גירסה 1.00 – 11.3.2002

מתמטיקה דיסקרטית (בדידה)
חלק שלישי

מסמך זה הוא השלישי בסדרת מסמכים הבאים להציג לקורא את עקרונות הקומבינטוריקה ותורת הקבוצות, כפי שהם מתוארים בקורס "מתמטיקה דיסקרטית".
מסמך זה ממשיך מהנקודה בה הסתיים המסמך השני.
במסמך זה נתחיל לדון בתורת הקבוצות.

ידע קודם הנדרש להבנת המסמך הוא לפחות מתמטיקה בהיקף של בגרות 5 יחידות, וכן הבנה של קומבינטוריקה כפי שהוצגה במסמכים הקודמים בסדרה זו.
אנא שלחו הערות, תיקונים והצעות אל המחבר.

מסמך זה הורד מהאתר http://underwar.livedns.co.il.
אין להפיץ מסמך זה במדיה כלשהי, ללא אישור מפורש מאת המחבר.
מחבר המסמך איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע המופיע במסמך, וכן לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים במסמך. עם זאת, המחבר עשה את מירב המאמצים כדי לספק את המידע המדויק והמלא ביותר.

כל הזכויות שמורות ל**ניר אדר**

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

תורת הקבוצות

מושגי יסוד בתורת הקבוצות

קבוצה: אוסף של אלמנטים הנקראים איברי הקבוצה.
דוגמא:

A = { 1, 2, 5 }
B = { 0.5, a, אבג }

- קבוצות מסומנות בד"כ באותיות לטיניות גדולות.
- אין חשיבות לסדר בין האלמנטים בקבוצה.
- אין חזרות, כל אלמנט מופיע לכל היותר פעם אחת.
- האלמנטים של קבוצה לא חייבים להיות מאותו סוג.
- אלמנטים של קבוצות יכולים להיות קבוצות בעצמם.
- קבוצה מוגדרת באופן חד ערכי על ידי האלמנטים. על מנת להגדיר קבוצה יש להגדיר במפורש אילו אלמנטים נמצאים בקבוצה.

כיצד ניתן להגדיר קבוצה?

- למנות בין סוגריים מסולסלות את איברי הקבוצה. לפעמים זה לא מעשי, לדוגמא קבוצת המספרים בין 0 ל100000, ולפעמים זה גם לא אפשרי, למשל, קבוצת המספרים השלמים.
- ניתן לפרט את איברי הקבוצה תוך כדי שימוש ב"...".
  דוגמא: $\{1, 2, ..., 100\}$
- הגדרת הקבוצה על ידי תכונה (פרדיקט) שמאפיינת את כל איברי הקבוצה ורק אותם.
  דוגמא: $A = \{X \mid 3 \le X \le 10^6 \text{ and also X is integer}\}$.

הקבוצה הריקה

קבוצה ריקה היא קבוצה שלא מכילה אלמנטים (מספר איבריה הוא 0).
סימונים לקבוצה ריקה: $\phi, \{\}$.
הערה חשובה: הקבוצה ϕ והקבוצה $\{\phi\}$ לא שוות. ϕ שקית ריקה, $\{\phi\}$ שקית בתוך שקית.

גודל של קבוצה

קבוצה היא סופית אם קיים מספר טבעי n כך שמספר איבריה היא n.
קבוצה היא אינסופית אחרת, כלומר כאשר לא קיים n כזה.
נשים לב לקבוצה הבאה: { { 0, 1, 2, ... } }. קבוצה זו בעלת איבר אחד! (קבוצה אחרת).
עבור קבוצה סופית A, נסמן ב|A| את מספר איבריה = הגודל שלה.

$$|\phi| = 0$$

$$|\{\phi\}| = 0$$

$$|\{X \mid 5 \le X \le 20 \text{ and also X is integer}\}| = 16$$

$$|\{1,3,\{1,3\}\}| = 3|$$

גרירה לוגית ואמ"מ

תהיינה α ו β טענות.

- כשמסמנים $\alpha \Rightarrow \beta$ ואומרים " α גורר את β " הכוונה שאם α מתקיימת אזי גם β חייבת להתקיים.
- כשמסמנים $\alpha \Leftrightarrow \beta$ ואומרים " α אמ"מ β " הכוונה היא $\alpha \Rightarrow \beta$ וגם $\beta \Rightarrow \alpha$. שתי הטענות או מתקיימות או לא מתקיימות ביחד.

שייכות

אם a איבר בקבוצה A, מסמנים $a \in A$ ואומרים "a שייך לA".
אם a אינו איבר בA מסמנים $a \notin A$ ואומרים "a לא שייך לA".

