2.3 אי שקילות של קבוצות אינסופיות

ביחידה 1[1] ציינו כי לא כל הקבוצות האינסופיות הן שוות עצמה. יתר־על־כן, לכל קבוצה אינסופית A, אפשר למצוא קבוצה אינסופית אחרת, שאינה שקולה ל־A.

נמנענו מלהוכיח טענה זו ביחידה 1 שכן סברנו כי תוכל לעקוב ביתר קלות אחרי פרטי ההוכחה לאחר שתורגל לשימוש במונחי תורת הקבוצות. כעת, משהורגלת, נחזור לנושא.

ראשית נכין את הכלים הדרושים להבנת ההוכחה.
תהי A קבוצה כלשהי. נתבונן בקבוצות החלקיות של A.
אם למשל $A=\{a,b,c\}$, הרי שיש 8 קבוצות חלקיות ל־A:

$\{a,b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \phi$

סימון
P(A)

כעת נוכל ליצור קבוצה, אשר איבריה הן כל הקבוצות החלקיות של A. נסמן קבוצה זו ב־P(A).

$$P(A) = \left\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\right\}$$

ב־P(A) יש 8 איברים (כל אחד מהם הוא קבוצה חלקית של A).
שים לב: מספר האיברים ב־P(A) גדול ממספר האיברים ב־A (ב־A יש 3 איברים ואילו ב־P(A) יש 8 איברים, שכן יש 8 קבוצות חלקיות ל־A).
באופן כללי נגדיר:

הגדרה
קבוצת הקבוצות החלקיות ל־A

לכל קבוצה A, P(A) היא הקבוצה אשר איבריה הן כל הקבוצות החלקיות של A.

שאלה 21

א. תהי A קבוצה כלשהי בת 4 איברים, כמה איברים יש ב־P(A)?

ב. הראה כי אם B היא קבוצה סופית לא ריקה, אז מספר האיברים ב־B קטן ממספר האיברים ב־P(B). (כלומר, מספר האיברים ב־B קטן ממספר הקבוצות החלקיות ל־B.)

תשובה בעמוד 32

המסקנה הנובעת מחלק ב של תשובה 21 (עמוד 33), היא, כי אם B קבוצה סופית כלשהי, B אינה שקולה ל־P(B). מסתבר שגם אם B אינסופית עדיין אפשר להוכיח (ונוכיח מיד) כי B אינה יכולה להיות שקולה ל־P(B).

נעיר שוב את תשומת לבך לעובדה כי כדי להוכיח ששתי קבוצות (כגון B ו־P(B)) אינן שקולות לא מספיק שנוכיח כי בהתאמה אחת מסוימת של איבריהן בזוגות, מהסוג שתואר ביחידה 1[2] נשארים איברים מיותרים באחת מהקבוצות. עלינו להוכיח כי לא ייתכן בכלל, שתהיה קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי שתי הקבוצות.

[1] יחידה 1, **קבוצות א**, סעיף 1.6.4, עמוד 26
[2] יחידה 1, **קבוצות א**, סעיף 1.5.3, עמוד 17

משפט קנטור
אם A קבוצה כלשהי, שאינה ריקה, (סופית או אינסופית,) אז A **אינה** שקולה ל־$P(A)$.

הוכחה
תהי A קבוצה כלשהי. $P(A)$ היא הקבוצה שאיבריה הן הקבוצות החלקיות של A, כלומר, כל איברי $P(A)$ הן קבוצות. קבוצה B היא איבר של $P(A)$ $(B \in P(A))$ **אם ורק אם** $B \subseteq A$.

מתימטיקאים רבים מתייחסים להוכחת משפט זה, שניתנה על־ידי קנטור, כאל אחד מן ההישגים המעולים של החשיבה האנושית, ויופיה נעוץ בעיקר בפשטות הרעיון שבה.

