3. תמורות צירופים וחליפות עם החזרה.

שאלה מס׳ 1.

א) כמה ״ידיים״ שונות של ברידג׳ יכול שחקן לקבל? (בחפיסה 52 קלפים, מהם מקבל כל שחקן ברידג׳ 13 קלפים - אלה מהווים את ״יד הברידג׳״ שלו.)

ב) בכמה אופנים שונים יכולים הקלפים להתחלק בין 4 שחקני ברידג׳, כאשר אין מבחינים בין השחקנים?

תשובה:

א. $\binom{52}{13}$ - כמספר צירופים - האפשרויות ליצור תת קבוצה של 13 איברים מתוך 52.

ב. $\frac{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}{4!}$ - לראשון נבחר 13 איברים מתוך 52. לשני נבחר 13 איברים מתוך 39 שנותרו. לשני נבחר 13 איברים מתוך 26 שנותרו. לשני נבחר 13 איברים מתוך 13 שנותרו. בגלל אי חשיבות ההבחנה בין השחקנים, יש לחלק בתמורות השחקנים כדי למנוע כפילות במניה.

שאלה מס׳ 2.

כמה שלשות של מספרים שונים ניתן להרכיב מן המספרים $1,2,\ldots,20$, אם אין אף שלשה שמכילה שני מספרים עוקבים?

תשובה:

$\binom{20}{3}=1140$ - מספר הצירופים של 3 מספרים מתוך 20, בלי הגבלות.

$\binom{16}{1}\cdot\binom{17}{1}+\binom{17}{1}\binom{2}{1}=306$ - מספר הצירופים של 3 מספרים מתוך 20, בהם קיים זוג אחד בדיוק של מספרים עוקבים. אם בחרנו זוג מסוים באמצע הטווח (17 אפשרויות) – אזי בבחירת האיבר השלישי, זה מנטרל את בחירת האיבר שמשמאל והאיבר שמימין לזוג (לכן נותרו 16 בחירות). אם בחרנו זוג מסוים בקצה הטווח (2 אפשרויות) – אזי בבחירת האיבר השלישי, זה מנטרל את בחירת האיבר שמשמאל (אם אנו בקצה הימני) והאיבר שמימין לזוג (אם אנו בקצה השמאלי) (לכן נותרו 17 בחירות).

$\binom{18}{1}=18$ - מספר הצירופים של 3 מספרים מתוך 20, בהם קיימת שלישיה של מספרים עוקבים.

סה״כ יש $1140-306-18=816$ אפשרויות שמקיימות את התנאי בשאלה.

שאלה מס' 3.

א) בכמה אופנים אפשר לשים 6 עצמים שונים ב- 10 תאים שונים, כך שבאף תא לא יהיה יותר מעצם אחד?

ב) חזור על השאלה עבור k עצמים ו- n תאים, כאשר $k \le n$.

תשובה:

א. $P(10,6)=151200$ - צריך לבחור מבין התאים 6 נציגים למילוי ע"י 6 עצמים שונים.

ב. $P(n,k)=n!/(n-k)!$

שאלה מס' 4.

כמה סימנים שונים אפשר להצפין באמצעות סידורים שונים של 7 אפסים ואחדים, בשורה בת 7 מקומות?
רשום את הסידורים השונים של 0 ו- 1 בשורה בת 4 מקומות.

תשובה:

לכל מקום בשורה יש 2 אפשרויות – בסה"כ 2^7.

0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

שאלה מס' 5.

מהו מספר האפשרויות לחלק k עצמים שונים ל-n תאים שונים, כאשר אין הגבלה על תכולת התאים?

תשובה:

לכל עצם יש אפשרות להיות באחד מתוך n התאים, לכן n^k.

שאלה מס' 6.

מטילים שלוש קוביות שונות (שחורה, אדומה ולבנה). כמה תוצאות שונות אפשר לקבל בהטלה כזו?

תשובה:

לכל קוביה יש 6 אפשרות שונות, לכן 6^3.

שאלה מס' 7.

חזור על שאלה הקודמת, כאשר הקוביות זהות.

תשובה:

ראה שאלה 15!

שאלה מס' 8.

א) כמה מספרים בני 6 ספרות אפשר ליצור מהספרות 1,2,3,4?

ב) כמה מספרים כאלה אפשר ליצור מכל 10 הספרות?

ג) כמה מספרים בני 10 ספרות אפשר לרשום בעזרת הספרות 1,2,3, אם הספרה 3 מופיעה בכל אחד מהם פעמיים בדיוק?

תשובה:

א. לכל ספרה במספר יש 4 אפשרויות, לכן 4^6.

ב. לכל ספרה במספר יש 10 אפשרויות, לכן 10^6. אם מורידים את המספרים שמתחילים ב-0 (10^5), מקבלים $9\cdot10^5$.

ג. יש לבחור את 2 המקומות בהם מופיעה הספרה 3 ($\binom{10}{2}$), ובשאר 8 המקומות לשבץ משתי הספרות האחרות 2^8, ובסה"כ $\binom{10}{2}\cdot 2^8 = 11520$

שאלה מס' 9.

