4. הבינום של ניוטון. פירוק מולטינומי.

שאלה מס' 1.

פתח את הביטויים הבאים:

א) $(x+a)^8$.

ב) $(2x+3)^4$.

ג) $(x-a)^9$.

תשובה:

א. $(x+a)^8=\binom{8}{0}x^8a^0+\binom{8}{1}x^7a^1+\binom{8}{2}x^6a^2+\binom{8}{3}x^5a^3+\binom{8}{4}x^4a^4+\binom{8}{5}x^3a^5+\binom{8}{6}x^2a^6+\binom{8}{7}x^1a^7+\binom{8}{8}x^0a^8$.

ב. $(2x+3)^4=\binom{4}{0}(2x)^4 3^0+\binom{4}{1}(2x)^3 3^1+\binom{4}{2}(2x)^2 3^2+\binom{4}{3}(2x)^1 3^3+\binom{4}{4}(2x)^0 3^4$

ג.
$$(x-a)^9=\binom{9}{0}x^9a^0-\binom{9}{1}x^8a^1+\binom{9}{2}x^7a^2-\binom{9}{3}x^6a^3+\binom{9}{4}x^5a^4-$$
$$-\binom{9}{5}x^4a^5+\binom{9}{6}x^3a^6-\binom{9}{7}x^2a^7+\binom{9}{8}x^1a^8-\binom{9}{9}x^0a^9$$

שאלה מס' 2.

א) מהו מקדם של x^7a^4 בפיתוח $(x+a)^{11}$?

ב) מהו מקדם של x^6a^6 בפיתוח $(x+a)^{12}$?

תשובה:

א. $330=\binom{11}{4}$.

ב. $924=\binom{12}{6}$

שאלה מס' 3.

כמה איברים רציונליים יש בפיתוח $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{5}\right)^{80}$?

תשובה:

כדי שאיבר יהיה רציונלי, חזקת האיבר הראשון צריכה להיות זוגית, וחזקת האיבר השני צריכה להתחלק ב-4. האפשרות ששני התנאים יקרו הן כאשר חזקת האיבר השני היא $4,8,12,\dots,76,80$. לכן יש 20 איברים כאלה.

שאלה מס' 4.

רשום את 6 השורות הראשונות של משולש פסקל.

תשובה:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

שאלה מס' 5.

על-ידי שימוש במשולש פסקל, הראה: $\binom{7}{4}=\binom{6}{4}+\binom{5}{3}+\binom{4}{2}+\binom{3}{1}+\binom{2}{0}$

רמז: $\binom{4}{1}=\binom{3}{1}+\binom{3}{0};\ \binom{3}{0}=\binom{2}{0}$.

תשובה: תכונת משולש פסקל הינה: $\binom{n+1}{i+1}=\binom{n}{i+1}+\binom{n}{i}$, כלומר שסכום שני איברים סמוכים בשורה מסוימת שווה לערך האיבר שבינהם בשורה שמתחת.

$$\binom{2}{0}=\binom{3}{0}\Rightarrow\binom{2}{0}+\binom{3}{1}=\binom{4}{1}\Rightarrow\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}\Rightarrow\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}=\binom{7}{4}$$

שאלה מס' 6.

כזכור, מספר התת - קבוצות השונות בנות k איברים של קבוצה A בעלת n איברים הוא: $\binom{n}{k}$.

שים לב: לפי ההגדרה $\binom{n}{0}=1$, בהסכמה עם כך שלקבוצה יש תת-קבוצה ריקה אחת. על-ידי שימוש בנ"ל הוכח, שמספר התת-קבוצות השונות של קבוצה A בעלת n איברים הוא 2^n.

תשובה: נסתכל על הפיתוח של

$$\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}=\binom{n}{n}1^0 1^n+\binom{n}{n-1}1^1 1^{n-1}+\ldots+\binom{n}{1}1^{n-1}1^1+\binom{n}{0}1^n 1^0=(1+1)^n.$$

שאלה מס' 7.

א) בשאלון מסוים יש 10 שאלות, לכל שאלה 2 תשובות אפשריות, כן או לא. בכמה אופנים שונים יכול הנשאל לענות על השאלון, אם עליו להשיב על כולו?

ב) חזור על השאלה, אם הנשאל יכול גם להימנע מלענות על שאלה כלשהי.

תשובה:

א. לכל שאלה יש 2 אפשרויות, ולכל 10 התשובות 2^{10} שילובים אפשריים של תשובות.

ב. לכל שאלה יש 3 אפשרויות (2 תשובות ואפשרות של אי מענה), ולכל 10 התשובות 3^{10} שילובים אפשריים של תשובות.

