7. רקורסיה.

שאלה מס׳ 1.

נתון $f(n) = f(n-1) \cdot q$, $n > 1$

הוכח את הנוסחה: $f(n) = aq^{n-1}$. (בהנחה ש- $f(1) = a$)

פתרון:

הוכחה באינדוקציה:

נבדוק נכונות עבור n=2:

$$f(2) = aq^{2-1} = aq = f(1) \cdot q$$

נניח כי הנוסחה נכונה לכל n<k ונוכיח נכונותה עבור n=k.

אם הנוסחה נכונה לכל n<k, אז היא נכונה עבור n=k-1, לכן $f(k-1) = aq^{k-1-1} = aq^{k-2}$.

נראה כי בהינתן השוויון הנ״ל הנוסחה נכונה גם עבור n=k:

$$f(k) = f(k-1) \cdot q = aq^{k-2} \cdot q = aq^{k-1}$$

שאלה מס׳ 2.

מהו מספר האפשרויות לפזר n כדורים זהים בתוך k תאים שונים, כך שבכל תא יהיו לפחות 2 כדורים ולכל היותר 4 כדורים?

פתרון:

נבנה את הפונקציה הרקורסיבית הבאה:

$f(n,k)$ - מספר האפשרויות לפזר n כדורים זהים בתוך k תאים שונים כך שבכל תא יהיו לפחות 2 כדורים ולכל היותר 4 כדורים.

נחלק את המקרים החוקיים ל-3 קבוצות:

A(n,k) – קבוצת כל השיבוצים בהם בתא מספר 1 יש 2 כדורים (יש בסה״כ שיבוץ של n-2 כדורים ל-k-1 תאים, כלומר $f(n-2,k-1)$).

B(n,k) – קבוצת כל השיבוצים בהם בתא מספר 1 יש 3 כדורים (יש בסה״כ שיבוץ של n-3 כדורים ל-k-1 תאים, כלומר $f(n-2,k-1)$).

C(n,k) – קבוצת כל השיבוצים בהם בתא מספר 1 יש 4 כדורים (יש בסה״כ שיבוץ של n-4 כדורים ל-k-1 תאים, כלומר $f(n-2,k-1)$).

ברור כי כל פיזור חוקי נמצא בדיוק באחת מהקבוצות הזרות הנ״ל, לכן

$$f(n,k) = A(n,k) + B(n,k) + C(n,k) = f(n-2,k-1) + f(n-4,k-1) + f(n-3,k-1)$$

יהיו מספר אינסופי של תנאי ההתחלה עבור הערך הנמוך ביותר הרלוונטי של k יחד עם כל ערך של n:

$f(2,1) = 1, \quad f(3,1) = 1, \quad f(4,1) = 1, \quad \forall n \neq 2,3,4 \ f(n,1) = 1$.

שאלה מס' 3.

נתון $a_0 = 1$,$a_n = 2a_{n-1} + 5$. מצא ביטוי עבור a_n, והוכח את נכונותו.

פתרון:

דרך א':

נלמד את חוקיות הסדרה לפי פתיחת הרקורסיה:

$$a_n = 2a_{n-1} + 5 = 2(2a_{n-2}+5)+5 = 2(2(2a_{n-3}+5)+5)+5 = \ldots =$$
$$2^n a_0 + 2^{n-1}\cdot 5 + 2^{n-2}\cdot 5 + \ldots + 2^1\cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^n(a_0+5)-5$$

נוכיח הנוסחה המפורשת. הוכחה באינדוקציה:

נבדוק נכונות עבור n=1:

$$a_1 = 2a_0 + 5 = 7 = 2^1(1+5)-5$$

נניח כי הנוסחה נכונה לכל n<k ונוכיח נכונותה עבור n=k.

אם הנוסחה נכונה לכל n<k, אז היא נכונה עבור n=k-1, לכן $a_{k-1} = 2^{k-1}(1+5)-5 = 6\cdot 2^{k-1}-5$.

