תורת הקבוצות - תרגול

מתרגלת: אירנה

26 באוגוסט 2004

1 תרגול ראשון

2 תרגול שני

פשט:

$$\begin{aligned}(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\vee(p\wedge(q\vee\sim r)) &\iff (p\wedge q)\vee(p\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(q\vee\sim r)\\ &\iff (p\wedge q)\vee(p\wedge r)\vee(p\wedge\sim r)\\ &\iff (p\wedge q)\vee(p\wedge(r\vee\sim r))\\ &\iff (p\wedge q)\vee p \iff p\end{aligned}$$

צ"ל

$$(\exists x)\,(p(x)\vee g(x)) \quad\iff\quad ((\exists x)\,p(x))\vee((\exists x)\,g(x))$$

נוכיח:

$$\begin{aligned}(\exists x)\,(p(x)\vee q(x)) &= T\\ p(a)\vee q(a) &= T\\ \text{assume}&\\ p(a) &= T\\ \exists s\,(p(x)) &= T\\ \exists xp(x)\vee\exists xq(x) &= T\end{aligned}$$

ובכיוון השני:

$$\begin{aligned}p(a)\vee q(b) &= T\\ \text{assume}&\\ p(a) &= T\\ p(a)\vee q(a) &= T\\ \exists x\,(p(x)\vee q(x)) &= T\end{aligned}$$

בהרצאה ראינו כי

$$\exists x\,(p(x)\wedge q(x))\Rightarrow\exists x\,(p(x))\wedge\exists x\,(q(x))$$

<u>תרגיל</u>: שלול את הפסוק

$$\begin{aligned}\sim(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x)\,(|x-a|<\delta\rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon) &\iff\\ (\exists\varepsilon>0)\,(\forall\delta>0)\,(\exists x)\,(\sim(|x-a|<\delta\rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)) &\iff\\ (\exists\varepsilon>0)\,(\forall\delta>0)\,(\exists x)\,(|x-a|<\delta\wedge|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon)&\end{aligned}$$

שלילת גרירה:

$$\begin{aligned} a \to b &\iff \sim a \vee b \\ \sim (a \to b) &\iff \sim (\sim a \vee b) = a \wedge \sim b \end{aligned}$$

<u>תרגיל:</u>

$$(\forall x)\,(r(x) \to (p(x) \vee q(x)))$$

קבע פסוק שקול שלא יכלול את הכמת $\forall$ ואת הקשרים $\to$ו-$\vee$.

$$\begin{aligned} (\forall x)\,(r(x) \to (p(x) \vee q(x))) &\iff \sim\sim ((\forall x)\,(r(x) \to (p(x) \vee q(x)))) \\ &\iff \sim (\sim (\forall x)\,(r(x) \to (p(x) \vee q(x)))) \\ &\iff \sim ((\exists x)\,(r(x) \wedge \sim (p(x) \vee q(x)))) \\ &\iff \sim (\exists x)\,(r(x) \wedge \sim p(x) \wedge \sim q(x)) \end{aligned}$$

<u>תרגיל:</u> נתונות

$$\begin{aligned} x &= \{1\}\,, y = \{\{1\}\} \\ z = \{1, \{1\}\} \end{aligned}$$

בדוק נכונות:

1. $Y \in X$ נכון - Y מכילה איבר אחד, $X = \{1\}$
2. $Y \subseteq X$ שגוי, $1 \in X, 1 \notin Y$
3. $Z \in Y$ - שגוי, z מכילה 2 איברים, ואף אחד מהם אינו Y.
4. $Z \subseteq Y$ נכון, כי איבר יחיד של Y נמצא ב-Z.

<u>תרגיל:</u> צ"ל

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

הוכחה: נוכיח ראשית כי החלק הימני מכיל את השמאל:

$$\begin{aligned} x &\in A \cup (B \cap C) \\ x \in A &\quad \text{or} \quad x \in B \cap C \\ x \in A : & \\ x \in A \cup B &\quad \text{and} \quad x \in A \cup C \\ x &\in (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ x \in B \cap C : & \\ x \in B &\quad \text{and} \quad x \in C \\ &\Downarrow \\ x \in A \cup B &\quad \text{and} \quad x \in A \cup C \\ x &\in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

נוכיח החלה בכיוון השני

$$\begin{array}{rcl}
x & \in & (A\cup B)\cap(A\cup C) \\
x\in A\cup B & \text{and} & x\in A\cup C \\
x\in A: & & \\
x & \in & A\cup(B\cap C) \\
x\notin A: & & \\
x\in B & \text{and} & x\in C \\
x & \in & B\cap C \\
x & \in & (B\cap C)\cup A
\end{array}$$

■

<u>תרגיל</u>: לכל $n\geq 1$ טבי

$$A_n=\left\{z\in\mathbb{C}|\,|z|\geq\frac{1}{n}\right\}$$

צ"ל

$$\begin{array}{rcl}
A_1 & \subset & A_2\subset A_3\subset\dots \\
\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n & & \bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n
\end{array}$$

א. יהי n טבעי. נראה $A_n\subset A_{n+1}$.

$$\begin{array}{rcl}
z\in A_n & \Rightarrow & |z|\geq\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1} \\
& \Rightarrow & |z|\geq\frac{1}{n+1} \\
& \Rightarrow & z\in A_{n+1}
\end{array}$$

הראנו $A_n\subseteq A_{n+1}$
נראה $A_n\neq A_{n+1}$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{n+1} & > & \frac{1}{n+\frac{1}{2}}>\frac{1}{n+1} \\
x_0 & = & \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \\
x_0 & \in & A_{n+1} \\
x_0 & \notin & A_n
\end{array}$$

ולכן ההחלה מתקיימת והקבוצות לא שוות
ב. איחוד וחיתוך

$$\begin{array}{rcl}
z & \in & \bigcup_{n\in N}A_n \\
z & \in & A_{n_0} \\
|z| & \geq & \frac{1}{n_0}>0\Rightarrow z\neq 0 \\
& \Rightarrow & z\in\mathbb{C}^*
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
|z| \neq 0 & \\
|z| &> 0 \\
\exists n_0 \in N &\rightarrow |x| \geq \frac{1}{n_0} \\
z \in A_{n_0} &\Rightarrow z \in \bigcup_{n \in N} A_n
\end{aligned}
$$

$$\bigcap A_n = A_1$$

A_1 משתתפת בחיתוך ולכן $\cap A_n \subseteq A_1$.
הראנו שלכל n $A_1 \subseteq A_n$, ועל כן $A_1 \subseteq \bigcap_{n \in N} A_n$.

3 תרגול שלישי

תהי A קבוצה.
$P(A) = \{B | B \subset A\}$ קבוצת כל תת-הקבוצות של A.

3.1 תרגיל

הוכח/הפרך

3.1.1 א

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

פתרון: נכון

$$
\begin{aligned}
X \in P(A) \cup P(B) &\iff X \in P(A) \text{ or } x \in P(B) \\
&\iff X \subseteq A \text{ or } X \subseteq B \\
&\Rightarrow X \subseteq A \cup B \\
&\iff X \in P(A \cup B)
\end{aligned}
$$

3.1.2 ב

$$P(A - B) \subseteq P(A) - P(B)$$

שגוי.

$$
\begin{aligned}
A &= \{a, b, c\} \\
B &= \{a, b\}
\end{aligned}
$$

אם כי הטענה היא תמיד לא נכונה.

$$
\begin{aligned}
\emptyset &\in P(A - B) \\
\emptyset &\notin P(A) - P(B)
\end{aligned}
$$

3.1.3 א

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

הוכה

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \text{ and } x \in B \cup C \\
&\iff x \in A \text{ and } \ (x \in B \text{ or } y \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ and } y \in B) \ \text{ or } \ (x \in A \text{ and } y \in C) \\
&\iff (x,y) \in A \times B \text{ or } (x,y) \in A \times C \\
&\iff (x,y) \in A \times B \text{ or } (x,y) \in A \times C \\
&\iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

3.1.4 ב

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

דוגמאת נגד

$$A = \{a\}, C = \{c\}, B = \{b\}, D = \{d\}$$

$$\begin{aligned}
|A \times B| &= 1 = |C \times D| \Rightarrow |\text{Left}| = 2 \\
|A \cup C| &= 2 = |B \cup D| \Rightarrow |\text{Right}| = 2 \cdot 2 = 4
\end{aligned}$$

מספר האיברים שונה ולכן בהכרח הקבוצות שונות.
נוכיח כי

$$\begin{aligned}
(A \times B) \cup (C \times D) &\subseteq (A \cup C) \times (B \cup D) \\
(x,y) \in (A \times B) \cup (C \times D) &\Rightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in C \times D \\
&\Rightarrow \bigwedge \begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \vee \bigwedge \begin{cases} x \in C \\ y \in D \end{cases} \\
&\Rightarrow x \in A \cup C \wedge y \in B \cup D \\
&\iff (x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)
\end{aligned}$$

3.1.5 עוד תרגיל כזה

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

ננסה להוכיח את הביטוי

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B - C) &\iff x \in A \wedge y \in B - C \\
&\iff x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C) \\
&\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C) \\
&\iff (x,y) \in a \times B \wedge (x,y) \notin A \times C \\
&\iff (x,y) \in ((A \times B) - (A \times C))
\end{aligned}$$

3.2 הוכחה

S קבוצה כלשהי.
צ"ל שלקבוצות $P(P(s))$, $P(P(P(s)))$ יש לפחות שני איברים משותפים.

$$\begin{array}{rcl} \emptyset & \in & P(S) \\ \emptyset & \in & P(P(S)) \\ \emptyset & \in & P(P(P(S))) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \emptyset \in P(S) & \Rightarrow & \{\emptyset\} \in P(P(S)) \\ \emptyset \in P(P(S)) & \Rightarrow & \{\emptyset\} \in P(P(P(S))) \end{array}$$

ומצאנו 2 איברים הנמצאים בשתי הקבוצות.

