גירסה 1.00 – 1.4.2002

<u>מתמטיקה דיסקרטית (בדידה)</u>
<u>חלק רביעי</u>

מסמך זה הוא הרביעי בסדרת מסמכים הבאים להציג לקורא את עקרונות הקומבינטוריקה ותורת הקבוצות, כפי שהם מתוארים בקורס "מתמטיקה דיסקרטית".
מסמך זה ממשיך מהנקודה בה הסתיים המסמך השלישי.
במסמך זה נדון ברלציות, בפונקציות, בסגור ובסגור טרנזיטיבי.

ידע קודם הנדרש להבנת המסמך הוא לפחות מתמטיקה בהיקף של בגרות 5 יחידות, וכן הבנה של קומבינטוריקה ותורת הקבוצות, כפי שהוצגו במסמכים הקודמים בסדרה זו. אנא שלחו הערות, תיקונים והצעות אל המחבר.

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

רלציות

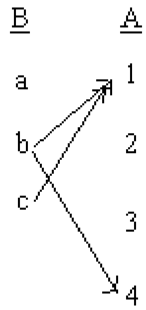
תת קבוצה (כלשהי) של AxB נקראית רלציה בינרית מA לB.
תת קבוצה של AxBxC נקראית רלציה טרנרית.
תת קבוצה של $A_1xA_2x...xA_n$ נקראית רלצייה n-ארית.

דוגמא

רלציה מB לA:

R={(b,4), (c,1), (b,1)}

נציג את הרלציה על ידי גרף (דו צדדי):



יתכנו צמתים שאין מהם חצים יוצאים או אין חצים נכנסים אליהם. יתכנו צמתים שיש להם יותר מחץ אחד נכנס או יוצא מהם.

ייצוג על ידי מטריצה בינרית

B/A	1	2	3	4
a	0	0	0	0
b	1	0	0	1
c	1	0	0	0

סימון: אם $(a,b)\in R$ נסמן aRb. אם $(a,b)\notin R$ נסמן a$\not R$b.

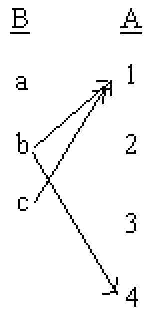
שאלה

כמה רלציות קיימות מA לB כאשר A וB סופיות?
כמספר תתי הקבוצות של AxB, שכן כל תת קבוצה של AxB היא רלצייה מA לB. $|AxB|=|A|\cdot|B|$
מספר תתי הקבוצות הוא $2^{|A|\cdot|B|}$.

<u>הגדרות</u>

תחום של רלציה - תחום של רלציה $R \subseteq AxB$ היא הקבוצה
domain(R)={x$\in$A| קיים $y \in B$ כך שמתקיים xRy}
קבוצת הצמתים שיש מהן חצים יוצאים.

לדוגמא:
R מוצג בצורה הבאה:



אזיי domain(R)={a, b}.

טווח של רלציה - טווח של רלציה $R \subseteq AxB$ היא הקבוצה
range(R)={Y$\in$b| קיים $x \in A$ כך שמתקיים xRy}
קבוצת האיברים בB שיש אליהם חצים נכנסים.

רלציה הופכית - רלציה הופכית של רלציה $R \subseteq AxB$ היא הרלציה מB לA הבאה:
$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$
כלומר: $bR^{-1}A \Leftrightarrow aRb$.

רלציה משלימה - רלציה משלימה לרלציה $R \subseteq AxB$ היא הרצליה $R^c = AxB - R$
לכל $(a,b) \in AxB$ מתקיים: $aR^cB \Leftrightarrow a\not{R}b$.

