אלגברה לינארית 1 - 20109

פתרון לממ"ן 11 – 2007ב

שאלה 1

א. נשתמש בשיטת גאוס כדי לפתור את המערכת הנתונה. נחליף את שתי המשוואות הראשונות ונדרג את מטריצת המקדמים של המערכת שהתקבלה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3\to R_3+2R_1 \\ R_4\to R_4-R_1}]{R_2\to R_2+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to -\frac{1}{3}R_4]{R_2\to R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4+R_3]{R_2\to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

משלב זה של הדרוג ניתן כבר להסיק שיש פתרון יחיד למערכת מפני שכל המשתנים קשורים ואין שורת סתירה. אפשר להמשיך את הדרוג כדי להגיע למטריצה הקנונית ואז ניתן לכתוב ישירות את הפתרון. דרך אחרת היא לחשב את z ולהמשיך על-ידי הצבה. נעשה זאת:

מהמטריצה האחרונה מתקבל ש-: $z=-1$, $y+2z=0$, $x+y+z=2$. לכן הפתרון היחיד הוא $(1,2,-1)$.

<u>בדיקה</u>: מציבים במערכת ובודקים שמתקיימות המשוואות.

ב. יהי פולינום $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ ממעלה 4, כאשר a,b,c,d,e ממשיים,

שמקיים $f(-2)=-29$, $f(3)=-59$, $f(-1)=5$, $f(2)=-1$, $f(1)=1$.

מהתנאים האלה מתקבלת המערכת הבאה של 5 משוואות ב- 5 נעלמים:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=1 \\ a+2b+4c+8d+16e=-1 \\ a-b+c-d+e=5 \\ a+3b+9c+27d+81e=-59 \\ a-2b+4c-8d+16e=-29 \end{cases}.$$

נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\1&2&4&8&16&-1\\1&-1&1&-1&1&5\\1&3&9&27&81&-59\\1&-2&4&-8&16&-29\end{array}\right)\underset{i\neq 1}{\xrightarrow{R_i\to R_i-R_1}}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&1&3&7&15&-2\\0&-2&0&-2&0&4\\0&2&8&26&80&-60\\0&-3&3&-9&15&-30\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R_4\to\frac{1}{2}R_4\\R_5\to\frac{1}{3}R_5}]{R_3\to\frac{1}{2}R_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&1&3&7&15&-2\\0&-1&0&-1&0&2\\0&1&4&13&40&-30\\0&-1&1&-3&5&-10\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&1&3&7&15&-2\\0&0&3&6&15&0\\0&0&1&6&25&-28\\0&0&4&4&20&-12\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&1&3&7&15&-2\\0&0&1&2&5&0\\0&0&1&6&25&-28\\0&0&1&1&5&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&-1&-4&1\\0&1&0&1&0&-2\\0&0&1&2&5&0\\0&0&0&4&20&-28\\0&0&0&-1&0&-3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&-4&4\\0&1&0&0&0&-5\\0&0&1&0&5&-6\\0&0&0&0&20&-40\\0&0&0&-1&0&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&-4&9\\0&1&0&0&0&-5\\0&0&1&0&0&4\\0&0&0&0&20&-40\\0&0&0&1&0&3\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&-5\\0&0&1&0&0&4\\0&0&0&1&0&3\\0&0&0&0&1&-2\end{array}\right)$$

כל המשתנים קשורים, לכן יש פתרון יחיד, כלומר קיים פולינום אחד ויחיד שמקיים את התנאים הנתונים והוא $f(x)=1-5x+4x^2+3x^3-2x^4$.

שאלה 2

שוב נדרג את מטריצת המערכת שמתקבלת לאחר החלפת שתי המשוואות הראשונות:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&c&b\\4&8&7&3c&3b\\2&4&2&c-1&b\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-4R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&c&b\\0&0&-1&-c&-b\\0&0&-2&-c-1&-b\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&c&b\\0&0&1&c&b\\0&0&-2&-c-1&-b\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2}A'=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&c&b\\0&0&1&c&b\\0&0&0&c-1&b\end{array}\right)$$

המטריצה המקורית A שקולת שורות למטריצה <u>המדורגת</u> A' ומכאן נדון במספר הפתרונות לפי מספר האיברים הפותחים ולכן לפי הערכים של b ו- c :

אם $c=1$ וגם $b\neq 0$, אין פתרון למערכת כי מתקבלת שורת סתירה.

