פתרון לממ"ן 13 – 2007ב
אלגברה לינארית 1 - 20109

שאלה 1

א. תחילה, נציין שהמספר 0 הוא פתרון של המשוואה. .

נניח מעתה ש- $z \neq 0$. נשתמש בהצגה הטריגונומטרית $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

אז: $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

ועל-פי נוסחת דה מואבר $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$.

לפיכך: $z^3 = \bar{z}$ אם ורק אם $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ (*),

וזאת אם ורק אם $\begin{cases} r^3 = r \\ 3\theta = -\theta + 2\pi k \end{cases}$, k שלם, או $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2\pi k}{4}, k = 0,1,2,3 \end{cases}$ (כי $r \neq 0$).

לכן פתרונות המשוואה הם $z = 0$ ו- $z_k = \cos\dfrac{\pi k}{2} + i\sin\dfrac{\pi k}{2}$, $k = 0,1,2,3$,

כלומר $-i, i, -1, 1, 0$.

ב. מכיוון ש- A הפיכה, מתקיים $adjA = |A| A^{-1}$ (*) ו- $|A| \neq 0$. מכך ניתן להסיק

שהמטריצה $adjA$ הפיכה (טענה בסעיף 8 בנספח בעמ' 11). לכן ניתן להפעיל את הנוסחה

(*) על המטריצה $adjA$ ומתקבל:

$$adj(adjA) \overset{(*)}{=} adj(|A| A^{-1}) = \left||A| A^{-1}\right| \left(|A| A^{-1}\right)^{-1} = |A|^5 |A|^{-1} |A|^{-1} A = |A|^3 A$$

(השתמשו שוב בטענה בסעיף 8 וגם בעובדה שעבור מטריצה מסדר $n \times n$,

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$). מכאן:

$$adj(adjA) = A \Leftrightarrow |A|^3 A = A \underset{\downarrow}{\Leftrightarrow} |A|^3 I = I \Leftrightarrow |A|^3 = 1 \Leftrightarrow |A| = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

(הכפלת כל אגף ב- A^{-1})

לכן הערכים של $\det A$ עבורם מתקיים $adj(adjA) = A$ הם $1, \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

שאלה 2

א. ידוע ש- $\mathbf{C}^3$, עם הפעולות הרגילות, הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{C}$. התת- קבוצה K היא תת-מרחב שלו כי היא קבוצת הפתרונות של המשוואה הלינארית ההומוגנית $(1+i)z_1-2z_2+5iz_3=0$ (דוגמה 4 עמ' 6 בספר V) ולכן <u>K מרחב לינארי מעל</u> $\mathbf{C}$.

<u>הקבוצות L ו- P אינם מרחבים לינאריים</u> , משום שאינם סגורים תחת כפל בסקלר, כפי שניתן לראות בדוגמאות הבאות :

$(2,0,0,0)\in L$ אבל $(-1)(2,0,0,0)=(-2,0,0,0)\notin L$.

$p(x)=x+1\in P$ אבל $2p(x)=2(x+1)\notin P$ כי $2p(0)=2\neq 1$.

(נעיר שגם מהעובדה שפולינום האפס אינו ב- P ניתן להסיק ש- P אינה תת-מרחב)

כעת נבדוק האם M הוא תת-מרחב של $M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$. תחילה, נראה מהי הצורה הכללית של איברי M. אם $A=(a_{ij})$, אז $-\bar{A}=(-\bar{a}_{ij})$. לכן $A\in M$ אם ורק אם $a_{ij}=-\bar{a}_{ij}$, או $a_{ij}+\bar{a}_{ij}=0$, במילים אחרות, איברי A הם מספרים מרוכבים מדומים(ז"א החלק הממשי שלו שווה ל-0). נראה שהקבוצה M אינה סגורה ביחס לכפל בסקלר :

למשל, $\lambda=i$, $A=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M$, אך $\lambda A=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\notin M$ (-1 אינו מספר מדומה).

<u>לכן M אינה מרחב לינארי</u>.

