המכללה האקדמית להנדסה
אורט בראודה
ORT BRAUDE COLLEGE

המחלקה להנדסת תעשייה וניהול
מתמטיקה דיסקרטית - סמסטר א׳ תשס״ז

פתרון מבחן מועד ב׳

19 במרץ 2007 **חובב פרץ**

משך המבחן – 180 דקות. מותרים לשימוש כל חומרי עזר כתובים, ומחשבון.

שאלה 1:

א. (3%) אם $x \in B$ וכן $y \notin A$, אז $\{(x,y)\} \setminus (B \times A) = \varnothing$.

ב. (3%) אם $\{(x,y)\} \setminus (B \times A) = \varnothing$, אז $x \in B$ וכן $y \in A$.

ג. (3%) אם $\{(x,y)\} \notin P(B \times A)$ וכן $y \notin A$ אז $x \notin B$

ד. (3%) אם $|B \times A| = 12$ וכן $|B| = 4$, אז $|P(A)| = 8$.

שאלה 2:

תהא $A = \{1,2,3\}$ ותהא $B = \{1,4\}$. נגדיר יחס R מעל $P(A \setminus B)$ כך: $R = \begin{pmatrix} \{2\} & \{3\} & \{2\} & \{3\} & \{2\} \\ \{2\} & \{3\} & \{3\} & \{2,3\} & \{2,3\} \end{pmatrix}$

שאלה 2.1:

א. (3%) $|I_{P(A \setminus B)} \setminus R| = 2$.

ב. (3%) $I_{P(A \setminus B)} \cup R$ סימטרית.

ג. (3%) R אנטיסימטרית.

ד. (3%) R טרנזיטיבית

שאלה 2.2: בהמשך לנתוני ההתחלה, נגדיר רלציה T מעל $P(A \setminus B)$ בצורה הבאה:

$$(C,D) \in T \Leftrightarrow |P(C)| - |P(D)| \neq 1$$

א. (3%) $|T| = 12$

ב. (3%) $T \cup R = T$.

ג. (3%) $(R \setminus T)$ רלצית שקילות

ד. (3%) $(R \cup T)$ רלצית סדר חלקי

שאלה 3:

א. (4%). סכום מקדמי כל הביטויים עם החזקות החיוביות של y בפיתוח $(2+y)^6$ שווה $3^6 - 2^6$

ב. (4%). בכל הקצאת 400 סטודנטים ל-133 עמדות מחשב, בהכרח קיימת עמדת מחשב אחת שבה יהיו לפחות 4 סטודנטים.

ג. (4%) $\sum_{i=0}^{54} 2\binom{111}{2i} = 2^{111} - 222$

ד. (4%) מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-361 שווה למספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-722.

שאלה 4:

(14%) הוכח או הפרך את הטענה: $(A\cup C)\oplus(B\cup C)=A\oplus B$.

אם הטענה נכונה, הוכח אותה ע"י שימוש במושג השייכות של איברים (לא ע"י אלגברה של קבוצות ולא בדיאגראמות ון). אם הטענה לא נכונה, הבא דוגמא נגדית.

תשובה:

נבנה דוגמא נגדית:

$C=\{1,3\}\quad B=\{2,3\}\quad A=\{1,2\}$, לכן $(A\cup C)\oplus(B\cup C)=\varnothing\neq\{1,3\}=A\oplus B$

שאלה 5:

א. (7%) מצא <u>באופן קומבינטורי</u> את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=25$

המקיימים: $[2i\le x_i\le 5i\quad ,i=1,2,3,4]$ (יש לתת תשובה **<u>מספרית</u>**)

תשובה: $52=\binom{8}{5}-\binom{4}{1}=D(4,5)-D(4,1)$

ב. (9%) מצא <u>באופן קומבינטורי</u> את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה - $x_1+x_2+x_3+x_4=25$

המקיימים: $[-i\le x_i\le 5i\quad ,i=1,2,3,4]$ ניתן להשאיר את התשובה כביטוי קומבינטורי.