נראה כי בהינתן השוויון הנ"ל הנוסחה נכונה גם עבור n=k:

$$a_k = 2a_{k-1}+5 = 2\cdot(6\cdot 2^{k-1}-5)+5 = 6\cdot 2^k - 5 = 2^k(a_0+5)-5$$

דרך ב':

נהפוך את יחס הרקורסיה הנ"ל ליחס לינארי סטנדרטי:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 2a_{n-1}+5 \\ a_{n-1} = 2a_{n-2}+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_n - 2a_{n-1} = 5 \\ a_{n-1} - 2a_{n-2} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n - 2a_{n-1} = a_{n-1} - 2a_{n-2} \Rightarrow a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

ונוסיף תנאי התחלה בצורה ידנית (כי נחוצים שני תנאי התחלה) $a_1 = 2a_0 + 5 = 7$

כעת נפתור את יחס הרקורסיה הלינארי בדרך הסטנדרטית:

נבנה משוואה אופיינית: $\alpha^n = 3\alpha^{n-1} - 2\alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1 \Rightarrow a_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$

נציב תנאי ההתחלה ונקבל: $\left.\begin{array}{l} a_0 = A\alpha_1^0 + B\alpha_2^0 \\ a_1 = A\alpha_1^1 + B\alpha_2^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0 = 1 = A + B \\ a_1 = 7 = A\cdot 2 + B\cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 6 \\ B = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 6\cdot 2^n - 5$

שאלה מס' 4.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האפשרויות למתוח קו קרשים באורך n מטר מקרשים לבנים (כל אחד באורך 2 מטר), צהובים (כל אחד באורך 2 מטר)וירוקים (כל אחד באורך של מטר אחד).

פתרון:

נבנה את הפונקציה הרקורסיבית הבאה:

$f(n)$ - מספר האפשרויות למתוח קו קרשים באורך n מטר.

נחלק את המקרים ל-3 קבוצות:

$A(n)$ – קבוצת כל האפשרויות בהם הקרש הימני לבן (יש בסה"כ שוני של n-2 מטרים בין כל האפשרויות, ובסה"כ $f(n-2)$ מקרים)

$B(n)$ – קבוצת כל האפשרויות בהם הקרש הימני צהוב (יש בסה"כ שוני של n-2 מטרים בין כל האפשרויות, ובסה"כ $f(n-2)$ מקרים).

$C(n)$ – קבוצת כל האפשרויות בהם הקרש הימני ירוק (יש בסה"כ שוני של n-1 מטרים בין כל האפשרויות, ובסה"כ $f(n-1)$ מקרים).

ברור כי כל אפשרות נמצאת בדיוק באחת מהקבוצות הזרות הנ"ל, לכן

$$f(n,k)=A(n)+B(n)+C(n)=f(n-2)+f(n-2)+f(n-1)=2f(n-2)+f(n-1)$$

תנאי ההתחלה: $f(1)=1, \quad f(2)=3$

שאלה מס' 5.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האזורים הנוצרים במישור על-ידי n מעגלים שכל אחד מהם נחתך עם כל אחד אחר, ואף שלושה מעגלים אינם נחתכים בנקודה אחת.

פתרון:

נבנה את הפונקציה הרקורסיבית הבאה:

$f(n)$ - מספר האזורים שיווצרו מ-n מעגלים.

נצא ממצב מוצא בו היו n-1 מעגלים. נשים לב כי אם נוסיף מעגל (ה-n-י), הוא יחתך עם כל מעגל אחר שכבר היה קיים בשתי נקודות. לכן המעגל הנוסף יתחלק ל-$2(n-1)$ קשתות. כל קשת כזו מחלקת איזור שהיה קיים מלכתחילה לשני אזורים. לכן, עם הוספת המעגל ה-n-י יתווספו עוד $2(n-1)$ אזורים, ובסה"כ $f(n)=f(n-1)+2(n-1)$. תנאי ההתחלה הוא כמובן $f(1)=2$.

שאלה מס' 6.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר אפשרויות הבחירה של k עצמים מ- n סוגי עצמים, כאשר מותר לבחור מכל סוג מספר כלשהו של עצמים.