כמה סידורים שונים של דגלים אפשר לקבל מ- 4 דגלים כחולים, 2 דגלים לבנים ו- 3 דגלים אדומים, כאשר כל הדגלים מופיעים בכל סידור? נסח את הבעיה הכללית המתאימה לזו, ופתור אותה.

תשובה:

יש בסה"כ 9 מקומות. תחילה נבחר 4 מ-9 המקומות לשיבוץ הכחולים. אח"כ נבחר 2 מ-5 המקומות שנותרו לשיבוץ הלבנים. אח"כ נבחר 3 מ-3 המקומות שנותרו לשיבוץ האדומים. בסה"כ נקבל $\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{3}$.

הבעיה הכללית: כמה סידורים שונים של דגלים אפשר לקבל מ- m דגלים כחולים, n דגלים לבנים ו- p דגלים אדומים, כאשר כל הדגלים מופיעים בכל סידור? $\binom{m+n+p}{m}\cdot\binom{n+p}{n}\cdot\binom{p}{p}$

שאלה מס' 10.

א) כמה מספרים בני 6 ספרות אפשר ליצור מהספרות 2,3, ו- 7?

ב) כמה מהם הם מספרים זוגיים?

ג) בכמה מהמספרים הללו מופיעות 2 ספרות 2, 2 ספרות 3 ו- 2 ספרות 7?

ד) כמה מהמספרים האחרונים הם זוגיים?

תשובה:

א. לכל ספרה במספר יש 3 אפשרויות, לכן 3^6. ב. אלה שנגמרים ב-2, לכן 3^5.

ג. יש בסה"כ 6 מקומות. תחילה נבחר 2 מ-6 המקומות לשיבוץ 3. אח"כ נבחר 2 מ-4 המקומות שנותרו לשיבוץ 2. אח"כ נבחר 2 מ-2 המקומות שנותרו לשיבוץ 7. בסה"כ נקבל $\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{2}$.

ד. אלה שנגמרים ב-2. כעת נותרו 5 מקומות. תחילה נבחר 2 מ-5 המקומות לשיבוץ 3. אח"כ נבחר 1 מ-3 המקומות שנותרו לשיבוץ 2. אח"כ נבחר 2 מ-2 המקומות שנותרו לשיבוץ 7. בסה"כ נקבל $\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}$.

שאלה מס' 11.

כמה מספרים גדולים מ- 4,000,000 בנויים משתי ספרות 7. ספרה 5 אחת, שלוש ספרות 3 וספרה 2 אחת?

תשובה:

יש בסה"כ 7 מקומות. אנו מחפשים את אלה שמתחילים ב-5 או 7.

אם מתחיל ב-5: תחילה נבחר 2 מ-6 המקומות לשיבוץ 7. אח"כ נבחר 3 מ-4 המקומות שנותרו לשיבוץ 3. אח"כ נבחר 1 מ-1 המקומות שנותרו לשיבוץ 2. בסה"כ נקבל $\binom{1}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{2}$.

אם מתחיל ב-7: תחילה נבחר 1 מ-6 המקומות לשיבוץ 7. אח"כ נבחר 1 מ-5 המקומות לשיבוץ 5. אח"כ נבחר 3 מ-4 המקומות שנותרו לשיבוץ 3. אח"כ נבחר 1 מ-1 המקומות שנותרו לשיבוץ 2. בסה"כ נקבל $\binom{1}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{6}{1}$. בסה"כ $180=\binom{1}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{2}+\binom{1}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{6}{1}$.

שאלה מס' 12.

א) מהן מספר התמורות שאפשר לבנות מהאותיות של המלה aabadaddaa.

ב) מהו מספר התמורות שאפשר לבנות מהאותיות הבאות: a,a,a,a,b,b,b,c,c,c,c,c,d,e,e,e.

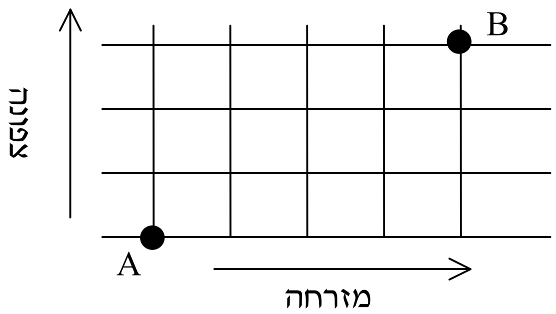
תשובה:

א. במילה יש 10 אותיות, מהן 3 d, 1 b, 6 a. $840=\binom{6}{6}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{10}{3}$

ב. במילה יש 16 אותיות. $201801600=\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{9}{5}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{16}{4}$

שאלה מס' 13.

בעיר מסוימת יש רשת רחובות ניצבים זה לזה (ראה איור).



כדי לעבור מ- A ל- B בדרך קצרה ככל שאפשר, יש ללכת 4 בלוקים מזרחה, ו- 3 בלוקים צפונה.
מהו מספר המסלולים השונים האפשריים לטיול כזה? הכלל את התוצאה.