נניח כי A ו־$P(A)$ שקולות ונראה כי הנחה זו מביאה לידי סתירה.
A ו־$P(A)$ שקולות פירושו — קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי A לאיברי $P(A)$.
אנו מניחים אפוא שקיימת התאמה, המתאימה לכל איבר של A קבוצה חלקית של A באופן כזה שלאיברים **שונים** של A מותאמות קבוצות חלקיות **שונות** של A, וכך שלכל קבוצה חלקית של A יש איבר ב־A שקבוצה זו מותאמת לו. עבור כל איבר $a \in A$ נקרא לקבוצה החלקית המותאמת לו B_a.

נראה שהנחה זו מביאה לידי סתירה.

B_a היא, אם כן, קבוצה חלקית של A ו־a איבר של A.
לכל a תיתכן אחת משתי האפשרויות

א. $a \in B_a$

ב. $a \notin B_a$

(או ש־a איבר בקבוצה החלקית המותאמת לו או שאינו איבר בקבוצה החלקית המותאמת לו.) למשל: אם לאיבר מסוים a מותאמת הקבוצה החלקית $B_a = \{a,c\}$ אז $a \in B_a$. לעומת זאת אם ל־a מותאמת הקבוצה $B_a = \{b,c\}$ אז $a \notin B_a$.
נתבונן כעת בקבוצה חלקית של A המוגדרת באופן הבא

$$\boxed{D = \{a \mid a \in A \text{ וגם } a \notin B_a\}}$$

כלומר D מורכבת מאותם איברים a של A שאינם איברים בקבוצה החלקית B_a המותאמת להם.
למשל אם

$$A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ואם בהתאמה החד־חד־ערכית בין איברי A לאיברי $P(A)$, שאת קיומה מניחים, מותאמים האיברים a, b, c, ו־d של A לאיברים B_a, B_b, B_c ו־B_d של $P(A)$ המוגדרים על־ידי:

$$B_a = \{d,c\} \qquad B_b = \{a,d\} \qquad B_c = \{a,b,c\} \qquad B_d = \{b,c,d\}$$

(הראינו רק חלק מאיברי A ו־$P(A)$)
אז $a \notin B_a$ וגם $b \notin B_b$
ולעומת זאת $c \in B_c$ וגם $d \in B_d$.

ולכן $a \in D$, $b \in D$
ולעומת זאת $c \notin D$ וגם $d \notin D$.

ודא שהבינות כיצד מוגדרת D לפני שתמשיך בקריאה.

D היא קבוצה חלקית של A. שכן היא מורכבת רק מאיברים השייכים ל־A. לכן $D \in P(A)$. היות שלפי הנחתנו קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי A לאיברי $P(A)$, הרי שקיים איבר ב־A שהקבוצה החלקית D מותאמת לו. נקרא לאיבר זה a_0. $a_0 \leftrightarrow D$

כיון שאת הקבוצה החלקית המותאמת ל־a_0 סימנו ב־B_{a_0}, הרי ש־

$$\boxed{D = B_{a_0}}$$

כעת נשאל את השאלה הבאה: האם $a_0 \in B_{a_0}$

או אולי $a_0 \notin B_{a_0}$?

(אחת משתי האפשרויות בוודאי חייבת להתקיים.)

אם נניח כי $a_0 \in B_{a_0}$

נקבל $a_0 \notin D$

שכן D מורכבת מאותם איברים a שעבורם מתקיים $a \notin B_a$. (חזור ועיין בהגדרת D!)

הווה אומר:
אם $a_0 \in B_{a_0}$ אז $a_0 \notin D$.
מאידך גיסא $B_{a_0} = D$
ולכן לא ייתכן ש־a_0 יהיה איבר ב־B_{a_0} אבל לא איבר ב־D. (בקבוצות שוות יש אותם איברים!)
לפיכך ההנחה $a_0 \in B_{a_0}$ מביאה לידי סתירה.

