23-01-05

המכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה
המחלקה להנדסת תעשיה וניהול

מתמטיקה דיסקרטית
בוחן סופי

יש לפתור את כל השאלות
משך הבחינה – 3 שעות.
חומר עזר מותר : מחשב כיס.

נוסחאות וסימונים:

$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$ - חליפות ללא החזרות

$C(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ - צירופים ללא החזרות

n^k - חליפות עם החזרות

$D(n,k)=C(n-1+k,n-1)=\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$ - צירופים עם החזרות

הבינום - $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$, הטרינום - $(a+b+c)^n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}a^ib^jc^{n-i-j}$

הכלה והפרדה: $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i=|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=S_1-S_2+\ldots+(-1)^{n-1}S_n$, כאשר S_i מוגדר כסכום מספרי האיברים בכל חיתוכי i קבוצות מתוך ה-n.

לדוגמא אם $n=4$ $S_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_4|$.

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_n|=|U|-S_1+S_2-S_3+\ldots+(-1)^nS_n=|U|-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i$$

רלציה מעל A:

1. רפלקסיביות – אם לכל איבר $a\in A$ מתקיים $(a,a)\in R$.
2. סימטרית - אם לכל $(a,b)\in R$ גם $(b,a)\in R$.
3. אנטיסימטרית - אם לכל $(a,b)\in R, a\neq b$ מתקיים $(b,a)\notin R$.
4. טרנזיטיבית - אם לכל $(a,b)\in R,(b,c)\in R$ מתקיים $(a,c)\in R$.
5. שקילות – מקיימת תכונות 1,2,4.
   א. קבוצת המנה – קבוצת מחלקות השקילות
   ב. אינדקס – מספר מחלקות השקילות.
6. סדר חלקי – אם תכונות 1,3,4 מתקיימות.

א. a איבר מינימלי אם לא קיים b שעבורו $(b,a)\in R$
ב. a איבר קטן ביותר אם לכל b $(a,b)\in R$
ג. a איבר מקסימלי אם לא קיים b שעבורו $(a,b)\in R$
ד. a איבר גדול ביותר אם לכל b $(b,a)\in R$

שאלה מס' 1 (10 נקודות).

מצא ביטוי מפורש ל- $\sum_{i=0}^{20}\binom{60}{i}\binom{33}{20-i}$

שאלה מס' 2 (10 נקודות).

חשב $\sum_{i=1}^{238}i\binom{238}{i}10^{238-i}$

שאלה מס' 3 (10 נקודות).

מצא את האיבר החופשי בפיתוח $\left(x^4+\frac{1}{x}+2\right)^9$

שאלה מס' 4 (10 נקודות).

מעוניינים להושיב 3 זוגות נשואים ב-3 ספסלים זוגיים המוצבים בטור. מה מספר האפשרויות להושיבם כך שאף זוג נשוי לא ישב ביחד.

שאלה מס' 5 (10 נקודות).

כמה מספרים בין 1 ל- 387 לא מתחלקים ב- 4, וגם לא ב- 5.

שאלה מס' 6 (10 נקודות).

מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=25$

המקיימים: $0\le x_1,\ 3\le x_2\le 15,\ 0\le x_3\le 12,\ 8\le x_4$.

שאלה מס' 7 (10 נקודות).

נתונה הרלציה הבאה המוגדרת מעל $A=\{1,2,3,4,5\}$:

$R=\{(4,5),(2,4),(4,4),(2,3),(5,3),(1,2),(2,1),(5,4)\}$.

ענה בנכון לא נכון (בלי נימוק):

א. R רפלקסיבית.

ב. R סימטרית.

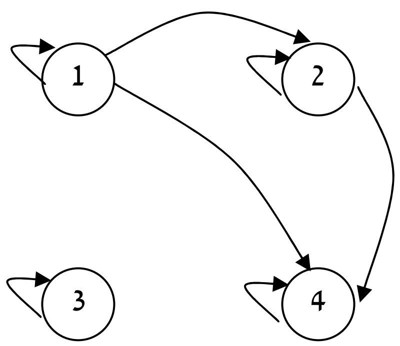
ג. R טרנזיטיבית.

