תורת הקבוצות – קובץ תרגילים מספר 1

שאלה 1.1

בכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבע אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\varnothing \;;\; \{\varnothing\}$

ב. $\{1\} \;;\; \{\{1\}\}$

ג. $\{1\} \;;\; \{\varnothing,\{1\}\}$

ד. $\varnothing \;;\; \{\varnothing,\ \{1\}\}$

ה. $\{\{1\}\} \;;\; \{\varnothing,\ \{1\}\}$

ו. $\{\{\varnothing\}\} \;;\; \{\varnothing,\{1\}\}$

ז. $\varnothing \;;\; P(\{1\})$

ח. $P(\varnothing) \;;\; P(\{\varnothing\})$

שאלה 1.2

נתונות הקבוצות:

$$A_1 = \varnothing \quad A_2 = \{\varnothing\} \quad A_3 = \{\text{David}, \varnothing\} \quad A_4 = \{A_2, A_3\}$$

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מצא את כל ערכי i,j $(1 \le i,\ j \le 4)$

עבורם מתקיים התנאי הנתון באותו סעיף. **בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק**.

א. $A_i \subseteq A_j$

ב. $A_i \in A_j$

ג. A_i הוא איבר של איבר של A_j (ציין גם את "איבר הביניים")

ד. $A_i \cap A_j = \phi$

ה. $A_i \cap A_j = A_2$

שאלה 1.3

בכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבע אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\{\varnothing\} \;;\; \{\varnothing\}$

ב. $\varnothing \;;\; \{\{\varnothing\}\}$

ג. $\varnothing \;;\; \{\varnothing,\ \{1\}\}$

ד. $\{\varnothing\} \;;\; \{\varnothing,\{1\}\}$

ה. $\{\{1\}\} \;;\; \{\varnothing,\ \{1\}\}$

ו. $\{\{\varnothing\}\} \;;\; \{\varnothing,\{1\}\}$

ז. $\{\varnothing\} \;;\; P(\{1\})$

ח. $P(\varnothing) \;;\; P(P(\varnothing))$

שאלה 1.4

תהיינה: $X = \varnothing$, $Y = \{\varnothing, \mathbf{foo}\}$, $Z = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (**foo** הוא עצם כלשהו שאינו קבוצה).

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X \cup Y = Y$

ב. $\{X\} \in Y$

ג. $Y \cap Z = X$

ד. $\{X\} \cup Y = Y$

ה. $X \cup \{Y\} = Y$

ו. $|X \cup Y \cup Z| = 4$

ז. $Z \subseteq P(Y)$

ח. $Y \in P(Y)$

שאלה 2.1

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת.

א. אם $A-B=C$ אז $A-C=B$.

ב. אם $A\subseteq B$ אז $A-B=\varnothing$.

ג. אם $A-B=\varnothing$ אז $A\subseteq B$.

ד. אם $A\subseteq B$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

שאלה 2.2

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **"אלגברה של קבוצות"**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר" !

א. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

ב. $(A - B) \cup (B - C) = (A \cup (B - C)) - (B \cap C)$

ג. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

שאלה 2.3

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת.

א. אם $A\cup B=C$ אז $C-A=B$.

ב. אם $C-A=B$ אז $A\cup B=C$.

ג. אם עבור קבוצות מסוימות A,B,X,Y מתקיים:

$A\cup X=A\cup Y$ ו- $B\cap X=B\cap Y$ אז $X=Y$.

ד. אם $A\subseteq B$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

ה. אם $C-A=B$ ו- $A\subseteq C$ אז $A\cup B=C$.

שאלה 2.4

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת.

א. אם $A \cap B = \varnothing$ אז $A - B = A$.

ב. $A \subseteq P(A)$.

ג. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

שאלה 3.1

הוכח את הטענות א'-ד'. U היא קבוצה אוניברסלית, המכילה את כל הקבוצות שבשאלה.

שים לב: **בטענות "אם ורק אם" יש להוכיח שני כיוונים**.

א. כלל הצמצום: אם $X \oplus A = Y \oplus A$ אז $X = Y$.

הדרכה: היעזר באסוציאטיביות של $\oplus$ ובתכונות אחרות שלה.

