1.5 שוויון עצמות של קבוצות

1.5.1 הקדמה

נפתח סעיף זה בשאלה.

האם לדעתך קיימים בעולם שני אנשים, לא קרחים, שעל ראשיהם אותו מספר שערות בדיוק? נמק את תשובתך!

תשובה: קיימים בעולם שני אנשים כאלה. כדי להיווכח בזאת ננסה להעריך מהו מספר השערות הגדול ביותר שיכול לצמוח על ראשו של אדם אחד. בהתחשב בעובי השערות ובגודל הראש מעריכים, בדרך־כלל, שלא תיתכנה יותר מ־10,000 שערות על ראש אדם אחד. ליתר בטחון נאמר אפילו שייתכן כל מספר שהוא של שערות שהוא קטן ממיליון או שווה למיליון. בישראל יש למעלה מ־3 מיליון תושבים וסביר להניח כי יש למעלה ממיליון תושבים לא קרחים. נניח כעת כי ספרנו את מספר השערות בראשיהם של מיליון מבין תושבי ישראל שאינם קרחים. האפשרות הגרועה ביותר היא שלכל אחד מתוך מיליון האנשים שבדקנו יש מספר שונה של שערות. נסדר את האנשים לפי מספר שערותיהם. לראשון שערה אחת, לשני שתיים לשלישי שלוש וכן הלאה עד מיליון. כעת נקח תושב ישראלי אחר שאינו קרח ואינו כלול במיליון שכבר בדקנו ונספור את שערותיו. נקבל מספר שהוא בין 1 למיליון. לפיכך מספר שערותיו יהיה שווה למספר השערות שבראשו של אחד מבין התושבים שבדקנו קודם לכן. לכן בכל מקרה — קיימים בעולם (ואפילו בארץ) שני אנשים שמספר שערותיהם שווה.

נניח שדוד ויהונתן הם שני אנשים שמספר השערות בראשיהם שווה. קבוצת השערות בראשו של דוד שונה מקבוצת השערות בראשו של יהונתן. בכל זאת לשתי הקבוצות יש תכונה משותפת — יש בהן אותו מספר של איברים.

השאלה אם לשתי הקבוצות יש אותו מספר של איברים היא שאלה המתעוררת לעתים קרובות בחיי המעשה. כאשר מחלקים את גילאי 6 לכיתות־א מקבילות משתדלים שבכל הכיתות יהיה מספר שווה של תלמידים; מוכר הפלפל מקפיד לשים אותו מספר של כדורי פלפל בכל המנות שהוא מוכר; השומר במגרש החניה משתדל שמספר המכוניות הנכנסות יהיה שווה למספר מקומות החניה.

בסעיף זה נדון בשיטות שבעזרתן קובעים מתי לשתי קבוצות יש אותו מספר איברים ומתי לא.

נדגיש שוב, כפי שהדגשנו במשפט הראשון בפרק 1.2 (עמוד 3), שאין בכוונתנו לגלות שיטות מופלאות, אלא לנתח את השיטות המקובלות ולרדת לעומקן.

1.5.2 שיטות להשוואת מספר האיברים בשתי קבוצות

כיצד בודקים אם מספר הספרים בספרייה הלאומית בירושלים שווה למספר הספרים בספריית הקונגרס בוושינגטון?

התשובה מובנת מאליה. סופרים את מספר האיברים בכל אחת משתי הקבוצות ומשווים את התוצאות.

כעת תאר לעצמך שאתה עומד בפתחו של דיסקוטק אשר הקהל בו שקוע בריקוד. אתה מתבונן סביבך ורואה כי כל הקהל נמצא על רחבת הריקודים, איש לא נשאר יושב במקומו. כמו־כן אתה מבחין כי כל איש או אשה רוקד/ת עם בן/בת זוג מן המין השני.

מה אפשר לומר על מספר האיברים בקבוצת הנשים בקהל לעומת מספר האיברים בקבוצת הגברים בקהל? (חשוב בטרם תמשיך בקריאה).

אין ספק כי מספר הנשים שווה למספר הגברים. כדי להגיע למסקנה זו אין צורך לספור כמה נשים וכמה גברים יש. יתר על כן — אנו משוכנעים שאם נספור נקבל תוצאות שוות למרות שייתכן בהחלט שאיננו מסוגלים אפילו להעריך את מספר הגברים ומספר הנשים. ננסה לנסח את העיקרון שעליו מבוססת המסקנה שהיסקנו בדבר מספר הגברים והנשים בקהל.

