# 1.6 תופעות ״משונות״ בקבוצות אינסופיות

## 1.6.1 הקדמה

בפרק הקודם ראינו כי מציאת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי שתי קבוצות היא דרך טבעית להשוואת ״גודלן״. עבור הקבוצות האינסופיות היחס ״אותה עָצמה״ הוא ההכללה הטבעית של היחס ״אותו מספר איברים״. מסתבר שלמרות שהקריטריון לשוויון עָצמות נראה טבעי ומתקבל על הדעת, — השימוש בו מביא למסקנות שאינן מתקבלות על הדעת. בסעיף הבא (1.6.2) נדגים כמה מסקנות פרדוקסליות המתקבלות כתוצאה משימוש בקריטריון זה.

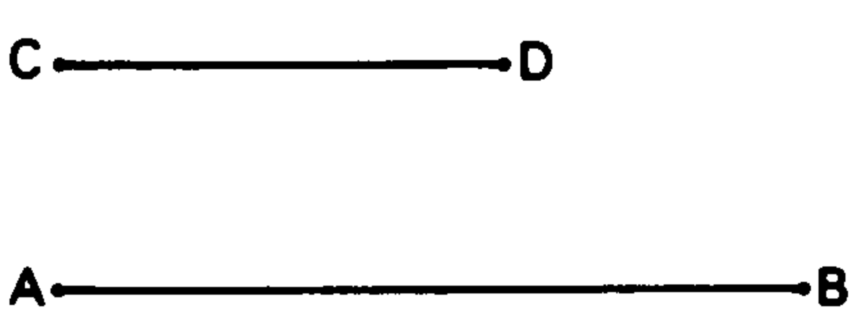
״פרדוקס״ מוגדר על־ידי E.P. Northrop באופן הבא: פרדוקס הוא משהו הנראה נכון אבל למעשה אינו נכון או משהו הנראה לא נכון אבל למעשה הוא נכון, או משהו שבאמת ובתמים יש בו סתירה.[1]

הבעיות הכרוכות בשימוש בהתאמות חד־חד־ערכיות להשוואת עָצמות של קבוצות היו ידועות לפני למעלה מאלפיים שנה. פתרון לבעיות נמצא רק בשלהי המאה ה־19. בסעיף 1.6.3 ניתן סקירה היסטורית קצרה על האישים המרכזיים הקשורים בפתרון הבעיה ועל גישתם לפתרונה. בסעיף 1.6.4 נציג את פתרונה של הבעיה ובכך ניישב את ה״סתירות״ שבסעיף 1.6.2. בסעיף האחרון של פרק זה (סעיף 1.6.5) נגדיר קריטריון מדויק להבחנה בין קבוצות סופיות לקבוצות אינסופיות.

## 1.6.2 הצגת הבעיה

**דוגמא א:**

באיור 7 מצוירים שני קטעים, AB ו־ CD. הקטע AB ארוך יותר מאשר הקטע CD.



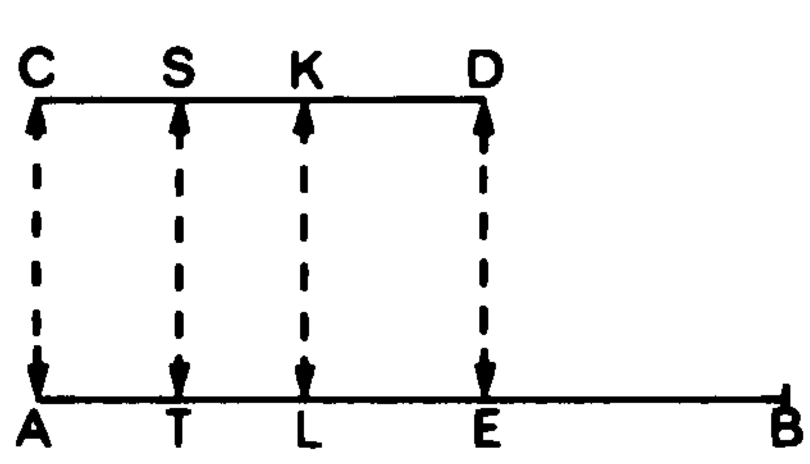

איור 7

נתבונן בשתי הקבוצות הבאות — בקבוצת הנקודות שבקטע AB ובקבוצת הנקודות שבקטע CD. לא ניכנס כרגע לדיון במושג ״נקודה״ אלא נתייחס לפירוש האינטואיטיבי המקובל, לפיו לנקודה אין ממדים ובין כל שתי נקודות יש נקודה נוספת.

עתה נשאל את השאלה הבאה:

האם שתי הקבוצות הללו שקולות זו לזו?

