מתמטיקה דיסקרטית 20283

תקציר פתרון בחינה סמסטר 2006ב מועד 93

שאלה 1

א. יהי $a \in X$, עלינו להוכיח ש- $a \in f^*(f_*(X))$:

מהנתון $a \in X$ יחד עם הגדרת f_*, נובע $f(a) \in f_*(X)$.

נסמן $Y = f_*(X)$.

מכיון ש- $f(a) \in Y$, נקבל מהגדרת f^* ש- $a \in f^*(Y)$.

כלומר $a \in f^*(f_*(X))$, כמבוקש.

ב. ההנחה ש-f אינה חד-חד-ערכית פירושה שקיימים $a_1, a_2 \in A$,

כך ש- $a_1 \neq a_2$ ו- $f(a_1) = f(a_2)$.

נקח $X = \{a_1\}$. מתקיים (השלימו מדוע):

$a_2 \in f^*(f_*(X))$.

מכך, ביחד עם העובדה ש- $a_2 \notin X$, נובע ש- $X \neq f^*(f_*(X))$.

ג. נניח בשלילה ש- f חד-חד-ערכית, ו-X היא קבוצה חלקית ל- A, המקיימת

$X \neq f^*(f_*(X))$.

בסעיף א ראינו כללית ש- $X \subseteq f^*(f_*(X))$.

לכן, אם מתקיים $X \neq f^*(f_*(X))$,

משמע יש איבר השייך ל- $f^*(f_*(X))$ ואינו שייך ל-X.

יהי a איבר כזה.

הטענה $a \in f^*(f_*(X))$ פירושה, מהגדרת f^* והגדרת f_*,

ש- a הוא מקור של תמונה של איבר כלשהו ב- X.

במלים אחרות, קיים $a_1 \in X$ כך ש- $f(a_1) = f(a)$.

מכיוון ש- f חד-חד-ערכית, נובע $a_1 = a$.

כאמור $a_1 \in X$, משמע $a \in X$.

זו סתירה להנחה למעלה ש- a אינו שייך ל- X.

הראינו אפוא בשלילה, שאם f חד-חד-ערכית אז $X = f^*(f_*(X))$.

שאלה 2

התשובה היא C.

רעיון ההוכחה: תהי K קבוצת יחסי השקילות מעל $\mathbf{N}$.

מצד אחד, $K \subseteq P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$ (מדוע?) ולכן $|K| \le C$ (מדוע בדיוק?)

מצד שני, נמצא קבוצה חלקית של K שעוצמתה C, כלומר עוצמתה כעוצמת $P(\mathbf{N})$.

השלימו את בניית הקבוצה, לא לגמרי טריביאלי, נדרשת קצת זהירות. להמשך דיון בפורום.

כעת לפי קנטור (-שרדר)-ברנשטיין, נקבל שעוצמת K היא בדיוק C.

שאלה 3

א. $a_0 = 1$: הסדרה הריקה היא "ריצוף באורך 0"!

$a_1 = 2$: ברור.

$a_2 = 7$: מרצפת אחת באורך 2: שלוש אפשרויות (אדום, ירוק, סגול),

שתי מרצפות באורך 1: ארבע אפשרויות (שחור-שחור, לבן-לבן, שחור-לבן, לבן-שחור).

יחס הנסיגה: נתבונן בריצוף באורך n:

(i) אם הוא מסתיים במרצפת באורך 1 (2 אפשרויות) אז לפני מרצפת זו יכול לבוא כל ריצוף באורך $n-1$. כלומר אפשרות זו תורמת $2a_{n-1}$.

(ii) אם הוא מסתיים במרצפת באורך 2 (3 אפשרויות) אז לפני מרצפת זו יכול לבוא כל ריצוף באורך $n-2$. כלומר אפשרות זו תורמת $3a_{n-2}$.

קיבלנו $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

בדיקה עבור הערכים שמצאנו: $7 = 2\cdot 2 + 3\cdot 1$.

ב. קיבלנו יחס נסיגה ליניארי. המשוואה האפיינית היא $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

פתרונותיה: $\lambda = 3, -1$.

לכן פתרון יחס הנסיגה הוא מהצורה: $a_n = A\cdot 3^n + B\cdot(-1)^n$ (*).

את A,B נמצא מתנאי ההתחלה:

$$a_0: \quad 1 = A\cdot 3^0 + B\cdot(-1)^0 = A + B$$

$$a_1: \quad 2 = A\cdot 3^1 + B(-1)^1 = 3A - B$$

נחבר את שתי המשוואות אגף-אגף: $3 = 4A$, כלומר $A = 3/4$.

בהצבה נקבל $B = 1/4$.

נציב בנוסחה (*): $$a_n = \frac{3}{4}\cdot 3^n + \frac{1}{4}\cdot(-1)^n = \frac{1}{4}(3^{n+1} + (-1)^n)$$

ג. משימוש חוזר ביחס הנסיגה, $a_3 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$, $a_4 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 61$.

ומהנוסחה המפורשת : $a_4 = \frac{1}{4}(3^5 + (-1)^4) = 61$.

שאלה 4

א. 24

ב. 2^{24}

ג. $3^4 \cdot 4^3$

שאלה 5

א. d

ב. a

ג. b

ד. b