גירסה 1.00 – 6.12.2003

תורת הקבוצות

ניר אדר

מסמך זה הורד מהאתר http://underwar.livedns.co.il.
אין להפיץ מסמך זה במדיה כלשהי, ללא אישור מפורש מאת המחבר.
מחבר המסמך איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע המופיע במסמך, וכן לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים במסמך. עם זאת, המחבר עשה את מירב המאמצים כדי לספק את המידע המדויק והמלא ביותר.

כל הזכויות שמורות ל**ניר אדר**

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

אנא שלחו תיקונים והערות אל המחבר.

1. תוכן עניינים

2. מושגי יסוד בתורת הקבוצות

2.1. הגדרת קבוצה

קבוצה היא ישות המורכבת מאוסף אלמנטים המכונים **איברי הקבוצה**. אין חשיבות לסדר בין האלמנטים בקבוצה, וכמו כן אין חזרות, כלומר כל אלמנט מופיע פעם אחת לכל היותר.
האלמנטים של קבוצה לא חייבים להיות מאותו סוג, למשל, חלקם יכולים להיות מספרים וחלקם אותיות.
כמו כן, אלמנטים של קבוצות יכולים להיות קבוצות בעצמם.
קבוצה מוגדרת באופן חד ערכי על ידי האלמנטים שבה. על מנת להגדיר קבוצה יש להגדיר במפורש אילו אלמנטים נמצאים בקבוצה.
דוגמאות:

$A = \{1, 2, 5\}$
$B = \{0.5, a, \text{אבג}\}$
$C = \{1, 3, \{1\}, \{1, 3\}\}$

<u>כיצד ניתן להגדיר קבוצה?</u>

- מניית איברי הקבוצה בין סוגריים מסולסלות.
  שיטה זו לפעמים איננה מעשית, לדוגמא עבור קבוצת המספרים בין 0 ל-100000, ולעתים גם איננה אפשרית, לדוגמא, קבוצת המספרים השלמים.
- ניתן לפרט את איברי הקבוצה תוך כדי שימוש ב"...". דוגמא: $\{1, 2, ..., 100\}$
- הגדרת הקבוצה על ידי תכונה (פרדיקט) שמאפיינת את כל איברי הקבוצה ורק אותם.
  דוגמאות:
  - $A = \{X \mid 3 \le X \le 10^6 \text{ and also X is integer }\}$.
  - $\mathbb{N}$ טבעיים, $\mathbb{N} = \{x \mid x \ge 0 \text{ and } x \text{ is integer}\}$
  - $\mathbb{Q}$ רציונליים, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \text{ are integers and also } n \ne 0\right\}$.

2.2. הקבוצה הריקה

קבוצה ריקה היא קבוצה שלא מכילה אלמנטים (מספר איבריה הוא 0).

סימונים לקבוצה ריקה: $\phi ,\{\}$.

הערה חשובה: הקבוצה ϕ והקבוצה $\{\phi\}$ לא שוות. ϕ שקית ריקה, $\{\phi\}$ שקית בתוך שקית.

2.3. גודל של קבוצה

קבוצה היא סופית אם קיים מספר טבעי n כך שמספר איבריה היא n.

קבוצה היא אינסופית אחרת, כלומר כאשר לא קיים n כזה.

נשים לב לקבוצה הבאה: { { 0, 1, 2, ... } }. קבוצה זו בעלת איבר אחד! (קבוצה אחרת).

עבור קבוצה סופית A, נסמן ב-|A| את מספר איבריה = הגודל שלה.

$$|\phi| = 0$$

$$|\{\phi\}| = 1$$

$$|\{X \mid 5 \le X \le 20 \text{ and also X is integer}\}| = 16$$

$$|\{1,3,\{1,3\}\}| = 3$$

2.4. גרירה לוגית ואמ"מ

תהיינה α ו- β טענות.

- כשמסמנים $\alpha \Rightarrow \beta$ ואומרים " α גורר את β " הכוונה שאם הטענה α מתקיימת אזי גם הטענה β חייבת להתקיים.
- כשמסמנים $\alpha \Leftrightarrow \beta$ ואומרים " α אמ"מ β " הכוונה היא $\alpha \Rightarrow \beta$ וגם $\beta \Rightarrow \alpha$. שתי הטענות או מתקיימות או לא מתקיימות ביחד.

2.5. שייכות

אם a איבר בקבוצה A, מסמנים $a \in A$ ואומרים "a שייך ל-A".

אם a אינו איבר ב-A מסמנים $a \notin A$ ואומרים "a לא שייך ל-A".

<u>דוגמא</u>

$A = \{1, \{3\}, \{2,5\}, \{1, \{3\}\}\}$

$3 \notin A$

$\{3\} \in A$

$\{2\} \notin A$

$\{1, \{3\}\} \in A$

$\phi \notin A$

$A = \{1, \{\}, 3, \{4,5\}\}$

$\phi \in A$

2.6. שוויון קבוצות

שתי קבוצות S, S' הן שוות אם יש להן בדיוק אותן איברים.

באופן פורמלי, **השוויון** $S = S'$ מתקיים אמ"מ לכל a, $a \in S \Leftrightarrow a \in S'$.

2.7. תתי קבוצות

תהיינה A ו-B קבוצות. A נקראת **תת קבוצה** של B אמ"מ כל איבר ב-A הוא גם איבר ב-B,

כלומר: $x \in A \Leftarrow x \in B$

סימון לתת קבוצה: $A \subseteq B$.

נאמר כי A **מוכלת** ב-B, וכי A היא **קבוצה חלקית** ל-B.

<u>תכונות של הכלה</u>

1. לכל קבוצה A, $\phi \subseteq A$.
2. לכל קבוצה A, $A \subseteq A$. (רפלקסיביות)
3. לכל A,B,C, אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$ אזי $A \subseteq C$ (טרנזיטיביות).

אם ב-A קיים לפחות איבר אחד שאינו שייך ל-B אז A **לא מוכלת** ב-B ומסמנים $A \not\subset B$.

<u>טענה</u>

לכל 2 קבוצות A ו-B מתקיים: A=B אמ"מ $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

<u>הוכחה</u>

כיוון 1: נתון A=B. צ"ל: $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

A=B⇐ עפ"י ההגדרה: $x \in A \Leftrightarrow x \in B \Leftarrow x \in A \to x \in B$ וגם $x \in B \to x \in A$ (הגדרת הכלה)

ומכאן: $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

כיוון 2: נתון $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$. צ"ל A=B. אותה הוכחה בדיוק בכיוון ההפוך.

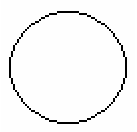
<u>הגדרה - הכלה ממש</u>

A **מוכלת ממש** ב-B אמ"מ $A \subseteq B$ אבל $A \neq B$. A **תת קבוצה אמיתית** של B.

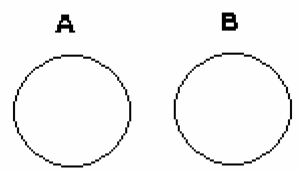
סימון: $A \subset B$

2.8. דיאגרמת ון

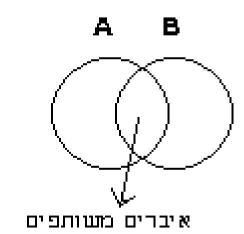
מסמנים קבוצה על ידי תחום סגור במישור:



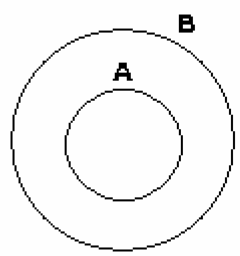
שתי קבוצות ללא איברים משותפים:



שתי קבוצות עם איברים משותפים:



$A \subseteq B$:



3. פעולות על קבוצות

3.1. איחוד קבוצות

איחוד שתי קבוצות A ו-B הוא הקבוצה הבאה:

$$A \bigcup B = \{X \mid x \in B \text{ or } x \in A\}$$

משמעות המילה "or" בהגדרה הוא $x \in A$ או $x \in B$ או שניהם.

3.2. חיתוך קבוצות

חיתוך שתי קבוצות A ו-B הוא הקבוצה הבאה:

$$A \bigcap B = \{X \mid x \in B \text{ and } x \in A\}$$

קבוצות ללא איברים משותפים נקראות **קבוצות זרות**.

מתכונות החיתוך:

- $A \bigcap A = A$
- $A \bigcap \phi = \phi$

כפי שנראה בדף הבא, פעולת החיתוך היא קומוטטיבית ואסוציטיבית.

3.3. תכונות של חיתוך ואיחוד קבוצות

יהיו A,B קבוצות, אזי:

1. $A\subseteq B$ גורר כי $A\bigcup B=B$.
2. $A\subseteq B$ גורר כי $A\bigcap B=A$.
3. $A\bigcap B=B\bigcap A$.
4. $A\bigcup B=B\bigcup A$.
5. $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$.
6. $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$.
7. $A\bigcap\left(B\bigcup C\right)=\left(A\bigcap B\right)\bigcup\left(A\bigcap C\right)$.
8. $A\bigcup\left(B\bigcap C\right)=\left(A\bigcup B\right)\bigcap\left(A\bigcup C\right)$.

3.4. נכון / לא נכון

<u>טענה 1</u>

אם $A\bigcap B=A\bigcap C$ אזי $B=C$.

הטענה אינה נכונה.

נבחר $A=\phi$, וגם שתי קבוצות $B\neq C$, ונקבל $A\bigcap B=A\bigcap C=\phi$ וגם $B\neq C$.

<u>טענה 2</u>

אם $A\bigcup B=A\bigcup C$ אזי $B=C$.

הטענה אינה נכונה.

נבחר $A=C\neq\phi$ וגם $B=\phi$ ונקבל $A\bigcup C=A\bigcup A=A$ וגם $A\bigcup B=A\bigcup\phi=A$.

<u>טענה 3</u>

אם $A\bigcup B = A\bigcup C$ וגם $A\bigcap B = A\bigcap C$ אזי $B = C$.

הטענה נכונה.

צריך להוכיח הכלה דו כיוונית: $B \subseteq C$ וגם $C \subseteq B$.

מספיק להוכיח כי $B \subseteq C$ מכיוון שההוכחה תהיה סימטרית.

יהי $x \in B$. על פי הגדרת האיחוד $X \in A\bigcup B$ ולפי הנתון $x \in A\bigcup C$.

$x \in A\bigcup C$: אם $x \in C$ אז סיימנו. אחרת $x \in A$ ולפי הגדרת החיתוך מתקיים $x \in A\bigcap B$.

על פי הנתון $x \in A\bigcap C$ ולכן לפי הגדרת החיתוך מתקיים $x \in C$.

3.5. זרות הדדית

בהינתן אוסף של קבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$ נאמר שהקבוצות **זרות הדדית** אם לכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \phi$, כלומר אין אלמנט הנמצא ביותר מקבוצה אחת.

לדוגמא: לכל מספר טבעי i נגדיר את הקבוצה הבאה: $A_i = \{2i, 2i+1\}$ ואז יתקיים:

$A_0 = \{0,1\} \qquad A_1 = \{2,3\} \qquad ...$

כל הקבוצות הנ"ל זרות הדדית.

<u>תרגיל</u>

נתון: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \phi$. האם בהכרח הקבוצות זרות הדדית?

<u>תשובה</u>

לא בהכרח, למשל: $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{2,3\}, A_2 = \{3,4\}$

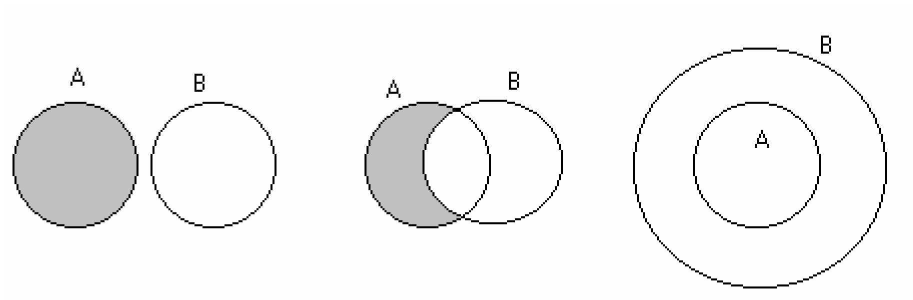
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$ אולם הקבוצות אינן זרות הדדית.

3.6. הפרש בין קבוצות

תהיינה A ו-B קבוצות. **ההפרש** בין A ל-B יסומן באופן הבא: $A-B$ או $A\setminus B$ ויוגדר להיות:

$$A \setminus B = \{X \mid x \in A \text{ and } x \notin b\}$$

השרטוטים הבאים מדגימים שלושה זוגות של קבוצות. בכל זוג סימנו את הקטע המייצג את ההפרש בין A ל-B בצבע אפור:

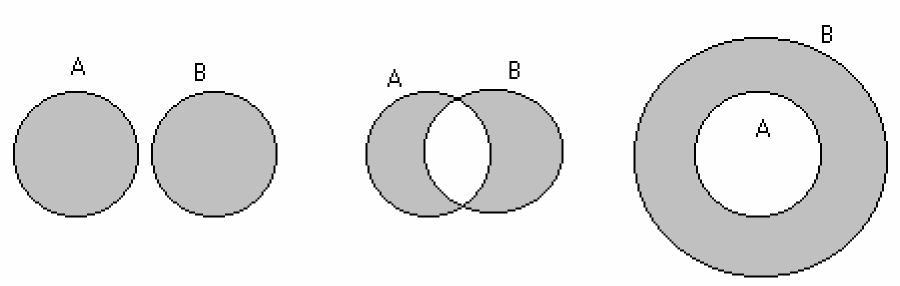


דגש: פעולת ההפרש היא איננה פעולה אסוציאטיבית!

3.7. הפרש סימטרי

תהינה A ו-B קבוצות. **ההפרש הסימטרי** של A ו-B היא הקבוצה:

$A \oplus B = \{x \in A \text{ or } x \in B \text{ but not to A and B}\}$



ניתן לכתוב את ההפרש הסימטרי גם בצורה הבאה:

$A \oplus B = \mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} - \mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}$

3.8. משלים

נניח כי כל איברי הקבוצות עליהן מדובר הן תתי קבוצות של קבוצה אוניברסלית U (העולם).

המשלים של A ביחס לקבוצה האוניברסלית U הוא הקבוצה $U - A$

סימון למשלים: A^c או $\overline{A}$

<u>דוגמא</u>

$U = \mathbb{N}$

A={n | n זוגי }

A^c={n | n אי-זוגי }

תכונות פעולת המשלים

$X \notin A \Leftrightarrow X \in A^c$

$A^C \cup A = U$

$(A^c)^c = A$

$A \bigcap A^c = \phi$

קשר בין הפרש למשלים

$A - B = A \bigcap B^c$

נוכיח את הקשר באמצעות טבלת שייכות:

	A	B	A-B	B^C	$A \bigcap B^c$
$x \in A, x \in B$	T	T	F	F	F
$x \in A, x \notin B$	T	F	T	T	T
$x \notin A, x \in B$	F	T	F	F	F
$x \notin A, x \notin B$	F	F	F	T	F

שיטת השימוש בטבלת השייכות:

1. מקדישים עמודה עבור כל תת ביטוי הנמצא בזהות.
2. מקדישים שורה עבור כל מקרי השייכות של האיבר לקבוצות הבסיסיות.
3. ממלאים את הטבלה ע"פ הגדרת איחוד, חיתוך, משלים.
4. משווים בין העמודות המתאימות לשני צדי הזהות. אם העמודות זהות, הזהות נכונה.

3.9. חוקי דה מורגן

1. $(A \bigcap B)^C = A^C \bigcup B^c$

2. $(A \bigcup B)^C = A^C \bigcap B^c$

נוכיח את חוק 1 על ידי הכלה דו כיוונית. צ"ל:

א. $(A \bigcap B)^C \subseteq A^C \bigcup B^c$

ב. $(A \bigcap B)^C \supseteq A^C \bigcup B^c$

א.

$x \in (A \bigcap B)^c \Rightarrow$ הגדרת המשלים $\Rightarrow x \notin A \bigcap B \Rightarrow$ הגדרת

חיתוך $\Rightarrow x \notin A$ or $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ or $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \bigcup B^c$

הכיוון השני נעשה בדרך זהה על ידי הפיכת כיוון החצים.

3. $A \subseteq B$ implies that $B \setminus (B \setminus A) = A$.

4. $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$ implies that $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

5. $C \setminus (A \bigcup B) = (C \setminus A) \bigcap (C \setminus B)$.

6. $C \setminus (A \bigcap B) = (C \setminus A) \bigcup (C \setminus B)$

3.10. חוקי דיסטריבוטיביות

1) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

2) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$

3.11. חוקי ספיגה

1) $A\bigcup(A\bigcap B)=A$
2) $\mathrm{A}\bigcap(\mathrm{A}\bigcup\mathrm{B})=\mathrm{A}$

את חוקי הספיגה ניתן להוכיח על ידי חוקי דיסטריבוטיביות.

לדוגמא, עבור 1) :

$$A\bigcup\left(A\bigcap B\right)=\left(A\bigcup A\right)\bigcap\left(A\bigcup B\right)=A$$

3.12. איחוד על קבוצות

תהי X קבוצה לא ריקה. נסמן ב- $\bigcup X$ את הקבוצה המכילה את כל האלמנטים של כל האלמנטים של X, כלומר $y\in\bigcup X$ אמ"מ קיים $Y\in X$ כך ש- $y\in Y$. $\bigcup X$ נקראת **האיחוד מעל X**.