תשובה:

שקול לבנית מילה של 7 אותיות, מהן 3 N (צפונה), 4 E (מזרחה). $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{4}=35$

שאלה מס' 14.

הראה על-ידי ספירה, כי עבור כל k, $D(2,k)=k+1$ $D(1,k)=1$

תשובה:

$D(1,k)=1$ - מספר האפשרויות להכניס k כדורים לתוך תא אחד, ובאמת יש רק אפשרות אחת.

$D(2,k)=k+1$ - מספר האפשרויות להכניס k כדורים לתוך 2 תאים, ובאמת יש $k+1$ אפשרויות לעשות זאת כי כך בוחרים כמה כדורים להכניס לתא הראשון (מ-0 עד k).

שאלה מס' 15.

מטילים 3 קוביות זהות. מהו מספר התוצאות השונות שאפשר לקבל?

תשובה:

$D(6,3)=\binom{8}{5}=56$ - נבנה תא לכל אחת מ-6 התוצאות האפשריות. אם לדוגמא לתא מספר 3 נכנסו 2 כדורים ולתא מספר 5 נכנס כדור אחד, המשמעות שיצא ההרכב (5-3-3).

שאלה מס' 16.

בוחרים ארבע פעמים מספר בין 1 ל- 10 (כולל 1 ו- 10).

א) כמה בחירות כאלה אפשריות, אם מתחשבים בסדר הבחירה?

ב) כמה בחירות שונות אפשריות, אם אין חשיבות לסדר הבחירה?

ג) כמה בחירות, מהסוג האחרון, סכום המספרים שנבחרו הוא זוגי?

תשובה:

א. 10^4

ב. $D(10,4)=\binom{13}{9}=715$

ג. כדי שזה יקרה צריך ששני מספרים יהיו זוגיים, או 4 או אף מספר.

$$D(5,2)D(5,2)+D(5,4)D(5,0)+D(5,0)D(5,4)=\binom{6}{4}\binom{6}{4}+\binom{8}{4}\binom{4}{4}+\binom{4}{4}\binom{8}{4}=365$$

שאלה מס' 17.

מהו מספר הפתרונות השלמים הלא-שליליים (להלן נקרא להם פתרונות מטבעיים) של המשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=16$.

תשובה:

$$D(5,16)=\binom{20}{4}=4845$$

שאלה מס' 18.

בכמה אופנים אפשר לפזר k עצמים זהים, ב- n תאים שונים, כך שכל תא יכיל עצם אחד לפחות? (במקרה זה $n \le k$).

תשובה:

$D(n,k\text{-}n)=\binom{k-1}{n-1}$ - לאחר שהצבנו בכל תא עצם אחד, נותרו k-n עצמים לחלוקה ל-n תאים.

שאלה מס' 19.

נתבונן באיור: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8

חלוקה של 8 עצמים זהים בין 3 תאים שונים, כך שבכל תא יהיה עצם אחד לפחות, שקולה להשארת 2 מחיצות בלבד מתוך 7 המחיצות שבין העצמים. הסבר זאת, ומצא את מספר האפשרויות במקרה הנדון.

תשובה:

$D(3,5)=\binom{7}{2}$ - לאחר שהצבנו בכל תא עצם אחד, נותרו 5 עצמים לחלוקה ל-3 תאים. נסתכל כעת על 7 אובייקטים שקיימים – אם נבחר 5 מהם להוות עצמים ו-2 מהם להוות מחיצות, בעצם ביצענו פילוח של 5 העצמים ל-3 קבוצות. את זה נעשה ע"י הצבת 2 מחיצות ב-2 מתוך 7 האובייקטים אליהם התייחסנו.

שאלה מס' 20.

מצא את מספר הפתרונות, בשלמים חיובים, של המשוואה - $x_1+x_2+...+x_n=k$

תשובה:

$D(n,k\text{-}n)=\binom{k-1}{n-1}$ - לאחר שהצבנו בכל תא עצם אחד (כדי שהערך של כל משתנה יהיה חיובי, נותרו k-n עצמים לחלוקה ל-n תאים.

שאלה מס' 21.

מצא את מספר הפתרונות של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=22$

א) בטבעיים.

ב) בשלמים חיובים.

תשובה:

א. $D(5,22)=\binom{26}{4}=14950$.

ב. $D(5,22\text{-}5)=\binom{21}{4}=5985$.

שאלה מס' 22.

הראה שלשתי המשוואות הבאות יש אותו מספר של פתרונות בטבעיים:

1) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=8$.

2) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9=5$.

תשובה:

1. $D(6,8)=\binom{13}{5}$.   2. $D(9,5)=\binom{13}{8}=\binom{13}{5}$

שאלה מס' 23.

מהו מספר האפשרויות לקנות 10 עטים, אם ידוע שאפשר להשיגם ב- 4 צבעים שונים?

תשובה:

$$D(4,10)=\binom{13}{3}=286$$

שאלה מס' 24.

כמה מספרים שלמים יש בין 1 ל- 10,000, כך שסכום ספרותיהם שווה ל- 9?

