קודם על-ידי המקרים $m=0$, $n=0$.

קיבלנו $x=2^n3^m y$. לכן לפי סעיף א2, $(x,y)\in L^2$ כמבוקש.

ב. **בדיקה**: עבור $n=2$ הטענה טריביאלית.

מעבר: יהי n טבעי המקיים $L^n=L^2$ (הנחת האינדוקציה), נוכיח $L^{n+1}=L^2$:
$L^{n+1}=L^n\cdot L=L^2\cdot L=L^3=L^2$.

נעזרנו בהגדרת חזקה של רלציה ובאסוציאטיביות של כפל רלציות, אחרי כן נעזרנו בהנחת האינדוקציה $L^n=L^2$, אחרי כן שוב בהגדרת חזקה, ולבסוף בשוויון $L^3=L^2$ שקיבלנו בסעיף הקודם. הוכחנו את הטענה עבור $n+1$.
לפי עקרון האינדוקציה, הוכחנו בזאת שהטענה נכונה לכל n טבעי הגדול או שווה 2.

ג. הסגור הטרנזיטיבי של L הוא $\bigcup_{1\le n\in\mathbf{N}} L^n$.

לפי הסעיפים הקודמים בשאלה שלנו, $\bigcup_{1\le n\in\mathbf{N}} L^n = L\cup L^2$.

אפשר לפשט עוד: מכיוון ש- L רפלקסיבי, $L\subseteq L^2$. לכן $L\cup L^2=L^2$, וזהו הסגור הטרנזיטיבי של L.

ד. יהי R היחס הבא מעל $\mathbf{N}$: $R=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \dots\\ 1 & 2 & 3 & \dots\end{pmatrix}=\{\,(i,i+1)\ \mid\ i\in\mathbf{N}\}$.

לא קשה להראות כי לכל $1\le n$, $R^n=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \dots\\ n & n+1 & n+2 & \dots\end{pmatrix}=\{\,(i,i+n)\ \mid\ n\in\mathbf{N}\}$.

מכאן ש- $R^n\ne R^{n+1}$: למשל $(0,n+1)\in R^{n+1}$ אבל $(0,n+1)\notin R^n$.

למעשה אנו רואים שבדוגמא זו $R^n\cap R^k=\varnothing$ לכל $n\ne k$.

שאלה 4.4

תהי K קבוצה, R יחס מעל K.

א. הראה כי אם R רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R\cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל K.

ב. אם R רפלקסיבי וטרנזיטיבי, האם בהכרח $R\cup R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל K?
הראה שכן או הבא דוגמה נגדית.

ג. כמה יחסי שקילות שונות קיימים מעל *{1,2,3}*?
הדרכה: רשום את כל החלוקות האפשריות.

תשובה 4.4

א. **רפלקסיביות**: אם R רפלקסיבית גם R^{-1} רפלקסיבית.

מכאן ומהגדרת רפלקסיביות, $I_K\subseteq R$ וגם $I_K\subseteq R^{-1}$. לפיכך $I_K\subseteq R\cap R^{-1}$,

משמע (שוב מהגדרת רפלקסיביות): $R \cap R^{-1}$ רפלקסיבית.

סימטריות: $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

בפרט, לכל רלציה R: $(R \cap R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R = R \cap R^{-1}$.

משמע, לפי הגדרת רלציה סימטרית, $R \cap R^{-1}$ היא סימטרית.

טרנזיטיביות: אם R טרנזיטיבית אז כך גם R^{-1}.

מכאן, נקבל כי גם $R \cap R^{-1}$ היא טרנזיטיבית.

ב. לא. דוגמא נגדית: $K = \{1,2,3\}$, $R = I_K \cup \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (השלימו הפרטים!).

ג. קיימים 5 יחסי שקילות שונים מעל $\{1,2,3\}$.

ניתן לספור אותן באופן ישיר בעזרת החלוקות שהם מגדירים:

יחס אחד (הזהות) שבה כל המחלקות בגודל 1,

3 יחסים שבכל אחד מהם שתי מחלקות, האחת בגודל 2 והאחרת בגודל 1,

ויחס אחד שהוא בעל מחלקת שקילות יחידה בגודל 3.

