פתרון לשאלות מובחרות בממ"ח 01

20109- 2007ב.

שאלה 1

1. **נכון.**
2. **לא נכון.**

<u>הוכחה</u>:

מדרגים את המטריצה ומתקבלת המטריצה $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda^2-\lambda & -\lambda & -1 \end{array}\right)$.

אם $1-\lambda^2=0$, כלומר $\lambda=\pm1$, השורה השנייה היא שורת סתירה, ולכן אין פתרון.

נניח ש- $\lambda\neq\pm1$: לאחר הדירוג מתקבלת המטריצה $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda^3+\lambda+1 \end{array}\right)$.

מכאן נסיק: אם $\lambda\neq0,1,-1$ יש למערכת פתרון יחיד ולכן סעיף 2 לא נכון.

אם $\lambda=0,1,-1$ אין פתרון ולכן סעיף 1 נכון.

שאלה 2

1. **לא נכון.**
2. **נכון.**

<u>הוכחה</u>: מטריצת המקדמים של המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 3 & -1 & 2 & \beta \\ 1 & -5 & 8 & \gamma \end{array}\right)$ שקולת שורות

למטריצה $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -7 & 11 & \beta-3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma+2\alpha-\beta \end{array}\right)$. לכן:

אם $\gamma+2\alpha-\beta\neq0$ למערכת אין פתרון (וקיימים γ,α,β כאלו, כמו למשל $\alpha=\beta=\gamma=1$).

אם $\gamma+2\alpha-\beta=0$ למערכת יש אינסוף פתרונות, ולכן אין מצב שבו למערכת פתרון יחיד.

שאלה 3

1. **לא נכון.** דוגמא נגדית: (O) בעלת מטריצת מקדמים מצומצמת $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

$(1,-1)$ פתרון לא טריוויאלי.

2. **לא נכון.** דוגמא נגדית: (M) בעלת מטריצת מקדמים כזו: $\left(\begin{array}{cc:c}1&1&2\\1&1&3\end{array}\right)$ $(m=n=2)$.

שאלה 4

1. **לא נכון.** דוגמא נגדית: מטריצת (M) כזאת: $\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&3\\0&0&1\end{array}\right)$, אז ל- (M) אין פתרון אך (O)

בעלת מטריצת מקדמים מצומצמת $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ויש לה אינסוף פתרונות.

2. **נכון.** אם יש ל- (M) אינסוף פתרונות אז יש לה משתנים חופשיים . מכיוון שלשתי המערכות (M) ו- (O) אותה מטריצה מצומצמת, אז גם ל- (O) יש משתנים חופשיים (הרי לא תיתכן שורת סתירה) ולכן אינסוף פתרונות.

שאלה 5

1. **לא נכון.** דוגמא נגדית: מטריצת (M) $\left(\begin{array}{cc:c}1&0&2\\0&0&0\end{array}\right)$ ומטריצת (M') $\left(\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&0&2\end{array}\right)$.

2. **לא נכון.** דוגמה נגדית: מטריצת (M) $\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right)$ ומטריצת (M') $\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&3\\0&0&1\end{array}\right)$.

שאלה 6

1. **לא נכון.** דוגמה נגדית: $A=\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right)$.

2. **נכון.** נניח שלכל $b\in R^4$ קיים פתרון למערכת. נובע מזה שווקטורי העמודות של A פורשים את $\mathbf{R}^4$. אך דבר זה לא יתכן כי יש 3 וקטורי עמודת בלבד וכל קבוצה פורשת את $\mathbf{R}^4$ מכילה לפחות 4 וקטורים.

שאלה 7

1. **נכון** . מוכיחים שכל וקטור (a,b,c,d) ב- $\mathbf{R}^4$ הוא צרוף לינארי של וקטורי A , כלומר שיש פתרון למערכת שהמטריצה המורחבת שלה היא $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & b \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & c \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & d \end{array}\right)$.