פתרון:

נבנה את הפונקציה הרקורסיבית הבאה:

$f(n,k)$ - מספר אפשרויות הבחירה של k עצמים מ- n סוגי עצמים

נחלק את המקרים החוקיים ל-k קבוצות:

$A_i(n,k)$ – קבוצת כל השיבוצים בהם סוג עצם 1 נבחר i פעמים (יש בסה"כ $f(n-1,k-i)$).

ברור כי כל בחירה אפשרית נמצאת בדיוק באחת מהקבוצות הזרות הנ"ל, לכן

$$f(n,k)=\sum_{i=0}^{k}A_i(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-1)+f(n-1,k-2)+\ldots+f(n-1,1)+f(n-1,0)$$

תנאי ההתחלה:

$\forall k \quad f(1,k)=1, \quad \forall n \quad f(n,1)=n$.

שאלה מס' 7.1.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שיש להן k זוגות של 1 – ים צמודים.

פתרון:

נבנה את הפונקציה הרקורסיבית הבאה:

$f(n,k)$ - מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שיש להן k זוגות של 1 – ים צמודים.

נסתכל על 2 קבוצות של סדרות:

$A_0(n,k)$ – קבוצת כל הסדרות המתחילות ב-0.

$A_1(n,k)$ – קבוצת כל הסדרות המתחילות ב-1.

בקבוצה $A_0(n,k)$ נמצא מספר איברים כמספר הסדרות באורך n-1 בהם יש k זוגות 1-ים צמודים, ובסה"כ $f(n-1,k)$.

בקבוצה $A_1(n,k)$ תלוי מהו האיבר השני אחרי 1.

- אם זהו 0 – אזי נמצא מספר איברים כמספר הסדרות באורך n-2 בהם יש k זוגות 1-ים צמודים, ובסה"כ $f(n-2,k)$.
- אם זהו 1 – אזי נמצא מספר איברים כמספר הסדרות באורך n-1 המתחילות ב-1 בהם יש k-1 זוגות 1-ים צמודים, ובסה"כ $f(n-1,k-1)-f(n-2,k-1)$.

בסה"כ $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-2,k)+f(n-1,k-1)-f(n-2,k-1)$

תנאי התחלה נרצה למצוא עבור n=1 ועבור n=2 לכל k:

$$
\begin{aligned}
&f(1,0)=2\\
&f(1,k)=0 \quad \forall k>0\\
&f(2,0)=3 \; f(2,1)=1\\
&f(2,k)=0 \quad \forall k>1
\end{aligned}
$$

לדוגמא: בשביל לחשב את $f(3,1)$ נשתמש בנוסחא כך:

$f(3,1)=f(2,1)+f(1,1)+f(2,0)-f(1,0)=3+0+1-2=2$ ואכן יש 2 סדרות באורך 3 בהן זוג 1-ים צמודים (110, 011).

שאלה מס' 7.2 (במקור שאלה 7).

מצא יחס רקורסיה עבור מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שיש להן k זוגות של 1 – ים צמודים ואין להן אף זוג של 0 - ים צמודים.

(לדוגמה: עבור n = 6, k = 3 : 111011 או 101111. עבור n = 6, k = 2 : 110110 או 011011 וגם 101110).

פתרון:

נבנה את הפונקציה הרקורסיבית הבאה:

$f(n,k)$ - מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שיש להן k זוגות של 1 – ים צמודים ואין להן אף זוג של 0 - ים צמודים.

נגדיר את שתי הפונקציות הרקורסיביות הבאות:

$f_0(n,k)$ – מספר הסדרות הבינאריות באורך n המתחילות ב-0, שיש להן k זוגות של 1 – ים צמודים ואין להן אף זוג של 0 - ים צמודים.

$f_1(n,k)$ – מספר הסדרות הבינאריות באורך n המתחילות ב-1, שיש להן k זוגות של 1 – ים צמודים ואין להן אף זוג של 0 - ים צמודים.