הצגנו את השאלה בפני מספר רב של אנשים ורובם ככולם ענו מיד ששתי הקבוצות אינן שקולות. הנימוקים היו, בדרך־כלל, שהעָצמות אינן שוות משום שהקטע AB ארוך יותר מאשר CD. כיצד נובע מכך שהקבוצות אינן שקולות? במחשבה נוספת הגיעו הנשאלים להסבר הבא: אילו הנחנו את הקטע CD על־גבי הקטע AB באופן שהקצה C יתלכד עם A היה הקטע CD מכסה רק חלק מן הקטע AB. המדקדקים הראו לנו אפילו התאמה בזוגות (ראה איור 8).



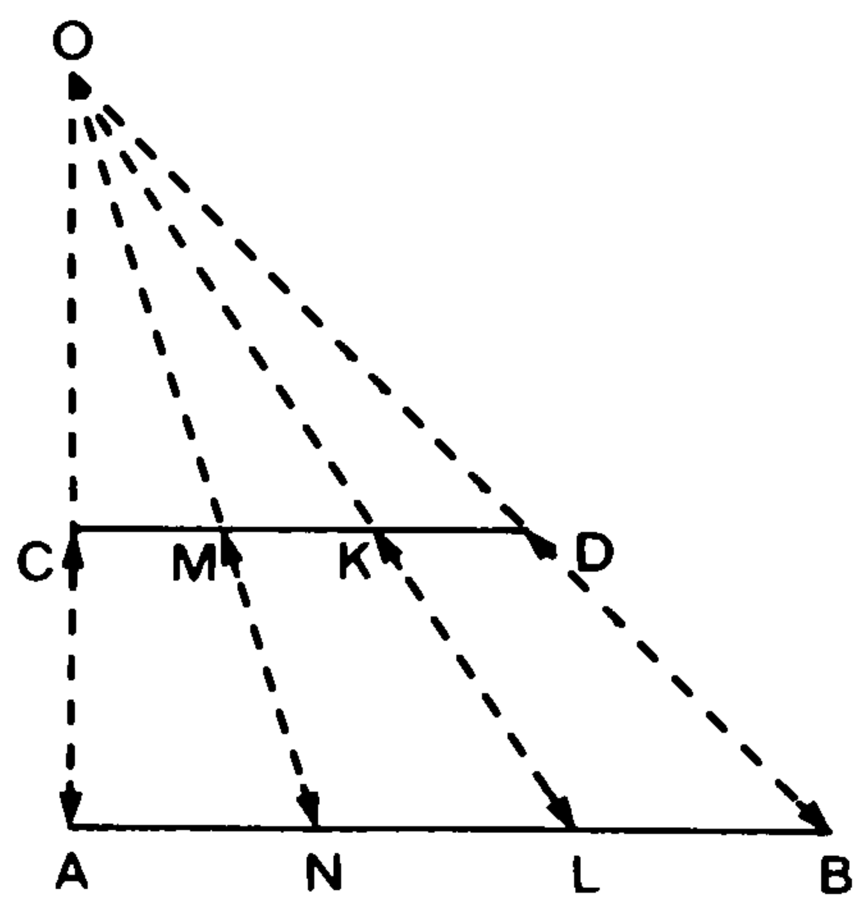

איור 8

לכל נקודה בקטע CD התאימו את הנקודה בקטע AB הנמצאת בדיוק מתחתיה. למשל: ל־C התאימו את A, ל־D התאימו את E ול־K התאימו

[1] Eugene P. Northrop, *Riddles in Mathematics*, Penguin Books, 1960.

את L (איור 8). לכל נקודה על הקטע CD מתאימה נקודה בקטע AB, אולם כל הנקודות שבין E ל־B על הקטע AB "מיותרות", אין להן בנות־זוג בקטע CD. לפיכך נראה סביר לומר שקבוצת הנקודות בקטע AB אינה שקולה לקבוצת הנקודות בקטע CD.

אנחנו נציע כעת התאמה אחרת



איור 9

באיור 9 מתוארת ההתאמה באופן גרפי, עיין היטב באיור ונסה להבינו.
למשל: לנקודת C מתאימים את בת הזוג A.
לנקודה D מתאימים את בת הזוג B.
לנקודה K מתאימים את בת־הזוג L.
לנקודה M מתאימים את בת הזוג N.

כדי למצוא את הנקודה על AB המתאימה לנקודה S כלשהי מן הקטע CD, מחברים את O עם נקודה זו וממשיכים את הקטע המחבר OS עד שיחתוך את AB. נקודת החיתוך של OS עם AB היא הנקודה המתאימה ל־ S. הפעם לא נשארות נקודות "מיותרות" בקטע AB.

ההתאמה שתוארה כאן היא התאמה חד־חד־ערכית בין שתי הקבוצות (סעיף 1.5.3 עמוד 17). לפיכך קבוצת הנקודות בקטע AB וקבוצת הנקודות בקטע CD הן שקולות – יש להן עצמות שוות.