אם לעומת זאת נניח כי $a_0 \notin B_{a_0}$
נקבל (לפי הגדרת D) כי $a_0 \in D$
ושוב, הגענו לסתירה שכן $B_{a_0} = D$

נסכם:

כאשר הנחנו $a_0 \in B_{a_0}$ קיבלנו כי $a_0 \notin B_{a_0}$

וכאשר הנחנו $a_0 \notin B_{a_0}$ קיבלנו כי $a_0 \in B_{a_0}$

כלומר, כל אחת משתי האפשרויות מביאה לידי סתירה. מכאן נוכל להסיק כי ההנחה היסודית שלנו, שקיימת התאמה חד־חד־ערכית בין איברי A לאיברי P(A), מביאה לידי סתירה. לכן **לא קיימת התאמה חד־חד־ערכית כזו,** כלומר, **A ו־P(A) אינן יכולות להיות שקולות.**

משפט קנטור, כפי שנוסח בעמוד 22 דן **בכל הקבוצות** פרט לקבוצה הריקה ϕ, אבל המשפט נכון גם ביחס ל־ϕ. ϕ אינה מכילה אף איבר ואילו $P(\phi)$ (אוסף כל הקבוצות החלקיות של ϕ) אינה ריקה.

ל־ϕ יש קבוצה חלקית אחת והיא ϕ $\phi \subseteq \phi$[1]
ולכן $\phi \in P(\phi)$, $P(\phi) = \{\phi\}$.
$P(\phi)$, היא אפוא קבוצה שיש בה איבר, ולכן אינה שקולה ל־ϕ שאין בה איברים. נוכל אפוא לבטל את ההגבלה שהובאה בניסוח משפט קנטור ולנסח כך:

משפט קנטור

משפט קנטור:

לכל קבוצה A (ריקה, סופית או אינסופית), A אינה שקולה ל־P(A).

ממשפט קנטור נוכל להסיק את המסקנה הבאה:

מסקנה 1
לכל קבוצה A **קיימת** קבוצה אחרת שאינה שקולה ל־A.

[1] יחידה 1, **קבוצות א**, סעיף 1.7.4, עמוד 33

המסקנה כפי שהיא מנוסחת לעיל אינה תורמת לנו למעשה מידע חדש. אם A קבוצה סופית ברור כי A אינה שקולה ל־N (לא הוכחנו טענה זו אולם היא ברורה באופן אינטואיטיבי). אם A קבוצה אינסופית, ברור כי A אינה שקולה, למשל, לקבוצה בעלת איבר אחד, $\{a\}$, וגם אינה שקולה ל־ϕ. הווה אומר — ידוע לנו כי לכל קבוצה A קיימת קבוצה אחרת שאינה שקולה ל־A ואיננו נזקקים למשפט קנטור כדי להסיק זאת. אבל, על סמך משפט קנטור נוכל לנסח מסקנה כבדת משקל הרבה יותר, אם רק נבחין בעובדות הבאות:

אם A היא קבוצה בעלת 2 איברים למשל $A=\{a,b\}$, אז ב־P(A) יש $2^2=4$ איברים והם: $\{a,b\}$, $\{b\}$, $\{a\}$, ϕ

אם A היא בעלת שלושה איברים, למשל $A=\{a,b,c\}$ אז ב־P(A) ישנם $2^3=8$ איברים והם:

$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$

א. אם A קבוצה סופית אז גם P(A) (אוסף הקבוצות החלקיות ל־A) היא קבוצה סופית. יתר על כן, ניתן להוכיח בשיטות פשוטות למדי, כי אם A היא קבוצה סופית בעלת n איברים, אז יש לה בדיוק 2^n קבוצות חלקיות, כלומר ב־P(A) יש בדיוק 2^n איברים.

ב. לעומת זאת אם A היא קבוצה אינסופית אז גם P(A) היא קבוצה אינסופית, שכן כל קבוצה, המורכבת מאיבר אחד בלבד של A, היא איבר ב־P(A) וקבוצות אלה עצמן הן כבר אוסף אינסופי והן רק חלק מאיברי P(A). ב־P(A) יש, נוסף עליהן, גם איברים שהם קבוצות חלקיות של A המכילות יותר מאיבר אחד.