שאלה מס' 8.

בשאלון n שאלות. מהו מספר האפשרויות למילוי טופס תשובות, אם לכל שאלה יש 2 תשובות אפשריות, ויש לענות על לפחות ממחצית השאלות בתשובה I? (הנח כי n אי-זוגי)

תשובה:

לכל שאלה יש 2 אפשרויות, ולכל n התשובות 2^n שילובים אפשריים של תשובות. אנו מחפשים רק חלק מאפשרויות אלו. נפרק את 2^n :

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n1^0+\binom{n}{1}1^{n-1}1^1+\ldots+\binom{n}{(n-1)/2}1^{(n+1)/2}1^{(n-1)/2}+\binom{n}{(n+1)/2}1^{(n-1)/2}1^{(n+1)/2}+\ldots+\binom{n}{n-1}1^11^{n-1}+\binom{n}{n}1^01^n$$

ברור כי עלינו לקחת רק את החצי השמאלי של הסכימה, ובגלל הסימטריה נקבל בדיוק $2^n/2=2^{n-1}$

שאלה מס' 9.

הוכח: $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=0+\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}=2^{n-1}\cdot n$

רמז: הוכח תחילה $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

תשובה: דרך א': ניתן להוכיח ללא שימוש ברמז, אלא ע"י גזירת הביטוי הסגור והביטוי המפורק:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}x^k$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[(1+x)^n\right]'=n(1+x)^{n-1}\underset{x=1}{=}n2^{n-1}\\&\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}x^k\right]'=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}1^{n-k}x^{k-1}\underset{x=1}{=}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

דרך ב': $k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n\left[(n-1)!\right]}{(k-1)!(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}$. לכן

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n2^{n-1}$$

שאלה מס' 10.

הוכח הזהות: $\binom{n}{k}\binom{k}{h}=\binom{n}{h}\binom{n-h}{k-h}$

א) תן הוכחה אלגברית.

ב) תן הוכחה קומבינטורית.

רמז: חשוב על 2 דרכים שונות לקביעת מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים נתונים, ו- h איברים מתוך k האיברים שנבחרו $(h\le k\le n)$.

תשובה:

א. $\binom{n}{k}\binom{k}{h}=\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{k!}{h!(k-h)!}=\frac{n!}{(n-k)!h!(k-h)!}=\frac{n!}{h!(n-h)!}\cdot\frac{(n-h)!}{(k-h)!(n-k)!}=\binom{n}{h}\binom{n-h}{k-h}$.

ב. $\binom{n}{k}\binom{k}{h}$ - נבחר מתוך n איברים k מועמדים, ולאחר מכן נבחר מתוך k הנבחרים h נציגים.

$\binom{n}{h}\binom{n-h}{k-h}$ - נבחר מתוך n איברים h נציגים, ונבחר את יתר k-h המועמדים, מיתר n-h האיברים שנותרו.

זו בחירה דומה לבחירות של חברי כנסת (k), ולאחר מכן מתוך נבחרי הכנסת לבחור שרים (h).

שאלה מס' 11.

האם $\binom{n}{k}\binom{k}{h}$ שווה ל- $\binom{n}{h}$? אם כן, הוכח. אם לא, תן נימוק קומבינטורי מדוע אין לחשב את מספר הבחירות של h איברים מתוך n, על-ידי כך שמוצאים את מספר הבחירות של k איברים מתוך n וכופלים מספר זה במספר האפשרויות לבחור h איברים מתוך k האיברים שנבחרו $h\le k\le n$.

תשובה:

$\binom{n}{k}\binom{k}{h}$ - נבחר מתוך n איברים k מועמדים, ולאחר מכן נבחר מתוך k הנבחרים h נציגים. כלומר שאותם h נציגים יכולים להיבחר במספר אפשרויות, בהם בוחרים תחילה קבוצה המכילה אותם, דבר שלא קורה בחישוב $\binom{n}{h}$, בו מונים כל הרכב של h נציגים פעם אחת.

שאלה מס' 12.

הוכח את הזהות: $\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$.

תשובה:

הוכחה קומבינטורית: הצד הימני משקף בחירת k נציגים מתוך m+n מועמדים. הצד השמאלי מפרק את הבחירות לאפשרויות זרות, שכל אחת מאופיינת עפ"י מספר הנבחרים מקבוצת אוכלוסייה מסוימת (בת n מועמדים) והיתרה משאר m המועמדים.

שאלה מס' 13.

הוכח: $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$.