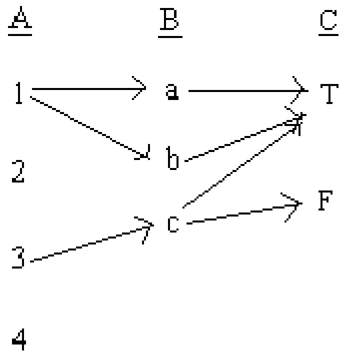
<u>הרכב רלציות</u>

כזכור, רלציה מA לB היא תת קבוצה של AxB. בהינתן רלציה R מA לB ($R \subseteq AxB$) ורלציה S מB לC ($S \subseteq BxC$) ההרכב של R עם S, המסומן על ידי $R \circ S$, היא הרצליה:
$R \circ S = \{(x,y) \mid (x,y) \in R, (y,z) \in S, \forall y \in B\}$

<u>דוגמא</u>

A={1,2,3,4}
B={a,b,c}
C={T,F}

R={(1,a),(1,b),(3,c)} $A \to B$
S={(a,T),(b,T),(c,T),(c,F)} $B \to C$



$R \circ S = \{(1,T),(3,T),(3,F)\}$

זוג נמצא ב $R \circ S$ אם קיים מסלול באורך 2 בין איבריו.

<u>תכונות של פעולת ההרכב</u>

1. לכל R_1, R_2, R_3 מתקיים $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

$R_1 \subseteq AxB$
$R_2 \subseteq BxC$
$R_3 \subseteq CxD$

2. לכל שתי רלציות,

$R_1 \subseteq AxB$
$R_2 \subseteq BxC$

מתקיים: $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

<u>תכונות של יחסים</u>

1. רפלקסיביות: לכל $a \in A$, מתקיים $(a,a) \in R$
2. סימטריות: אם $(a,b) \in R$, מתקיים $(b,a) \in R$
3. אנטי סימטריות: אם $(a,b),(b,a) \in R$ אזיי בהכרח $a = b$
4. א-סימטריה: אם $(a,b) \in R$, מתקיים $(b,a) \notin R$
5. טרנזיטיביות: אם $(a,b),(b,c) \in R$ אזיי $(a,c) \in R$

<u>דוגמא</u>

A = { a, b, c }
$(R \subseteq AxA)$

נגדיר יחס R מעל A:

R={(a,b),(b,b),(c,c),(b,c),(a,c)}

האם היחס רפלקסיבי? לא, כי $(a,a) \notin R$ אבל $a \in A$.
האם היחס סימטרי? לא, כי $(a,b) \in R$ אבל $(b,a) \notin R$
האם היחס הוא אנטי סימטרי? כן. הזוגות היחידים שמקיימים $(a,b),(b,a) \in R$ הם (b,b) ו(c,c) לכן היחס הוא אנטי סימטרי.

האם היחס הוא א-סימטרי? לא, כי (b,b) ו(c,c) נמצאים ביחס.
האם היחס טרנזיטיבי? כן

<u>רפלקסיביות באופן ריק</u>

אם $A \neq \phi$ וR רפלקסיבי, אזיי בהכרח $R \neq \phi$.
רפלקסיביות נכונה באופן ריק רק כאשר R ריקה.

<u>טרנזיטיביות באופן ריק</u>

דוגמא: R={(a,b),(a,c)}.
רלציה זו טרנזיטיבית באופן ריק.

<u>דוגמא</u>

נתונות A,B,C כך ש:

$$A \cap B = \phi, A \neq \phi, B \neq \phi$$
$$A \subseteq C, B \subseteq C$$

נגדיר יחס R מעל C:

$$R = AxB \subseteq CxC$$

האם היחס רפלקסיבי?
לא. $A \neq \phi$, ומכאן קיים $a \in A$. $B \neq \phi$, ומכאן קיים $b \in B$. מכאן $(a,b) \in R$
אם $b=a$ אזיי $b \in A$ בסתירה לכך שהחיתוך בין A לB הוא קבוצה ריקה.

האם היחס סימטרי?
לא. יהי $(a,b) \in R$ (קיים כזה). אם $(b,a) \in R$ אזיי $b \in A \cap B$ בסתירה לנתון.