תשובה:

נתאים לכל ספרה משתנה, ונמצא את מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה הבאה:

$X_1+X_{10}+X_{100}+X_{1000}=9$ ונקבל $D(4,9)=\binom{12}{3}=220$

שאלה מס' 25.

א) בכמה אופנים אפשר לחלק 18 מכתבים זהים בין 5 תיבות דואר שונות?

ב) חזור על השאלה, במקרה שבכל תיבה צריכים לשים 2 מכתבים לפחות.

תשובה:

א. $D(5,18)=\binom{22}{4}=7315$

ב. $D(5,8)=\binom{12}{4}=495$

שאלה מס' 26.

מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=25$

המקיימים: $0\le x_1\le 25,\ 3\le x_2\le 25,\ 0\le x_3\le 25,\ 8\le x_4\le 25$.

תשובה:

נציב משתנה $x_4'=x_4-8$, $x_2'=x_2-3$ ונמצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה -

$$x_1+x_2'+x_3+x_4'=14$$

המקיימים: $0\le x_1\le 25,\ 0\le x_2'\le 22,\ 0\le x_3\le 25,\ 0\le x_4'\le 17$: ונקבל $D(4,14)=\binom{17}{3}=680$

שאלה מס' 27.

מהו מספר הפתרונות של המשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$

א) כאשר הפתרונות הם מספרים טבעיים, המקיימים $x_k \ge 8 (1 \le k \le 5)$, עבור k אחד לפחות.

ב) כאשר הפתרונות הם שלמים המקיימים: $2 \le x_1$, $7 \le x_2$, $-4 \le x_3$, $0 \le x_4$, $-3 \le x_5$.

תשובה:

א. כאן יש 5 פתרונות אפשריים, בכל פתרון בוחרים משתנה אחר שיקבל את הערך 8.

ב. שקול לשאלה: מהו מספר הפתרונות של המשוואה: $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6$, $D(5,6)=\binom{10}{4}=210$.

שאלה מס' 28.

א) רשום את כל הפתרונות בשלמים של המשוואה $x_1+x_2=15$, המקיימים: $-4 \le x_1, 2 \le x_2$.

ב) מהו מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=22$ המקיימים: $-5 \le x_1,\ -2 \le x_2, 3 \le x_3, 1 \le x_4$?

תשובה:

א. שקול לשאלה: הפתרונות של המשוואה: $y_1+y_2=17$, $D(2,17)=\binom{18}{1}=18$. הפתרונות האפשריים:

$$(x_1,x_2)=(-4,19),(-3,18),(-2,17),(-1,16),(0,15),(1,14),(2,13),(3,12),(4,11),$$
$$(5,10),(6,9),(7,8),(8,7),(9,6),(10,5),(11,4),(12,3),(13,2),$$

ב. שקול לשאלה: מהו מספר הפתרונות של המשוואה: $y_1+y_2+y_3+y_4=25$, $D(4,25)=\binom{28}{3}=3276$.

שאלה מס' 29.

מהו מספר האפשרויות לחלק k עצמים שונים ל- n תאים שונים, אם לתא ה- l –י ($1 < l < n$) יש להכניס k_l עצמים, $\sum_{l=1}^{n} k_l = k$? לסדר העצמים בתוך התא אין חשיבות.

תשובה:

$$\binom{k}{k_1}\cdot\binom{k-k_1}{k_2}\cdots\binom{k-(k_1+k_2+\ldots+k_{n-2})}{k_{n-1}}\cdot\binom{k-(k_1+k_2+\ldots+k_{n-1})=k_n}{k_n}.$$

שאלה מס' 30.

א) מהו מספר האפשרויות לחלק 12 איש לשלושה צוותים בני 4 אנשים כל אחד, כאשר לכל צוות תפקיד שונה?

ב) כנ"ל, פרט לכך שאין מבדילים בין תפקידי הצוותים. (כאן מדובר בחלוקה של קבוצה של 12 איש ל- 3 קבוצות בנות 4 אנשים כל אחת.

תשובה:

א. $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}$

ב. $\dfrac{\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}}{3!}$ - כאן צריך לחלק במספר התמורות של הקבוצות, כי כל סידור נוצר ב-$3!$ אפשרויות.

שאלה מס' 31.

מהו מספר האפשרויות לחלק כיתה של 42 תלמידים בין 6 מתרגלים, כך ששני מתרגלים יעבדו עם 8 תלמידים כל אחד, 3 עם 7 תלמידים כל אחד, והמתרגל השישי יעבוד עם 5 תלמידים (אנו מבחינים בין המתרגלים).

תשובה:

$$\binom{42}{8}\cdot\binom{34}{8}\cdot\binom{26}{7}\cdot\binom{19}{7}\cdot\binom{12}{7}\cdot\binom{5}{5}$$

שאלה מס' 32.

בכיתה של 18 תלמידים יש לבחור שלוש ועדות: אחת של 3 תלמידים, שניה של 4 תלמידים, ושלישית של 5 תלמידים. לכל ועדה תפקיד משלה.

א) מהו מספר הבחירות השונות, אם אסור לאותו תלמיד לכהן ביותר מועדה אחת?

