המכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה
המחלקה להנדסת תעשיה וניהול

מתמטיקה דיסקרטית
בוחן סופי

יש לפתור את כל השאלות חומר עזר מותר: מחשב כיס.
משך הבחינה – 3 שעות.

נוסחאות וסימונים:

$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$ - חליפות ללא החזרות $C(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ - צירופים ללא החזרות

n^k - חליפות עם החזרות $D(n,k)=C(n-1+k,n-1)=\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$ - צירופים עם החזרות

הבינום - $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$, הטרינום - $(a+b+c)^n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}a^ib^jc^{n-i-j}$

הכלה והפרדה: $\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right|=S_1-S_2+\ldots+(-1)^{n-1}S_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i$, כאשר S_i מוגדר כסכום מספרי האיברים בכל חיתוכי i קבוצות מתוך ה-n.

לדוגמא אם $n=4$ $S_3=\left|A_1\cap A_2\cap A_3\right|+\left|A_1\cap A_2\cap A_4\right|+\left|A_1\cap A_3\cap A_4\right|+\left|A_2\cap A_3\cap A_4\right|$.

$$\left|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_n\right|=|U|-S_1+S_2-S_3+\ldots+(-1)^nS_n=|U|-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i$$

רלציה מעל A:

1. רפלקסיביות – אם לכל איבר $a\in A$ מתקיים $(a,a)\in R$.
2. סימטרית - אם לכל $(a,b)\in R$ גם $(b,a)\in R$.
3. אנטיסימטרית - אם לכל $(a,b)\in R,\ a\neq b$ מתקיים $(b,a)\notin R$.
4. טרנזיטיבית - אם לכל $(a,b)\in R,(b,c)\in R$ מתקיים $(a,c)\in R$.
5. שקילות – מקיימת תכונות 1,2,4.

א. קבוצת המנה – קבוצת מחלקות השקילות ב. אינדקס – מספר מחלקות השקילות.

6. סדר חלקי – אם תכונות 1,3,4 מתקיימות.

א. a איבר מינימלי אם לא קיים b שעבורו $(b,a)\in R$ ב. a איבר קטן ביותר אם לכל b $(a,b)\in R$

ג. a איבר מקסימלי אם לא קיים b שעבורו $(a,b)\in R$ ד. a איבר גדול ביותר אם לכל b $(b,a)\in R$

שאלה מס' 1 (10 נקודות).

מצא ביטוי מפורש ל- $\sum_{i=0}^{10}2\binom{20}{2i}$

תשובה

נסתכל על

$$2\binom{20}{0}+2\binom{20}{2}+2\binom{20}{4}+...=\left[\binom{20}{0}+\binom{20}{1}+\binom{20}{2}+\binom{20}{3}+\ldots+\binom{20}{20}\right]+$$
$$+\left[\binom{20}{0}-\binom{20}{1}+\binom{20}{2}-\binom{20}{3}+\ldots+\binom{20}{20}\right]=(1+1)^{20}+(1-1)^{20}=2^{20}$$

שאלה מס' 2 (10 נקודות).

חשב $\sum_{i=1}^{81}10^i i\binom{81}{i}$

תשובה

$$(1+10x)^{81}=\sum_{i=0}^{81}\binom{81}{i}1^{81-i}(10x)^i$$

$$\left[(1+10x)^{81}\right]'=81\cdot10(1+10x)^{80}=\left[\sum_{i=0}^{81}\binom{81}{i}1^{81-i}(10x)^i\right]'=\sum_{i=0}^{81}i\binom{81}{i}1^{81-i}10(10x)^{i-1}$$

ונקבל בצד ימין בדיוק את הביטוי שבשאלה עבור $x=1$, לכן הביטוי שבצד ימין שווה ל-
$81\cdot10(1+10\cdot1)^{80}=810\cdot11^{80}$

שאלה מס' 3 (10 נקודות).