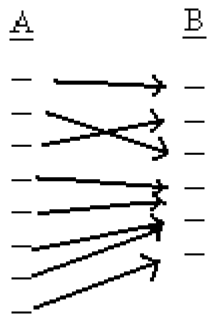
האם היחס אנטי סימטרי?
כן, באופן ריק.
אם $(a,b) \in R$ וגם $(b,a) \in R$ אזיי $b \in A \cap B$ בסתירה לנתון.
לכן אין זוג איברים (a,b) ו(b,a) הנמצאים שניהם ביחס.

האם היחס א-סימטרי?
כן.
אם $(a,b) \in R$, נניח בשלילה שגם $(b,a) \in R$ אזיי $b \in A \cap B$ בסתירה לנתון.

האם היחס טרנזיטיבי?
כן, באופן ריק.

פונקציות

פונקציה מקבוצה A לקבוצה B היא רלציה מA לB המקיימת: <u>לכל</u> $a \in A$ קיים $b \in B$ <u>יחיד</u> כך ש $(a,b) \in f$.



<u>סימונים</u> (עבור פונקציות)

$f \subseteq AxB$ נסמן כ: $f : A \to B$
$(a,b) \in f$ נסמן כ: $f(a) = b$

<u>הגדרה</u>

פונקציה $f : A \to B$ נקראית חד חד ערכית אם לכל $x, y \in A$ מתקיים: $x \neq y \Leftarrow f(x) \neq f(y)$.

<u>סימון</u>

$$f : A \xrightarrow{1:1} B$$

<u>הגדרה</u>

פונקציה $f : A \to B$ נקראת על אם לכל איבר $b \in B$ קיים $a \in A$ כך שf(a)=b.

<u>הגדרה</u>

פונקציה $f : A \to B$ שהיא גם 1:1 וגם על נקראת התאמה חח"ע.

- במקרה זה, הגודל של A ושל B הוא זהה.

<u>שאלות קומבינטוריות</u>

נתונות A וB קבוצות סופיות.

1. מהן מספר הפונקציות מA לB שהן התאמות חח"ע?

$$\begin{cases} 0 & |A| \neq |B| \\ |B|! & |A| = |B| \end{cases}$$

2. כמה פונקציות 1:1 יש מA לB?

$$\begin{cases} 0 & |B|<|A| \\ |B|! & |B|=|A| \\ \dfrac{|B|!}{(|B|-|A|)!} & |B|>|A| \end{cases}$$

3. כמה פונקציות יש מA לB?

$$|B|^{|A|}$$

4. כמה פונקציות יש מA לB שהן על?

$$\begin{cases} 0 & |B|>|A| \\ |B|! & |B|=|A| \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{|B|}(-1)^i\binom{|B|}{i}(|B|-i)^{|A|} & |B|<|A| \end{cases}$$

<u>הפונקציה ההופכית</u>

תהי $f:A\to \mathbf{B}$. הרלציה ההופכית f^{-1} היא לא בהכרח פונקציה.
במקרה ש f^{-1} היא פונקציה, היא תיקרא הפונקציה ההופכית.
מתי f^{-1} היא פונקציה?

<u>טענה</u>

תהי $f:A\to \mathbf{B}$.
1. הרלציה ההופכית f^{-1} היא פונקציה אמ"מ f התאמה חח"ע.
2. במקרה ש f^{-1} היא פונקציה, אזי גם היא התאמה חח"ע.

הוכחה:
1. f^{-1} היא פונקציה אמ"מ לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ יחיד, כך ש $(b,a)\in f^{-1}$.
מהגדרת הפונקציה ההופכית, נובע כי לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ יחיד כך ש $(a,b)\in f$ וזה מתקיים אמ"מ f התאמה חח"ע.
2. $f=(f^{-1})^{-1}$. f היא פונקציה ולכן עפ"י 1 מתקיים ש f^{-1} היא התאמה חח"ע.