ביחס לשתי הקבוצות הללו, בדרכים שנראו הגיוניות, הגענו לשתי מסקנות הפוכות. מחד־גיסא, הקבוצות הנידונות אינן שקולות. מאידך גיסא, לקבוצות יש עצמות שוות כלומר הן **כן** שקולות.
היכן שגינו? זוהי הבעיה העומדת בפנינו בפרק זה ואנו מקווים כי בסיומו של הפרק תוכל לפתור אותה.

**דוגמא ב:**

נעיין בשתי קבוצות נוספות:

N קבוצת המספרים הטבעיים: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

M קבוצת המספרים הזוגיים: $M = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

כל מספר זוגי הוא מספר טבעי, כלומר, כל איבר של M הוא גם איבר של N. ב־N יש, בנוסף למספרים הזוגיים, גם מספרים אי־זוגיים: 1, 3, 5, 7,... לפיכך סביר להסיק כי ל־N ול־M אין עָצמות שוות, ולכן N ו־M אינן שקולות.

נרשום כעת את האיברים של N בשורה אחת ומתחתיה נרשום את איברי M באופן הבא:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N: | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6,... | 17,... | 20,... | 41,... | 97,... | —,... | —,... |
| M: | 2, | 4, | 6, | 8, | 10, | 12,... | 34,... | —,... | —,... | —,... | 200,... | 426,... |

כמובן שלא רשמנו את כל איברי N או את כל איברי M (מדוע?), אבל הדגמנו את הצורה שבה התכוונו לסדר את אלה מתחת לאלה.

שאלה 13

נותרו מספר מקומות חסרים בשתי השורות לעיל. השלם את החסר.

תשובה בעמוד 46

כעת נציע התאמה בין איברי הקבוצות N ו־M: **לכל מספר טבעי — נתאים את המספר הזוגי שהיינו רושמים מתחתיו.**

שאלה 14

א. נסה לנסח כלל לחישוב בן־הזוג של מספר טבעי כלשהו, שנקרא לו n.

ב. אם m הוא מספר זוגי כלשהו ב־M, מהו המספר הטבעי לו הוא מותאם?

**תשובה בעמוד 46**

שאלה 15

בדוק את ההתאמה המוצעת, חזור ועיין בהגדרת "קבוצות שקולות" בסעיף 1.5.4 (עמוד 18) והסק מסקנה בדבר השקילות או אי השקילות של הקבוצות N ו־M.

**תשובה בעמוד 46**

המסקנה ש־M ו־N אינן שקולות נובעת מן הקביעה הידועה כי "השלם גדול מכל חלק שלו". בסיסיותה של קביעה זו והאמונה בנכונותה היו במשך אלפי שנים מושרשות בתודעה האנושית. בספרו הידוע של אוקלידס, **היסודות**, שנכתב במאה השלישית לפני־הספירה (ויוזכר בהרחבה בהמשך הקורס) מופיעה קביעה זו כאחת מעובדות היסוד עליהן מבוססת הגיאומטריה, או בלשון הספר, כ"אמיתון".

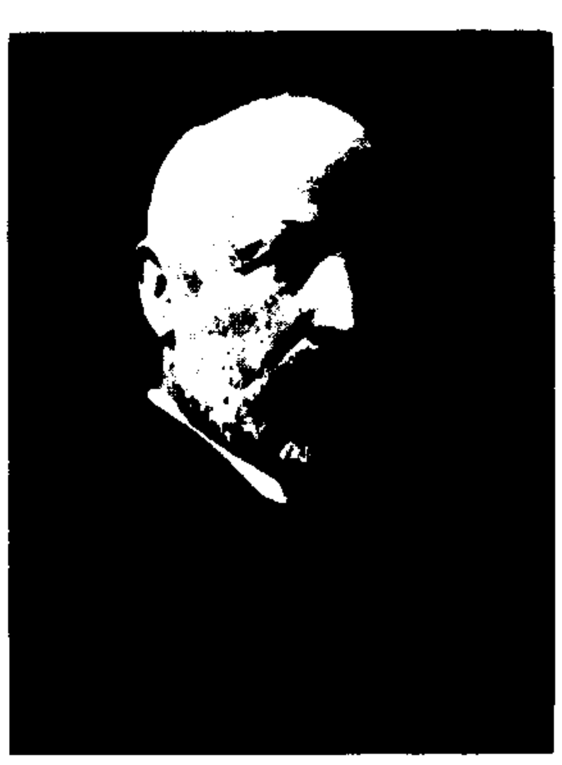
שתי הדוגמאות שבסעיף זה מתארות את הבעיה העומדת בפנינו. לאחר הסקירה ההיסטורית נפנה ליישוב הסתירות שהועלו כאן.

## 1.6.3 סקירה היסטורית

בסעיף 1.6.2 הובאו שתי דוגמאות. בכל אחת מהן נסב הדיון על שתי קבוצות ובכל אחת מהן הגענו לשתי מסקנות סותרות; הקבוצות שקולות, הקבוצות אינן שקולות.