ב) מהו מספר הבחירות השונות אם אין הגבלה כזו?

תשובה:

א. תחילה נבחר את 12 התלמידים שישמשו בועדות. ואח"כ נחלקם בין הועדות: $\binom{18}{12}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5}$

ב. $\binom{18}{3}\cdot\binom{18}{4}\cdot\binom{18}{5}$

שאלה מס' 33.

מהו מספר האפשרויות לפזר k עצמים שונים ב- n תאים שונים (יתכן ובתא אחד יהיו מספר עצמים), כאשר יש חשיבות לסדר בו מופיעים העצמים בתוך התא?

תשובה:

תחילה נסדר את k העצמים בשורה, ולאחר מכן נכניס n-1 מחיצות בינהם.

$$k!\cdot D(n,k)=k!\binom{k+n-1}{n-1}=k!\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}=\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}=P(k+n-1,k)$$

שאלה מס' 34.

הראה שיש $k!\binom{k-1}{n-1}$ אפשרויות לפזר k עצמים שונים בתוך n תאים שונים ($n \le k$), כך שכל תא יכיל עצם אחד לפחות, ולסדר העצמים בתוך התא יש חשיבות.

תשובה:

תחילה נסדר את k העצמים בשורה, ולאחר מכן נכניס n-1 מחיצות בינהם. אלא שכאן יש לנו n אובייקטים פחות, כי כך נבטיח כי בכל תא יש לפחות עצם אחד: $k!\cdot D(n,k-n)=k!\binom{k-1}{n-1}$

שאלה מס' 35.

הראה שאם בבעיה הקודמת התאים זהים (פרט לזאת, כל שאר התנאים אינם משתנים), הרי מספר האפשרויות הוא $\frac{k!}{n!}\binom{k-1}{n-1}$.

תשובה:

תחילה נסדר את k העצמים בשורה, ולאחר מכן נכניס n-1 מחיצות בינהם. אלא שכאן יש לנו n אובייקטים פחות, כי כך נבטיח כי בכל תא יש לפחות עצם אחד. בגלל שהתאים זהים, יש לחלק במספר התמורות של התאים כדי למנוע כפילות במניה: $k!\cdot D(n,k-n)\cdot\frac{1}{n!}=\frac{k!}{n!}\binom{k-1}{n-1}$

שאלה מס' 36.

א) בכמה אופנים אפשר לפזר 5 כדורים שונים ב- 4 תאים שונים המסומנים ב- $1, 2, 3, 4$?

ב) מהו מספר האפשרויות לעשות זאת, כאשר רק התאים 1 ו- 2 מכילים כדורים, ובכל אחד משניהם כדור אחד לפחות?

תשובה:

א. לכל כדור יש 4 אפשרויות שיבוץ, ואין מגבלה של שיבוץ מספר כדורים באותו תא: 4^5 אפשרויות.

ב. כאן לכל כדור יש 2 אפשרויות, ויש להפחית 2 אפשרויות בהן כל הכדורים נמצאים באחד משני התאים, לכן יש $2^5 - 2 = 30$ אפשרויות.

שאלה מס' 37.

בכמה אופנים אפשר לתאר המספר 30,030 כמכפלה של 3 גורמים שלמים, שכל אחד מהם גדול מ- 1? לסדר הגורמים אין חשיבות.

תשובה:

המחלקים הראשוניים של 30,030 הם 2,3,5,7,11,13, וכל אחד מהם מופיע פעם אחת במכפלה שיוצרת את 30,030. כדי ליצור את 30,030 ע"י מכפלה של 3 מספרים, יש לקחת את 6 המספרים (העצמים) השונים הללו ולשים אותם ב-3 תאים (מספרים), כאשר בכל תא יהיה לפחות עצם אחד. אם לסדר הגורמים אין משמעות, אזי לסדר התאים אין משמעות. כמובן שלסדר הפנימי של העצמים בכל תא אין משמעות, כיוון שמסתכלים על הגורם המוכפל כמספר, ולא כמכפלת מספרים.

לכן הבעיה היא בעית שיבוץ של 6 עצמים שונים ל-3 תאים זהים, כאשר לסדר הגורמים בתוך כל תא אין חשיבות, ובכל תא יכול להיות איבר אחד או יותר. כעת, צריך לבדוק מהן האפשרויות השונות לבצע זאת:

1. יתכן שיהיו שני תאים עם עצם אחד ותא אחד עם 4 עצמים. למצב זה יש $C(6,1)C(5,1)/2$ אפשרויות.
2. יתכן שיהיו שלושה תאים עם 2 עצמים. למצב זה יש $C(6,2)C(4,2)/3!$ אפשרויות.
3. יתכן שיהיה תא עם עצם אחד תא עם 2 עצמים, ותא עם 3 עצמים. למצב זה יש $C(6,1)C(5,2)$ אפשרויות.