2. **נכון**. מהדרוג שנעשה בסעיף הקודם רואים בקלות שאם נוציא את הווקטור השלישי ברשימת הווקטורים של A מתקבלת קבוצה בלתי תלויה לינארית. קבוצה זו בת 4 איברים, לכן היא בסיס של $\mathbf{R}^4$.

שאלה 8

1. **נכון.** קבוצה של שלושה וקטורים פורשת את $\mathbf{R}^3$ אס"ם היא בלתי תלויה לינארית ($II.30$).

אם $\alpha(\underline{a}+\underline{b})+\beta(\underline{b}+\underline{c})+\gamma(\underline{c}+\underline{a})=0$, אז $(\alpha+\gamma)\underline{a}+(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)\underline{c}=0$.

לכן, מאחר ש- $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ בלתי תלויה מתקיים $\begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases}$. הפתרון היחיד הוא

$\alpha=\beta=\gamma=0$. לכן $\{\underline{a}+\underline{b},\underline{b}+\underline{c},\underline{c}+a\}$ היא בלתי תלויה לינארית ולכן פורשת את $\mathbf{R}^3$.

2. **לא נכון.** הקבוצה תלויה לינארית כי $\underline{a}+2\underline{b}+\underline{c}=-1(-\underline{a}-\underline{b})+(\underline{b}+\underline{c})$, ולכן אינה בסיס.

שאלה 9

1. **לא נכון.** דוגמה נגדית : $A=\{e_1,2e_1,e_3\}$.

2. **לא נכון.** דוגמה נגדית : $A=\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,0)\}$.

שאלה 10

1. **נכון**. מתקיים $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, כן לכל k טבעי $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ובפרט ל- $k=100$.

2. **נכון**. מכיוון ש- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, אז לכל $k=2m$ זוגי :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}^k=\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}^2\right)^m=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ולכן :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}^{2007}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}^{2006}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

שאלה 11

1. **לא נכון**. $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$. לכן אם $BA \neq AB$,
אז $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.
למשל $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ו- $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ מהוות דוגמא נגדית.

2. **נכון**. כי $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I$ ו- $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$.

שאלה 12

1. **לא נכון**. דוגמא נגדית: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, או כל זוג דומה של מטריצות שאינן מתחלפות. שים לב שמתקיים $(DA)^t = A^t D^t = A^t D$.

2. **נכון**. $(AB)^t = A^t B^t$, ולכן $\left((AB)^t\right)^t = \left(A^t B^t\right)^t$ ומאחר ש- $\left(A^t B^t\right)^t = \left(B^t\right)^t \left(A^t\right)^t$,
אז $AB = \left((AB)^t\right)^t = \left(A^t B^t\right)^t = \left(B^t\right)^t \left(A^t\right)^t = BA$.

שאלה 13

1. **נכון**. $A^2 - A + I = 0 \Leftarrow A^2 - A = -I \Leftarrow A - A^2 = I \Leftarrow A(I - A) = I$
כלומר, A הפיכה (ו- $A^{-1} = I - A$).

2. **לא נכון**. למשל $I^2 - I = 0$, אך I רגולרית.

שאלה 14

1. **לא נכון**. דוגמא נגדית: כל A רגולרית ו- $B = -A$. אז $A + B = 0$ סינגולרית.

2. **לא נכון**. דוגמא נגדית: $A = I$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, אז AB סינגולרית, אך A רגולרית.

שאלה 15

1. **נכון**. מהנתון, ל- $B = I$ קיימת X כך ש- $AX = I$. כלומר: A הפיכה (מסקנה III.48).

2. **נכון.** אילו היתה קיימת מטריצה Y כך ש- $AY = B = AX$ אז ע"י כפל ב- A^{-1} משמאל היינו מקבלים $Y = X$. לכן אם $Y \neq X$ אז $AY \neq AX$.
לפיכך ממשפט $III.33$ ז' נסיק כי A רגולרית, וממשפט $III.45$ נקבל כי $|A| \neq 0$.

