5. עקרון ההכלה וההפרדה.

שאלה מס' 1.

במועדון מסוים, על כל חבר לשחק ברידג' או גולף. ידוע כי 30 מחברי המועדון הם שחקני ברידג', ו- 42 הם שחקני גולף. 20 מחברי המועדון משחקים בשני המשחקים. מהו מספר חברי המועדון?

תשובה:

A_1 - קבוצת השחקנים המשחקים ברידג'.

A_2 - קבוצת השחקנים המשחקים גולף.

מחפשים את $|A_1 \cup A_2|$.

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 30 + 42 - 20 = 52$.

שאלה מס' 2.

בקבוצה של 100 תלמידים 30 מנגנים, 25 מציירים ו- 8 גם מנגנים וגם מציירים. מהו מספר התלמידים, בקבוצה, זו שאינם מנגנים ואינם מציירים?

תשובה:

A_1 - קבוצת התלמידים המנגנים.

A_2 - קבוצת התלמידים המציירים.

מחפשים את $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}|$.

$|\overline{A_1 \cup A_2}| = |U| - |A_1 \cup A_2| = 100 - \left[|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|\right] = 100 - [30 + 25 - 8] = 53$.

שאלה מס' 3.

כמה מספרים בין 1 ל- 3000 אינם מתחלקים לא ב- 3 ולא ב- 5?

תשובה:

A_1 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-3.

A_2 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-5.

מחפשים את $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}|$.

$|\overline{A_1 \cup A_2}| = |U| - |A_1 \cup A_2| = 3000 - \left[|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|\right] = 3000 - [1000 + 600 - 200] = 1600$.

שאלה מס' 4.

כמה מספרים בין 1 ל- 3000 אינם מתחלקים לא ב- 3,לא ב- 5 ולא ב- 7?

תשובה:

A_1 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-3.

A_2 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-5.

A_3 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-7.

מחפשים את $\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|$.

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \\
&= 3000 - \left[|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_3 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\right] = \\
&= 3000 - [1000 + 600 + 428 - 200 - 142 - 85 + 28] = 1371 .
\end{aligned}$$

שאלה מס' 5.

רשום נוסחה עבור $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, הדומה לזו שרשמנו עבור $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

תשובה:

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - \\
&- |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}$$

שאלה מס' 6.

בבית ספר מסוים יש 200 לומדי צרפתית או איטלקית, או שתי השפות הללו. ידוע שבבית הספר יש 150 לומדי צרפתית ו- 70 לומדי איטלקית. מהו מספר לומדי שתי השפות?

תשובה:

A_1 - קבוצת התלמידים הלומדים צרפתית.

A_2 - קבוצת התלמידים הלומדים איטלקית.

מחפשים את $|A_1 \cap A_2|$.

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2| = 150 + 70 - 200 = 20 .$$

שאלה מס' 7.

בכמה מספרים בני 4 ספרות יש לפחות ספרה אחת 2, ספרה אחת 3 וספרה אחת 4?

תשובה:

A_1 - קבוצת המספרים בהם אין ספרה 2.

A_2 - קבוצת המספרים בהם אין ספרה 3.

A_3 - קבוצת המספרים בהם אין ספרה 4.

מחפשים את $\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|$.

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|=\left|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right|=|U|-\left[|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_3\cap A_2|+|A_1\cap A_2\cap A_3|\right]=$$
$$=9000-\left[3\cdot 5832-3\cdot 3584+2058\right]=198$$

נסביר משמעות חלק מהקבוצות:

$|A_1|$ - מספר המספרים בהם אין ספרה 2: כלומר שלספרת האלפים נותרו רק 8 אפשרויות, לספרת המאות 9 אפשרויות, וכך גם לספרת העשרות והיחידות. בסה"כ מס' האפשרויות - $8\cdot 9\cdot 9\cdot 9=5832$