ד. $R\cup I$ סימטרית.

ה. $R\cup I$ טרנזיטיבית.

שאלה מס' 8 (10 נקודות).

נתון הדיגרף הבא המתאר רלציה R מעל $A=\{1,2,3,4\}$:



האם זהו יחס סדר חלקי? מלא? האם יש איבר מינימלי? קטן ביותר? מקסימלי? גדול ביותר? בכל מקום בו התשובה חיובית הראה זאת, ואם התשובה שלילית, הסבר מדוע?

שאלה מס' 9 (10 נקודות).

נתונה הרלצייה הבאה המוגדרת מעל הקבוצה $A=\{0,2,3,4,12,16\}$: xRy אם ורק אם x מחלק את y ללא שארית. בדוק אם זו רלציית שקילות או סדר חלקי או סדר מלא או לא אף אחת מאלו. לרלציית שקילות מצא את קבוצת המנה (פקטור) ואת האינדקס. לרלציית סדר (חלקי או מלא) בנה את דיאגרמת הסה ומצא את האיברים המקסימליים, המינימליים וגם הקטנים והגדולים ביותר.

שאלה מס' 10 (10 נקודות).

תהי $A=\{1,2,3\}$. נתונה הרלציה הבאה מעל $A\times A$: $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a+b=c+d$.

האם זו רלצית שקילות? אם כן הוכח, ומצא את קבוצת המנה (פקטור) והאינדקס.

פתרון:

1. כידוע זוהי דרך אחרת למצוא את המקדם של x^{20} בפיתוח של $(x+1)^{93}$, והמקדם הוא $\binom{93}{20}$

.2

$$(10+x)^{238}=\sum_{i=0}^{238}\binom{238}{i}10^{238-i}x^i$$

$$\left[(10+x)^{238}\right]'=238(10+x)^{238-1}=\left[\sum_{i=0}^{238}\binom{238}{i}10^{238-i}x^i\right]'=\sum_{i=1}^{238}i\binom{238}{i}10^{238-i}x^{i-1}$$

ונקבל בצד ימין בדיוק את הביטוי שבשאלה עבור $x=1$, לכן הביטוי שבצד ימין שווה ל-

$$238(10+1)^{238-1}=238\cdot 11^{237}$$

3. האפשרויות ליצור איבר חופשי ב- $\left(x^4+\frac{1}{x}+2\right)^9$, הן

א. כאשר החזקה של האיבר הראשון 1, של השני 4, ושל השלישי 4.

ב. כאשר החזקה של האיבר הראשון 0, של השני 0, ושל השלישי 9.

בסה"כ האיבר החופשי יהיה: $\binom{9}{1}\binom{8}{4}2^4+\binom{9}{0}\binom{9}{0}2^9$

4. נגדיר 3 קבוצות:

A_i - כל ההושבות בהן זוג i יושב ביחד. אנו מחפשים את $\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|$

$|A_i|=\binom{3}{1}2!4!$ - כי הזוג ה-i יושב ביחד, ויש לבחור את אחד משלוש הספסלים הזוגיים בו ישב, ולסדרו בתוך הספסל, ולאחר מכן לסדר את שאר 4 האנשים ב-4 המקומות שנותרו.

$|A_i\cap A_j|=\binom{3}{1}\binom{2}{1}2!2!2!$ - כי הזוג ה-i וה-j יושבים ביחד, ויש לבחור את אחד משלוש הספסלים הזוגיים בו ישב הזוג ה-i, ולאחר מכן אחד משני הספסלים שנותרו בו ישב הזוג ה-j, ולסדר כל זוג בתוך הספסל, ולאחר מכן לסדר את הזוג השלישי ב-2 המקומות שנותרו.

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3!2!2!2!$ - כל בני-זוג יושבים ביחד, ויש לשבצם ב-3 הספסלים, ולאחר מכן לסדר כל זוג בתוך הספסל בו הוא ממוקם.

$$\left|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\right|=|U|-S_1+S_2-S_3=6!-\binom{3}{1}\binom{3}{1}2!4!+\binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}2!2!2!-\binom{3}{3}3!2!2!2!=384$$

5. נגדיר 2 קבוצות:

A_4 - כל המספרים בין 1 ל-387 המתחלקים ב-4.

