

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי f פונקציה של קבוצה A לקבוצה B .
נגדיר בעזרת f שתי פונקציות נוספות, באופן הבא:
אחת היא הפונקציה $f_* : P(A) \rightarrow P(B)$ אותה ראינו בממ"ן 13, המוגדרת כך:
עבור $X \in P(A)$, $f_*(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$.
במלים: f_* מתאימה לכל תת-קבוצה X של A את קבוצת התמונות של אברי X תחת f .

הפונקציה השנייה היא $f^* : P(B) \rightarrow P(A)$, ומוגדרת כך:
עבור $Y \in P(B)$, $f^*(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.
במלים: f^* מתאימה לכל תת-קבוצה Y של B את קבוצת המקורות של אברי Y תחת f .

שימו לב ש- f_* "הולכת באותו כיוון" כמו f , בעוד ש- f^* "הולכת בכיוון ההפוך" ל- f .
כדאי עוד לשים לב שלכל f מתקיים $f_*(\emptyset) = \emptyset$, וכן $f^*(\emptyset) = \emptyset$.

8 נק' א. הוכיחו: לכל $X \in P(A)$, $X \subseteq f^*(f_*(X))$.

9 נק' ב. הוכיחו: אם f אינה חד-חד-ערכית

אז קיימת $X \in P(A)$ עבורה $X \neq f^*(f_*(X))$.

8 נק' ג. הוכיחו: אם f חד-חד-ערכית אז לכל $X \in P(A)$, $X = f^*(f_*(X))$.

שאלה 2

כמה יחסי שקילות (רלציות שקילות) יש מעל קבוצת הטבעיים \mathbb{N} ?
בתשובה, ציין אם עוצמת קבוצת כל יחסי השקילות מעל \mathbb{N} היא:
סופית / \aleph_0 / C / 2^C / עוצמה אחרת. הוכח את תשובתך.

שאלה 3

בידינו מספר לא מוגבל של מרצפות מכל אחד מהסוגים הבאים: מרצפות אדומות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, מרצפות סגולות באורך 2, מרצפות שחורות באורך 1 ומרצפות לבנות באורך 1.

יהי a_n מספר הדרכים לרצף שביל ישר באורך n בעזרת מרצפות מהסוגים הללו. לא חייבים להשתמש בכל הסוגים.

(10 נק') א. רשום את a_0, a_1, a_2 . רשום יחס נסיגה עבור a_n .

וודא שיחס הנסיגה מתיישב עם ערכי ההתחלה שרשמת.

(11 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה שקיבלת בסעיף הקודם ורשום ביטוי מפורש עבור a_n .

(4 נק') ג. חשב **בשתי דרכים** את a_4 : פעם אחת בעזרת הביטוי עבור a_n שמצאת בסעיף ג

ופעם אחת על ידי שימוש חוזר ביחס הנסיגה שמצאת בסעיף ב.

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(8 נק') א. יהי S יחס מעל A המוגדר כך: לכל $x, y \in A$,

$(x, y) \in S$ אם ורק אם $x + y$ הוא מספר אי-זוגי.

מהו $|S|$, כלומר כמה זוגות סדורים יש ב- S ?

(9 נק') ב. כמה יחסים R מעל A מקיימים: לכל $x, y \in A$,

אם $(x, y) \in R$ אז $x + y$ הוא מספר אי-זוגי.

R אינו חייב להכיל את כל הזוגות מסוג זה.

שימו לב שהשאלה כעת היא כמה יחסים כאלה יש, לא כמה איברים יש ביחס נתון.

(8 נק') ג. כמה מהיחסים בסעיף ב' הם פונקציות של A ל- A ?

שאלה 5

השאלה עוסקת בתחשיב הפסוקים. כתיב מקוצר - מותר.

α, β, γ הם פסוקים, לא בהכרח שונים זה מזה, ולא בהכרח פסוקים יסודיים.

בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה. בנוסף, בחר אחד מהסעיפים ונמק את התשובה שלך עבורו. את שאר הסעיפים של שאלה זו אין צורך לנמק.

א. אם $\alpha \vee \beta$ הוא טאוטולוגיה אז :

a. $\alpha \wedge \beta$ הוא סתירה.

b. $\alpha \wedge \beta$ הוא טאוטולוגיה.

c. בהכרח $\alpha = \beta$.

d. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

ב. אם $\alpha \vee \beta$ הוא סתירה אז :

a. α הוא סתירה.

b. α הוא טאוטולוגיה.

c. α לא חייב להיות טאוטולוגיה ולא חייב להיות סתירה.

d. לא ייתכן - פסוק מהצורה $\alpha \vee \beta$ אינו יכול להיות סתירה.

ג. הטענה $\alpha \models \alpha \vee \beta$

a. נכונה רק אם $\alpha \models \beta$.

b. נכונה לכל הפסוקים α, β .

c. נכונה רק אם β הוא טאוטולוגיה.

d. נכונה רק אם α הוא סתירה.

ד. אם $\alpha \models \beta$ ו- $\beta \models \sim \alpha$ אז :

a. מצב כזה לא ייתכן.

b. α הוא סתירה.

c. β הוא סתירה.

d. β שקול טאוטולוגית ל- $\sim \alpha$.

מהצחה!