פתרון לממ"ן 14- 2007ב

אלגברה לינארית 1- 20109

שאלה 1

מכיוון ש- $v \in Sp\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$, קיימים סקלרים $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ כך שמתקיים $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n$. אם $\lambda_n = 0$, אז משוויון זה נובע ש- v צרוף לינארי של $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, מה שסותר את הנתון ש- $v \notin Sp\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$. לכן $\lambda_n \neq 0$ ומאותו שוויון, מתקבל ש- $v_n = v - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}v_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}v_{n-1}$, כלומר $v_n \in Sp\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v\}$.

שאלה 2

א. על סמך משפט *V.11*, הקבוצות U ו- W הן תת-מרחבים של $M_{2\times2}^{\mathbf{R}}$.

מציאת בסיס ל- U:

נסמן $U = Sp\left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ וב- E את הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}^{\mathbf{R}}$. ע"פ המשפט *V.35* הקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ בת"ל אם ורק אם הקבוצה $\{[A_1]_E, [A_2]_E, [A_3]_E\}$ בת"ל ב- $\mathbf{R}^4$. לכן, על מנת למצוא בסיס ל- U, נדרג את המטריצה ששורותיה הן $[A_1]_E, [A_2]_E, [A_3]_E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 11 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

למטריצות שקולות שורות אותו מרחב שורות, לכן שני הווקטורים הראשונים במטריצה A' מהווים בסיס של מרחב השורות של A ולאחר חזרה ל- U, מתקבל שהקבוצה $B_U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל- U ו- $\dim U = 2$.

מציאת בסיס ל- W:

באופן דומה נמצא בסיס ל- W. נדרג את המטריצה המתאימה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומתקבל הבסיס $B_W = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

מציאת בסיס ל- $U + W$:

מהטענה שמופיעה בנספח בעמ' 21, נסיק כי $U + W$ נפרש על-ידי איחוד הבסיסים של U ו- W, כלומר:

$$.U+W=Sp(B_U\cup B_W)=Sp\left\{\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&5\\5&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

לפיכך, כפי שעשינו עבור U ו- W, ניתן למצוא בסיס ל- $U+W$ על-ידי מציאת בסיס למרחב השורות של מטריצה ששורותיה הן וקטורי הקואורדינטות של וקטורי $B_U\cup B_W$:

$$\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-3&-1&1\\1&5&5&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-3&-1&1\\0&3&1&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-3&-1&1\\0&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+3R_4}\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&2&4\\0&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&1&1&1\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&4\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של $U+W$ ו- $\dim(U+W)=3$.

מציאת בסיס ל- $U\cap W$: ע״פ משפט המימד, מתקיים :

$$\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)$$

לכן $\dim(U\cap W)=1$, ולכן די לבחור וקטור אחד (שונה מאפס) ב- $U\cap W$ כבסיס שלו.

<u>דרך א</u>: שהמטריצה $\begin{pmatrix}1&5\\5&0\end{pmatrix}\in W$ גם שייכת ל- U כי $\begin{pmatrix}1&5\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-3\\-1&1\end{pmatrix}$.

לכן $\left\{\begin{pmatrix}1&5\\5&0\end{pmatrix}\right\}$ הוא **בסיס ל-** $U\cap W$.

<u>דרך ב</u> (כללית יותר): מטריצה A נמצאת בחיתוך אם ורק אם הוא צירוף לינארי של וקטורי הבסיס ל- U וגם של וקטורי הבסיס ל- W, כלומר אם ורק אם היא מהצורה :

$$A=x\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&-3\\-1&1\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1&5\\5&0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

לכן $A\in U\cap W$ כאשר (x,y,z,t) הוא פתרון למערכת :

$$\begin{cases}x-z=0\\2x-3y-5z-t=0\\4x-y-5z-t=0\\x+y-t=0\end{cases}$$

מתקבל ש- $x=z$, $y=-z$, $t=0$ ו- z חופשי. לכן הפתרון הכללי $(a,-a,a,0)$, $a\in\mathbf{R}$