A_4 - כל המספרים בין 1 ל-387 המתחלקים ב-5.

אנו מחפשים את $\left|\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\right|$

$$|A_4|=\lfloor 387/4\rfloor=96$$
$$|A_5|=\lfloor 387/5\rfloor=77$$

$|A_4\cap A_5|=\lfloor 387/20\rfloor=19$, לכן

$$\left|\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\right|=|\Omega|-\left[|A_4|+|A_4|-|A_4\cap A_5|\right]=$$
$$=387-[96+77-19]=233$$

6. מספר הפתרונות של הבעיה הנ״ל שווה למספר הפתרונות של הבעיה הבאה (לאחר הטיפול בחסמים התחתונים השונים מ-0): $x_1+x_2+x_3+x_4=14 \quad 0\le x_1,\ 0\le x_2\le 12,\ 0\le x_3\le 12,\ 0\le x_4$

A_2 - קבוצת הפתרונות בהם $13\le x_2$.

A_3 - קבוצת הפתרונות בהם $13\le x_3$.

$|A_2|=|A_3|=D(4,1) \qquad |A_2\cap A_3|=0$

לכן $\left|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|=|\Omega|-\left[|A_2|+|A_3|-|A_2\cap A_3|\right]=D(4,14)-2D(4,1)+0$

7. א. לא נכון $(1,1)\notin R$

ב. לא נכון $(3,2)\notin R \quad (2,3)\in R$

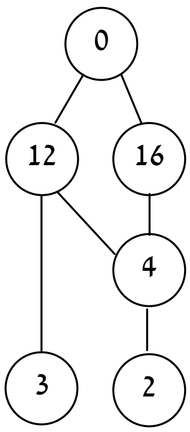
ג. לא נכון $(2,5)\notin R \quad (2,4),(4,5)\in R$

ד. לא נכון $(3,2)\notin R\cup I \quad (2,3)\in R\cup I$

ה. לא נכון $(2,5)\notin R\cup I \quad (2,4),(4,5)\in R\cup I$

8. זהו יחס סדר חלקי- לא מלא (יש להראות זאת), אין בו איבר קטן ביותר או גדול ביותר, יש 2 איברים מינימליים $\{1,4\}$, ושני איברים מקסימליים $\{1,3\}$.

9. $A=\{0,2,3,4,12,16\}$ - ברור שזו אינה שקילות כי אינה סימטרית $(4,2)\notin R \quad (2,4)\in R$. מצד שני, הרלציה רפלקסיבית (כי כל מספר מחלק את עצמו), וטרנזיטיבית (הראנו בעבר). הרלציה מקיימת גם אנטיסימטריות כי אם מספר מחלק מספר אחר, אז הוא קטן ממנו, לכן החלוקה בכיוון ההפוך לא תהיה שלמה. לכן זהו יחס סדר. זהו סדר חלקי כי אין רלציה בין כל זוג איברים (למשל 3,4). דיאגרמת הסה:



0 הוא איבר גדול ביותר (כי כולם מחלקים אותו ללא שארית),
ו-0 לא מחלק אף איבר ללא שארית (למעשה החלוקה כלל
לא מוגדרת) לכן גם מקסימלי.
2,3 איברים מינימליים, לכן אין איבר קטן ביותר
(כי יש שני מינימליים)

10. זו רלציית שקילות –

1. רפלקסיביות - $(a,b)R(a,b)\Leftrightarrow a+b=a+b$

2. סימטריות - $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a+b=c+d\Leftrightarrow c+d=a+b\Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$

3. טרנזיטיביות - $(a,b)R(c,d),(c,d)R(e,f)\Leftrightarrow a+b=c+d,\quad c+d=e+f\Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$

קבוצת המנה (כל מחלקה מורכבת מקבוצת איברים (זוגות) שסכומם זהה): $\{(1,1),(1,2)(2,2)(2,3)(3,3)\}$, והאינדקס הוא 5.