תדריך לימוד ליחידה 4
בקורס " אלגברה לינארית 1"- 20109

המושג של מטריצה כבר הוגדר ביחידה הקודמת והשתמשנו בו לפתרון מערכת משוואות לינאריות. מסתבר שבאלגברה לינארית ניתן להשתמש במטריצות בנושאים רבים, חוץ ממערכות לינאריות, וחשיבותן עצומה , ביחידה זו נחקור את התכונות של המטריצות.
חשוב להבין שהאובייקט המתמטי שנקרא "מטריצה" מוגדר (בהגדרתו) ללא קשר עם מערכת משוואות, אך אחד שימושיו הוא פתרון מערכות לינאריות.

<u>**סעיפי ב', ג'**</u>: מוגדרים המושגים הבסיסיים לגבי מטריצה ומוגדרות שתי פעולות, פעולת החיבור ופעולת כפל בסקלר. תכונות הפעולות האלה מסוכמות **במשפט III.6 ובמשפט III.7.**
<u>הערה</u>: הפעולות חיבור וכפל בסקלר שהוגדרו מעל $\mathbf{R}^n$ בעלות בדיוק אותן תכונות. נראה ביחידה 7 שקבוצת המטריצות מסדר $m \times n$ והמרחב $\mathbf{R}^n$ הם דוגמאות של מבנה כללי , בו מוגרות שתי פעולות כאלה שמקיימות את כל התכונות שראינו, שנקרא " מרחב לינארי".

<u>**סעיפי ד' ו-ה'**</u>: מוגדרת פעולה נוספת ,**כפל מטריצות,** פחות אינטואיטיבית (נבין ביחידה 10 את מקור ההגדרה הזאת). פעולה זו מוגדרת בשלב ראשון עבור וקטור שורה מוכפל בווקטור עמודה , מסדרים מסוימים *בהגדרה III.9* עמ' 10 ובאופן כללי *בהגדרה III.10* עמ' 11 .

שימו לב:

– **הכפל אינו מוגדר עבור כל שתי מטריצות** , לכן לפני שתבצעו כל חישוב <u>עליכם לבדוק האם הסדרים של המטריצות מתאימים ומומלץ לקבוע מהו הסדר של מטריצת המכפלה</u> (כדי שתדעו למה לצפות). כדאי לתרגל היטב את המכפלה הזאת, למשל שאלה 10 עמ' 12.

– כפל המטריצות **אינו חילופי**, זהו מקור של תופעות משונות שנראה בהמשך. <u>*לכן יש להקפיד באיזה צד מכפילים*</u> : למשל נניח A,B,C מטריצות מסדר $n \times n$ כך ש- $A = B$, אז ניתן להסיק ש- $CA = CB$, אך בדרך כלל אין להסיק ש- $CA = BC$.

– **למה III.11:**שימושי מאוד ותקראו את המסקנות אחרי הלמה עמ' 15.

מלמה זו נובע גם שאפשר לרשום את מכפלה של שתי מטריצות

כך $AB = \begin{pmatrix} Ab_{\downarrow 1} & Ab_{\downarrow 2} & . & . & . & . & Ab_{\downarrow n} \end{pmatrix}$ וגם כך $AB = \begin{pmatrix} a_{1\rightarrow}B \\ a_{2\rightarrow}B \\ . \\ . \\ . \\ a_{m\rightarrow}B \end{pmatrix}$.

– שאלה 14: נפגוש שוב את המטריצות E_{ij} ומהחישוב בשאלה, אפשר להסיק שאם A מטריצה מסדר $m \times n$ ו- $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור ב- $\mathbf{R}^n$ שבו מופיע 1 במקום ה- i ובשאר המקומות 0, אז

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = a_{\downarrow i} =$$ העמודה ה-i של A

ובאופן דומה: השורה ה- i של A $= a_{i \rightarrow} = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix} A$

כאשר וקטור השורה השמאלי מסדר $1 \times m$.