אם אפשר להתאים את האיברים של שתי קבוצות A ו־B אלה לאלה באופן שלכל איבר של A מותאם איבר אחד ויחיד של B וכל איבר של B מותאם לאיבר אחד ויחיד של A, אז בשתי הקבוצות יש אותו מספר איברים. הווה אומר: יש שתי דרכים להשוואת מספר האיברים של שתי קבוצות.

א. ספירה
ב. התאמת האיברים של שתי הקבוצות בזוגות.

שאלה 11

נסה למצוא דוגמא מחיי המעשה שבה היית משתמש בספירה לצורך השוואה ודוגמא אחרת שבה היית משתמש בהתאמה בזוגות לצורך השוואה.

תשובה בעמוד 46

כיום סבורים כי בחברה האנושית, השוואת מספר האיברים של שתי קבוצות על־ידי התאמתם אלה לאלה היא פעולה שקדמה מבחינה היסטורית לספירה. אנתרופולוגים הטוענים זאת, מבססים את טענתם על העובדה כי בחברות פרימיטיביות, שבהן הספירה אינה מוכרת, יודעים להשתמש בשיטת ההתאמה. כנראה שגם בהתפתחותם של ילדים השוואת קבוצות על־ידי התאמה בזוגות היא שלב קודם לשלב הספירה. גם ילד שאינו יודע לספור מסוגל לערוך על שולחן 12 צלחות ו־12 כוסות בדיוק, אם הניחה אמו 12 כסאות סביב השולחן. הוא מניח צלחת אחת וכוס אחת מול כל כסא.

ההתפתחות ההיסטורית של החברה האנושית, או התפתחות המחשבה של הילד, אינן מהוות עבורנו עילה להעדפת אחת מן השיטות על רעותה. למרות זאת – יש לשיטת ההתאמה בזוגות לפחות יתרון בולט אחד על שיטת הספירה.

שיטת הספירה מוגבלת לקבוצות סופיות. כאשר מדובר בקבוצות אינסופיות, אי אפשר להשוות את מספר האיברים שבהן על־ידי ספירה. אם נתחיל לספור את האיברים של קבוצה אינסופית אחת – לא נוכל לסיים, לא נגיע לשלב של ספירת איברי הקבוצה השניה ובוודאי לא לשלב המכריע של השוואת התוצאות.
לעומת זאת, לפחות באופן עקרוני, פעולת ההתאמה בזוגות אינה מוגבלת לקבוצות סופיות. נעיין למשל בדוגמא הבאה:

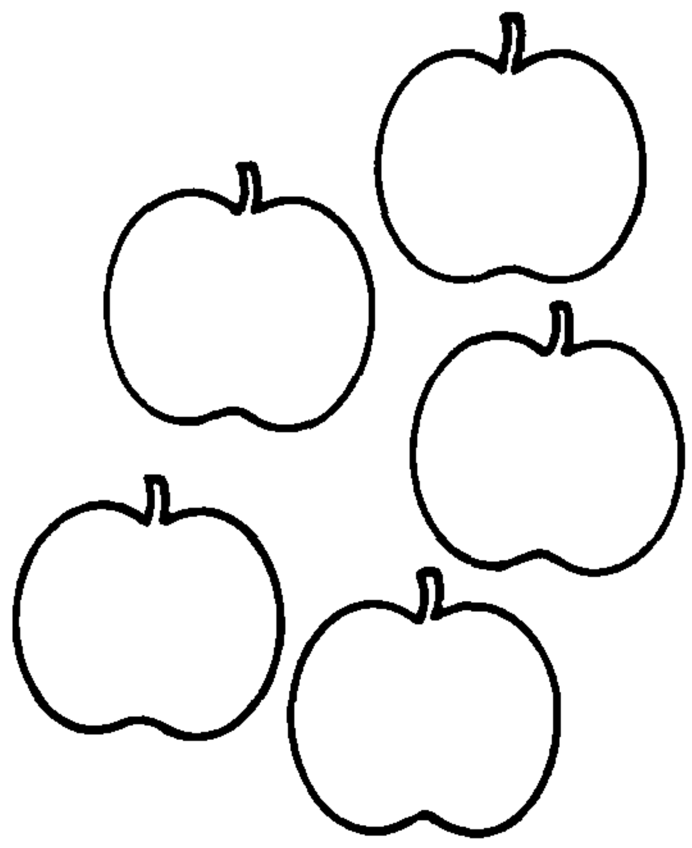
תהי N קבוצת המספרים הטבעיים: $N=\{1,2,3,4,5,...\}$
ותהי B קבוצת המספרים השלמים השליליים:
$B=\{-1,-2,-3,-4,-5,...\}$ אף אחת מן הקבוצות אינה סופית.
בכל זאת נוכל להתאים את איברי N ו־ B בזוגות, למשל באופן הבא:

לאיבר 1 של N נתאים את בן הזוג -1 של B
לאיבר 2 של N נתאים את בן הזוג -2 של B
לאיבר 3 של N נתאים את בן הזוג -3 של B
.
.
.
.
.
.
לאיבר 100 של A נתאים את בן הזוג -100 של B וכן הלאה.

בהתאמה זו – לכל איבר של N מותאם איבר יחיד של B ולהיפך. המסקנה המתבקשת היא כי בשתי הקבוצות יש "אותו מספר איברים".

בתחילת הסעיף הצגנו את פעולת הספירה למטרת השוואה כפעולה שונה מפעולת ההתאמה בזוגות. אבל בחינת השלבים המבוצעים בעת ספירת איברים של קבוצה סופית כלשהי מראה כי גם הספירה עצמה היא פעולה של התאמה – התאמת מספרים לאיברי הקבוצה. יתר על כן: כשסופרים ומוצאים שבשתי קבוצות יש אותו מספר איברים מצביעים בנסתר על התאמה בין איברי שתי הקבוצות. נדגים את האמור כאן בשתי דוגמאות.

דוגמא א



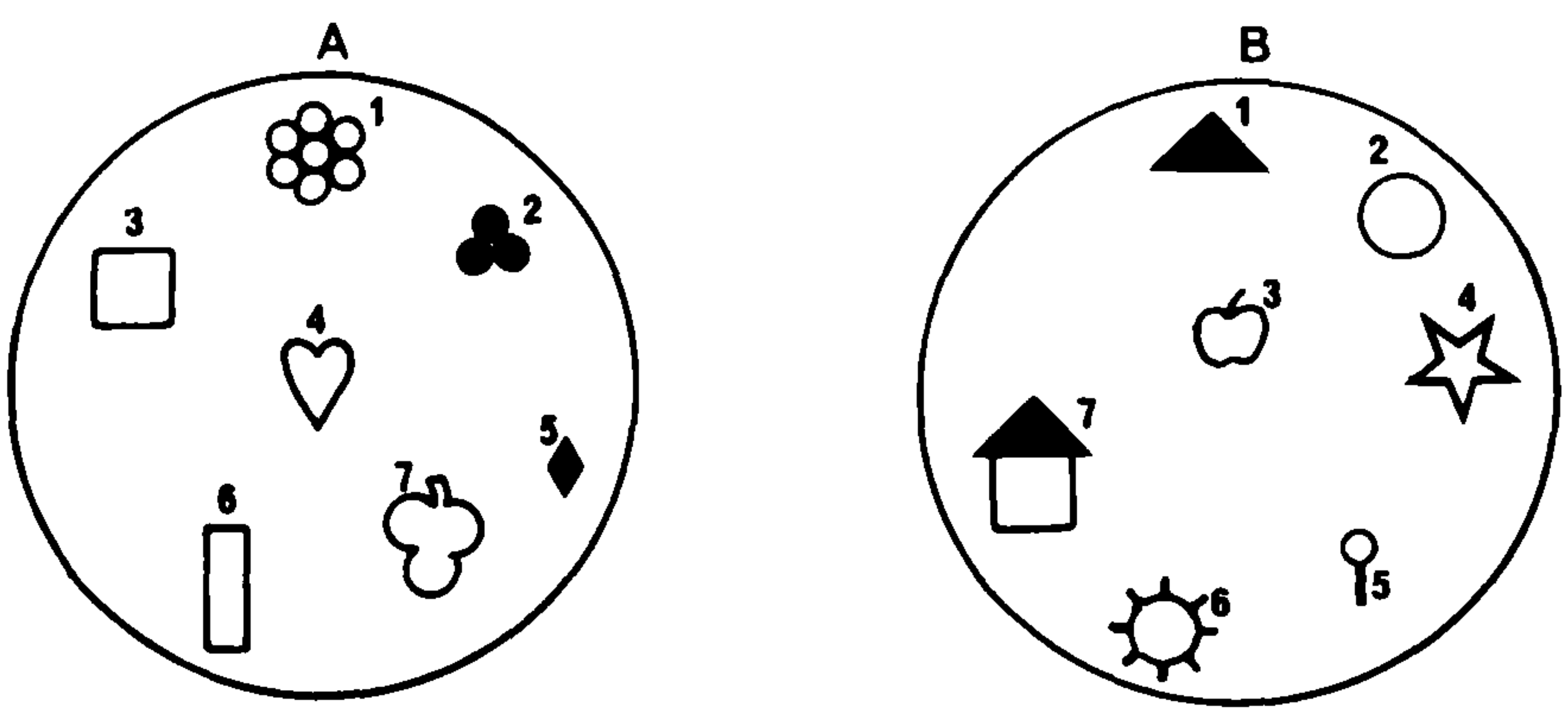
איור 1

ביצד יודעים כי באיור 1 יש 5 תפוחים?

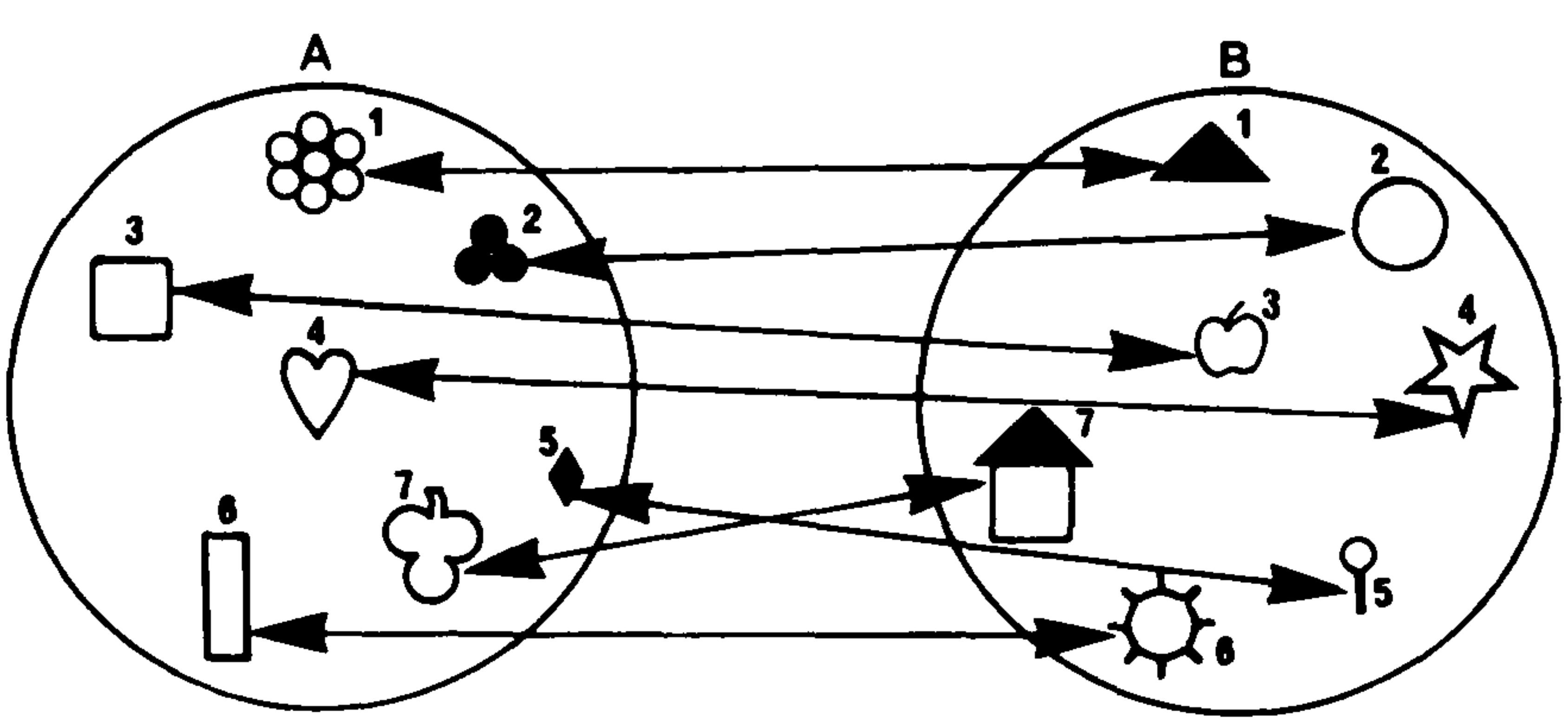
התשובה היא: על־ידי ספירה. איך סופרים? בוחרים תפוח כלשהו ומתאימים לו את המספר 1, בוחרים תפוח אחר ומתאימים לו את המספר 2, ממשיכים כך כל עוד יש תפוחים ללא בן זוג. המספר האחרון שאפשר היה להתאים לו תפוח הוא גם מספר איברי הקבוצה. המסקנה שיש באיור 1 5 תפוחים מבוססת על כך שקיימת התאמה, מהסוג שתואר קודם, בין קבוצת התפוחים באיור 1 לקבוצה {5, 4, 3, 2, 1}. באופן כללי – בקבוצה יש n איברים, פירושו כי קיימת התאמה מהסוג הנדרש בין איבריה של הקבוצה לאיברי קבוצת המספרים {n,..., 2, 1}.