תשובה:

הוכחה אלגברית:

$$\binom{2n}{2}=\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}=\frac{(2n)(2n-1)}{2}=2n^2-n=n(n-1)+n^2=2\frac{n!}{2!(n-2)!}+n^2=2\binom{n}{2}+n^2$$

שאלה מס' 14.

מצא הוכחה קומבינטורית לשוויון שבשאלה מס' 13. לשם כך, חלק קבוצה בעלת 2n איברים לשתי קבוצות, בנות n איברים כל אחת, וחשב - בשתי דרכים - את מספר זוגות האיברים שאפשר לבנות מקבוצה בת 2n איברים.

תשובה:

הצד השמאלי משקף בחירת זוג מתוך קבוצה בת 2n איברים.

הצד הימני מבצע אותו חישוב בצורה שונה – תחילה נחלק את הקבוצה של 2n האיברים ל-2 קבוצות בנות n איברים כל אחת. כעת את 2 האיברים הנבחרים ניתן לבחור בשלושה אופנים עיקריים – שניהם מהקבוצה של n האיברים הראשונים $\binom{n}{2}$, שניהם מהקבוצה של n האיברים האחרונים $\binom{n}{2}$, או איבר אחד מהקבוצה של n האיברים הראשונים, והאיבר השני מהקבוצה של n האיברים האחרונים $n\cdot n=n^2$.

שאלה מס' 15.

הוכח את הזהות: $\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k}+...+\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

תשובה:

$\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}\Rightarrow\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=\binom{k+2}{k+1}$ נמשיך לקבץ כך איברים עד שנגיע למחובר השמאלי ביותר, שם נסיים $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$.

שאלה מס' 16.

הוכח את הזהויות:

א) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$

ב) $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{k+i}=\binom{m+n}{m+k}$

תשובה:

א. נסתכל על הביטוי $(x+1)^{2n}$: המקדם של x^n הוא $\binom{2n}{n}$. מצד שני ניתן להסתכל על הביטוי $(x+1)^{2n}=(x+1)^n\cdot(x+1)^n$: כדי להגיע כאן לכל המכפלות שיוצרות את x^n, יש לעבור על כל חזקה אפשרית בפירוק הראשון, ולהשלים אותה עם חזקה מתאימה בפירוק השני: לדוגמא, אם בפירוק הראשון קיבלנו את החזקה i, צריך מהפירוק השני להגיע לחזקה n-i, ואז מכפלת הביטויים הללו תיתן x^n. החזקה השניה בצד השמאליי נובע מהזהות של $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$.

ב. באופן דומה להוכחה של א': נסתכל על הביטוי $(x+1)^{m+n}$: המקדם של x^{m+k} הוא $\binom{m+n}{m+k}$. מצד שני ניתן להסתכל על הביטוי $(x+1)^{m+n}=(x+1)^m\cdot(x+1)^n$: כדי להגיע כאן לכל המכפלות שיוצרות את x^{m+k}, יש לעבור על כל חזקה אפשרית בפירוק הראשון, ולהשלים אותה עם חזקה מתאימה בפירוק השני: לדוגמא, אם בפירוק הראשון קיבלנו את החזקה m-i, צריך מהפירוק השני להגיע לחזקה k+i, ואז מכפלת הביטויים הללו תיתן x^{m+k}. המעריך הריבועי בצד הימני נובע מהזהות של $\binom{m}{i}=\binom{m}{m-i}$.

שאלה מס' 17.

הוכח: $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$

תשובה:

$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}\Rightarrow\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}=\binom{n+2}{1}$ נמשיך לקבץ כך איברים עד שנגיע למחובר הימני ביותר, שם נסיים $\binom{n+k}{k-1}+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$.

שאלה מס' 18.

הוכח את הזהות: $\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k}+\ldots+\binom{n+m}{k}=\binom{n+m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$

תשובה:

לאחר העברת האיבר הימני המחוסר, לאגף השמאלי, נקבל $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$. נמשיך לקבץ כך איברים עד שנגיע למחובר הימני ביותר, שם נסיים $\binom{n+m}{k+1}+\binom{n+m}{k}=\binom{n+m+1}{k+1}$.

שאלה מס' 19.

הוכח את הזהות שבשאלה מס' 12: $\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$ בדרך אלגברית.

תשובה:

נסתכל על הביטוי $(x+1)^{m+n}$: המקדם של x^k הוא $\binom{m+n}{k}$. מצד שני ניתן להסתכל על הביטוי $(x+1)^{m+n}=(x+1)^m\cdot(x+1)^n$: כדי להגיע כאן לכל המכפלות שיוצרות את x^k, יש לעבור על כל חזקה אפשרית בפירוק הראשון, ולהשלים אותה עם חזקה מתאימה בפירוק השני: לדוגמא, אם בפירוק הראשון קיבלנו את החזקה i, צריך מהפירוק השני להגיע לחזקה k-i, ואז מכפלת הביטויים הללו תיתן x^k.