דוגמא

$A = \{1,\{3\},\{2,5\},\{1,\{3\}\}\}$

$3 \notin A$

$\{3\} \in A$

$\{2\} \notin A$

$\{1,\{3\}\} \in A$

$\phi \notin A$

$A = \{1,\{\},3,\{4,5\}\}$

$\phi \in A$

שוויון קבוצות

2 קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק אותן איברים.
לכל x, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

תתי קבוצות

תהיינה A וB קבוצות. A נקראת תת קבוצה של B אמ"מ כל איבר בA הוא גם איבר בB, כלומר,
$x \in A \Rightarrow x \in B$.
סימון: $A \subseteq B$.
A מוכלת בB, A היא קבוצה חלקית לB.

מתקיים

לכל קבוצה A, $A \subseteq A$
לכל קבוצה A, $\phi \subseteq A$
אם בA קיים לפחות איבר אחד שאינו שייך לB אז A לא מוכלת בB ומסמנים $A \not\subset B$.

טענה

לכל 2 קבוצות A וB מתקיים: A=B אמ"מ $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

הוכחה

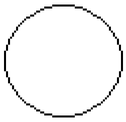
כיוון 1: נתון A=B. צ"ל: $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.
⇐A=B עפ"י ההגדרה: $x \in B \leftarrow x \in A \Leftarrow x \in B \Leftrightarrow x \in A$ וגם $x \in B \rightarrow x \in A$ (הגדרת הכלה)
ומכאן: $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.
כיוון 2: נתון $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$. צ"ל A=B. אותה הוכחה בדיוק בכיוון ההפוך.

הכלה ממש

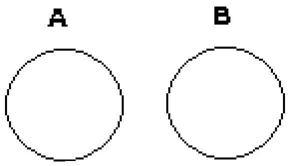
A מוכלת ממש בB אמ"מ $A \subseteq B$ אבל $A \neq B$. A תת קבוצה אמיתית של B.
סימון: $A \subset B$

דיאגרמת ון

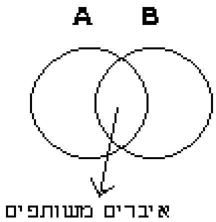
מסמנים קבוצה על ידי תחום סגור במישור:



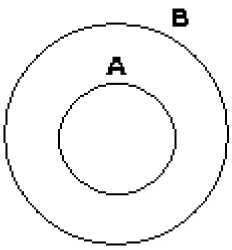
שתי קבוצות ללא איברים משותפים:



שתי קבוצות עם איברים משותפים:



$A \subseteq B$:



פעולות על קבוצות

איחוד שתי קבוצות A וB הוא הקבוצה הבאה:

$A \bigcup B = \{X \mid x \in B \text{ or } x \in A\}$

משמעות המילה "or" בהגדרה הוא $x \in A$ או $x \in B$ או שניהם.

חיתוך שתי קבוצות A וB הוא הקבוצה הבאה:

$A \bigcap B = \{X \mid x \in B \text{ and } x \in A\}$

קבוצות ללא איברים משותפים נקראות קבוצות זרות.
תכונות החיתוך:

$A \bigcap A = A$

$A \bigcap \phi = \phi$

$A \bigcap B \subseteq A$

$A \bigcap B = B \bigcap A$

$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$

כפי שנראה, פעולת החיתוך היא קומוטטיבית ואסוציטיבית.

<u>זרות הדדית</u>

בהינתן אוסף של קבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$ נאמר שהקבוצות זרות הדדית אם לכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \bigcap A_j = \phi$.
אין אלמנט הנמצא ביותר מקבוצה אחת.
לדוגמא: לכל מספר טבעי i נגדיר

$A_i = \{2i, 2i+1\}$

and then :

$A_0 = \{0,1\}$

$A_1 = \{2,3\}$

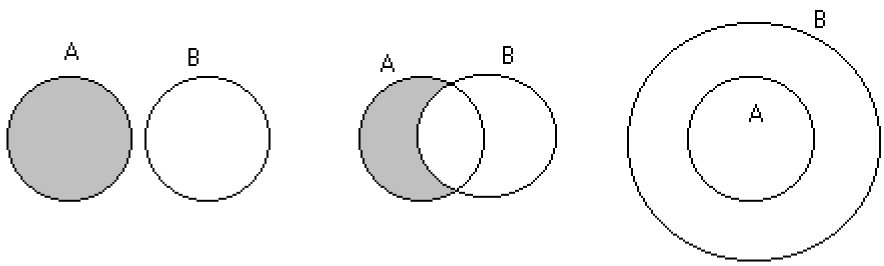
כל הקבוצות הנ"ל זרות הדדית.

<u>הפרש</u>

תהיינה A וB קבוצות. ההפרש בין A לB הוא הקבוצה המוגדרת באופן הבא:
סימונים:

A-B A\B

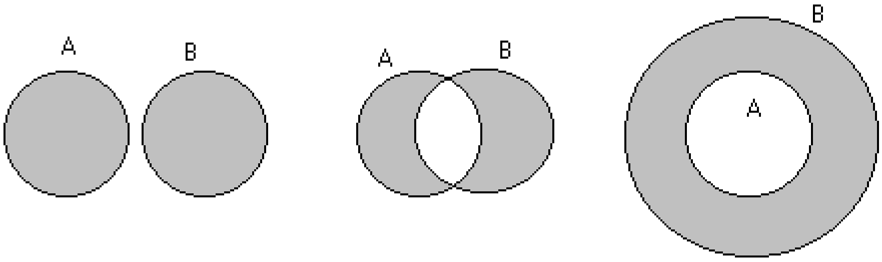
$A \setminus B = \{X \mid x \in A \text{ and } x \notin b\}$



פעולת ההפרש היא איננה אסוציטיבית.

