בשאלות 1,2 סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף העמוד

בשאלות הנ"ל יתכן ויש כמה טענות נכונות או אין בכלל טענות נכונות או כל הטענות נכונות.

שאלה 1:

א. (3%) אם $x \in B$ וכן $y \notin A$, אז $\{x, y\} \cap (B \oplus A) \neq \varnothing$

ב. (3%) אם $\{x, y\} = (B \oplus A)$, אז $(B \oplus A) \setminus \{x\} = \{y\}$

ג. (3%) אם $C \in P(B \oplus A)$ וכן $(C \cap A) \neq C$ אז $(C \cap B) \neq \varnothing$

הסבר: משמעות האמירה הראשונה היא ש-C תת קבוצה של $(B \oplus A)$. המשמעות – חלק מאיברי C נמצאים רק ב-A וחלקם האחר רק ב-B. מתוך $(C \cap A) \neq C$ אפשר להסיק כי לא כל האיברים שנאספו ל-C הגיעו מ-A לכן חלקם הגיעו מ-B כך שחיתוך C ו-B לא ריק והטענה נכונה.

ד. (3%) אם $(B \oplus A) \neq \varnothing$ אז $(A \cup B) \neq \varnothing$

שאלה 2:

תהינה $A = \{1,2\}$. נגדיר יחס R המוגדר מעל A^3 באופן הבא: $R = \begin{pmatrix} (1,2,1) & (2,2,2) \\ (1,2,2) & (2,1,2) \end{pmatrix}$

שאלה 2.1:

א. (3%) R רפלקסיבית.

ב. (3%) R סימטרית.

ג. (3%) R אנטיסימטרית.

ד. (3%) R טרנזיטיבית

שאלה 2.2: בהמשך לנתוני ההתחלה בשאלה, נגדיר רלציה T מעל A^3 בצורה הבאה: $T = R \cup R^{-1}$.

א. (3%) $|T| = 8$

ב. (3%) T רלצית שקילות, עם 4 מחלקות שקילות.

ג. (3%) $\left|(A^3 \times A^3) \setminus T\right| = 60$

הסבר: ב-$(A^3 \times A^3)$ יש 64 איברים (מכפלה קרטזית של 2 קבוצות בנות 8 איברים). ב-T יש 4 איברים ולכן בחיסור 60 איברים.

ד. (3%) $(T \setminus R) \cup I_{A \times A \times A}$ רלצית סדר חלקי

שאלה 3:

(14%) הוכח או הפרך את הטענה: $(A \cup B) \setminus ((A \cup C) \cap B) \subseteq A \oplus B$.

אם הטענה נכונה, הוכח אותה ע"י שימוש במושג השייכות של איברים (לא ע"י אלגברה של קבוצות ולא בדיאגראמות ון) . אם הטענה לא נכונה, הבא דוגמא נגדית.

תשובה: יהי $x \in (A \cup B) \setminus ((A \cup C) \cap B)$, אז מתקיים $x \notin ((A \cup C) \cap B)$ and $x \in (A \cup B)$, ואם $x \notin ((A \cup C) \cap B)$ אז יתכן אחד מהשלושה:

1. $x \notin B$ $x \in A \cup C$

2. $x \in B \quad x \notin A \cup C$

3. $x \notin B \quad x \notin A \cup C$

מאפשרות 1, יחד עם $x \in (A \cup B)$, נסיק כי $x \in A$ וכן $x \notin B$, לכן שייך לצד ימין.

מאפשרות 2, יחד עם $x \in (A \cup B)$, נסיק כי $x \notin A$ וכן $x \in B$, לכן שייך לצד ימין.

אפשרות 3 לא יכולה להתקיים עבור איבר ששייך לאגף ימין, כך שאינה מהווה אילוץ.

קיבלנו כי בכל מקרה בו איבר שייך לאגף השמאלי, הוא שייך גם לימני, לכן מתקיימת ההכלה.

שאלה 4:

<u>סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף השאלה</u>

א. (5%) נתונות 7 נקודות במישור שאף 3 מהן אינן על אותו ישר. כל נקודה נצבעת באחד מ-3 צבעים. לאחר מכן מעבירים ישר דרך כל זוג נקודות. בהכרח יווצר משולש עם קודקודים בצבע זהה.