בעיה זו, שהיא אולי חדשה עבורך, הטרידה את הגדולים שבין הוגי־הדעות במשך אלפי שנים. במאה החמישית לפני־הספירה התחבט בה המתימטיקאי היווני זנון האלאטי; אצלו התעוררה בעיה דומה למרות שדן בדוגמא אחרת.

מני אז ועד סוף המאה התשע־עשרה חזרה ועלתה הבעיה, בצורות שונות, ומתוך דוגמאות שונות. רק בשלהי המאה התשע־עשרה נעשה צעד משמעותי קדימה בדרך ליישובה. צעד זה היה פרי עבודתם של כמה מתימטיקאים. גיאורג קנטור (Georg Cantor 1845-1918) היה אחד הבולטים שביניהם.



גיאורג קנטור (1845—1918)

גיאורג פרדיננד לודוויג פיליפ קנטור נחשב לאחד מאבות הענף המתימטי המכונה "תורת הקבוצות". הוא ידוע כאחד המוחות המזהירים ביותר בתקופתו, ויש אפילו האומרים — בכל הדורות.

"הנקודה היהודית" בסיפורו של קנטור מעניינת. אביו היה יהודי שהמיר את דתו לפרוטסטנטית ואימו היתה בת למשפחה יהודית מומרת לקתוליות. גם מתנגדו הגדול ביותר, ליאופולד קרונקר (L. Kronecker 1823-1891) היה יהודי וגם הוא המיר את דתו בשנת חייו האחרונה. השתייכותו הלאומית של קנטור גם היא נושא לדיון. הוא הגדיר עצמו כגרמני, ובגרמניה חי מרבית שנותיו,

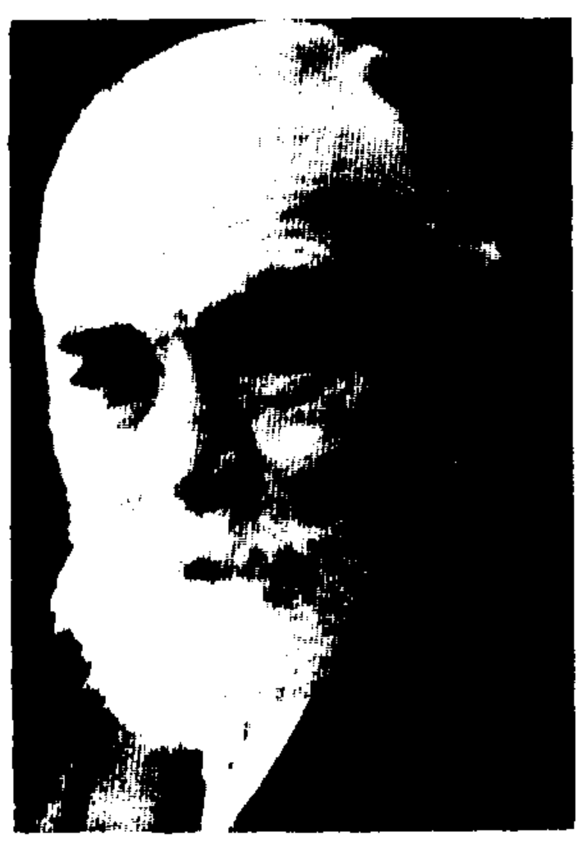
אבל נולד ברוסיה ובה בילה את שלוש שנות חייו הראשונות. מאז ועד גיל 11 חי בקופנהגן, לשם עקרה משפחתו מסיבות רפואיות. רק לאחר מכן עבר עם משפחתו לגרמניה. התפתחותו הרוחנית של קנטור נתקלה בקשיים מרובים. רק בקושי רב עלה בידו לשכנע את אביו כי ירשה לו לנטוש את לימודי ההנדסה לטובת המתימטיקה והפילוסופיה.

מזגו הסוער של קנטור, לשונו החדה, מוחו המזהיר ודעותיו המהפכניות הקשו על נסיונות ההתקדמות שלו בהיֶרַרכיה הנוקשה של העולם האקדמי הגרמני והקשיים הללו תרמו אולי להתפתחות מחלתו. מגיל 40 ואילך היה נתון להתקפות דיכאון חמורות. כשכין האחת לשניה הוא מפתח תיאוריות מתימטיות מזהירות. את חייו סיים בבית־חולים לחולי־נפש. אף אחד משׁשׁת ילדיו (שני בנים וארבע בנות) לא ירש את כשרונותיו המתימטיים.[1]

במסיבה שנערכה לכבוד קולומבוס לאחר שחזר עטור תהילה מן המסע ליבשת החדשה, טען כנגדו אחד מן הנוכחים כי כל אחד היה מגלה את אמריקה על־ידי נסיעה מערבה. על כך השיב קולומבוס בחידה. הוא ביקש מן הנוכחים להעמיד ביצה קשה על הקצה המחודד שלה. משלא הצליחו בכך — לקח את הביצה והיכה בה על השולחן כך שהקצה המחודד נשבר והביצה נעמדה ללא קושי. ״כל אחד יכול לעשות זאת, טען קולומבוס, אבל אני מצאתי את הדרך!״

