פתרון לממ"ן 17- 2007ב
אלגברה לינארית 1 - 20109

שאלה 1

א. הקבוצה $\{v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,2,-1,1)\}$ היא בסיס של U, נפעיל עליה את תהליך של גרם-שמידט כדי לקבל בסיס אורתוגונלי ל- U.

נגדיר $u_1' = v_1 = (1,1,1,1)$ ו- $u_2' = v_2 - \dfrac{v_2 \cdot u_1'}{\|u_1'\|^2} u_1'$.

מתקבל $u_2' = (1, 2, -1, 1) - \dfrac{3}{4}(1, 1, 1, 1) = \dfrac{1}{4}(1, 5, -7, 1)$, ננרמל את הוקטורים u_1' ו- u_2'.

ונגדיר: $u_1 = \dfrac{u_1'}{\|u_1\|} = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$, $u_2 = \dfrac{u_2'}{\|u_2'\|} = \dfrac{1}{2\sqrt{19}}(1, 5, -7, 1)$.

וכך נקבל בסיס אורתונורמלי B_1 ל-U: $B_1 = \left\{\underbrace{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}_{u_1''}, \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{19}}(1, 5, -7, 1)}_{u_2''}\right\}$

ב. נמצא בסיס ל- $U^\perp$ ולאחר מכן נמצא בסיס אורתונורמלי ל- $U^\perp$, כפי שעשינו בסעיף הקודם:

$$v = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שני משתנים חופשיים. נסמן $z = a$, $t = b$ ונקבל: $\begin{cases} x = -3a - b \\ y = 2a \end{cases}$

$$U^\perp = Sp\{(-3, 2, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$$

נסמן: $u_3' = (-1, 0, 0, 1)$, לאחר נרמול: $u_3 = \dfrac{u_3'}{\|u_3'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1)$

נסמן: $v_4 = (-3, 2, 1, 0)$.

נגדיר: $u_4' = v_4 - \dfrac{v_4 \cdot u_3'}{\|u_3'\|^2} u_3'$, $u_4' = (-3, 2, 1, 0) - \dfrac{3}{2}(-1, 0, 0, 1) = (-\dfrac{3}{2}, 2, 1, -\dfrac{3}{2})$

נגדיר: $u_4 = \dfrac{u_4'}{\|u_4'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{38}}(-3, 4, 2, -3)$ ($\|u_4'\| = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$).

הבסיס $B_2 = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1), \dfrac{1}{\sqrt{38}}(-3, 4, 2, -3)\right\}$ ל- $U^\perp$ הוא אורתונורמלי.

מכיוון ש- $\mathbf{R}^4 = U \oplus U^\perp$, איחוד הבסיסים $B = B_1 \cup B_2$ הוא בסיס של $\mathbf{R}^4$, כמובן אורתונורמלי:

$$\boxed{B = \left\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{2\sqrt{19}}(1, 5, -7, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{38}}(-3, 4, 2, -3)\right\}}$$

יהי $v = (3, 0, 0, 1)$. עלינו למצוא את ההיטל האורתוגונלי של v על U.

מכיוון ש- $V = U \oplus U^{\perp}$, קיימים $v_1 \in U$ ו- $v_2 \in U^{\perp}$ כך ש- $v = v_1 + v_2$.

v_1 הוא ההיטל האורתוגונלי של v על U. לחישוב של v_1, נשתמש בבסיסים האורתונורמליים שמצאנו. איחודם B הוא בסיס אורתונורמלי של V.

אז: $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4$

ו- $v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2$, α, β סקלרים.