שאלה 16

1. **לא נכון.** החישוב נותן $\det A = 5$.
2. **לא נכון.** החישוב מראה ש- $\det A = 2(k^2 - 1)$. לכן המטריצה הפיכה אם ורק אם $k \neq 1, -1$.

שאלה 17

1. **נכון**

$$\begin{vmatrix} \beta_1+\gamma_1 & \gamma_1+\alpha_1 & \alpha_1+\beta_1 \\ \beta_2+\gamma_2 & \gamma_2+\alpha_2 & \alpha_2+\beta_2 \\ \beta_3+\gamma_3 & \gamma_3+\alpha_3 & \alpha_3+\beta_3 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1+\alpha_1 & \alpha_1+\beta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2+\alpha_2 & \alpha_2+\beta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3+\alpha_3 & \alpha_3+\beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_1+\alpha_1 & \alpha_1+\beta_1 \\ \gamma_2 & \gamma_2+\alpha_2 & \alpha_2+\beta_2 \\ \gamma_3 & \gamma_3+\alpha_3 & \alpha_3+\beta_3 \end{vmatrix}$$

(*) מגרסת העמודות למשפט $III.40$

המטריצה השמאלית באגף ימין של השוויון לעיל מתקבלת מן המטריצה הנתונה ע״י הפעולות הבאות **על עמודות** (בסדר הבא):

$C_3 \to C_3 + C_1$, $C_1 \to C_1 + C_2$, $C_2 \leftrightarrow C_1$, $C_2 \leftrightarrow C_3$.

שתי הפעולות הראשונות אינן משפיעות על הדטרמיננטה, ואילו כל אחת מן האחרונות הופכת את סימנה. לכן בסה״כ הדטרמיננטה שווה ל- a. באופן דומה מסיקים שגם הדטרמיננטה השניה באגף ימין שווה ל- a. לכן סכומן $2a$.

2. **לא נכון**. המטריצה הנתונה מתקבלת מן המטריצה המקורית ע״י סדרת הפעולות הבאה: שיחלוף (אינה משנה דטרמיננטה) ולאחר מכן בזו אחר זו: $R_1 \to R_1 + 2R_2 - 3R_3$ (אינה משנה דטרמיננטה) $R_2 \to 3R_2$ $R_3 \to 2R_3$; שתי אלה גורמות לכפל הדטרמיננטה ב-3 וב-2 בהתאמה. בסה״כ הדטרמיננטה היא $2 \cdot 3 \cdot a = 6a$.

שאלה 18

1. **נכון.** $adj(\lambda A) = \lambda^{n-1} adjA$ כי איברי $adj(\lambda A)$ ו- $adj(A)$ הם המינורים מסדר $n-1$ של λA ו- A בהתאמה. כל מינור כזה של λA שווה ל- λ^{n-1} כפול המינור המתאים של A (עפ״י העיקרון שלמטריצה B מסדר $n-1$, $|\lambda B| = \lambda^{n-1}|B|$).
2. **נכון**. $((adjA)^t)_{ij} = (adjA)_{ji} = (-1)^{j+i} M_{ij}^{A} = (-1)^{i+j} M_{ji}^{A^t} = (adjA^t)_{ij}$.

שאלה 19

1. **נכון**. עפ״י שיטת קרמר ניתן לרשום את כל אחד מרכיבי הפתרון כמנה: דטרמיננטה מסוימת חלקי 2. בדטרמיננטה כל האיברים שלמים, ובעמודה אחת מופיעים רכיבי $\underline{b}$ שכולם זוגיים.
לכן ע״י פיתוח לפי עמודה זו רואים שהדטרמיננטה זוגית ולכן הדטרמיננטה מתחלקת ב-2

וכל רכיב הוא שלם.

2. **לא נכון.** מהנתון נובע ש- $|A|=-|A| = (-1)^n\ |A| = |-A| = |A^t|$.

מאידך, ידוע ש- $|A| = |A^t|$. לכן מתקבל $|A|=-|A|$, כלומר $|A|=0$.

מכאן נובע שיש אינסוף פתרונות למערכת $A\underline{x}=\underline{0}$.