אם $X=\{A,B\}$ אזי האיחוד מעל X יהיה $\bigcup X=A\bigcup B$.

עבור $X=\phi$ נגדיר $\bigcup X=\phi$.

דוגמאות:

1. $\bigcup\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}=\{\phi,\{\phi\}\}$
2. $\bigcup\{\{A\},\{A,B\}\}=\{A,B\}$

3.13. חיתוך על קבוצות

תהי X קבוצה לא ריקה . נסמן ב- $\bigcap X$ את הקבוצה המכילה את כל האלמנטים שהם אלמנטים של איבר של X, כלומר, $y\in\bigcap X$ אמ"מ לכל $Y\in X$ מתקיים כי $y\in Y$. $\bigcap X$ מכונה **החיתוך על X**.

אם $X=\{A,B\}$ אזי החיתוך על X יהיה $\bigcup X=A\bigcap B$.

עבור $X=\phi$ החיתוך איננו מוגדר.

דוגמאות:

1. $\bigcap\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}=\phi$
2. $\bigcap\{\{A\},\{A,B\}\}=\{A\}$

3.14. תכונות של איחוד וחיתוך על קבוצות

יהיו A,B,C קבוצות ו- X,Y קבוצות לא ריקות של קבוצות. אזי:

1.

$$\left(\bigcup X\right)\bigcap\left(\bigcup Y\right)=$$
$$\bigcup\left\{\left(A\bigcap B\right)\subseteq\bigcup X : A\in X, B\in Y\right\}=$$
$$\bigcup\left\{\left(A\bigcap B\right)\subseteq\bigcup Y : A\in X, B\in Y\right\}$$

2.

$$\left(\bigcap X\right)\bigcup\left(\bigcap Y\right)=$$
$$\bigcap\left\{\left(A\bigcup B\right)\subseteq\bigcup X : A\in X, B\in Y\right\}=$$
$$\bigcap\left\{\left(A\bigcup B\right)\subseteq\bigcup Y : A\in X, B\in Y\right\}$$

3.15. חוקי דה מורגן לגבי איחוד וחיתוך על קבוצות

יהיו A,B,C קבוצות ו- X,Y קבוצות לא ריקות של קבוצות. אזי:

1.

$$C\setminus\left(\bigcup X\right)=\bigcap\left\{C\setminus A\subseteq C : A\in X\right\}$$

2.

$$C\setminus\left(\bigcap X\right)=\bigcup\left\{C\setminus A\subseteq C : A\in X\right\}$$

3.16. קבוצת החזקה

תהא A קבוצה. **קבוצת החזקה** של A המסומנת על ידי P(A) או על ידי 2^A היא הקבוצה:

$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

כלומר P(A) מכילה (כאיברים) את כל תתי הקבוצות של A.

<u>דוגמא</u>

$A = \{1,2\}$

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

גודלה של P(A) עבור קבוצה סופית A הינו $2^{|A|}$.

<u>טענה</u>

לכל 2 קבוצות A ו-B מתקיים: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

<u>הוכחה:</u>

נראה הכלה דו כיוונית:

א. $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$

ב. $P(A \cap B) \supseteq P(A) \cap P(B)$

א.

$C \in P(A \cap B) \Rightarrow C \subseteq A \cap B \Rightarrow C \subseteq A \text{ and } C \subseteq B \Rightarrow$ הגדרת

חזקה$\Rightarrow C \in P(A) \text{ and } C \in P(B) \Rightarrow$ הגדרת חיתוך$\Rightarrow C \in P(A) \cap P(B)$

ב. מתקבל מא' על ידי היפוך כיוון.

<u>תכונות של קבוצת החזקה</u>

יהיו A,B קבוצות ותהי X קבוצה לא ריקה של קבוצות, אזי:

1. $A\subseteq B$ גורר כי $P(A)\subseteq P(B)$.
2. $P(A)\bigcup P(B)\subseteq P(A\bigcup B)$
3. $P\left(A\bigcap B\right)\subseteq P(A)\bigcap P(B)$
4. $\bigcup\left\{P(A)\in P(P(A)):A\in X\right\}\subseteq P\left(\bigcup X\right)$
5. $P\left(\bigcap X\right)\subseteq\bigcap\left\{P(A)\in P(P(A)):A\in X\right\}$

3.17. בניה פורמלית לקבוצות

נציג כעת כיצד מגדירים קבוצות וכיצד יוצרים למעשה את הקבוצות בהן אנו עוסקים.

<u>הנחה 1</u>: קיימת הקבוצה הריקה.

אבחנה: הקבוצה הריקה הינה יחידה.

<u>הנחה 2</u>: לכל שתי קבוצות A,B קיימת קבוצה C ש- A,B הם האיברים היחידים שלה, כלומר מתקיים $C=\left\{A,B\right\}$. C נקרא **הזוג הלא סדור** של A,B.

כעת ניתן להרכיב קבוצות חדשות: $\left\{\phi,\phi\right\}=\left\{\phi\right\}$ ובעזרתה את הקבוצות: $\left\{\phi,\left\{\phi\right\}\right\}$ ו- $\left\{\left\{\phi\right\}\right\}$.

האם ניתן לקבל את הקבוצה $\left\{\phi,\left\{\phi\right\},\left\{\left\{\phi\right\}\right\}\right\}$? כרגע לא, תחת ההנחות הקיימות.

<u>הנחה 3</u>: **כלל האיחוד:** לכל שתי קבוצות A,B קיימת קבוצה שאיבריה הם כל האיברים הנמצאים ב- A או ב- B, כלומר $C=A\bigcup B$.

כרגע, לכל $A_1,...,A_n$ ניתן לקבל את הקבוצה $\left\{A_1,...,A_n\right\}$.

<u>הנחה 4</u>: **עקרון התכונה**: לכל קבוצה A ולכל תכונה φ של האיברים ב- A, קיימת קבוצה B המכילה את איברי את המקיימים את φ (ובדיוק אותם).

דוגמאות:

תהי הקבוצה A ונבחר את התכונה $a \in C$. נוכל להגדיר את הקבוצה $B = \{a \in A \mid a \in C\}$, ואז מתקיים $B = A \bigcap C$.

תהי הקבוצה A ונבחר את התכונה $a \notin C$. נוכל להגדיר את הקבוצה $B = \{a \in A \mid a \notin C\}$, ואז מתקיים $B = A - C$.

<u>הנחה 5</u>: **כלל החזקה**: לכל קבוצה A, קיימת קבוצה $P(A)$ המכילה את כל תתי הקבוצות של A.

חשוב לשים לב שזהו איננו מקרה פרטי של הנחה 4, כי מדובר בקבוצה של כל תתי הקבוצות של A ולא בקבוצה של איברי A.

<u>דוגמא</u>

בהנתן קבוצה A, הוכיחו שקיימת הקבוצה $B = \{S \mid S \subseteq A\}$ וגם ב- S ישנם שלושה איברים.

פתרון: בהינתן קבוצה A, על פי הנחה 5, קיימת $P(A)$. נשתמש בעקרון התכונה, עם $|S| = 3$ על הקבוצה $P(A)$ ונקבל: $B = \{S \in P(A) \| S| = 3\}$.

3.18. הקבוצה האוניברסאלית

נשאלת השאלה: האם קיימת קבוצה אוניברסאלית U כך שעבור כל קבוצה A, מתקיים כי $A \in U$?

נניח שקיימת קבוצה כזו, ונביט בקבוצה הבאה: $U_0 = \{x \in U : x \notin X\}$.

אם $U_0 \in U_0$ אזי $U_0 \notin U_0$ לפי הגדרת U_0 ואנו מקבלים סתירה.

אבל אם $U_0 \notin U_0$ אזי לפי הגדרה $U_0 \in U_0$ ושוב אנו מקבלים סתירה.

מכאן אנו מגיעים למסקנה: לא קיימת קבוצה אוניברסאלית המכילה את כל שאר הקבוצות.

ניסיון נוסף להגדיר קבוצה אוניברסאלית:

האם קיימת קבוצה אוניברסאלית V כל שעבור כל קבוצה A, מתקיים כי $\{A\} \in V$?

נניח שכן, ונביט בקבוצה הבאה: $V_0 = \{X \in V : \{X\} \notin X\}$.

אם $\{V_0\} \in V_0$ אזי $\{V_0\} \notin V_0$ לפי הגדרת V_0 וקיבלנו סתירה.

אולם אם $\{V_0\} \notin V_0$ אזי $\{V_0\} \in V_0$ לפי הגדרת V_0 ושוב קיבלנו סתירה.

מסקנה: לא קיימת קבוצה אוניברסאלית כנ"ל.

3.19. זוג סדור

נגדיר **זוג סדור** כשני איברים שהאחד נקבע כראשון והאחר כשני. כלומר אנו נותנים חשיבות לסדר של האיברים בזוג. איננו מגבילים את תוכן האיברים. יתכן שבזוג סדור האיברים יהיו זהים $\langle A, A\rangle$.

השוני בין זוג סדור לקבוצה:

- בקבוצה אין משמעות לסדר: $\{A, B\}$.
- בקבוצה אין משמעות לחזרות: $\{A, A\} = \{A\}$.

הגדרה של זוג סדור $\langle A, B\rangle$ צריכה לקיים:

- אם $A \neq B$ אזי $\langle A, B\rangle \neq \langle B, A\rangle$.
- $\langle A, B\rangle = \langle A', B'\rangle$ אמ"מ $A = A', B = B'$.

<u>הצעה ראשונה להגדרה</u>

נגדיר: $\langle A,B\rangle=\{A,\{B\}\}$.

נראה כי ההגדרה אינה מספקת.

יהיו $B=\{2\}$, $A=\{1\}$, אזי לפי ההגדרה שהצענו $\langle A,B\rangle=\{\{1\},\{\{2\}\}\}$.

כעת נבחר $B'=\{1\}$, $A'=\{\{2\}\}$ ואז יתקיים: $\langle A',B'\rangle=\{\{1\},\{\{2\}\}\}$.

ונקבל $\langle A',B'\rangle=\langle A,B\rangle$ אבל $A'\neq A, B'\neq B$.

<u>הצעה שניה להגדרה</u>

נבנה בעזרת ההנחות את $\langle A,B\rangle$ ונראה כי ההגדרה עונה על הדרישות.

טענה: בהינתן A,B ניתן לבנות את $\langle A,B\rangle$.

הוכחה:

- מ- A,B ניתן על פי הנחה 2 לבנות את הקבוצה $\{A,B\}$.
- מ- A ניתן על פי הנחה 2 לבנות את הקבוצה $\{\{A\},\{A,B\}\}$.

נטען: הזוג $\langle A,B\rangle=\{\{A\},\{A,B\}\}$ עונה על הדרישה, כלומר $\langle A,B\rangle=\langle A',B'\rangle$ אמ"מ $A=A', B=B'$.

הוכחה:

כיוון $\Rightarrow$: טריויאלי.

כיוון $\Leftarrow$: נניח כי $\langle A,B\rangle=\langle A',B'\rangle$ ונראה $A=A', B=B'$.

$$\{\{A\},\{A,B\}\}=\{\{A'\},\{A',B'\}\}$$

אפשרות אחת:

$$\{A\}=\{A'\} \Rightarrow A'=A$$
$$\{A,B\}=\{A',B'\} \Rightarrow B'=B$$

אפשרות שניה:

$$\{A\}=\{A',B'\} \Rightarrow A=A'$$
$$\{A,B\}=\{A'\}$$

(בקבוצה שמכילה את A יש איבר אחד).

ולכן $A=A'$. באותו אופן מאחר ו- $\{A,B\}=\{A'\}$ נקבל $A=B$ ומכאן $A=A', B=B'$.

<u>תכונות נלוות לזוג הסדור לפי ההגדרה שנתנו</u>

- בזוג סדור ישנם לכל היותר שני איברים. אם $A=B$ אזי ב- $\langle A,B\rangle$ יש איבר אחד.
- $A\notin\langle A,B\rangle, B\notin\langle A,B\rangle$.

<u>שלשה סדורה</u>

נגדיר **שלשה סדורה** בצורה הבאה: $\langle a,b,c\rangle=\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$.

לפי הגדרה זו, בשלשה הסדורה שני איברים לכל היותר.

<u>n-יה סדורה</u>

באופן דומה ניתן להגדיר **n-יה סדורה** $\langle a_1,a_2,a_3,...,a_n\rangle$.

$$\langle a_1,a_2,a_3,...,a_n\rangle=\langle\langle\langle\langle a_1,a_2\rangle,a_3\rangle...\rangle,a_n\rangle$$

3.20. מכפלה קרטזית

תהיינה A ו-B קבוצות. **המכפלה הקרטזית** $A \times B$ היא הקבוצה:

$$A \times B = \{\langle A, B\rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

כלומר $A \times B$ היא קבוצת כל הזוגות הסדורים בהם האיבר הראשון שייך ל-A והשני ל-B.

פעולה זו איננה קומוטטיבית. אם A שונה מ-B אזי $A \times B$ שונה מ- $B \times A$.

<u>מתכונות המכפלה הקרטזית:</u>

1. $A \times \phi = \phi \times A = \phi$.
2. $A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C)$.
3. $A \times (B \bigcap C) = (A \times B) \bigcap (A \times C)$.
4. $\left(\left(A \times B\right) \times C\right) \neq \left(A \times \left(B \times C\right)\right)$. (כי $\left(\left(a, b\right), c\right) \neq \left(a, \left(b, c\right)\right)$).

עבור קבוצה סופית מתקיים: $|AxB| = |A| \cdot |B|$

<u>סימון</u>

המכפלה הקרטזית $A \times A$ תסומן A^2.

<u>הרחבת ההגדרה עבור n קבוצות</u>

יהיו הקבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$. נגדיר את המכפלה הקרטזית שלהם בצורה הבאה:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

<u>סימון</u>

המכפלה הקרטזית $\underbrace{A\times\ldots\times A}_{n \text{ times}}$ תסומן ב- A^n.

<u>טענה</u>

בהינתן A ו- B, קיימת הקבוצה $A\times B$.

$$A\times B=\left\{\left\langle a,b\right\rangle \mid a\in A,b\in B\right\}=\left\{\left\{\left\{a\right\},\left\{a,b\right\}\right\}\mid a\in A,b\in B\right\}$$

הוכחה:

$$\left\{a\right\}\subseteq A,\left\{a\right\}\in P\left(A\right),\left\{a\right\}\subseteq P\left(A\bigcup B\right)$$
$$\left\{a,b\right\}\subseteq A\bigcup B,\left\{a,b\right\}\in P\left(A\bigcup B\right)$$

נסמן: $y\equiv\left\{a,b\right\},x\equiv\left\{a\right\},C\equiv P\left(A\bigcup B\right)$.

אנו מחפשים את $\left\{x,y\right\}$. $x\in C,y\in C$ ולכן $\left\{x,y\right\}\in P\left(C\right)$.

כלומר: $\left\{\left\{a\right\},\left\{a,b\right\}\right\}\in P\left(P\left(A\bigcup B\right)\right)$.

מצאנו היכן נמצאים כל האיברים, וכעת נגדיר אותם:

- בהינתן A,B נבנה בעזרת כלל האיחוד את $A\bigcup B$.
- ע ידי הפעלת כלל החזקה נקבל את הקבוצה $P\left(P\left(A\bigcup B\right)\right)$.
- בעזרת כלל הגזירה נגזור מתוך $P\left(P\left(A\bigcup B\right)\right)$ את כל הקבוצות שהן זוגות סדורים שבהם האיבר הראשון הוא מ- A והאיבר השני הוא מ- B.

<u>טענה</u>

יהיו שתי קבוצות לא ריקות A,B, אזי מתקיים כי: $\bigcup\bigcup\left(A\times B\right)=A\bigcup B$.

4. רלציות

4.1. הגדרות בסיסיות

יהיו A, B קבוצות.

תת קבוצה (כלשהי) של $A \times B$ נקראת **רלציה בינארית** מ-A ל-B.

תת קבוצה של $A \times B \times C$ נקראת **רלציה טרנרית**.

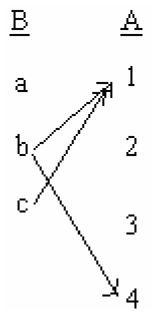
תת קבוצה של $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ נקראת **רלציה n-ארית**.

<u>דוגמא</u>

תהי A הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ותהי B הקבוצה $B = \{a, b, c\}$. דוגמא לרלציה מ-B ל-A:

$$R = \{\langle b, 4\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$$

נציג את הרלציה על ידי גרף (דו צדדי):



במקרה הכללי - יתכנו צמתים שאין מהם חצים יוצאים או אין חצים נכנסים אליהם. כמו כן יתכנו צמתים שיש להם יותר מחץ אחד נכנס או יוצא מהם.

<u>ייצוג על ידי מטריצה בינרית</u>

B/A	1	2	3	4
a	0	0	0	0
b	1	0	0	1
c	1	0	0	0

סימון: אם $\langle a,b\rangle \in R$ נסמן aRb. אם $\langle a,b\rangle \notin R$ נסמן $a \not R b$.

<u>שאלה</u>

כמה רלציות קיימות מ-A ל-B כאשר A ו-B הינן קבוצות סופיות?

