מתימטיקה דיסקרטית 20276
מושגים בסיסיים בתחשיב הפרדיקטים

1. פסוקים בתחשיב הפסוקים ועצי הבניה שלהם

בשפת תחשיב הפסוקים הביטויים שמעניינים אותנו הם פסוקים...
אלו מחרוזות מסוג מסוים. למשל: A_4 , $\sim(A_4)$, $(\sim(A_4)) \to A_3$.

פסוק בשפת תחשיב הפסוקים מוגדר להיות מחרוזת המתקבלת מתוך פסוקים יסודיים, קשָׁרים לוגיים וסוגרים, לפי הכלל הרקורסיבי המתואר בכרך "לוגיקה" עמ' 37 הגדרה 2.2 . אגב, השימוש רק בסימני השלילה והחץ כדי לבנות פסוקים (והוספת הקשרים הלוגיים האחרים כגון $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ רק בשלב מאוחר יותר, כסימנים מקוצרים) הוא עניין של טעם. באותה מידה ניתן היה להגדיר פסוק תוך שימוש בכל הקשרים הלוגיים המקובלים. בבחינה אפשר להיעזר בכל הקשרים באופן חפשי.

דרך טובה להבין את ההגדרה הרקורסיבית של פסוק היא לחשוב על עץ הבניה שלו ("לוגיקה" עמ' 44 – 45). בעלי העץ יושבים פסוקים יסודיים, וביטוי היושב בצומת בעץ שאינו עלה מתקבל מהביטויים שבצומת או זוג צמתים השכנים שמיד מעליו, ע"י שימוש באחד מ"כללי היצירה" הרקורסיביים שבהגדרה 2.2 סעיף ב' (אם אנו משתמשים בעוד קשרים לוגיים, יהיה כמובן "כלל יצירה" מתאים לכל קשר לוגי).

שפת תחשיב הפרדיקטים היא שפה עשירה הרבה יותר.
בשפה זו יש לפחות שני סוגים של מחרוזות שאנו מתעניינים בהן.

2א. שפת תחשיב הפרדיקטים: בניית שמות-עצם

נחלק את הבניה של שפת תחשיב הפרדיקטים לשני שלבים:
בשלב ראשון נבנה שמות-עצם. המצרכים הבסיסיים לשלב זה הם:
א. סימני קבועים $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ב. סימני משתנים $x_1, x_2, x_3, \ldots$,
ג. לכל n טבעי, סימני פונקציות n-מקומיות: $f_1^n,\ f_2^n,\ f_3^n,\ \ldots$,
ד. סוגרים והסימן "," (פסיק).

שמות עצם מוגדרים רקורסיבית מתוך התוים הללו, בעמ' 95, הגדרה 3.2 .
גם כאן מועיל לחשוב על עץ בניה (למרות שעץ בניה של שם-עצם אינו מוזכר בספר). הרעיון דומה, ורק כללי בניית העץ שונים: בכל עלה של עץ הבניה של שם-עצם יושב סימן קבוע a_i או סימן משתנה x_i . בצמתים שאינם עלים יושבים ביטויים המתקבלים מביטויים שבצמתים השכנים שמיד מעל, בעזרת כלל היצירה שבהגדרה 3.2 סעיף (2). הפעם ייתכנו יותר משני שכנים מידיים מעל צומת.

דוגמאות לשמות-עצם: x_1 , c_4 , $f_1^1(x_1)$, $f_1^2(f_1^1(x_1), c_1)$, $f_1^3(x_2\,,\ f_1^2(f_1^1(x_1), c_1),\ f_1^1(x_1))$

תרגיל: שרטט עץ בניה לשם-העצם $f_1^3(x_2\ ,\ f_1^2(f_1^1(x_1),c_1),\ f_1^1(x_1))$ לפי הכללים שתוארו כאן.

<u>נקודה קריטית להבנת המושגים</u>: שם-עצם הוא **מחרוזת** המקיימת תנאים מסוימים. כאשר אנו אומרים שמתוך הסימן x_1 נוכל לבנות בעזרת ההגדרה הרקורסיבית את שם העצם $f_1^1(x_1)$, **הכוונה אינה להפעיל את הפונקציה** f_1^1 **על המשתנה** x_1 ולומר משהו על תוצאת ההפעלה הזו (בשלב זה אין בידינו כל פירוש לסימן f_1^1, ולא נוכל לדבר על תוצאת הפעלת הפונקציה)!
הכוונה היא <u>**שהמחרוזת**</u>, שהתו הראשון בה הוא f_1^1, התו השני הוא סוגר שמאלי, התו השלישי הוא x_1 והתו הרביעי הוא סוגר ימני - **היא שם-עצם**!
אנו נמצאים בשלב של בניית התחביר (סינטקס), וכל מה שאנו בונים הוא **מחרוזות**.