הסבר: אם צובעים 7 נקודות ב-3 צבעים אפשריים, בהכרח (לפי שובך יונים) לפחות 3 נקודות יצבעו בצבע אחד. אותם חיבורים בין 3 נקודות אלה יצרו משולש כרומטי.

ב. (5%). סכום המספרים הרציונליים בפיתוח של $(\sqrt[5]{2}+1)^7$ הינו 43.

הסבר: מספר רציונלי בפיתוח זה יווצר אם הביטוי השמאלי יועלה בחזקת 5, וכך יווצר המספר $\binom{7}{5}(\sqrt[5]{2})^5 \cdot 1^2 = 42$ או ע"י H בחירה 1 מכל הסוגריים ובדרך זו יווצר 1 – בסה"כ הסכום 43.

ג. (5%) מקדם X^8 בפיתוח $\left(\frac{X}{2}+2X^3+\frac{2}{X^2}\right)^5$ שווה למקדם X^3 בפיתוח $(4+X)^5$.

ד. (5%) מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-151 שווה למספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-453.

שאלה 5:

א. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ המקיימים: $[-i \le x_i \le 27 \quad ,i=1,2,3,4]$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: $D(4,28)$

ב. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ המקיימים: $[-i \le x_i \le 6 \quad ,i=1,2,3,4]$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: מספר הפתרונות של הבעיה הנ"ל שווה למספר הפתרונות של הבעיה הבאה: $x_1+x_2+x_3+x_4=28$

המקיימים: $0 \le x_i \le 6+i \quad ,i=1,2,3,4$

נגדיר:

A_i - קבוצת כל הפתרונות בהם $x_i \ge 6+i+1$.

בחיתוכי 2 קבוצות – כולן לא ריקות.

בחיתוכי 3 קבוצות – רק $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ו- $A_1 \cap A_2 \cap A_4$ לא ריקות.

בסה"כ רצוננו ב- $|U|-S_1+S_2-S_3 = |U|-S_1+S_2-S_3+S_4 = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$

$$|U| = D(4,28)$$

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = D(4,20) + D(4,19) + D(4,18) + D(4,17)$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_3 \cap A_2| + |A_4 \cap A_2| + |A_3 \cap A_4| =$$
$$= D(4,11) + D(4,10) + D(4,9) + D(4,9) + D(4,8) + D(4,7)$$

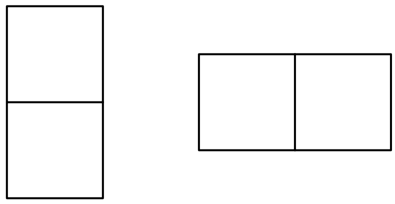
$$S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = D(4,1) + D(4,0) = 5$$

ונקבל

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4\right| =$$
$$D(4,28) - [D(4,20) + D(4,19) + D(4,18) + D(4,17)] +$$
$$+ [D(4,11) + D(4,10) + D(4,9) + D(4,9) + D(4,8) + D(4,7)] - 5$$

שאלה 6:

א. (8%) נתונים 2 הצורות הבאות (שאינן ניתנות לסיבוב)



בנה יחס רקורסיה שבעזרתו תוכל לחשב את מספר האפשרויות השונות לבנות מלבן בגובה 2 ובאורך n בהנחה שמידות הריבועים המרכיבים את הצורות הנ״ל הן *1x1*. מצא תנאי התחלה הנחוצים לחישוב הנוסחא.

תשובה: נסתכל על סוף הסדרה – אם אלו הצורות השוכבות (אחת על השניה), לפניהן יש $f(n-2)$ אפשרויות סידור שונות. אם זו הצורה העומדת, לפניה יש $f(n-1)$ אפשרויות סידור שונות.

בסה״כ $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, כאשר $f(0) = 1$ $f(1) = 1$.

ב. (8%) פתור יחס רקורסיבי : $f(n) = -5f(n-1) - 6f(n-2), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = -2$

תשובה: זהו יחס רקורסיבי לינארי : מפתרון $\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0$, נקבל $\alpha_2 = -3$ $\alpha_1 = -2$. מכאן נקבל $f(n) = A \cdot (-2)^n + B \cdot (-3)^n$, ומתנאי ההתחלה נקבל $B = 2$ $A = -2$, $f(n) = -2^{n+1} + 2 \cdot (-3)^n$.