3.3 קבע את הקבוצה

$$L = \bigcup S - \bigcap S$$

כאשר $S = P(P(P(P(\emptyset)))) = P(A)$.

$$\begin{array}{rcl} \bigcup S & = & A \\ \bigcap S & = & \emptyset \\ L & = & A - \emptyset = A \end{array}$$

אם כך, נמצא את

$$\begin{array}{rcl} A & = & P(P(P(A))) \\ P(\emptyset) & = & \{\emptyset\} \\ P(P(\emptyset)) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ P(P(P(\emptyset))) & = & \{\emptyset \{\emptyset\} \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{array}$$

3.4 הוכח

L, M קבוצות של קבוצות.

$$\begin{array}{rcl} \bigcup (L \cap M) & \subseteq & \left(\bigcup L\right) \cap \left(\bigcup M\right) \\ x \in \cup (L \cap M) & \Longleftrightarrow & \exists A \in L \cap M : x \in A \\ & \Longleftrightarrow & (\exists A \in L : x \in A) \wedge (\exists A \in M : x \in A) \\ & \Rightarrow & \begin{cases} x \in & \bigcup L \\ x \in & \bigcup M \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & x \in \left(\bigcup L\right) \cap \left(\bigcup M\right) \end{array}$$

הכיוון השני לאו דווקא נכון.

4 רלציות ופונקציות

הגדרה 4.1 רלציה R על קבוצה A תקרא רלצית שקילות אם היא:

1. רפלקסיבית: aRa לכל $a \in A$
2. סימטרית: $aRb \Leftarrow bRa$
3. טרנזטיבית $aRb \wedge bRc \Leftarrow aRc$

4.1 תרגיל

$$A = \mathbb{R}$$

ממשיים.
נגדיר רלציה R

$$xRy \iff \text{cis}2\pi x = \text{cis}2\pi y, |x-y| = 3 \cdot n, n \in \mathbb{N}$$

א. בדוק כי R רלצית שקילות
ב. מצא מחלקות שקילות וקבוצת המנה

4.1.1 נוכיח רלציית שקילות

1. לכל $x \in R$, $\text{cis}2\pi x = \text{cis}2\pi y$

$$\forall x \in A, xRx$$

2.

$$\begin{aligned} xRy &\iff \text{cis}2\pi x = \text{cis}2\pi y \\ &\iff \text{cis}2\pi y \text{cis}2\pi x \\ &\iff yRx \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} &\iff \begin{cases} \text{cis}2\pi x &= \text{cis}2\pi y \\ \text{cis}2\pi y &= \text{cis}2z \end{cases} \\ &\iff \text{cis}2\pi x = \text{cis}2\pi z \\ &\iff xRz \end{aligned}$$

4.1.2 נמצא מחלקות שקילות

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in A | xRy\} \\ &= \{y \in A | \text{cis}2\pi x = \text{cis}2\pi y\} \\ &= \{y \in A | 2\pi x = 2\pi y + 2\pi n\} \\ &= \{x + n | n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

4.1.3 נמצא את קבוצת המנה

$$A/R = \{[x] | 0 \leq x < 1\}$$

4.2 תרגיל

$A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המישור הממשי.
נגדיר רלציה R

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \iff (x,y)R(z,w)$$

א. בדוק כי R רלציית שקילות
ב. מצא מחלקת שיקולות וקבוצת המנה

4.2.1 שקילות

.1

$$\begin{array}{rcl} \forall (x,y) & \in & A, x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \\ (x,y)R(x,y) & \forall & (x,y) \in R \end{array}$$

.2

$$\begin{array}{rcl} (x,y)R(z,w) & \iff & x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \\ & \iff & z^2 + w^2 = x^2 + y^2 \\ & \iff & (z,w)R(x,y) \end{array}$$

.3

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} (x,y)R(z,w) \\ (z,w)R(a,b) \end{cases} & \Rightarrow & \begin{cases} x^2 + y^2 & = z^2 + w^2 \\ z^2 + w^2 & = a^2 + b^3 \end{cases} \\ & \iff & x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ & \iff & (x,y)R(a,b) \end{array}$$

4.2.2 מחלקת שיקולות וקבוצת מנה

$$\begin{array}{rcl} [(x,y)] & = & \{(z,w) | (x,y)R(z,w)\} \\ & = & \left\{(z,w) | x^2 + y^2 = z^2 + w^2\right\} \end{array}$$

וזהו מעגל שמרכזו ב-$(0,0)$ ורדיוסו $\sqrt{x^2 + y^2}$
A/R הוא אוסף כל המעגלים עם מרכז בראשית הצירים כולל מעגל טריביאלי.

$$A/R = \{[(r,0)] | 0 \leq r \in \mathbb{R}\}$$

4.3 רלציה

R רלציה על A
צ"ל R רלציית שקילות אם ורק אם:

1. $I_A \subseteq R$
2. $R^{-1} = R$
3. $R \circ R \subseteq R$

פתרון:

1. רפלקסיביות
2. סימטריות
3. טרנזטיביות

$$\begin{cases} (x,y) \in R \\ (y,z) \in R \end{cases} \Rightarrow (x,z) \in R \circ R \subseteq R$$

4.4 עוד תרגיל

$$X = \{1,2,3,4\}$$

א. כמה רלציות שונות ניתן להגדיר על X?
ב. כצה רלציות שקילות שונות ניתן להגדיר על X?

4.4.1 מספר רלציות

כל רלציה היא תת קבוצה של $X \times X$, מס' רלציות - מספר תת קבוצות,

$$2^{|x \times x|} = 2^{16}$$

4.4.2 מספר רלציות שקילות

רלציית שקילות היא חלוקה של X.
ניתן לבצע שלוש חלוקות לשתי קבוצות, שש חלוקות לשלוש קבוצות וארבע חלוקות ל-4 קבוצות
סך הכל, 15 חלוקות.

4.5 רלציות

תהיינה R, S, T רלציות על A.
צ"ל

1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
2. $S \circ (R \cup T) = (R \circ R) \cup (S \circ T)$

4.5.1 איחוד הופכי

$$\begin{aligned}(x,y)\in(R\cup S)^{-1} &\iff (y,x)\in R\cup S\\ &\iff (y,x)\in R\vee(y,x)\in S\\ &\iff (x,y)\in R^{-1}\vee(x,y)\in S^{-1}\\ &\iff (x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}\end{aligned}$$

4.5.2 הרכבת איחוד

$$\begin{aligned}(x,z)\in S\circ(S\cup T) &\iff (\exists y)\left(((x,y)\in R\cup T)\wedge((y,z)\in S)\right)\\ &\iff (\exists y)\left(((x,y\in R\vee(x,y)\in T)\wedge((y,z)\in S)\right)\\ &\iff (\exists y)\left(((x,y)\in R\wedge(y,z)\in S)\vee((x,y)\in T\wedge(y,z)\in S)\right)\\ &\iff (\exists y)\left((x,z)\in S\circ R\wedge(y,z)\in S\right)\vee(\exists y)\left((x,y)\in T\wedge(y,z)\in S\right)\\ &\iff (x,z)\in S\circ R\vee(x,z)\in S\circ T\\ &\iff (x,z)\in S\circ R\vee S\circ T\end{aligned}$$

4.6 תרגיל

R,S רלצית שקילות על A
צ"ל $R\circ S$ רלצית שקילות $\iff R\circ S=S\circ R$
נניח $S\circ R$ סימטרית, אזי

$$\begin{aligned}R\circ S &= (R\circ S)^{-1}\\ &= S^{-1}\circ R^{-1}\\ &= S\circ R\end{aligned}$$

משום שרלציות שקילות הן סימטריות...
מצד שני,

$$\begin{aligned}\forall x\in A, xRx\wedge xSx &\Rightarrow (x,x)\in R\circ S\\ (x,z)\in R\circ S &\Rightarrow (\exists y)\left((x,y)\in S\wedge(y,z)\in R\right)\\ &\iff (\exists y)\left((y,x)\in S\wedge(z,y)\in R\right)\\ &\iff (\exists y)\,(z,x)\in S\circ R=R\circ S\end{aligned}$$

5 עוד תרגול (ועוד תרגול)

5.1 תרגיל

R,S רלציות על קבוצה X.
R רפלקסיבית ו-S רפלקסיבית וטרנזטיבית.
צ"ל $R\subseteq S$ אם ורק אם $R\circ S=S$

5.1.1 כיוון אחד

נתון $R \subseteq S$

צ"ל $R \circ S = S$

$$\begin{aligned}(x,z) \in R \circ S &\iff \exists y : (x,y) \in S \wedge (y,z) \in R \\ &\Rightarrow \exists y : (x,y) \in S \wedge (y,z) \in S \\ &\Rightarrow (x,z) \in R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y) \in S &\Rightarrow (y,y) \in R \wedge (x,y) \in S \\ &\Rightarrow (x,y) \in R \circ S\end{aligned}$$

5.1.2 כיוון שני

נתום $R \circ S = S$, צ"ל $R \subseteq S$

$$\begin{aligned}(x,y) \in R \wedge (x,x) \in S &\iff (x,y) \in R \circ S \\ &\iff (x,y) \in S\end{aligned}$$

5.2 יהי תרגיל

$$\begin{aligned}A &= \{1,2,3\} \\ B &= \{4,5,6,7\}\end{aligned}$$

האם קיימות שתי פונקציות $f : A \to B$, $g : B \to A$ כך ש-

1. $f \circ g = id_B$ (פונקצית זהות על B)
2. $g \circ f = id_A$

ב. כן, די קל לכתוב כזו.

