<u>בשאלות 1,2 סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף העמוד</u>

בשאלות הנ"ל יתכן ויש כמה טענות נכונות או אין בכלל טענות נכונות או כל הטענות נכונות.

שאלה 1:

א. (3%) אם $x \in B$ וכן $y \in A$, אז $\{x,y\} \cap (B \oplus A) \neq \varnothing$.

ב. (3%) אם $\{x,y\} \cap (B \oplus A) \neq \varnothing$, אז $x \in B$.

ג. (3%) אם $\{x,y\} \in P(B \oplus A)$ וכן $x \notin A$ אז $x \in B$

ד. (3%) אם $(B \oplus A) \neq \varnothing$, אז $|P(B \oplus A)| > |P(B)|$.

שאלה 2:

תהינה $A = \{1,2,3\}$. נגדיר יחס R המוגדר מעל A באופן הבא: $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

שאלה 2.1:

א. (3%) $|I_A \setminus R| = 2$.

ב. (3%) R סימטרית.

ג. (3%) R אנטיסימטרית.

ד. (3%) R טרנזיטיבית

שאלה 2.2: בהמשך לנתוני ההתחלה בשאלה, נגדיר רלציה T מעל A בצורה הבאה: $(a,b) \in T \Leftrightarrow a \neq 1$

א. (3%) $|T| = 6$

ב. (3%) $T \cup R = A \times A$.

ג. (3%) $R \oplus T$ רלצית שקילות

ד. (3%) $R \oplus T$ רלצית סדר חלקי

ב לא נכונה כי $(1,3)$ לא נמצא באיחוד.

ג לא נכונה כי $(1,2)$ נמצא בהפרש הסימטרי אבל $(2,1)$ לא, לכן לא סימטרי ולא שקילות.

ד לא נכונה כי $(1,2),(2,3)$ נמצאים בהפרש הסימטרי אבל $(1,3)$ לא, לכן לא טרנזיזיבי ולא סדר.

שאלה 3:

(14%) הוכח או הפרך את הטענה: $[A \oplus C] \cup [B \setminus C] \subseteq (A \oplus B) \cup C$.

אם הטענה נכונה, הוכח אותה ע"י שימוש במושג השייכות של איברים (לא ע"י אלגברה של קבוצות ולא בדיאגראמות ון). אם הטענה לא נכונה, הבא דוגמא נגדית.

תשובה: יהי $x \in [A \oplus C] \cup [B \setminus C]$, אז יתכן אחד מהשלושה:

1. $x \notin (B \setminus C) \quad x \in (A \oplus C)$, כלומר $[x \in A \quad x \notin B \quad x \notin C]$ או $[x \notin A \quad x \in B \quad x \in C]$ ואז ימין $x \in$
2. $x \in (B \setminus C) \quad x \notin (A \oplus C)$ כלומר $[x \notin A \quad x \in B \quad x \notin C]$ ואז ימין $x \in$
3. $x \in (B \setminus C) \quad x \in (A \oplus C)$ כלומר $[x \in A \quad x \in B \quad x \notin C]$ ואז ימין $x \notin$

ממקרה 3 נבנה דוגמא נגדית: $C = \{2\} \quad A = B = \{1\}$, לכן $[A \oplus C] \cup [B \setminus C] = \{1,2\} \not\subset (A \oplus B) \cup C = \{2\}$

שאלה 4:

<u>סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף השאלה</u>

א. (5%) בכתה 12 כסאות ממוספרים במספרים 1-12. 10 מהכסאות יוחלפו באקראי בכסאות חדשים הממוספרים במספרים 13-22. לאחר ההחלפה בוחרים 4 כסאות מתוך הכסאות שבכתה ועוד 2 כסאות מאלו שהוצאו, ומעבירים אותם לכתה אחרת. מספר ההרכבים השונים של כסאות שיועברו יהיה $C(22,6)$.

ב. (5%). האיבר הרציונלי בפיתוח של $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}+2\right)^{10}$ הינו 8320.