כמספר תתי הקבוצות של $A\times B$, שכן כל תת קבוצה של $A\times B$ היא רלציה מ-A ל-B. $|AxB|=|A|\cdot|B|$

מספר תתי הקבוצות הוא $2^{|A|\cdot|B|}$.

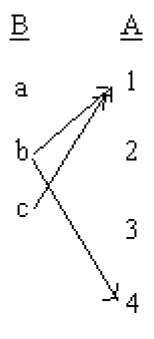
<u>הגדרות</u>

תחום של רלציה - תחום של רלציה $R\subseteq A\times B$ היא הקבוצה

domain(R) ={x$\in$A| קיים $y\in B$ כך שמתקיים xRy}

כלומר תחום של רלציה הינו קבוצת הצמתים שיש מהן חצים יוצאים.

לדוגמא: עבור R המוצג בצורה הבאה:



מתקיים כי domain(R)={a, b}.

טווח של רלציה - טווח של רלציה $R \subseteq A \times B$ היא הקבוצה

range(R) ={Y $\in$ b| קיים $x \in A$ כך שמתקיים xRy}

טווח של רלציה הינה קבוצת האיברים ב-B שיש אליהם חצים נכנסים.

רלציה הופכית - רלציה הופכית של רלציה $R \subseteq A \times B$ היא הרלציה מ-B ל-A הבאה:

$$R^{-1} = \left\{ \langle b,a \rangle \mid \langle a,b \rangle \in R \right\}$$

כלומר: $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}A$.

רלציה משלימה - רלציה משלימה לרלציה $R \subseteq A \times B$ היא הרלציה $R^c = A \times B - R$

לכל $\langle a,b \rangle \in A \times B$ מתקיים: $a\not R b \Leftrightarrow aR^c b$.

4.2. הרכב רלציות

כזכור, רלציה מ-A ל-B היא תת קבוצה של $A \times B$. בהינתן רלציה R מ-A ל-B ($R \subseteq A \times B$) ורלציה S מ-B ל-C ($S \subseteq B \times C$) **ההרכב** של R עם S, המסומן על ידי $R \circ S$, היא הרלציה:

$$R \circ S = \left\{ \left\langle x,z \right\rangle \mid \left\langle x,y \right\rangle \in R, \left\langle y,z \right\rangle \in S, \forall y \in B \right\}$$

<u>דוגמא</u>

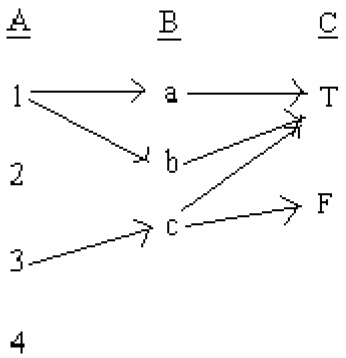
A={1,2,3,4}

B={a,b,c}

C={T,F}

$A \rightarrow B$ R=$\left\{ \langle 1,a \rangle, \langle 1,b \rangle, \langle 3,c \rangle \right\}$

$B \rightarrow C$ S=$\left\{ \langle a,T \rangle, \langle b,T \rangle, \langle c,T \rangle, \langle c,F \rangle \right\}$



$$R \circ S = \left\{ \langle 1,T \rangle, \langle 3,T \rangle, \langle 3,F \rangle \right\}$$

זוג נמצא ב- $R \circ S$ אם קיים מסלול באורך 2 בין איבריו.

<u>תכונות של פעולת ההרכב</u>

1. **אסוציאטיביות:** לכל R_1, R_2, R_3 המקיימות $R_1 \subseteq A \times B,\ R_2 \subseteq B \times C,\ R_3 \subseteq C \times D$ מתקיים כי:
$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

2. לכל שתי רלציות, $R_1 \subseteq A \times B,\ R_2 \subseteq BxC$, מתקיים: $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

הוכחה:

$\langle x,z \rangle \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow$ הגדרת רלציה הופכית

$\langle z,x \rangle \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow$ הגדרת הרכב

$\exists y \in B, \langle z,y \rangle \in R_1, \langle y,x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \exists y \in B, \langle y,z \rangle \in R_1^{-1}, \langle x,y \rangle \in R_2^{-1}$

ומכאן $\langle x,z \rangle \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

4.3. תכונות של יחסים

1. **רפלקסיביות**: לכל $a \in A$, מתקיים $\langle a,a \rangle \in R$.
2. **סימטריות**: אם $(a,b) \in R$, מתקיים $(b,a) \in R$.
3. **אנטי סימטריות**: אם $\langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle \in R$ אזי בהכרח $a = b$.
4. **א-סימטריה**: אם $\langle a,b \rangle \in R$, מתקיים $\langle b,a \rangle \notin R$.
5. **טרנזיטיביות**: אם $\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle \in R$ אזי $\langle a,c \rangle \in R$.

דוגמא

תהי הקבוצה $A=\{a,b,c\}$. נגדיר יחס R מעל A $(R\subseteq A\times A)$:

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$$

האם היחס רפלקסיבי? לא, כי $\langle a,a\rangle\notin R$ אבל $a\in A$.

האם היחס סימטרי? לא, כי $\langle a,b\rangle\in R$ אבל $\langle b,a\rangle\notin R$

האם היחס הוא אנטי סימטרי? כן. הזוגות היחידים שמקיימים $\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\in R$ הם $\langle b,b\rangle$ ו- $\langle c,c\rangle$

לכן היחס הוא אנטי סימטרי.

האם היחס הוא א-סימטרי? לא, כי $\langle b,b\rangle$ ו- $\langle c,c\rangle$ נמצאים ביחס.

האם היחס טרנזיטיבי? כן.

רפלקסיביות באופן ריק

אם $A\neq\phi$ ו-R רפלקסיבי, אזי בהכרח $R\neq\phi$. רפלקסיביות נכונה באופן ריק רק כאשר R ריקה.

טרנזיטיביות באופן ריק

דוגמא: $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$. רלציה זו טרנזיטיבית באופן ריק.

דוגמא

נתונות הקבוצות A,B,C כך שמתקיים $A\bigcap B=\phi, A\neq\phi, B\neq\phi$ וגם $A\subseteq C, B\subseteq C$.

נגדיר יחס R מעל C:

$$R=A\times B\subseteq C\times C$$

האם היחס רפלקסיבי?

לא. $A \neq \phi$, ומכאן קיים $a \in A$. $B \neq \phi$, ומכאן קיים $b \in B$. מכאן $\langle a,b \rangle \in R$

אם $b=a$ אזי $b \in A$ בסתירה לכך שהחיתוך בין A ל-B הוא קבוצה ריקה.

האם היחס סימטרי?

לא. יהי $\langle a,b \rangle \in R$ (קיים כזה). אם $\langle b,a \rangle \in R$ אזי $b \in A \bigcap B$ בסתירה לנתון.

האם היחס אנטי סימטרי?

כן, באופן ריק.

אם $\langle a,b \rangle \in R$ וגם $\langle b,a \rangle \in R$ אזי $b \in A \bigcap B$ בסתירה לנתון.

לכן אין זוג איברים $\langle a,b \rangle$ ו-$\langle b,a \rangle$ הנמצאים שניהם ביחס.

האם היחס א-סימטרי?

כן. אם $\langle a,b \rangle \in R$, נניח בשלילה שגם $\langle b,a \rangle \in R$ אזי $b \in A \bigcap B$ בסתירה לנתון.

האם היחס טרנזיטיבי?

כן, באופן ריק.

<u>טענה</u>

יהי R יחס, אזי מתקיים כי R סימטרי אמ"מ $R = R^{-1}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח כי R סימטרי.

ואז: $\langle a,b \rangle \in R \underset{\text{simetric}}{\Leftrightarrow} \langle b,a \rangle \in R \Leftrightarrow \langle a,b \rangle \in R^{-1}$

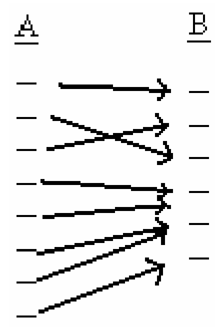
$\Rightarrow$ נניח כי $R = R^{-1}$.

יהי $\langle a,b \rangle \in R$. על פי הגדרת R^{-1} נובע: $\langle b,a \rangle \in R^{-1}$. לפי הנתון $R = R^{-1}$ ולכן $\langle b,a \rangle \in R$.

5. פונקציות

5.1. הגדרות

פונקציה מקבוצה A לקבוצה B היא רלציה מ-A ל-B המקיימת: <u>לכל</u> $a \in A$ קיים $b \in B$ <u>יחיד</u> כך ש- $\langle a,b \rangle \in f$.



<u>סימונים</u> (עבור פונקציות)

$f \subseteq AxB$ נסמן כ: $f : A \to B$

$\langle a,b \rangle \in f$ נסמן כ: $f(a) = b$

<u>הגדרה</u>

פונקציה $f : A \to B$ נקראת **חד חד ערכית** אם לכל $x, y \in A$ מתקיים: $x \neq y \Leftarrow f(x) \neq f(y)$.

<u>סימון</u>

$f : A \xrightarrow{1:1} B$

<u>הגדרה</u>

פונקציה $f:A\to B$ נקראת **על** אם לכל איבר $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.

<u>הגדרה</u>

פונקציה $f:A\to B$ שהיא גם 1:1 וגם על נקראת **התאמה חח"ע**.

- במקרה זה, הגודל של A ושל B הוא זהה.

5.2. שאלות קומבינטוריות

נתונות A ו-B קבוצות סופיות.

1. מהן מספר הפונקציות מ-A ל-B שהן התאמות חח"ע?

$$\begin{cases} 0 & |A|\neq|B| \\ |B|! & |A|=|B| \end{cases}$$

2. כמה פונקציות 1:1 יש מ-A ל-B?

$$\begin{cases} 0 & |B|<|A| \\ |B|! & |B|=|A| \\ \dfrac{|B|!}{(|B|-|A|)!} & |B|>|A| \end{cases}$$

3. כמה פונקציות יש מ-A ל-B?

$$|B|^{|A|}$$

4. כמה פונקציות יש מ-A ל-B שהן על?

$$\begin{cases} 0 & |B|>|A| \\ |B|! & |B|=|A| \\ \sum_{i=0}^{|B|}(-1)^i\binom{|B|}{i}(|B|-i)^{|A|} & |B|<|A| \end{cases}$$

5.3. הפונקציה ההופכית

יהיו A,B קבוצות, ותהי $f:A\to B$ פונקציה. הרלציה ההופכית f^{-1} היא לא בהכרח פונקציה.
במקרה ש-f^{-1} היא פונקציה, היא תיקרא **הפונקציה ההופכית**. נשאל מתי f^{-1} היא פונקציה.

<u>טענה</u>

תהי $f:A\to B$.

1. הרלציה ההופכית f^{-1} היא פונקציה אמ"מ f הינה התאמה חח"ע.
2. במקרה ש-f^{-1} היא פונקציה, אזי גם היא התאמה חח"ע.

הוכחה:

1. f^{-1} היא פונקציה אמ"מ לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ יחיד, כך ש-$\langle b,a\rangle\in f^{-1}$.
מהגדרת הפונקציה ההופכית, נובע כי לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ יחיד כך ש $\langle a,b\rangle\in f$ וזה מתקיים אמ"מ f התאמה חח"ע.
2. $f=(f^{-1})^{-1}$. f היא פונקציה ולכן עפ"י 1 מתקיים ש f^{-1} היא התאמה חח"ע.

<u>טענה</u>

עבור שתי קבוצות סופיות A, B , מתקיים $|A|=|B|$ אמ"מ קיימת התאמה חח"ע בין A ל-B.

<u>הגדרה</u>

רלציה R מעל קבוצה A היא קבוצה של $A \times A$:

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$
$$I_a = \{\langle x,x\rangle \mid x \in A\}$$

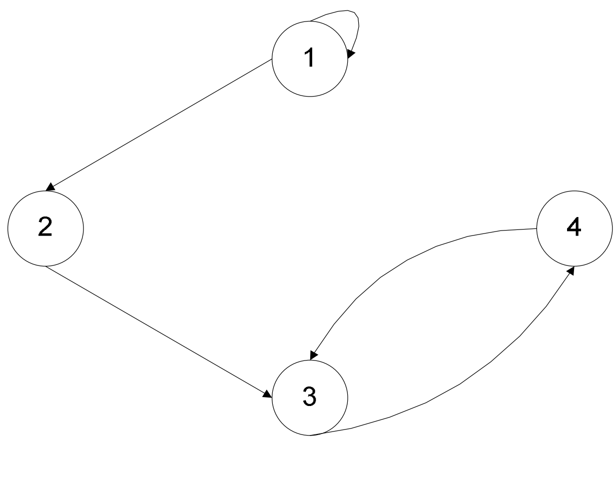
I_a זוהי **רלצית הזהות.**

ניתן לייצג רלציות בעזרת גרף דו צדדי כמו שכבר ראינו, אולם ניתן לייצג רלציות גם באמצעות גרף.

את הגרף בונים בצורה הבאה: מציירים צומת יחיד עבור כל איבר ב-A. יש קשת בין הצומת x לצומת y אם הזוג הסדור $\langle x,y\rangle \in R$.

<u>דוגמא</u>

$$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}$$



5.4. תכונות של רלציה מעל קבוצה A

1. רפלקסיביות: לכל $a \in A$, מתקיים $\langle a,a \rangle \in R$

   * לכל צומת בגרף חייבת להיות קשת עצמית.

   * אם זוהי פונקציה, זוהי חייבת להיות פונקצית הזהות.

2. סימטריות: אם $\langle a,b \rangle \in R$, מתקיים $\langle b,a \rangle \in R$

   * לכל קשת בגרף יש קשת הפוכה לה.

3. אנטי סימטריות: אם $\langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle \in R$ אזי בהכרח $a=b$

4. א-סימטריה: אם $\langle a,b \rangle \in R$, מתקיים $\langle b,a \rangle \notin R$

5. טרנזיטיביות: אם $\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle \in R$ אזי $\langle a,c \rangle \in R$

   * אם יש מסלול באורך 2 בין 2 צמתים, אזי בהכרח יש גם מסלול ישיר ביניהם.

5.5. רלציות מיוחדות

5.5.1. יחסי סדר

יחס R יקרא **יחס סדר חלקי** אם R רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי.

יחס R יקרא **יחס סדר מלא** אם הוא יחס סדר חלקי וגם לכל $x,y \in A$ מתקיים $\langle x,y \rangle \in R$ או $\langle y,x \rangle \in R$. יחס זה נקרא גם **יחס סדר ליניארי**.

5.5.2. יחס שקילות

יחס יקרא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

בהמשך נעמיק עוד ביחסי שקילות.

5.5.3. דוגמאות

נסתכל על הרלציות הבאות מעל R:

הרלציה $<$: לא רפלקסיבית, לא סימטרית, טרנזיטיבית.

הרלציה $\leq$: רפלקסיבית, לא סימטרית, טרנזיטיבית – רלצית סדר חלקי וגם רלצית סדר מלא.

הרלציה $=$: רפלקסיבית, סימטרית, טרנזיטיבית – רלצית שקילות וגם רלצית סדר חלקי.

הרלציה $\subseteq$ מעל קבוצות: רפלקסיבית, לא סימטרית, טרנזיטיבית – רלצית סדר חלקי.

הרלציה $\subset$ מעל קבוצות: לא רפלקסיבית, לא סימטרית, טרנזיטיבית.

טענה

הרלציה R סימטרית אמ"מ $R = R^{-1}$.

5.6. חזקות של רלציה

תהיי רלציה R מעל קבוצה A, נסמן ב- R^2 את $R \circ R$.

הזוג $\langle x,z \rangle$ שייך ל- R^2 אם קיים y כך ש $\langle x,y \rangle \in R, \langle y,z \rangle \in R$. כלומר אם קיימת קשת מ-x ל-y כלשהו, ומאותו y אל z. במילים אחרות - אם קיימת מסלול באורך 2 בין x ל-z.

באופן דומה, מסמנים ב R^i את ההרכב הבא: $R \circ R \circ ... \circ R$. (i פעמים).

בגלל תכונת האסוציאטיביות של ההרכב נקבל את המסקנה: $R^i \circ R^j = R^{i+j}$.

איבר $\langle x,z \rangle$ נמצא בגרף של R^i אם קיים מסלול באורך i שבין x ל-z בגרף של R.

<u>טענה</u>

R טרנזיטיבית אמ"מ $R^2 \subseteq R$.

הוכחה:

R טרנזיטיבית $\Leftrightarrow$ לכל $x,y,z \in A$ מתקיים כי $\langle x,y \rangle \in R, \langle y,z \rangle \in R \Leftarrow \langle x,z \rangle \in R$.

$\Leftrightarrow$ לכל $\langle x,z \rangle \in A$ מתקיים כי $\langle x,z \rangle \in R^2 \Leftarrow \langle x,z \rangle \in R \Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

<u>טענה (ללא הוכחה)</u>

לכל 3 רלציות s_1, s_2, s_3 מתקיים $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1 \circ S_3 \subseteq S_2 \circ S_3$.

<u>טענה</u>

תהיינה הרלציות $f \subseteq A\times B, g \subseteq B\times C$.

