בשאלות 1,2 סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף העמוד

בשאלות הנ"ל יתכן ויש כמה טענות נכונות או אין בכלל טענות נכונות או כל הטענות נכונות.

שאלה 1:

א. (3%) אם $C \subseteq B$ וכן $C \not\subset A$, אז $C \subseteq B \setminus A$

ב. (3%) אם $C \subseteq B \oplus (A \setminus B)$, אז $C \cap A = \Phi$

ג. (3%) אם $C \subseteq P(A)$ וכן $C \neq \Phi$ אז $C \cap A \neq \Phi$

ד. (3%) אם $C \in P(A)$ וכן $C \neq \Phi$ אז $C \cap A \neq \Phi$

שאלה 2:

תהא $A = \{1,2\}$. תהא $B = \{3,4\}$. נגדיר יחס R המוגדר מעל $A \times B$ באופן הבא:

$R = \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) & (1,4) & (2,4) & (1,3) \\ (1,3) & (2,3) & (1,4) & (2,4) & (2,4) \end{pmatrix}$, שימו לב כי ב-$R$ 5 זוגות של זוגות איברים.

שאלה 2.1:

א. (3%) R רפלקסיבית.

ב. (3%) R סימטרית.

ג. (3%) R אנטיסימטרית.

ד. (3%) R טרנזיטיבית

שאלה 2.2: בהמשך לנתוני ההתחלה בשאלה, נגדיר רלציה T מעל $A \times B$ בצורה הבאה: $T = R \oplus [(A \times B) \times (A \times B)]$.

א. (3%) $|T| = 11$

ב. (3%) $T \cup T^{-1}$ רלצית שקילות, ומספר מחלקות השקילות שלה הוא 3.

ג. (3%) $T \cup T^{-1}$ רלצית סדר חלקי.

ד. (3%) $|T \setminus T^{-1}| = 1$

שאלה 3:

(14%) הוכח או הפרך את הטענה: $A \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$.

אם הטענה נכונה, הוכח אותה ע"י שימוש במושג השייכות של איברים (לא ע"י אלגברה של קבוצות ולא בדיאגראמות ון). אם הטענה לא נכונה, הבא דוגמא נגדית.

הפרכה: במקרה זה מאוד קל לבנות דוגמא נגדית. הסיבה, אם איבר נמצא בקבוצה A אזי יהיה שייך לאגף שמאל, ויהיה שייך לשני הביטויים שבינם מבצעים הפרש סימטרי באגף ימין, לכן לא יהיה באגף ימין.

שאלה 4:

<u>סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף השאלה</u>

א. (5%)אם מחברים בקטע של ישר כל זוג מתוך 10 נקודות במישור (שאף 3 מהן לא על אותו ישר), כל קטע צובעים באחד מתוך 3 צבעים, אזי בהכרח מנקודה מסוימת יצאו לפחות 4 ישרים בצבע זהה.

ב. (5%) $\binom{75}{71}=\sum_{i=0}^{71}\binom{i+3}{i}$.

ג. (5%) האיבר החופשי בפיתוח $\left(2x^2+\frac{3}{x^2}+1\right)^3$ שווה 7.

ד. (5%) מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-67 שווה למספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-68.

שאלה 5:

א. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=41$ המקיימים: $i=1,2,3,4$, $x_i\ge -3$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: $D(4,53)$

ב. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=41$ המקיימים: $i=1,2,3,4$ $x_i\ge 0$ $x_3+x_4\ne 12$ $x_1+x_2\ne 12$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: נגדיר:

A_1 - קבוצת כל הפתרונות בהם $x_1+x_2=12$

A_2 - קבוצת כל הפתרונות בהם $x_3+x_4=12$

ברור כי $|A_1\cap A_3|=0$ כי אז סכום כל 4 האיברים הוא 24 ולא 41. נשארנו עם מקרה קל של הכלה והפרדה, וכל שעלינו לחשב הוא את $|A_1|$ (שכמובן, מסימטריות, שווה ל- $|A_2|$). כאן למעשה מקבלים מערכת של 2 משוואות $\begin{cases}x_1+x_2=12\\x_3+x_4=29\end{cases}$, ומספר פתרונות המערכת $D(2,12)D(2,29)$, ובסה"כ מספר הפתרונות המבוקש

$$D(4,41)-2D(2,12)D(2,29)$$

שאלה 6:

א. (8%) מצא יחס רקורסיה עבור מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שאין בהן את הרצף 001.

תשובה: נסתכל על תחילתה של סדרה באורך n – אם הסדרה מתחילה ב-1, ניתן להשלים אחריה $f(n-1)$ סדרות חוקיות. אם הסדרה מתחילה ב-0 אז צריך להסתכל על האיבר השני – אם האיבר השני 0, קיימת רק סדרה חוקית אחת (כולה אפסים), ואם האיבר השני הוא 1 אז ניתן להשלים אחריה $f(n-2)$ סדרות חוקיות.

בסה"כ $f(n)=f(n-1)+1+f(n-2)$ ותנאי התחלה $f(1)=2$ $f(0)=1$

ב. (8%) פתור יחס רקורסיבי: $a_1=14$ $a_0=2,$ $a_n=14a_{n-1}-45a_{n-2},$

תשובה: זהו יחס רקורסיבי לינארי: מפתרון $\alpha^2-14\alpha+45=0$, נקבל $\alpha_2=9$ $\alpha_1=5$. מכאן נקבל $f(n)=A\cdot 5^n+B\cdot 9^n$, ומתנאי ההתחלה נקבל $A=B=1$, $f(n)=5^n+9^n$.