הסבר: איבר רציונלי בפיתוח של $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}+2\right)^{8}$ יווצר אם החזקה של האיבר הראשון תהיה כפולה של 4, והחזקה של האיבר השני תהיה כפולה של 3. וזה קורה בארבעה מקרים:

1. החזקה של 2 היא 8. האיבר הנוצר – 256, מספר הדרכים בהן האיבר נוצר 1.
2. החזקה של $\sqrt[4]{2}$ היא 4, החזקה של 2 היא 4. האיבר הנוצר – 32, מספר הדרכים בהן האיבר נוצר $70=\frac{8!}{4!4!}=\binom{8}{4}$.
3. החזקה של $\sqrt[3]{2}$ היא 3, החזקה של 2 היא 5. האיבר הנוצר – 64, מספר הדרכים בהן האיבר נוצר $56=\frac{8!}{3!5!}=\binom{8}{3}$.
4. החזקה של $\sqrt[3]{2}$ היא 3, החזקה של $\sqrt[4]{2}$ היא 4, החזקה של 2 היא 1. האיבר הנוצר – 8, מספר הדרכים בהן האיבר נוצר $280=\binom{8}{3}\binom{5}{4}$.

בסה"כ האיבר הרציונלי יהיה $1\cdot 256+70\cdot 32+56\cdot 64+280\cdot 8=8320$.

ג. (5%) $\sum_{i=0}^{352}2^i\binom{353}{i}=3^{353}-2^{353}$

ד. (5%) מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-132 שווה לרבע ממספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-660.

שאלה 5:

א. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=27$ המקיימים: $\left[2.5\cdot i\le x_i \quad ,i=1,2,3,4\right]$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: $4=D(4,1)$

ב. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים אי שליליים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=57$ המקיימים: $\left[\sum_{i=5}^{6}x_i\ne 18 \quad ,\sum_{i=2}^{4}x_i\ne 30\right]$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי)

תשובה:

נגדיר 2 קבוצות:

A_1 - קבוצת כל הפתרונות בהם $\sum_{i=2}^{4} x_i = 30$.

A_2 - קבוצת כל הפתרונות בהם $\sum_{i=5}^{6} x_i = 18$.

$$|A_1| = D(3,27)D(3,30)$$

$$|A_2| = D(4,39)D(2,18)$$

$$|A_1 \cap A_2| = D(3,30)D(2,18)$$

בנוסף, $|U| = D(6,57)$ ובסה"כ רצוננו ב-

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |U| - S_1 + S_2 = D(6,57) - D(3,27)D(3,30) - D(4,39)D(2,18) + D(3,30)D(2,18)$$

שאלה 6:

א. (8%) הנח כי לרשותנו קרשים באורך 6 מטר וברוחב וגובה קבועים. את הקרשים צובעים בשלושה צבעים (אדום, צהוב, וירוק). כל קרש אדום מחלקים לשלושה חלקים זהים (באורך 2 מטר כל אחד), וכל קרש צהוב מחלקים לשני חלקים זהים (באורך 3 מטר כל אחד). תהי $f(n)$ פונקציה המקבלת את מספר הדרכים השונות ליצור שורת קרשים באורך n. בנה יחס רקורסיה לחישוב $f(n)$ ומצא תנאי התחלה.

תשובה: $f(n) = f(n-2) + f(n-3) + f(n-6)$ כי בכל מצב מסתכלים על הקרש האחרון שהושם, ואז נשאר לסדר את יתרת האורך עד n. תנאי התחלה יהיו: $f(6) = 3$ $f(5) = 1$ $f(4) = 1$ $f(3) = 1$ $f(2) = 1$ $f(1) = 0$.

ב. (8%) פתור יחס רקורסיבי: $f(n) = f(n-1) + 6f(n-2), \quad f(0) = 14, \quad f(1) = 22$

תשובה: זהו יחס רקורסיבי לינארי: מפתרון $\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$, נקבל $\alpha_2 = -2$ $\alpha_1 = 3$. מכאן נקבל $f(n) = A \cdot (4)^n + B \cdot (-3)^n$, ומתנאי ההתחלה נקבל $B = 4$ $A = 10$, $f(n) = 10 \cdot (3)^n + 4 \cdot (-2)^n$.