מתמטיקה דיסקרטית 20283 סמסטר 2007א
תקציר פתרון מועד 90

שאלה 1

א. לא. למשל: $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

ב. לא. למשל:
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. מכיוון שב- A יש רק 3 איברים, אפשר להיעזר בשאלה 2.35 בעמ' 56 בספר:
$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3$.

לכן
$$\left(t(R)\right)^{-1} = \left(R \cup R^2 \cup R^3\right)^{-1}$$

נפתח לפי שאלה 2.6ג בעמ' 36 בספר
$$= R^{-1} \cup (R^2)^{-1} \cup (R^3)^{-1}$$
כעת מתוך שאלה 2.8 בעמ' 40 מתקבל $(R^2)^{-1} = (R^{-1})^2$ ובדומה עבור R^3.
לכן
$$= R^{-1} \cup (R^{-1})^2 \cup (R^{-1})^3$$
$$= t(R^{-1})$$

שאלה 2

נוכיח ש- K בת-מנייה.

ראשית $|K| \geq \aleph_0$, כי לכל $n \in \mathbf{N}$ נוכל להתאים סדרה אינסופית שמכילה רק חזרות על n:
$(n, n, n, \ldots)$
מובן שזו התאמה חד-חד-ערכית של $\mathbf{N}$ לתוך K. לכן $|K| \geq \aleph_0$.

מצד שני, לכל איבר של K נתאים את **הסדרה הסופית** הקצרה ביותר שעליה הוא חוזר.
למשל לסדרה המחזורית $(2,5,5,2,5,5,2,5,5,\ldots)$ נתאים את הסדרה הסופית $(2,5,5)$
התנאי "הקצרה ביותר" חיוני – הוא נועד להבטיח שנתאים לסדרה הנ"ל את $(2,5,5)$ ולא את
$(2,5,5,2,5,5)$ או סדרות ארוכות יותר שחוזרות על המחזור הבסיסי.
זו התאמה חד-חד-ערכית של K לתוך קבוצת הסדרות **הסופיות** של טבעיים.
(ההתאמה היא לא על, כי למשל הסדרה הסופית $(2,5,5,2,5,5)$ אינה מתקבלת בתמונה!)
קבוצת הסדרות **הסופיות** של טבעיים היא בת מנייה לפי אוסף תרגילים פתורים, עמ' 8 שאלה 10ה.
לכן $|K| \leq \aleph_0$.

משני הכיוונים בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין נקבל ש K בת-מנייה.

שאלה 3

א. 6^5

ב. זו בחירה של 5 עצמים מתוך 6 סוגים , עם חזרות וללא חשיבות לסדר:

$$D(6,5)=\binom{10}{5}=252$$

ג. $\frac{5!}{3!\,2!}=10$

ד. למשל המחלקה שבה נמצאת המחרוזת aabcd, כי $\frac{5!}{2!}=60$. .

שאלה 4

לטעמים לימון ואננס אפשר להתייחס כאילו הם בכמות לא מוגבלת, מכיוון שאנו צריכים לבחור בסה"כ 20 ארטיקים, ויש 20 או יותר מכל אחד משני הטעמים האלה.

לפיכך פונקציה יוצרת היא

$$f(x)=\left(1+x+x^2+\ldots x^8\right)^2\left(1+x+x^2+\ldots\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2=\left(\frac{1}{1-x}\right)^4(1-x^9)^2$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{\infty}D(4,i)x^i\right)\left(1-2x^9+x^{18}\right)$$

המקדם של x^{20} בביטוי זה הוא

$$D(4,20)-2D(4,11)+D(4,2)=\binom{23}{3}-2\binom{14}{3}+\binom{5}{3}$$

שאלה 5

א. x_1 חלקי לכל קבוצה:

$$\forall x_2 R(x_1,x_2)$$

ב. כל קבוצה שחלקית ל- x_2, שווה ל- x_2 או לקבוצה הריקה:

$$\forall x_3\left(R(x_3,x_2)\rightarrow(A_1^2(x_3,x_2)\vee\psi(x_3))\right)$$

ג. $\forall x_3\left((R(x_3,x_1)\wedge R(x_3,x_2))\rightarrow\ \psi(x_3)\right)$