אלגברה לינארית 1 - 20109
פתרון לשאלות נבחרות למבחן לדוגמה - א2003

שאלה 1

א. נדרג את מטריצת המקדמים של המערכת :

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & a\\ a+1 & -1 & 1\end{pmatrix}\underset{R_3\to R_3-(a+1)R_1}{\overset{R_2\to R_2-aR_1}{\to}}B=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1-a^2 & 0\\ 0 & -a^2-a-1 & -a\end{pmatrix}=B$$

אם $a^2-1\neq 0$, כלומר $a\neq\pm1$, נמשיך לדרג כך :

$$\overset{R_2\to\frac{1}{1-a^2}R_2}{\to}\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -a^2-a-1 & -a\end{pmatrix}\overset{R_3\to R_3+(a^2+a+1)R_2}{\to}\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

הגענו לצורה מדורגת, ניתן להתחיל את הדיון לפי ערכי a :

אם $\underline{a\neq 1,-1,0}$ מטריצת המקדמים A שקולת שורות למטריצת היחידה ולכן יש פתרון יחיד, הפתרון הטריוויאלי בלבד.

אם $\underline{a=0}$, אז A שקולת שורות למטריצה : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ולכן יש אינסוף פתרונות.

המערכת שקולה למערכת : $\begin{cases}x+z=0\\ y=0\end{cases}$. נסמן : $z=t$ (הוא משתנה חפשי)

<u>והפתרון הכללי הוא $(-t\,,0\,,t)$.</u>

אם $\underline{a=1}$, נציב במטריצה B את $a=1$ ונקבל $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix}$ ומטריצה זו שקולת שורות

למטריצה : $\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ (בדוק!). לכן יש אינסוף פתרונות.

נסמן $z=t$ והפתרון הכללי הוא : $(-\frac{2}{3}t,-\frac{1}{3}t,t)$.

אם $\underline{a=-1}$, נציב במטריצה B את $a=-1$ ונקבל: $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ והיא שקולת שורות

למטריצה: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

נסיק שיש אינסוף פתרונות, נסמן $z=t$ והפתרון הכללי הוא: $(0,t,t)$.

לסיכום:

אם $a\neq 1,-1,0$ פתרון טריוויאלי בלבד.

אם $a=0$ הפתרון הכללי הוא: $(-t,0,t)$, t ממשי.

אם $a=1$ הפתרון הכללי הוא: $(-\frac{2}{3}t,-\frac{1}{3}t,t)$, t ממשי.

אם $a=-1$ הפתרון הכללי הוא: $(0,t,t)$, t ממשי.

ב. נשתמש בזהות: $(I+\alpha A)(I-\alpha A)=I-(\alpha A)^2$

מההנחה נובע: $(I+\alpha A)(I-\alpha A)=I$ (כי $(\alpha A)^2=\alpha^2A^2=0$) ונסיק מיד כי $I+\alpha A$

הפיכה ו- $(I+\alpha A)^{-1}=I-\alpha A$.

שאלה 2

א. 1) נניח שמתקיים: $\lambda_1(v_1-v_n)+\lambda_2(v_2-v_n)+...+\lambda_{n-1}(v_{n-1}-v_n)=0$ (*)

כאשר $\lambda_1,...,\lambda_{n-1}$ סקלרים.

נוכיח כי $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_{n-1}=0$

לאחר פיתוח סוגריים ושימוש בחוק הקיבוץ, מתקבל מ-(*):

$\lambda_1v_1+...+\lambda_{n-1}v_{n-1}+(-\lambda_1-\lambda_2...-\lambda_{n-1})v_n=0$

מההנחה ש- $v_1,...,v_n$ בת"ל (כי מהווים בסיס) נובע כי $\lambda_1=...=\lambda_{n-1}=0$

ולכן $v_1-v_n,v_2-v_n,...,v_{n-1}-v_n$ בת"ל.