והווקטור הכללי בחיתוך הוא, $A=a\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}-a\begin{pmatrix}0&-3\\-1&1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&5\\5&0\end{pmatrix}$. נציב $a=1$ ונקבל

שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1&5\\5&0\end{pmatrix}\right\}$ היא **בסיס ל-** $U\cap W$**.**

ב. ע״פ משפט $V.30$ ניתן להשלים כל קבוצה בת״ל של מרחב לינארי נוצר סופית V לבסיס של V. נרשום את וקטורי הבסיס שמצאנו ל- W כשורות מטריצה (לאחר מעבר לקואורדינטות) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ומכאן ברור שאם נוסיף את המטריצות $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ מתקבל בסיס הבא ל $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ג. הקואורדינטות של הווקטור $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס B הן המקדמים x,y,z,t בשוויון

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

לכן נפתור את המערכת $\begin{cases} x = 1 \\ 2x - 3y = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \end{cases}$.

פתרון המערכת הוא $x = 1, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{10}{3}, t = -\frac{5}{3}$ ולכן $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

שאלה 3

א. יהי $u \in U_2$ שאינו ב- U_1 (קיים כזה, כי $U_1 \subset U_2$). אז $u \in U_2 + W = U_1 + W$.
לכן יש $w \in W$, $u_1 \in U_1$, כך ש- $u = u_1 + w$, אז $w = u_1 - u \neq 0$, כי אחרת $u = u_1$ ואז $u \in U_1$, סתירה. מצד שני, $u_1 \in U_2$, כי $U_1 \subset U_2$. לכן $u - u_1 \in U_2$. לכן w הוא וקטור השונה מ-0, הנמצא גם ב- W וגם ב- U_2 והוכחנו ש- $W \cap U_2 \neq \{0\}$.

ב. הואיל ו- $V = U_1 \oplus U_2$, $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$, לכן $\dim U_1 = \dim V - \dim U_2$. (*)
מהנון $W \cap U_2 = \{0\}$, נקבל כי $W + U_2 = W \oplus U_2$ וזה תת-מרחב של V, לכן מימדו אינו עולה על זה של V, כלומר $\dim(W + U_2) = \dim W + \dim U_2 \leq \dim V$. לכן $\dim W \leq \dim V - \dim U_2$. יחד עם השוויון (*) מקבלים כי $\dim W \leq \dim U_1$. אבל U_1 תת-מרחב של W, לכן $\dim U_1 \leq \dim W$. לכן $\dim U_1 = \dim W$. הוכחנו ש- U_1 תת-מרחב של W ובעל אותו מימד כמו W, לכן $U_1 = W$ ($V.29$).

שאלה 4

א. ידוע ש- $\mathbf{C}^3$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{C}$ הקבוצה V היא תת-מרחב של $\mathbf{C}^3$, כי הוא מרחב הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית בשלושה נעלמים מעל $\mathbf{C}$. נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה: משוואה זו שקולה ל- $z_1 = -(1+i)z_2 + z_3$, לכן z_2, z_3 חופשיים ו- z_1 קשור, והפתרון הכללי הוא $\left(-(1+i)a + b, a, b\right)$, כאשר b, a ב- $\mathbf{C}$. ע״י ההצבות $a = 1, b = 0$

ו- $a=0,b=1$, נקבל את הבסיס $B=\{(-(1+i),1,0),(1,0,1)\}$.

הקואורדינטות של הוקטור $(-i,1,1)$ ביחס לבסיס זה הם המקדמים במשוואה:

$x(-(1+i),1,0)+y(1,0,1)=(-i,1,1)$, שקולה למערכת $\begin{cases}-(1+i)x+y=-i\\ x=1\\ y=1\end{cases}$. קל לראות

שהפתרון היחיד הוא $x=y=1$. לכן הקואורדינטות הן $[v]_B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

ב. ראשית, נוכיח ש- V הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$.