בשלב מאוחר יותר ניתן למחרוזות אלו פירושים. למשל, אם c_1 יתפרש כ**משה** והסימן f_1^1 יתפרש כפונקציה המתאימה לכל אדם את אביו, אז $f_1^1(c_1)$ יתפרש כ**אבא של משה**.

אגב, שימו לב שסימן הפסיק הוא אכן חלק חיוני בשפה. בשפת תחשיב הפסוקים פסיק לא היה סימן בשפה. נעזרנו לעתים בפסיק בשפת-העל שלנו, כשניתחנו את שפת תחשיב הפסוקים. הפעם, בשפת תחשיב הפרדיקטים, הפסיק הוא אחד מסימני השפה.

נסכם: הסוג הראשון של מחרוזות שתחשיב הפרדיקטים עוסק בהן הוא שמות-עצם.
בשלב מאוחר יותר נפרש את שמות-העצם כעצמים בעולם כלשהו שנבחר.

2ב. שפת תחשיב הפרדיקטים: בניית תבניות

לשם כך עלינו להוסיף לשפה את המצרכים הבסיסיים הבאים:

ה. לכל n טבעי, סימני יחסים (פרדיקטים) n-מקומיים: $A_1^n,\ A_2^n,\ A_3^n,\ \ldots$,

ו. הקשרים הלוגיים $\sim, \to, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ המוכרים מתחשיב הפסוקים,

ז. סימני הכמתים $\forall, \exists$.

<u>נקודה קריטית להבנת המושגים</u>: אנו בונים כעת את התחביר, ולכאורה אין צורך עדיין להבין איך נפרש בהמשך את הסימנים, אבל בלי להבין את המשמעות קשה להבין את התחביר, לכן נקדים ונאמר לפחות זאת: סימני היחסים (פרדיקטים) $A_1^n,\ A_2^n,\ A_3^n,\ \ldots$ **הם פשוט סימנים עבור רלציות**, בהן דנו בתחילת הקורס. בתורת הקבוצות עסקנו רוב הזמן ברלציות דו-מקומיות, אך הוזכר גם קיומן של רלציות חד-מקומיות, תלת-מקומיות וכו' ("תורת הקבוצות" עמ' 31 הגדרה 2.3). דוגמא לרלציה חד-מקומית מעל הטבעיים: **להיות מספר ראשוני**.
דוגמא לרלציה תלת-מקומית מעל הטבעיים: $R(a,b,c)$ אםם $a+b>c$.

כאשר נגיע לשלב הפירוש, נוכל לפרש למשל את הסימן A_1^1 כתכונה **להיות ראשוני**, ואת הסימן A_1^3 כיחס התלת-מקומי R שתיארנו זה עתה.

חזרה לענייננו: בניית תבניות מסתמכת על שמות-העצם שכבר בנינו, והיא נעשית בשני צעדים.
צעד ראשון הוא הגדרת תבנית אטומית: זו הגדרה **שאינה רקורסיבית**, אלא ישירה:
הגדרה 3.3 בעמ' 96. ראו גם הדוגמאות שם. שימו לב שתבנית אטומית יכולה להיראות מסובכת, אם הארגומנטים שלה הם שמות-עצם מורכבים, ובכל זאת היא ראויה לשם תבנית אטומית...

כמו לגבי שמות-עצם, שימו לב שאנו מתארים כאן **מחרוזות**. הפירוש שלהן כטענות יגיע אח"כ.
תבנית אטומית היא מחרוזת, שהתו הראשון בה הוא תו יחס n-מקומי A_i^n, אחריו סוגר שמאלי, אחריו באים n שמות עצם מופרדים בפסיקים, ולבסוף סוגר ימני.

הצעד האחרון הוא בניית תבניות כלליות.
כאן יש לנו שוב הגדרה רקורסיבית: הגדרה 3.4 בעמ' 96. נתאר גם אותה בעזרת עץ:
בעלים של עץ הבניה של תבנית יושבות תבניות אטומיות. בכל צומת שאינו עלה יושבת מחרוזת, המתקבלת מהמחרוזות הנמצאות בצמתים שמיד מעליה, בעזרת אחד הכללים שבהגדרה 3.2 סעיף (2). כללים אלה הם משני סוגים:
כלל מסוג ראשון – מתוך תבנית או תבניות ניתן לקבל תבנית חדשה ע"י הוספת קשר לוגי וסוגרים, באותה צורה כמו בתחשיב הפסוקים.
כלל מסוג שני – מתוך תבנית כלשהי ψ ניתן לקבל תבנית חדשה ע"י הוספת כמת $\forall$ או $\exists$ לפני ψ, עם סימן משתנה וסוגרים: $\forall x_i(\psi)$, $\exists x_i(\psi)$.
תרגיל: שרטט עץ בניה כאמור, עבור הדוגמאות א', ב' שבעמ' 96 .