תשובה:

מספר הפתרונות של הבעיה הנ"ל שווה למספר הפתרונות של הבעיה $x_1+x_2+x_3+x_4=35$ המקיימים: $[0\le x_i\le 6i\quad ,i=1,2,3,4]$. הדרך המפורטת בשימוש עם הכלה והפרדה:

נגדיר את 4 הקבוצות הבאות

A_i - קבוצת כל הפתרונות בהם $x_i\ge 6i+1$.

$i=1\ldots4\quad |A_i|=D(4,35-6i-1)$ ($\binom{4}{1}$ נסכמים ב- S_1)

$i<j\quad i,j=1\ldots4\quad |A_i\cap A_j|=D(4,24-6i-6j-2)$ ($\binom{4}{2}$ נסכמים ב- S_2, כאשר $A_3\cap A_4=A_2\cap A_4=\varnothing$).

אין פתרונות שנמצאים בשלוש קבוצות או יותר.

בנוסף $|U|=D(4,35)$, ובסה"כ נרצה לחשב את

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4=D(4,35)-[D(4,28)+D(4,22)+D(4,16)+D(4,10)]+$$
$$+[D(4,15)+D(4,9)+2D(4,3)]$$

שאלה 6:

א. (10%) נניח שלרשותכם מספר בלתי מוגבל של מטבעות עם 3 ערכים (1 ₪, 5 ₪, 10 ₪. עבור כל אחד מערכי המטבע, **כל המטבעות זהים. מטבעות עם ערך שונה, כמובן שונים.** מצא יחס רקורסיה למספר הסידורים של שורה ששוויה *n* ₪. יש לרשום את כל תנאי ההתחלה הנחוצים (יהיה לכך משקל חשוב בציון).

פתרון:

נסתכל על המטבע האחרון בשורה – זה יכול להיות 1 ₪, 5 ₪, 10 ₪. בכל מקרה זה משאיר לבנות את יתרת השורה שערכה יהיה *n-1*, *n-5*, *n-10* ₪ בהתאמה, ולזה יש *f(n-1)*, *f(n-5)*, *f(n-10)* אפשרויות, ובסה״כ $f(n)=f(n-1)+f(n-5)+f(n-10)$.

עשר תנאי ההתחלה

$$f(1)=1 \quad f(2)=1 \quad f(3)=1 \quad f(4)=1 \quad f(5)=2 \quad f(6)=3$$
$$f(7)=4 \quad f(8)=5 \quad f(9)=6 \quad f(10)=9$$

ב. (8%) פתור את היחס הרקורסיבי: $a_n=4a_{n-1}-15 \quad a_0=11$

תשובה: נהפוך את יחס הרקורסיה הנ״ל ליחס לינארי סטנדרטי:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=4a_{n-1}-15 \\ a_{n-1}=4a_{n-2}-15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_n-4a_{n-1}=-15 \\ a_{n-1}-4a_{n-2}=-15 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n-4a_{n-1}=a_{n-1}-4a_{n-2} \Rightarrow a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$$

ונוסיף תנאי התחלה בצורה ידנית (כי נחוצים שני תנאי התחלה) $a_1=3a_0+5=3\cdot(-6)+20=2$

כעת נפתור את יחס הרקורסיה הלינארי בדרך הסטנדרטית:

המשוואה האופיינית: $\alpha^n=5\alpha^{n-1}-4\alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^2-5\alpha+4=0 \Rightarrow \alpha_1=4,\ \alpha_2=1 \Rightarrow a_n=A\alpha_1^n+B\alpha_2^n$

נציב תנאי ההתחלה: $\left.\begin{array}{l} a_0=A\alpha_1^0+B\alpha_2^0 \\ a_1=A\alpha_1^1+B\alpha_2^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0=11=A+B \\ a_1=29=A\cdot 4+B\cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=6 \\ B=5 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n=6\cdot 4^n+5$