נחשב את α, β בעזרת המכפלה הפנימית:

$$v \cdot u_1 = (\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4) \cdot u_1 = \alpha u_1 \cdot u_1$$

$$= \alpha \quad (\|u_1\|^2 = 1 \text{ כי})$$

באופן דומה: $v \cdot u_2 = \beta$

ובכן: $v \cdot u_1 = (3, 0, 0, 1) \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2$

$$v \cdot u_2 = (3, 0, 0, 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{19}}(1, 5, -7, 1) = \frac{4}{2\sqrt{19}} = \frac{2}{\sqrt{19}}$$

לכן: $v_1 = 2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{19}}(1, 5, -7, 1)$

כלומר: $\boxed{v_1 = (\frac{20}{19}, \frac{24}{19}, \frac{12}{19}, \frac{20}{19})}$

הערה: לחישוב α, β, אפשר להשתמש במשפט VIII.15, סעיף ג', ולחישוב v, אפשר להשתמש בנוסחה בעמוד 18 שיעור שמיני. בפתרון שהוצע , חוזרים להגדרת ההיטל האורתוגונלי להבנה המלאה של המושג.

שאלה 2

מהנתונים על U, W נובע מיד ש- $\dim U \geq 2$ וגם $\dim W \geq 2$ ומהעובדה ש- $\dim(U \cap W^{\perp}) \geq 2$ מתקבל בפרט ש- $\dim W^{\perp} \geq 2$. מאידך, ידוע ש- $\dim W + \dim W^{\perp} = 4$ (משפט VIII.10).

לכן $\dim W = \dim W^{\perp} = 2$ והקבוצה $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ היא בסיס ל- W. ע"י חישוב דומה לזה שעשינו בשאלה 1 מתקבל הבסיס $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$ ל- $W^{\perp}$.

עתה נמצא את המימד של U: מהעובדות $\dim W^{\perp} = 2$ ו- $\dim(U \cap W^{\perp}) \geq 2$ נסיק ש- $\dim(U \cap W^{\perp}) = 2$ (כי $(U \cap W^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$). לכן $(U \cap W^{\perp}) = W^{\perp}$, כלומר $W^{\perp} \subseteq U$.

מצד שני, הקבוצה $\{(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$ מוכלת ב- U וקל לבדוק שאיחודה עם הבסיס שמצאנו

עבור $W^\perp$, כלומר $B = \{(1,0,0,0),(0,0,0,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$, היא בלתי תלויה לינארית.

נובע מכך ש- B בסיס של $\mathbf{R}^4$ מוכל ב- U, מה שגורר ש- $U = \mathbf{R}^4$.

שאלה 3

התת-מרחב $\mathrm{Im}T$ נפרש על-ידי וקטורי העמודות של המטריצה A, כלומר הוא שווה למרחב השורות של המטריצה $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$. לכן $(\mathrm{Im}T)^\perp$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A^t\underline{x} = \underline{0}$ (טענה VIII.9). מחישוב סטנדרטי מתקבל ש- $B = \{(-2,1,0,0,0),(-1,0,-1,0,1),(-2,0,-3,1,0)\}$ בסיס ל- $(\mathrm{Im}T)^\perp$.

שאלה 4

יהיו $C_1 = \{u_1,u_2,\ldots,u_k\}, C_2 = \{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ בסיסים אורתונורמליים של W_1, W_2 בהתאמה. על-ידי התהליך של גרם-שמידט, ניתן להשלים אותם לבסיסים אורתונורמליים של $\mathbf{R}^n$, נסמן אותם $B_1 = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}, B_2 = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. ע״פ משפט VI.12, קיימת העתקה לינארית $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ שמקיימת $T(u_i) = v_i$. ע״פ משפט VII.24, T אורתוגונלית כי היא מעבירה את הבסיס האורתונורמלי B_1 לבסיס האורתונורמלי B_2. נוכיח עתה שמתקיים $T(W_1) = W_2$.

יהי $w_1 \in W_1$. אז קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ סקלרים כך ש- $w_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$.

לכן $T(w_1) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(u_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, מה שמראה ש- $T(W_1) \subseteq W_2$. הקורא יבדוק שלהיפך כל וקטור $w_2 \in W_2$ נמצא ב- $T(W_1)$. לכן העתקה T שהגדרנו גם מקיימת $T(W_1) = W_2$.