יישוב הפרדוקס שתואר בסעיף 1.6.2 היה כרוך בהבחנה שהיא בבחינת ״ביצת קולומבוס״. ההבחנה היא הבאה:

הרגשתנו ביחס למה נכון ומה אינו נכון, בכל הקשור לקבוצות, מבוססת על ניסיון מחיי המעשה. בחיי המעשה אנו נתקלים רק בקבוצות סופיות. מתוך נסיוננו בקבוצות כאלה אנחנו מסיקים מסקנות כלליות על יחסים שונים בין קבוצות ובאופן אוטומטי מחילים את המסקנות גם על קבוצות אינסופיות. פרגה (Friedrich L. Frege ,1823-1891), קנטור, רסל (Bertrand Russell ,1872–1970), ואחרים בחנו בדקדקנות את ההגדרות והכללים שאנו מסתמכים עליהם. הודות לבחינה זו הצליחו לראות כי חלק מן הכללים שאנו מסתמכים עליהם אמנם נכונים ביחס לקבוצות סופיות (וביחס לקבוצות כאלה גם ניתן להוכיח את אמיתותם), אך אינם חלים על קבוצות אינסופיות. במלים אחרות: יש הבדלים מהותיים בין הקבוצות הסופיות והאינסופיות, ואין להתייחס לקבוצות האינסופיות פשוט כאל קבוצות עם ״יותר איברים״ מאשר הקבוצות הסופיות.



פ.ל. פרגה (1891—1823)

העובדה שגם עבור אוספים אינסופיים אנחנו משתמשים בשם ״קבוצות״ יוצרת נטייה חזקה בתודעתנו לייחס לקבוצות הסופיות והאינסופיות תכונות זהות למרות שאין להן תכונות זהות. בסעיף 1.6.4 (עמוד 24) נעמוד על כמה הבדלים מהותיים שבין הקבוצות הסופיות והאינסופיות ובסעיף 1.6.5 (עמוד 27) נשתמש באחד ההבדלים הללו לצורך אפיון הקבוצות האינסופיות.

היוצא מכך הוא, שכדי למנוע סתירות, יש להמנע מלקבל כל כלל שהוא ביחס לקבוצות, סביר ככל שיהיה, כמובן מאליו. יש לבדוק את אמיתותו של כל אחד ואחד מן הכללים ולישמו רק אם אפשר להוכיח כי הוא מתחייב מן ההנחות ביחס למושגים היסודיים של תורת הקבוצות.

ברטרנד רסל (1970—1872)

באחד ממאמריו על יסודות המתימטיקה[2] דן ברטרנד רסל בשפה המתימטית, שפה הנראית לפעמים קשה ומסובכת. הוא מצדיק את השימוש בשפה זו באומרו כי מאחר שהיא מסבכת אפילו את הדברים הפשוטים היא עוזרת לנו להגיע למצב שבו איננו מקבלים שום כלל כמובן מאליו. ״העובדה ששניים ועוד שניים הם ארבעה״, אמר רסל, ״היא כל־כך מובנת מאליה עד כי קשה לנו להיות הססנים כה גדולים התמהים אם ניתן להוכיח עובדה זו״. בהמשך המאמר הוא מוסיף ״...מאז החלו אנשים להוכיח משפטים מובנים מאליהם הם מצאו שחלק גדול מהם אינם נכונים... למשל שום דבר אינו יותר מובן מאליו מאשר העובדה שבשלם יש תמיד יותר איברים מאשר בחלק ממנו, או שמספר תמיד גדל כשמוסיפים לו אחד. אבל משפטים אלה אינם נכונים״.

בסעיף 1.6.4 יובהר, בין היתר, מדוע משפטים אלה אינם נכונים.

---

1 E. T. Bell, *Men of Mathematics* Penguin Books, 1953, (pp. 612–639).

2 Bertrand Russell, *Mathematics and the Metaphysicians*

מאמר זה מופיע ב: James R. Newman, *The World of Mathematics*, Simon & Shuster, New York (p. 1578).

## 1.6.4 יישוב ה"סתירות"

ננסה לבדוק את המושגים וההגדרות שברשותנו וכן את הכללים השונים שהביאו אותנו למצב הפרדוקסלי שתואר בסעיף 1.6.2, מצב שבו שתי קבוצות הן גם שקולות זו לזו וגם לא שקולות זו לזו. חזור ועיין בסעיף 1.6.2 בטרם תמשיך בקריאה.

