6. עקרון שובך היונים.

שאלה מס׳ 1.

אם ידוע שמספר השערות על ראשו של בן אדם אינו עולה על $\frac{1}{4}$ מיליון, הוכח כי בישראל יש לפחות שני אנשים בעלי אותו מספר שערות על הראש.

פתרון:

נסתכל על שובך ובו 250,000 תאים (כל תא מתאים לכמות שערות מסוימת). אם בישראל יש 7 מליון תושבים, לפי עקרון שובך היונים, בהכרח קיים תא שבו לפחות שניים מהם – כלומר שקיימים 2 אנשים עם אותו מספר שערות.

שאלה מס׳ 2.

הוכח שבין כל שלושה מספרים שלמים יש שניים שסכומם הוא מספר זוגי.

פתרון:

נסתכל על שובך ובו 2 תאים (אחד למספרים זוגיים, ואחד לאי-זוגיים). אם נשים בשובך 3 מספרים, לפי עקרון שובך היונים, בהכרח קיים תא שבו לפחות שניים מהם – כלומר שקיימים 2 מספרים זוגיים או אי-זוגיים, ובהכרח סכומם יהיה זוגי.

שאלה מס׳ 3.

א) לפחות אחד משני עצמים x_1 ו- y_1 הוא בעל תכונה P, לפחות אחד משני עצמים x_2 ו- y_2 הוא בעל תכונה P, לפחות אחד משני עצמים x_3 ו- y_3 הוא בעל תכונה P.

הוכח: לפחות שניים מבין x_1, x_2, x_3 או לפחות שניים מבין y_1, y_2, y_3 הם בעלי התכונה P.

ב) הנתונים כמו לעיל, וכן גם עבור הזוגות x_4 ו- y_4, x_5 ו- y_5.

הוכח: לפחות שלושה מבין x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 או לפחות שלושה מבין y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 הם בעלי התכונה P.

פתרון:

א.

1. אם מבין ה-x-ים אף אחד לא מקיים את P, אז 3 ה-y-ים מקיימים את P.
2. אם מבין ה-x-ים רק אחד מקיים את P, אז 2 ה-y-ים האחרים מקיימים את P.
3. אם מבין ה-x-ים שניים מקימים את P, סיימנו.

ב. בדומה לסעיף א׳:

1. אם מבין ה-x-ים אף אחד לא מקיים את P, אז 5 ה-y-ים מקיימים את P.
2. אם מבין ה-x-ים רק אחד מקיים את P, אז 4 ה-y-ים האחרים מקיימים את P.
3. אם מבין ה-x-ים רק שניים מקימים את P, אז 3 ה-y-ים האחרים מקיימים את P.
4. אם מבין ה-x-ים שלושה או יותר מקימים את P, סיימנו.

שאלה מס׳ 4.

הסכום של תשעה מספרים הוא 90.

א) הוכח כי יש ביניהם שלושה מספרים שסכומם לפחות 30.

ב) הוכח כי יש ביניהם ארבעה מספרים שסכומם לפחות 40.

פתרון:

א. אם כל שלישית מספרים, סכומה נמוך מ-30, ניתן לחלק את 9 המספרים ל-3 שלשות, ואז סכום כל שלשה יהיה נמוך מ-30, ואז סכום כל ה-9 נמוך מ-90, בסתירה לנתון.

ב. בין המספרים יש מספר שהוא הקטן ביותר – אם הוא לא קטן מ-10, סיימנו, כי אז סכום ארבעת המספרים הקטנים יהיה 40 או יותר. אם המספר הקטן ביותר קטן מ-10, נשארנו עם 8 מספרים שבהכרח סכומם גדול מ-80. נחלק אותם לשתי רביעיות, ואז אם סכום כל רביעיה נמוך מ-40, סכום השמיניה נמוך מ-80, בסתירה למה שהסקנו.

שאלה מס׳ 5.

A היא תת - קבוצה בת 25 מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\ldots,150\}$. הוכח כי יש ב- A שני זוגות זרים (כקבוצות)זה לזה של מספרים, כך שסכום המספרים בזוג הראשון שווה לסכום המספרים בזוג השני.

פתרון:

הסכומים השונים שניתן ליצור מהקבוצה בת 150 איברים אלה נעים מ-3 עד 299 (סה״כ 297 סכומים אפשריים (אלה התאים בשובך). מספר הזוגות השונים שניתן ליצור מקבוצה בת 25 איברים הוא $\binom{25}{2} = 300$, לכן בהכרח כשנבדוק לגבי כל אחד מהזוגות את סכומו, שני זוגות יכנסו לאותו תא.

שאלה מס׳ 6.

הוכח כי אפשר לתאר כל מספר רציונלי כשבר עשרוני מחזורי אינסופי.

פתרון:

מספר רציונלי הוא תוצר של חלוקת שני מספרים שלמים $\frac{n}{m}$ (נניח ששניהם חיוביים – הדבר לא משנה להוכחה). שבר עשרוני מחזורי אינסופי, הינו שבר עשרוני, שהחל מנקודה סופית מסוימת, יש מחזוריות (גם $2.42516666\ldots$ הוא שבר עשרוני מחזורי אינסופי). בתהליך החישוב של חלוקת n ב-m, נגיע לשלב שבו תהיה שארית מסוימת (שקטנה בהכרח מ-m המכנה), שנחזור אליה בהמשך שוב (כי יש מספר סופי של שאריות). בכל מצב שנגיע לשארית זו, תהליך החלוקה יתפתח באותו אופן וכך נקבל את המחזוריות.

שאלה מס' 7.

נתונות 6 נקודות במישור, שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד. מחברים כל שתי נקודות בקטע ישר. צובעים כל קטע באחד משני צבעים, לבן או כחול. הוכח כי בכל צביעה כזו נוצר לפחות משולש אחד שכל צלעותיו צבועות באותו צבע.

הערה: משולש כזה נקרא "משולש כרומטי".

פתרון:

ניקח נקודה מסוימת מתוך ה-6 – מנקודה זו יוצאים חמישה ישרים לקודקודים האחרים, לכן 3 מתוכם לפחות יהיו בעלי צבע אחד (נניח כחול). אם נסתכל על שלוש הנקודות איתם נוצרים הישרים באותו הצבע, ונחבר בינהם בשלושה ישרים, אזי אם אחד מהם בעל צבע כחול, סיימנו. אם שלושתם לבנים, אז המשולש הבנוי מ-3 נקודות אלה הוא כרומטי.

שאלה מס' 8.

במישור נתונות 17 נקודות, שאף שלוש מהן אינן על ישר אחד. הקטעים המבחרים כל שתי נקודות נצבעו באופן כלשהו באחד משלושת הצבעים לבן, כחול או צהוב. הוכח שבמבנה שנתקבל יש לפחות משולש כרומטי אחד.

פתרון:

ניקח נקודה מסוימת מתוך ה-17 – מנקודה זו יוצאים 16 ישרים לקודקודים האחרים, לכן 6 מתוכם לפחות יהיו בעלי צבע אחד (נניח כחול). אם נסתכל על 6 הנקודות איתם נוצרים הישרים באותו הצבע, ונחבר בינהם ישרים, אזי אם אחד מהם בעל צבע כחול, סיימנו. אם אין אף כחול, יש לנו 6 נקודות מ-2 הצבעים האחרים, ולפי שאלה 7 יווצר מהם משולש כרומטי אחד לפחות.