אם $c=1$ וגם $b=0$, יש אינסוף פתרונות כי יש שני משתנים קשורים, x, z, ושני משתנים חופשיים, y, w. שימו לב שמתקבלת מערכת הומוגנית, שמטריצת המקדמים שלה שקולת שורות למטריצה $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. נסמן $y=s$, $w=t$ והפתרון הכללי הוא $(-2s+t,s,-t,t)$.

אם $c\neq 1$, יש אינסוף פתרונות ויש רק משתנה חפשי אחד, y. נסמן $y=s$ ועל-ידי הצבה נסיק מהמטריצה A' שהפתרון הכללי של המערכת הוא $\left(-2s+\frac{b}{c-1},s,\frac{-b}{c-1},\frac{b}{c-1}\right)$.

סיכום: אם $c=1$ וגם $b\neq 0$, אין פתרון למערכת.

אם $c=1$ וגם $b=0$ או $c\neq 1$, יש אינסוף פתרונות (הפתרונות רשומים לעיל)

אין מצב שיש פתרון יחיד.

שאלה 3

א. נוכיח טענה כללית יותר:

אם $(y_1,...,y_n)$ הוא פתרון של מערכת ואם גם $\lambda(y_1,...y_n)=(\lambda y_1,...,\lambda y_n)$ הוא פתרון של אותה מערכת, כאשר λ מספר השונה מ- 1, אז המערכת היא הומוגנית.

הוכחה: תהי $a_1x_1+...+a_nx_n=b$ משוואה כלשהי במערכת.

מהנתון נובע ש- $a_1y_1+...+a_ny_n=b$ ו- $a_1\lambda y_1+...+a_n\lambda y_n=b$.

אולם מתקיים $a_1\lambda y_1+...+a_n\lambda y_n=\lambda(a_1y_1+...+a_ny_n)=\lambda b$.

נסיק כי $b=\lambda b$,כלומר $(\lambda-1)b=0$, ומכיוון ש- $\lambda\neq 1$, נסיק כי $b=0$, והמשוואה הומוגנית. אולם טיעון זה נכון לכל משוואה במערכת, ולכן המערכת הומוגנית.

נחזור למקרה שלנו: נתון כי $(-1,-2,-3)$ וגם $(-2)(-1,-2,-3)$ הם פתרונות של (L), ולכן מהטענה לעיל נסיק כי (L) הומוגנית.

ב. תהי $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$ משוואה במערכת (L) עבורה $b\neq 0$ (קיימת כזאת, שכן נתון כי (L) אי-הומוגנית). מהנתון ש- $(1,-2,1),(1,-2,-1),(1,-4,0)$ פתרונות של (L) נובע שמתקיים

$$\begin{cases} a_1-2a_2+a_3=b \\ a_1-2a_2-a_3=b \\ a_1-4a_2 \qquad =b \end{cases}.$$

בקלות מתקבל ש- $a_2=a_3=0$ ו- $a_1=b$. נובע מכך שהווקטור $(1,0,0)$ מקיים את

המשוואה $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$.

לכן הוא לא יכול להיות פתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה כי $b \neq 0$.

ג. **נניח שיש פתרון יחיד למערכת L**. נוכיח דרך השלילה ש- $k \geq 3$.

נניח כי $k < 3$. נתבונן במטריצה מדורגת ששקולת שורות למטריצת המקדמים של המערכת. מספר האיברים הפותחים במטריצה זו שווה, לכל היותר, למספר השורות שלה ולכן יש לכל היותר 2 משתנים קשורים (כאשר קיים פתרון מספר המשתנים הקשורים שווה למספר האיברים הפותחים). מכך נובע שיש לפחות משתנה חפשי אחד, וכלן או יש אינסוף פתרונות או אין פתרון , מה שסותר את הנתון של קיום של פתרון יחיד. לכן $k \geq 3$.