א. $g : B \to A$, $|B| > |A|$ ולכן קיימים $b_1 \neq b_2$ כך ש-$g(b_1) = g(b_2) = a$ ואז

$$\begin{aligned}f(g(b_1)) &= g(a) = b \\ f(g(b_2)) &= f(a) = b\end{aligned}$$

ואז $b \neq b_1 \vee b \neq b_2$.

5.3 תרגיל הבא

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

למצוא:

1. $f([1,\infty)$
2. $f([0,1])$
3. $f^{-1}(\{-1,2\})$
4. $f^{-1}([0,1)$

5.3.1 סעיף פלמוני

$f(1)=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, הפונקציה רציפה ומונוטונית ולכן

$$f([1,\infty))=(0,\frac{1}{2}]$$

5.3.2 סעיף אלמוני

$$f([0,1])=[\frac{1}{2},1]$$

5.3.3 סעיף Bla

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-1\}) &= \emptyset \\ f^{-1}(\{2\}) &= \emptyset \end{aligned}$$

והאיחוד בינהם גם הוא $\emptyset$.

5.3.4 זה הסעיף האחרון שלי איתכם (עם הגשם הראשון אני אעלם וכאלו..)

$$f^{-1}([0,1])=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

5.4 כאן יש עוד תרגיל

$f:A\to B$ פונקציה.
C,D תת קבוצות של A
E,F תת קבוצות של B
הוכך:

1. $f(C)\backslash f(D)\subseteq f(C\backslash D)$
2. $f^{-1}(E\cap F)=f^{-1}(E)\cap f^{-1}(F)$

5.4.1 ההוכחה

$$\begin{aligned} y\in f(C)\backslash f(D) &\iff y\in f(C)\wedge y\notin f(D) \\ &\iff (\exists c_0\in C|y=f(c_0))\wedge(\forall d\in D: y\neq f(d)) \\ &\iff \exists c_0\in C\backslash D: y=f(c_0) \\ &\iff y\in f(c\backslash D) \end{aligned}$$

5.4.2 עוד הוכחה

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(E\cap F) &\iff f(x)\in E\cap F \\ &\iff f(x)\in E\wedge f(x)\in F \\ &\iff x\in f^{-1}(E)\wedge x\in f^{-1}(F) \\ &\iff x\in f^{-1}(E)\cap f^{-1}(F) \end{aligned}$$

5.5 האם זה יהיה התרגיל האחרון?

הגדרה 5.1 תהי S קבוצה, $S \subseteq S$ תהי הפונקציה האופיינית של A

$$\begin{aligned} ch_A : S &\rightarrow \{0,1\} \\ ch_A(x) &= \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases} \end{aligned}$$

$A, B \subseteq S$

צ"ל

$$ch_{A\setminus B} = ch_A - ch_{A\cap B}$$

מספיק להוכיח $ch_{a\setminus B}(x) = 1 \iff (ch_A - ch_{A\cap B})(x) = 1$

לא יתכן הערך -1 כי $a \cap B \subseteq A$.

$$\begin{aligned} ch_{A\setminus B}(x) = 1 &\iff x \in A\setminus B \\ &\iff x \in A \wedge x \notin B \\ &\iff x \in A \wedge x \notin A \cap B \\ &\iff (ch_A(x) = 1) \wedge (ch_{A\cap B}(x) = 0) \\ &\iff ch_A(x) - ch_{A\cap B}(x) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

5.6 עוד תרגיל אחד קטן

$X = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow X \\ f(x) &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

כמה איברים יש ב-

$$F = \{f, f\circ f, f\circ f\circ f, \ldots\}$$

$$\begin{aligned} f\circ f &= \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} \\ f\circ f\circ f &= -\frac{1-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} \\ f\circ f\circ f\circ f &= f \end{aligned}$$

ולכן $|F| = 3$

6 עוד תרגול, אחד שאוכל בננות

$$f : X \to Y$$

f חד-חד-ערכית אם ורק אם

$$\begin{aligned}(\forall x_1, x_2 \in X)\, f(x_1) = f(x_2) \quad &\to \quad x_1 = x_2 \\ (\forall x_1, x_2 \in X)\, f(x_1) \neq f(x_2) \quad &\to \quad x_1 \neq x_2\end{aligned}$$

f על אם ורק אם

$$(\forall y \in Y)\,(\exists x \in X)\,(f(x) = y)$$

6.1 תרגיל

$$\begin{aligned}f : X \quad &\to \quad Y \\ g : Y \quad &\to \quad Z\end{aligned}$$

פונקציות.
הוכח/הפרך

1. f, g על $\Leftarrow g \circ f$ על
2. $f \circ g$ חח"ע $\Leftarrow f$ חח"ע
3. $f \circ g$ חח"ע $\Leftarrow g$ חח"ע

6.1.1 טענה ראשונה

תהי $z \in Z$ צ"ל קיים $x \in X$ כך ש-

$$g \circ f(x) = z$$

$$\begin{aligned}z \in Z \quad &\Rightarrow \quad \exists y \in Y : g(y) = z \\ y \in Y \quad &\Rightarrow \quad \exists x \in X : f(x) = y \\ &\Downarrow \\ (g \circ f)\,(x) \quad &= \quad f(f(x)) = f(y) = z\end{aligned}$$

6.1.2 טענה שניה

נניח בשלילה כי f אינה חד חד ערכית. אזי קיימות $a, b \in X$ כך ש-$f(a) = f(b) = y$ ואז $g \circ f(a) = g(y) = g \circ f(b)$ וזו סתירה, ועל כן f חח"ע.

6.1.3 טענה שלישית

שגויה, דוגמאת נגד.

$$\begin{aligned}g(x) \quad &= \quad |x| \\ f(x) \quad &= \quad x^2\end{aligned}$$

6.2 תרגיל

$f:A\to B$ חח"ע
$C,D\subseteq A$
צ"ל

1.

$$f^{-1}(f(c))=c$$

2.

$$f(c)=f(D)\Rightarrow C=D$$

6.2.1 א'

לכל f

$$C\subseteq f^{-1}(f(C))$$

עלינו להוכיח את ההכלה ההפוכה,

$$f'(f(C))\subseteq C$$

יהי

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(f(C)) &\iff f(x)\in f(C)=\{y\in B|\exists\tilde{c}\in S:y=f(\tilde{c})\}\\ &\iff \exists c_x\in C:f(x)=f(c_x)\\ &\iff \exists c_x\in C:x=c_x\\ &\iff x\in C\end{aligned}$$

6.2.2 חלק ב'

$$\begin{aligned}f(C) &= f(D)\\ f^{-1}f(C)) &= f^{-1}(f(D))\\ C &= D\end{aligned}$$

6.3 לא נמאס עם התרגילים הללו?

$$\begin{aligned}A &= \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\\ f:A &\to A\\ (x,y) &\mapsto (x-3y,x+3y-1)\end{aligned}$$

1. צ"ל f ביז'קטיבית (חח"ע + על)
2. מצא f^{-1}
3. מצא $f\circ f$

6.3.1 ביז'קטיבית

נוכיח תחילה חח"ע

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$$

$$\begin{aligned}(x_1-3y_1,x_1+3y_1-1) &= (x_2-3y_2,x_2+3y_2-1)\\ &\begin{cases}x_1-3y_1=x_2-3y_2\\ x_1+3y_1-1=x_2+3y_2-1\end{cases}\end{aligned}$$

ומכן יוצא ש-$y_1=y_2, x_1=x_2$

על:

יהי $(x,y)\in A$. צ"ל קיים $(\alpha,\beta)\in A$ כך ש-$f(\alpha,\beta)=(x,y)$.

$$\begin{aligned}(x,y) &= f(\alpha,\beta)=\\ (x,y) &= (\alpha-3\beta,\alpha+3\beta-1)\\ &\begin{cases}x= & \alpha-3\beta\\ y= & \alpha+3\beta-1\end{cases}\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{x+y+1}{2}\in\mathbb{Q}\\ \beta &= \frac{y-x+1}{6}\in\mathbb{Q}\end{aligned}$$

ולכן $(\alpha,\beta)\in A$

6.3.2 ב'

$$f'(x,y)=\left(\frac{x+y+1}{2},\frac{y-x+1}{6}\right)$$

6.4 כן. עוד תרגיל

$$f:X\to Y$$

על.

צ"ל

$$\begin{aligned}a:\hat{f}:P(X) &\to P(Y)\\ b:\hat{\hat{f}}:(Y) &\to P(X)\end{aligned}$$

כאשר $\hat{f}$ על ו-$\hat{\hat{f}}$ חח"ע.