בגלל הדרישה שלא יהיו 0-ים צמודים ברור שאם המספר הראשון הוא 0, אחריו יבוא 1, ומספר הסדרות המתחילות ב-0 לכן יהיה $f_0(n,k)=f_1(n-1,k)$.

אם המספר הראשון הוא 1, תלוי מהו האיבר השני אחרי 1.

- אם זהו 0 – אזי נמצא כי מספר הסדרות הללו בסה"כ $f_0(n-1,k)=f_1(n-2,k)$.
- אם זהו 1 – אזי נמצא מספר איברים כמספר הסדרות באורך n-1 המתחילות ב-1 בהם יש k-1 זוגות 1-ים צמודים, ובסה"כ $f_1(n-1,k-1)$.

לכן, בתוך הפונקציה f_1 ישנו גם קשר רקורסיבי: $f_1(n,k)=f_1(n-2,k)+f_1(n-1,k-1)$

בסה"כ $f(n,k)=f_0(n,k)+f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k-1)=f_1(n-1,k)+f_1(n-2,k)+f_1(n-1,k-1)$, או בדרך מצומצמת יותר: $f(n,k)=f_1(n-1,k)+f_1(n,k)$

נרצה לבטא את הכל במונחי הפונקציה f, אבל בגלל הקושי לאחד הכל למונח אחד נשאיר זאת כך ונסתכל על f כסכום של אברי f_1:

תנאי התחלה נרצה למצוא עבור n=1 ועבור n=2 לכל k:

$$\begin{aligned}
&f_1(1,0)=2\\
&f_1(1,k)=0 \quad \forall k>0\\
&f_1(2,0)=1 \; f_1(2,1)=1\\
&f_1(2,k)=0 \quad \forall k>1
\end{aligned}$$

לדוגמא: בשביל לחשב את $f(3,1)$ נשתמש בנוסחא כך:

$f(3,1)=f_1(2,1)+f_1(3,1)=1+f_1(3,1)=1+f_1(1,1)+f_1(2,0)=1+0+1=2$ ואכן יש 2 סדרות באורך 3 בהן זוג יחיד של 1-ים צמודים ואין זוג אפסים (110, 011).

שאלה מס' 8.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שאין בהן 2 אפסים סמוכים.

נבנה את הפונקציה הרקורסיבית הבאה:

$f(n)$ - מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שאין להן אף זוג של 0 - ים צמודים.

נגדיר את שתי הפונקציות הרקורסיביות הבאות:

$f_0(n)$ – מספר הסדרות הבינאריות באורך n המתחילות ב-0, שאין להן אף זוג של 0 - ים צמודים.

$f_1(n)$ – מספר הסדרות הבינאריות באורך n המתחילות ב-1, שאין להן אף זוג של 0 - ים צמודים.

ברור כי $f_0(n)=f_1(n-1)$ (כי התת סדרה המתחילה מהאיבר השני חייבת להתחיל ב-1, כדי למנוע זוג אפסים צמודים).

לכן $f(n)=f_1(n)+f_1(n-1)$

בנוסף, $f_1(n)=f(n-1)$ (כי התת סדרה המתחילה מהאיבר השני יכולה להתחיל בכל ספרה).

מכאן, נוכל לבטא את f באמצעות ערכיה הקדומים:

$$f(n)=f_1(n)+f_1(n-1)=f(n-1)+f(n-2)$$

יש למצוא שני תנאי התחלה

$f(2)=3 \quad f(1)=2$ כיוון שקיימות 2 סדרות חוקיות באורך אחד (1,0), וקיימות 3 סדרות חוקיות באורך 2 (11,10,01).

שאלה מס' 9.

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האפשרויות a(n,k) לבחור k מספרים מ- n המספרים 1,2,3,...,n, כך שלא יבחרו שני מספרים עוקבים.

הוכח כי: $a(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$.

פתרון:

$a(n,k)$ - מספר האפשרויות לבחור k מספרים מ- n המספרים 1,2,3,...,n.