$|A_1\cap A_3|$ - מספר המספרים בהם אין ספרה 2 ו-4: כלומר שלספרת האלפים נותרו רק 7 אפשרויות, לספרת המאות 8 אפשרויות, וכך גם לספרת העשרות והיחידות. בסה"כ מס' האפשרויות - $7\cdot 8\cdot 8\cdot 8=3584$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|$ - מספר המספרים בהם אין ספרה 2, 3 ו-4: כלומר שלספרת האלפים נותרו רק 6 אפשרויות, לספרת המאות 7 אפשרויות, וכך גם לספרת העשרות והיחידות. בסה"כ יהיו - $6\cdot 7\cdot 7\cdot 7=2058$ אפשרויות.

שאלה מס' 8.

מהו מספר התמורות של הספרות 1,2,4,6 אשר הספרה הראשונה שבהן גדולה מ- 1 או שהספרה האחרונה שבהן קטנה מ- 3.

תשובה:

A_1 - קבוצת התמורות בהן הספרה הראשונה גדולה מ-1.

A_2 - קבוצת התמורות בהן הספרה האחרונה קטנה מ- 3.

מחפשים את $|A_1\cup A_2|$. $\qquad 20=\left(2!+2\cdot 2\cdot 2!\right)-3\cdot 3!+2\cdot 3!=|A_1\cap A_2|-|A_2|+|A_1|=|A_1\cup A_2|$.

נסביר משמעות חלק מהקבוצות:

$|A_1|$ - מספר התמורות בהן הספרה הראשונה גדולה מ-1: כאן לכל בחירת הספרה הראשונה (3 אפשרויות), ניתן לסדר את שאר הספרות ב-$3!$ אפשרויות.

$|A_1\cap A_3|$ - מספר התמורות בהן הספרה הראשונה גדולה מ-1 והספרה האחרונה קטנה מ- 3: אם הספרה הראשונה 2, אז האחרונה 1 ונשאר רק לערבב את האמצעיות. אם הראשונה 3 או 4, אז האחרונה 1 או 2, ואז שוב נשאר לערבב את שתי האחרות.

שאלה מס' 9.

כמה מספרים שלמים וחיוביים, הקטנים מ- 30, זרים ל- 30?

תזכורת: שני מספרים שלמים זרים זה לזה, אם אין להם מחלק משותף פרט ל- 1.

תשובה: כדי שמספר יהיה זר ל-30 אסור שהוא יתחלק באף אחד מגורמי 30 (2,3,5)

A_1 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-2.

A_2 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-3.

A_3 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-5.

מחפשים את $\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|$.

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \\
&= 30 - \left[|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_3 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\right] = \\
&= 30 - [15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1] = 8
\end{aligned}$$

שאלה מס' 10.

כמה מספרים שלמים וחיוביים קטנים מ- 1001 זרים ל- 1001?

תשובה: כדי שמספר יהיה זר ל-1001 אסור שהוא יתחלק באף אחד מגורמי 1001 (11,13,7)

A_1 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-7.

A_2 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-11.

A_3 - קבוצת המספרים המתחלקים ב-13.

מחפשים את $\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|$.

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \\
&= 1001 - \left[|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_3 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\right] = \\
&= 1001 - [143 + 91 + 77 - 13 - 11 - 7 + 1] = 720
\end{aligned}$$

שאלה מס' 11.

בבית ספר, שבו לומדים 120 ילדים, התקיימו בשנת הלימודים שלושה טיולים: א', ב', ו- ג'. לטיול א' יצאו 40 תלמידים, לטיול ב' יצאו 40 תלמידים וגם לטיול ג' יצאו 40 תלמידים. 20 תלמידים יצאו רק לטיול א', 20 תלמידים יצאו רק לטיול ב', ו- 15 תלמידים יצאו רק לטיול ג'. 10 תלמידים יצאו לטיולים א' ו- ב'. כמה תלמידים יצאו לשלושת הטיולים, וכמה תלמידים לא יצאו לאף טיול?