שאלה מס' 20.

חשב את הסכומים :

א) $\sum_{i=2}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}$.

ב) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

ג) $\sum_{i=0}^{n} 2^i\binom{n}{i}$.

תשובה:

א.

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}x^i$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[(1+x)^n\right]' = n(1+x)^{n-1} \Rightarrow \left[(1+x)^n\right]'' = n(n-1)(1+x)^{n-2} \underset{x=1}{=} n(n-1)2^{n-2} \\ \left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}x^i\right]' = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}1^{n-i}x^{i-1} \Rightarrow \left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}x^i\right]'' = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}1^{n-i}x^{i-2} \underset{x=1}{=} \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} = n(n-1)2^{n-2}$$

ב.

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}x^i$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^1 (1+x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \\ \int_0^1 \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}x^i dx = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{x^i}{i+1}\Big|_{x=0}^{1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{i+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{i+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ג. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}2^i = (1+2)^n = 3^n$

שאלה מס' 21.

הוכח: $\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+5\binom{n}{5}+\ldots=2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+6\binom{n}{6}+\ldots=n\cdot 2^{n-2}$

תשובה:

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-x)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k$$

$$\left.\begin{aligned}\left[(1-x)^n\right]'&=-n(1-x)^{n-1}\underset{x=1}{=}0\\ \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k\right]'&=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}(-1)^k x^{k-1}\underset{x=1}{=}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0$$

לכן סכום האיברים הזוגיים שווה לסכום האיברים האי-זוגיים שיעברו לאגף השני, ונקבל את השוויון השמאלי שנדרש בשאלה. הסכום של שני האגפים (לפי שאלה 9) הינו $n\cdot 2^{n-1}$, לכן כל אחד מהם שווה למחצית.

שאלה מס' 22.

חשב את הסכום: $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\ldots$

תשובה:

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\ldots=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}\right]+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}\ldots\right]=$$

$$=(1+1)^n+\frac{1}{2}(1+1)^n=2^n+2^{n-1}$$

שאלה מס' 23.

חשב את הסכום: $1+2\binom{n}{1}+\ldots+(i+1)\binom{n}{i}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n}$

תשובה:

$$1+2\binom{n}{1}+\ldots+(i+1)\binom{n}{i}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}+2^n$$

שאלה מס' 24.

א) הוכח: $n\binom{n-1}{k}=(k+1)\binom{n}{k+1}$.

ב) מהו הפירוש הקומבינטורי של שוויון זה?

תשובה:

א.
$$n\binom{n-1}{k}=\frac{n\cdot(n-1)!}{k!(n-1-k)!}=\frac{n!}{k!(n-1-k)!}$$
$$(k+1)\binom{n}{k+1}=(k+1)\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-1-k)!}=\frac{n!}{k!(n-1-k)!}$$

ב. $n\binom{n-1}{k}$ - תחילה בוחרים איבר מתוך n האיברים, ולאחר-מכן בוחרים k איברים מתוך n-1 הנותרים.

בצורה זו נבחר k+1 איברים מתוך n, אבל נספור כל בחירה כזו k+1 פעמים, כי כל קבוצה כזו נוצרת ע"י האיבר הראשון שנבחר. וזה בדיוק מה שכתוב באגף הימני.

שאלה מס' 25.

א) חשב את $(a+b+c)^5$.

ב) הראה, על-ידי שיקול קומבינטורי, כי - $(a+b+c)^n=\sum\limits_{\substack{0\le i,j,k\le n\\ i+j+k=n}}\frac{n!}{i!\,j!\,k!}a^ib^jc^k$

את הרשום מתחת לסימן הסכום יש לפרש בצורה הבאה: i, j, k מקבלים את הערכים של כל הפתרונות השלמים הלא-שליליים האפשריים של המשוואה i + j + k = n.

