בשאלות 1,2 סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף העמוד

בשאלות הנ"ל יתכן ויש כמה טענות נכונות או אין בכלל טענות נכונות או כל הטענות נכונות.

שאלה 1:

א. (3%) אם $x \in A \cap B$ וכן $y \in A \setminus B$, אז $\{x,y\} \subseteq (B \oplus A)$

ב. (3%) אם $\{x,y\} \subseteq (B \oplus A)$, אז $\{x\} \notin A \cap B$

ג. (3%) אם $\{x,y\} \in P(B \oplus A)$ וכן $x \notin A \setminus B$ אז $y \in A \setminus B$

ד. (3%) אם $B \neq \varnothing$ וכן $B \neq A$ אז $(A \oplus B) \neq \varnothing$

שאלה 2:

תהינה $A = \{1,2,3\}$. נגדיר יחס R המוגדר מעל $P(A)$ באופן הבא: $R = \begin{pmatrix} \{1\}\{2\}\{3\}\{1,2\} \\ \{1\}\{2\}\{3\}\ \ \{3\} \end{pmatrix}$

שאלה 2.1:

א. (3%) $|I_{P(A)}| = 8$.

ב. (3%) R סימטרית.

ג. (3%) R אנטיסימטרית.

ד. (3%) R טרנזיטיבית

שאלה 2.2: בהמשך לנתוני ההתחלה בשאלה, נגדיר רלציה T מעל $P(A)$ בצורה הבאה:

$$(C,D) \in T \Leftrightarrow [|C| \neq 1, |D| \neq 1]$$

א. (3%) $|T| = 55$

ב. (3%) T רלצית שקילות.

ג. (3%) $R \oplus T$ רלצית שקילות

ד. (3%) $R \cup T$ רלצית סדר חלקי

שאלה 3:

(14%) הוכח או הפרך את הטענה: $[(A \cap B) \oplus (B \cap C)] \setminus [A \cap C] \subseteq (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$.

אם הטענה נכונה, הוכח אותה ע"י שימוש במושג השייכות של איברים (לא ע"י אלגברה של קבוצות ולא בדיאגראמות ון). אם הטענה לא נכונה, הבא דוגמא נגדית.

תשובה: יהי $x \in [(A \cap B) \oplus (B \cap C)] \setminus [A \cap C]$, אז $x \in [(A \cap B) \oplus (B \cap C)]$ וכן $x \notin [A \cap C]$. מהביטוי הראשון, יתכן אחד מהשניים:

1. $x \notin (B \cap C)$ $x \in (A \cap B)$, כלומר $x \notin C$ $x \in B$ $x \in A$

2. $x \in (B \cap C)$ $x \notin (A \cap B)$ כלומר $x \in C$ $x \in B$ $x \notin A$

בכל אחת מהאפשרויות מתקיים גם $x \notin [A \cap C]$, לכן $x \in [(A \cap B) \oplus (B \cap C)] \setminus [A \cap C]$.

1. $x \notin C$ $x \in B$ $x \in A$ $\Leftarrow$ $x \in (A \cap B)$ $\Leftarrow$ $x \in right\ side$

2. $x \in C$ $x \in B$ $x \notin A$ $\Leftarrow$ $x \in (A^C \cap B)$ $\Leftarrow$ $x \in right\ side$

שאלה 4:

<u>סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף השאלה</u>

א. (5%) בכתה 25 תלמידים. מעוניינים לבחור מתוכם ועד של 5 תלמידים. מתוך יתרת התלמידים, שלא נבחרו לועד, יבחרו נשיא/ת הכתה ומזכיר/ת הכתה (יתכן ויהיה אותו תלמיד). מספר האפשרויות לבחירה $500\cdot C(24{,}19)$

הסבר: הבחירה הראשונה היא $C(25{,}5)=\frac{25!}{20!5!}$, הבחירה השניה היא 20^2, ובסה"כ המכפלה

$$C(25{,}5)=20\frac{25!}{19!5!}=500C(24{,}19)$$

ב. (5%). האיבר החופשי בפיתוח של $\left(\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{2}X+\frac{\sqrt[5]{2}}{X^3}\right)^{10}$ הינו 8004.

