קובץ שאלות בנושא - רלציות

שאלה 1.1

הוכח או הפרך :

א. $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

ב. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

שאלה 1.2

א. תהי $S\subset R\times R$ מוגדרת כך : $S=\{(x,y)\,|\,x,y\in R\ ,\ x\le 5\ \ ,\ \ 3\le y\}$.

מְצאו קבוצות A,B כך ש- $S=A\times B$.

ב. תהי $D\subset R\times R$ מוגדרת כך : $D=\{(x,y)\,|\,x,y\in R\ ,\ x+y\le 5\}$.

הוכיחו **שלא קיימות** קבוצות A,B כך ש- $D=A\times B$.

הדרכה לסעיף ב : נניח בשלילה שקיימות A,B כאלה... נסו להגיע לסתירה על ידי כך שתקבלו מתוך הנחת השלילה איברים ב- D , שאינם נמצאים ב- D לפי הנתון.

שאלה 1.3

הוכח או הפרך :

א. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

ב. $(A\times B)\cap C=(A\cap C)\times(B\cap C)$

שאלה 1.4

א. אם $(A\times B)\cap(B\times A)\ne\varnothing$, מה תוכל לומר על A,B? הוכח.

ב. אם $(A\times P(A))\cap(P(A)\times A)\ne\varnothing$, מה תוכל לומר על A? היעזר בסעיף א'.

בניסוח הסופי של תשובתך **אסור** שיופיע $P(A)$! תן דוגמא לקבוצה A המקיימת זאת.

שאלה 1.5

בשאלה זו U היא קבוצה אוניברסלית המכילה את A,B,

המשלימים של A,B המופיעים בשאלה הם יחסית ל- U,

בעוד שהמשלים של $A\times B$ הוא יחסית ל- $U\times U$.

מצא את הטענה הנכונה מבין 3 הטענות הבאות, **והוכח אותה**.

אין צורך להתייחס לטענות השגויות.

א. $(A\times B)'=A'\times B'$

ב. $(A\times B)'=(A'\times U)\cup(U\times B')$

ג. $(A\times B)'=(A'\times B)\cup(A\times B')$

שאלה 2.1

עבור יחס R מעל קבוצה A, נסמן ב- R' את המשלים של R ב- $A\times A$.

א. **הוכח**: $(R')^{-1}=(R^{-1})'$.

ב. **הוכח**: אם R סימטרי אז R' סימטרי.

ג. **הפרך** ע"י דוגמא נגדית את הטענה: "אם R אנטי-סימטרי אז R' אנטי-סימטרי".

ד. **הפרך** ע"י דוגמא נגדית את הטענה: "אם R אנטי-סימטרי אז R' אינו אנטי-סימטרי".

ה. **הוכח**: אם R רפלקסיבי אז R' אינו רפלקסיבי.

ו. תן דוגמא ליחס R מעל $A=\{1,2,3\}$ כך ש- R טרנזיטיבי וגם R' טרנזיטיבי.
כמובן עליך להראות שהדוגמא שלך מקיימת את האמור.

שאלה 2.2

תהי $A=\{1,2,3\}$. R,S הם יחסים מעל A, ומתקיים $R\subseteq S$. **הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות**. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.
לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת.

א. אם R רפלקסיבי אז S רפלקסיבי.

ב. אם S רפלקסיבי אז R רפלקסיבי.

ג. אם R סימטרי אז S סימטרי.

ד. אם S סימטרי אז R סימטרי.

ה. אם R אנטי-סימטרי אז S אנטי-סימטרי.

ו. אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי.

ז. $S^{-1}\subseteq R^{-1}$.

ח. $(R^{-1}\cap S)\cup(S^{-1}\cap R)$ הוא יחס סימטרי.

שאלה 2.3

עבור יחס R מעל קבוצה A, נסמן ב- R' את המשלים של R ב- $A\times A$.

א. הוכח: $(R')^{-1}=(R^{-1})'$.

ב. הוכח בעזרת הסעיף הקודם: $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$.

הדרכה: היעזר בזהות שהכרנו לגבי קבוצות: $X-Y=X\cap Y'$. נמק היטב כל צעד.

ג. הוכח או הפרך: אם R,S סימטריים אז $R-S$ סימטרי.

ד. (אין קשר לסעיפים הקודמים) הוכח או הפרך:

אם R אנטי-סימטרי ו- $R\subseteq S$ אז S אנטי-סימטרי.

שאלה 2.4

R,S הם יחסים מעל קבוצה A. I הוא יחס היחידה (הזהות) מעל A. הוכח או הפרך:

א. $R^2R^3 = R^5$

ב. $R^2R^{-1} = R$

ג. $(R^2)^{-1} = (R^{-1})^2$

ד. $(R-I)^2 = R^2 - I$

ה. $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$

שאלה 2.5

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$.

ב. אם R,S סימטריות אז $R \oplus S$ סימטרית.

ג. אם R,S אנטי-סימטריות אז $R \oplus S$ אנטי-סימטרית.