תשובה:

א.

$$(a+b+c)^5=\frac{5!}{0!0!5!}a^0b^0c^5+\frac{5!}{0!1!4!}a^0b^1c^4+\frac{5!}{0!2!3!}a^0b^2c^3+\frac{5!}{0!3!2!}a^0b^3c^2+\frac{5!}{0!4!1!}a^0b^4c^1+\frac{5!}{0!5!0!}a^0b^5c^0+$$
$$+\frac{5!}{1!0!4!}a^1b^0c^4+\frac{5!}{1!1!3!}a^1b^1c^3+\frac{5!}{1!2!2!}a^1b^2c^2+\frac{5!}{1!3!1!}a^1b^3c^1+\frac{5!}{1!4!0!}a^1b^4c^0+$$
$$+\frac{5!}{2!0!3!}a^2b^0c^3+\frac{5!}{2!1!2!}a^2b^1c^2+\frac{5!}{2!2!1!}a^2b^2c^1+\frac{5!}{2!3!0!}a^2b^3c^0+$$
$$+\frac{5!}{3!0!2!}a^3b^0c^2+\frac{5!}{3!1!1!}a^3b^1c^1+\frac{5!}{3!2!0!}a^3b^2c^0+$$
$$+\frac{5!}{4!0!1!}a^4b^0c^1+\frac{5!}{4!1!0!}a^4b^1c^0+$$
$$+\frac{5!}{5!0!0!}a^5b^0c^0$$

ב. נמצא את המקדם של $a^i b^j c^k$: נחשוב על כל סוגריים במכפלה של $(a+b+c)^n$, כתא מסוים. סה"כ יש n תאים, אליהם נרצה להכניס n כדורים משלוש הסוגים a,b,c, כשהכמויות מכל סוג נקבעות ע"י החזקה. מספר השילובים האפשריים שווה למספר התמורות של n הכדורים מחולק בתמורות של כל סוג, כדי למנוע כפילות במניה. כך בעצם נבנה כל רכיב בסכום שניתן בשאלה, ולמעשה ניתן ליצור כל הרכב חזקות טבעיות, שנסכמות ל-n.

שאלה מס' 26.

הראה על-ידי שיקול קומבינטורי :

$$\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\right)^n=\sum_{\substack{0\le i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\le n\\ i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=n}}\frac{n!\cdot\left(x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{4_5}x_5^{i_5}\right)}{i_1!i_2!i_3!i_4!i_5!}$$

כאשר i_1,i_2,i_3,i_4,i_5 מקבלים את ערכים האפשריים של כל הפתרונות בטבעיים של המשוואה: $i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=n$.

תשובה:

התשובה זהה לשאלה קודמת, כאשר כאן יש 5 סוגים של כדורים.

שאלה מס' 27.

רשום את הפיתוחים הבאים :

א) $(a+b+c+d)^4$.

ב) $(x+y+z+u+v)^3$.

תשובה:

א. $(a+b+c+d)^4=\frac{4!}{0!0!0!4!}a^0b^0c^0d^4+\frac{4!}{0!0!1!3!}a^0b^0c^1d^3+\frac{4!}{0!0!2!2!}a^0b^0c^2d^2+\ldots$.

הפיתוח שנקבל יהיה ארוך למדי, ויהיו בו $D(4,4)=\binom{7}{3}=35$ מחוברים.

ב. באופן דומה כאן יהיו $D(5,3)=\binom{7}{4}=35$ מחוברים.

שאלה מס' 28.

א) מצא את סכום מקדמי הפיתוח $\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^7$.

ב) מהו המקדם של האיבר $a^3b^2c^2de^4$ בפיתוח $\left(a+b+c+d+e\right)^{12}$?

ג) מהו המקדם של האיבר b^5c^7 בפיתוח $\left(a+b+c+d+e\right)^{12}$?

ד) מהו המקדם של האיבר d^{12} בפיתוח $\left(a+b+c+d+e\right)^{12}$?

תשובה:

א. אם היינו מפרקים את הביטוי ומציבים 1 במקום כל משתנה, היינו מקבלים בדיוק את סכום כל המקדמים.

לכן סכומם הוא $\left(1+1+1+1\right)^7=4^7=16384$

ב. $\frac{12!}{3!2!2!1!4!}=831600$

ג. $\frac{12!}{0!5!7!0!0!}=792$

ד. $\frac{12!}{0!0!0!12!0!}=1$

שאלה מס' 29.

חשב את: א) $\left(x+y+z\right)^4$. ב) $\left(2x+y-z\right)^3$.

תשובה:

א. הפיתוח שנקבל יהיה ארוך למדי, ויהיו בו $D\left(4,3\right)=\binom{6}{3}=20$ מחוברים.

