פתרון לממ"ן 16- 2007ב

אלגברה לינארית 1 - 20109

שאלה 1

א. מכיוון ש- A משולשית, הערכים העצמיים של A הם איברי האלכסון שלה, 1 ו- c, והפולינום האופייני שלה הוא $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - c)$. פולינום זה מתפרק לגורמים לינאריים ולכן, ע"פ משפט VI.21, המטריצה לכסינה אם ורק אם הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוב הגיאומטרי שלו.

- אם $c \neq 1$, יש שני ערכים עצמיים שונים 1 ו- c. הריבוב האלגברי של 1 שווה ל-2, נחשב את הריבוב הגיאומטרי: ריבוב זה שווה למימדו של המרחב העצמי שלו, V_1, ו- $\dim V_1 = 3 - \rho(I - A)$ כי V_1 הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $(I - A)x = 0$. נבדוק מהו $\rho(I - A)$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{1-c}R_3} \begin{pmatrix} 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן שני מקרים:

- אם $a \neq 0$, $\dim V_1 = 1$ והמטריצה לא לכסינה כי הריבוב הגיאומטרי שונה מהריבוב האלגברי ששווה ל-2.
- אם $a = 0$, $\dim V_1 = 2$ ולכן הריבוב הגיאומטרי שווה לריבוב האלגברי. נתבונן בערך העצמי השני c: הריבוב הגיאומטרי הוא גם 1 כי הוא גדול או שווה ל-1 (כי c ערך עצמי) אבל ידוע שהוא קטן או שווה לריבוב האלגברי (משפט VII.20) ששווה ל-1.

  מכך נובע ש- A **לכסינה** כאשר $a = 0$ ו- $c \neq 1$.

- אם $c = 1$, יש ערך עצמי יחיד והוא 1, עם ריבוב אלגברי ששווה ל-3. נובע מכך שאילו A הייתה לכסינה, היא הייתה דומה למטריצת היחידה. אך מטריצת היחידה דומה לעצמה בלבד. לכן A אינה לכסינה.

<u>לסיכום</u>: המטריצה A לכסינה אם ורק אם $c \neq 1$ ו- $a = 0$.

ב. נניח ש- $c \neq 1$ ו- $a = 0$. אז $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. על מנת למצוא את P, יש לחשב את המרחבים העצמיים של A. ניתן למצוא מיד את המרחב העצמי עבור הערך העצמי 1 על-ידי הסתכלות על A (רואים מיד ששתי העמודות הראשונות שייכות למרחב העצמי V_1 עבור הערך העצמי 1) , או על ידי חישוב: V_1 הוא מרחב הפתרונות של המערכת $(I - A)x = 0$ ומהחשבון מתקבל $V_1 = Sp\{(1,0,0),(0,1,0)\}$. באופן דומה, המרחב העצמי V_c של הערך

העצמי c, הוא מרחב הפתרונות של המערכת $(cI-A)x=0$, ולכן $V_c=Sp\{(1,b,c-1)\}$.

מכך נובע כי A דומה למטריצה האלכסונית $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ ומתקיים $D=P^{-1}AP$,

כאשר $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&b\\0&0&c-1\end{pmatrix}$.

שאלה 2

א. תהי $A\in\mathbf{M}_{2\times2}^{\mathbf{R}}$. אז $A\in\ker T$ אם ורק אם $A=A^t$, לכן $\ker T$ הוא תת- המרחב של המטריצות הסימטריות של $\mathbf{M}_{2\times2}^{\mathbf{R}}$, זאת אומרת:

$$\ker T=\left\{\begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbf{R}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

קבוצה פורשת זו גם בלתי תלויה לינארית (בדוק את האי-תלות), ולכן היא מהווה בסיס ל- $\ker T$.

מכיוון ש- $\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T=\dim M_{2\times2}^{R}=4$, נסיק כי $\dim\operatorname{Im}T=1$ ולכן כל מטריצה שונה מאפס בתמונה מהווה בסיס.

למשל: $T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, ולכן $\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל- $\operatorname{Im}T$.

ב. נבנה את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}^{R}$:

$$T(E_1)=T(E_4)=0,\quad T(E_2)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad T(E_3)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

לפיכך: $[T]_E=A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda-1&1&0\\0&1&\lambda-1&0\\0&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2((\lambda-1)^2-1)=$$
$$=\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+1-1)=\lambda^3(\lambda-2)$$

לפיכך ל- T שני ערכים עצמיים:

0 – בעל ריבוב אלגברי 3. בחלק א' ראינו כי יש ל- 0 ריבוב גיאומטרי 3, שהרי המרחב העצמי השייך ל- 0 הוא בדיוק הגרעין.

2 – בעל ריבוב אלגברי 1, ולכן גם ריבוב גיאומטרי 1 (ראו שיקולים בשאלה 1).

כלומר הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים, וכל הריבובים האלגבריים

שווים לריבובים הגיאומטריים המתאימים, ולכן T לכסינה.

ג. בסעיף קודם מצאנו כי המרחב העצמי המתאים לערך העצמי 0 , שהוא הגרעין של T. הוא המרחב העצמי היחיד ממימד גדול מ- 1.