פעולת ההרכבה מוגדרת כרגיל: $\langle a,c\rangle \in f\circ g$ אמ"מ קיים $b\in B$ כך ש- $\langle a,b\rangle \in f, \langle b,c\rangle \in g$.

ניתן לראות כי $f\circ g \subseteq A\times C$. נטען: אם f,g הינן פונקציות אזי ההרכב $f\circ g$ הינו פונקציה.

הוכחה:

על מנת להראות שרלציה היא פונקציה עלינו להראות:

1. קיום – לכל $a\in A$ קים $c\in C$ כך ש- $\langle a,c\rangle \in f\circ g$.
2. יחידות – אם $\langle a,x_1\rangle \in f\circ g, \langle a,x_2\rangle \in f\circ g$ אזי בהכרח $x_1=x_2$.

.1

יהי $a\in A$.

f היא פונקציה $\Leftarrow$ קיים $b\in B$ כך ש- $\langle a,b\rangle \in f$.

g היא פונקציה $\Leftarrow$ קיים $c\in C$ כך ש- $\langle b,c\rangle \in g$.

$\Leftarrow$ על פי הגדרת ההרכב מתקיים $\langle a,c\rangle \in f\circ g$.

$\Leftarrow$ לכל $a\in A$ קיים $c\in C$ כך ש- $\langle a,c\rangle \in f\circ g$.

.2

יהיו x_1,x_2 כך ש- $\langle a,x_1\rangle \in f\circ g, \langle a,x_2\rangle \in f\circ g$.

f היא פונקציה ולכן:

- קיים b_1 כך ש- $\langle a,b_1\rangle \in f$ וגם $\langle b_1,x_1\rangle \in g$.
- קיים b_2 כך ש- $\langle a,b_2\rangle \in f$ וגם $\langle b_2,x_2\rangle \in g$.

f היא פונקציה ולכן $b_1=b_2$ (יחידות עבור f).

g היא פונקציה ולכן מכיוון ש- $\langle b,x_1\rangle \in g, \langle b,x_2\rangle \in g$ נקבל $x_1=x_2$.

<u>תרגיל</u>

תהי $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת כך: $f\left(x,y\right)=\left\langle x+y,x-y\right\rangle$.

יש לענות האם f היא על והאם היא חח"ע.

<u>פתרון</u>

יהי $\left\langle a,b\right\rangle \in \mathbb{R}^2$.

אם $\left\langle x,y\right\rangle \to \left\langle a,b\right\rangle$ אזי נוכל לכתוב: $a=x+y, b=x-y$.

זוהי מערכת משוואות בעלת פתרון יחיד, שהפתרון לה הינו:

$$\left\langle x,y\right\rangle = \left\langle \frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right\rangle \in \mathbb{R}^2$$

מכיוון שניתן להגיע לכל a,b כרצוננו בתחום $\mathbb{R}^2$ הרי שהפונקציה הינה על.

מכיוון שפתרון מערכת המשוואות הינו יחיד הפונקציה הינה חד חד ערכית.

<u>תרגיל</u>

נתונות פונקציות $f:X\to Y, g:Y\to Z$.

צ"ל: אם $f\circ g$ על וגם g הינה חח"ע אזי f היא על.

הוכחה:

כדי להוכיח כי f היא על עלינו להראות כי לכל איבר $y\in Y$ קיים $x\in X$ כך שמתקיים $f(x)=y$.

יהי $y\in Y$.

g היא פונקציה ולכן קיים $z\in Z$ כך ש- $g(y)=z$.

$f\circ g$ על ולכן קיים $x\in X$ כך שמתקיים $g\circ f(x)=z$ (כלומר $g\left(f(x)\right)=z$).

כלומר בינתיים הגענו לכך ש: $g\left(y\right)=z, g\left(f(x)\right)=z$.

g הינה חח"ע ולכן $y=f(x)$. הראנו בעצם כי קיים איבר $y\in Y$ כך ש- $f(x)=y$ ובכך סיימנו.

<u>טענה</u>

R טרנזיטיבית אמ"מ לכל $1 \le i$, $R^i \subseteq R^{i-1} \subseteq R^{i-2} \subseteq ... \subseteq R^2 \subseteq R$.

הוכחה: (באינדוקציה על i)

בסיס: $i = 2$ ראינו בטענה הקודמת ($R^2 \subseteq R$).

נניח את נכונות הטענה לכל $i \le n$ ונוכיח עבור $i = n+1$.

על פי ההנחה מתקיים כי $R^n \subseteq R^{n-1} \subseteq R^{n-2} \subseteq ... \subseteq R^2 \subseteq R$.

יש להוסיף: $R^{n+1} \subseteq R^n$.

על פי ההנחה $R^n \subseteq R^{n-1}$ ולכן על פי טענה העזר $R^n \circ R \subseteq R^{n-1} \circ R$, כלומר $R^{n+1} \subseteq R^n$.

5.7. הסגור של רלציה ביחס לתכונה

תהיי R רלציה מעל קבוצה A. **הסגור** של R ביחס לתכונה α היא הרלציה S המקיימת את התנאים הבאים:

1. S מקיימת את α.
2. $R \subseteq S$
3. לכל T שמקיימת את α, ו $R \subseteq T$, מתקיים $S \subseteq T$

הסגור היא הרלציה הקטנה ביותר שמקיימת את α ומכילה את R.

לא תמיד קיים סגור עבור תכונה. עבור תכונות מסוימות יהיה קיים סגור ועבור אחרות לא.

סגור ביחס לתכונה מסויימת – אם הוא קיים אזי הוא יחיד.

5.7.1. סגור רפלקסיבי

<u>דוגמא</u>

תהי הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ ותהי הרלציה $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$.

הסגור הרפלקסיבי של הרלציה הינו $\{\langle 1,1\rangle,\ \langle 2,2\rangle,\ \langle 3,3\rangle,\ \langle 1,2\rangle,\ \langle 3,1\rangle\}$.

$\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle$ נובע מהגדרת רפלקסיביות.

$\langle 1,2\rangle,\langle 3,1\rangle$ נובע מהגדרת הסגור.

זוהי הקבוצה הקטנה ביותר המקיימת את התנאי.

- הסגור הרפלקסיבי הוא תמיד $I_a=\{\langle a,a\rangle \mid a\in A\}$, $R\cup I_a$
- סגור של רלציה ביחס לתכונה נתונה היא הרלציה הקטנה ביותר המכילה את הרלציה ומקיימת את התכונה.

5.7.2. סגור סימטרי

<u>דוגמא</u>

תהי הקבוצה $A=\{1,2,3,4\}$ ותהי הרלציה מעל A $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$.

הסגור הסימטרי יהיה $\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$.

- הסגור הסימטרי הינו תמיד $R\cup R^{-1}=R\cup\{\langle a,b\rangle \mid \langle b,a\rangle\in R\}$.

5.7.3. סגור א-רפלקסיבי

רלציה R תיקרא **א-רפלקסיבית** אם לכל $x \in A$ מתקיים $R \notin \langle x, x \rangle$.

תהי לדוגמא הרלציה הבאה מעל הקבוצה $A = \{1,2,3\}$:

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

במקרה זה הסגור לא קיים, כי הסגור חייב להכיל את כל R, ובפרט את הזוג הסדור $\langle 2,2\rangle$, וכל רלציה כזו לא מקיימת את תכונת הא-רפלקסיביות.

5.7.4. סגור טרנזיטיבי

תהי הקבוצה $A = \{1,2,3,4,5\}$ ותהי הרלציה $R = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,1\rangle\}$.

הסגור הטרנזיטיבי יהיה

$\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 4,2\rangle\}$.

- נשים לב שאם אחרי שהוספנו איברים, ניתן לעשות חיבורים נוספים, יש לעשותם.

בהינתן רלציה R מעל A, נגדיר את הרלציה R^* באופן הבא:

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... = \cup R^i, i = \mathbb{N} - \{0\}$$

מתקיים כי $\langle x, y\rangle \in R^*$ אמ"מ קיים $i \ge 1$ כך ש $\langle x, y\rangle \in R^i$.

<u>טענה</u>

- אם רלציה מקיימת את α, אז היא עצמה הסגור שלה ביחס ל- α. מכאן שהסגור הטרנזיטיבי של רלציה טרנזיטיבית R הוא R.

<u>טענה</u>

- לכל רלציה R, R^* הוא הסגור הטרנזיטיבי שלה.

הוכחה:

כדי להוכיח ש- R^* היא הסגור הטרנזיטיבי של R צ"ל:

1. $R \subseteq R^*$.
2. R^* טרנזיטיבית.
3. לכל רלציה T, אם T היא טרנזיטיבית וגם $R \subseteq T$ אזי $R^* \subseteq T$.

.1

ברור שמתקיים, כי $R^* = R \bigcup R^2 \bigcup ... \supseteq R$.

.2

צריך להוכיח כי אם $\langle x,y \rangle, \langle x,z \rangle \in R^*$ אזי $\langle x,z \rangle \in R^*$.

$\langle x,y \rangle, \langle x,z \rangle \in R^*$ גורר כי קיים $i \geq 1$, $\langle x,y \rangle \in R^i$ וקיים $j \geq 1$, $\langle y,z \rangle \in R^j$ כך ש

$$\langle y,z \rangle \in R^* \Leftarrow \langle y,z \rangle \in R^{i+j} \Leftarrow \langle y,z \rangle \in R^i \cdot R^j$$

.3

נשתמש בטענה אם $R \subseteq T$ אזי לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $R^i \subseteq T^i$.

תהי T טרנזיטיבית, $R \subseteq T$. צריך להוכיח כי $R^* \subseteq T$

יהי $\langle x,y \rangle \in R^*$. מכאן קיים k כך ש- $\langle x,y \rangle \in R^k$. ולפי טענת העזר: $R \subseteq T$.

T טרנזיטיבית. מכאן קיים k כך ש- $\langle x,y \rangle \in T^k$., ולכן $\langle x,y \rangle \in T$.

<u>תכונה</u>

- אם A סופית אזי $R^* = R \bigcup R^2 \bigcup ... \bigcup R^{|A|}$.

דוגמא

נגדיר את הקבוצה הבאה: $B = \left\{ A \mid A \subseteq \mathbb{N}, A \neq \phi, \left| A \right| \leq 10 \right\}$ ונגדיר יחס S מעל B בצורה הבאה:

$S = \left\{ \left\langle A_1, A_2 \right\rangle \mid A_1 \bigcap A_2 \neq \phi \right\}$

1. האם S הינו יחס טרנזיטיבי?
2. מהו S^*?

.1

S איננו יחס טרנזיטיבי.

דוגמא נגדית: יהיו הקבוצות $A_1 = \left\{1,2\right\}, A_2 = \left\{2,3\right\}, A_3 = \left\{3,4\right\}$.

מתקיים: $\left\langle A_1, A_2 \right\rangle \in S, \left\langle A_2, A_3 \right\rangle \in S$ אולם $\left\langle A_1, A_3 \right\rangle \notin S$.

.2

כאשר אנו נתקלים בשאלה מסוג זה, השלב הראשון בפיתרון יהיה להבין מיהו S^2 על מנת לקבל תחושה לגבי הפתרון.

$S^2 = \left\{ \left\langle A_1, A_3 \right\rangle \middle| \exists A_2 : \left\langle A_2, A_3 \right\rangle \in S, \left\langle A_1, A_2 \right\rangle \in S \right\}$

נטען: $S^2 = B \times B$.

ברור כי $S^2 \subseteq B \times B$ מכיוון ש- S הינו יחס מעל B.

צ"ל: $B \times B \subseteq S^2$.

תהינה $A_1, A_3 \in B$. צריך למצוא A_2 כך שמתקיים $\left\langle A_1, A_2 \right\rangle \in S, \left\langle A_2, A_3 \right\rangle \in S$.

$A_1 \in B \Leftarrow A_1 \neq \phi \Leftarrow \exists a_1 \in A_1$. כמו כן $A_3 \in B \Leftarrow A_3 \neq \phi \Leftarrow \exists a_3 \in A_3$.

נבחר $A_2 = \left\{ a_1, a_3 \right\}$. נוודא כי $A_2 \in B$.

$a_1 \in A_1 \bigcap A_2 \neq \phi$ ומכאן $\left\langle A_1, A_2 \right\rangle \in S$. $a_2 \in A_2 \bigcap A_3 \neq \phi$ ומכאן $\left\langle A_2, A_3 \right\rangle \in S$.

מסקנה: $\left\langle A_1, A_3 \right\rangle \in S^2$.

דוגמא

נתון $R \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $R = \{\langle a,b\rangle | a+b \text{ is odd}\}$, לדוגמא $\langle 1,2\rangle \in R$.

א. מצא את R^2.

ב. מצא את הסגור הטרנזיטיבי.

א.

נסמן את הקבוצה הבאה ב- T: $T = \{\langle a,b\rangle | a+b \text{ is even}\}$.

נטען: $R^2 = T$, כאשר $R^2 = \{\langle x,y\rangle | \langle x,z\rangle, \langle z,y\rangle \in R\}$.

יהיו $\langle z,y\rangle, \langle x,z\rangle \in R$.

יתכנו שני מקרים:

1. z אי זוגי, x זוגי $\Leftarrow$ y זוגי.
2. z זוגי, x אי זוגי $\Leftarrow$ y אי זוגי.

בשני המקרים מתקיים $x+y$ הוא זוגי, ולכן הראנו $R^2 \subseteq T$.

כעת נראה את הכיוון השני: יהיה האיבר $\langle a,b\rangle \in R^2$.

אם a זוגי, נבחר $c=1$ ואז $\langle b,c\rangle, \langle a,c\rangle \in R$. אם a אי זוגי, נבחר $c=2$ ואז $\langle b,c\rangle, \langle a,c\rangle \in R$.

ומכאן $R^2 \subseteq T$. הראנו הכלה דו כיוונית ולכן מתקיים השוויון.

ב.

ניתן לראות כי מתקיים $R^3 = R$, וכך הלאה, ולכן:

$$R^i = \begin{cases} R & i \text{ is odd} \\ R^2 & i \text{ is even} \end{cases}$$

כלומר $R^* = R \cup R^2 = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

5.8. רלצית שקילות

רלציה תקרא **רלצית שקילות** אם היא רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית.

R רפלקסיבית אם לכל x מתקיים $\langle x,x\rangle \in R$

R סימטרית אם לכל x,y כך ש- $\langle x,y\rangle \in R$ מחייב כי $\langle y,x\rangle \in R$

R טרנזיטיבית אם לכל x,y,z מתקיים $\langle x,y\rangle \in R, \langle y,z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R$

5.8.1. מחלקת שקילות

בהינתן יחס E מעל A ואיבר $x \in A$, נגדיר את **מחלקת השקילות** של x המסומנת על ידי $[x]_E$ באופן הבא:

$$[x]_E = \{y \mid \langle x,y\rangle \in E\}$$

דוגמא

A_1 - קבוצת האנשים בעולם.

$$E_1 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \text{ live in the same country}\}$$

A_2 - כל המילים בעולם.

$$E_2 = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \text{ starts with the same letter}\}$$

A_3 - קבוצת המספרים הטבעיים.

$$E_3 = \{\langle \mathrm{x,y}\rangle \mid x,y \text{ has the same module in diving by 3}\}$$

עבור E_1 - מהי מחלקת השקילות של x הגר בישראל?

[x]={כל תושבי ישראל}

עבור E_2 - מהי מחלקת השקילות של המילה "אבא"?

[אבא]={כל המילים המתחילות ב-א'}

עבור E_3:

$[0]=\{0,3,6,9,...\}$

$[1]=\{1,4,7,10,...\}$

$[2]=\{2,5,8,11,...\}$

$[3]= \{0,3,6,9,...\}$

$[4]=\{1,4,7,10,...\}$

ניתן לראות כי:

$[0]=[3]=[6]=...$

$[1]=[4]=[7]=...$

$[2]=[5]=[8]=...$

$[0]\bigcap[1]=\phi$

$[1]\bigcap[2]=\phi$

$[0]\bigcap[2]=\phi$

מתקיים:

$[0]\bigcup[1]\bigcup[2]=\mathbb{N}$

5.8.2. למה 1

תהי A קבוצה, שני איברים $x,y\in A$ ותהי E רלצית שקילות מעל A, אזי:

א. $[x]=[y]$ אמ"מ $\langle x,y\rangle\in E$.

ב. $[x]\neq[y]$ אמ"מ $[x]\bigcap[y]=\phi$.

- מחלקת שקילות היא לא קבוצה ריקה (היא מתאפיינת על ידי איבר מסויים)
- ניתן לכתוב את ב' גם כך: $\langle x,y\rangle\notin E$ אמ"מ $[x]\bigcap[y]=\phi$.

<u>הוכחה</u>

א.

$\Leftarrow$

נתון: $[x]=[y]$.

צ"ל: $\langle x,y\rangle\in E$.

הוכחה: לפי הגדרה: $y\in[y]$. נתון כי $[x]=[y]$ ומכאן $\langle x,y\rangle\in E \Leftarrow y\in[x]$.

$\Rightarrow$

נתון: $\langle x,y\rangle\in E$

צ"ל: $[x]=[y]$

הוכחה: ראשית נטען כי $\langle y,x\rangle\in E$ (מכיוון ש- E הינה סימטרית). וכעת:

$$a\in[x] \underset{\substack{\text{by}\\ \text{definition}}}{\Leftrightarrow} \langle x,a\rangle\in E \underset{\substack{\text{טרנזיטיביות}\\ \langle y,x\rangle,\langle x,a\rangle}}{\Leftrightarrow} \langle y,a\rangle\in E \underset{\substack{\text{הגדרת}\\ \text{מחלקות שקילות}}}{\Leftrightarrow} a\in[y]$$

ולכן $[x]=[y]$.