דוגמא ב

באיור 2 מתוארות שתי קבוצות סופיות A ו־B.



איור 2



איור 3

בכל אחת מן הקבוצות יש 7 איברים. המסקנה היא כי בשתי הקבוצות יש אותו מספר איברים. נבחן מסקנה זו. לכל איבר בכל אחת מהקבוצות הותאם מספר בעת ביצוע פעולת הספירה. בכל מקרה, האיבר האחרון שהותאם עבורו בן זוג בקבוצה היה 7 – זהו גם מספר איברי כל קבוצה. כעת נתבונן באיבר כלשהו של A (למשל הלב). בעת ספירת מספר איברי A, הותאם לאיבר זה מספר מסוים (4). נתאים לאיבר זה את האיבר של B אשר בעת ספירת מספר איברי B הותאם לו אותו מספר (בדוגמא שלנו – זהו הכוכב המופיע ב־B). באופן זה מתקבלת התאמה בזוגות מהסוג שתואר בסעיף הקודם בין איברי A לאיברי B (ראה איור 3).

המסקנה היא כי אם בשתי קבוצות סופיות יש אותו מספר איברים הרי שקיימת גם התאמה (מהסוג שתואר לעיל) בין איבריהן.

מאידך גיסא – אם בין שתי קבוצות סופיות קיימת התאמה בזוגות (מהסוג שתואר לעיל) אז יש בהן אותו מספר איברים.

נסכם: ביחס לקבוצות סופיות פעולת הספירה לצורך השוואה ופעולת ההתאמה בזוגות מביאות לאותה מסקנה. הן נבדלות זו מזו רק בכך שלצורך השוואה נוח לבצע לעתים אחת מהן ולעתים את השניה. לעומת זאת, בקבוצות אינסופיות הספירה אינה מביאה לשום מסקנה, ואילו ההתאמה בזוגות, אם היא אפשרית, עשויה לתת תוצאות. לפיכך אפשר לראות בפעולת ההתאמה בזוגות, מהסוג שתואר לעיל, הכללה של פעולת הספירה למטרת השוואה, לקבוצות אינסופיות.

