תדריך לימוד ליחידה 2
בקורס " אלגברה לינארית 1"

א. **הפרק הראשון** עוסקת ב-n–יות. בעזרתן נרשום בהמשך את הפתרונות של מערכות משוואות. שתי פעולות מוגדרות עליהן, חיבור וכפל בסקלר. כל המשפטים בפרק מתייחסים לתכונות של הפעולות האלה וכך מספקים לנו כללי חישוב עם ה-n–יות. אין שום קושי בלימוד הפרק, משתמשים בתכונות ידועות לגבי המספרים הממשיים, כמו למשל חוק החילוף, חוק הקיבוץ וכו'.

ב. **הפרק השני** מוקדש למערכות משוואות לינאריות, אחד הנושאים המרכזיים בקורס הזה.

- <u>**סעיף א'**</u> : הגדרות של המושגים *מערכת לינארית של m משוואות ב- n נעלמים, מקדמי המערכת, המקדמים החופשיים, מערכת הומוגנית , אי-הומוגנית, פתרון של המערכת* (עמ'11 ו-12).

השאלה 18 מאוד חשובה ועליך לדעת היטב את המסקנה, כלומר כל צרוף של פתרונות של מערכת הומוגנית מהצורה $\lambda_1\underline{c}+\lambda_2\underline{d}$ הוא גם פתרון של אותה המערכת. *שימו לב! תכונה זו אינה נכונה בדרך כלל עבור מערכות אי-הומוגניות.*

<u>תרגיל</u>: נניח ש- $\underline{c}$ ו- $\underline{d}$ פתרונות של מערכת אי-הומוגנית. עבור אילו ערכים של λ_1 ו- λ_2 ה-n–יה $\lambda_1\underline{c}+\lambda_2\underline{d}$ פתרון של אותה מערכת?

- <u>**סעיפי ב' ו-ג'**</u> : הצגת שיטת החילוץ של גאוס, תיאוריה ודוגמאות. נניח שעלינו לפתור מערכת משוואות לינאריות מסוימת, הרעיון הוא לפתור במקומה מערכת בעלת **אותה** קבוצת פתרונות כמו המערכת המקורית, אך יותר קלה לפתרון. מערכות בעלות אותה קבוצת פתרונות נקראות **מערכות שקולות** (עמ'15).

הכלי ם המרכזיים בשיטה זו הם **מטריצות ,פעולות אלמנטריות עליהן ודרוג מטריצה.**
חשוב לקרוא בעיון את כל השלבים של שיטת החילוץ ולהבין את הדיון לגבי מספר הפתרונות לפי הצורה של המטריצה המדורגת שהתקבלה.

התוצאות מרוכזות **בסיכומים** : סיכומי א' וב' (עמ'29), סיכום ג' (עמ'34) וסיכום ד' (עמ'36).
סיכום כללי ודוגמאות נוספות מופיעים בעמ' 36 ו-37.

<u>הערות</u> : 1. למערכת הומוגנית תמיד קיים פתרון, <u>הפתרון הטריוויאלי</u>.

2. <u>יש 3 אפשרויות למספר הפתרונות של מערכת לינארית :</u>
או 0 פתרון או פתרון יחיד או אינסוף פתרונות.

3. לפתרון מערכת או לדיון על מספר הפתרונות, <u>אפשר להסתפק במטריצה מדורגת</u>, לא בהכרח קנונית ודרך זאת מומלצת במקרה של מערכת עם פרמטרים.

4. **אם קיים פתרון**, אז מספר הפתרונות נקבע לפי מספר השורות השונות מאפס בצורה מדורגת, נסמן אותו r:

אם $r = n$ יש פתרון יחיד, אם $r < n$ אז יש אינסוף פתרונות ואז מספר המשתנים החופשיים שווה ל- n-r.

(זה נובע מכך שכל שורה שונה מאפס מתאימה לאיבר פותח שורה, שהוא שונה מאפס ע"פ הגדרתו, לכן מתאימה למשתנה קשור).

5. **מערכת עם פרמטרים:**

- כאמור, מספיק לדרג את מטריצת המקדמים עד לצורה מדורגת (לא חייב להיות מטריצה קנונית!).
- אם בתהליך הדרוג כופלים או מחלקים שורה בביטוי שמכיל פרמטר , יש להוציא את ערכי הפרמטר שמאפסים את הביטוי ולבדוק בנפרד את המקרים המתאימים לערכים האלה.
- כפי שכבר נאמר, מספר המשתנים הקשורים שווה למספר האיברים הפותחים במטריצה מדורגת, ולכן אם איבר פותח מתבטא בעזרת הפרמטר יש להבחין במקרה שהוא מתאפס.
- ב-"מאגר המשאבים", יש דוגמה פתורה של מערכת כזו.(בדף הראשון, דוגמה של ממ"ן פתורה).

6. "**המטריצה המורחבת**" של המערכת ,זהו שם נוסף למטריצת המקדמים, **ומטריצה מצומצמת** של המערכת מתקבלת מהקודמת לאחר מחיקת עמודת האיברים החפשיים.

7. **שימו לב!** קיום של שורות אפסים בצורה מדורגת אינו גורר בהכרח שיש אינסוף פתרונות למערכת! תחשבו על דוגמה כזאת.

- סעיף ד': **במערכת הומוגנית**, שלושה דברים חשובים: דבר ראשון,כפי שכבר אמרנו, *יש תמיד לפחות פתרון אחד* , הפתרון הטריוויאלי, דבר שני, ניתן *לדרג את המטריצה המצומצמת* במקום המורחבת (כי עמודת אפסים אינה משתנה כאשר מבצעים פעולות אלמנטריות) ודבר שלישי משפט חשוב, *משפט II.12* , שטוען את הקיום של פתרון לא טריוויאלי (במלים אחרות, קיום של אינסוף פתרונות) למערכת הומוגנית כאשר מספר המשוואות קטן ממספר הנעלמים.

- סעיף ה': **מערכות של n משוואות ב- n נעלמים.**

כמה תוצאות חשובות: למה II.14, משפט II.15 ומשפט II.16.

וכמובן חשוב לפתור מערכות מכל מני סוגים, זו הדרך היחידה להבנה טובה!