6.4.1 תי

$$B \in P(Y)$$

עלינו להוכיח כי $\exists A \in P(X) : \hat{f}(A) = 3$
לכל $b \in B$ קיים $a_b \in A$

$$f(a_b) = b$$

נקח $A = \bigcup f^{-1}(\{b\})$.

$$\begin{aligned} \hat{f}(A) &= \hat{f}\left(\bigcup f^{-1}(\{b\})\right) \\ &= f\left(\bigcup f^{-1}(\{b\})\right) \\ &= \bigcup f(f^{-1}(\{b\})) \\ &= \bigcup \{b\} \end{aligned}$$

7 תרגול כמעט חזרה

7.1 תרגיל מעניין

$$f : B \to C$$

צ"ל f חח"ע $\iff (\forall g, h : A \to B)\,(f \circ h = f \circ h \to g = h)$

פתרון נניח כי $f \circ h = f \circ g$ ונראה כי $h = g$

$$h = g$$

$$(\forall a \in A)\,((f \circ h)\,(a) = (f \circ g)\,(a)) \quad \iff \quad (\forall a \in A)\,(f(h(a)) = f(g(a)))$$

f חח"ע ולכן $(\forall a)\, h(a) = g(a)$

$$\Rightarrow h(a) = g(a)$$

בכיוון שני, נניח $f(b_1) = f(b_2)$ ונראה כי $b_1 = b_2$
נניח בשלילה $b_1 \neq b_2$, נגדיר

$$\begin{aligned} g &\equiv b_1 \\ g &\equiv b_2 \end{aligned}$$

$$(f \circ h)\,(a) = f(h(a)) = f(b_1) = b(b_1) = f(g(a)) = (f \circ g)\,(a)$$

ולכן לכל $a \in A$,

$$(f \circ g)(a) = (f \circ h)(a)$$

ולכן

$$f \circ g = f \circ h$$

ואז

$$g = h$$

בסתירה להנחה, ולכן $b_1 \neq b_2$.

7.2 תרגיל

$$\begin{gathered} I \neq \emptyset \\ \{A_i\}_{i \in I} \quad , \quad \{B_i\}_{i \in I} \end{gathered}$$

משפחות של קבוצות.
הוכח או הפרך

.1

$$\bigcap_i P(A_i) = P\left(\bigcap_i A_i\right)$$

.2

$$\left(\bigcap_i A_i\right) \times \left(\bigcap_i B_i\right) = \bigcap_i (A_i \times B_i)$$

.3

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{N} \\ A_n &= \begin{cases} \mathbb{N} & n = 1 \\ \{n\} & n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

למצוא את

$$C = \times_{n=1}^{\infty} A_n$$

7.2.1 סעיף 1

$$\bigcap_i P(A_i) = P\left(\bigcap_i A_i\right)$$

$$\begin{aligned} X \in \bigcap_i P(A_i) &\iff (\forall i)(i \in I \to X \in P(A_i)) \\ &\iff (\forall i)(i \in I \to X \subseteq A_i) \\ &\iff x \in X \\ &\iff X \subseteq A \\ &\iff X \in P(A) \end{aligned}$$

7.2.2 סעיף 2

$$\begin{aligned}(a,b)\in\left(\bigcap_i A_i\right)\times\left(\bigcap_i B_i\right) &\iff \left(a\in\bigcap_i A_i\right)\wedge\left(a\in\bigcap_i B_i\right)\\ &\iff (\forall i)\left(i\in I\to a\in A_i\right)\wedge(\forall i)\left(i\in I\to b\in B_i\right)\\ &\iff (\forall i)\left((i\in I\to a\in A_i)\wedge(i\in I\to b\in B_i)\right)\\ &\iff (\forall i)\left(i\in I\to (a,b)\in A_i\times B_i\right)\\ &\iff \bigcap_i (A_i\times B_i)\end{aligned}$$

7.2.3 עוד סעיף

$$\begin{aligned}\times_i A_i &= \left\{f|\left(f:I\to\bigcup_i A_i\right)\wedge(\forall i)\left(i\in I\to f(i)\in A_i\right)\right\}\\ C &= \left\{f|\left(f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\right)\wedge(\forall n)\left(n\in\mathbb{N}\to f(n)\in A_n\right)\right\}\\ C &= \left\{f_n|n\in\mathbb{N}\right\}, f_n(m)=\begin{cases}n & m=1\\ m & m\neq 1\end{cases}\end{aligned}$$

7.3 תרגיל

$$f\circ g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

$f(n)=$ מספר הספרות ב-n
$g(n)=10^n-1$

1. $f\circ g=id_N$
2. בדוק הפיכות f,g

7.3.1 לכל n

$$\left(f\circ g\right)(n)=f\left(g\left(n\right)\right)=f\left(10^n-1\right)=n$$

7.3.2 ב׳

f לא חח"ע, ולכן אינה הפיכה
g לא על, ולכן אינה הפיכה.

7.4 הוכח או הפרך

$$p\wedge(p\to q)\wedge(q\to r)\Rightarrow q\wedge r$$

פתרון באגף שמאלי, נתון ,

$$\begin{aligned} P \wedge (P \to r) &\iff P \wedge (\sim p \vee r) \\ &\iff (P \wedge \sim p) \vee (p \wedge r) \\ &\iff (p \wedge r) \end{aligned}$$

8 תרגול חזרה

8.1 תרגיל 1

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (x,y) &\mapsto (1-y, y^2 - x + 1) \end{aligned}$$

1. צ"ל f ביז'קטיבית
2. קבע את הפוקנצה ההפוכה f^{-1}

8.1.1 נניח כי

$$f(x,y) = f(a,b)$$

$$\begin{aligned} \left(1-y, y^2-x+1\right) &= \left(1-b, b^2-a+1\right) \\ 1-y &= 1-b \\ y^2-x+1 &= b^2-a+1 \\ y &= b \\ y^2+1 &= b^2+1 \\ y^2-x+1 &= b^2-a+1 \\ x &= a \\ (x,y) &= (a,b) \end{aligned}$$

אזי f חח"ע
יהי

$$(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$? = (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\left(1-b, b^2-a+1\right) = f(a,b) = (x,y)$$

$$\begin{aligned} \left(a-b, b^2-a+1\right) &= (x,y) \\ \begin{cases} 1-b=x \\ b^2-a+1=y \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b &= 1-x \\ a &= b^2+1-y = 2-2x+x^2-y \end{cases} \end{aligned}$$

8.1.2 נמצא את הפונקציה ההפוכה

$$f^{-1}(x,y)=\Big((1-x)^2+1-y,1-x\Big)$$

ניתן לבדוק

$$\begin{aligned} f\circ f^{-1}(x,y) &= (x,y)\\ f^{-1}\circ f(x,y) &= (x,y)\end{aligned}$$

8.2 תרגיל

$$\begin{aligned} f:A &\to B\\ g:B &\to C\end{aligned}$$

הוכח או הפרך:
אם קיימת פונקציה $h:C\to A$ כך ש-$f\circ h\circ g=1_B$ אזי f סורג'קטיבית ו-g אינז'קטיבית
פתרון:

$$b\in B$$

$$b=1_B(b)=f\circ h\circ h(b)=f(h(g(b)))$$

מקור של b ע"י f , ולכן f על.
נניח כי $g(b_1)=g(b_2)$.

$$\begin{aligned} (f\circ h)\,(g(b_1)) &= (f\circ h)\,(g(b_2))\\ (f\circ h\circ g)\,(b_1) &= (f\circ h\circ g)\,(b_2)\\ b_1 &= b_2\end{aligned}$$

8.3 תרגיל

$I\neq\emptyset$, קבוצת האינדקסים $(A_i)_{i\in I}\,,(B_i)_{i\in I}$ שתי משפחות הקבוצות.
הוכח או אהפרך

$$\left(\bigcup_i A_i\right)\cup\left(\bigcup_i B_i\right)=\bigcap_i (A_i\cup B_i)$$

פתרון:

$$\begin{aligned} x\in\left(\bigcup_i A_i\right)\cup\left(\bigcup_i B_i\right) &\iff x\in\bigcup A_i\vee x\in\bigcup B_i\\ &\iff (\exists i)\,(i\in I\wedge x\in A_i)\vee((\exists i)\,(i\in I)\wedge x\in B_i)\\ &\iff (\exists i)\,((i\in I\wedge x\in A_i)\vee((i\in I)\wedge x\in B_i))\\ &\iff (\exists i)\,(i\in I\wedge(x\in A_i\vee x\in B_i))\\ &\iff (\exists i)\,(i\in I\wedge X\in A_i\cup B_i)\\ &\iff \bigcap_i (A_i\cup B_i)\end{aligned}$$

8.4 תרגיל

$$X \in \mathbb{R}$$

נרגדיר רלצית R

$$xRy \iff \sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

1. להוכיח R רלציית שקילות
2. למצוא $[0]$, x/R

סימטריות.
רפלקסיביות

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

נניח כי xRy

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= 1 \\ \left(1 - \cos^2 x\right) + \left(1 - \sin^2 y\right) &= 1 \\ \sin^2 y + \cos^2 x &= 1 \\ yRx \end{aligned}$$