1.5.3 התאמות חד־חד־ערכיות

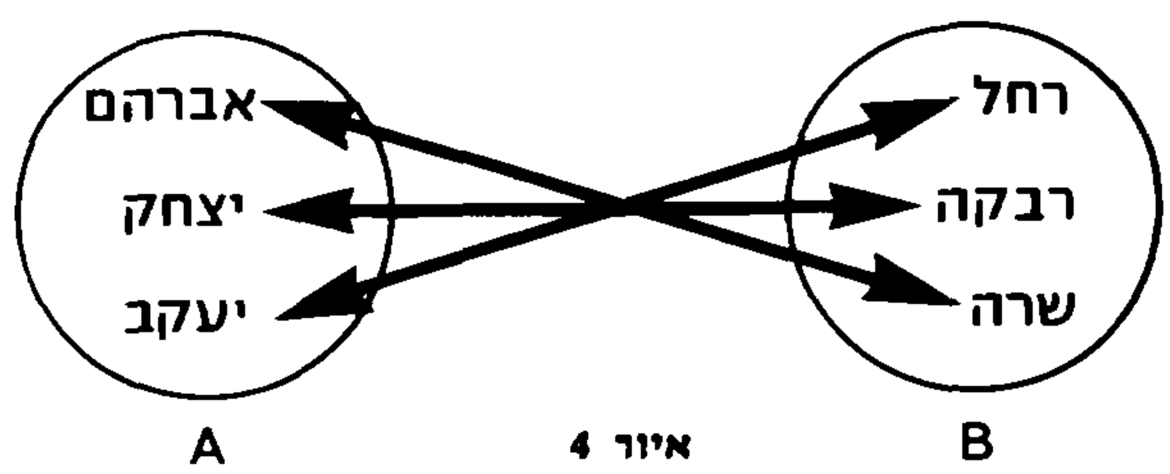
התאמות בזוגות מהסוג שתואר בסעיף 1.5.2 תחזורנה ותופענה ביחידה זו לעתים קרובות. נוסיף כעת לשפה שנשתמש בה שם ידוע עבורן. השם הוא "התאמות חד־חד־ערכיות".

התאמה חד־חד־ערכית

התאמה בין איברי שתי קבוצות A ו־B נקראת **התאמה חד־חד־ערכית** אם בהתאמה זו לכל איבר של A מותאם איבר אחד ויחיד של B וכל איבר של B מותאם לאיבר אחד ויחיד של A.

לצורך תיאור התאמה חד־חד ערכית בין האיברים של שתי קבוצות סופיות A ו־B מספיק לציין, תוך שימוש באיור או ברשימה של זוגות, מהו בן הזוג של כל איבר בכל קבוצה.
באיור 4, בצד שמאל, תוארה התאמה חד־חד־ערכית בין הקבוצות A ו־B על־ידי סימון חיצים בין האיברים המותאמים זה לזה. בצידו הימני של האיור ניתנה רשימה המתארת מיהו בן הזוג מ־B שהותאם לכל איבר של A.

A	B
אברהם	שרה
יצחק	רבקה
יעקב	רחל



איור 4

בקבוצות אינסופיות אי אפשר לערוך רשימה של כל הזוגות המותאמים, וגם באיור לא נוכל לסמן את כולם.
לצורך תיאור התאמה חד־חד־ערכית בין איברי שתי קבוצות אינסופיות יש לתת כלל התאמה.

בסעיף 1.5.2 ניתנה דוגמא של התאמה חד־חד־ערכית בין איברי קבוצת המספרים הטבעיים $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ לבין איברי קבוצת המספרים השלמים השליליים $B = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$

אמרנו כך:

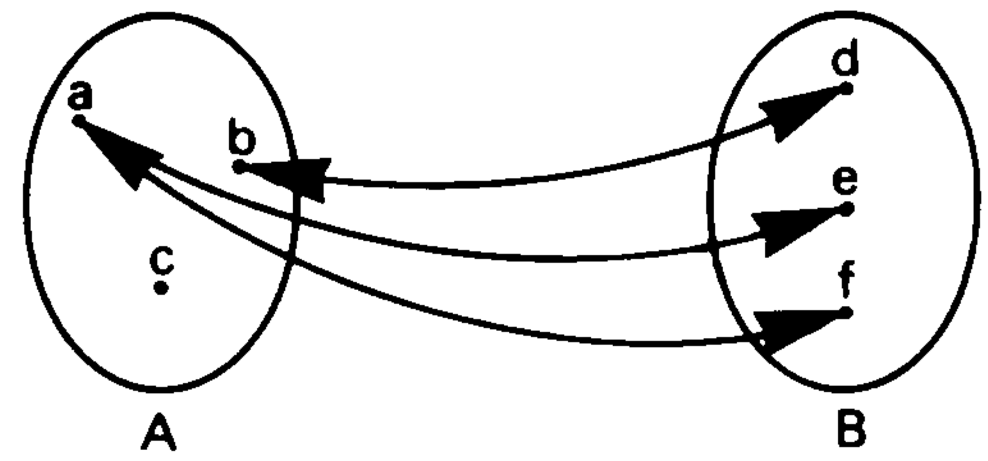
ל־1 מותאם -1
ל־2 מותאם -2
. " .
. " .
. " .
. " .
ל־100 מותאם -100 וכן הלאה

במקרה זה הכלל הוא הבא: למספר הטבעי n מן הקבוצה N מותאם המספר השלילי $-n$ מן הקבוצה B.