מצא את האיבר החופשי בפיתוח $\left(3x^4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)^9$

תשובה

נסתכל על מערכת המשוואות הבאה:

y_i - מס' הפעמים בהם לקחנו את הרכיב ה-i:

$$y_1+y_2+y_3+y_4=9$$
$$4y_1-2y_2-y_3=0$$

הפתרונות השלמים אי-שליליים היחידים הם

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(1,2,0,6),(1,1,2,5),(0,0,0,9),(1,0,4,4),(2,4,0,3),(2,2,4,1),(2,3,2,2),(2,1,6,0),(3,6,0,0)$$

בסוג הראשון נקבל את האיבר החופשי - $\binom{9}{1}\binom{8}{2}3^1$

בסוג השני נקבל את האיבר החופשי - $\binom{9}{1}\binom{8}{1}\binom{7}{2}3^1$

בסוג השלישי נקבל את האיבר החופשי - 1^9

בסוג הרביעי נקבל את האיבר החופשי - $\binom{9}{1}\binom{8}{4}3^1$

בסוג החמישי נקבל את האיבר החופשי - $\binom{9}{2}\binom{7}{4}3^2$

בסוג השישי נקבל את האיבר החופשי - $\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{4}3^2$

בסוג השביעי נקבל את האיבר החופשי - $\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{2}3^2$

בסוג השמיני נקבל את האיבר החופשי - $\binom{9}{2}\binom{7}{1}3^2$

בסוג התשיעי נקבל את האיבר החופשי - $\binom{9}{3}3^3$

ובסה״כ האיבר החופשי יהיה סכום 3 הביטויים הנ״ל.

שאלה מס׳ 4 (10 נקודות).

מה מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 12$ בטבעיים (כולל 0), כאשר עבור $i = 1,2,3$,

אסור ש- x_i ו- y_i יהיו **שניהם** 2 (אך אחד מהם יכול לקבל את הערך 2).

תשובה

תהי U קבוצת כל פתרונות המשוואה בטבעיים, ללא מגבלות. $|U| = D(6,12) = \binom{17}{5}$.

תהי A_i $(i = 1,2,3)$ קבוצת הפתרונות בהם $x_i = y_i = 2$. אנו מחפשים את גודל הקבוצה $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$.

נחשב: $|A_i| = D(4,8) = \binom{11}{3}$

עבור $i \neq j$, $|A_i \cap A_j| = D(2,4) = \binom{5}{1}$ (את זה אפשר כמובן לומר גם בלי D...).

ולבסוף $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 1$.

לפי הכלה והפרדה, $|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = D(6,12) - 3\,D(4,8) + 3D(2,4) - 1$

שאלה מס׳ 5 (10 נקודות).

כמה מספרים בין 1 ל- 155 (כולל הקצוות) מתחלקים ב- 4, ולא מתחלקים ב- 5.

פתרון: נגדיר 2 קבוצות:

A_4 - כל המספרים בין 1 ל-155 שלא מתחלקים ב-4.

A_5 - כל המספרים בין 1 ל-155 המתחלקים ב-5.

אנו מחפשים את $\left|\overline{A_4} \cap \overline{A_5}\right|$

$$|A_4| = 155 - \lfloor 155/4 \rfloor = 117$$
$$|A_5| = \lfloor 155/5 \rfloor = 31$$

לכן, $|A_4 \cap A_5| = 31 - \lfloor 155/20 \rfloor = 24$

$$\left|\overline{A_4} \cap \overline{A_5}\right| = |\Omega| - \big[|A_4| + |A_4| - |A_4 \cap A_5|\big] =$$
$$= 155 - [117 + 31 - 24] = 31$$

שאלה מס' 6 (10 נקודות).

בקבוצה של 100 סטודנטים 30 לומדים פיסיקה, 25 מתמטיקה ו- 18 כלכלה. 15 לומדים גם פיסיקה וגם כלכלה, 10 לומדים גם מתמטיקה וגם פיסיקה ו-3 לומדים רק כלכלה. כמה סטודנטים לא לומדים אף מקצוע?

תשובה:

A_1 - קבוצת הסטודנטים הלומדים פיסיקה.

A_2 - קבוצת הסטודנטים הלומדים מתמטיקה.

A_3 - קבוצת הסטודנטים הלומדים כלכלה.

קל לראות כי הסטודנטים שלומדים כלכלה ומתמטיקה לומדים גם פיסיקה, כי אם סטודנט אינו לומד רק כלכלה (ויש 15 כאלה), אז הוא לומד פיסיקה. לכן $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3|$.

מחפשים את $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$.

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$= 100 - \left[|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\right].$$
$$100 - \left[|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3|\right] = 100 - [30 + 25 + 18 - 10 - 15] = 52$$

שאלה מס' 7 (10 נקודות).

תהי $A = \{1,2,3\}$. R,S הם יחסים מעל A, ומתקיים $R \cap S = \Phi$.

ענה בנכון לא נכון (בלי נימוק):

א. אם R רפלקסיבי אז S לא רפלקסיבי.