שאלה 4

א. הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ פורשת את $\mathbf{R}^3$ אם ורק אם כל וקטור $v = (a,b,c)$ ב- $\mathbf{R}^3$ הוא צרוף לינארי של ווקטורי הקבוצה, כלומר אם ורק אם לכל וקטור $v = (a,b,c)$ ב- $\mathbf{R}^3$, קיים פתרון למשוואה $x_1v_4 + x_2v_3 + x_3v_2 + x_4v_1 = v$ (משפט II.18). נקבע הסדר הזה לווקטורים בצרוף כי המטריצה שמתקבלת יותר פשוטה לדרוג.

נדרג את מטריצת המקדמים של מערכת המשוואות המתאימה :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -m & 2 & a \\ 2 & 2 & -1 & 1 & b \\ 1 & m+1 & 3 & -1 & c \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -m & 2 & a \\ 0 & 8 & 2m-1 & -3 & b-2a \\ 0 & m+4 & m+3 & -3 & c-a \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{m+4}{8}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -m & 2 & a \\ 0 & 8 & 2m-1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}(-2m^2+m+28) & \frac{3m-12}{8} & c-a-\frac{m+4}{8}(b-2a) \end{array}\right).$$

אין פתרון כאשר מתקבלת שורה מהטיפוס $\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid \beta\right)$, יחד עם $\beta \neq 0$.

הביטוי $-2m^2 + m + 28$ מתאפס כאשר $m = 4$ או $m = -\frac{7}{2}$, לכן שורת סתירה עלולה להתקבל כאשר $m = 4$. במקרה זה השורה האחרונה במטריצה שווה ל-

$\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid a-b+c\right)$ ואם נקבע למשל $v = (1,0,0)$,יוצא $\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 1\right)$.

פירושו של דבר, קיים וקטור v שאינו צרוף לינארי של וקטורי הקבוצה, לכן הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ אינה פורשת את $\mathbf{R}^3$.

עבור כל $m \neq 4$ קיים פתרון ולכן קבוצה זו פורשת את $\mathbf{R}^3$ אם ורק אם $m \neq 4$.

ב. יהי $w = (m+1, m-1, 1)$.

נבדוק עבור אילו ערכי m יש פתרון למשוואה $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = w$ (*).

מסעיף א' נובע כי יש פתרון אם $m \neq 4$. אם $m = 4$, אז מתקיים $a-b+c=3$ עבור

הווקטור w , לכן יש שורת סתירה במטריצה המדורגת , כלומר אין פתרון למשוואה (*).

ג. המערכת $x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4=\underline{0}$ הומוגנית ויש בה שלוש משוואות וארבעה נעלמים. מכיוון שמספר המשוואות קטן ממספר הנעלמים, לכל m קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת (משפט II.12). במילים אחרות, לא קיים m כך שלמערכת זו הפתרון הטריוויאלי בלבד.

שאלה 5

א. נסמן $C=\{u_1,...,u_k\}$ ו- $D=\{v_1,...,v_m\}$. נתון שהקבוצה C בלתי תלויה לינארית, לכן מספיק להראות שהיא פורשת את $\mathbf{R}^n$ כדי להוכיח שהיא בסיס.

יהי v וקטור ב- $\mathbf{R}^n$. לפי הנתון, הקבוצה D פורשת את $\mathbf{R}^n$, לכן v הוא צרוף לינארי של וקטורי D , כלומר $v=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i$, $\alpha_i\in\mathbf{R}$. מאידך, כל וקטור ב- D הוא צרוף לינארי של וקטורי C, לכן קיימים β_{ij} , $1\le i\le m$, $1\le j\le k$ כך ש- $v_i=\sum_{j=1}^{k}\beta_{ij}u_j$ לכל i.

נציב זאת בביטוי של v ומתקבל $v=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\beta_{ij}u_j$, מה שמראה שהווקטור v הוא צרוף לינארי של וקטורי C. כאמור, נובע מכך שהקבוצה C בסיס של $\mathbf{R}^n$.

ב. תהי $E=\{e_1,...,e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^n$. נגדיר $C=E$ ו- $D=E\cup\{e_1+e_2\}$.
ברור שהקבוצה C בלתי תלויה לינארית, שהקבוצה D תלויה לינארית ופורשת כי היא מכילה קבוצה פורשת.