ב.

$$\left(2x+y-z\right)^3=\frac{3!}{0!0!3!}\left(2x\right)^0y^0\left(-z\right)^3+\frac{3!}{0!1!2!}\left(2x\right)^0y^1\left(-z\right)^2+\frac{3!}{0!2!1!}\left(2x\right)^0y^2\left(-z\right)^1+\frac{3!}{0!3!0!}\left(2x\right)^0y^3\left(-z\right)^0+$$
$$+\frac{3!}{1!0!2!}\left(2x\right)^1y^0\left(-z\right)^2+\frac{3!}{1!1!1!}\left(2x\right)^1y^1\left(-z\right)^1+\frac{3!}{1!2!0!}\left(2x\right)^1y^2\left(-z\right)^0+$$
$$+\frac{3!}{2!0!1!}\left(2x\right)^2y^0\left(-z\right)^1+\frac{3!}{2!1!0!}\left(2x\right)^2y^1\left(-z\right)^0+\frac{3!}{3!0!0!}\left(2x\right)^3y^0\left(-z\right)^0$$

שאלה מס' 30.

מה המקדם של: א) $x^2y^3z^2$ בפיתוח $\left(x+y+z\right)^7$. ב) $x^6y^3z^2$ בפיתוח $\left(x-2y+3z\right)^{11}$.

תשובה:

א. $\frac{7!}{2!3!2!}=210$ ב. $\frac{11!}{6!3!2!}\cdot\left(-2\right)^3\cdot3^2=-332640$

שאלה מס' 31.

מצא את האיברים החופשיים מ- x בפיתוח:

א) $\left(x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^8$ ב) $\left(x^3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^6$ ג) $\left(x^4+1+\frac{1}{x^2}\right)^{20}$.

תשובה:

א. כדי שנקבל איבר חופשי, החזקות צריכות להצטמצם. זה קורה באיברים הבאים (האותיות בהתאמה):

$a^3b^0c^4d^1, a^1b^4c^0d^3, a^0b^5c^1d^2, a^2b^1c^5d^0, a^4b^0c^0d^4, a^3b^1c^1d^3, a^2b^2c^2d^2, a^1b^3c^3d^1, a^0b^4c^4d^0$.

מקדמי האיברים הללו:

$$\frac{8!}{3!0!4!1!}+\frac{8!}{1!4!0!3!}+\frac{8!}{0!5!1!2!}+\frac{8!}{2!1!5!0!}+\frac{8!}{4!0!0!4!}+\frac{8!}{3!1!1!3!}+\frac{8!}{2!2!2!2!}+\frac{8!}{1!3!3!1!}+\frac{8!}{0!4!4!0!}=$$

$$2\left[\frac{8!}{4!4!}+\frac{8!}{3!3!}+\frac{8!}{2!5!}+\frac{8!}{4!3!}\right]+\frac{8!}{2!2!2!2!}=2\left[70+1120+168+280\right]+2520=5796$$

ב. כדי שנקבל איבר חופשי, החזקות צריכות להצטמצם. זה קורה רק ב- $a^2b^2c^2$, והמקדם של איבר זה בפיתוח הינו $\frac{6!}{2!2!2!}=90$.

ג. כדי שנקבל איבר חופשי, החזקות צריכות להצטמצם. זה קורה באיברים הבאים (האותיות בהתאמה):

$a^6b^2c^{12}, a^5b^5c^{10}, a^4b^8c^8, a^3b^{11}c^6, a^2b^{14}c^4, a^1b^{17}c^2, a^0b^{20}c^0$.

מקדמי האיברים הללו:

$$\frac{20!}{6!2!12!}+\frac{20!}{5!5!10!}+\frac{20!}{4!8!8!}+\frac{20!}{3!11!6!}+\frac{20!}{2!14!4!}+\frac{20!}{1!17!2!}+\frac{20!}{0!20!0!}=$$

$$3527160+46558512+62355150+14108640+581400+3420+1=127134283$$

שאלה מס' 32.

הוכח כי $\binom{n}{i,j,k}+\binom{n}{i,j,k-1}+\binom{n}{i,j-1,k}+\binom{n}{i-1,j,k}=\binom{n+1}{i,j,k}$,

כאן $i+j+k=n$, $\binom{n}{i,j,k}=\frac{n!}{i!j!k!}$.

תשובה:

באגף השמאלי מוציאים n כדורים משלושה סוגים, כאשר מכל סוג יש מס' כדורים בהתאם לחזקה. בנוסף, יש כדור אחד ללא סוג, או מסוג רביעי שיוצא בשלב כלשהו של הוצאת הכדורים.

באגף הימני מוציאים קודם כדור ראשון, אם הוא מהסוג הראשון אז יש לבחור עוד i-1 מסוג זה ומהסוגים האחרים את מלוא המכסה. כמו כן יש לבחור מקום להוצאת הכדור מהסוג הרביעי. באותו אופן נוהגים גם כאשר יוצא כדור מסוג שני או שלישי. אם יצא הכדור מהסוג הרביעי, יש לחלק את כל 3 סוגי הכדורים, במכסה מלאה, בין התאים.