שאלה 12

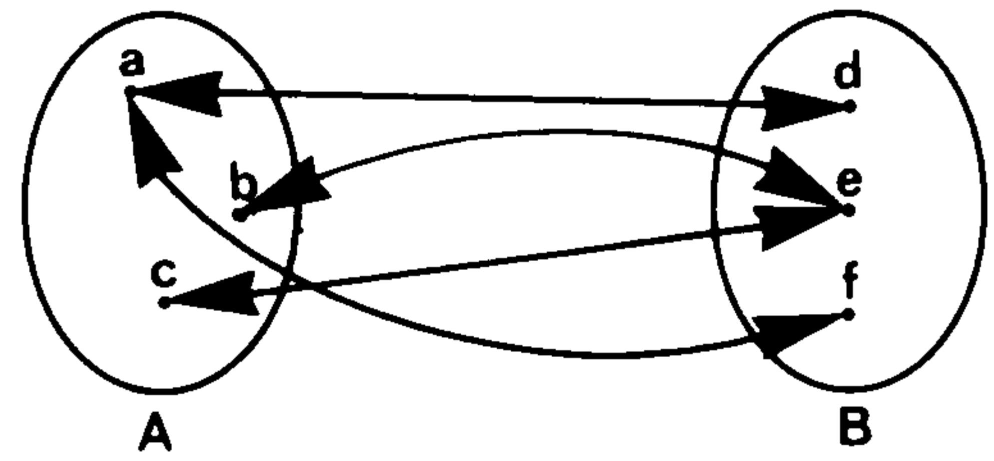
בכל אחד מחלקי השאלה מתוארות שתי קבוצות ומתוארת התאמה בין איבריהן. קבע באיזה מקרים ההתאמה המתוארת היא חד־חד־ערכית. נמק תשובתך.

א.



איור 5–א

ב.



איור 5–ב

ג. $D = \{x|$x מספר אי־זוגי בין 1 ל־49$\}$
$E = \{y|$y מספר זוגי בין 2 ל־50$\}$
ההתאמה: לכל איבר x של D מותאם האיבר $y = x + 1$ של E.

ד. הקבוצות D ו־E הן כבסעיף ג
ההתאמה: לכל איבר y של E מותאם האיבר $x = y + 1$ של D.

ה. $F = \{t|$t אזרח ישראלי$\}$
$G = \{z|$z מספר שערות ראשו של אזרח ישראלי$\}$
ההתאמה: לכל אזרח ישראלי מותאם מספר שערותיו.

תשובה בעמוד 46

1.5.4 "עָצמות שוות" ו"קבוצות שקולות".

בסעיף 1.5.2 (עמוד 15) הראינו שבקבוצת המספרים הטבעיים ובקבוצת המספרים השלמים השליליים יש "אותו מספר" איברים. השימוש בביטוי "אותו מספר" עלול להיות מטעה כאשר מדובר בקבוצות אינסופיות, שכן עצם השימוש במלה "מספר" כאילו מרמז על ביצוע פעולת ספירה. לפיכך נשתמש בביטוי אחר. הביטוי המקובל במתימטיקה הוא "אותה עָצמה". אנו אומרים שלקבוצת המספרים הטבעיים ולקבוצת המספרים השלמים השליליים יש "אותה עָצמה" או שלשתי הקבוצות הללו יש "עָצמות שוות". היות והדיון שלנו בקבוצות אינו מוגבל לקבוצות סופיות בלבד, הרי שכאשר מדובר על קבוצה כלשהי היא עשויה בהחלט להיות אינסופית. לפיכך נוותר לחלוטין על השימוש ב"אותו מספר איברים" ונשתמש ב"עָצמות שוות" או ב"אותה עָצמה", בין אם מדובר בקבוצות אינסופיות, ובין אם המדובר בקבוצות סופיות.