מושגי היסוד שברשותנו הן הקבוצות אותן סיווגנו לשני סוגים, סופיות ואינסופיות. על ההבדל בין אלה לאלה עמדנו בסעיף 1.4.3 (עמוד 10). ברשותנו גם ההגדרה של "שוויון עָצמות" של שתי קבוצות. ההגדרה היא בעלת משמעות הן לגבי קבוצות סופיות והן לגבי קבוצות אינסופיות.

תוך שימוש בהגדרה זו הגענו (בסעיף 1.6.2) למסקנה כי קבוצת הנקודות בקטע הקצר CD שקולה לקבוצת הנקודות בקטע הארוך AB, וכן למסקנה כי קבוצת המספרים הזוגיים שקולה לקבוצת המספרים הטבעיים (סעיף 1.6.2 עמוד 20).

מסקנות אלה נראות כבלתי הגיוניות. נראה שהן עומדות בסתירה לכללים אחרים, שהם פרי הניסיון והאינטואיציה שלנו, כללים שאנו משתמשים בהם לעתים קרובות. ננסה לנסח אותם.

* אם קבוצה B מורכבת **מחלק** מן האיברים של קבוצה A (לא מכולם) אז B ו־A אינן יכולות להיות שקולות. למשל: מספר אזרחי צרפת לא שווה למספר האזרחים של כל מדינות אירופה שכן אזרחי צרפת הם רק חלק מבין אזרחי אירופה (לא כולם).

* אם קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי קבוצה A **לחלק** מאיברי קבוצה B אז לא ייתכן שתהיה גם התאמה חד־חד־ערכית בין איברי A **לכל** איברי B. למשל: אם בתיאטרון כל המושבים תפוסים פרט ל־10 קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין האנשים בקהל לבין חלק מהמושבים. במקרה זה לא ייתכן, על־ידי שינוי מקומות, לסדר את הקהל באופן כזה שלא יישארו מקומות פנויים, בלי להוסיף אנשים ובלי להוציא כיסאות.

אבות תורת הקבוצות, שהיו מודעים לבעיות העלולות להיווצר על־ידי שימוש בכללים אינטואיטיביים, הרשו לעצמם לפקפק בנכונותם של הכללים הללו, ואפילו להסיק מתוך דוגמאות (מסוג אלה שניתנו בסעיף 1.6.2 בעמודים 20־21), כי הכללים הללו, מקובלים ככל שיהיו, אינם נכונים, ולכן גם אי אפשר להוכיחם באופן כללי ביחס לכל הקבוצות.

אי נכונותו של הכלל הראשון נראית בעליל מתוך דוגמא ב בסעיף 1.6.2. המספרים הזוגיים הם רק חלק מן הטבעיים ובכל זאת יש לטבעיים ולזוגיים עָצמות שווה. אי נכונותו של הכלל השני מודגמת בצורה בולטת בדוגמא א מסעיף 1.6.2. באיור 8 מודגמת התאמה חד־חד־ערכית בין הנקודות בקטע CD **לחלק** מן הנקודות בקטע AB, ואילו באיור 9 מודגמת התאמה חד־חד־ערכית בין הנקודות בקטע CD **לכל** הנקודות בקטע AB.

בהגדרת "שוויון עָצמות" נאמר כי שתי קבוצות הן בעלות עָצמה שווה אם **אפשר** להתאים את האיברים שלהן בהתאמה חד־חד־ערכית. לא נאמר בהגדרה שיש לבדוק ולודא שאי אפשר להתאים את האיברים בצורה אחרת. כל שעלינו לעשות, אפוא, הוא להשתחרר מן הנטייה

האינטואיטיבית לחשוב כי כל ההתאמות לזוגות צריכות תמיד לתת אותה תוצאה.

היות ונקודה זו היא קשה, ננסה להבהיר אותה בעזרת דוגמא נוספת. נתבונן בשתי הקבוצות הבאות:

$$F = \{4, 40, 400, 4000, 40000, ...\}$$

$$K = \{1, 11, 111, 1111, 11111, ...\}$$

כעת נציע שלוש התאמות שונות בין איברי F לאיברי K. בכל מקרה נרשום בשורה את איברי F ובשורה מתחתיה את איברי K. לכל איבר של F נתאים את האיבר של K הרשום מתחתיו.

**התאמה א:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| F: | 4 | 40 | 400 | 4000 | 40000 ... |
| K: | 1 | 11 | 111 | 1111 | —— ... |

**כלל ההתאמה:** לכל איבר של F מותאם האיבר של K שהוא בעל אותו מספר ספרות.

**התאמה ב:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| F: | 4 | 40 | 400 | 4000 | 40000 ... |
| K: | אין בן זוג | 1 | 11 | 111 | —— ... |

כלל ההתאמה: לכל איבר x של F מותאם האיבר של K שמספר ספרותיו שווה למספר האפסים שב־x.