<u>טענה</u>

עבור קבוצות סופיות B,A, $|A|=|B|$ אמ"מ קיימת התאמה חח"ע בין A לB.

<u>הגדרה</u>

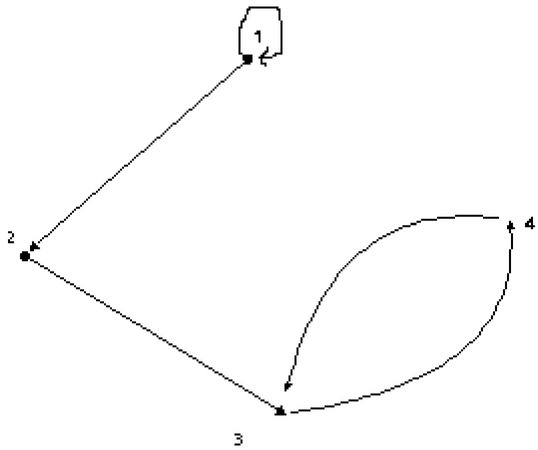
רלציה R מעל קבוצה A היא קבוצה של AxA:

$A=\{1,2,3,4\}$
$R_1=\{(1,1),(1,3),(2,4)\}$
$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
$I_a=\{(x,x)\mid x\in A\}$

I_a זוהי רלצית הזהות.
ניתן לייצג רלציות בעזרת גרף דו צדדי כמו שכבר ראינו, אולם ניתן לייצג רלציות גם באמצעות גרף.
את הגרף בונים בצורה הבאה: מציירים צומת יחיד עבור כל איבר בA. יש קשת בין הצומת x לצומת y אם הזוג הסדור $(x,y)\in R$.

<u>דוגמא</u>

R={(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,3)}



<u>תכונות של רלציה</u>

6. רפלקסיביות: לכל $a \in A$, מתקיים $(a,a) \in R$
   * לכל צומת בגרף חייבת להיות קשת עצמית.
   * אם זוהי פונקציה, זוהי חייבת להיות פונקציית הזהות.
7. סימטריות: אם $(a,b) \in R$, מתקיים $(b,a) \in R$
   * לכל קשת בגרף יש קשת הפוכה לה.
8. אנטי סימטריות: אם $(a,b),(b,a) \in R$ אזיי בהכרח $a = b$
9. א-סימטריה: אם $(a,b) \in R$, מתקיים $(b,a) \notin R$
10. טרנזיטיביות: אם $(a,b),(b,c) \in R$ אזיי $(a,c) \in R$
   * אם יש מסלול באורך 2 בין 2 צמתים, אזיי בהכרח יש גם מסלול ישיר ביניהם.

<u>רלציות מיוחדות</u>

נסתכל על הרלציות הבאות מעל R.

הרלציה $<$: לא רפלקסיבית, לא סימטרית, טרנזיטיבית.
הרלציה $\leq$: רפלקסיבית, לא סימטרית, טרנזיטיבית.
הרלציה $=$: רפלקסיבית, סימטרית, טרנזיטיבית.

הרלציה $\subseteq$ מעל קבוצות: רפלקסיבית, לא סימטרית, טרנזיטיבית.
הרלציה $\subset$ מעל קבוצות: לא רפלקסיבית, לא סימטרית, טרנזיטיבית.

<u>טענה</u>

R סימטרי אמ"מ $R = R^{-1}$.

<u>חזקות של רלציה</u>

תהיי רלציה R מעל קבוצה A, נסמן ב R^2 את $R \circ R$.
הזוג (x,y) שייך ל R^2 אם קיים y כך ש $(x,y) \in R, (y,z) \in R$. כלומר אם קיימת קשת מx לy כלשהו, ומאותו y אל z. במילים אחרות - אם קיימת מסלול באורך 2 בין x לz.
באופן דומה, מסמנים ב R^i את ההרכב הבא: $R \circ R \circ \ldots \circ R$. (i פעמים).
בגלל תכונת האסוצייטיביות של ההרכב נקבל את המסקנה: $R^i \circ R^j = R^{i+j}$.
איבר (x,z) נמצא בגרף של R^i אם קיים מסלול באורך i שבין x לz בגרף של R.