ב. $A \oplus B = \varnothing$ אם ורק אם $A = B$.

ג. $A \oplus B = U$ אם ורק אם $A = B'$.

ד. $A \oplus B = A$ אם ורק אם $B = \varnothing$.

שאלה 3.2

הוכח את הטענות הבאות בעזרת "**אלגברה של קבוצות**": צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר". ציין את הזהויות עליהן אתה מסתמך.

א. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

ב. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \oplus B)$

ג. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$. הדרכה: השתמש בחוק הפילוג לא כדי לפלג, אלא בכיוון ההפוך - לצרף את הגורמים.

שאלה 3.3

הוכח את הטענות הבאות בעזרת "**אלגברה של קבוצות**": צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר".

א. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ב. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

ג. $(A \oplus B) \oplus (B \oplus C) = A \oplus C$

שאלה 4.1

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbf{N} = \{0,1,2,\ldots,\}$.

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid n \le x \le 2n-1\}$ ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

א. מהי A_0 ?

ב. חשב את $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ (הוכח את תשובתך).

ג. מצא את הקבוצות B_0, B_1 .

ד. רשום ביטוי מפורש (בדומה להגדרת A_n בפתח התרגיל) עבור B_n ($n \ge 2$).

ה. חשב את $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n$.

שאלה 4.2

תהי $\mathbf{N}^+$ קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0. לכל $n \in \mathbf{N}^+$ נגדיר קבוצה:

$$B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^+\}$$

(קבוצת כל המספרים שצורתם $n \cdot k$, כאשר $k \in \mathbf{N}^+$).

א. הוכח כי $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$ כאשר $c(n,m)$ הוא הכפולה המשותפת המינימלית של n ,m (המספר הטבעי החיובי הקטן ביותר המתחלק ללא שארית ב- n וב- m). **הדרכה**: ניתן להסתמך על הטענה כי כל כפולה משותפת של m, n מתחלקת בכפולה המשותפת המינימלית שלהן.

ב. הסבר מדוע $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n = \varnothing$.

ג. לכל $n \ge 2$ נסמן $D_n = B_n - \bigcup_{1<i<n} B_i$ (בפרט: $D_2 = B_2$, $D_3 = B_3 - B_2$).

עבור איזה ערכים של n קיים: $D_n \ne \varnothing$? כלומר מצא את $\{n \in \mathbf{N} \mid D_n \ne \varnothing\}$.

אל תשכח להראות שתשובתך כוללת את **כל** הערכים המקיימים זאת ("הכלה דו-כיוונית").

שאלה 4.3

נסמן ב- $\mathbf{N}^+$ את קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מאפס.

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל $n \in \mathbf{N}^+$, תהי $A_n = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid 2 + \frac{1}{n} \le x \le 2n \right\}$.

למשל $A_2 = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid 2.5 \le x \le 4 \right\}$.

א. חשב את A_1 ואת $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} A_n$.

ב. חשב את $\bigcap_{1<n\in\mathbf{N}^*} A_n$.

ג. חשב את $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} A_n$.

ד. לכל $n \in \mathbf{N}^+$, נסמן $B_n = A_{n+1} - A_n$. הראה כי יש רק ערך אחד של n עבורו B_n היא קטע. הראה כי לכל n אחר, B_n היא איחוד של שני קטעים זרים. ציין מיהם הקטעים.

הערה: **קטע ב- $\mathbf{R}$** הוא קבוצה מהצורה $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, או קבוצה המתקבלת מביטוי זה ע"י החלפת אחד או שני סימני $<$ בסימן $\le$.

למשל, לכל $n \in \mathbf{N}^+$, הקבוצה A_n שהוגדרה למעלה היא קטע.

שאלה 4.4

לכל $n \in N$, תהי $A_n = \left\{ x \in N \mid n-1 \le x \le 2(n-1) \right\}$ ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

א. מהי A_0 ?

ב. חשב את $\bigcup_{n\in N} A_n$ (הוכח את תשובתך).

ג. מצא את הקבוצות B_0, B_1, B_2, B_3, B_4.

ד. חשב את $\bigcup_{n\in K} B_n$ כאשר $K = \{0,1,2,3,4\}$.