<u>בשאלות 1,2 סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף העמוד</u>

בשאלות הנ"ל יתכן ויש כמה טענות נכונות או אין בכלל טענות נכונות או כל הטענות נכונות.

שאלה 1:

א. (3%) אם $x \in B$ וכן $x \notin A$, אז $x \in B \oplus (A \setminus B)$

ב. (3%) אם $x \in B \oplus (A \setminus B)$, אז $x \notin A$

ג. (3%) אם $x \in A \setminus B$ אז $\{\{x\}, \phi\} \subseteq P(A)$

ד. (3%) אם $|P(A)| = 1$ אז $A \neq \varnothing$

שאלה 2:

תהי $A = \{1,2,3,4\}$. נגדיר יחס R המוגדר מעל $A \times A$ (שים לב! לא מעל A) באופן הבא:

$R = \begin{pmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) & (4,4) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) & (3,3) & (4,4) & (2,1) \end{pmatrix}$, שימו לב כי ב-R 5 זוגות של זוגות איברים.

שאלה 2.1:

א. (3%) R רפלקסיבית.

ב. (3%) R סימטרית.

ג. (3%) R אנטיסימטרית.

ד. (3%) R טרנזיטיבית

שאלה 2.2: בהמשך לנתוני ההתחלה בשאלה, נגדיר רלציה T מעל $A \times A$ בצורה הבאה: $T = R \setminus I_{A\times A}$.

א. (3%) $|I_{A\times A} \cup T| = 17$

ב. (3%) $I_{A\times A} \cup T$ רלצית שקילות, ומספר מחלקות השקילות שלה הוא 3.

ג. (3%) $I_{A\times A} \cup T$ רלצית סדר חלקי.

ד. (3%) $T \setminus I_{A\times A} = T$

שאלה 3:

(14%) הוכח או הפרך את הטענה: $A \cap (B \oplus C) \subseteq (A \cap B) \oplus C$.

אם הטענה נכונה, הוכח אותה ע"י שימוש במושג השייכות של איברים (לא ע"י אלגברה של קבוצות ולא בדיאגראמות ון) . אם הטענה לא נכונה, הבא דוגמא נגדית.

הוכחה: יהי $x \in A \cap (B \oplus C)$, אז מתקיים אחד בדיוק מהשניים:

1. $x \in A \quad x \in B \quad x \notin C$
2. $x \in A \quad x \notin B \quad x \in C$

נראה כי בכל אחד משני המקרים האיבר x יהיה שייך לאגף הימני:

1. $x \in A \quad x \in B \quad x \notin C \Leftarrow x \in (A \cap B) \quad x \notin C \Leftarrow x \in (A \cap B) \oplus C$.
2. $x \in A \quad x \notin B \quad x \in C \Leftarrow x \notin (A \cap B) \quad x \in C \Leftarrow x \in (A \cap B) \oplus C$.

לכן בכל מקרה $x \in (A \cap B) \oplus C$ וההכלה מתקיימת.

שאלה 4:

סמן לכל אחת מהטענות הבאות רק את הסעיפים הנכונים בטבלה בסוף השאלה

א. (5%)אם מחברים בקטע של ישר כל זוג מתוך 6 נקודות במישור (שאף 3 מהן לא על אותו ישר), כל קטע צובעים באחד מתוך 2 צבעים, ייווצר בהכרח משולש כרומטי.

ב. (5%) $\sum_{i=1}^{55}\binom{55}{i}7^i 2^{53-i}i = 27.5\cdot 9^{54}$.

לא נכון כי

$$(x+2)^{55} = \sum_{i=0}^{55}\binom{55}{i}x^i 2^{55-i}$$

$$55(x+2)^{54} = \sum_{i=1}^{55}\binom{55}{i}i\cdot x^{i-1}2^{55-i} \underset{x=7}{=} \sum_{i=1}^{55}\binom{55}{i}i\cdot 7^{i-1}2^{55-i} = \frac{4}{7}\sum_{i=1}^{55}\binom{55}{i}7^i 2^{53-i}i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{55}\binom{55}{i}7^i 2^{53-i}i = \frac{7}{4}55(7+2)^{54} = 96.25\cdot 9^{54}$$

ג. (5%) האיבר החופשי בפיתוח $\left(2x^3+\frac{3}{x^2}+1\right)^7$ שווה לאיבר החופשי בפיתוח $\left(2x^3+\frac{3}{x^2}+1\right)^6$

ד. (5%) מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-525 הינו 240.

שאלה 5:

א. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=51$ המקיימים: $3\le x_i \quad ,i=1,2,3,4$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: $D(4,39)$

ב. (7%) מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=51$ המקיימים: $3\le x_i \le 12 \quad i=1,2,3,4$ (ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי).

תשובה: $D(4,39)-\binom{5}{1}D(4,29)+\binom{5}{2}D(4,19)-\binom{5}{3}D(4,9)$

שאלה 6:

א. (8%) נתונים n זוגות נשואים. מעוניינים לסדר מחדש את הזוגות (כל זוג יכיל גבר ואשה), כך שבסידור החדש לא נקבל אף זוג נשוי. מצא יחס רקורסיה למספר האפשרויות לסידור מחדש כמתואר. (קבע בנוסף תנאי התחלה).

תשובה: ראינו בכתה דוגמאות לאי-סדר מלא, וזה בדיוק המקרה: $f(n)=(n-1)[f(n-1)+f(n-2)]$, כאשר $f(2)=1 \quad f(1)=0$.

ב. (8%) פתור יחס רקורסיבי: $a_n=10a_{n-1}-21a_{n-2}, \quad a_0=0, \quad a_1=1$

תשובה: זהו יחס רקורסיבי לינארי: מפתרון $\alpha^2-10\alpha+21=0$, נקבל $\alpha_2=3 \quad \alpha_1=7$. מכאן נקבל $f(n)=A\cdot 7^n+B\cdot 3^n$, ומתנאי ההתחלה נקבל $B=-0.25 \quad A=0.25$, $f(n)=0.25\cdot 7^n-0.25\cdot 3^n$.