טרנזטיביות
נניח כי $xRy \wedge yRz$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= 1 \\ \sin^2 y + \cos^2 z &= 1 \\ \sin^2 x + 1 + \cos^2 z &= 2 \\ \sin^2 x + \cos^2 z &= 1 \\ xRz \end{aligned}$$

נמצא מחלקות שקילות

$$\begin{aligned} [x]_R &= \{y \in X | xRy\} \\ &= \left\{y \in R | \sin^2 x + \cos^2 y = 1\right\} \\ &= \left\{y \in X | \cos^2 y = 1 - \sin^2 x\right\} \\ &= \{y \in X | \cos y = \pm \cos x\} \\ &= \{y \in X || (\exists n) (n \in \mathbb{Z} \wedge y = \pi n \pm x)\} \\ [x] &= \{y \in X | (\exists n) (n \in \mathbb{Z} \wedge (y = \pi n + x \vee y = \pi n - x))\} \\ X/R &= \left\{[x] | x \in 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\} \\ [0] &= \{y \in X | (\exists n) (n \in \mathbb{Z} \wedge y = \pi n)\} \end{aligned}$$

8.5 תרגיל

$$x = \mathbb{N}$$

ומגדירים רלציה R

$$xRy \iff \exists k, l \in \mathbb{N} : x^k = y^l$$

צ"ל R רלציית שקילות
רשום- X/R, $[1]_R$, $[2]_R$.
ב.
יהי $n \in [x]$ הקטן ביותר.

$$[x] = \left\{n^k | k \in \mathbb{N}\right\}$$

הוכחה:

$$\begin{array}{rcl} y & \in & [x] \\ y^k & = & x^l \\ n^t & = & x^S \\ n & \leq & x \\ t & \geq & S \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} [1]_R & = & \{1\} \\ [2] & = & \left\{2^k | k \in \mathbb{N}\right\} \\ X/R & = & \{[x] \,|\, (\forall y \in \mathbb{N}) \, (n \geq 2) \, (x \neq y^n)\} \end{array}$$

לכל $z \in \mathbb{N}$ אז $y \in [y]$, בלה בלה בלה.

8.6 פונקציה

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

כאשר n מתחיל מ-1

$$(m, n) \mapsto 2^{m-1} (2n - 1)$$

א. קבע

$$f^{-1} (\{u|u|2\})$$

ב. הוכך f ביז'קטיבית
ג. קבע את f^{-1}, $f^{-1}(52)$

8.6.1 א'

$m \geq 2 \iff$ **זוגי** $2^{m-1}(2n-1)$

$$f^{-1}(\{u|u|2\}) = \{(m,n)|m \geq 2\}$$

ב.

$$\begin{aligned} f(m,n) &= f(k,l) \\ 2^{m-1}(2n-1) &= 2^{k-1}(2l-1) \end{aligned}$$

$m = k$, כי אם לא אז $m > k$ או $m < k$.
נוכיח, בלי הגבלת הכלליות, כי $m > k$
נחלק את שני האגפים ב-2^{m-k+1}

$$2^{m-k}(2n-1) = 2l-1$$

הצד השמאלי הוא זוגי והימני זוגי, וזו סתירה, אזי $m = k$.

$$\begin{aligned} 2^{m-1} &= 2^{k-1} \\ 2n-1 &= 2l-1 \\ n &= l \end{aligned}$$

נוכיח על,

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{N} \\ x &= 2^{\alpha} P_1^{\beta_1} \ldots p_t^{\beta t} \\ m &= \alpha + 1 \\ n &= \frac{1}{2}\left(P_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot P_t^{\beta_t} + 1\right) \end{aligned}$$

כאשר $P_1 \ldots, p_t$ הם הגורמים הראשוניים.
בהנתן $X \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X &= 2^{\alpha} P_1^{\beta_1} \ldots p_t^{\beta t} \\ f^{-1}(x) &= \left(\alpha + 1, \frac{1}{2}\left(P_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot P_t^{\beta_t} + 1\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 52 &= 2^2 \cdot 13 \\ f^{-1}(52) &= (3,7) \end{aligned}$$

9 אינדוקציה ומספרים

9.1 הוכך כי לכן $n \in \mathbb{N}$

$8^n - 3^n$ מתחלק ב-5.

פתרון $n = 0$

$$8^n - 3^n = 0$$

מתחלק ב-5
נניח כי נטענה מתקיימת ל-n ונוכיח ל-$n+1$

$$\begin{aligned}8^{n+1} - 3^{n+1} &= 8 \cdot 8^n - 3 \cdot 3^n = 5 \cdot 8^n + 3 \cdot 8^n - 3 \cdot 3^n \\ &= 5 \cdot 8^n + 3\left(8^n - 3^n\right)\end{aligned}$$

הסוגריים מתחלקים בחמש לפי הנחת האינדוקציה.

9.2 פעולות ב-$\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}m + 0 &= m \\ m + n^+ &= (m+n)^+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m \cdot 0 &= 0 \\ m \cdot n^+ &= m \cdot n + m\end{aligned}$$

9.3 הוכך

1. פעולת חיבור ב-$\mathbb{N}$ היא קומטטיבית
2. פעולת כפל ב-$\mathbb{N}$ דיסטריביוטיבית

9.3.1 צ"ל

$$m + n = n + m$$

צ"ל

$$m + 0 = 0 + m$$

$$\begin{aligned}m &= 0 \\ 0 + 0 &= 0 + 0\end{aligned}$$

נניח שהטענה מתקיימת עבור m ונוכיח ל-m^+.

$$0 + m^+ = (0+m)^+ = (m+0)^+ = m^+ = m^+ + 0$$

נניח כי הטענה מתקיימת עבור n ונוכיח ל-n^+.

$$\begin{aligned} m+n^+ &= (m+n)^+ = (n+m)^+ = (n+m)+1 \\ &= (n+1)+m = n^+ + m \end{aligned}$$

נוכיח ש-

$$k+1 = 1+k$$

הטענה נכונה עבור 0 כי אפס מתחלף בכל דבר

$$\begin{aligned} 1+k^+ &= (1+k)^+ = (k+1)^+ = k^{++} \\ &= k^+ + 1 \end{aligned}$$

9.3.2 צ"ל

$$(a+b)\,n = an + bn$$

$n = 0$

$$(a+b)\cdot 0 = 0+0 = a0 + b0$$

נניח כי הטענה נכונה עבור n ונראה ל-n^+

$$\begin{aligned} (a+b)\,n^+ &= (a+b)\,n + (a+b) = \\ &= (an+bn) + a + b \\ &= (an+a) + (an+b) \\ &= an^+ + bn^+ \end{aligned}$$

9.4 פעוות ב-$\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} [(a,b)]\cdot[(c,d)] &= [(ac+cd, ad+bc)] \\ [(a,b)]+[(c,d)] &= [(a+c, b+d)] \end{aligned}$$

9.5 תרגיל

צ"ל לכל $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \alpha &= [(a,b)] \\ \beta &= [(c,d)] \end{aligned}$$

טענה:

$$-\alpha = [(b,a)]$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} -\alpha+\alpha &= [(b,a)]+[(a,b)]=[(b+a,a+b)] \\ &= [(a+b,a+b)]=[(0,0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\alpha)(-\beta) &= [(b,a)][(d,c)] \\ &= [(bd+ac,bc+ad)] \\ &= [(ac+bd,ad+bc)] \\ &= \alpha\beta \end{aligned}$$

9.6 תרגיל

הוכח:

$$A \sim B$$

$$\begin{aligned} A=(0,\infty) \quad &, \quad B=\mathbb{R} \\ A=(-1,1) \quad &, \quad B=\mathbb{R} \\ A \quad &= \quad \{(x,y)|\,|x|+|y|=1, y\geq 0\} \\ B \quad &= \quad \left\{(x,\cos x)|\frac{-\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right\} \\ A=(1,3) \quad &, \quad B=(7,13) \\ A=[0,1] \quad &, \quad B=(0,1) \end{aligned}$$

9.6.1 קבוצה ראשונה

$$A=(0,\infty), B=\mathbb{R}$$

$$\ln x : A\to B$$

חח"ע ועל

9.6.2 זוג שני

$$\begin{aligned} f_1 = \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\to \mathbb{R} \\ f_2\,(-1,1) &\to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\mapsto \frac{\pi}{2}x \\ f_1 \circ f_2 : (-1,1) &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

והיא ביז'קטיבית

9.6.3 ג'

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \,|\, |x| + |y| = 1, y \geq 0\} \\ B &= \left\{(x, \cos x) | \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

הפונקציה מצויירת על הלוח...

9.6.4 ד

$$f(x) = 3x + 4$$

9.6.5 ה' ובעייתי

דרך אחת

$$\begin{aligned} f_1 : B &\to A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

חח"ע, ולכן $B \preceq A$.

$$\begin{aligned} f_2 : A &\to B \\ x &\mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

חח"ע, ולכן $A \preceq B$, ולכן $A \sim B$.