– טענה עמ׳ 17, אחרי שאלה 15.

<u>**סעיף ו׳**</u>: ההסתכלות הוקטורית על מערכת לינארית מאוד נוחה ומקלה מאוד על הכתיבה וגם על ההוכחות. *למשל*, ניתן להוכיח בקלות רבה תכונות של פתרונות. תלמדו את **שאלה 20 עמ׳ 25** והשוו להוכחות המקבילות בשאלה 18 של יחידה 2.

<u>**סעיפי ז׳, ח׳**</u>: החומר אינו קשה, יש רק ללמוד אותו!

<u>**סעיף ט׳**</u>: נושא המטריצות ההפיכות חשוב ביותר.

כמה נקודות חשובות:

1. **ההגדרה III.27** מתייחסת למטריצות **ריבועיות**, <u>זו נקודה חשובה</u>, שהמושגים של "מטריצה רגולרית או הפיכה" ו- "מטריצה סינגולרית" מתייחסים אך ורק למטריצות **ריבועיות.**
(בחלק מהספרים יש לתקן: בשורה השלישית, צריך להיות "מטריצה **ריבועית** שאינה....")
2. משפט III.30: זהו משפט צמצום, שימו לב ניתן לצמצם בשוויון $AB = AC$ רק בתנאי שהמטריצה A **הפיכה. אך** אפילו אם A הפיכה לא ניתן לצמצם את השוויון $AB = CA$, ללא הנחה נוספת, כי $\boldsymbol{A}$ **לא** מופיעה באותו צד בשני האגפים של השוויון.
3. שאלה 36 עמ׳ 43.
4. הדוגמה של המטריצות האלכסוניות.

סעיפי יא ו-יב': המטריצות האלמנטריות הן הכלי המרכזי לחקירת התכונות של המטריצות ההפיכות.

כמה נקודות חשובות:

1. מטריצה אלמנטרית מתאימה לפעולה אלמנטרית **אחת**.
2. *טענה א' עמ' 47* בסיסית וממנה נובעת *טענה ב' עמ' 49*. למעשה טענה ב' אומרת **שאם שתי מטריצות A ו- A' שקולות שורות אז קיימת מטריצה ריבועית P כך ש- $A'=PA$ והמטריצה P היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.**

   יש לציין ששתי הטענות א' ו-ב' נכונות גם עבור מטריצות מסדר $m \times n$, ההוכחות זהות.
3. *שאלה 44 עמ' 49*: הרמז חשוב כדי להבין איך עוברים מ-A ל- A', זאת אומרת אם עליך לחשב את האגף הימני של השוויון בטענה ב', פשוט תפעיל על A את הפעולות האלמנטריות המתאימות , במקום לבצע k מכפלות.

   בעזרת רמז זה, מתקבל הכיוון ההפוך של הטענה בסעיף 2, כלומר **אם קיימת מטריצה ריבועית P מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך ש- $A'=PA$, אז שתי המטריצות A ו- A' שקולות שורות**.
4. *טענה ג'*: מקבלים כך משפחה שלמה של מטריצות הפיכות, כל המטריצות האלמנטריות.
5. הנוסחה שמופיעה בסוף העמוד 53 נותנת דרך לחשב את המטריצה הופכית של מטריצה הפיכה.
6. **משפט III.33:** חשוב ביותר, שימושי בכל הקורס. נותן אפיונים שונים של מטריצה הפיכה , הקשורים לנושאים שונים כגון מערכות, מטריצות, אי-תלות, פרישה, בסיס. שימו לב שהמשפט הזה מתייחס למטריצה **ריבועית.**
7. מ**משפט III.33** נובע ש-A סינגולרית אם ורק אם היא שקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים, **אך** אם A סינגולרית, **זה לא גורר שיש בה שורת אפסים!**

זהו. יש "בחנו את עצמכם" , תשתמשו בו.