תשובה:

A_1 - קבוצת התלמידים שיצאו לטיול א'.

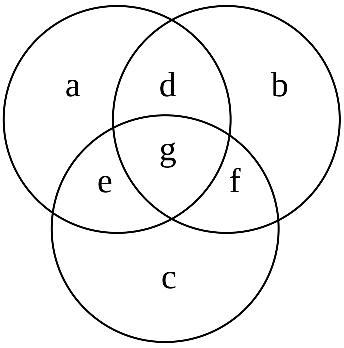
A_2 - קבוצת התלמידים שיצאו לטיול ב'.

A_3 - קבוצת התלמידים שיצאו לטיול ג'.

$$|A_1 \cap A_2| = 10 \quad |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3| = 15\ ,\ |\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}| = 20\ ,\ |A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 20\ ,\ |A_1| = |A_2| = |A_3| = 40$$

מחפשים את $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|, |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

בסה"כ יש 8 קבוצות זרות המרכיבות את המרחב:



$$|A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 20 = a$$
$$|\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}| = 20 = b$$
$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3| = 15 = c$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}| = d$$
$$|A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| = e$$
$$|\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3| = f$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = g$$
$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$|A_1| = 40 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap \overline{A_2}| = |A_1 \cap A_2| + \left[|A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| + |A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| \right] =$$
$$= 10 + |A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| + 20 \Rightarrow |A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| = 10 = e$$
$$|A_2| = 40 = |A_1 \cap A_2| + |\overline{A_1} \cap A_2| = |A_1 \cap A_2| + \left[|\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3| + |\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}| \right] =$$
$$= 10 + |\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3| + 20 \Rightarrow |\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3| = 10 = f$$

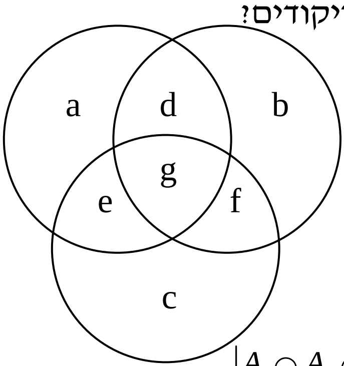
$$|A_3| = 40 = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3| + |A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3| =$$
$$= 15 + 10 + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + 10 \Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5 = g$$

$$|A_1 \cap A_2| = 10 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| = 5 + |A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| \Rightarrow |A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| = 5 = d$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 120 - [20 + 20 + 15 + 5 + 10 + 10 + 5] = 35$$

שאלה מס׳ 12.

מתוך 30 ילדים, 20 לומדים ציור, 14 לומדים מוסיקה ו- 10 לומדים ריקוד. אף ילד אינו לומד את כל שלוש האמנויות, ו- 8 ילדים אינם לומדים אף אחת מהן. כמה ילדים לומדים מוסיקה וריקודים?



תשובה:

A_1 - קבוצת התלמידים שלומדים ציור. $\left|A_1\right| = a+d+e+g = 20$

A_2 - קבוצת התלמידים שלומדים מוסיקה. $\left|A_2\right| = b+d+f+g = 14$

A_3 - קבוצת התלמידים שלומדים ריקוד. $\left|A_3\right| = c+e+f+g = 10$

$$\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| = g = 0, \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = 8 \Rightarrow \left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right| = a+b+c+d+e+f+g = 22$$

מחפשים את $\left|A_2 \cap A_3\right| = f+g = f$.

$$\left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \left|A_3\right| = a+b+c+2\left(d+e+f\right) = 44$$

מצד שני $a+b+c+d+e+f = 22$

לכן אם נחסיר בין שתי המשוואות האחרונות, נקבל $a+b+c=0 \Rightarrow a=b=c=0$.

$\left|A_1\right| = a+d+e+g = d+e = 20$, לכן $f=2$

שאלה מס׳ 13.