שאלה 3.1

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל יחס R, $(R^3)^4 = R^{12}$.

ב. לכל יחס R, $R \cdot R^{-1} = I_A$.

ג. אם R הוא יחס סימטרי ו- S יחס אנטי-סימטרי אז $R \cap S$ הוא סימטרי ואנטי-סימטרי.

ד. אם R הוא יחס טרנזיטיבי מעל קבוצה לא-ריקה A, אז R מכיל לפחות 3 זוגות סדורים של אברי A.

שאלה 3.2

לכל אחד מהיחסים הבאים ולכל אחת מהתכונות הבאות, בדוק אם היחס מקיים את התכונה. הוכח כל טענה. התכונות: רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות, טרנזיטיביות. בנוסף, אם היחס הוא יחס שקילות - ציין זאת.

שים לב שיחס יכול להיות סימטרי ואנטי-סימטרי בעת ובעונה אחת, כך שאם הראית שיחס הוא סימטרי, זה לא מוכיח שהוא אינו אנטי-סימטרי.

היחסים:

א. היחס R מעל $N-\{0\}$ המוגדר כך: $(n,m) \in R$ אםם n מתחלק ללא שארית ב- m.

ב. הסגור הסימטרי של היחס R מהסעיף הקודם.

ג. היחס S מעל קבוצת הממשים השונים מאפס, המוגדר כך: $(x,y) \in S$ אםם $x \cdot y > 0$.

שאלה 3.3

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים. $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים: $\mathbf{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

היחסים הבאים מוגדרים מעל $\mathbf{N}-\{0\}$. עבור כל אחד מהם, ציין אם הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי, טרנזיטיבי. נמק. כמובן ייתכן שליחס יהיו כמה מהתכונות יחד.

א. היחס J: $(x,y)\in J$ אם קיים $n\in\mathbf{N}$ כך ש- $x/y=2^n$.

ב. היחס K: $(x,y)\in K$ אם קיים $n\in\mathbf{Z}$ כך ש- $x/y=2^n$.

(למי שזקוק לרענון: $2^{-n}=1/2^n$, $2^0=1$).

ג. היחס L:

$(x,y)\in L$ אם קיים $n\in\mathbf{N}$ כך ש- $x/y=2^n$ או שקיים $n\in\mathbf{N}$ כך ש- $x/y=3^n$.

שימו לב ששלושת היחסים מוגדרים מעל הקבוצה $\mathbf{N}-\{0\}$.

שאלה 3.4

לכל אחת מהטענות א-ג קבע איזו מהאפשרויות הבאות נכונה:

(a) לכל קבוצה לא-ריקה A ויחסים R,S מעל A - הטענה נכונה.

(b) לכל קבוצה לא-ריקה A ויחסים R,S מעל A - הטענה אינה נכונה.

(c) יש קבוצה לא-ריקה ויחסים מעליה, עבורם הטענה נכונה, ויש קבוצה לא-ריקה ויחסים מעליה שעבורם הטענה אינה נכונה.

בכל מקרה, הוכח את קביעתך!

א. אם R,S הם יחסים סימטריים אז $R\oplus S$ סימטרי.

ב. אם R,S אנטי-סימטריים אז $R\oplus S$ אנטי-סימטרי.

ג. אם R,S טרנזיטיביים אז $R\oplus S$ טרנזיטיבי.

שאלה 3.5

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים. הביטוי $|x|$ מסמן את הערך המוחלט של x.

הוכח כי היחסים J,K,L הבאים **אינם** יחסי שקילות מעל **$\mathbf{R}$.**

עבור כל אחד מהיחסים, ציין אם הוא רפלקסיבי, אם הוא סימטרי, ואם הוא טרנזיטיבי.

א. היחס J: $(x,y)\in J$ אם $|x-y|\le 1$.

ב. היחס K: $(x,y)\in K$ אם x,y שניהם מספרים שלמים.

ג. היחס L: $(x,y)\in L$ אם $|x-y|=1$.

שאלה 4.1

א. תן דוגמא ליחס R שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל $A=\{1,2,3\}$,

אך $R\cup R^{-1}$ **אינו** יחס שקילות מעל A. הראה שהדוגמא שנתת מקיימת את הנדרש.

ב. הוכח: אם R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A **כלשהי**

אז $R\cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל A. **נמק בפירוט** כל צעד בהוכחה.

ג. תן דוגמא ליחס R מעל $A=\{1,2,3\}$ כך ש- $R\cup R^2$ **אינו** טרנזיטיבי.

ד. A היא קבוצה בת 11 איברים, E הוא יחס שקילות מעל A, המחלק את A ל- 5 מחלקות: מחלקה אחת בת איבר אחד, שתי מחלקות שבכל אחת מהן 2 איברים ו- 2 מחלקות שבכל אחת מהן 3 איברים. מהו $|E|$, כלומר כמה זוגות סדורים יש ב- E ?