ב.

$\Rightarrow$

נתון: $[x]\cap[y]=\phi$.

צ"ל: $[x]\neq[y]$.

הטענה נכונה באופן טריויאלי מכיוון שגם $[x]$ וגם $[y]$ אינן ריקות.

$\Leftarrow$

נתון: $[x]\neq[y]$.

צ"ל: $[x]\cap[y]=\phi$.

נניח בשלילה כי $[x]\cap[y]\neq\phi$. כלומר קיים $a\in[x],[y]$ ומכאן:

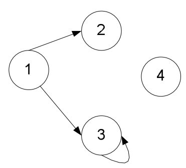
$$\begin{matrix}\langle x,a\rangle\in E\\ \langle y,a\rangle\in E\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\langle x,a\rangle\in E\\ \langle a,y\rangle\in E\end{matrix} \Rightarrow \langle x,y\rangle\in E \underset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow} [x]=[y]$$

כלומר ההנחה שגויה ולכן $[x]\cap[y]=\phi$.

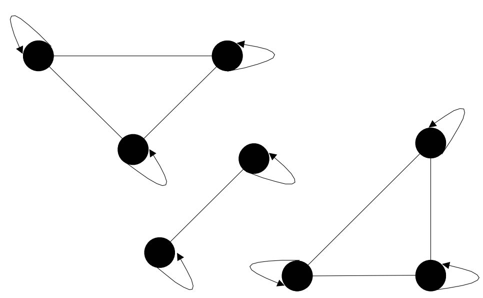
5.8.3. הצגת רלצית שקילות כגרף

כאשר ניגשתי בפעם הראשונה להבין את נושא רלצית השקילות ומחלקות השקילות נתקלתי בבעיה להבין את המשמעות שלהן בדיוק – מהי רלצית שקילות, ומהי מחלקת שקילות, ומהן אוסף כל מחלקות השקילות של קבוצה. הדוגמא הבאה, לפחות עבורי, עזרה להמחיש את הנושא.

תהי קבוצת איברים A. כל רלציה R מעל הקבוצה A מכילה זוגות של איברים מ-A.
נציג את הרלציה כגרף, כאשר כל צומת בגרף ייצג את אחד מאיברי A. בין כל שני איברים בגרף תהיה קשת אמ"מ הם נמצאים ברלציה R.
לדוגמא, עבור הקבוצה $A=\{1,2,3,4\}$ והרלציה $\{(1,2),(1,3),(3,3)\}$
נצייר את הגרף הבא:



רלצית שקילות תחלק את הצמתים בגרפים לקבוצות זרות כך שכל קבוצה תהווה גרף מלא, לכל צומת תהיה קשת עצמית, ולא יהיו קשתות מחברות בין הקבוצות השונות, לדוגמא:



ישנן 3 קבוצות – שלוש מחלקות שקילות הנוצרות על ידי רלצית השקילות.

5.8.4. קבוצת המנה

<u>הגדרה</u>

תהא E רלצית שקילות מעל הקבוצה A. הקבוצה A/E מוגדרת כך:

$$A/E = \{[x] \mid x \in A\}$$

קבוצה זו נקראת **קבוצת המנה** של A לפי E.

נגדיר את **האינדקס** של הרלציה E להיות מספר מחלקות השקילות השונות של E, או לחילופין – כגודל של קבוצת המנה של E.

5.8.5. למה 2

לכל $B_1, B_2 \in A/E$, או ש- $B_1 \cap B_2 = \phi$ או ש- $B_1 = B_2$.

5.8.6. למה 3

E רלצית שקילות מעל A. איחוד כל מחלקות השקילות ייתן את הקבוצה A:

$$\bigcup_{x \in A} [x] = A.$$

<u>הוכחת למה 3</u>

נוכיח את הטענה על ידי הכלה דו כיוונית.

כיוון $\Leftarrow$: צ"ל להוכיח כי $A \subseteq \bigcup_{x\in A}[x]$. לכל $x \in A$ מתקיים $[x] \subseteq A$ ומכאן $\bigcup_{x\in A}[x] \subseteq A$.

כיוון $\Rightarrow$: צ"ל כי $\bigcup_{x\in A}[x] \subseteq A$. לכל $x \in A$ מתקיים כי $x \in [x]$ ולכן $A \subseteq \bigcup_{x\in A}[x]$.

5.8.7. חלוקה

<u>הגדרה</u>

תהא A קבוצה כלשהי. תתי קבוצות של A לא ריקות, זרות הדדית שאיחודן הוא A נקרא **חלוקה** של A.

באופן פורמלי: קבוצה Π היא **חלוקה** של קבוצה A אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. אם כל איבר של Π הוא תת קבוצה לא ריקה ב-A.

ב. בעבור כל $x \in A$ קיים בדיוק איבר אחד $S \in \Pi$ עבורו $x \in S$.

<u>משפט</u>

תהי E רלצית שקילות מעל A. קבוצת המנה A/E היא חלוקה של הקבוצה A.

<u>הוכחה</u>

על פי הגדרת מחלקת השקילות מתקיים כי $[x] \in A$ לכל $x \in A$.

כלומר האיברים בקבוצת המנה הם תתי קבוצה של A.

- לכל $x \in A$ מתקיים $[x] \neq \phi$ ולכן האיברים ב- A/E הם אינם קבוצות ריקות.
- על פי למה 2 כל האיברים ב- A/E הינם זרים הדדית.
- על פי למה 3 איחוד האיברים בקבוצת המנה שווה ל- A.

<u>מסקנה</u>

כל יחס שקילות משרה חלוקה של A לקבוצות לא ריקות זרות הדדית שאיחודן A, כאשר הקבוצות הינן מחלקות השקילות של היחס.

<u>טענה</u>

אם Π היא חלוקה של קבוצה A אזי היחס הבא הוא יחס שקילות.

$$E = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists S, S \in \Pi), x \in S \text{ and } y \in S\}$$

ומכאן: $\Pi = A/E$.

כל חלוקה של A מגדירה באופן יחיד יחס שקילות, והקבוצות הזרות בחלוקה הן מחלקות השקילות של היחס.

5.8.8. דוגמאות

.1

A קבוצת השלמים בין 0 ל-100.

$$R=\left\{\left\langle x,y\right\rangle \mid x\equiv y(\mathrm{mod}10)\right\}$$

רפלקסיביות: כן: $x\equiv x(\mathrm{mod}10)$

סימטריות: כן: $x\equiv y(\mathrm{mod}10)\Rightarrow y\equiv x(\mathrm{mod}10)$

טרנזיטיביות: כן: $x\equiv y(\mathrm{mod}10), y\equiv z(\mathrm{mod}10)\Rightarrow x\equiv z(\mathrm{mod}10)$

לכן זוהי רלצית שקילות. כעת נגדיר מי הן מחלקות השקילות, ונמצא את קבוצת המנה.

מחלקות השקילות מאופיינות על ידי השאריות בחלוקה ב10. לכן קבוצת המנה היא:

$$A/R=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9]\}=\{[x]\mid 0\le x\le 9, x\in N\}$$

.2

A קבוצה, B תת קבוצה של A.

$$R=\left\{\left\langle x,y\right\rangle \mid x=y \text{ or } x,y\in B\right\}$$

רפלקסיביות: כן: כי x=x.

סימטריות: כן: xRy. אם x=y אז ברור שyRx כי הם שווים.

אם $x\neq y$ אזיי x,y שייכים לB ולכן גם y,x שייכים ל-B ולכן yRx.

טרנזיטיביות: כן: xRy,yRz. אם כולם זהים ברור כי xRz. אם x,y,z לא זהים כולם, אזי הם שייכים ל-B, ולכן xRz.

אפיון מחלקות השקילות:

מחלקת שקילות אחת היא B וכל איבר ב-A מהווה מחלקת שקילות.

$$A/R=\begin{cases}\{[x]\mid x\in A\setminus B\} & B=\phi\\ \{[x]\mid x\in A\setminus B\}\cup\{B\} & B\neq\phi\end{cases}$$

נשים לב לכתיבה: $\{[x]\mid x\in A\setminus B\}\cup\{B\}$. הכתיבה $\{[x]\mid x\in A\setminus B\}\cup B$ היא טעות במקרה זה.

הסבר בעזרת דוגמא:

A = { 1, 2, 3, 4, 5 }

B = { 1, 2 }

$$\{[x] \mid x \in A \setminus B\} \cup \{B\} = \{\{3\},\{4\},\{5\},\{1,2\}\}$$
$$\{[x] \mid x \in A \setminus B\} \cup \{B\} = \{\{3\},\{4\},\{5\},1,2\}$$

הביטוי השני הוא כבר לא חלוקה למחלקות שקילות!

.3

מה מספר רלציות השקילות בקבוצה סופית A?

הגדרת קבוצת מנה מגדירה רלציה ולהפך. השאלה היא למעשה כמה חלוקות אפשריות.

נניח כי n=|A|. מספר הרלציות הוא מספר האפשרויות לחלק את האלמנטים לתתי קבוצות כך שבכל קבוצה אלמנט אחד לפחות, ואין אלמנט המופיע ביותר מקבוצה אחת.

כלומר, הבעיה שקולה לחלוקה של n אלמנטים שונים לתאים זהים, כך שאין תא ריק ואין הגבלה על מספר התאים.

6. עוצמות

6.1. הקדמה לעוצמות

מטרת נושא העוצמות היא לדבר על קבוצות בעלות אותו מספר איברים.

עבור קבוצה סופית A גודל הקבוצה הינו $|A|$. עוצמת הקבוצה היא הגודל של A.

גודל במקרה זה הוא מספר האיברים בקבוצה.

<u>משפט</u>

תהינה A ו- B קבוצות סופיות. מתקיים כי $|A|=|B|$ אמ"מ קיימת התאמה חד חד ערכית $f:A\to B$.

הוכחה:

תהינה הקבוצות $A=\{a_1,...,a_k\}, B=\{b_1,...,b_n\}$.

כיוון $\Leftarrow$: נניח כי $n=k$. נגדיר $f:A\to B$ כך: $f(a_i)=b_i, 1\le i\le n$. קל לראות ש- f התאמה חד חד ערכית.

כיוון $\Rightarrow$: נניח כי קיימת התאמה חח"ע – מאחר ו- f חח"ע מתקיים כי $f(a_1),...,f(a_k)$ הם k איברים שונים ב- B, ולכן $n\ge k$. מאחר ו- f ל, אז אלו הם כל האיברים, ולכן $n=k$.

<u>הגדרה</u>

נאמר ששתי קבוצות A ו-B הן **בעלות עוצמה שווה**, בעלות אותה קרדינליות, אם קיימת ביניהם התאמה חח"ע, כלומר אם קיימת פונקציה $f:A\to B$ שהיא פונקציה של A <u>על</u> B וחח"ע.

נאמר ש-A ו-B שקולות ונסמן A~B,

דוגמאות

.1

תהי הקבוצה $B=\left\{n^2 \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$. נטען כי $B\sim\mathbb{N}$.

ניקח $f:\mathbb{N}\to B$ כך ש- $f(n)=n^2$. זוהי התאמה חח"ע ומכאן $|\mathbb{N}|=|B|$.

.2

נגדיר את הקבוצה $(a,b)=\{x\mid x\in\mathbb{R},a<x<b\}$. נטען: $\mathbb{R}\sim(0,1)$.

כדי להוכיח זאת נשתמש בעובדה כי $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ הינה חח"ע ועל.

השלבים:

1) $(0,1)\to(-1.1),\quad f_1=2x-1$

2) $(-1,1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\quad f_2=\frac{\pi}{2}x$

3) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\quad f_3=\frac{\pi}{2}(2x-1)$

כל הפונקציות הן חח"ע ועל.

על ידי הרכבת פונקציות נקבל:

$$f(0,1)\to\mathbb{R},f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}(2x-1)\right)$$

טענה

היחס R המוגדר כך: $R=\left\{\langle A,B\rangle \middle| |A|=|B|\right\}$ הוא יחס שקילות.

הוכחה:

רפלקסיביות: צ"ל להוכיח לכל A כי מתקיים $\langle A,A\rangle\in R$, כלומר $|A|=|A|$. ניתן להשתמש בפונקצית הזהות.

סימטריות: אם $f:A\rightarrow R$ התאמה חח"ע אזי גם $f^{-1}:B\rightarrow A$ התאמה חח"ע, לכן אם $\langle A,B\rangle\in R$ אזי גם $\langle B,A\rangle\in R$.

טרנזיטיביות: אם $\langle A,B\rangle\in R$ ו- $\langle B,C\rangle\in R$ אזי גם $\langle A,C\rangle\in R$, וזאת מכיוון שהרכבה של שתי פונקציות חח"ע ועל הינה גם חח"ע ועל.

מחלקות השקילות של היחס נקראות **המספרים הקרדינלים** (עוצמות).
המספר הקרדינאלי $n\in\mathbb{N}$ הוא כל הקבוצות שעוצמתן שווה לעוצמה של $\{1,...,n\}$.

- כל קבוצה שהמספר הקרדינלי שלה הוא מספר סופי, הינה קבוצה סופית.

6.2. הגדרה 1 לקבוצה אינסופית

קבוצה A תיקרא סופית אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שקיימת התאמה חח"ע בין A לבין $\{1,...,n\}$.
הקבוצה A תיקרא אין סופית אם לא קיים עבורה n כזה.

<u>טענה</u>

הקבוצה $\mathbb{N}$, קבוצת הטבעיים, היא אינסופית לפי הגדרה 1.
צ"ל להראות שלא קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שקיימת התאמה חח"ע בין $\mathbb{N}$ ל- $\{1,...,n\}$. נניח בשלילה ש- $\mathbb{N}$ סופית ושקיים n כזה כך ש- $f:\{1,..,n\}\rightarrow\mathbb{N}$ חח"ע ועל. נתבונן ב- $f(1),...,f(n)$ ויהא y הערך המקסימלי מביניהם. עבור $y+1$ לא קיים $x\in\{1,...,n\}$ כך ש- $f(x)=y+1$. כמו כן מתקיים כי $y+1\in\mathbb{N}$ ולכן f איננה על, בסתירה להנחה.

<u>הגדרה הנגזרת מהגדרה 1</u>

A היא קבוצה אינסופית אם קיימת $f:\mathbb{N}\rightarrow A$ חח"ע.

6.3. הגדרה 2 לקבוצה אינסופית – הגדרה לפי תכונה

קבוצה A היא אינסופית אמ"מ קיימת $f: A \to A$ חח"ע כך ש- $f(A) \subset A$,

כלומר קיימת פונקציה מ-A לעצמה שהיא חח"ע אבל לא על.

הוכחה שקבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ היא אינסופית לפי הגדרה 2:

תהי $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שתוגדר להיות $f(n) = n+1$. פונקציה זו היא חח"ע, אולם $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

<u>מסקנה</u>

עבור 2 קבוצות אינסופיות A ו- B, אם $|A| = |B|$ אזי קיימת פונקציה f חח"ע מ- A ל- B שאיננה על.

<u>טענה (בלא הוכחה)</u>

כל ההגדרות לקבוצה אין סופית שקולות.

<u>משפט</u>

אם A היא קבוצה אינסופית, אזי מתקיימות הטענות הבאות:

1. כל קבוצה B המקיימת $A \subseteq B$ היא קבוצה אינסופית.
2. כל קבוצה B שעבורה קיימת פונקציה חח"ע $f: A \to B$ היא אינסופית.
3. כל קבוצה B שעבורה קיימת פונקציה על $f: B \to A$ היא אינסופית.
4. הקבוצה $P(A)$ היא אינסופית.
5. לכל קבוצה לא ריקה B, הקבוצה $A \times B$ היא אינסופית.
6. עבור כל קבוצה B, הקבוצה $A \bigcup B$ היא אינסופית.
7. לכל קבוצה לא ריקה B, הקבוצה A^B (קבוצת הפונקציות מ-B ל-A) היא אינסופית.

הוכחות

.1

נתון ש- A היא אינסופית ומכאן שקיימת $f:A\rightarrow A$ חח"ע ולא על. נשתמש ב- f כדי להגדיר פונקציה מ- B אל B שהיא חח"ע ולא על.

.6

מכיוון ש- $A\subseteq A\bigcup B$ על פי טענה 1 מתקיים כי $A\bigcup B$ היא אינסופית.

.4

נוכיח שקיימת פונקציה חח"ע $f:A\rightarrow P(A)$ ואז על פי טענה 2 יתקיים ש- $P(A)$ היא אינסופית.

צריך להתאים כל איבר ב-A לתת קבוצה שונה של A. נבחר: $\forall a\in A, f(a)=\{a\}$ - פונקציה חח"ע מ- A ל- $P(A)$.

.5

נוכיח שקיימת פונקציה חח"ע $f:A\rightarrow A\times B$ ועל פי 2 נסיק ש- $A\times B$ הינה אינסופית. נבחר איבר כלשהו b השייך ל- B (קיים כזה), $\forall a\in A, f(a)=f(a,b)$.