**התאמה ג:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| F: | 4 | 40 | —— | 4000 | 40000... |
| K: | 1111 | 1111...11 | 1111...11 | 111...11 | —— ... |
| | 4 פעמים הספרה 1 | 40 פעמים הספרה 1 | 400 פעמים הספרה 1 | 4000 פעמים הספרה 1 | |

כלל ההתאמה: לכל איבר x של F התאמנו את האיבר של K שמספר ספרותיו הוא x.

התאמה א היא התאמה חד־חד־ערכית בין **כל** איברי F **לכל** איברי K.
התאמה ב היא התאמה חד־חד־ערכית בין **חלק** מאיברי F **לכל** איברי K.
התאמה ג היא התאמה חד־חד־ערכית בין **כל** איברי F **לחלק** מאיברי K.

אנא בדוק בקפדנות את ההתאמות וודא שהבינות את כללי ההתאמה.

שאלה 16

השלם בכל אחת משלוש ההתאמות את המקומות החסרים.

תשובה בעמוד 47

שאלה 17

הסק מסקנה בדבר העָצמות של F ו־K. נבהיר: עליך לקבוע אם K ו־F שקולות או אינן שקולות. הסבר כיצד מתיישבת המסקנה עם העובדה שמצאנו שלוש התאמות חד־חד־ערכיות, אחת מ־F ל־K, השניה מחלק של F ל־K, השלישית מ־F לחלק של K.

תשובה בעמוד 47

שאלה 18

בסעיף 1.6.2 (עמוד 20) בדוגמא א תוארו שתי התאמות שונות של הנקודות בקטע CD לנקודות בקטע AB, שהוא ארוך מ־CD.
התאמה אחת היא התאמה חד־חד־ערכית בין **כל** הנקודות בקטע CD **לחלק** מן הנקודות בקטע AB, והאחרת היא התאמה חד־חד־ערכית בין **כל** הנקודות בקטע CD **לכל** הנקודות בקטע AB. האם שתי קבוצות הנקודות שקולות או לא? נמק!

תשובה בעמוד 47

שאלה 19

נתבונן בשתי קבוצות: הראשונה היא N — קבוצת המספרים הטבעיים.
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

לקבוצה השניה נקרא $N_0$. היא מתקבלת על־ידי כך שלקבוצה N נוסיף עוד איבר אחד — את המספר 0.
$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

א. הוכח כי N ו־$N_0$ שקולות.
ב. מצא התאמה חד־חד־ערכית בין כל איברי N לבין כל איברי $N_0$ פרט לאחד מהם.
ג. מצא התאמה חד־חד־ערכית בין כל איברי N, פרט ל־5 מהם, לבין כל איברי $N_0$.
ד. קרא בעיון את המשפט האחרון במובאה ממאמרו של בדטרנד דסל (עמוד 23) ונסה להסביר אותו בעזרת הקבוצות שבשאלה זו.

תשובה בעמוד 47

כל הדוגמאות של קבוצות אינסופיות שהובאו עד כה היו דוגמאות של קבוצות אינסופיות שהן שקולות זו לזו. בכל מקרה הצלחנו למצוא התאמה חד־חד־ערכית בין איברי שתי הקבוצות. לכן, למרות שמצאנו גם התאמות אחרות, מעצם העובדה שהיתה התאמה אחת לפחות שהיא חד־חד־ערכית הסקנו שהקבוצות שקולות. ייתכן שמתוך הדוגמאות הגעת כעת למסקנה כי כל שתי קבוצות אינסופיות הן שקולות זו לזו. ובכן אם עלתה מחשבה זו בדעתך, מחובתנו לציין כי היא אינה נכונה. גדולתו של קנטור היתה לא רק בכך שמצא קריטריון להשוואת קבוצות אינסופיות אלא גם בכך שמצא שלא כל הקבוצות האינסופיות שקולות. יתר על כן, הוא הראה כי **לכל קבוצה אינסופית** A **קיימת קבוצה אינסופית אחרת שאינה שקולה ל־A**. נעיר את תשומת לבך לקושי שבהוכחת טענה זו. כדי להוכיח ששתי קבוצות הן שקולות מספיק שנצביע על התאמה חד־חד־ערכית בין איבריהן. לעומת זאת, כדי להוכיח ששתי קבוצות אינן שקולות, עלינו לודא **שלא תיתכן שום התאמה חד־חד־ערכית ביניהן**. לא די בכך שנצביע על התאמה מסוימת

שאינה "טובה", שכן כפי שראינו ייתכן בהחלט שקיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי שתי קבוצות ויחד עם זאת קיימת גם התאמה אחרת שאינה כזאת.

הוכחת הטענה של קנטור, שצוטטה לעיל, תובא בפרק הסיום של יחידה 2 — **קבוצות ב'**.


ד. הילברט (1862—1943)

נסיים סעיף זה בסיפור שהוא אחד מני רבים, אותם סיפר המתימטיקאי הגרמני הידוע דוד הילברט (David Hilbert 1862–1943) לתלמידיו, בהרצאותיו על קבוצות אינסופיות[1].

