מבחן לדוגמה באלגברה לינארית -20109-

יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות.
כל שאלה 25 נקודות.

שאלה 1

א. נתונה המערכת :
$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ (a+1)x - y + z = 0 \end{cases}$$

עבור אילו ערכים של a יש למערכת הזאת :

(i) פתרון יחיד?

(ii) אינסוף פתרונות? רשום את הפתרון הכללי עבור כל אחד מערכי a שמצאת.

ב. תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ מעל $\mathbf{R}$ המקיימת $A^2 = 0$.
הוכח שהמטריצה $I + \alpha A$ הפיכה עבור כל α ממשי.

שאלה 2

א. יהי $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ בסיס של $\mathbf{R}^n$, $n > 1$. תהי A מטריצה ממשית מסדר $m \times n$ ויהי $\underline{b} \in \mathbf{R}^m$, $\underline{b} \neq \underline{0}$.

1. הוכח כי הקבוצה $\{v_1 - v_n, v_2 - v_n, ...v_{n-1} - v_n\}$ בלתי תלויה לינארית.
2. הוכח כי אם $v_1, v_2, ..., v_n$ פתרונות של מערכת המשוואות $A\underline{x} = \underline{b}$ אז $\rho(A) = 1$.

ב. תהי A מטריצה סינגולרית מסדר 3×3 . נתון כי : $|A - 2I| = |A + 2I| = 0$.
מהו מימד מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$? נמק את תשובתך.

שאלה 3

יהי V מרחב הפולינומים מעל R ממעלה קטנה או שווה ל-4.
תהי U קבוצת הפולינומים המתאפסים ב- $x = -1$ וב- $x = 1$ ותהי W קבוצת הפולינומים של V המתאפסים ב- $x = 1$ וב- $x = 2$.

א. הוכח כי U ו- W תת-מרחבים של V.

ב. מצא בסיס ל- U, ל- W ול- $U \cap W$.

ג. מצא בסיס ל- $U + W$

שאלה 4

א. יהיו U ו-W תת-מרחבים של מרחב לינארי V ממימד סופי. נתון כי $U \neq \{0\}$, $W \neq \{0\}$ ו- $V = U \oplus W$. אז לכל וקטור $v \in V$ קיימת הצגה יחידה $v = u + w$ (*), כאשר $u \in U$, $w \in W$. תהי $p : V \to V$ הטרנספורמציה הלינארית המוגדרת על-ידי: לכל $v \in V$ $p(v) = u$ כאשר u מוגדר כמו ב (*).

מצא את כל הערכים העצמיים של p ואת התת-מרחבים העצמיים שלה. האם p לכסינה? נמק את תשובתך.

ב. יהי $U = Sp\{(1,1,1),(1,0,1)\}$, תת-מרחב של R^3.
מצא בסיס אותונורמלי משלים אורתוגונלי של U.

שאלה 5

א. תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית של מרחב לינארי V ממימד סופי.

1. (i) הוכח שאם $V = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$ אז $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$.

(ii) הוכח שאם $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$ אז $\ker T^2 = \ker T$.

(iii) הסק כי $V = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$ אם ורק אם $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$.

2. תן דוגמה של טרנספורמציה לינארית $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, מדרגה 1 ,שמקיימת את הטענות שבסעיף א'.

ב. הוכח או הפרך ע"י דוגמה נגדית את הטענה הבאה:
תהיינה A מטריצה אלכסונית מסדר $n \times n$ ו-B מטריצה מסדר $n \times n$ שכל איבריה שווים לאפס פרט לאיבר במקום $(1, n)$ שהוא שווה ל-1. אזי $A+B$ לכסינה.