המכללה האקדמית להנדסה
אורט בראודה
ORT BRAUDE COLLEGE

המחלקה להנדסת תעשייה וניהול

מתמטיקה דיסקרטית - סמסטר א' תשס"ז

פתרון מבחן מועד א'

26 בפברואר 2007 חובב פרץ

משך המבחן – 180 דקות. מותרים לשימוש כל חומרי עזר כתובים, ומחשבון.

שאלה 1:

א. (3%) אם $x \notin B$ וכן $y \notin A$, אז $\{(x,y)\} \cap (B \times A) = \varnothing$.

ב. (3%) אם $\{(x,y)\} \cap (B \times A) = \varnothing$, אז $x \notin B$ וכן $y \notin A$.

ג. (3%) אם $\{(x,y)\} \in P(B \times A)$ וכן $x \notin A$ אז $x \in B$

ד. (3%) אם $(B \times A) \neq \varnothing$, אז $|P(B \times A)| = |P(B)| \cdot |P(A)|$.

שאלה 2:

תהא $A = \{1,2,3\}$ ותהא $B = \{1,4\}$. נגדיר יחס R מעל $A \oplus B$ באופן הבא: $R = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

שאלה 2.1:

א. (3%) $|I_{A \oplus B} \setminus R| = 2$.

ב. (3%) $I_{A \oplus B} \cup R$ סימטרית.

ג. (3%) $R \setminus R^{-1}$ אנטיסימטרית.

ד. (3%) $I_{A \oplus B} \cup R$ טרנזיטיבית

שאלה 2.2: בהמשך לנתוני ההתחלה, נגדיר רלציה T מעל $A \oplus B$ בצורה הבאה: $(a,b) \in T \Leftrightarrow |a-b| \neq 1$

א. (3%) $|T| = 7$

ב. (3%) $T \cup R = (A \times A) \setminus \{(2,3)\}$.

ג. (3%) $(R \oplus T) \cup \{(4,4)\}$ רלצית שקילות

ד. (3%) $(R \oplus T) \cup \{(4,4)\}$ רלצית סדר חלקי

שאלה 3:

א. (4%). סכום מקדמי כל הביטויים עם החזקות החיוביות של y בפיתוח $\left(\frac{1}{2} + 1.5y\right)^5$ קטן מ-32.

ב. (4%). בכל הקצאת 133 סטודנטים ל-44 עמדות מחשב, בהכרח קיימת עמדת מחשב אחת שבה יהיו בדיוק 4 סטודנטים.

ג. (4%) $\sum_{i=0}^{111} 2\binom{111}{2i} = 2^{111}$

ד. (4%) מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-722 שווה למספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-1444.

שאלה 4:

(14%) הוכח או הפרך את הטענה: $(A\setminus B)\oplus(B\cup C)\subseteq(A\oplus B)\setminus(B\oplus C)$.

אם הטענה נכונה, הוכח אותה ע"י שימוש במושג השייכות של איברים (לא ע"י אלגברה של קבוצות ולא בדיאגראמות ון). אם הטענה לא נכונה, הבא דוגמא נגדית.

תשובה: יהי $x\in(A\setminus B)\oplus(B\cup C)$, אז יתכן אחד מהשניים:

1. $x\notin A\setminus B \quad x\in(B\cup C)$, כלומר

א. $[x\in A \quad x\in B \quad x\in C]$ או

ב. $[x\in A \quad x\in B \quad x\notin C]$ או

ג. $[x\notin A \quad x\in B \quad x\in C]$ או

ד. $[x\notin A \quad x\notin B \quad x\in C]$ או

2. $x\in A\setminus B \quad x\notin(B\cup C)$ כלומר $[x\in A \quad x\notin B \quad x\notin C]$ ואז *ימין* $x\in$

ממקרה 1א נבנה דוגמא נגדית:

$A=B=C=\{1\}$, לכן $(A\setminus B)\oplus(B\cup C)=\varnothing\oplus\{1\}=\{1\}\neq\varnothing=\varnothing\setminus\varnothing=(A\oplus B)\setminus(B\oplus C)$

שאלה 5:

א. (7%) מצא <u>באופן קומבינטורי</u> את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=14$

המקיימים: $[2\le x_i\le 4i \quad ,i=1,2,3,4]$ (יש לתת תשובה **<u>מספרית</u>**)

תשובה: $D(4,6)-D(4,3)=\binom{9}{3}-\binom{6}{3}=84-20=64$

ב. (9%) מצא <u>באופן קומבינטורי</u> את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=14$

המקיימים: $[-i\le x_i\le i \quad ,i=1,2,3,4]$ ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי.