דרך שניה

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ 0 &\mapsto \frac{1}{2} \\ 1 &\mapsto \frac{1}{3} \\ \frac{1}{n} &\mapsto \frac{1}{n+2} | \forall n \geq 1 \\ x &\mapsto x | x \neq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

10 תרגול

10.1 תרגיל

A, B, C,
הוכך,הפרך

$$A \preceq C \Rightarrow A^B \preceq C^B$$

פתרון

$$A \preceq C \quad \Longleftrightarrow \quad \exists f : A \xrightarrow[onto]{1:1} C$$

צריך לבנות פונקציה

$$F : A^B \quad \xrightarrow[onto]{1:1} \quad C^B$$

תהי $g \in A^B$, נגדיר $F(g)$ באופן הבא:

$$\forall b \in b : F(g)(b) = F(g(b)) = (f \circ g)(b)$$

$g : B \to a$ פונקציה ו-$f : A \to C$ פונקציה ולכן $F(g)$ פונקציה מ-B ל-C.
כלומר, $F(g) \in C^B$ לכל $g \in A^B$, ולכן $f : A^B \to C^B$ פונקציה.
נשאר להראות כי F חח"ע.
נניח כי $F(g_1) = F(g_2)$ עבור $g_1, g_2 \in A^B$. אז לכל $b \in B$, $F(g_1)(b) = F(g_2)(b)$

$$g(g_1(b)) \quad = \quad f(g_2(b))$$

f חח"ע ולכן

$$g_1(b) = g_2(b)$$

לכל $b \in B$, ולכן $g_1 = g_2$, והפונקציה חח"ע.

10.2 תרגיל

תהי $f = \{A_i\}_{i \in I}$ משפחה של קטעים פתוחים זרים ב-$\mathbb{R}$.
צ"ל f בת מניה לכל היותר.

פתרון אם A_iקטע פתוח ב-$\mathbb{R}$, אז יש בו מספר ריונלי של q_i.
נגדיר $f : q \to \mathbb{Q}$, $f(A_i) = q_i$.
לכל $i \neq j$,

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \emptyset \\ q_i &\neq q_j \\ f(A_i) &\neq f(A_j) \end{aligned}$$

אזי f חח"ע. בת מניה, $f \preceq \mathbb{Q}$.

10.3 תרגיל

A, B קבוצות. הוכח/הפרך.

1. $A \sim B \Rightarrow A - B \sim B - A$
2. $A - B \sim B - A \Rightarrow A \sim B$

10.3.1 לא נכון

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{N} \\ B &= \mathbb{Z} \\ B - A &\sim \mathbb{N} \\ A - B &= \emptyset \end{aligned}$$

10.3.2 נכון.

$A - B \sim B - A \Leftarrow$

$$f : A - B \xrightarrow[onto]{1:1} B - A$$

עלינו לבנות

$$g : A \xrightarrow[onto]{1:1} B$$

$$\begin{aligned} A &= (A - B) \dot{\cup} (A \cap B) \\ B &= (B - A) \dot{\cup} (B \cap A) \\ g(a) &= \begin{cases} f(a) & a \in A - B \\ a & a \in A \cap B \end{cases} \end{aligned}$$

אזי g פונקציה מ-A ל-B, צ"ל שהיא חח"ע ועל.

g **חח"ע**, נניח כי $g(a_1) = (a_2)$.
$a_1, a_2 \in A - B$, $f(a_1) = f(a_2)$ אבל f חח"ע, אזי $a_1 = a_2$.
$a_1, a_2 \in A \cap B$, אזי $a_1 = a_2$
$a_1 \in A - B, a_2 \in A \cap B$

$$\begin{aligned} g(a_1) &= g(a_2) \\ f(a_1) &= a_2 \end{aligned}$$

$$f(a_1) = a_2 \in (B - A) \cap (B \cap A) = \emptyset$$

ולכן לא יתכן.

g על

$$\begin{aligned} b &\in B \\ &= (B-A)\dot{\cup}(A\cap B) \end{aligned}$$

אם $b\in B-A$, אז קיים $a\in A-B\subseteq A$, כך ש-

$$g(a)=f(a)=b$$

אם $b\in B\cap A$ אז $g(b)=b$ ו-$b\in A\cap B\subseteq A$.

10.4 תרגיל

A קבוצות סדרות אינסופית שאיברהן מהקבוצה $\{0,1\}$, כלומר, $A=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$$B=\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$$

בחרו את הטענה הנכונה

1. $A\preceq B$, $A\nsim B$
2. $B\preceq A$, $A\nsim B$
3. $A\sim B$

3 נמצא שתי פונקציות אינז'קטיביות

$$\begin{aligned} f:A &\to B \\ g:B &\to A \end{aligned}$$

$f:A\to B$ היא פונקצית שיכון.

$$\begin{aligned} b &= (b_i)\in B \\ b_i &\to \begin{cases} 0,0 & b=0 \\ 0,1 & b=1 \\ 1,0 & b=2 \\ 1,1 & b=\emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

10.5 תרגיל

A אינסופית שאינה בת מניה ו-B בת מניה.

$$A-B\sim A$$

תחילה, נוכיח $A\backslash B$ אינסופית.
נניח שלא, אז

$$A\backslash B=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$$

B בת מניה. לכן, קיימת

$$\begin{aligned} f:\mathbb{N} &\xrightarrow[onto]{1:1} B \\ f(n) &= b_n \end{aligned}$$

$$A \subseteq A\backslash B\dot{\cup} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, b_1, b_2, \ldots\}$$

ולכן A בת מניה לכל היותר, וזו סתירה.

$A-B$ **אינסופית** **אז קיימת סדרה** $A-B$ $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A - B$.

$$\begin{aligned} g: A\backslash B\dot{\cup}B &\rightarrow A\backslash B \\ g(x) &= \begin{cases} c_{2i} & x = b_i \in B \\ c_{2i-1} & x = c_i \in A\backslash B \\ x & \text{else} \end{cases} \end{aligned}$$

לפי הגדרת g, g פונקציה אינז'קטיבית, לכן $A\backslash B \preceq (A\backslash B)\dot{\cup}B$. $A \preceq A\backslash B$ ולכן ברור $A \preceq A\backslash B$ אזי $A\backslash B \sim A$.

10.6 A, B, C קבוצות, $B \cap C = \emptyset$

צ"ל $A^B \times A^C \sim A^{B\cup C}$.

הוכחה: נגדיר

$$\begin{aligned} F: A^B \times A^C &\rightarrow A^{B\cup C} \\ F(f_\beta, f_\alpha) &\in A^{B\cup C} \end{aligned}$$

לכל $x \in B \cup C$ נגדיר

$$F(f_\beta, f_\gamma)(x) = \begin{cases} f_\beta(x) & x \in B \\ f_\gamma(x) & x \in C \end{cases}$$

$B \cap C = \emptyset$ ולכן $F(f_\beta, f_\gamma)$ מוגדרת היטב ולכן פונקציה מ-$B \cup C$ ל-A.

F **חח"ע** ■

11 תרגול

11.1 תרגיל

תהי X קבוצה עם סדר חלקי בו לכל תת קבוצה לא ריקה יש איבר ראשון ואחרון.

צ"ל $(x, \leq)$ קבוצה סדורה לינארית סופית. (כל 2 איברים ניתנים להשוואה)

פתרון

$(x, \leq)$ **קס"ל = כל שאני איברים ניתנים להשוואה, כי לכל** $x \neq y$, **לקבוצה** $\{x, y\}$ **יש ראשון ואחרון.**

נהיו x_g, x_k האיברים הראשונים והאחרונים של X.

תחילה, נוכיח כי לכל $x \neq x_g$ יש עוקב מידי.

יהיה $x \neq x_g$, נביט בקבוצה $A_x = \{a \in X | a \geq x\}$. A_x אינה ריקה כי-$x_g \in A_x$.

יהי a_x איבר ראשון של A_x . נוכיח כי הוא העוקב המידי של x.

יהי $x \le z \le a_x$,
אם $z \in A_x$, אזי $z \ge a_x$, ולכן $z = a_x$.
אם $z \notin A_x$, אזי $z \le x$, ואז $z = x$.
כלומר, לא קיים z כזה, ולכן a_x עוקב מיידי של x.
נבחר $x_0 = x_k$. x_{i+1} עוקב מידי של x_i.
ל-$Y = \{x_i\}_{i \ge 0}$ יש איבר אחרון - x_g , ו-Y סופית.
נוכיח כי $Y = X$.
ברור $Y \subseteq X$, נוכיח $X \subseteq Y$, ובזה נסיים. יהי $z \in X$,$x_g \neq z$, $x_0 \le z$.
קיים i הגדול ביותר כך ש-$x_i \le z$. , ולכן $z = x_i \in Y$.

11.2 X אינסופית

צ"ל שקיימת פונקציה $f : X \to X$, כך שלכל איבר יש שני מקורות בדיוק.
כלומר, צ"ל שלכל $x \in X$, $\left|f^{-1}(\{x\})\right| = 2$.
נקח $Y = (X \times \{x_1\}) \dot\cup \{X \times \{x_1\}\}$, ו-$X \sim Y$ (חשבון עוצמות וכאלו)
קיימת פונקציה ביז'קטיבית $g : X \to Y$. נבנ

$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ f(x) &\mapsto \begin{cases} x' & g(x) = (x_1', x_1) \\ x'' & g(x) = (x_1'', x_2) \end{cases} \end{aligned}$$

יהי $a \in X$,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{a\}) &= \{x \in X | g(x) = (a, x_1) \vee (a, x_2)\} \\ \left|f^{-1}(\{a\})\right| &= 2 \end{aligned}$$

$$f(x_i) \mapsto f(x_{[\frac{i}{2}]})$$

11.3 תרגיל מעניין

$$\begin{gathered} (\mathbb{N}, \le^*) \\ 1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6 \ldots \end{gathered}$$

צ"ל שהקבוצה הנ"ל לא דומה ל-$(\mathbb{Z}, \le)$ או לאף תת קבוצה שלהאך כל דומה תתת קבוצה של $(\mathbb{R}, \le)$.
ב-$(\mathbb{Z}, \le)$ לכל איבר יש קודם מיידים, ב-$(\mathbb{N}, \le^*)$ ל-2 אין קודם מיידי.

$$f(x) \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & x < 2 \\ 2 - \frac{1}{x} & x \ge 2 \end{cases}$$

f היא חח"ע לפי בנייתה ועל תמונתה, שהיא תת קבוצה ב-$\mathbb{R}$,והיא שומרת סדר.