ב. נמצא קבוצה פורשת ל- K : איבר כללי ב- K הוא $v=(z_1,\frac{1+i}{2}z_1+\frac{5}{2}iz_3,z_3)$, מה שניתן לכתוב $v=(z_1,\frac{1+i}{2}z_1+\frac{5}{2}iz_3,z_3)=z_1(1,\frac{1+i}{2},0)+z_3(0,\frac{5}{2}i,1)$, כשאר z_3,z_1 מרוכבים.

לכן הווקטורים $(0,\frac{5}{2}i,1)$, $(1,\frac{1+i}{2},0)$ פורשים את התת- מרחב K.

נכפיל כל אחד מהם ב- 2 כדי לקבל מספרים יותר נוחים ונקבל את הקבוצה הפורשת $\{(2,1+i,0),(0,5i,2)\}$ עבור K.

שאלה 3

נוכיח שלתת-מרחבים $Sp\{v_1,v_2,v_3\}$ ו- $Sp\{u_1,u_2,u_3\}$ מימדים שונים ונסיק מכך שהמרחבים שונים. נעיר ש- $Sp\{v_1,v_2,v_3\}$ מוכל ב- $Sp\{u_1,u_2,u_3\}$ כי כל אחד מהווקטורים v_i הוא צרוף לינארי של הווקטורים u_i (שאלה 50).

התת-מרחב $Sp\{u_1,u_2,u_3\}$ בעל מימד 3 כי הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ מהווה בסיס שלו (היא פורשת אותו והיא גם בלתי תלויה לינארית).

נבדוק עתה מהו המימד של $Sp\{v_1,v_2,v_3\}$.

הקבוצה $\{v_1,v_2,v_3\}$ פורשת את $Sp\{v_1,v_2,v_3\}$, לכן $\dim Sp\{v_1,v_2,v_3\}\leq 3$ (משפט V.27 ב) .

נבדוק האם היא בלתי תלויה לינארית.

נניח שמתקיים $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=0$, כאשר λ_1, λ_2, λ_3 סקלרים. ע״פ הנתון כל אחד מה- v_i הוא צרוף לינארי של u_1,u_2,u_3 ולאחר הצבה מתקבל:

$$\lambda_1(u_1+u_2+u_3)+\lambda_2(u_1-u_2+u_3)+\lambda_3(-u_1+3u_2-u_3)=0$$

ומשוואה זו שקולה למערכת הבאה:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}.$$

ברור שקיים פתרון לא טריוויאלי ולכן הווקטורים v_1,v_2,v_3 תלויים לינארית. נובע מכך שהמימד של $Sp\{v_1,v_2,v_3\}$ קטן מ-3, זאת מכיוון שאם מימד זה היה שווה ל- 3 אז הקבוצה $\{v_1,v_2,v_3\}$ הייתה בסיס של $Sp\{v_1,v_2,v_3\}$ (משפט V.27 ד).

לסיכום, הוכחנו שהתת-מרחבים $Sp\{v_1,v_2,v_3\}$ ו- $Sp\{u_1,u_2,u_3\}$ שונים כי בעלי מימדים שונים.

הערה: אפשר גם להוכיח את השאלה ללא שימוש במושג המימד.

שאלה 4

א. מתקיים $W\cap U\neq\{0\}$ אס״ם קיימים d ,c ,b ,a מספרים מרוכבים, לא כולם 0, כך ש-

$$a(x^3+ix)+b((1-i)x^2-\alpha x)=c(x^3-2i\alpha x)+d(x^2+1),$$

כלומר אס״ם קיים פתרון למערכת המשוואות הבאה, בנעלמים d ,c ,b ,a:

$$\begin{cases}a=c\\ b(1-i)=d\\ ai-\alpha b=-2i\alpha c\\ 0=d\end{cases},$$

שמתקבלת לאחר השוואת מקדמי הפולינומים. יוצא בקלות שהמערכת הזאת שקולה ל-

$$\begin{cases}a=c\\ b=d=0\\ ia(1+2\alpha)=0\end{cases}.$$

לכן, קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת אס״ם $1+2\alpha=0$, דהיינו אס״ם $\alpha=-\frac{1}{2}$.