<u>הפרש סימטרי</u>

תהינה A ו-B קבוצות. ההפרש הסימטרי של A ו-B היא הקבוצה
$A \oplus B = \{x \in A \text{ or } x \in B \text{ but not to A and B} \}$



$A \oplus B = \mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} - \mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} \}$

<u>משלים</u>

נניח כי כל אבריי הקבוצות עליהן מדובר הן תתי קבוצות של קבוצה אוניברסלית u.
המשלים של A ביחס לקבוצה האוניברסלית u הוא הקבוצה u-A.
סימון למשלים: A^c או $\overline{A}$

<u>דוגמא</u>

U=N
A={n | n זוגי }
A^c={n | n אי-זוגי }

<u>תכונות פעולת המשלים</u>

$X \notin A \Leftrightarrow X \in A^c$

$A^C \cup A = U$

$(A^c)^c = A$

$A \bigcap A^c = \phi$

קשר בין הפרש למשלים

$A - B = A \cap B^c$

הוכחה באמצעות טבלת שייכות:

	A	B	A-B	B^C	$A \cap B^c$
$x \in A, x \in B$	T	T	F	F	F
$x \in A, x \notin B$	T	F	T	T	T
$x \notin A, x \in B$	F	T	F	F	F
$x \notin A, x \notin B$	F	F	F	T	F

- מקדישים עמודה עבור כל תת ביטוי הנמצא בזהות.
- מקדישים שורה עבור כל מקרי השייכות של האיבר לקבוצות הבסיסיות.
- ממלאים את הטבלה ע"פ הגדרת איחוד, חיתוך, משלים.
- משווים בין העמודות המתאימות לשני צדי הזהות. אם העמודות זהות, הזהות נכונה.

חוקי דה מורגן

1) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^c$

2) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^c$

נוכיח את חוק 1 על ידי הכלה דו כיוונית.

צ"ל:

א. $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^c$

ב. $(A \cap B)^C \supseteq A^C \cup B^c$

א.

$x \in (A \cap B)^c \Rightarrow$ הגדרת המשלים $\Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow$ הגדרת

$\Rightarrow x \notin A$ or $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ or $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$ חיתוך

חוקי דיסטריבוטיביות

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

חוקי ספיגה

1) $A \cup (A \cap B) = A$

2) $\mathrm{A} \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{A}$

קבוצת החזקה

תהא A קבוצה. קבוצת החזקה של A המסומנת על ידי P(A) או על ידי 2^A היא הקבוצה:

$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

כלומר P(A) מכילה (כאיברים) את כל תתי הקבוצות של A.

דוגמא

A={1,2}
P(A)={″,{1},{2},{1,2}}

מה גודלה של P(A) עבור קבוצה סופית A? $2^{|A|}$.

טענה

לכל 2 קבוצות A וB מתקיים:

$$P(A\bigcap B)=P(A)\bigcap P(B)$$

הוכחה:

נראה הכלה דו כיוונית:

א. $P(A\bigcap B)\subseteq P(A)\bigcap P(B)$
ב. $P(A\bigcap B)\supseteq P(A)\bigcap P(B)$

א.

$C\in P(A\bigcap B)\Rightarrow C\subseteq A\bigcap B\Rightarrow C\subseteq A$ and $C\subseteq B\Rightarrow$ הגדרת

$\Rightarrow C\in P(A)\bigcap P(B)$ הגדרת חיתוך $\Rightarrow C\in P(A)$ and $C\in P(B)\Rightarrow$ חזקה

ב. מתקבל מא' על ידי היפוך כיוון.

זוג סדור

2 איברים שהאחד נקבע כראשון והאחר כשני. יש חשיבות לסדר האיברים בזוג.

- יתכן שבזוג סדור האיברים זהים (a,a).
- באופן דומה ניתן להגדיר n-יה סדורה. $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$.

מכפלה קרטזית

תהיינה A וB קבוצות. המכפלה הקרטזית AxB היא הקבוצה:

$$AxB=\{(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}$$

כלומר AxB היא קבוצת כל הזוגות הסדורים בהם האיבר הראשון שייך לA והשני לB.
פעולה זו איננה קומוטטיבית. אם A שונה מB אזיי AxB שונה מBxA.

$$Ax\phi=\phi xA=\phi$$
$$Ax(B\bigcup C)=(AxB)\bigcup(AxC)$$
$$Ax(B\bigcap C)=(AxB)\bigcap(AxC)$$

עבור קבוצה סופית: $|AxB|=|A|\cdot|B|$