שאלה 4.5

נסמן

1. היחס J: $(x,y) \in J$ אם $|x-y| \le 1$.
2. היחס K: $(x,y) \in K$ אם x,y שניהם מספרים שלמים.
3. היחס L: $(x,y) \in L$ אם $|x-y| = 1$.

א. תאר במפורש את היחס J^2. הפתרון יכול **להתחיל**: " $(x,y) \in J^2$ אם קיים z כך ש... ",

אך יש "לפתור" את התנאי הזה ולקבל תנאי מפורש ופשוט, שלא נעזר ב"אברי-ביניים".

יש להוכיח שהיחס שתיארת אכן שווה ל- J^2.

אפשר להיעזר בהוכחה באי-שוויון המשולש: $|a+b| \le |a|+|b|$.

ב. מהו **הסגור הטרנזיטיבי** של היחס J? הוכח.

ג. יהי M הסגור הטרנזיטיבי של L. תאר את היחס M: $(x,y) \in M$ אםם... (הוכח).

ד. הראה כי M הוא יחס שקילות מעל R. מיהם כל אברי המחלקה שבה נמצא 0 ?

תשובה 4.5

א. מהגדרת כפל יחסים, $(x,y) \in J^2$ אםם קיים z כך ש- $(x,z) \in J$, $(z,y) \in J$.

כלומר אםם

קיים z כך ש- $|x-z| \le 1$ וגם $|z-y| \le 1$.

נוכיח ש- z כזה קיים אם ורק אם $|x-y| \le 2$:

כיוון אחד: נניח שקיים z כך ש- $|x-z| \le 1$ וגם $|z-y| \le 1$.

נחשב: $|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \le |x-z| + |z-y| \le 1+1 = 2$.

כאשר במעבר לאי-שוויון השמאלי נעזרנו באי-שוויון המשולש, שהוזכר בשאלה.

כיוון שני: נניח $|x-y| \le 2$.

יהי $z=(x+y)/2$.

אז $\quad |x-z| = |x-\frac{(x+y)}{2}| = |\frac{x}{2}-\frac{y}{2}| = \frac{1}{2}|x-y| \le \frac{2}{2}=1$

בצורה דומה מראים שגם $|z-y| \le 1$. מצאנו z המקיים את המבוקש, ומקיומו נובע $(x,y)\in J^2$.

הראינו את שני הכיוונים, כלומר הוכחנו: $(x,y)\in J^2$ אסם $|x-y|<2$.

ב. הסגור הטרנזיטיבי של J הוא $\bigcup_{n=1}^{\infty} J^n$.

נחשב קודם כל את J^n. **טענת-עזר:** $(x,y)\in J^n$ אסם $|x-y| \le n$:

הוכחת טענת-העזר, כיוון אחד: נניח $(x,y)\in J^n$ ונוכיח $|x-y|\le n$:

מההנחה, קיימת סדרה $(x,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},y)$ שבה כל איבר עומד ביחס J לאיבר הבא.

משמע הערך המוחלט של ההפרש בין כל שני איברים עוקבים בסדרה אינו גדול מ- 1.

כעת נציג:

$$|x-y| = |(x-z_1)+(z_1-z_2)+\ldots(z_{n-1}-y)| \le |(x-z_1)|+|(z_1-z_2)|+\ldots|(z_{n-1}-y)|$$

$$\le |(x-z_1)|+|(z_1-z_2)|+\ldots|(z_{n-1}-y)| \le 1+1+\ldots+1=n$$

כאשר נעזרנו באי-שוויון המשולש עבור מספר כלשהו של משתנים (ניסוח זה ניתן להוכחה באינדוקציה מתוך הניסוח הרגיל של אי-שוויון המשולש).

הוכחת טענת-העזר, כיוון שני: נניח $|x-y|\le n$ ונראה כי $(x,y)\in J^n$:

נסמן $t=(x-y)/n$. מכיוון ש- $|x-y|\le n$, מתקיים $|t|\le 1$.