הוכח את הנוסחה:

$$\left|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'\right| = \left|U\right| - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + \left(-1\right)^n S_n = \left|U\right| - \sum_{i=1}^{n} \left(-1\right)^{i-1} S_i$$

תשובה:

תוצאה שהוכחנו בכיתה היא $\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = S_1 - S_2 + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(-1\right)^{i-1} S_i$

$\left|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'\right| = \left|\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right)'\right| = \left|U\right| - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right|$, ונקבל את התוצאה המבוקשת.

שאלה מס' 14.

מטילים n קוביות שונות.

א) מהו מספר התוצאות של ההטלה?

ב) מהו מספר התוצאות האפשריות, בהן מופיע כל אחד מהמספרים 1 עד 6 לפחות פעם אחת?

תשובה:

א. כאן יש 6 אפשרויות לכל קוביה, לכן יש 6^n תוצאות שונות.

ב. כאן יש מספר רב של שילובים, אותו כדאי לאפיין בעזרת הכלה והפרדה. נגדיר את הקבוצות הבאות:

A_i - קבוצת ההטלות בהן לא הופיע המספר i. לכן A_i' - קבוצת ההטלות בהן <u>הופיע</u> המספר i.

אנו מחפשים את מספר ההטלות בהן הופיעו גם 1 וגם 2...וגם 6, כלומר $\left|A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5'\cap A_6'\right|$.

בגלל סימטריות הקבוצות, נרצה בעצם להסתכל על מספר התכונות המתקיימות בכל מניה:

S_1 - סכום מספר האיברים בכל הקבוצות המקוריות (A_i)

S_2 - סכום מספר האיברים בכל חיתוכי 2 קבוצות ($A_i\cap A_j$)

S_k - סכום מספר האיברים בכל חיתוכי k קבוצות.

נחשב את S_1 - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_1, יש 5^n איברים, כי בכל קבוצה כזו לא משתמשים במספר אחד מתוך ה-6. סה"כ יש 6 קבוצות כאלה, לכן $S_1=6\cdot5^n$.

נחשב את S_2 - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_2, יש 4^n איברים, כי בכל קבוצה כזו לא משתמשים בשני מספרים מתוך ה-6. סה"כ יש $C(6,2)$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_2=C(6,2)\cdot4^n$.

נחשב את S_3 - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_3, יש 3^n איברים, כי בכל קבוצה כזו לא משתמשים בשלושה מספרים מתוך ה-6. סה"כ יש $C(6,3)$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_3=C(6,3)\cdot3^n$.

נחשב את S_4 - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_4, יש 2^n איברים, כי בכל קבוצה כזו לא משתמשים בארבע מספרים מתוך ה-6. סה"כ יש $C(6,4)$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_4=C(6,4)\cdot2^n$.

נחשב את S_5 - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_5, יש $1^n=1$ איברים, כי בכל קבוצה כזו לא משתמשים בחמישה מספרים מתוך ה-6. סה"כ יש $C(6,5)=6$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_5=C(6,5)\cdot1^n=6$.

נחשב את S_6 - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_6, יש $0^n=0$ איברים, כי בכל קבוצה כזו לא משתמשים בששה מספרים מתוך ה-6. סה"כ יש $C(6,6)=1$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_6=C(6,6)\cdot0^n=0$.

$$\begin{aligned}&\left|A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5'\cap A_6'\right|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6=\\&6^n-6\cdot5^n+C(6,2)\cdot4^n-C(6,3)\cdot3^n+C(6,4)\cdot2^n-C(6,5)\cdot1^n+0=\\&6^n-6\cdot5^n+15\cdot4^n-20\cdot3^n+15\cdot2^n-6\end{aligned}$$

שאלה מס׳ 15.

הוכח שמספר האפשרויות לפזר n כדורים שונים ב- k תאים שונים, באופן שלפחות תא אחד ישאר ריק, הוא $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n$. **רמז:** הפתרון אנלוגי לפתרון השאלה מס׳ 14.

