חלוקה המושרה ע"י פונקציה

הבהרה / ניסוח מחודש לסעיף "העתק טבעי", תורת הקבוצות עמ' 84.

א. תהי φ פונקציה של קבוצה A לקבוצה B.

בעזרת φ ניתן להגדיר יחס (רלציה), שנקרא לו E_φ, מעל A:

עבור $x, y \in A$ נאמר ש- $(x, y) \in E_\varphi$ אםם $\varphi(x) = \varphi(y)$.

טענה: E_φ הוא **יחס שקילות** מעל A

הוכחה: נראה טרנזיטיביות: יהיו $(x, y) \in E_\varphi$, $(y, z) \in E_\varphi$.

כלומר $\varphi(x) = \varphi(y)$, $\varphi(y) = \varphi(z)$.

שוויון הוא כמובן טרנזיטיבי, לכן $\varphi(x) = \varphi(z)$.

כלומר, מהגדרת E_φ: $(x, z) \in E_\varphi$.

לכן E_φ הוא יחס טרנזיטיבי.

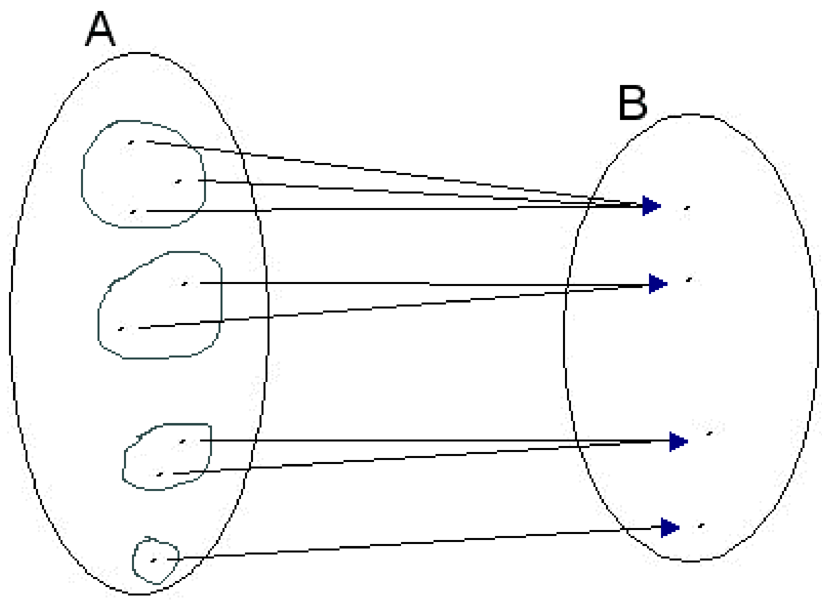
תרגיל מומלץ וקל מאד: השלימו ההוכחה, כלומר הוכיחו ש- E_φ הוא רפלקסיבי וסימטרי.

כידוע, כל יחס שקילות מעל A מגדיר חלוקה של A.

קיבלנו אפוא שכל פונקציה $\varphi : A \to B$ **מַשרה** (כלומר מאפשרת להגדיר) חלוקה של A,

והחלוקה היא כזו:

שני איברים של A נמצאים באותה מחלקה אםם יש להם אותה תמונה תחת φ.



ב. נסמן את קבוצת המנה, כלומר **קבוצת מחלקות השקילות** , בסימן A/E_φ :

זו הקבוצה **שאיבריה** הם מחלקות השקילות: כל אחת ממחלקות השקילות, כעצם בפני עצמו, היא איבר בקבוצה זו. למשל, באיור שבעמוד הקודם, A/E_φ היא קבוצה בת 4 איברים.