2) נניח כי $v_1,...,v_n$ פתרונות של המערכת $A\underline{x}=\underline{b}$. ידוע שהפרש של פתרונות של מערכת

אי-הומוגנית הוא פתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה, לכן $v_1-v_n,...,v_{n-1}-v_n$ הם

פתרונות של המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$, ולכן

מימד מרחב הפתרונות של $A\underline{x}=\underline{0}$ הוא לפחות $n-1$ כי $v_1-v_n,...,v_{n-1}-v_n$ בת"ל.

מימד זה אינו יכול להיות n כי, אם הוא שווה ל-n, אז כל וקטור ב- $\mathbf{R}^n$ הוא פתרון של

המערכת, ז"א לכל $x\in\mathbf{R}^n$ $A\underline{x}=\underline{0}$, מה שסותר את ההנחה כי $Av_1=\underline{b}$ (למשל).

לכן מימד מרחב הפתרונות של $Ax=0$ הוא $\underline{n-1}$.

ידוע כי: $\dim$ (מרחב הפתרונות של $Ax=0$) $= n-\rho(A)$

לכן יוצא כי: $\underline{\rho(A)=1}$

ב. נניח כי A מטריצה סינגולרית מסדר 3×3 כך ש- $|A-2I| = |A+2I| = 0$

נסמן ב-W מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\underline{x} = \underline{0}$.

מצד שני, מכיוון ש-A סינגולרית יש למערכת אינסוף פתרונות.

מההנחות: $|A-2I| = |A+2I| = 0$ נובע כי 2 ו-2- - ערכים עצמיים של A ומכיוון ש- A סינגולרית אז 0 גם ערך עצמי. למטריצה A יש 3 ערכים עצמיים שונים ו-A מסדר 3×3. לכן המימד של כל מרחב עצמי הוא 1.

המרחב העצמי של 0 הוא בדיוק W ולכן $\underline{\dim W = 1}$.

שאלה 3

נתון: $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \mid a_i \in R,\ \ 0 \le i \le 4\}$

$U = \{p(x) \in V \mid p(1) = p(-1) = 0\}$

$W = \{p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0\}$

יהי $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$

אזי: $p(x) \in U \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$

לכן: $U = \{p(x) \in V \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ וגם $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0\}$

באופן דומה:

$W = \{p(x) \in V \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ וגם $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 0\}$

א. נוכיח כי U ו-W תת-מרחבים של v:

$U \ne \varnothing$ כי $p(x) = 0$ מקיים את התנאים של U.

יהיו $p(x), q(x)$ ב-u ו- μ, λ ממשיים.

אז: $(\lambda p + \mu q)(1) = \lambda p(1) + \mu q(1) = 0 + 0 = 0$

באופן דומה בודקים כי $\lambda p(-1) + \mu q(-1) = 0$. הוכחנו ש- $\lambda p + \mu q \in U$ ולכן U תת-מרחב של V. באופן דומה מוכיחים כי W תת-מרחב של V.

ב. על מנת למצוא בסיס ל-U, נפתור את המערכת:
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

נדרג את המטריצה המתאימה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן: $a_0 = -a_2 - a_4$ ו-$a_1 = -a_3$, כאשר a_4, a_3, a_2 חפשיים.

ולכן הצורה הכללית של פולינום ב-u היא:

$$p(x) = (-a_2 - a_4) - a_3 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

מכיוון שיש 3 משתנים חפשיים, המימד של U הוא 3 ונקבל בסיס ל-U ע"י כך שנציב 2 מהמשתנים החפשיים שווים ל-0 והשלישי שווה ל-1:

$a_2 = 1 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 0$ $a_2 = 0 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = 0$ $a_2 = 0 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 1$

$q_1(x) = -1 + x^2$ $q_2(x) = -x + x^3$ $q_3(x) = -1 + x^4$

(<u>בודקים</u> שהפולינומים $q_i(x)$ מקיימים את התנאים של u)

<u>לכן בסיס ל-u</u> = $\{x^2 - 1, x^3 - x, x^4 - 1\}$ (1)