בסה"כ נקבל 90 אפשרויות. אם הדרישה היתה שכל גורם יהיה גדול מאפס, אזי ניתן היה לאפשר גם תאים ריקים, שמשמעותם היא שאף מספר מששת המספרים הראשוניים הנ"ל לא נכנס (או שהמספר 1 בתא). במקרה זה ההרכבים האפשריים של התאים יכולים להיות $(6,0,0),(5,1,0),(4,1,1),(4,2,0),(3,3,0),(3,2,1),(2,2,2)$, וניתן לחשב באופן דומה את האפשרויות שנוספו.

שאלה מס' 38.

באלף - בית העברי 22 אותיות. מילה בת ארבע אותיות מעל הא"ב הזה היא כל רביעיה סדורה של אותיות מהא"ב. בכמה מלים כאלה מופיעות 2 (או יותר) אותיות זהות?

תשובה:

מספר האפשרויות ליצור מילה בת 4 אותיות בה כל אות מופיעה פעם אחת הוא $P(22,4)$. מספר האפשרויות ליצור מילה בת 4 אותיות בלי כל מגבלה הוא 22^4. בסה"כ ההפרש $22^4 - P(22,4) = 58696$.

שאלה מס' 39.

נתון האלף-בית $\Sigma=\{0,1,2\}$. Σ_8 היא קבוצת המלים באורך 8 מעל אלף-בית זה.

א) מהו מספר המלים ב- Σ_8?

ב) כמה מלים מתוכן מכילות בדיוק ארבע אותיות 0 וארבע אותיות 2?

ג) כמה מלים מתוכן מכילות בדיוק שלוש אותיות 1?

ד) כמה מלים מתוכן מכילות לפחות 0 אחד, 1 אחד, ו- 2 אחד?

תשובה:

א. לכל אות במילה יש 3 אפשרויות שונות: 3^8 אפשרויות.

ב. כאן צריך לבחור מבין 8 אותיות המילה, 4 נציגים שישמשו בתפקיד "האות 0" והיתרה ישמשו בתפקיד "האות 2". בחירת 4 אותיות ה-0 תקבע בצורה חד-משמעית גם את בחירת 4 אותיות ה-2 (אלה שנותרו). לכן בסה"כ יש לחשב את מס' הצירופים השונים של 4 אותיות מתוך 8 – כלומר $C(8,4)=\frac{8!}{4!4!}$.

ג. כאן צריך לבחור קודם את 3 האותיות במילה שישמשו בתפקיד "1", ולאחר מכן לשאר 5 האותיות יש 2 אפשרויות לכל אות (0 או 2). $C(8,3)2^5$.

ד. כאן הפתרון השיטתי נעשה עם הכלה והפרדה, חומר שנלמד בהמשך. נגדיר 3 קבוצות של מילים, ואת המשלימות שלהן:

A – כל המילים שאינן מכילות את האות "0". A^c – כל המילים שמכילות את האות "0" לפחות פעם אחת.

B – כל המילים שאינן מכילות את האות "1". B^c – כל המילים שמכילות את האות "1" לפחות פעם אחת.

C – כל המילים שאינן מכילות את האות "2". C^c – כל המילים שמכילות את האות "2" לפחות פעם אחת.

אנו מעוניינים למעשה בקבוצת המילים ששייכת גם ל- A^c, גם ל- B^c וגם ל- C^c. כלומר מחפשים את מספר המילים בקבוצה $A^c\cap B^c\cap C^c$. כיוון ש- $A^c\cap B^c\cap C^c=(A\cup B\cup C)^c$, אנו בעצם מחפשים את כל המילים שאינן באיחוד של A,B,C. מנוסחא בפיתחנו בפרק הראשון של הקורס נקבל כי:

$$\left|(A\cup B\cup C)^c\right|=3^8-|A\cup B\cup C|=3^8-\left[|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|\right]$$

$|A|$ - מס' המילים שאינן מכילות את האות "0", כלומר מכילות רק 1 ו/או 2 - 2^8. באותו אופן $|B|,|C|$.

$|A\cap B|$ - מס' המילים שאינן מכילות את האותיות 0,1 כלומר מכילות רק 2. כמובן שיש רק מילה אחת כזו.

באותו אופן $|B\cap C|,|A\cap C|$.

$|A\cap B\cap C|$ - מס' המילים שאינן מכילות את האותיות 0,1,2. כמובן שאין מילה כזו.

בסה"כ נקבל $\left|(A\cup B\cup C)^c\right|=3^8-\left[2^8+2^8+2^8-1-1-1+0\right]=5796$

שאלה מס' 40.

בכמה אופנים ניתן להושיב 10 אנשים על ספסל בן 10 מקומות, כך ששניים מסוימים מהם, א' ו- ב', לא ישבו זה ליד זה? שני החישובים הבאים סופרים את מספר האפשרויות האלה: $10!-2\cdot9!=8\cdot7\cdot8!+2\cdot8\cdot8!$. נמק כל אחד מהם באופן קומבינטורי.

תשובה:

$10!-2\cdot9!$ - מספר הסידורים של 10 אנשים בלי מגבלה הוא $10!$. מספר הסידורים בהם 2 האנשים יושבים אחד ליד השני הוא $9!$, ואת זה יש להכפיל ב-$2!$, שזה מספר הסידורים הפנימיים של הזוג.