.7

נוכיח שקיימת פונקציה חח"ע מ- A ל- A^B (לקבוצת הפונקציות מ- B אל A).

לפי 2 נקבל ש- A^B הינה אינסופית. צריך להתאים לכל איבר ב- A פונקציה שונה מ- B ל- A.

נבחר $\forall a\in A, f(a)=g_a$ כאשר g_a מוגדרת כך: $g_a:B\rightarrow A \qquad \forall b\in B, g_a(b)=a,$.

משפט

תהי Σ שפה. אם $\Sigma\neq\phi$ אזי Σ^* הינה קבוצה אינסופית.

Σ^* מוגדרת להיות קבוצת כל המילים הסופיות הנבנות מאותיות Σ.

כדי להוכיח משפט זה, מספיק שנראה כי קיימת $f:\mathbb{N}\rightarrow\Sigma^*$ חח"ע.

6.4. קבוצה בת מניה

<u>סימון</u>

נסמן את **העוצמה של קבוצת הטבעיים** $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

<u>הגדרה</u>

נאמר שקבוצה A היא **בת מניה** אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to \mathbb{N}$.

הגדרה שקולה: קבוצה A היא **בת מניה** אם היא סופית או שגודלה הוא $\aleph_0$.

<u>הערה חשובה</u>: במקומות רבים בספרות, כולל בגירסה הקודמת של מסמך זה, קבוצה בת מניה מוגדרת כקבוצה אינסופית בלבד שגודלה $\aleph_0$. עניין זה הוא עניין של מוסכמה בלבד.

קבוצה A אינסופית תיקרא **בת מניה** אם $|A| = \aleph_0$.

<u>כיצד מוכיחים שקבוצה A אינסופית היא בת מניה?</u>

1. מציגים התאמה חח"ע בין A לקבוצה שידוע שהיא בת מניה.
2. מציגים פונקציה חח"ע מ- A לקבוצה כלשהי בת מניה ופונקציה חח"ע מקבוצה בת מניה כלשהי לA ומשתמשים במשפט CSB (יוצג בהמשך).
3. מציגים מניה של אברי A שמקיימת:

א. לפני כל איבר נמצא מספר סופי של איברים.

ב. כל איבר נמצא במקום כלשהו במניה (כל איבר נספר).

דוגמא

נטען: $\mathbb{Z}$ הינה בת מניה.

ננסה למצוא מניה. נסיון ראשון: ...,-3,-2,-1,...,0,1,2.

סדר זה איננו ספירה טובה, כי לפני המספר -1 עומדים אינסוף איברים. נסיון שני:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{Z} & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ \mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

נשים לב שזוהי למעשה התאמה חד חד ערכית. בשלב ה- k של המניה סופרים את k ואת $-k$.

כל איבר x נספר בשלב ה- $|x|$ וכל שלב אורכו לכל היותר 2, לכן כל מספר $x \in \mathbb{Z}$ מופיע בסידרה כשלפניו מספר סופי של איברים.

גם אם קיימת עבור קבוצה מניה עם חזרות איננו נמצאים בבעיה כי קיימת עבורה גם מניה בלי חזרות. מעבר ממניה עם חזרות למיניה בלי חזרות בצורה פשוטה: מתקדמים לפי הסדר שקבענו. אם האיבר הנוכחי כבר נספר, לא נספור אותו שוב. אחרת נספור אותו.

משפט

תהינה $A_1,...,A_k$ קבוצות בנות מניה, אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ הינו בן מניה. איחוד של מספר סופי של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.

הוכחה: אם כל הקבוצות סופיות, ראינו שאיחוד סופי של קבוצות סופיות הוא סופי.

נתעניין לכן במקרה בו לפחות אחת הקבוצות הינה אינסופית, ומכאן שהאיחוד כולו הוא אינסופי.

נבנה טבלה בה בעמודה יהיו הקבוצות השונות ובתוך הטבלה יהיו האיברים השונים של הקבוצות:

$$A_1 = \{a_{10},...\}$$
$$A_2 = \{a_{20},...\}$$
$$...$$
$$A_k = \{a_{k0},...\}$$

בשלב ה- j נספור את כל האיברים מהצורה a_{ij} $i=1,...,k$. כל שלב הוא לכל היותר באורך k.

כל איבר יופיע בסדרה ולפניו מספר סופי של איברים ולכן $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ הינו בן מניה.

<u>משפט (בלא הוכחה)</u>

איחוד של מספר בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.

<u>טענה</u>

אם A ו-B בנות מניה, אזי $A\times B$ בת מניה.

<u>טענה</u>

$\mathbb{Q}^+$ - הרציונליים החיוביים - בת מניה. $a,b\in\mathbb{N},\frac{a}{b}$

אם נצליח לספור את החיוביים, נוכל לספור גם את השליליים. ניצור טבלה:

	1	2	3	4	5	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	
...						

ישנם מספרים שמופיעים כמה פעמים - למשל - כל האלכסון הראשי.

בשלב ה- k, $k>1$, נספור את כל המספרים מהצורה $\frac{a}{b}$ כך ש- $a+b=k$. (ישנם $k+1$ מספרים כאלו). כל מספר מהצורה $\frac{a}{b}$ יספר בשלב ה- $a+b$ קיים שלב כזה! זוהי ספירה עם חזרות.

<u>דוגמא</u>

תהי Σ שפה סופית (קבוצה סופית של אותיות). קבוצת המילים הסופיות מעל Σ היא בת מניה.

סקיצה להוכחה:

מספר המילים באורך k כלשהו הקיימות הינו Σ^k.

נגדיר מניה בה בשלב ה- k נספור את כל המילים באורך k. כל שלב בספירה הוא סופי ולכן הטענה נכונה.

<u>דוגמא</u>

תהי Σ קבוצה בת מניה של אותיות. נטען: קבוצת המילים הסופיות מעל Σ היא בת מניה.

פתרון:

עבור כל תא במילה יש אין סוף אפשרויות לאותיות לכן אי אפשר להשתמש בדרך פתרון הקודמת.

- בשלב ה- k, $k \geq 1$, נספור את כל המילים באורך קטן שווה k שהאותיות בהן הן מהקבוצה $\{a_0, a_1, ..., a_{k-1}\}$.

כמה מילים כאלו יש? $\sum_{i=1}^{k} k^i$.

נוכיח שכל מילה נספרת בספירה זו.

תהיי מילה $k_1 k_2 ... k_r$. נסתכל על האות שבה האינדקס הוא מקסימלי. יהי s האינדקס. המילה תיספר בשלב שהוא המקסימום בין r ל- $s+1$.

טענה

אם B בת מניה ו-A קבוצה סופית, אזי B^A היא בת בניה.

נגדיר מניה:

בשלב ה-k נספור את כל הפונקציות מ-A לקבוצה $\{b_1,...,b_k\}$. יש $k^{|A|}$ פונקציות כאלו.

בהינתן פונקציה $f: A \to B$, יהיו $f(a_1),...,f(a_n)$ ערכי הפונקציה.

יהיו $b_{1j} = f(a_j), 1 \le j \le n$

נביט על הערך המקסימלי מבין $b_{i1}, b_{i2},...,b_{in}$. יהי r המקסימלי שבהם. לכן f נספרת בשלב ה-r.

טענה

לכל קבוצה אין סופית A יש תת קבוצה בת מניה.

נבנה קבוצה B: $B = \{b_i \mid i \in N\}$.

יהי $b_0 \in A$ ותהי $B_0 = \{b_0\}$. יהי $b_1 \in A / B_0$ ותהי $B_1 = \{b_0, b_1\}$.

נניח $B_i = \{b_0, b_1,...,b_i\}$ כאשר $B_i \subset A$. יהי $b_{i+1} \in A / B_i$ ותהי $B_{i+1} = B_i \bigcup \{b_{i+11}\}$.

כל אחת מהקבוצות B_i היא סופית. איחוד כל איברי קבוצות B_i הוא אינסופי. המניה היא הסדר בו בחרנו איברים מ-A. הקבוצה הזו היא עם עוצמה שווה לזו של הטבעיים.

משפט

לכל קבוצה אינסופית A יש תת קבוצות אמיתיות (תת קבוצה ממש) בעלות עוצמה שווה ל-A.

כיוון

הצורה היחידה שניתן להוכיח זאת היא לקחת תת קבוצה מ-A ולהוכיח שקיימת בינה לבין A פונקציה חח"ע ועל. אם ניקח את A ונוציא ממנה רק איבר אחד, נקבל קבוצה בעלת אותה עוצמה.

<u>הוכחה</u>

תהיי $B \subseteq A$ בת מניה $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, ותהי $B' = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}, i \geq 1\}$.

נבנה העתקה בין שתי הקבוצות שהיא התאמה חח"ע.

נבנה g חד חד ערכית ועל.

$$g: A \to A / \{b_0\}$$

$A / \{b_0\}$ היא תת קבוצה אמיתית של A. אם נצליח למצוא g כמבוקש נראה כי ל-A ול $A / \{b_0\}$ יש אותה עוצמה.

נגדיר את g:

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in A / B \\ b_{i+1} & x \in B (\Rightarrow x \in b_i) \end{cases}$$

<u>מסקנה חשובה</u>

אם ניקח קבוצה אינסופית ונוציא ממנה מספר סופי של איברים, נשמור על עוצמת הקבוצה.

<u>מסקנה ללא הוכחה</u>

אם ניקח קבוצה מעוצמה גבוהה, ונוציא מספר איברים מעוצמה נמוכה יותר, העוצמה תישמר.

<u>דוגמא</u>

תהי קבוצת הווקטורים האינסופיים מעל $\mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ סכום האיברים במקומות $n, n+1, ..., n+6$ הינו 21. מהי עוצמת הקבוצה?

נשים לב שהגדרת 6 המקומות הראשונים בווקטור מגדירה את שאר האיברים שלו באופן יחיד, ולכן הקבוצה הינה קבוצה סופית, ומספר איבריה, העוצמה שלה הוא $\binom{21+(6-1)}{6-1}$.

דוגמא

נניח שאנו מבצעים את הניסוי הבא: מטילים מטבע עד שמקבלים H בפעם הראשונה.

נגדיר את הקבוצה O: { תוצאות הניסוי } = O

נוכיח כי O היא קבוצה בת מניה.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to O$ בצורה באה:

$$f(0)=H \qquad f(1)=T,H \qquad \ldots \qquad f(n)=\underbrace{T,\ldots,T}_{n\text{ times}},H$$

נשים לב:

אם f היא על אזי O היא בת מניה (סופית או אינסופית). בנוסף, אם f חח"ע אזי O אינסופית.

ניתן לראות בנקל כי הפונקציה שהגדרנו היא חח"ע, אולם פונקציה זו איננה על. לניסוי $T,T,T,\ldots$, שהוא ניסוי חוקי, אין מקור. כדי להפוך פונקציה זו לעל נגדיר אותה מחדש:

$$f(0)=T,T,\ldots \qquad f(1)=H \qquad f(2)=T,H \qquad \ldots \qquad f(n+1)=\underbrace{T,\ldots,T}_{n\text{ times}},H$$

השיטה בה השתמשו כדי להפוך את הפונקציה לעל היא שימושית ומכונה לעתים "תרגיל המלון האינסופי". מקור השם הוא בתרגיל המחשבתי הבא: זוג מגיע לבית מלון בעל אינסוף חדרים, אולם אומרים להם שכל החדרים תפוסים, והשאלה – היכן למקם את בני הזוג? הפתרון: כל דייר שכבר נמצא במלון יעבור לחדר הבא (דייר מחדר 1 יעבור לחדר 2 וכו'), ואז חדר מספר 1 יהיה פנוי עבור הזוג.

הרעיון באופן כללי: כיצד נוכיח שאיחוד של קבוצה סופית וקבוצה בת מניה הינו בן מניה?

הפתרון: נשים את הקבוצה הסופית בהתחלת הספירה, ואת הקבוצה האינסופית אחריה.

6.5. משפט קנטור

6.5.1. הגדרות

<u>הגדרה</u>

נאמר ש- $A \preceq B$ אם קיימת $f : A \xrightarrow{1:1} B$.

במילים אחרות, נאמר כי $A \preceq B$ אם העוצמה של A קטנה או שווה לעוצמה של B.

<u>הגדרה</u>

נאמר ש- $A \prec B$ אם $A \preceq B$ אבל $A \not\sim B$.

<u>דוגמאות</u>

.1

יהיו הקבוצות $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ כך שמתקיים $n < m$ אזי $A \prec B$.

.2

תהי A קבוצה סופית. מתקיים: $A \prec \mathbb{N}$.

ראינו שלא קיימת פונקציה $f : A \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל.

.3

לכל קבוצה A מתקיים כי $A \preceq P(A)$.

קיימת הפונקציה $f : A \xrightarrow{1:1} P(A)$ והיא $f(x) = \{x\}$.

6.5.2. קבוצות שאינן בנות מניה – שיטת הליכסון של קנטור

תהי f פונקציה $f: A \to P(A)$. נראה כי קיימת קבוצה $B_f \in P(A)$ שאינה מתקבלת כתמונה של אחד מאיברי A, כלומר $B_f \notin f(A)$, ומכאן שכל פונקציה $f: A \to P(A)$ איננה על.

ניתן להציג את f בצורת הטבלה הבאה:

	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$	$f(a_4)$	$\cdots$	$\cdots$
a_1						
a_2						
a_3						
a_4						
$\cdots$						
$\cdots$						

(מניחים כי הקבוצה A בת מניה כי אחרת לא ניתן לרשום אותה בטבלה כנ"ל).

במקום ה-$(a_1, f(a_1))$ נרשום 1 אם $a_1 \in f(a_1)$ או 0 אחרת. באופן כללי: במקום ה-$(a_j, f(a_k))$ נרשום 1 אם $a_j \in f(a_k)$ ו-0 אחרת.

<u>דוגמא</u>

תהי A הקבוצה $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ותהי f שמוגדרת כך:

$$f(a_1) = \phi, \qquad f(a_2) = \{a_1, a_3\}$$
$$f(a_3) = \{a_1, a_2, a_3\} \qquad f(a_4) = \phi$$

נכתוב את f בטבלה:

	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$	$f(a_4)$
a_1	0	1	1	0
a_2	0	0	1	0
a_3	0	1	1	0
a_4	0	0	0	0

כל עמודה בטבלה מגדירה תת קבוצה של A.

מציאת $B_f \subseteq A$ שאיננה מתקבלת על ידי f שקולה למציאת עמודה שאיננה מופיעה בטבלה – נמצא עמודה שתהיה שונה מכל עמודה אחרת.

העמודה השונה מכל העמודות טבלה היא העמודה המתקבלת על ידי היפוך העמודות באלכסון.

כלומר, אם $a_1 \not\subset f(a_1)$ נרשום 1 אחרת נרשום 0 וכך הלאה:

	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$	$f(a_4)$
a_1	$\cancel{0}1$	1	1	0
a_2	0	$\cancel{0}1$	1	0
a_3	0	1	$\cancel{1}0$	0
a_4	0	0	0	$\cancel{0}1$

באופן כללי, העמודה השונה מכל עמודה אחרת בעמודה ה-i היא שונה לפחות באיבר ה-i.

טכניקה זו שימושית – בעזרתה מוכיחים שקבוצות אינן בנות מניה.

6.5.3. משפט קנטור

לכל קבוצה A , A אינה שקולה ל-P(A). כלומר: לכל קבוצה A מתקיים כי $A \prec P(A)$.

<u>הוכחה</u>

ההוכחה צריכה לכלול שני מרכיבים: ראשית עלינו לראות כי $A \preceq P(A)$ ולאחר מכן אנו צריכים להוכיח כי הקבוצות אינן שקולות.
ראינו קודם במסמך זה כי $A \preceq P(A)$ ולכן נותר להוכיח רק את השקילות.

לשם כך נראה שלכל פונקציה $f : A \to P(A)$ קיימת קבוצה $B_f \in P(A)$ שאינה מתקבלת כתמונה של אחד מאיברי A, כלומר $B_f \notin f(A)$, ומכאן שכל פונקציה $f : A \to P(A)$ איננה על.

נוכיח את הטענה עבור כל קבוצה בת מניה (סופית או אינסופית).

תהי $f : A \to P(A)$ פונקציה. נגדיר את B_f באופן הבא:
לכל $a \in A$, מתקיים $a \notin f(a) \Leftrightarrow a \in B_f$.
נראה כי $B_f \notin f(A)$, כלומר לא קיים $x \in A$ כך ש-$f(x) = B_f$.
נבחין בין שני מקרים:
1. $B_f \neq f(x) \Leftarrow x \notin B_f \Leftarrow x \in f(x)$
2. $B_f \neq f(x) \Leftarrow x \in B_f \Leftarrow x \notin f(x)$

לכן לכל פונקציה f קיימת B_f שאיננה מתקבלת על ידי f ומכאן ש-f איננה על.

<u>מסקנה ממשפט קנטור</u>

הקבוצה $P(\mathbb{N})$ איננה בת מניה.

<u>מסקנה 2</u>

אנו יכולים לקבל סידרה אינסופית עולה של עוצמות: $\mathbb{N} \prec P(\mathbb{N}) \prec P(P(\mathbb{N})) \prec ...$.

מכאן נובע שיש מספר אינסופי של עוצמות.

6.6. עוצמת הרצף

6.6.1. השערת הרצף

<u>שאלה</u>

האם קיימת קבוצה B המקיימת $\mathbb{N} \prec B \prec P(\mathbb{N})$?