תשובה:

מספר הפתרונות של הבעיה הנ"ל שווה למספר הפתרונות של הבעיה $x_1+x_2+x_3+x_4=24$ המקיימים: $[0\le x_i\le 2i \quad ,i=1,2,3,4]$. כמובן שאין אף פתרון שמקיים זאת, כי במקרה הקיצוני סכום כל המשתנים ביחד יהיה 20 (ולא 24).

לכל מי שבזבז את זמנו על פתרון מפורט (שכמובן התקבל גם כתשובה נכונה), מצורפת הדרך המפורטת בשימוש עם הכלה והפרדה. כמובן שאם נחשב את הסכום כולו נקבל 0:

נגדיר את 4 הקבוצות הבאות

A_i - קבוצת כל הפתרונות בהם $x_i\ge 2i+1$.

$i=1\ldots4 \quad |A_i|=D(4,24-2i-1)$ (נסכמים ב- $\binom{4}{1}$ S_1)

$i<j \quad i,j=1\ldots4 \quad |A_i\cap A_j|=D(4,24-2i-2j-2)$ (נסכמים ב- $\binom{4}{2}$ S_2)

$i<j<k \quad i,j,k=1\ldots4 \quad |A_i\cap A_j\cap A_k|=D(4,24-2i-2j-2k-3)$ (נסכמים ב- $\binom{4}{3}$ S_3)

$i<j<k<l \quad i,j,k,l=1\ldots4 \quad |A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l|=D(4,24-2i-2j-2k-2l-4)$ (נסכם אחד)

בנוסף $|U|=D(4,24)$, ובסה"כ נרצה לחשב את $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4$

שאלה 6:

א. (10%) נניח שלרשותכם מספר בלתי מוגבל של מטבעות עם 5 ערכים (10 אג', 50 אג', 1 ₪, 5 ₪, 10 ₪. מצא יחס רקורסיה למספר הסידורים של שורה של n מטבעות, שאין בה רצף של 2 מטבעות או יותר של 1 ₪.

פתרון:

$f_1(n)$ - מספר הרצפים הנ"ל בהם במקום הראשון מטבע של 1 ₪.

$f_{-1}(n)$ - מספר הרצפים הנ"ל בהם במקום הראשון מטבע שאינו 1 ₪.

ברור כי $f_1(n) = f_{-1}(n-1)$ (כי התת סדרה המתחילה מהמטבע השני חייבת להתחיל במטבע שאינו 1 ₪, כדי למנוע זוג 1 ₪ צמודים).

לכן $f(n) = f_{-1}(n) + f_1(n) = f_{-1}(n) + f_{-1}(n-1)$

בנוסף, $f_{-1}(n) = (5-1)f(n-1)$ (כי התת סדרה המתחילה מהמטבע השני יכולה להתחיל בכל מטבע).

מכאן, נוכל לבטא את f באמצעות ערכיה הקודמים:

$$f(n) = f_{-1}(n) + f_{-1}(n-1) = 4[f(n-1) + f(n-2)]$$

שני תנאי ההתחלה $f(1) = 5 \quad f(2) = 5^2 - 1 = 24$

ב. (8%) פתור את היחס הרקורסיבי: $a_n = 3a_{n-1} + 20 \quad a_0 = -6$

תשובה: נהפוך את יחס הרקורסיה הנ"ל ליחס לינארי סטנדרטי:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 20 \\ a_{n-1} &= 3a_{n-2} + 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_n - 3a_{n-1} &= 20 \\ a_{n-1} - 3a_{n-2} &= 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n - 3a_{n-1} = a_{n-1} - 3a_{n-2} \Rightarrow a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

ונוסיף תנאי התחלה בצורה ידנית (כי נחוצים שני תנאי התחלה) $a_1 = 3a_0 + 5 = 3\cdot(-6) + 20 = 2$

כעת נפתור את יחס הרקורסיה הלינארי בדרך הסטנדרטית:

המשוואה האופיינית: $\alpha^n = 4\alpha^{n-1} - 3\alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1 \Rightarrow a_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$

נציב תנאי ההתחלה: $\left.\begin{aligned} a_0 &= A\alpha_1^0 + B\alpha_2^0 \\ a_1 &= A\alpha_1^1 + B\alpha_2^1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_0 &= -6 = A + B \\ a_1 &= 2 = A\cdot 3 + B\cdot 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= -10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = 4\cdot 3^n - 10$