12 עוד תרגול

12.1 תרגיל

$(A, \le)$קס"ח.

צ"ל: $(A,\leq)$ דומה לתת קבוצה של $(P(A),\subseteq)$.

$$\begin{aligned} f:A &\to P(A) \\ f(a) &= \{x\in A\}\,|x\leq a \end{aligned}$$

נוכיח ש-f חח"ע. יהי $a\neq b\in A$.

- מקרה ראשון, a,b לא ניתנים להשוואה. $a\in f(a)$, ולא ב-$f(b)$. ולכן $f(a)\neq f(b)$.
- $a<b$ ($a<b$, דומה). $b\notin f(a)$ ו-$b\in f(b)$. $f(a)\neq f(b)$.

הפונקציה על התמונה שלה, שהיא תת קבוצה של $P(A)$.
נוכיח f שומרת סדר.
נניח $a\leq b$. צ"ל $f(a)\subseteq f(b)$.

$$\begin{aligned} x\in A &\Rightarrow x\leq a \\ &\Rightarrow x\leq b \\ &\Rightarrow x\in f(b) \end{aligned}$$

צ"ל ש-$f^{-1}:\mathrm{Im}f\to A$ שומרת סדר.
נניח $f(a)\subseteq f(b)$ אזי $a\leq b$ ו-$a\in f(a)$, ו-f

הערה 12.1 אם $(A,\leq)$קבוצה סדורה חלקית, אז $(A,\leq)$ דומה $(I(A),\subseteq)$. ע"י $a\mapsto I_A(a)$.

12.2 תרגיל $A\subseteq\mathbb{R}$ סדורה הייטב עם הסדר הרגיל.

צ"ל $|A|\leq\aleph_0$.

פתרון

$$f:A\to\mathbb{Q}$$

חח"ע. ב-A, לכל $a\in A$ קיים x_a עוקב מיידי. x_a הוא האיבר הראשון של

$$S(a)=\{y\in A|y>a\}$$

$S(a)$ סדורה היטב ולכן יש לה איבר אחרון.
יהי a (לא אחרון). נבחר

$$f(a)\in(a,x_a)\cap\mathbb{Q}$$

אם a אחרון, אז נבחר

$$f(a)\in(a,\infty)\cap\mathbb{Q}$$

נשאר להראות f חח"ע. נקח $a\neq b$, בלי הגבלת הכלליות, נניח $a<b$,

$$\begin{aligned} f(a) &< x_a\leq b<f(b) \\ f(a) &\neq f(b) \end{aligned}$$

12.3 תרגיל

X קבוצה סדורה לינארית. צ"ל X סדורה היטב $\iff$ $I(a)$ סדורה היטב לכל $a \in A$.
לכל $a \in A$, $I(a) \subseteq A$ ולכן קבוצה סדורה חלקית.
נניח בשלילה A לא קבוצה סדורה חלקית. אז קיימת בה סדרה אינסופית יורדת, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n < x_{n-1}$, לכל n.
אז $I_A(x_1)$ מכילה סדרה אינסופית יורדת, ולכן היא אינה סדור היטב, וזה סתירה.

12.4 תרגיל

צריך להוכיח בעזרת אינדוקציה על סופית כי לכל $n \in \mathbb{N}\backslash 0$, $n \geq 1$.

פתרון תהי $A = \{m \in \mathbb{N} | M \geq 1\}$.
צ"ל $A = \mathbb{N}$. נניח כי $I_m \subseteq A$.
צ"ל $m \in A$
$I_m = \emptyset$, אזי $m = 1$ ו-$1 \geq 1$.
$I_m \neq \emptyset$, $1 \in I_m$ אזי $m \leq k$. ולפי הנחת האינדוציה, k, $1 \leq k$, ומטרנזיטביות, $1 \leq m$.

אורדינלים!

12.5 תרגיל

$$
\begin{aligned}
A &= \{2^n | n \in \mathbb{N}\} \\
B &= \{3^n | n \in \mathbb{N}\} \\
C &= \{5, 7, 11\}
\end{aligned}
$$

לחשב:

- $\text{card}A + \text{card}B = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $\text{ord}A + \text{ord}B = \omega + \omega = \omega \cdot 2$
-

$$
\begin{aligned}
\text{card}C + \text{card}B + \text{card}A &= 3 + \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \\
\text{ord}C + \text{ord}B + \text{ord}A &= 3 + \omega + \omega = \omega \cdot 2 \\
\text{card}A \cdot \text{card}C &= \aleph_0 \\
\text{ord}A \cdot \text{ord}C &= \omega \cdot 3 \\
\text{card}C \cdot \text{card}A &= \aleph_0 \\
\text{ord}C \cdot \text{ord}A &= \omega
\end{aligned}
$$

12.6 צ"ל בעזרת אינדוקציה על סופית:

12.6.1 $1^\alpha = 1$

$\alpha = 0$

$$1^0 = 1$$

נניח שזה נכון עבור β, ונוכיח עבור $\alpha = \beta^+$

$$1^{\beta^+} = 1^\beta \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

α סודר גבולי,

$$\begin{aligned} 1^{\alpha} &= \sup\left\{1^{\xi}|\xi<\alpha\right\} \\ &= \sup\left\{1|\xi<\alpha\right\}=1 \end{aligned}$$

12.7 $1\leq\alpha\leq\beta\Rightarrow\alpha^{\gamma}\leq\beta^{\gamma}$

$\gamma=0$

$$\alpha=1\leq q=\beta^{0}$$

$\gamma=\delta$

$$\alpha^{\delta^{+}}=\alpha^{\delta}\alpha\leq\beta$$

γ סודר גבולי

$$\alpha^{\gamma}=\sup\left\{\alpha^{\xi}|\xi<\delta\right\}\leq\sup\left\{\beta^{\xi}|\xi<\delta\right\}=\beta^{\delta}$$

13 פעולות באורדינלים

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \begin{cases}\alpha & \beta=0\\ (\alpha+\gamma)^{+} & \beta=\gamma^{+}\\ \sup\left\{\alpha+\xi|\xi<\lambda\right\} & \beta=\lambda\end{cases} \\ \alpha\cdot\beta &= \begin{cases}0 & \beta=0\\ \alpha\gamma+\alpha & \beta=\gamma^{+}\\ \sup\left\{\alpha\xi|\xi<\lambda\right\} & \alpha=\lambda\end{cases} \\ \alpha^{\beta} &= \begin{cases}1 & \beta=0\\ \alpha^{\gamma}\alpha & \beta=\gamma^{+}\\ \sup\left\{\alpha^{\xi}|\xi<\lambda\right\}\end{cases} \\ \alpha\leq\beta &\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma & \leq\beta+\gamma\\ \gamma+\alpha & \leq\gamma+\beta\end{cases} \\ \alpha<\beta &\Rightarrow \gamma+\alpha<\gamma+\beta \\ \begin{cases}\alpha<\beta\\ \gamma>0\end{cases} &\Rightarrow \gamma\alpha<\gamma\beta \end{aligned}$$

13.1 הוכך/הפרך

13.1.1 $5^{\omega}=\omega$

$$5^{\omega}=\sup\left\{5^{\xi}|\xi<\omega\right\}=\sup\left\{5^{n}|n\in\mathbb{N}\right\}=\omega$$

13.1.2 $\alpha = \beta\omega \Rightarrow \beta + \alpha = \alpha$

$$\beta + \beta\omega = \beta \cdot 1 + \beta\omega = \beta\left(1 + \omega\right) = \beta\omega = \alpha$$

13.1.3 $\alpha = \beta\omega \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha$

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \Rightarrow \alpha = 2\omega = \omega \\ \alpha + \beta &= \omega + 2 > \omega = \alpha \end{aligned}$$

13.1.4 $\alpha < \beta \Rightarrow \left(\exists!\gamma\right)\left(\beta = \gamma + \alpha\right)$

$$\begin{aligned} \beta &= \omega \\ \alpha &= 2 \end{aligned}$$

אזי לכל γ סודר סופי, $\gamma + \alpha < \beta$, ולכל $\gamma \geq \omega$, נקבל $\gamma + \alpha \geq \omega + 2 > \omega = \beta$.

13.1.5 $\alpha < \beta \Rightarrow \left(\exists!\gamma\right)\left(\beta = \alpha + \gamma\right)$.