באופן דומה מקבלים בסיס ומימדו של w: $\dim W = 3$

<u>ובסיס ל-w</u> = $\{2 - 3x + x^2, 6 - 7x + x^3, 14 - 15x + x^4\}$ (2)

בסיס ל-$U \cap W$ מתקבל באופן דומה:

$$U \cap W = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \mid p(1) = p(-1) = p(2) = 0 \right\}$$

$$p(x) \in U \cap W \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 0 \end{cases}$$

לאחר דרוג המטריצה המתאימה מקבלים: $a_0 = 2a_3 + 4a_4$, $a_1 = -a_3$, $a_2 = -2a_3 - 5a_4$

ולכן בסיס של $U \cap W$ הוא: $\{x^3 - 2x^2 - x + 2, 4 - 5x^2 + x^4\}$ ו-$\dim(U \cap W) = 2$.

ג. <u>מציאת בסיס ל-$U + W$</u>:

עפ"י (1) ו-(2) $U = Sp\{x^2 - 1, \ x^3 - x, \ x^4 - 1\}$

ו- $W = Sp\{x^2 - 3x + 2, \ x^3 - 7x + 6, \ x^4 - 15x + 14\}$

לכן:

$$U + W = Sp\{x^4 - 1, \ x^3 - x, \ x^2 - 1, \ x^2 - 3x + 2, \ x^3 - 7x + 6, \ x^4 - 15x + 14\}$$

(מפני שאם $U = SpA$, $W = Sp(B)$ אזי $U + W = Sp(A \cup B)$)

על מנת למצוא בסיס ל- $U+W$, נעבור לוקטורי קואורדינטות של הפולינומים האלה לפי בסיס שנבחר, למשל: $B=(x^4, x^3, x^2, x, 1)$.

נדרג את המטריצה ששורותיה הן וקטורי הקואודינטות האלה, והשורות השונות מ-0 בצורה מדורגת יתנו לנו בסיס ל- $U+W$ (לאחר חזרה לפולינומים).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -15 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נחזור לפולינומים ונקבל בססי ל- $U+W$: $\{x^4-1, x^3-x, x^2-1, x-1\}$

ונסיק כי $\dim(U+W)=4$.

בדיקה: נבדוק שמתקיים "משפט המימד":

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W) \qquad 4=3+3-2$$

ובכן הוא מתקיים.

שאלה 4

א. נשתמש בסימונים המופיעים בשאלה. נעיר שמתקיים $p(v)=u$ אם ורק אם $v=u$, זאת אומרת אם ורק אם $v\in U$. נובע מכך ש- $\lambda=1$ הוא ערך עצמי של p ו- U הוא המרחב העצמי השייך לערך זה. בנוסף, ברור ש- $\ker p=W$, לכן $\lambda=0$ הוא ערך עצמי של p ו- W הוא המרחב העמי המתאים. מכיוון ש- $\dim U+\dim W=n$, הסכום של הריבובים הגיאומטריים של הערכים העצמיים האלה שווה ל- n ולכן 0,1 הם הערכים העצמיים היחידים של p. מכיוון ש- V הוא סכום ישר של המרחבים העצמיים של p, אז ההעתקה p לכסינה (שאלה 40).

ב. נמצא את המשלים האורתוגונלי של U. ע"פ טענה VIII.7, הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. נובע מיד כי $U^{\perp}=Sp\{(1,0,-1)\}$ ולכן בסיס אורתונורמלי שלו הוא $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

שאלה 5

א. (i) נניח שמתקיים $V=\operatorname{Im}T\oplus\ker T$ ונוכיח ש- $\operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$. הקורא יוכיח ש- $\operatorname{Im}T^2\subseteq\operatorname{Im}T$, זהו תרגיל סטנדרטי. יהי $v\in\operatorname{Im}T$, אז קיים $u\in V$ כך ש- $v=T(u)$.
מאידך נובע מהנתון $V=\operatorname{Im}T\oplus\ker T$ שקיימים $u_2\in\ker T$ ו- $u_1\in\operatorname{Im}T$ כך ש- $u=u_1+u_2$. אז: $v=T(u)=T(u_1)+T(u_2)$. אך $T(u_2)=0$ (כי $u_2\in\ker T$) ו-