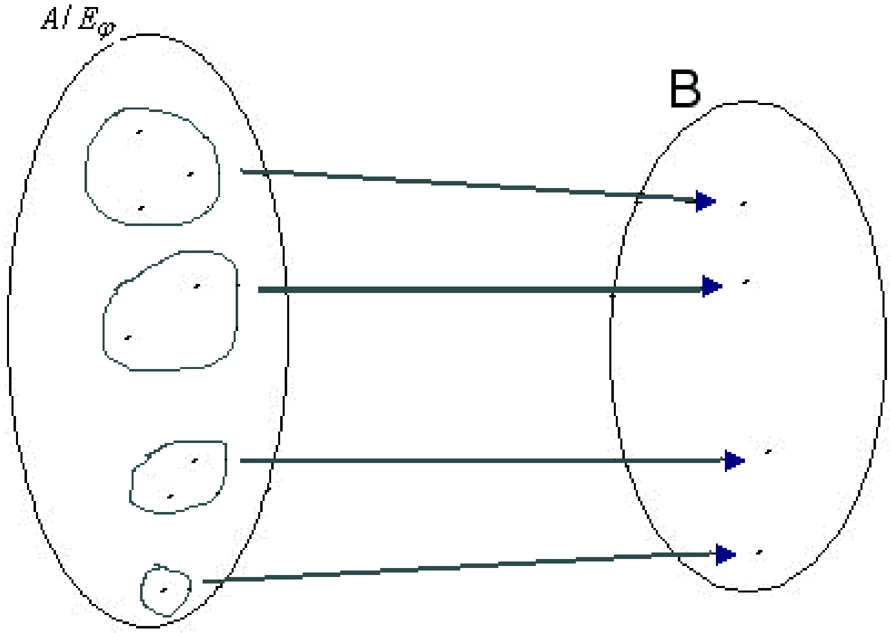
כדי לפשט את המשך הדיון, נניח מעתה ש- φ היא **<u>על</u>** B .

כלומר כל איבר של B מתקבל כתמונה של איבר כלשהו (ייתכן של יותר מאבר אחד) של A.

הערה: זו אינה ממש הנחה מגבילה: אם φ אינה על B, תהי B' תמונת φ : קבוצת אותם אברי B המתקבלים ע"י φ. במקום לראות את φ כפונקציה של A לתוך B, נראה אותה כפונקציה של A **על** B' ! נמשיך את הדיון עם B' במקום B .

מהגדרת יחס השקילות המושרה ע"י φ , לכל איבר של A/E_φ מתאים איבר אחד ויחיד של B :

האיבר המותאם לכל איברי המחלקה ע"י φ.



קיבלנו אפוא פונקציה של A/E_{φ} **ל-** B (אפשר לסמן פונקציה זו φ/E_{φ}).

פונקציה זו היא **חד-חד-ערכית**: מהגדרת E_{φ}, למחלקות שקילות שונות של E_{φ} מותאמים איברים שונים ב- B.

הפונקציה היא **<u>על</u>** B : זה נובע מהנחתנו ש- φ עצמה היא על B: לכל איבר של B יש מקור תחת φ , ומקור זה שייך למחלקה כלשהי. מחלקה זו היא המקור שלו תחת הפונקציה φ/E_{φ} .

נסכם:

פונקציה φ של A לקבוצה B כלשהי משרה חלוקה של A .

אם φ היא **על** B, יש התאמה **חח"ע** של קבוצת מחלקות השקילות A/E_{φ} **<u>על</u>** B.

ג. לכאורה, החלוקה של A שקיבלנו כאן היא דוגמא מיוחדת של חלוקה:
"חלוקה שהתקבלה ע"י פונקציה".
אך למעשה, **כל** חלוקה של A (וכל יחס שקילות מעל A) ניתן להציג בצורה כזו !
בהינתן יחס שקילות E **כלשהו** מעל A, תהי A/E **קבוצת מחלקות השקילות**.
קיימת פונקציה "טבעית" של A על A/E :
הפונקציה השולחת כל איבר של A למחלקה בה הוא נמצא !
נקח $B = A/E$ וניקח את הפונקציה φ להיות הפונקציה הטבעית הזו.
לפי הגדרת φ, וההגדרה בסעיף (*i*) של חלוקה מושרית ע"י פונקציה, קל לראות שהחלוקה של A ש- φ משרה, היא בדיוק החלוקה המתקבלת מיחס השקילות הנתון E (בידקו זאת !).
כך קיבלנו את יחס השקילות E כיחס שקילות המושרה ע"י פונקציה.

ד. הערה אחרונה: בפרקים 4 , 5 נדון בהשוואה בין גדלים של קבוצות אינסופיות.
כדאי לחזור לבנייה שכאן במהלך לימוד פרקים אלה, ולראות מה היא אומרת על גודל הקבוצה A/E לעומת הגודל של B, ולעומת הגודל של A.