

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי $A = \{1, 2, 3\}$. תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל A .
תהי $t: M \rightarrow M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הטרנזיטיבי שלו.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

- (5 נק') א. t היא פונקציה חד-חד-ערכית.
(5 נק') ב. לכל $R, S \in M$, $t(RS) = t(R)t(S)$ (הכפל כאן הוא כפל רלציות).
(5 נק') ג. לכל $R \in M$, אם R אינו רפלקסיבי אז $t(R)$ אינו רפלקסיבי.
(5 נק') ד. לכל $R \in M$, אם $t(R)$ אינו רפלקסיבי אז R אינו רפלקסיבי.
(5 נק') ה. לכל $R \in M$, $t(t(R)) = t(R)$.

שאלה 2

תהינה k, m_1, m_2 עוצמות שונות מאפס, ייתכן אינסופיות.
נתון $m_1 \leq m_2$. הוכיחו: $m_1^k \leq m_2^k$.
הדרכה: בחרו קבוצות בעלות עוצמות מתאימות.
כדי לפשט את ההוכחה כדאי להיעזר בשאלה 5.1א בחוברת "פרק 5 בתורת הקבוצות".

שאלה 3

תהי B קבוצת המחרוזות באורך 5, הבנויות בעזרת האותיות a, b, c, d, e (לא כל האותיות חייבות להופיע). למשל $aaeeb \in B$.
נגדיר יחס שקילות מעל B : שתי מחרוזות ייקראו שקולות אם קבוצת האותיות המופיעות במחרוזת האחת שווה לקבוצת האותיות המופיעות במחרוזת השניה.
למשל $aeeee$ שקולה ל- $aaeee$ ושקולה ל- $eaade$,
מכיון שלכל אחת מהמחרוזות האלה, קבוצת האותיות המופיעות בה היא $\{a, e\}$.
סעיפים ב, ג, ד, עוסקים ביחס השקילות הזה. אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.
(4 נק') א. כמה איברים יש ב- B ?
(6 נק') ב. כמה מחלקות שקילות יש?
(5 נק') ג. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $abcde$?
(5 נק') ד. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aaaab$?
(5 נק') ה. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aabcd$?
הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה 4

בחדר משחקים נמצאים חפצים אלה:

ארבע קוביות: קוביה כחולה, קוביה אדומה, קוביה ירוקה וקוביה לבנה;

ארבעה כדורים: כדור כחול, כדור אדום, כדור ירוק וכדור לבן;

ארבעה גלילים: גליל כחול, גליל אדום, גליל ירוק וגליל לבן.

9 נק') א. בכמה דרכים ניתן לחלק את 12 החפצים ל-4 קבוצות, כאשר בכל קבוצה יש

בדיוק כדור אחד, קוביה אחת וגליל אחד? **אין חשיבות לסדר הקבוצות.**

16 נק') ב. בכמה מהדרכים הנ"ל, **באף אחת** מהקבוצות אין 3 חפצים בעלי אותו צבע?

שאלה 5

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים x_1, x_2, \dots , סימן פרדיקט דו-מקומי R , סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 המתפרש כרגיל **כשוויון** וסימני הכמתים \forall, \exists . אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים.

תהי J אינטרפרטציה של L לעולם כלשהו שאיבריו הם קבוצות. הסימן R מתפרש כך:

$R(x_1, x_2)$ פירושו $x_1 \in x_2$, כלומר הקבוצה x_1 היא **איבר** של הקבוצה x_2 .

9 נק') א. רשום **פסוק** בשפה L , שהפירוש שלו ב- J הוא:

שתי קבוצות בעולם הן שוות אם ורק אם יש להן בדיוק אותם איברים.

9 נק') ב. רשום פסוק בשפה L , שהפירוש שלו ב- J הוא:

לכל x_1 ולכל x_2 בעולם, קיימת בעולם הקבוצה $\{x_1, x_2\}$.

7 נק') ג. האם יש עולם לא ריק, בעל מספר **סופי** של איברים, שכולם קבוצות,

כך שהפסוק מסעיף ב אמיתי בעולם זה בפירוש J הנ"ל?

אם יש - תן דוגמא לעולם כזה. אם אין - הסבר מדוע אין.

בסעיפים א, ב - כתיב מקוצר מותר. הקפד לשים סוגרים שימנעו דו-משמעות בקריאה.

בהצלחה!