שאלה מס' 33.

מהו המספר האיברים בפיתוח: א) $(x+y+z)^6$ ב) $(a+2b+5c+d)^4$ ג) $(s+t+z+u+v)^6$.

תשובה:

א. כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x+y+z=6$, כלומר $D(3,6)=\binom{8}{2}=28$.

ב. כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $w+x+y+z=4$, כלומר $D(4,4)=\binom{7}{3}=35$.

ג. כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $s+t+z+u+v=6$, כלומר $D(5,6)=\binom{10}{4}=210$.

שאלה מס' 34.

הוכח:

א) $\sum_{i=0}^{5}\binom{m}{i}\binom{n}{5-i}=\binom{m+n}{5}$ ב) $\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{k}^2=\binom{6}{3}$ ג) $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{k}^2=\binom{20}{10}$

תשובה:

א. נסתכל על הביטוי $(x+1)^{m+n}$: המקדם של x^5 הוא $\binom{m+n}{5}$. מצד שני ניתן להסתכל על הביטוי $(x+1)^{m+n}=(x+1)^m\cdot(x+1)^n$: כדי להגיע כאן לכל המכפלות שיוצרות את x^5, יש לעבור על כל חזקה אפשרית בפירוק הראשון, ולהשלים אותה עם חזקה מתאימה בפירוק השני: לדוגמא, אם בפירוק הראשון קיבלנו את החזקה i, צריך מהפירוק השני להגיע לחזקה 5-i, ואז מכפלת הביטויים הללו תיתן x^5.

ב. ראה הסבר ל-ג' – זהה לחלוטין.

ג. נסתכל על הביטוי $(x+1)^{20}$: המקדם של x^{10} הוא $\binom{20}{10}$. מצד שני ניתן להסתכל על הביטוי $(x+1)^{20}=(x+1)^{10}\cdot(x+1)^{10}$: כדי להגיע כאן לכל המכפלות שיוצרות את x^{10}, יש לעבור על כל חזקה אפשרית בפירוק הראשון, ולהשלים אותה עם חזקה מתאימה בפירוק השני: לדוגמא, אם בפירוק הראשון קיבלנו את החזקה i, צריך מהפירוק השני להגיע לחזקה 10-i, ואז מכפלת הביטויים הללו תיתן x^{10}.

החזקה השניה בצד השמאלי נובע מהזהות של $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$.

שאלה מס' 35.

הוכח בעזרת האינדוקציה:

א) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

ב) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

תשובה:

א. בדיקה: נבדוק עבור $n=1$ את קיום השוויון: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

נניח כי השוויון מתקיים לכל $n\le N$, ונוכיח קיומו עבור $n=N+1$:

$$1+2+3+...+N+(N+1)=\frac{N(N+1)}{2}+(N+1)=\frac{N(N+1)+2\cdot(N+1)}{2}=\frac{(N+2)\cdot(N+1)}{2}$$

ב. בדיקה: נבדוק עבור $n=1$ את קיום השוויון: $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\cdot 1+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

נניח כי השוויון מתקיים לכל $n\le N$, ונוכיח קיומו עבור $n=N+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2N-1)(2N+1)}+\frac{1}{(2N+1)(2N+3)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)+\frac{1}{(2N+1)(2N+3)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}+\frac{2}{(2N+1)(2N+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{-(2N+3)+2}{(2N+1)(2N+3)}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{-2N-1}{(2N+1)(2N+3)}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(2N+3)}\right)$$

שאלה מס' 36.

חשב: $(a+b+c)^3,(a+b+c)^2$.

תשובה:

$$(a+b+c)^2=\frac{2!}{0!0!2!}a^0b^0c^2+\frac{2!}{0!1!1!}a^0b^1c^1+\frac{2!}{0!2!0!}a^0b^2c^0+\frac{2!}{1!0!1!}a^1b^0c^1+\frac{2!}{1!1!0!}a^1b^1c^0+\frac{2!}{2!0!0!}a^2b^0c^0$$

$$(a+b+c)^3=\frac{3!}{0!0!3!}a^0b^0c^3+\frac{3!}{0!1!2!}a^0b^1c^2+\frac{3!}{0!2!1!}a^0b^2c^1+\frac{3!}{0!3!0!}a^0b^3c^0+$$

$$+\frac{3!}{1!0!2!}a^1b^0c^2+\frac{3!}{1!1!1!}a^1b^1c^1+\frac{3!}{1!2!0!}a^1b^2c^0+\frac{3!}{2!0!1!}a^2b^0c^1+\frac{3!}{2!1!0!}a^2b^1c^0+\frac{3!}{3!0!0!}a^3b^0c^0$$

שאלה מס' 37.