עד כאן תיאור התחביר.
השלב הבא הוא לתת פירוש לביטויים.

3. אינטרפרטציות (על קצה המזלג)

בשפת תחשיב הפסוקים, הגדרנו **אינטרפרטציה** (מלאה), כמתן ערכי אמת לכל הפסוקים היסודיים. נקודה מרכזית שם היתה זו:
ברגע שנתנו ערכי אמת לפסוקים היסודיים, כל הפסוקים המורכבים קיבלו אף הם אוטומטית ערכי אמת!
ערכי האמת של הפסוקים המורכבים התקבלו מתוך ערכי האמת של הפסוקים היסודיים, בעזרת לוחות האמת של הקשרים הלוגיים, ותוך שימוש בהגדרה הרקורסיבית של פסוק.

אינטרפרטציה של שפת תחשיב הפרדיקטים היא מושג עשיר יותר.
כדי להגדיר אינטרפרטציה לשפת תחשיב הפרדיקטים, עלינו קודם כל לבחור קבוצה לא-ריקה שבתוכה נפרש את העצמים: קבוצה זו נקראת **עולם האינטרפרטציה**.
למשל: קבוצת בני-האדם, קבוצת המספרים הטבעיים.
אחרי כן, ניתן לכל אחד מסימני הקבועים c_i פירוש כאיבר בעולם שבחרנו.
לכל סימן פונקציה n-מקומית ניתן פירוש כפונקציה n–מקומית מעל אותו עולם.

ולכל סימן יחס n-מקומי ניתן פירוש כיחס n–מקומי מעל אותו עולם.

על-מנת להבהיר שוב: עד עתה סימני הקבועים, סימני הפונקציות וסימני המשתנים היו פשוט תוים חסרי משמעות, כשם שבשפת תחשיב הפסוקים הפסוקים היסודיים היו תוים סתמיים. רק כשהחלטנו איזו פונקציה "אמיתית" (ומעל איזו קבוצה) תתאים לסימן f_1^1, נוכל לדבר על כך שהוא מייצג פונקציה. ובדומה – עבור שאר הסימנים. **ההבחנה בין שפה ופירוש היא מיסודות הלוגיקה.**

נמשיך: לאחר שבחרנו אינטרפרטציה, נוכל אם נרצה להוסיף עוד מידע, הקרוי **השמה**:

זו התאמה של איבר בעולם לכל אחד מסימני המשתנים x_i.

מידע זה דומה לגמרי לאותו חלק באינטרפרטציה המתאים איבר בעולם לכל סימן קבוע c_i.

אך מסיבות שונות, יש עניין להפריד את מתן הערכים למשתנים מעצם האינטרפרטציה, ולתת לו כינוי נפרד: השמה. פעולת ההשמה מוכרת לנו מבית-הספר בכינוי "הצבה" - הצבה של ערך למשתנה. זו אכן בדיוק אותה פעולה, עם כינוי מרשים יותר....

וכעת לצעד האחרון: כשם שבתחשיב הפסוקים, מתן ערכי אמת לפסוקים היסודיים קבע ערכי אמת לכל הפסוקים בשפה, כך כאן – **בחירת אינטרפרטציה+השמה כאמור, נותנות אוטומטית מובן לכל אחד מהביטויים שתיארנו בשפת תחשיב הפרדיקטים.** מובנים אלה מתקבלים מתוך המובנים המפורשים באינטרפרטציה ובהשמה, בעזרת ההגדרות הרקורסיביות של הביטויים:

א. לכל שם-עצם יותאם איבר בעולם. כבר ראינו דוגמא לכך:

אם c_1 מתפרש כ**משה** והסימן f_1^1 מתפרש כפונקציה המתאימה לכל אדם את אביו,

אז שם-העצם $f_1^1(c_1)$ מתפרש כ**אבא של משה**.

כללית – ר' הגדרה 3.13 בעמ' 109.

ב. כל תבנית תקבל ערך אמת T או F .

ר' הגדרה 3.14 בעמ' 110.

רוב ההגדרה הנ"ל אינו קשה להבנה, אך סעיף 4 שלה אינו קל כלל.

בהזדמנות אחרת אפרט לגביו. בינתיים – אם הוא אינו מובן, אנא היעזרו במנחים .

עד כאן בינתיים.

איתי הראבן.