השערת הרצף אומרת שאין קבוצה B כזו. ייתרה מכך, לכל קבוצה A לא קיימת $A \prec B \prec P(A)$.

להשערה זו אין הוכחה. אומרים שלא ניתן להוכיח אותה בעזרת הכלים של תורת הקבוצות.

6.6.2. עוצמת הרצף

<u>הבחנה</u>

$2^{\mathbb{N}}$ איננה קבוצת בת מניה. הבחנה זו נכונה לפי משפט קנטור.

$2^{\mathbb{N}}$ היא קבוצת החזקה של המספרים הטבעיים. כמו כן, ניתן לזהות אותה עם קבוצת הווקטורים הבינאריים האינסופיים.

<u>הגדרה</u>

עוצמת קבוצת החזקה של הטבעיים, $2^{\mathbb{N}}$, תכונה **עוצמת רצף**.

<u>הגדרה חלופית</u>

העוצמה של קבוצת המילים הבינריות האינסופיות נקראת **עוצמת רצף**. היא זהה לעוצמה של קבוצת המספרים הממשיים.

<u>סימון</u>

סימון לעוצמת רצף: $|A| = \neg$

<u>מספרים ממשיים</u>

נסתכל על הקטע $[0,1]$. נטען כי קבוצת המספרים בקטע זה איננה בת מניה.

כל מספר בקטע בין 0 ל-1 יכול להיות מיוצג בצורה הבאה: $0.x_1x_2x_3...$ כאשר $0 \le x_i \le 9$.

נניח שקיימת $g : N \to [0,1]$. נכתוב אותה:

$$g(0) = 0.x_{00}x_{01}x_{02}...$$
$$g(1) = 0.x_{10}x_{11}x_{12}...$$
$$...$$
$$g(i) = 0.x_{i0}x_{i1}x_{i2}...$$

נבנה את המספר y:

$$y = 0.y_0y_1y_2...$$
$$y_i \ne x_{ii}$$

המספר הזה לא יתקבל על ידי g. מ.ש.ל.

ההוכחה במקרה זה לא מושלמת, יש בה בעיה. הבעיה נובעת מהאופי של המספרים הממשיים.

יש מספרים שיש להם יותר מייצוג אחד. המספר $0.400\dot{0} = 0.399\dot{9}$. למשל, 0.9999...=1.

זוהי בעייה שלא הייתה לנו במילים הבינריות האינסופיות.

לכן נוסיף דרישה נוספת למספר y.

$$y = y_0y_1y_2..., \quad y_i \ne x_{ii}, y_i \ne \{0,9\}$$

הדרישה נובעת רק מהאופי של המספרים הממשיים.

<u>טענה</u>

נטען: $\left|[a,b]\right| = \left|(a,b)\right| = \left|(a,b]\right|$

נפצל את ההוכחה למספר חלקים.

טענה: עוצמת הקטע [0,a] היא עוצמת הרצף.

$$f:[0,1] \to [0,a]$$
$$f(x) = ax$$

טענה: עוצמת הקטע $\left[x, x+a\right]$ היא רצף.

$$f:[0,a] \to [x,x+a]$$
$$f(y) = x+y$$

מסקנה שכבר הוכחנו ברגע זה: עוצמת כל קטע כלשהו על המספרים הממשיים היא עוצמת רצף.

עכשיו נרצה לעבור לקטע אינסופי.

$$f:(0,1) \to (1,\infty)$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

מכאן העוצמה של הקטע (0,1) זהה לעוצמה של הקטע $(1,\infty)$.

ברור וטריויאלי כי $\left|(0,\infty)\right| = \left|(0,2)\right|$. ומכאן $\left|(-\infty,\infty)\right| = \left|(-2,2)\right|$ שזה זהה לפי הטענה ההתחלתית ל- $\left|(-\infty,\infty)\right| = \left|(0,1)\right|$.

<u>תרגיל</u>

תהא B הקבוצה הבאה: $B = \{\ b \mid b$ וקטור בינארי אינסופי $\}$. הוכח: $B \sim B \times B$.

צ"ל קיומה של פונקציה חח"ע ועל $f: B \to B \times B$.

נבחר את הפונקציה הבאה: $f\left(b\right) = \left(b', b''\right)$, כאשר: $b \in \left\{0,1\right\}^*$ $b = b_0 b_1 b_2 \ldots,$ ונגדיר:

$$b' = b_0 b_2 b_4 \ldots, \quad b'' = b_1 b_3 b_5 \ldots$$

נראה כי פונקציה זו הינה חח"ע: יהיו $b,x\in B$ כך ש- $x\neq b$. צ"ל: $f\left(b\right)\neq f\left(x\right)$.

מהנתון: קיים i כך ש $b_i\neq x_i$. אם i זוגי אזי $b'_{i/2}\neq x'_{i/2}$ ואז $b'\neq x'$ ולכן $f\left(b\right)\neq f\left(x\right)$.

אם i אי זוגי אזי $b''_{(i-1)/2}\neq x''_{(i-1)/2}$ ואז $b''\neq x''$ ולכן $f\left(b\right)\neq f\left(x\right)$.

נראה כי f הינה על. יהי $\left(c,d\right)\in B\times B$. צריך למצוא $b\in B$ כך שיתקיים $f\left(b\right)=\left(c,d\right)$.

נבחר את b להיות הווקטור הבא: $b=c_0d_0c_1d_1...$. לפי הגדרת f מתקיים: $f\left(b\right)=\left(c,d\right)$.

<u>סימון</u>

נסמן ב- B^A את אוסף הפונקציות מ- A אל B: $B^A=\left\{f\subseteq A\times B \text{ and} f \text{ is function}\right\}$.

את $\left\{0,1\right\}^{\mathbb{N}}$ נסמן לעתים ב- $2^{\mathbb{N}}$. ניתן להסתכל על $\left\{0,1\right\}^{\mathbb{N}}$ כאוסף כל הווקטורים הבינאריים האינסופיים.

<u>משפט</u>

לכל קבוצה B מתקיים כי $P\left(B\right)\sim 2^B$.

ניתן להסתכל על הטענה כהתאמת אוסף כל הפונקציות מ- B אל $\left\{0,1\right\}$.

נראה פונקציה חח"ע ועל מ- $P\left(B\right)$ ל- 2^B: עבור כל $A\in P\left(B\right),\left(A\subseteq B\right)$ נגדיר $f\left(A\right)=g_A$.

g_A היא פונקציה מ- B אל $\left\{0,1\right\}$ המוגדרת כך: $g_A\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & else\end{cases}$.

פונקציה זו נקראת **הפונקציה האופיינית** של A. היא מסומנת לעתים גם χ_A.

ניתן לראות בקלות כי f הינה חח"ע ועל.

6.7. משפט קנטור ברנשטיין

6.7.1. מוטיבציה

השתמשנו ביחס $\preceq$ בדיון על עוצמות. אנו רוצים להראות כי יחס זה הוא יחס שימושי, שיש סיבה למעשה שהגדרנו אותו.

נרצה לראות כי יחס זה הוא יחס סדר. ניתן להוכיח בקלות כי הוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

משפט קנטור ברנשטיין שנראה מיד יוכיח כי הוא גם אנטי-סימטרי.

6.7.2. ניסוח 1

לכל 2 קבוצות A ו-B:

אם קיימת פונקציה $f: A \to B$ שהיא 1:1 וגם קיימת פונקציה $g: B \to A$ שהיא 1:1, אזי קיימת התאמה חח"ע בין A ל-B.

6.7.3. ניסוח 2

לכל שתי קבוצות A, B, אם מתקיים כי $A \preceq B$ וגם $B \preceq A$ אזי מתקיים כי $A \sim B$.

6.7.4. טענה 1

$$\left|\mathbb{N}\right| = \left|\mathbb{Q}^*\right|, \mathbb{Q}^* = \left\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$$

נוכיח על ידי משפט קנטור ברנשטיין:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \frac{n}{1}, f : \mathbb{N} \xrightarrow{1:1} \mathbb{Q}^*$$

$$\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*, g\left(\frac{m}{n}\right) = 2^n \cdot 3^m, G : \mathbb{Q}^* \xrightarrow{1:1} \mathbb{N}$$

6.7.5. טענה 2

נטען: $\left|\mathbb{R}\right| = \left|P(\mathbb{N})\right|$.

ההוכחה תעשה בשני שלבים:

1. נראה כי $(0,1) \sim P(\mathbb{N})$.
2. נראה כי $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

.1

מספיק למצוא $f:(0,1) \to P(\mathbb{N})$ חח"ע ו- $g:P(\mathbb{N}) \to (0,1)$ חח"ע ולפי משפט קנטור-ברנשטיין יובטח לנו קיום פונקציה $h:(0,1) \to P(\mathbb{N})$ חח"ע ועל.

f: בהינתן $r = 0.r_1r_2r_3... \in (0,1)$, כאשר $\forall i$ מתקיים $r_i \in \{0,...,9\}$ ובמספר אין סדרת $\dot{9}$ אינסופית, נגדיר את f בצורה הבאה: $f(r) = \{r_1, 10+r_2, 100+r_3, ...\}$.

נראה כי f חח"ע: יהיו שני מספרים $r \neq s$. קיים $r_i \neq s_i$. ויתקיים:

$10^{i-1} + r_i \in f(r), 10^{i-1} + r_i \in f(s)$.

g : בהינתן $B \subseteq \mathbb{N}$ נגדיר את g בצורה הבאה: $g(B) = 0.b_1b_2b_3...$, כך ש:

$$b_i = \begin{cases} 2 & i \in B \\ 0 & else \end{cases}$$

g חח"ע: בהינתן $B, C \subseteq \mathbb{N}$ כך ש- $b \neq c$ באחת מהן יש איבר שאין בשניה.
בלי הגבלת הכלליות נאמר כי $i \in B$ וגם $i \notin C$, ואז $b_i = 2, c_i = 0$ ואז המספר הממשי המייצג אותם שונה.

לכאורה $g(\phi) = 0.000 = 0$. האם $0 \in (0,1)$? לא, ולכן נגדיר עבור $\phi \in P(\mathbb{N})$ את g באופן מפורש, לדוגמא $g(\phi) = 0.3$.

.2
צריך להראות ש- $\mathbb{R} \sim (0,1)$.

נגדיר פונקציה f בצורה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right) & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right) & x < 0 \end{cases}$$

ניתן לראות כי פונקציה זו הינה חח"ע ועל.

7. קבוצות אינדוקטיביות

7.1. סגירות תחת פונקציות

7.1.1. הגדרת סגירות תחת פונקציה

- נאמר ש- $A_0 \subseteq A$ **סגורה** תחת הפונקציה $f : A \to A$ אם לכל $a \in A_0$ מתקיים $f(a) \in A_0$.
- נאמר ש- $A_0 \subseteq A$ **סגורה** תחת הפונקציה $f : A^k \to A$ (פונקציה k-מקומית) אם לכל $a_1, a_2, ..., a_k \in A_0$ מתקיים $f(a_1, a_2, ..., a_k) \in A_0$.

7.1.2. דוגמא

תהי $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ פונקצית החיבור.

קבוצת המספרים הזוגיים הינם סגורים תחת f וקבוצת המספרים האי זוגיים אינם סגורים תחת f.

7.1.3. הגדרת סגירות תחת קבוצת פונקציות

תהא F קבוצת פונקציות. נאמר ש- $A_0 \subseteq A$ **סגורה** תחת F אם לכל $f \in F$ מתקיים כי A_0 סגורה תחת f.

7.1.4. טענה 1

תהי F קבוצת פונקציות מעל A ותהיינה A_1, A_2 תת קבוצות של A שסגורות תחת F.

אזי: $A_1 \bigcap A_2$ סגורה תחת F.

<u>הוכחה</u>

כדי להראות ש- $A_1 \bigcap A_2$ סגורה תחת F נראה כי החיתוך סגור תחת כל $f \in F$.

נניח ש- f היא פונקציה k מקומית.

יהיו $a_1, a_2, ..., a_k \in A_1 \bigcap A_2$. צ"ל: $f\left(a_1, a_2, ..., a_k\right) \in A_1 \bigcap A_2$.

מתקיים: $a_1, a_2, ..., a_k \in A_1$ וגם $a_1, a_2, ..., a_k \in A_2$ לפי הגדרת החיתוך.

מתקיים: $f\left(a_1, a_2, ..., a_k\right) \in A_1$ וגם $f\left(a_1, a_2, ..., a_k\right) \in A_2$ ולכן $f\left(a_1, a_2, ..., a_k\right) \in A_1 \bigcap A_2$.

7.1.5. טענה 2

תהי F קבוצת פונקציות מעל A ותהי B קבוצה של תתי קבוצו של A הסגורות מעל F.

מתקיים: הקבוצה $\bigcap B$ גם סגורה תחת F.

7.2. עיצוב מילים

7.2.1. בנאים של קבוצות

בנאים של קבוצות הינו עקרון שלפיו בונים קבוצות מקבוצות נתונות. לדוגמא:

- עבור כל קבוצה A נוכל ליצור את הקבוצה $\{A\}$.
- עבור כל קבוצה A נוכל ליצור את הקבוצה $A\cup\{A\}$.
- עבור כל קבוצה A נוכל ליצור את הקבוצה $P(A)$.
- עבור כל קבוצה A וקבוצה נוספת B נוכל ליצור את הקבוצה $\langle A,B\rangle$

יהי F עקרון בונה קבוצות. האם קיימת $\{F(A) \mid A \text{ is a group}\}$ קבוצה אוניברסלית עבור F?

התשובה: לא. ההוכחה דומה להוכחה של הוכחת אי קיום קבוצת כל הקבוצות.

7.2.2. עקרון הסגירות

עקרון זה מאפשר לנו לקחת קבוצת בסיס ולסגור תחתיה פעולות.

תהי C קבוצה של בנאים.

עקרון הסגירות אומר כי לכל קבוצה C סופית ולכל קבוצה A קיימת קבוצה B כך ש:

1. $A\subseteq B$.
2. B סגורה תחת F, לכל $F\in C$.

7.2.3. הגדרת אוסף מילים

תהי Σ קבוצה של אותיות.

נגדיר בנאים עבור כל $\alpha \in \Sigma$ בצורה הבאה: $S_\alpha(A) = \langle A, \alpha \rangle$.

לפי עקרון הסגירות קיימת קבוצה B עבורה $\phi \in B$ וגם B סגורה תחת S_α לכל $\alpha \in \Sigma$.

נגדיר את **אוסף כל המילים** מעל Σ בצורה הבאה: $\Sigma^* = \bigcap \{ X \subseteq B : X \text{ is } \Sigma\text{-closed} \}$.

נסמן: s_α היא ההגבלה של S_α המוכלת על הקבוצה Σ^*.

7.2.4. מילים מעל $\{a,b\}$

תהי $\Sigma = \{a,b\}$. מתקיים:

- המילה $\phi \in \{a,b\}^*$ מכונה **המילה הריקה** ומסומנת על ידי ε.
- $s_a(\varepsilon)$ מסמל את המילה המכילה את האות a.
- $s_b(\varepsilon)$ מסמל את המילה המכילה את האות b.
- באופן דומה, $S_a(S_b(\phi))$ מסמל את המילה המכילה את האות b שלאחריה האות a.

באופן כללי $s_a(w), s_b(w)$ מסמלים את המילים המכילות את המילה w ואחריה a או b בהתאמה.

נסמן: $s_a(w) = wa, s_b(w) = wb$.

7.2.5. תכונות של Σ^*

מהגדרת אוסף המילים נובעות מספר תכונות שנסכמן להלן:

1. $\varepsilon \in \Sigma^*$.
2. אם $w \in \Sigma^*$ אזי גם $w\alpha \in \Sigma^*$ עבור כל $\alpha \in \Sigma$.
3. **עקרון האינדוקציה**: אם $W \subseteq \Sigma^*$ וגם $\varepsilon \in W$ וגם עבור כל $w \in W$ ו-$\alpha \in \Sigma$ מתקיים כי $w\alpha \in W$ אזי $W = \Sigma^*$.
4. $w\alpha \neq \varepsilon$ לכל $w \in \Sigma^*$ ולכל $\alpha \in \Sigma$.
5. לכל $a \in \Sigma$ הפונקציה s_a הינה פונקציה חח"ע.

7.2.6. בניית קבוצת הטבעיים

נביט במילים מעל הא"ב $\{1\}$. א"ב זה מכיל אות בודדת.

קבוצת המילים $\{1\}^*$ תכונה קבוצת **המילים האונריות**.

נזהה קבוצה זו עם קבוצת המספרים הטבעיים: $\{1\}^* = \mathbb{N}_{word} = \mathbb{N}$.

קבוצת הטבעיים תראה כך: $\varepsilon = 0, 1 = 1, 11 = 2, 111 = 3, ...$.

עבור $w \in \mathbb{N}$ נסמן את המילה $w1$ בתור $w+1$.

כמו כן, התכונות של קבוצת אותיות שהגדרנו בסעיף הקודם מכונות **Peano Axioms** בהקשר לקבוצת המילים האונריות.