"אותה עָצמה"
עָצמות שוות
קבוצות שקולות

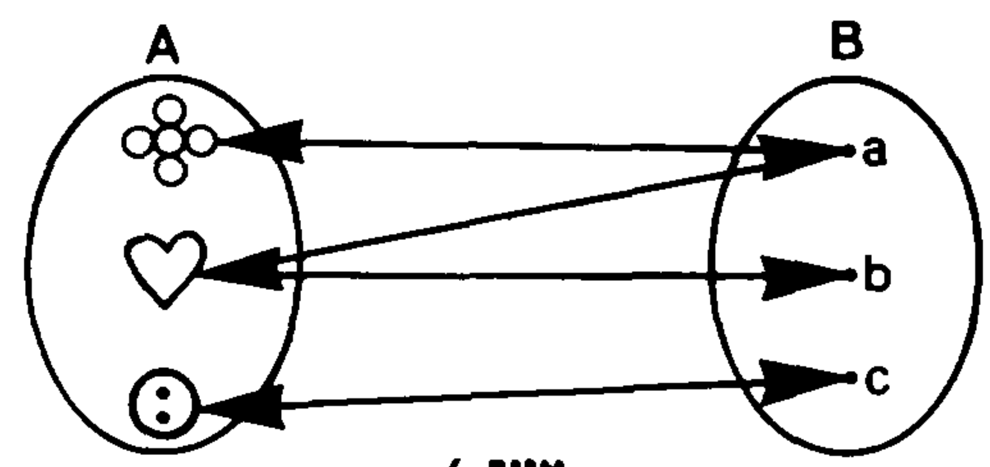
לשתי קבוצות יש אותה עָצמה אם קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איבריהן.

שתי קבוצות שיש להן אותה עָצמה (או עָצמות שוות) נקראות גם קבוצות שקולות.

מן האמור לאחר דוגמא ב בסעיף 1.5.2 נסיק:
אם שתי קבוצות סופיות הן שוות עָצמה (שקולות) אז יש בהן אותו מספר איברים, ואם יש בהן אותו מספר איברים אז הן שוות עָצמה (שקולות).

הערות:

א. לא כל התאמה בין שתי קבוצות בעלות אותה עָצמה היא התאמה חד־חד־ערכית. למשל, הקבוצות A ו־B המתוארות באיור 6 הן שקולות (נמק!), למרות שההתאמה ביניהן, המתוארת באיור 6 אינה התאמה חד־חד־ערכית.



איור 6

ב. שים לב לעובדה שאנו דנים בשאלה מתי לשתי קבוצות יש אותה עָצמה בלי לשאול כלל מהי "עָצמה" של קבוצה. תופעה זו לא צריכה להפתיע אותך באופן מיוחד. אולי שמת לב לעובדה שילד בגן־עירוני יודע, בדרך־כלל, למצוא ילד אחר בגן ב"אותו גובה". אבל מעטים הילדים היודעים מה גובהם או איך מגדירים "גובה". כמו־כן, במאזני שיווי משקל ניתן לקבוע אם שני משקלות הם שווים, אם כי לא ניתן לקבוע בעזרתם מהו משקלו של חפץ אחד מסוים, בלי להיעזר באבני משקל מסומנות.

סיכום פרק 1.5

* **התאמה חד־חד־ערכית בין איבריהן של שתי קבוצות A ו־B היא התאמה של האיברים אלה לאלה, באופן שלכל איבר של A מותאם איבר אחד ויחיד של B וכל איבר של B מותאם לאיבר אחד ויחיד של A.**

* **אומרים שלשתי קבוצות (סופיות או אינסופיות) יש אותה עָצמה אם אפשר למצוא התאמה חד־חד־ערכית בין איבריהן.**

* **קבוצות בעלות אותה עָצמה הן קבוצות שקולות.**

* **שתי קבוצות סופיות הן שקולות (שוות עָצמה) אם ורק אם יש בהן אותו מספר איברים.**

* **לומר שבקבוצה סופית יש n איברים פירושו לומר, שקיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי הקבוצה הסופית לאיברי הקבוצה {1, 2, ..., n} או שהקבוצה שקולה לקבוצה {1, 2, ..., n}.**