חשב: $\binom{5}{0}+2\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+2\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+2\binom{5}{5}$.

תשובה:

$$\binom{5}{0}+2\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+2\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+2\binom{5}{5}=\left[\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\right]+\left[\binom{5}{1}+\binom{5}{3}+\binom{5}{5}\right]=$$
$$\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}+2^4=2^5+2^4=48$$

שאלה מס' 38.

מצא את המקדם של $(xyzw)^{25}$ בפיתוח $(x+y+z+w)^{100}$.

תשובה:

$$\frac{100!}{25!25!25!25!}$$

שאלה מס' 39.

פתח את הביטויים הבאים:

א) $\left(x^2-2\sqrt{x}\right)^5$. ב) $\left(x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$.

תשובה:

א.

$$\left(x^2-2\sqrt{x}\right)^5=\binom{5}{0}\left(x^2\right)^5\left(-2\sqrt{x}\right)^0+\binom{5}{1}\left(x^2\right)^4\left(-2\sqrt{x}\right)^1+\binom{5}{2}\left(x^2\right)^3\left(-2\sqrt{x}\right)^2+$$
$$+\binom{5}{3}\left(x^2\right)^2\left(-2\sqrt{x}\right)^3+\binom{5}{4}\left(x^2\right)^1\left(-2\sqrt{x}\right)^4+\binom{5}{5}\left(x^2\right)^0\left(-2\sqrt{x}\right)^5=$$
$$=x^{10}-10x^{17/2}+40x^7-80x^{11/2}+80x^4-32x^{5/2}$$

ב.

$$\left(x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8=\binom{8}{0}\left(x^2\right)^8\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^0+\binom{8}{1}\left(x^2\right)^7\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^1+\binom{8}{2}\left(x^2\right)^6\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2+\binom{8}{3}\left(x^2\right)^5\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3+$$
$$+\binom{8}{4}\left(x^2\right)^4\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^4+\binom{8}{5}\left(x^2\right)^3\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5+\binom{8}{6}\left(x^2\right)^2\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6+\binom{8}{7}\left(x^2\right)^1\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^7+\binom{8}{8}\left(x^2\right)^0\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8=$$
$$=x^{16}-16x^{27/2}+112x^{11}-448x^{17/2}+1120x^6-1792x^{7/2}+1792x^1-1024x^{-3/2}+256x^{-4}$$

שאלה מס' 40.

מצא את האיבר החופשי בפיתוח:

א) $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^8$. ב) $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^9$. ג) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{22}$.

תשובה:

א. כדי שנקבל איבר חופשי, החזקה של האיבר השני צריכה להיות כפולה מזו של האיבר הראשון, וזה לא יכול לקרות כשסכומן הוא 8 (כי 8 לא מתחלק ב-3). לכן האיבר החופשי הוא 0.

ב. כדי שנקבל איבר חופשי, החזקה של האיבר השני צריכה להיות פי 3 מזו של האיבר הראשון, וזה לא יכול לקרות כשסכומן הוא 9 (כי 9 לא מתחלק ב-4). לכן האיבר החופשי הוא 0.

ג. כדי שנקבל איבר חופשי, החזקה של האיבר הראשון צריכה להיות כפולה מזו של האיבר השני, וזה לא יכול לקרות כשסכומן הוא 22 (כי 22 לא מתחלק ב-3). לכן האיבר החופשי הוא 0.

שאלה מס' 41.

הוכח בשיטה הקומבינטורית את הפיתוח ב- $(x+a)^{10}$.

תשובה:

כדי לקבל את המקדם של $x^i a^{10-i}$ עלינו למצוא את כל האפשרויות של שימוש במכפלות, שיביאו לחזקות אלו – כדי שזה יקרה, צריך שמתוך 10 המוכפלים בביטוי נבחר i מהם נוציא את האיבר x, ומהשאר נבחר את האיבר a, לכן מקבלים את הנוסחא: $(x+a)^{10}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}x^i a^{10-i}$.

שאלה מס' 42.

חשב את $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}$, $\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\binom{7}{k}$.

$\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}$ - זהו הפיתוח של $(1+1)^6=2^6$

$\sum_{k=0}^{7}(-1)^k\binom{7}{k}=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\binom{7}{k}$ - זהו הפיתוח של $(-1+1)^7=0^7=0$