$8\cdot7\cdot8!+2\cdot8\cdot8!$ - אם א' יושב באחד מ-8 המקומות באמצע, ל-ב' נשארו 7 מקומות אפשריים לישיבה, ובשאר 8 המקומות יכולים להסתדר כל 8 האחרים, בכל סדר. אם א' יושב באחד מ-2 המקומות בצד, ל-ב' נשארו 8 מקומות אפשריים לישיבה, ובשאר 8 המקומות יכולים להסתדר כל 8 האחרים, בכל סדר.

שאלה מס' 41.

מהו מספר האפשרויות להושיב 6 זוגות סביב שולחן עגול, אם כל הגברים יושבים זה ליד זה וכל הנשים יושבות זו ליד זו?

תשובה:

$6!\cdot6!$ - כאן ניקח 2 קבוצות של 6 אנשים, וכל אחת ניתן לסדר בסדר פנימי. סדר הקבוצות לא משנה כי הישיבה היא מסביב לשולחן עגול, בו מבחינים רק בסמיכות הישיבה ולא במיקום המוחלט של כל אובייקט.

שאלה מס' 42.

בכמה אופנים אפשר להושיב 6 זוגות סביב שולחן עגול, כך שכל שני בני זוג ישבו זה ליד זה?

תשובה:

$(2!)^6\cdot5!$ - כאן ניקח 6 זוגות (עצמים), נסדרם בשולחן עגול, וכל אחת ניתן לסדר בסדר פנימי.

שאלה מס' 43.

א) יש לחלק 12 תלמידים ו- 4 מורים לשתי קבוצות, שכל אחת מהן תכלול 6 תלמידים ו- 2 מורים. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת?

ב) מהו מספר האפשרויות, כאשר בקבוצה אחת 6 תלמידים ו- 3 מורים ובשניה 6 תלמידים ומורה אחד?

תשובה:

א. ניצור קבוצה אחת, ואז השניה תיווצר מאליו, ונחלק ב-2 כדי למנוע כפילות מניה של אותה חלוקה (אם נבחר קבוצה אחת או את הקבוצה המשלימה, נקבל אותה חלוקה) - $\binom{12}{6}\cdot\binom{4}{2}\Big/2$

ב. ניצור קבוצה אחת, ואז השניה תיווצר מאליו. כאן, בגלל חוסר הסימטריה של הקבוצות לא יכולה להיווצר כפילות של מניה - $\binom{12}{6}\cdot\binom{4}{3}$

שאלה מס' 44.

בכמה אופנים ניתן לבחור 5 נעליים מתוך 9 זוגות נעליים, כך שלא ייבחר אף זוג?

תשובה:

תחילה נבחר את 5 הזוגות שישלחו נציגים, ולאחר מכן מכל אחד מהזוגות נבחר את הנציג $\binom{9}{5}\cdot 2^5$.

שאלה מס' 45.

בכמה אופנים אפשר לחלק 5 תפוחים, 6 תפוזים ו-7 אגסים בין 3 ילדים (מניחים כי פירות מאותו סוג זהים).

רמז: אין קשר בין חלוקת פרי זה או אחר. כל אחד אפשר לחלק לחוד.

תשובה:

$D(3,5)\cdot D(3,6)\cdot D(3,7)=\binom{7}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{9}{2}=21168$, כי החלוקות בלתי-תלויות.

שאלה מס' 46.

12 תלמידים מתחלקים ל- 3 קבוצות, בנות 4 תלמידים כל אחת. מהו מספר החלוקות שבהן התלמידים x ו-y יהיו בקבוצות שונות?

תשובה:

$\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}\Big/3!-\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}\Big/2!$. מחסרים ממספר החלוקות האפשרי, את אותן חלוקות בהן x,y ביחד. שימו לב כי יש לחלק במספר התמורות האפשריות בין הקבוצות הסימטריות.

שאלה מס' 47.

מטילים n קוביות זהות. מהו מספר התוצאות האפשריות של ניסוי כזה?

תשובה:

לכל קוביה יש 6 תוצאות אפשריות, עליהן נחשוב כתאים. הקוביות יהוו את הכדורים הזהים, ועלינו לבדוק את מס' האפשרויות לחלק n כדורים ל-6 תאים שונים: $D(6,n)=\binom{5+n}{5}$.

שאלה מס' 48.