<u>טענה</u>

R טרנזיטיבית אמ"מ $R^2 \subseteq R$.

<u>טענה</u>

R טרנזיטיבית אמ"מ לכל 1≤i, $R^i \subseteq R^{i-1} \subseteq R^{i-2} \subseteq \ldots \subseteq R^2 \subseteq R$.

<u>טענה</u>

לכל 3 רלציות s_1, s_2, s_3 מתקיים $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1 \circ S_3 \subseteq S_2 \circ S_3$.

<u>הסגור של רלציה ביחס לתכונה</u>

תהיי R רלציה מעל קבוצה A. הסגור של R ביחס לתכונה α היא הרלציה S המקיימת את התנאים הבאים:

1. S מקיימת את α.
2. $R \subseteq S$
3. לכל T שמקיימת את α, ו $R \subseteq T$, מתקיים $S \subseteq T$

הסגור היא הרלציה הקטנה ביותר שמקיימת את α ומכילה את R.

<u>סגור רפלקסיבי</u>

R={(1,2),(2,2),(3,1)}, A={1,2,3}

הסגור הרפלקסיבי של הרלציה = { (1,1), (2,2), (3,3) , (1, 2), (3, 1) }

(1,1), (2,2), (3,3) נובע מהגדרת רפלקסיביות.
(1, 2), (3, 1) נובע מהגדרת הסגור.

זוהי הקבוצה הקטנה ביותר המקיימת את התנאי.

- הסגור הרפלקסיבי הוא תמיד $R \bigcup \{(x,x) \mid x \in A\}$
- סגור של רלציה ביחס לתכונה נתונה היא הרלציה הקטנה ביותר המכילה את הרלציה ומקיימת את התכונה.

<u>סגור סימטרי</u>

R={(1,2),(3,3),(3,4),(4,1)}
הסגור={(1,2),(3,3),(3,4),(4,1),(2,1),(4,3),(1,4)}

- הסגור הסימטרי הינו תמיד $R \bigcup R^{-1} = R \bigcup \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$.
- לא תמיד קיים סגור. יתכן גם שעבור תכונות מסוימות יהיה קיים סגור ועבור אחרות לא.

<u>סגור א-רפלקסיבי</u>

רלציה R תיקרא א-רפלקסיבית אם לכל $x \in A$ מתקיים $(x,x) \notin R$.

R={(1,2),(2,2),(3,1),(3,2)}

במקרה זה הסגור לא קיים, כי הסגור חייב להכיל את כל R, ובפרט את הזוג הסדור (2,2), וכל רלציה כזו לא מקיימת את תכונת הא-רפלקסיביות.

סגור טרנזיטיבי

A={1,2,3,4,5}
R={(1,2),(2,3),(2,4),(4,5),(5,1)}
הסגור הטרנזיטיבי={(1,2),(2,3),(2,4),(4,5),(5,1),(1,3),(4,1),(1,4),(1,5),(2,5),(4,2)}

- נשים לב שאם אחרי שהוספנו איברים, ניתן לעשות חיבורים נוספים, יש לעשותם.

בהינתן רלציה R מעל A, נגדיר את הרלציה R* באופן הבא:

$R^* = R \bigcup R^2 \bigcup R^3 \bigcup ... = \bigcup R^i , i = N - \{0\}$

$(x,y) \in R^*$ אמ"מ קיים $i \geq 1$ כך ש $(x,y) \in R^i$.

- אם רלציה מקיימת את α, אז היא עצמה הסגור שלה ביחס ל α. מכאן שהסגור הטרנזיטיבי של רלציה טרנזיטיבית R הוא R
- לכל רלציה R, R* הוא הסגור הטרנזיטיבי שלה.