יש להראות שכל הדרישות בהגדרה V.1 מתקיימות. הדרישות לגבי החיבור אכן מתקיימות כי V מרחב לינארי מעל $\mathbf{C}$ והחיבור אינו תלוי בשדה. מצד שני, כל מספר ממשי הוא מספר מרוכב. לכן הדרישות לגבי הכפל בסקלר גם מתקיימות אם הסקלרים ממשיים כי ידוע שהן תקפות עבור כל סקלר מרוכב (שוב, כי V מרחב לינארי מעל $\mathbf{C}$). נובע מכך ש- V הוא מרחב לינארי גם מעל $\mathbf{R}$.

להמשך התשובה, נוכיח את הטענה הכללית:

אם $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbf{C}$ אז $\hat{B}=\{v_1,\dots,v_n,iv_1,\dots,iv_n\}$ הוא בסיס של V מעל $\mathbf{R}$.

<u>הוכחה</u>: יהיו $\alpha_j,\beta_j\in\mathbf{R}$ כך ש- $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n+\beta_1iv_1+\ldots+\beta_niv_n=0$. נקבל כי $(\alpha_1+i\beta_1)v_1+\ldots+(\alpha_n+i\beta_n)v_n=0$. מאחר ש- $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbf{C}$, ולכל j, $\alpha_j+i\beta_j\in\mathbf{C}$, נסיק כי $(\alpha_1+i\beta_1)=\ldots=(\alpha_n+i\beta_n)=0$

ולכן $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=\beta_1=\ldots=\beta_n=0$, ולכן הקבוצה $\hat{B}$ היא בלתי תלויה לינארית מעל $\mathbf{R}$.

נוכיח כי $\hat{B}$ פורשת את V. יהי $v\in V$. מכך ש-B בסיס של V מעל $\mathbf{C}$, נובע כי קיימים $\lambda_j\in\mathbf{C}$ כך ש- $v=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jv_j$. נסמן $\alpha_j,\beta_j\in\mathbf{R}$ $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$,

אז: $v=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+i\beta_j)v_j=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jv_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_jiv_j$, כלומר $\hat{B}$ פורשת את V מעל $\mathbf{R}$ וביחד, $\hat{B}$ היא בסיס של V מעל $\mathbf{R}$. במקרה שלנו: $\{(-(1+i),1,0),(1,0,1),(1-i,i,0),(i,0,i)\}$ הוא בסיס של V מעל $\mathbf{R}$.

כדי למצוא את הקואורדינטות של הוקטור $(-i,1,1)$ ביחס לבסיס $\hat{B}$, נשים לב שבסעיף א' קיבלנו כי, $1((1+i),1,0)+1(1,0,1)=(-i,1,1)$, לכן מתקבל צירוף לינארי עם מקדמים ממשיים של שני הוקטורים הראשונים בבסיס, לכן הקואורדינטות הן $[(-i,1,1)]_{\hat{B}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

שאלה 5

א. נסמן ב- W_A, W_B את מרחבי השורות של A ושל B. התת-מרחב הנוצר על-ידי השורות של A ושל B הוא התת-מרחב $W_A + W_B$ (ע״פ טענה בנספח בעמ׳ 21). שורה במטריצה $A+B$ היא סכום של השורות המתאימות ב-A וב-B, לכן היא צרוף לינארי שלהן ולכן $W_{A+B} \subseteq W_A + W_B$.

ב. מההכלה הקודמת נובע האי-שוויון $\dim W_{A+B} \leq \dim(W_A + W_B)$. ממשפט המימד,נסיק ש- $\dim W_{A+B} \leq \dim W_A + \dim W_B - \dim(W_A \cap W_B)$. מההגדרה של דרגת מטריצה, יוצא כי $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B) - \dim(W_A \cap W_B)$ ומכיוון ש- $\dim(W_A \cap W_B) \geq 0$, מתקבל ש- $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

ג. נגדיר $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אז $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $\rho(B) = 1, \rho(A) = 1$ ו- $\rho(A+B) = 2$. אז המטריצות האלה מקיימות את דרישות השאלה.