שאלה 3

א. סקלר λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם הוא שורש של הפולינום האופייני של A, כלומר אם ורק אם $\det(\lambda I - A) = 0$, מה ששקול ל- $\det(A - \lambda I) = 0$ (כי $\det(A - \lambda I) = (-1)^3 \det(\lambda I - A)$. לכן מהנתון $\det(A - I) = 0$ נובע ש-1 הוא ערך עצמי של A. מהנתון $\rho(A + 3I) = 2$, מתקבל שהמטריצה $A + 3I$ סינגולרית, לכן הדטרמיננטה שלה היא 0 והמספר 3- הוא ערך עצמי של A ומהנתון ש-A סינגולרית, יוצא כי 0 הוא ערך עצמי של A. לכן יש למטריצה הנתונה 3 ערכים עצמיים: 0,1, 3-. מכיוון שהפולינום האופייני $p(x)$ הוא ממעלה 3, אלה כל הערכים העצמיים ומכך ש-$p(x)$ הוא מתוקן, מתקבל ש- $p_A(x) = x(x-1)(x+3) = x^3 + 2x^2 - 3x$.

ב. המטריצה $A - 3I$ סינגולרית אם ורק אם 3 הוא ערך עצמי שלה. לכן היא לא סינגולרית, כלומר היא הפיכה.

ג. מכיוון ש- A סינגולרית, הדטרמיננטה של A שווה ל-0 ו ע״פ שאלה 26 , העקבה של A שווה לנגדי של המקדם של x^2 בפולינום $p_A(x)$, כלומר ל- (2 -).

שאלה 4

א. נניח שהווקטור $u + v$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי η, אז $A(u + v) = \eta(u + v)$,
מצד שני, מתקיים $A(u + v) = Au + Av = \lambda u + \mu v$.
לכן $(\lambda - \eta)u + (\mu - \eta)v = 0$. אם $\lambda \neq \mu$, ע״פ משפט VII.5, הוקטורים v,u בלתי תלויים לינארית , לכן $\lambda - \eta = \mu - \eta = 0$, כלומר $\lambda = \mu = \eta$ וזו סתירה להנחה $\lambda \neq \mu$.
נסיק מכך שההנחה שגויה ומתקיים $\lambda = \mu$.

ב. <u>**הערה**</u>: אם המטריצה של העתקה לינארית ביחס לבסיס כלשהו אלכסונית, אז וקטורי הבסיס הם וקטורים עצמיים של ההעתקה. לכן נובע מהנחות השאלה ש**כל וקטור v , שונה מאפס, הוא וקטור עצמי של T** , כי ניתן להשלים את הקבוצה הבת״ל $\{v\}$ לבסיס B' של V ואז $[T]_{B'}$ היא אלכסונית.

יהי $B = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$. נסמן $c_1, c_2, \ldots, c_n$ את איברי האלכסון של המטריצה האלכסונית $[T]_B$. לכל $i \neq j$, הוקטורים v_i, v_j הם וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים c_i, c_j בהתאמה. ע״פ ההערה בתחילת התשובה, הווקטור $v_i + v_j$ הוא וקטור עצמי (הוא שונה מ-0 כי v_i, v_j בת״ל) ולכן ע״פ סעיף א׳, נסיק כי לכל $i \neq j$ $c_i = c_j$. הוכחנו שכל איברי

האלכסון של $[T]_B$ שווים. נסמן c את הערך המשותף הזה. מכאן קל להסיק ש- $T(v) = cv$ לכל $v \in V$.(השלם את הפרטים)

שאלה 5

א. אם 0 הוא ערך עצמי של ST, אז ST אינה איזומורפיזם (שאלה 5 בכרך השביעי).
יהי B בסיס של V. אזי $A = [ST]_B$ אינה הפיכה. אולם $[ST]_B = [S]_B[T]_B$, ולכן אחת מבין $[S]_B, [T]_B$ אינה הפיכה (זה נובע , למשל, משיקולי דטרמיננטות). לפיכך גם המטריצה $[TS]_B = [T]_B[S]_B$ אינה הפיכה, ולכן TS אינה איזומורפיזם, ושוב משאלה 5 נסיק כי 0 ערך עצמי של TS.

ב. נניח ש- $\lambda \neq 0$. מכיוון ש- λ ערך עצמי של ST, מתקיים $STv = \lambda v$ עבור וקטור $v \in V$, $v \neq 0$. לאחר הפעלת T, מתקבל $TS(Tv) = T(STv) = T(\lambda v) = \lambda Tv$, ולפיכך אם נראה ש- $Tv \neq 0$, נסיק כי הוא וקטור עצמי של TS השייך ל- λ. לו היה $Tv = 0$, אז $0 = STv = \lambda v$ ואז $\lambda = 0$ או $v = 0$, בסתירה לנתון לכן $Tv \neq 0$, כנדרש.

ג. הראינו בחלק א׳ כי אם 0 ערך עצמי של ST אז הוא גם ערך עצמי של TS, ובחלק ב׳ ראינו כי אם $\lambda \neq 0$ ערך עצמי של ST אז הוא גם ערך עצמי של TS, לפיכך הערכים העצמיים של ST הם גם ערכים עצמיים של TS. נחליף את תפקידי S ו-T, ונקבל כי הערכים העצמיים של TS הם גם ערכים עצמיים של ST, ולפיכך ל- TS ול- ST אותם ערכים עצמיים.