הוכחנו שמתקיים $W\cap U\neq\{0\}$ אם ורק אם $\alpha=-\frac{1}{2}$.

ב. עפ״י סעיף א׳, אם $\alpha=0$, אז $U\cap W=\{0\}$ ולכן הסכום $U\oplus W$ הוא אכן סכום ישר. נוכיח שכל פולינום ב- $\mathbf{C}_4[x]$ ניתן להצגה כסכום של פולינום מ- U ופולינום

מ- W וע"י משפט V.18 נסיק ש- $C_4[x]=U\oplus W$.

אכן, בהינתן פולינום $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ב- $\mathbf{C}_4[x]$ נראה שקיימים $d,c,b,a\in\mathbf{C}$ כך ש- :

$a(x^3+ix)+b(1-i)x^2+cx^3+d(x^2+1)=f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

לשם כך יש לפתור את מערכת המשוואות בנעלמים a, b, c, d :

$$\begin{cases} a+c=a_3 \\ b(1-i)+d=a_2 \\ ai=a_1 \\ d=a_0 \end{cases}.$$

למערכת זו יש פתרון (יחיד) לכל a_3,a_2,a_1,a_0 והוא
$$\begin{cases} a=-ia_1 \\ b=\frac{1+i}{2}(a_2-a_0) \\ c=a_3-a_1 \\ d=a_0 \end{cases}.$$

מכאן נובע כי $C_4[x]=U\oplus W$.

<u>דרך אחרת לפתרון :(לאחר לימוד יחידה 8)</u>

ראינו בחלק א' כי $U\cap W=\{0\}$. קל לראות כי $\dim U=\dim W=2$.

לפיכך $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=2+2-0=4=\dim\mathbf{C}_4[x]$.

אולם $U+W\subseteq\mathbf{C}_4[x]$, ולכן ממשפט $V.29$ נסיק כי $U+W=\mathbf{C}_4[x]$, וביחד מתקבל ש- $U\oplus W=\mathbf{C}_4[x]$.

שאלה 5

יהיו U_1, U_2, W תת-מרחבים של מרחב לינארי V. נתון ש- $V=U_1\oplus U_2$ (*).

1. נניח שמתקיים $U_1\subseteq W$. נוכיח ש- $W=U_1\oplus(U_2\cap W)$ ע"י משפט V.18 :

א. התת-מרחבים U_1 ו- $U_2\cap W$ הם גם תת-מרחבים של W.

ב. מהנתון (*) נובע ש- $U_1\cap U_2=\{0\}$ ולכן מתקיים:

$U_1\cap(U_2\cap W)=(U_1\cap U_2)\cap W=\{0\}$.

ג. יהי $w\in W$. אז שוב ע"פ (*), קיימים $u_2\in U_2$, $u_1\in U_1$ כך ש- $w=u_1+u_2$.

מכיוון ש- $U_1\subseteq W$, מתקיים $u_1\in W$ ולכן $u_2=w-u_1$ גם שייך ל- W,

כי W תת- מרחב ולכן מכיל הפרש של שני וקטורים שלו. לכן $u_2 \in U_2 \cap W$.

הוכחנו שכל התנאים של משפט V.18 מתקיימים ולכן $W = U_1 \oplus (U_2 \cap W)$.

2. נגדיר $V = \mathbf{R}^2$, $U_1 = Sp\{e_1\}, U_2 = Sp\{e_2\}$ ו- $W = Sp\{(1,1)\}$.

כמובן $V = U_1 \oplus U_2$ ומתקיים $U_1 \cap W = U_2 \cap W = \{0\}$.

לכן $(U_1 \cap W) \oplus (U_2 \cap W) = \{0\}$ ו- $W \neq (U_1 \cap W) \oplus (U_2 \cap W)$.