עבור $i=1,\ldots,n-1$ יהי $z_i=x+i\cdot t$.

מתקיים $|z_{i+1}-z_i|=|t|\le 1$ ולכן $(z_i,z_{i+1})\in J$ עבור $i=1,\ldots,n-2$.

בדומה, $(x,z_1)\in J$.

נחשב גם: $\quad |y-z_{n-1}|=|y-\left(x+(n-1)t\right)|=|y-x-nt+t|$

$$=|y-x-(y-x)+t|=|t|\le 1$$

לכן גם $(z_{n-1},y)\in J$.

קיבלנו שבסדרה $(x,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},y)$ כל איבר עומד ביחס J עם האיבר הבא.

יש n יחסים כאלה בסדרה, ולכן $(x,y)\in J^n$.

הוכחנו: $(x,y)\in J^n$ אסם $|x-y|\le n$.

דרך אחרת להוכיח זאת היא באינדוקציה על n.

אגב, נובע מכך בפרט כי לכל n טבעי חיובי, $J^n \subset J^{n+1}$.

כאמור, הסגור הטרנזיטיבי של J הוא $\bigcup_{n=1}^{\infty} J^n$.

זהו יחס מעל $\mathbf{R}$, לכן הוא מוכל בקבוצה $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

מצד שני, נשים לב **שלכל** $x,y\in\mathbf{R}$ **קיים** n טבעי הגדול מ- $|x-y|$.

(זו תכונה בסיסית של מערכת המספרים, בקורס זה אנו מקבלים טענות מסוג זה כידועות ולא נוכיח אותן). לכן לכל $(x,y)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ קיים n כך ש- $(x,y)\in J^n$.

כלומר כל $(x,y)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ שייך ל- $\bigcup_{n=1}^{\infty} J^n$.

לפיכך $\bigcup_{n=1}^{\infty} J^n = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, כלומר זהו "היחס המלא" מעל $\mathbf{R}$.

ג. לפני שניגשים לחשב את הסגור הטרנזיטיבי של L, עלינו למצוא אחד משני דברים:

אפשרות אחת - לחשב את L^n. מתקבל:

לכל n טבעי חיובי: $(x,y)\in L^n$ אםם $|x-y|$ הוא מספר טבעי, שאינו גדול מ- n, והוא בעל אותה זוגיות כמו n (כלומר אם n זוגי אז $|x-y|$ זוגי, ואם n אי-זוגי אז $|x-y|$ אי-זוגי).

למשל אם $n=2$ אז $|x-y|$ יכול להיות 0 או 2.

אם $n=5$ אז $|x-y|$ יכול להיות 1, 3 או 5.

טענה זו מוכיחים בדומה להוכחת סעיף א, או באינדוקציה. לא נעשה זאת כאן.

לחילופין, במקום לחשב את L^n אפשר לחשב באופן ישיר את $\bigcup_{k=1}^{n} L^k$:

לכל n טבעי חיובי, $(x,y)\in \bigcup_{k=1}^{n} L^k$ אםם $|x-y|$ הוא מספר טבעי, שאינו גדול מ- n.

גם טענה זו ניתן להוכיח באינדוקציה על n.

כך או כך, בעקבות השלב המכין ניתן להראות בדומה לסעיף ב:

$(x,y)\in M$ אםם $x-y$ הוא מספר שלם (אפשר לומר: $|x-y|$ הוא מספר טבעי).

ד. היחס M שתואר בשורה הקודמת הוא:

רפלקסיבי, כי לכל x, $x-x=0\in\mathbf{Z}$.

סימטרי, כי $y-x=-(x-y)$ ולכן אם $x-y\in\mathbf{Z}$ אז $y-x\in\mathbf{Z}$.

טרנזיטיבי: כי הוא סגור טרנזיטיבי של יחס...

לכן M הוא יחס שקילות.

המחלקה שבה נמצא 0 היא קבוצת כל המספרים השלמים, $\mathbf{Z}$.