נסכם:

א. אם A סופית אז גם P(A) סופית.

ב. אם A אינסופית אז גם P(A) אינסופית.

הנימוקים שהובאו לעיל אינם מהווים הוכחות אלא רק הבהרה אינטואיטיבית. בהוכחה מדויקת יש להסתמך על ההבחנה בין קבוצות סופיות ואינסופיות כפי שניתנה ביחידה 1[1]. מתוך הסתמכות על הבחנה זו ניתן, אכן, להוכיח טענות אלה במדויק.

ממשפט קנטור נוכל כעת להסיק מסקנה שלא היתה מובנת מאליה ללא משפט זה.

מסקנה 2:
לכל קבוצה אינסופית A קיימת קבוצה **אינסופית**, P(A), שאינה שקולה ל־A ולכן לא כל הקבוצות האינסופיות שקולות אלו לאלו.

משמעותה האינטואיטיבית של מסקנה 2 היא כי לא כל ה"אינסופים" הם באותו "גודל" ויחס השקילות מאפשר להבחין בין "גדלים" שונים של "אינסוף".

שאלה 22

$$N = \{1,2,3,4\ldots\} = \{\text{המספרים הטבעיים}\}$$
$$P(N) = \{\text{כל הקבוצות החלקיות של המספרים הטבעיים}\}$$

א. להלן טיעון שמתוכו נסיק כי N ו־P(N) אינן שקולות. חווה דעתך על טיעון זה. (האם הוא מוכיח את הטענה כי N ו־P(N) אינן שקולות?)

טיעון: איברי P(N) הם כל הקבוצות החלקיות של N. לכן, בפרט, כל הקבוצות החלקיות בנות איבר אחד הן איברים ב־P(N).

$$\{1\}\in P(N),\ \{2\}\in P(N),\ \{3\}\in P(N),\ldots,\{n\}\in P(N)\ldots$$

[1] יחידה 1, **קבוצות א**, סעיף 1.6.5, עמוד 28

כעת נתאים לכל איבר של N את הקבוצה החלקית של N המורכבת מאותו איבר בלבד, למשל –

$$1 \leftrightarrow \{1\}$$
$$100 \leftrightarrow \{100\}$$
$$254 \leftrightarrow \{254\}$$

זוהי התאמה חד־חד־ערכית בין כל איברי N **לחלק** מאיברי P(N). למשל לקבוצה החלקית $\{1,2\}\in P(N)$ אין בן־זוג ב־N בהתאמה זו. כיון שכך – ברור כי יש פחות איברים ב־N מאשר ב־P(N). (כלומר, יש פחות איברים ב־N מאשר יש קבוצות חלקיות של N.) ולכן N ו־P(N) אינן יכולות להיות שקולות.

ב. האם N ו־P(N) שקולות או שאינן שקולות?
הערה: אם הטיעון שניתן בחלק א הוא נכון, בודאי ש־N ו־P(N) אינן שקולות. לעומת זאת אם הטיעון אינו נכון תיתכנה שתי אפשרויות: או שהקבוצות שקולות (ואז עליך להצביע על התאמה חד־חד־ערכית בין אבריהן) או שהקבוצות אינן שקולות (ואז עליך לנמק מדוע אינן שקולות, אולם לא בעזרת הטיעון שבחלק א).

תשובה בעמוד 33

עתה עבור לשאלות להערכה עצמית בעמוד 34 ולאחר מכן חזור ועיין ברשימת המטרות המופיעה בתחילת היחידה. נסה להתייחס אל כל מטרה כאל שאלה וענה עליה בקצרה בעל־פה.

אנא בדוק בלוח הזמנים של הקורס אם יש עבודות (מבחני מנחה או מבחני מחשב) שמועד הגשתם קרב.