נתאר לעצמנו מלון עם מספר סופי של חדרים ונניח שכל החדרים תפוסים. אורח חדש בא ומבקש חדר. "אני מצטער, אומר בעל המלון, אבל כל החדרים תפוסים".
כעת נתאר לעצמנו מלון עם מספר אינסופי של חדרים וגם בו כל החדרים תפוסים. גם למלון זה בא אורח חדש ומבקש חדר, "כמובן", עונה בשמחה בעל המלון והוא מעביר את האדם שהיה בחדר 1 לחדר 2, את האדם שהיה בחדר 2 לחדר 3, את האדם מחדר 3 לחדר 4, וכך הלאה... האורח החדש מקבל את חדר 1 שנשאר פנוי כתוצאה מהזזות אלה.
נתאר לעצמנו כעת מלון אינסופי שכל חדריו תפוסים ומספר אינסופי של אורחים חדשים מופיעים ומבקשים חדרים במלון. "בודאי רבותי, אומר בעל המלון, אנא חכו רגע". והוא מעביר את האדם שבחדר 1 לחדר 2, את זה שבחדר 2 לחדר 4, את זה שבחדר 3 לחדר 6 וכן הלאה. כעת כל החדרים שמספריהם אי־זוגיים נתפנו וכל אינסוף האורחים החדשים יכולים לקבל חדרים בנקל.

## 1.6.5 אפיון קבוצות אינסופיות

בסעיף 1.4.3 (עמוד 10) חילקנו את הקבוצות לשני סוגים, לקבוצות סופיות ולקבוצות אינסופיות. הדגשנו כי לא ניתן למצות את ההבדל ביניהן בכך שהקבוצות הסופיות הן כאלה שאפשר לערוך רשימה הכוללת את כל איבריהן, ואילו הקבוצות האינסופיות הן כאלה שעבורן לא ניתן לערוך רשימה כזאת. הבטחנו לאפיין את ההבדל בין שני סוגי הקבוצות בצורה מדויקת, וכך נעשה בסעיף זה.
בסעיף 1.6.4 (עמוד 24) ניסחנו שני כללים אינטואיטיביים ביחס לשקילות של קבוצות. הכלל הראשון היה הכלל הבא:

אם קבוצה A מורכבת מחלק מן (לא מכל) האיברים של קבוצה B, אז A ו־B אינן יכולות להיות שקולות.

ראינו גם כי כלל זה אינו נכון.

שאלה 20

א. הבא דוגמא לזוג של קבוצות, אשר אחת מהן היא חלק מן השניה ובכל זאת הקבוצות הן שקולות.

ב. הבא דוגמא לקבוצה A **שאינה** שקולה לאף קבוצה שהיא חלק ממנה.

ג. נסה לנמק כיצד ייתכן שהכלל שהוזכר לעיל, למרות שאינו נכון, היה מקובל כנכון, מדוע לא פקפק איש באמיתותו עד סוף המאה ה־19.

תשובה בעמוד 48

---

1 מתוך הספר: George Gamow *"One Two Three... Infinity"* Bantam Books, 1967.

נחלק כעת את כל הקבוצות האפשריות לשני סוגים. כאלה שעבורן הכלל נכון (כאלה שאינן שקולות לאף קבוצה המורכבת רק מחלק מאיבריהן), לעומת כאלה שעבורן הכלל אינו נכון. היות ומסתבר שנכונותו של הכלל ביחס לקבוצה מסוימת קשורה בשאלה אם הקבוצה סופית או אינסופית, נוכל להשתמש בכלל לצורך הגדרה חדשה של תכונת הסופיות או האינסופיות של קבוצה.

הגדרת קבוצות סופיות ואינסופיות.

קבוצה A היא אינסופית – אם יש קבוצה המורכבת מחלק מאיברי A, שהיא שקולה ל־A.

קבוצה B היא סופיתאם היא אינה אינסופית או, במלים אחרות, אם היא אינה שקולה לשום קבוצה המורכבת מחלק מאיבריה (אך לא מכולם).

**סיכום פרק 1.6**

* **שתי קבוצות הן שקולות אם קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איבריהן.**
* **ייתכן מצב שבו קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי קבוצה אחת לאיברי קבוצה אחרת וגם קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי הקבוצה האחת לחלק מאיברי הקבוצה האחרת. כלומר, ייתכן שקבוצה A תהיה שקולה גם ל־B וגם לקבוצה שהיא רק חלק מ־B.**
* **ייתכן שתהיה קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין כל האיברים של קבוצה נתונה לחלק מן האיברים של אותה קבוצה. כלומר, ייתכן שקבוצה תהיה שקולה לחלק מעצמה.**
* **הקבוצות, שיש להן חלק שהן שקולות לו, הן הקבוצות האינסופיות.**
* **הקבוצות שאינן שקולות לשום חלק שלהן הן הקבוצות הסופיות.**