ב. אם S טרנזיטיבי אז R טרנזיטיבי.

ג. אם R סימטרי אז S סימטרי.

ד. אם R סימטרי אז S אנטי-סימטרי.

ה. אם R אנטי-סימטרי אז S אנטי-סימטרי.

תשובה

א. נכון: R רפלקסיבי פירושו $I_A \subseteq R$. נתון $R \cap S = \Phi$. לכן $I_A \not\subset S$.

ב. לא נכון, למשל $S = \{(1,3)\}$ טרנזיטיבי, $R = \{(1,2), (2,3)\}$ אינו טרנזיטיבי ומתקיים $R \cap S = \Phi$.

ג. לא נכון, למשל $R = \varnothing$ הוא סימטרי, $S = \{(1,2)\}$ אינו סימטרי, ומתקיים $R \cap S = \Phi$.

ד. לא נכון, למשל $R = \varnothing$ הוא סימטרי, $S = \{(1,2), (2,1)\}$ אינו אנטי-סימטרי, ו- $R \cap S = \Phi$.

ה. לא נכון, למשל $R = \varnothing$ הוא אנטי-סימטרי, $S = \{(1,2), (2,1)\}$ אינו אנטי-סימטרי, ו- $R \cap S = \Phi$.

שאלה מס׳ 8 (10 נקודות).

נתונה הקבוצה $A=\{1,2\}$. נתונה הרלציה הבאה מעל $A\times A$:

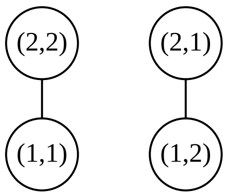
$$R=\{((1,1),(1,1)),((1,2),(1,2)),((2,1),(2,1)),((2,2),(2,2)),((1,2),(2,1))((1,1),(2,2))\}$$

האם זהו יחס סדר חלקי? מלא? אם כן הוכח ובנה דיאגרמת הסה, וציין את כל האיברים המינימליים/מקסימליים. האם יש איבר גדול/קטן ביותר?

תשובה

זהו יחס סדר כי

1. רפלקסיבי – לכל $a\in A\times A$ $(a,a)\in R$
2. אנטיסימטרי - לכל $a,b\in A\times A$ שונים, אם $(a,b)\in R$ אז $(b,a)\notin R$
3. טרנזיטיביות – מתקיימת במובן הריק כי אין אף שני זוגות רצפים.



$\{(2,2),(2,1)\}$ - מקסימליים – אין גדול ביותר

$\{(1,1),(1,2)\}$ - מינימליים – אין קטן ביותר

שאלה מס׳ 9 (10 נקודות).

נתונה הרלצייה הבאה המוגדרת מעל הקבוצה $A=\{1,2,3,4\ldots 20\}$: xRy אם ורק אם השארית מחלוקת x ב-4 שווה לשארית של חלוקת y ב-4. בדוק אם זו רלציית שקילות או סדר חלקי או סדר מלא או לא אף אחת מאלו. לרלציית שקילות מצא את קבוצת המנה (פקטור) ואת האינדקס. לרלציית סדר (חלקי או מלא) בנה את דיאגרמת הסה ומצא את האיברים המקסימליים, המינימליים וגם הקטנים והגדולים ביותר.

תשובה

זהו יחס שקילות כי הוא רפלקסיבי (השארית של המספר מחלוקה ב-4 שווה לשארית של המספר מחלוקה ב-4...), סימטרי (כי אם למס׳ מסוים יש שארית מחלוקה ב-4 הזהה לשארית של חלוקת מספר שני ב-4, אז גם להיפך נכון), וטרנזיטיבי (כי אם שארית של חלוקת מס׳ 1 זהה לשני, והשני זהה לשלישי, אז כל השאריות זהות, בפרט של הראשון והשלישי). כמובן שזהו לא יחס אנטיסימטרי כי $(4,1)\in R$ $(1,4)\in R$. קבוצת המנה מורכבת מ-4 (אינדקס) מחלקות שקילות $\{\{0,4,8,12,16,20\},\{1,5,9,13,17\},\{2,6,10,14,18\},\{3,7,11,15,19\}\}$.

שאלה מס׳ 10 (10 נקודות).

נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3\}$. האם קיימת רלציה סימטרית, אנטיסימטרית, טרנזיטיבית, לא רפלקסיבית ולא ריקה, מעל A? אם כן הצג אחת כזו, ואם לא הוכח!

תשובה

$R=\{(1,1)\}$