שאלה 4.2

לכל $n\in N$, יהי D_n היחס הבא מעל $P(N)$: עבור $X,Y\in P(\mathbb{N})$, $(X,Y)\in D_n$ אםם $|X\oplus Y|\le n$. למשל $\left(\{1,2,3\},\{1,8\}\right)\in D_n$ עבור כל $3\le n$, כי $\{1,2,3\}\oplus\{1,8\}=\{2,3,8\}$, קבוצה בת 3 איברים. הגדרנו אפוא סדרה אינסופית של יחסים מעל $P(\mathbb{N})$.

א. הוכח: $D_0=I_{P(N)}$ (יחס היחידה מעל $P(N)$).

ב. הוכח: לכל $n\in N$, $D_n\subseteq D_{n+1}$.

ג. הוכח שהסגור הטרנזיטיבי של D_1 הוא יחס שקילות. נסמן אותו באות D.

ד. הוכח שכל הקבוצות **הסופיות** של טבעיים נמצאות באותה מחלקת שקילות לגבי היחס D.

ה. הוכח שקבוצה סופית וקבוצה אינסופית אינן באותה מחלקת שקילות! הדרכה/תזכורת: עצם כלשהו שייך ל- $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ אםם הוא שייך לפחות לאחת הקבוצות X_i.

ו. הוכח שמספר מחלקות השקילות המוגדרות על-ידי היחס D הוא אינסופי !

שאלה 4.3

א. L הוא היחס שהוגדר בסעיף ג של שאלה 3. הוכח ש- $L^2=L^3$ וש- $L\neq L^2$.

ב. הוכח באינדוקציה על n שלכל $n\ge 2$, $L^n=L^2$.

ג. מהו **הסגור הטרנזיטיבי** של היחס L ? הוכח.

ד. תן דוגמא ליחס R מעל $\mathbf{N}-\{0\}$ (או מעל $\mathbf{N}$) המקיים: לכל $n\ge 1$, $R^{n+1}\neq R^n$.

הוכח שהיחס שרשמת הוא אכן בעל תכונה זו. היחס אינו חייב להיות דומה ליחסים שהגדרנו כאן - המציאו יחס כיד הדמיון הטובה עליכם.

שאלה 4.4

תהי K קבוצה, R יחס מעל K.

א. הראה כי אם R רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R \cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל K.

ב. אם R רפלקסיבי וטרנזיטיבי, האם בהכרח $R \cup R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל K?
הראה שכן או הבא דוגמה נגדית.

ג. כמה יחסי שקילות שונות קיימים מעל $\{1,2,3\}$?
הדרכה: רשום את כל החלוקות האפשריות.

שאלה 4.5

נסמן

1. היחס J: $(x,y) \in J$ אםם $|x-y| \le 1$.
2. היחס K: $(x,y) \in K$ אםם x,y שניהם מספרים שלמים.
3. היחס L: $(x,y) \in L$ אםם $|x-y| = 1$.

א. תאר במפורש את היחס J^2. הפתרון יכול **להתחיל**: " $(x,y) \in J^2$ אםם קיים z כך ש... ",
אך יש "לפתור" את התנאי הזה ולקבל תנאי מפורש ופשוט, שלא נעזר ב"אברי-ביניים".
יש להוכיח שהיחס שתיארת אכן שווה ל- J^2.
אפשר להיעזר בהוכחה באי-שוויון המשולש: $|a+b| \le |a| + |b|$.

ב. מהו **הסגור הטרנזיטיבי** של היחס J? הוכח.

ג. יהי M הסגור הטרנזיטיבי של L. תאר את היחס M: $(x,y) \in M$ אםם... (הוכח).

ד. הראה כי M הוא יחס שקילות מעל R. מיהם כל אברי המחלקה שבה נמצא 0?

שאלה 4.6 שאלה זו מיועדת לחדד את מושג הסגור הטרנזיטיבי של יחס. הסגור הטרנזיטיבי של R נתון על-ידי הנוסחה $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, לקבוצה בגודל n ניתן להסתפק ב- $S = \bigcup_{n=1}^{n} R^n$.

א. מדוע לא מספיק בכל מקרה לקחת $S = R \cup R^2$?
- תני **דוגמא** ליחס R מעל $A = \{1,2,3\}$ כך ש- $R \cup R^2$ **אינו** טרנזיטיבי.

ב. בהינתן $n > 1$ כלשהו, תני דוגמא ליחס R מעל $A = \{1,2,3,\ldots,n\}$,
כך ש- $\bigcup_{n=1}^{n-1} R^n$ **אינו** טרנזיטיבי.

ג. תני דוגמא ליחס R מעל קבוצת הטבעיים $\mathbf{N}$, שהסגור הטרנזיטיבי שלו באמת מצריך איחוד של **כל** החזקות שלו: כלומר יחס R כזה, **שלכל** n טבעי, $\bigcup_{n=1}^{n} R^n$ עדיין **אינו** טרנזיטיבי.