שאלה 4.6

שאלה זו מיועדת לחדד את מושג הסגור הטרנזיטיבי של יחס. הסגור הטרנזיטיבי של R נתון על-ידי הנוסחה $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, לקבוצה בגודל n ניתן להסתפק ב- $S=\bigcup_{n=1}^{n} R^n$.

א. מדוע לא מספיק בכל מקרה לקחת $S=R\cup R^2$? תני **דוגמא** ליחס R מעל $A=\{1,2,3\}$ כך ש- $R\cup R^2$ **אינו** טרנזיטיבי.

ב. בהינתן $n>1$ כלשהו, תני דוגמא ליחס R מעל $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$, כך ש- $\bigcup_{n=1}^{n-1} R^n$ **אינו** טרנזיטיבי.

ג. תני דוגמא ליחס R מעל קבוצת הטבעיים $\mathbf{N}$, שהסגור הטרנזיטיבי שלו באמת מצריך איחוד של **כל** החזקות שלו: כלומר יחס R כזה, **שלכל** n טבעי, $\bigcup_{n=1}^{n} R^n$ עדיין **אינו** טרנזיטיבי.

תשובה 4.6

א. דוגמא אפשרית: $R=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$. אז: $R^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$.

$R\cup R^2$ אינו טרנזיטיבי כי $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ הם איברים שלו, אך $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ אינו איבר שלו.

ב. בדומה לסעיף הקודם, נקח $R=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\2&3&\dots&1\end{pmatrix}$.

אז $R^2=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\3&4&\dots&2\end{pmatrix}$, וכללית $R^k=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\k+1&(k+2)\bmod n&\dots&k\end{pmatrix}$ $(1\le k\le n-1)$.

בפרט: $R^{n-1}=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\n&1&\dots&n-1\end{pmatrix}$

מהסתכלות **באיחוד** יחסים אלה עבור $k=1,2,\dots,n-1$ נראה כי 1 עובר לכל אחד מהאיברים פרט ל- 1, 2 עובר לכל אחד מהאיברים פרט ל- 2, וכו'.

במלים אחרות: $\bigcup_{k=1}^{n-1} R^k=(A\times A)-I_A$.

יחס זה אינו טרנזיטיבי כי למשל כי $\begin{pmatrix}1\\n\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}n\\1\end{pmatrix}$ הם איברים שלו, אך $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ אינו איבר שלו.

ג. נקח $R=\{\,(i,i+1)\ |\ i\in\mathbf{N}\}$. אז, בדומה לפתרון שאלה 4.5, ובדומה לסעיף הקודם כאן, $R^k=\{\,(i,i+k)\ |\ n\in\mathbf{N}\}$. לכן $\bigcup_{k=1}^{n} R^k=\{(i,i+k)\ |\ 1\le k\le n\}$.

לכל n שנקח, יחס זה אינו טרנזיטיבי, כי למשל $\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}n\\n+1\end{pmatrix}$ הם איברים שלו, אך $\begin{pmatrix}0\\n+1\end{pmatrix}$ אינו איבר שלו.

למעוניינים נמשיך עוד קצת: הסגור הטרנזיטיבי של R דורש אפוא איחוד של כל החזקות של R, והיחס המתקבל הוא: $\{(i\ ,\ j)\ |\ i<j\ \ ,\ \ i,j\in\mathbf{N}\}$.

ובקיצור: הסגור הטרנזיטיבי של R הוא היחס $>$ הרגיל מעל $\mathbf{N}$!

דוגמא אחרת ליחס העונה על הנדרש ניתן לקבל מתוך היחסים L או J שהוגדרו בשאלה 4.5: היחסים שם הוגדרו מעל הממשיים. נצמצם אותם ליחסים מעל הטבעיים, כלומר נקח את החיתוך שלהם עם $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. אם נעשה זאת עבור L, נקבל יחס הקשור ליחס R שהדגמנו כאן - למעשה זהו $R\cup R^{-1}$. הסגור הטרנזיטיבי שלו הוא $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.