7.3. קבוצות אינדוקטיביות

7.3.1. הגדרת קבוצות מורכבות – הגדרה באינדוקציה

ראינו דרכים להגדרת קבוצה:

- הרכבה של הקבוצה איבר אחד איבר – "רשימת מכולת". כתיבה זו מסורבלת יחסית ואפשרית רק עבור קבוצות סופיות.
- הגדרת קבוצה על ידי תכונה מאפיינת – לא כל התכונות קלות או ניתנות לבדיקה.

נראה כעת דרך נוספת להגדיר קבוצה – הגדרת קבוצה באינדוקציה.
לשם הגדרת קבוצה באינדוקציה יש צורך בקבוצת גרעין (המסומנת ב- B) וקבוצת פעולות, פונקציות (המסומנת ב- F).

הקבוצה המוגדרת באינדוקציה על ידי קבוצת הגרעין B וקבוצת הפעולות F המסומנת ב- $X_{B,F}$ היא הקבוצה העונה על שלוש הדרישות הבאות:

1. $B \subseteq X_{B,F}$ (איברי הגרעין נמצאים ב- $X_{B,F}$).
2. סגירות תחת F: לכל פונקציה k-מקומית $f \in F$ לכל $a_1,...,a_k \in X_{B,F}$ גם $f\left(a_1,...,a_k\right) \in X_{B,F}$.
3. כל האיברים ב- $X_{B,F}$ הכרחיים לקיום הדרישות $1,2$ (אין איברים מיותרים).

<u>דוגמא</u>

$$B=\{0\}, F=\{f\}, f(n)=n+1$$

	$I_3=\{0,2,4,...\}$	$I_2=\mathbb{N}$	$I_1=\mathbb{Z}$
קיום דרישה 1:	הדרישה מתקיימת	**הדרישה מתקיימת**	הדרישה מתקיימת
קיום דרישה 2:	הדרישה לא מתקיימת	**הדרישה מתקיימת**	הדרישה מתקיימת
קיום דרישה 3:	הדרישה לא מתקיימת	**הדרישה מתקיימת**	הדרישה לא מתקיימת

<u>דוגמא – שפת ABA</u>

תהי שפה של מילים מעל האותיות a,b שתוגדר כך: $B=\{a,b\}, F=\{f_1,f_2,f_3\}$ כך ש:

f_1 מוסיפה aba מימין למילה. f_2 מחליפה את ה- aa הימני ביותר ב- b ו- f_3 מוחקת את ה- bbb הימני ביותר.

המילים הבאות לדוגמא שייכות לשפה: $ab, ababa, ababaaba, abaa$.

7.3.2. הוכחת שימושיות ההגדרה

נראה כי ההגדרה טובה – כלומר שבהנתן קבוצת גרעין B וקבוצת פעולות F קיימת קבוצה העונה על הדרישות 1-3 והיא יחידה.

<u>הוכחת קיום</u>

נגדיר: { X | X עונה על דרישות 1, 2 } = A.

הקבוצה A איננה ריקה, כי הקבוצה מעליה אנו עוברים (התחום, העולם) נמצאת בפנים.

נגדיר: $X^*=\bigcap A$. נראה כי X^* עונה על דרישות $1-3$.

דרישה 1: צ"ל כי $B\subseteq X^*$.

לכל $X\in A$ מתקיים כי X עונה על דרישה 1, ולכן $B\subseteq X$ ולכן $B\subseteq\bigcap A=X^*$.

דרישה 2: סגירות תחת F.

ראינו קודם שאם A מכילה קבוצות שסגורות תחת F, מתקיים שגם $\bigcap A$ סגורה תחת F.

דרישה 3: צ"ל שכל האיברים הכרחיים לקיום דרישות 1, 2:

נניח בשלילה שקיים $g\in X^*$ שאינו הכרחי לקיום דרישות 1, 2. קיימת קבוצה x שעונה על דרישות $1,2$ כך ש- $g\notin x$. מתקיים $x\in A$ כי x עונה על דרישות 1, 2. $g\notin x \Leftarrow g\notin\bigcap A=X^*$ בסתירה לכך שהנחנו כי $g\in X^*$. מכאן שקיימת קבוצה שעונה על דרישות 1-3.

<u>הוכחת יחידות</u>

לפי ההגדרה כל קבוצה X המקיימת את דרישות $1,2$ מכילה את X^*.

נניח בשלילה שקיימת X' שעונה על דרישות $1-3$, כך ש- $X' \neq X^*$.

X' עונה על דרישות $1,2$ ולכן $X^* \subseteq X'$. מאחר ו- $X' \neq X^*$ הרי שב- X' יש איברים נוספים. האיברים האלו אינם הכרחיים לקיום דרישות $1,2$, בסתירה לכך ש- X' מקיימת את 3, כלומר X^* מקיימת את הדרישות 1-3 והיא יחידה.

<u>מסקנה – **משפט ההוכחה באינדוקציה**</u>

כל קבוצה X שמקיימת את דרישות $1, 2$ מקיימת $X_{B,F} \subseteq X$.

לפיכך, על מנת להוכיח שקבוצה Y מקיימת כי $X_{B,F} \subseteq Y$ מספיק להראות כי:

1. $B \subseteq Y$.
2. Y סגורה ל- F.

7.3.3. סדרת יצירה

<u>הגדרה</u>

סדרת יצירה עבור איבר a מתוך $X_{B,F}$ היא סדרה סופית $a_1,...,a_n$ המקיימת:

1. $a_n = a$.
2. לכל $1 \le i \le n$ מתקיים: $a_i \in B$ או a_i התקבל מאיברים קודמים בסדרה על ידי אחת מהפעולות ב- F.

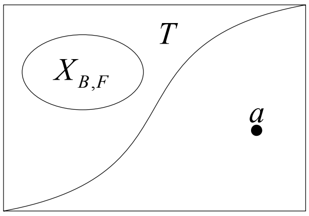
<u>טענה</u>

בהינתן B,F, לכל איבר a מתקיים כי $a \in X_{B,F} \Leftrightarrow$ ל- a יש סדרת יצירה מתוך $X_{B,F}$.

<u>דגש</u>

סדרת יצירה הינה תמיד סופית אולם איננה יחידה או מינימלית בהכרח.

<u>איך נראה כי $a \notin X_{B,F}$?</u>



כדי להוכיח כי $a \notin X_{B,F}$ נמצא תכונה T המקיימת:

1. a לא מקיים את T.
2. כל איברי $X_{B,F}$ מקיימים את T.

הוכחת 1 הינה בדרך כלל מיידית. הוכחת 2 הינה הוכחה באינדוקציית מבנה.

נסמן ב-Y את קבוצה האיברים המקיימים את T. עלינו להוכיח כי $X_{B,F} \subseteq Y$.

על פי משפט האינדוקציה מספיק שנוכיח:

- $B \subseteq Y$, כלומר כל איברי הבסיס B מקיימים את T.
- Y סגורה תחת F, כלומר כל הפעולות ב-F משמרות את התכונה T.

<u>דוגמא</u>

תהי שפה של מילים מעל האותיות a,b שתוגדר כך: $B=\{a,b\}, F=\{f_1,f_2,f_3\}$ כך ש:
f_1 מוסיפה aba מימין למילה. f_2 מחליפה את ה-aa הימני ביותר ב-b ו-f_3 מוחקת את ה-bbb הימני ביותר. נראה כי aba איננה שייכת לשפה.

נבחר את התכונה T: מספר ה-a במילה הוא אי זוגי.
בהינתן מילה w, נסמן ב-$\#a(w)$ את מספר ה-a ב-w. כעת:

1. aba לא מקימת את T.
2. נוכיח באינדוקציית מבנה על שפת ABA את התכונה $\#a(w)$ הוא אי זוגי. (חשוב לציין על מי מוכיחים ואת איזה תכונה מוכיחים).

בסיס: המילה ab : $\#a(ab)=1$ אי זוגי.

סגור:

f_1 : נניח שהמילה w מקיימת את T, ונראה כי $f_1(w)$ מקיימת את התכונה.

$\#a(f_1(w))=\#a(w)+2$. לפי הנחת האינדוקציה $\#a(w)$ אי זוגי, ולכן $\#a(f_1(w))$ גם אי זוגי.

f_2 : נניח שהמילה w מקיימת את T, ונראה כי $f_2(w)$ מקיימת את התכונה.

$\#a(f_2(w))=\#a(w)-2\Rightarrow$ אי זוגי

f_3 : נניח שהמילה w מקיימת את T, ונראה כי $f_3(w)$ מקיימת את התכונה.

$\#a(f_3(w))=\#a(w)\Rightarrow$ אי זוגי

ניתן להסיק שבכל המילים שבשפת ABA מספר ה- a אי זוגי ולכן aba לא מילה בשפה.

7.3.4. דוגמת change

1. הגדרת $\{a,b\}^*$ כקבוצה אינדוקטיבית.

יהי הבסיס $B=\{\varepsilon\}$ ונגדיר את הפעולות: $F=\{f_a,f_b\}$ כך: $f_a(w)=wa, f_b(w)=wb$.

2. הגדרת פונקצית change על המבנה:

$$change(\varepsilon)=\varepsilon, \qquad change(wa)=change(w)b \quad change(wb)=change(w)a$$

<u>טענה</u>

לכל $w\in\{a,b\}^*$ מתקיים: $change(change(w))=w$.

נוכיח את הטענה באינדוקציית מבנה על $\{a,b\}^*$.

בסיס: $change\left(change\left(\varepsilon\right)\right)=\varepsilon$

סגור: הנחת האינדוקציה: נניח כי w מקיימת $change\left(change\left(w\right)\right)=w$.

f_a : צ"ל כי $f_a\left(w\right)$ מקיימת את התכונה.

$$change\left(change\left(f_a\left(w\right)\right)\right)=change\left(change\left(wa\right)\right)=change\left(change\left(w\right)b\right)=$$
$$=change\left(change\left(w\right)\right)\cdot a=wa=f_a\left(w\right)$$

f_b : ההוכחה נעשית באופן סימטרי.

<u>כתיבת change כרלציה</u>

$change\left(\varepsilon\right)=\varepsilon \Leftarrow \left\langle \varepsilon,\varepsilon\right\rangle \in change$

אם $\left\langle w,u\right\rangle \in change$ (כלומר $change\left(w\right)=u$) אזי $\left\langle wb,ua\right\rangle \in change, \left\langle wa,ub\right\rangle \in change$.

7.3.5. משפט הרקורסיה

יהי Σ אלף-בית, E קבוצה ו- $a\in E$ איבר, ותהי הפונקציה $h:\Sigma\times E\to E$, אזי קיימת פונקציה f יחידה $f:\Sigma^*\to E$ המקיימת:

1. $f\left(\varepsilon\right)=a$.
2. לכל $s\in\Sigma$ ולכל $w\in\Sigma^*$ מתקיים $f\left(ws\right)=h\left(s,f\left(w\right)\right)$.

בדוגמת change:

$\Sigma=\left\{a,b\right\}, E=\left\{a,b\right\}^*$ והפונקציה הינה $change:\Sigma^*\to E$.

$f\left(\varepsilon\right)=\varepsilon$ ולכן $a=\varepsilon$.

הפונקציה h: $change\left(wa\right)=h\left(a,change\left(w\right)\right)=change\left(w\right)b$.

7.3.6. דוגמא מסכמת – קבוצת מחרוזות מעל S, T

העולם A יוגדר להיות כל המחרוזות הסופיות מעל s,t, כלומר הקבוצה $\{s,t\}^*$.

הבסיס B הינו $\{\varepsilon, st, ts\}$, וקבוצת הפעולות F הינה $F=\{f_1(\cdot,\cdot), f_2(\cdot,\cdot), f_3(\cdot)\}$, כאשר

$$f_1(\alpha,\beta)=s\alpha\beta t, f_2(\alpha,\beta)=t\alpha\beta s$$

$$f_3(\alpha)=\begin{cases}\alpha \text{ without the last } st & \alpha \text{ contains } st \text{ that are not as the first 2 letters}\\ \alpha & \text{else}\end{cases}$$

לדוגמא: $f_3(stt)=stt, f_3(ttts)=ttts, f_3(stst)=st$.

הגדרנו כאן קבוצה אינדוקטיבית מעל B,F: $X_{s,t}$

נראה עבור מילה מסויימת כי היא נמצאת ב- $X_{s,t}$. עושים זאת על ידי הצגת סדרת יצירה המייצרת את המילה. תהי המילה $\alpha = tststs$. למילה זו אינסוף סדרות יצירה. אחת מהן לדוגמא:

$$st \xrightarrow[f_2(\varepsilon,st)]{} tsts \xrightarrow[f_1(tsts,\varepsilon)]{} ststst \xrightarrow[f2]{} tstststs \xrightarrow[f_3]{} tststs$$

נשים לב:

- סדרת יחידה איננה בהכרח יחידה.
- סדרת יצירה איננה בהכרח מינימלית.
- סדרת יצירה תמיד מתחילה באטום.
- סדרת יצירה היא סדרה של איברים.

איך מראים ש- $\alpha \notin X_{B,F}$? נמצא תכונה T המקיימת כי α לא מקיים את T וגם כל איברי $X_{B,F}$ מקיימים את T. נגדיר קבוצה Y שאיבריה הם כל איברי A המקיימים את התכונה ואז נדרוש $X_{B,F} \subseteq Y$ אבל $\alpha \notin Y$. לפי משפט ההוכחה באינדוקציה, על מנת להוכיח שקבוצה Y מקיימת כי $X_{B,F} \subseteq Y$ מספיק להראות כי: $B \subseteq Y$ וכי Y סגורה ל- F.

<u>טענה</u>

נטען: $tsst \neq X_{s,t}$

הוכחה: התכונה T – אם α מתחיל ב- t אזי הוא מסתיים ב- s.

נוכיח באינדוקציית מבנה של איבר ב- $X_{s,t}$ מקיים את T.

בסיס: נעבור על כל איברי הבסיס B:

ε מקיים את T באופן ריק. st מקיים את T באופן ריק. ts מקיים את T.

סגור: נעבור על כל הפעולות ב-F ונראה כי Y סגור לפעולות.

$f_1(\cdot,\cdot)$ - אם $\alpha,\beta \in Y$ אז $f_1(\alpha,\beta) = s\alpha\beta t \in Y$.

$f_2(\cdot,\cdot)$ - אם $\alpha,\beta \in Y$ אזי $f_2(\alpha,\beta) = t\alpha\beta s \in Y$.

$f_3(\cdot)$ - נניח כי $\beta \in Y$ ויהי $\alpha = f_3(\beta)$. נפריד למקרים:

1. אין כלל השמטת רצף st. במקרה זה $\alpha = \beta$ ולכן $\alpha = \beta \in Y$.
2. השמטת רצף st מהאמצע: $\beta = \beta_1 st \beta_2$ $(\beta_1,\beta_2 \neq \varepsilon)$ ואז $\alpha = \beta_1\beta_2$. ההתחלה והסוף של β נשמרו ב- α ולכן $\alpha \in Y$.
3. השמטת רצף st מהסוף - $\beta = \beta_1 st$, $\alpha = \beta_1$.

צריך להוכיח כי אם α מתחיל ב- t אז הא מסתיים ב- s. נוכיח כי לא ייתכן ש- α מתחיל ב- t ולכן הטענה תתקים באופן ריק.

נניח בשלילה כי α מתחיל ב- t. $\alpha = \beta_1$ ולכן β_1 מתחיל ב- t. לפי הגדרה $\beta = \beta_1 st$ ולכן גם β מתחיל ב- t אבל גם מסתיים ב- t, בניגוד להנחת האינדוקציה כי $\beta \in Y$.

הראנו כי $X_{s,t} \subseteq Y$. נראה כעת כי α לא מקיים את T:

$tsst$ מתחיל ב- t ומסתיים ב- t $\Leftarrow$ לא מקיים את T $\Leftarrow$ $tsst \notin Y$ $\Leftarrow$ $tsst \notin X_{s,t}$.

<u>דוגמא</u>

תהיינה $S_1 = X_{B_1,F_1}, S_2 = X_{B_2,F_2}$ כך ש- $S_1 = S_2$.

הוכיחו: $S_1 = S_2 = \underbrace{X_{B_1 \cup B_2, F_1 \cup F_2}}_{S_3}$.

נראה $S_1 \subseteq S_3$: ניתן להסתפק בכך שכל סדרת יצירה ב- S_1 היא גם סדרת יצירה ב- S_3 לפי הגדרת האיחוד.

נראה $S_3 \subseteq S_1$: (באינדוקציה)

בסיס: לכל $b \in B_1 \bigcup B_2$, נראה כי $b \in S_1$.

$b \in B_1 \bigcup B_2$, ולכן: $b \in B_1 \Leftarrow b \in S_1$ כי $B_1 \subseteq S_1$.

או $b \in B_2 \Leftarrow b \in S_2$ כי $B_2 \subseteq S_2$ ולפי הנתון $S_1 = S_2$ ולכן $b \in S_1$.

סגור: $a_1,...,a_n \in S_1$. נראה סגירות של אגף ימין (S_1) לפעולות של הקבוצה באגף שמאל (S_3).

תהי $f \in F_1 \bigcup F_2$. אם $f \in F_1$ אזי $f(a_1,...,a_n) \in S_1$ כי S_1 סגורה לפעולות F_1. אם $f \in F_2$ אזי $f(a_1,...,a_n) \in S_2$ כי S_2 סגורה לפעולות F_2 ולפי הנתון $S_1 = S_2$ ולכן $f(a_1,...,a_n) \in S_1$.

EOF