נחלק את הבחירות לשתי קבוצות:

1. $a_1(n,k)$ - מספר האפשרויות לבחור k מספרים מ- n המספרים 1,2,3,...,n, כאשר המספר 1 נבחר.

ברור כי אם המספר 1 נבחר, מספר האפשרויות שווה למספר הבחירות החוקיות של k-1 מספרים מ- n-2 המספרים3,...,n (ובסה"כ $a(n-2,k-1)$).

2. $a_{-1}(n,k)$ - מספר האפשרויות לבחור k מספרים מ- n המספרים 1,2,3,...,n, כאשר המספר 1 לא נבחר.

ברור כי אם המספר 1 לא נבחר, מספר האפשרויות שווה למספר הבחירות החוקיות של k מספרים מ- n-1 המספרים 2,3,...,n (ובסה"כ $a(n-1,k)$).

לכן $a(n,k)=a(n-2,k-1)+a(n-1,k)$

תנאי ההתחלה אמורים לתת עבור n כלשהו את ערך הפונקציה ל-k=1, כדי שנוכל תמיד להשתמש בנוסחא הרקורסיבית בהמשך:

$$a(n,1)=n \quad \forall n\geq 1$$
$$a(n,k)=0 \quad \forall k>n$$

את ההוכחה נבצע באינדוקציה:

בדיקה עבור n=1: $a(1,k)=\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & k>1\end{cases}=\binom{n-k+1}{k}=\binom{2-k}{k}$.

נניח כי הנוסחא נכונה עד n-1. נוכיח את נכונותה עבור n:

$$a(n,k)=a(n-2,k-1)+a(n-1,k)=\binom{n-2-(k-1)+1}{k-1}+\binom{n-1-k+1}{k}=\binom{n-k}{k-1}+\binom{n-k}{k}=\binom{n-k+1}{k}$$

כאשר הנוסחא האחרונה היא הזהות מתוך משולש פסקל.

שאלה מס׳ 10.

מהו מספר הסדרות באורך n, הבנויות מהספרות 0, 1, 2, שאין בהן ספרות עוקבות שוות?

פתרון:

$f(n)$ - מספר הסדרות באורך n, הבנויות מהספרות 0, 1, 2, שאין בהן ספרות עוקבות שוות.

נגדיר את שתי הפונקציות הרקורסיביות הבאות:

$f_0(n)$ – מספר הסדרות הנ״ל באורך n המתחילות ב-0.

$f_1(n)$ – מספר הסדרות הנ״ל באורך n המתחילות ב-1.

$f_2(n)$ – מספר הסדרות הנ״ל באורך n המתחילות ב-2.

ברור כי $f_0(n)=f_1(n)=f_2(n)$, לכן ניתן לחשב את אחד מהם (לדוגמא $f_0(n)$), ובנוסף $f(n)=3f_0(n)$.

נתמקד ב-$f_0(n)$ - אם הסדרה מתחילה ב-0, האיבר הבא יהיה 1 או 2, לכן $f_0(n)=f_1(n-1)+f_2(n-1)=2f_0(n-1)=2f(n-1)/3$.

לכן $f(n)=3f_0(n)=2f(n-1)$. תנאי ההתחלה: $f(1)=3$.

נוכל לפתור את יחס הרקורסיה הלינארי הנ״ל, אבל בגלל פשטותו (זו פשוט סדרה הנדסית) נוכל לחשב בצורה מיידית את $f(n)=3\cdot 2^{(n-1)}$.

שאלה מס׳ 11.

מצא ביטוי מפורש עבור האיבר ה- n - י של סדרת פיבונצ׳י.

פתרון:

בסדרת פיבונצ׳י מתקיים היחס הרקורסיבי הבא:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_0 = a_1 = 1$$

כעת נפתור את יחס הרקורסיה הלינארי בדרך הסטנדרטית:

נבנה משוואה אופיינית:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$$

נציב תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = A\alpha_1^0 + B\alpha_2^0 \\ a_1 = A\alpha_1^1 + B\alpha_2^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0 = 1 = A + B \\ a_1 = 1 = A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$