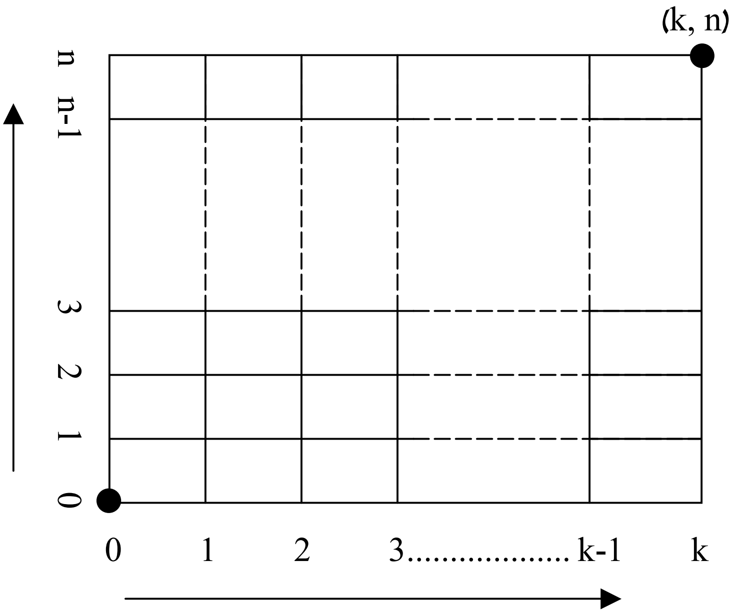
נתונים 3 כדורים לבנים, 1 שחור, 1 ירוק, 1 צהוב. בחר מתוכם 4 כדורים וסדר אותם בשורה. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת, אם 2 סידורים נחשבים שונים, כאשר הם שונים בהרכבם ו/או בסדר הכדורים? (הכדורים הלבנים זהים).

תשובה:

$4!+\binom{3}{2}\cdot\frac{4!}{2!}+\binom{3}{1}\cdot\frac{4!}{3!}=72$. אם בחרנו רק כדור לבן אחד, יש 4 כדורים מ-4 צבעים. אם בחרנו 2 לבנים, יש לבחור מ-3 הצבעים האחרים 2 כדורים, ולבסוף למנוע מניה כפולה של סידורים בגלל אי ההבחנה בין 2 הלבנים. אם בחרנו 3 לבנים, יש לבחור מ-3 הצבעים האחרים כדור אחד, ולבסוף למנוע מניה כפולה של סידורים בגלל אי ההבחנה בין 3 הלבנים.

שאלה מס' 49.

נתונה רשת מלבנית (ראה איור)



ברשת זו מתקדמים מהנקודה (0, 0) אל הנקודה (k, n) בצעדים באורך 1, ימינה או למעלה בלבד (אין חזרות שמאלה או למטה). מהו מספר האופנים השונים להגיע מ- (0, 0) אל (k, n)?

תשובה:

כאן יש k+n מסעים, מהם צריך לבחור k שיהיו ימינה $\frac{(k+n)!}{k!\cdot n!}=\binom{k+n}{k}$.

שאלה מס' 50.

הכלל את הבעיה הקודמת ל- 3 ממדים. מהו מספר המסלולים בין שתי נקודות ברשת תלת-ממדית כזו, אם המעבר מאחת לשניה דורש 6 הזזות ימינה, 4 הזזות קדימה ו- 7 הזזות למעלה? (בהזזה מתכוונים למהלך של צעד אחד).

תשובה:

כאן יש $6+4+7=17$ מסעים, מהם צריך לבחור 6 שיהיו ימינה, ומהיתרה 4 קדימה, ומהיתרה 7 למעלה

$$\binom{17}{6}\cdot\binom{11}{4}\cdot\binom{7}{7}=\frac{17!}{6!11!}\cdot\frac{11!}{4!7!}\cdot\frac{7!}{7!0!}=\frac{17!}{6!4!7!}=4084080.$$

שאלה מס' 51.

במישור מסומנות n נקודות. m מהן נמצאות על ישר אחד, ואף שלוש מהשאר אינן על ישר אחד. מהו מספר המשולשים הנקבעים במישור על-ידי נקודות אלו?

תשובה:

כדי ליצור משולש צריך 3 נקודות שאינן על ישר אחד. אם כל הנקודות היו מוצבות במישור כך שאין 3 על אותו ישר, היו $\binom{n}{3}$ אפשרויות. בגלל ש-m נקודות נמצאות על אותו ישר, יש להפחית את אותם משולשים שלא יכולים להיווצר מאותן נקודות $\binom{m}{3}$. נותרנו עם $\binom{n}{3}-\binom{m}{3}$ אפשרויות.

שאלה מס' 52.

השתמש בשיקול קומבינטורי להוכחת העובדה, שהמספרים הבאים הם מספרים שלמים:

א) $\frac{(2n)!}{2^n}$ ב) $\frac{(3n)!}{2^n\cdot 3^n}$.

תשובה:

א. $\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}\cdot\frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}\cdots\frac{(4)!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!}=\frac{(2n)!}{(2!)^n}$. זהו מספר האפשרויות לבחור n זוגות בזה אחר זה (כאשר סדרם הפנימי לא משנה).

ב. $\binom{3n}{3}\cdot\binom{3n-3}{3}\cdots\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}=\frac{(3n)!}{3!(3n-3)!}\cdot\frac{(3n-3)!}{3!(3n-6)!}\cdots\frac{(3)!}{3!3!}\frac{3!}{3!0!}=\frac{(3n)!}{(3!)^n}=\frac{(3n)!}{(3\cdot2\cdot1)^n}=\frac{(3n)!}{3^n\cdot 2^n}$. זהו מספר האפשרויות לבחור n שלשות בזה אחר זה (כאשר סדרם הפנימי לא משנה).