ראשית, נוכיח יחידות: נניח כי

$$\begin{aligned} \left(\alpha + \gamma_1 = \beta\right) \wedge \left(\alpha + \gamma_2 = \beta\right) &\Rightarrow \alpha + \gamma_1 = \alpha + \gamma_2 \\ &\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \end{aligned}$$

עתה, נוכיח יחידות:

תהיינה $\left(A, \leq_a\right), \left(B, \leq_b\right)$ קבוצות סדורות היטב בעלות אורדינלים α, β.

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\Rightarrow \left(\exists b \in B\right)\left(I(b) \simeq A\right) \\ & \quad c = \left\{x \in B | x \leq b\right\} \\ &\Rightarrow B \simeq I(b) \oplus C \\ &\Rightarrow \beta = \alpha + \gamma \qquad \left(\gamma = \operatorname{ord}\left(C, \leq_b\right)\right) \end{aligned}$$

13.1.6 $\begin{cases} \gamma \neq 0 \\ \alpha\gamma = \beta\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \neq 3 = \beta \\ \gamma &= \omega \\ 2\omega &= \omega = 3\omega \end{aligned}$$

13.1.7 $\alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha^\beta \geq \alpha$

$$\begin{aligned} \left(\beta = 1\right): \qquad \alpha^\beta &= \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha \\ \left(\beta = \gamma^+\right): \qquad \alpha^\beta &= \alpha^\gamma \cdot \alpha \geq_{\{\alpha^\gamma \geq \alpha} \alpha \cdot \alpha \geq_{\{\alpha \geq 1} \alpha \cdot 1 = \alpha \\ \left(\beta = \lambda\right): \qquad \alpha^\beta &= \sup\left\{\alpha^\xi | \xi < \lambda\right\} \geq \sup\left\{\alpha | \xi < \lambda\right\} = \alpha \end{aligned}$$

13.1.8 $\begin{cases}\alpha > 1\\ \alpha^{\beta} = \alpha^{\gamma}\end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma$

נניח בשלילה כי $\gamma \neq \beta$, אז $\gamma > \beta$ או $\gamma < \beta$, נניח, בלי הגבלת הכלליות כי $\gamma < \beta$.
אזי קיים $\delta > 0$ כך ש$\gamma = \beta + \delta$0.

$$\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\delta} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta} \geq \alpha^{\beta} \cdot \alpha$$

וזו סתירה.

13.1.9 $\alpha \geq 2, \beta \geq 2 \Rightarrow \alpha + \beta \geq \alpha\beta$

באינדוקציה:

$$\begin{array}{rrcl}
(\beta = 2): & \alpha + \beta & = & \alpha + 2 \leq \alpha + \alpha = \alpha \cdot 2 = \alpha\beta \\
\left(\beta = \gamma^{+}\right): & \alpha + \beta & = & (\alpha + \gamma)^{+} \leq \alpha\gamma + \alpha = \alpha\gamma^{+} = \alpha\beta \\
(\beta = \lambda): & \alpha + \beta & = & \sup\{\alpha + \xi | \xi < \lambda\} \leq \sup\{\alpha\xi | \xi < \lambda\} = \alpha\beta
\end{array}$$

13.1.10 $\alpha \geq 2 \wedge \beta > 2 \Rightarrow \alpha\beta \leq \alpha^{\beta}$

$$\begin{array}{rrcl}
(\beta = 2): & \alpha\beta & = & \alpha \cdot \alpha = \alpha^{2} = \alpha^{\beta} \\
\left(\beta = \gamma^{+}\right): & \alpha\beta & = & \alpha\gamma + \alpha \leq \alpha^{\gamma} + \alpha \leq \alpha^{\gamma} + \alpha^{\gamma} \\
 & & \leq & \alpha^{\gamma} \cdot 2 \leq \alpha^{\gamma} \cdot \alpha = \alpha^{\beta} \\
(\beta = \lambda): & \alpha\beta & = & \sup\{\alpha\xi | \xi < \lambda\} \leq \sup\left\{\alpha^{\xi} | \xi < \lambda\right\} = \alpha^{\beta}
\end{array}$$

13.1.11 $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha, \beta & = & 2 \\
\gamma & = & \omega \\
(\alpha\beta)^{\omega} & = & 4^{\omega} = \omega \\
2^{\omega}2^{\omega} & = & \omega\omega \neq \omega
\end{array}$$

13.1.12 $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$

$$\begin{array}{rrcl}
(\gamma = 0): & \alpha^{\beta} \cdot \beta^{\gamma} & = & \alpha^{\beta} \cdot 1 = \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta+0} = \alpha^{\beta+\gamma} \\
\left(\gamma = \delta^{+}\right): & \alpha^{\beta} \cdot \beta^{\gamma} & = & \alpha^{\beta}\left(\alpha^{\delta} \cdot \alpha\right) = \left(\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta}\right)\alpha \\
 & & = & \alpha^{\beta+\delta} \cdot \alpha = \alpha^{(\alpha+\delta)^{+}} = \alpha^{\gamma} \\
(\gamma = \lambda): & \alpha^{\beta} \cdot \beta^{\gamma} & = & \ldots
\end{array}$$

14 תרגול אחרון

14.1 ?

14.2 ?

14.3 $\gamma+\alpha=\gamma+\beta\Rightarrow\alpha=\beta$

נניח כי לא, אז $\alpha<\beta$ או $\beta<\alpha$. נבחר, בלי הגבלת הכלליות, $\beta<\alpha$.
קיים $\delta>0$ כך ש-$\beta=\alpha+\delta$

$$\begin{aligned}\gamma+\alpha &= \gamma+(\alpha+\delta)=(\gamma+\alpha)+\delta\\ &\geq (\gamma+\alpha)+1>\gamma+2\end{aligned}$$

14.4 β הינו אורדינל על סופי $\Longleftrightarrow$ $\beta+1=\beta$

לא. עבור $\beta=\omega$, $\omega+1\neq\omega$.

14.5 $\alpha\beta=\beta\alpha$

לא נכון, $\alpha=\omega,\beta=2$

14.6 $(\alpha+\beta)\,\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.

לא נכון, $(1+1)\,\omega\neq1\omega+1\omega$.

14.7 $\alpha+\beta\Rightarrow\alpha+\gamma=\beta+\gamma$

$$\begin{aligned}\gamma=0: \quad \alpha+\gamma &= \alpha=\beta=\beta+\gamma\\ \gamma=\delta^+: \quad \alpha+\gamma &= (\alpha+\delta)^+=(\beta+\delta)^+\\ &= (\beta+\gamma)\\ \alpha=\lambda: \quad \alpha+\gamma &= \sup\left(\alpha+\xi|\xi<\lambda\right)\\ &= \sup\left\{\beta+\xi|\xi<\lambda\right\}\\ &= \beta+\gamma\end{aligned}$$

14.8 $\begin{cases}\alpha<\beta\\ \gamma>0\end{cases}\Rightarrow\gamma\alpha<\gamma\beta$

כן.
$\beta>\alpha$ קים $\gamma>0$, $\beta=\alpha+\delta$.

$$\gamma\beta=\gamma\,(\alpha+\delta)=\gamma\alpha+\gamma\delta\geq\gamma\alpha+1>\gamma\alpha$$

14.9 $\beta\geq\alpha>0\Rightarrow\alpha^r\leq\beta^r$

$$\begin{aligned}r=0 \quad \alpha^\gamma &= 1=\beta^\gamma\\ r=\delta^+ \quad \alpha^\gamma &= \alpha^\delta\alpha\leq\beta^\delta\cdot\alpha\\ &\leq \beta^\delta\beta=\beta^\gamma\\ \gamma=\lambda \quad \alpha^\gamma &= \sup\left\{\alpha^\xi|\xi<\lambda\right\}\\ &= \sup\left\{\beta^\xi|\xi<\lambda\right\}=\beta^\gamma\end{aligned}$$

14.10 $\alpha > 1, \alpha^{\beta} = \alpha^{\gamma} \Rightarrow \beta = \gamma$

נניח בשלילה $\beta < \gamma$. אזי קיים $\delta > 0$ כך ש-$\gamma = \beta + \delta$.

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta} &= \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\delta} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta} \\ \alpha^{\beta} \cdot 1 &= \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta} \end{aligned}$$

$\alpha > 1, \delta > 0$ ולכן $\alpha^{\delta} > 1, \alpha^{\beta} > 0$.
לפי תרגיל 8,

$$\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\delta} > \alpha^{\beta} \cdot 1 = \alpha^{\beta}$$

וזו סתירה.

14.11 צ"ל בשתי דרכים שונות

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha$$

דרך 1,
תהי $(A, \leq_{\alpha})$ קבוצה סדורה היטב בעלת אורדינל α.

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(A \times \{1\}) &= \alpha \cdot 1 \\ \operatorname{ord}(\{1\} \times A) &= 1 \cdot \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi : A \times \{1\} &\to \{1\} \times A \\ (a, 1) &\mapsto (1, a) \end{aligned}$$

צ"ל φ איזומורפיזים.

אינדוקציה

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad 1 \cdot 0 &= 0 = 0 \cdot 1 \\ \alpha = \beta^{+} \quad 1 \cdot \beta^{+} &= 1\beta^{+} + 1 = \beta + 1 \\ &= \beta^{+} = \alpha \\ \alpha = \lambda \quad 1 \cdot \alpha &= \sup\{1\xi | \xi < \lambda\} \\ &= \sup\{\xi | \xi < \lambda\} = \alpha \end{aligned}$$

ומצד שני, אותו הדבר.