הסבר: איבר חופשי בפיתוח של $(a+b+c)^{10}$ יווצר אם החזקה של c תהיה שליש מהחזקה של b, וזה קורה בשלושה מקרים:

1. החזקה של a היא 10. האיבר הנוצר – 4, מספר הדרכים בהן האיבר נוצר 1.
2. החזקה של a היא 6, החזקה של b היא 3 והחזקה של c היא 1. האיבר הנוצר – 4, מספר הדרכים בהן האיבר נוצר $\binom{10}{6}\binom{4}{3}\binom{1}{1}=\frac{10!}{6!3!1!}=840$.
3. החזקה של a היא 2, החזקה של b היא 6 והחזקה של c היא 2. האיבר הנוצר – 4, מספר הדרכים בהן האיבר נוצר $\binom{10}{2}\binom{8}{6}\binom{2}{2}=\frac{10!}{2!6!2!}=1260$.

בסה"כ האיבר החופשי יהיה 8404.

ג. (5%) $\sum_{i=1}^{352}\binom{i+57}{i}=\binom{410}{352}$

ד. (5%) מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-512 שווה לשליש ממספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-3072.

שאלה 5:

א. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ המקיימים: $[4\le x_i\le 4\cdot i \quad ,i=1{,}2{,}3{,}4]$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: $D(3{,}4)$

ב. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים אי שליליים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=37$ המקיימים: $[x_i\ne x_{2i} \quad ,i=1{,}2{,}3]$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי ואין צורך לפתוח סכימות).

תשובה:

נגדיר 3 קבוצות:

A_i - קבוצת כל הפתרונות בהם $x_i = x_{2i}$.

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = \sum_{n=0}^{18} D(4, 37-2n)$$

$$|A_1 \cap A_2| = \sum_{n=0}^{12} D(3, 37-3n)$$

$$|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \sum_{n=0}^{18} \sum_{m=0}^{18-n} D(2, 37-2n-2m)$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \sum_{n=0}^{18} \sum_{m=0}^{18-2n} D(1, 37-3n-m) = \sum_{n=0}^{12} \sum_{m=0}^{\lfloor (37-3n)/2 \rfloor} (37-3n-2m)$$

בסה״כ רצוננו ב- $\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right| = |U| - S_1 + S_2 - S_3$

$$|U| = D(6, 37)$$

$$S_1 = 3\sum_{n=0}^{18} D(4, 37-2n)$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = \sum_{n=0}^{12} D(3, 37-3n) + 2\sum_{n=0}^{18} \sum_{m=0}^{18-n} D(2, 37-2n-2m)$$

$$S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \sum_{n=0}^{12} \sum_{m=0}^{\lfloor (37-3n)/2 \rfloor} (37-3n-2m)$$

שאלה 6:

א. (8%) הנח כי במישור מפוזרות נקודות (אין שלוש מהן על ישר אחד). דרך כל זוג נקודות מעבירים ישר. כל ישר צובעים באחד מ-n צבעים. תהי $f(n)$ פונקציה המקבלת את מספר הנקודות המינימלי שיבטיח היווצרות משולש כרומטי (משולש בעל צלעות בצבע זהה). בנה יחס רקורסיה לחישוב $f(n)$ ומצא תנאי התחלה.

תשובה: עבור $n=1$ נקבל כמובן $f(1)=3$. אם נרצה להבטיח משולש כרומטי כאשר צובעים ע״י n צבעים שונים, צריך להסתמך על תהליך ההוכחה, בו בוחרים נקודה אחת ומעוניינים שמנקודה זו נגיע ללפחות $f(n-1)$ נקודות עם אותו צבע. כדי שזה יקרה צריך שיהיו מול הנקודה הזו לפחות $n \cdot [f(n-1)-1]+2$ נקודות. המשמעות – נחוצות $f(n) = n \cdot f(n-1) + 2 - n$ נקודות כדי להבטיח משולש כרומטי בצביעת כל ישר באחד מ-n צבעים.

ב. (8%) פתור יחס רקורסיבי: $f(n) = f(n-1) + 12f(n-2), \quad f(0) = 17, \quad f(1) = 33$

תשובה: זהו יחס רקורסיבי לינארי: מפתרון $\alpha^2 - \alpha - 12 = 0$, נקבל $\alpha_2 = -3 \quad \alpha_1 = 4$. מכאן נקבל $f(n) = A \cdot (4)^n + B \cdot (-3)^n$, ומתנאי ההתחלה נקבל $B = 5 \quad A = 12$, $f(n) = 12 \cdot (4)^n + 5 \cdot (-3)^n$.