

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה, אלא אם נאמר בשאלה שאין צורך לנמק.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$. תהי K קבוצת יחסי הסדר-החלקי מעל A . יחס ההכלה \subseteq הוא סדר-חלקי מעל K (אינכם צריכים להוכיח זאת, זה מקרה פרטי של טענה כללית שהוכחה בספר).

- (13 נק') א. יהי R יחס סדר-מלא מעל A . מובן ש- $R \in K$. הוכח ש- R הוא איבר מקסימלי ב- K לגבי יחס ההכלה.
- (12 נק') ב. האם יש ב- K איבר גדול ביותר לגבי יחס ההכלה? אם כן, מצא מיהו והוכח שהוא הגדול ביותר. אם לא, הוכח שאין.

שאלה 2

(אין קשר בין סעיפי השאלה)

R היא קבוצת המספרים הממשיים, Z היא קבוצת המספרים השלמים.

(13 נק') א. מהי עוצמת הקבוצה $(Z \times R) - ((R \times R) - (R \times Z))$? הוכח.

(12 נק') ב. כזכור אנו מסמנים $C = |R|$. נסמן $d = |P(R)|$.

מצאי את התשובה הנכונה והוכיחי אותה: האם d^C שווה ל-

$$\aleph_0 / C / d / 2^d / \text{אף אחד מאלה} ?$$

נמקי כל צעד בהוכחה.

שאלה 3

מצא את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ בטבעיים,

כאשר $x_1 + x_2$ הוא מספר זוגי. הערה: 0 הוא טבעי זוגי.

הדרכה: נתח את המקרים האפשריים עבור זוגי/אי-זוגי בכל אחד מהמשתנים ופתור עבור כל אחד מהמקרים. יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

נתון $k \neq 0$. סדרה מסוימת מקיימת את יחס הנסיגה (יחס רקורסיה):

$$a_{n+2} = -4ka_{n+1} + 12k^2a_n \quad \text{ידוע כי } k = \frac{1}{8}a_1 \quad \text{וכן ידוע ש- } a_0 = 0.$$

(20 נק') א. פתור את יחס הנסיגה ורשום ביטוי מפורש עבור a_n .

את הביטוי עליך להביא לצורה: $a_n = (\text{משהו}) \cdot k^n$,

כאשר הביטוי שבסוגרים תלוי ב- n אך אינו תלוי ב- k .

(5 נק') ב. חשב בשתי דרכים את a_2 .

שאלה 5

לפניך כמה טענות, חלק מהן נכונות וחלק לא. לכל טענה, ציין אם היא נכונה או לא. הוכח את הטענות הנכונות.

לכל טענה שאינה נכונה, הבא דוגמא נגדית - רצוי פשוטה.

אם אתה בוחר להפריך טענה בעזרת לוח אמת, הקפד לרשום לוח אמת ברור, וציין מיהם הפסוקים היסודיים.

בכל הסעיפים, α, β, γ הם פסוקים בשפת תחשיב הפסוקים, לא בהכרח שונים זה מזה, ולא בהכרח פסוקים יסודיים. **כתיב מקוצר - מותר.**

a. אם α אינו גורר טאוטולוגית את β , ו- β אינו גורר טאוטולוגית את α , אז בלוח אמת משותף של α, β , בכל שורה שאחד מהם מקבל ערך T, השני מקבל F.

b. אם $\alpha \wedge \beta \models \gamma$ אז $\alpha \models \gamma$ וגם $\beta \models \gamma$.

c. לכל פסוק α , הפסוק $\alpha \rightarrow (\sim \alpha)$ הוא סתירה.

d. לכל פסוק α , הפסוק $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\sim \alpha)$ הוא סתירה.

e. לכל פסוק α , הפסוק $\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\sim \alpha)) \rightarrow (\sim \alpha))$ הוא טאוטולוגיה.

f. לכל שני פסוקים α, β , הפסוק $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\alpha \rightarrow (\sim \beta))$ הוא טאוטולוגיה.

בהצלחה!