$T(u_1)=T(T(w))=T^2(w)$ עבור w מסוים (כי $u_1 \in \operatorname{Im} T$). קיבלנו כך ש- $v=T^2(w)\in \operatorname{Im} T^2$, כלומר $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Im} T^2$. יחד עם ההכלה הקודמת יוצא כי $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$.

(ii) נוכיח ש-: $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2 \Leftarrow \ker T = \ker T^2$.

קל להוכיח שעבור כל העתקה ליניארית T מתקיים $\ker T \subseteq \ker T^2$. מאידך, ע"פ משפט המימד עבור העתקה ליניארית, מתקיים $\dim\ker T + \dim \operatorname{Im} T = n$ וגם $\dim\ker T^2 + \dim \operatorname{Im} T^2 = n$. יחד עם השוויון $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2$ מתקבל ש- $\dim\ker T = \dim\ker T^2$. לסיכום, התת- מרחבים $\ker T^2$, $\ker T$ בעלי אותו מימד ואחד מהם מוכל בשני , לכן $\ker T = \ker T^2$ (משפט V.29).

(iii) נניח עתה ש- $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$. יהי $v \in \operatorname{Im} T \cap \ker T$. אז $T(v)=0$ ומאידך, קיים $u \in V$ כך ש- $v=T(u)$. אז $T(v)=T^2(u)=0$, מה שגורר ש- $u \in \ker T^2$.

ע"פ סעיף (ii) מתקיים $\ker T = \ker T^2$. לכן $u \in \ker T$ ו- $v=T(u)=0$ והוכחנו ש- $\operatorname{Im} T \cap \ker T = \{0\}$. נפעיל את משפט V.30 וגם משפט VI.19 ומתקבל ש- $V = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$.

<u>סיכום</u>: מסעיפי (i) ו- (iii) יוצא ש- $V = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$ אם ורק אם $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$.

ב. הטענה לא נכונה: למשל , ניקח $A=0$. אז $A+B=B$ ורואים מיד ש- 0 הוא הערך העצמי היחיד של המטריצה $A+B$. אם $A+B$ הייתה לכסינה היא הייתה דומה למטריצת האפס ולכן שווה לה. אך $A+B=B\neq 0$.

<u>הערות</u>:

א. דרך אחרת לשאלה 2 סעיף 2):

לכל v_i, $1 \le i \le n$, מתקיים $Av_i = \underline{b}$. לכן, אם נסמן ב-T את הטרנספורמציה הלינארית מ- $\mathbf{R}^n$ ל- $\mathbf{R}^m$ מוגדרת ע"י $T(v) = Av$, אז המטריצה של T לפי הבסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ היא המטריצה מסדר $m \times n$, שעמודותיה הן הקואורדינטות של הוקטור $\underline{b}$ לפי הבסיס B. דרגתה של מטריצה זו היא 1 והיא גם שווה לדרגה של T, וגם של A, לכן המסקנה.

ב. דרך אחרת לשאלה 3:

מכיוון שהפולינומים של U הם הפולינומים המתחלקים ב-$x-1$ ו-$x+1$

ניתן לכתוב: $U=\left\{(x^2-1)(ax^2+bx+c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\right\}$ ובאופן מיידי נובע כי הקבוצה $\left\{x^2(x^2-1),\, x(x^2-1),\, x^2-1\right\}$ היא בסיס ל-U.

באופן דומה ניתן למצוא בסיס ל-w כי:

$$W = \{(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$$

ו- $U \cap W = \{(x-1)(x+1)(x-2)(ax+b) \mid a,b,\in \mathbf{R}\}$