תשובה:

כאן הכדורים משחקים בתפקיד הקוביות המוטלות, והתאים בתפקיד תוצאות כל הטלה (בדוגמא הקודמת היו למעשה 6 תאים). נגדיר את הקבוצות בצורה הבאה:

A_i - קבוצת שיבוצי הכדורים בהן אין כדור בתא i.

אנו מחפשים את אותן אפשרויות בהן אין כדור בתא 1, ו/או אין כדור בתא 2,... ו/או אין כדור בתא k.

כלומר מחפשים את $\left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\right| = S_1 - S_2 + ... + (-1)^{n-1} S_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} S_i$. כעת, מה שנותר להראות הוא, $S_i = \binom{k}{i}(k-i)^n$. $\binom{k}{i}$ - מסמן את מספר הקבוצות אותן חותכים מתוך k. $(k-i)$ - מספר התאים בהם ניתן להשתמש. $(k-i)^n$ - מספר השיבוצים של n הכדורים השונים ל-$(k-i)$ התאים.

שאלה מס׳ 16.

מזכירה שמה מכתבים ב- n מעטפות ממוענות, בלי לקרוא את הכתובות. מהו מספר האפשרויות שאף מכתב לא יגיע לתעודתו?

תשובה:

נגדיר את הקבוצות בצורה הבאה:

A_i - קבוצת שיבוצי המכתבים שבהם המכתב ה- i הגיע ליעדו.

A_i' - קבוצת שיבוצי המכתבים שבהם המכתב ה- i לא הגיע ליעדו.

אנו מעוניינים ב- $\left|A_1' \cap A_2' \cap ... \cap A_n'\right|$.

S_k - סכום מספר האיברים בכל חיתוכי k קבוצות, כלומר ש-k מכתבים יגיעו ליעדם בכל קבוצה הנמנית בתוך S_k, יש $(n-k)!$ איברים, כי בכל קבוצה כזו נותרים $n-k$ מכתבים אותם ניתן לשבץ כרצוננו. סה״כ יש $C(n,k)$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_k = C(n,k)\cdot(n-k)! = n!/k!$. בסה״כ:

$$\left|A_1' \cap A_2' \cap ... \cap A_n'\right| = |U| - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} S_i = n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} n!/k! = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 1/k!$$

שאלה מס' 17.

מהו מספר האפשרויות לבחור 5 קלפים מתוך 52 שבחפיסה, כך שיהיה ביניהם לפחות קלף אחד מכל אחד מארבעת הסוגים?

תשובה:

נגדיר את הקבוצות הבאות:

A_i - קבוצת הבחירות בהן הופיע קלף מסוג i. לכן A_i' - קבוצת הבחירות בהן לא הופיע קלף מסוג i.

אנו מחפשים את מספר הבחירות בהן הופיעו קלפים מכל הסוגים, כלומר $\left|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'\right|$.

נחשב את S_k - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_k, יש $C\left(52-13k,5\right)$ איברים, כי בכל קבוצה כזו לא משתמשים ב-k סוגים מתוך ה-4. סה"כ יש $C\left(4,k\right)$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_k = C\left(52-13k,5\right)\cdot C\left(4,k\right)$.

בסה"כ

$$\begin{aligned}
&\left|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'\right| = \left|U\right| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \\
&C\left(52,5\right) - C\left(52-13,5\right)\cdot C\left(4,1\right) + C\left(52-13\cdot 2,5\right)\cdot C\left(4,2\right) - \\
&-C\left(52-13\cdot 3,5\right)\cdot C\left(4,3\right) + C\left(52-13\cdot 4,5\right)\cdot C\left(4,4\right) = \\
&= \frac{52!}{47!5!} - 4\frac{39!}{34!5!} + 6\frac{26!}{21!5!} - 4\frac{13!}{8!5!} + 0
\end{aligned}$$

שאלה מס' 18.

מפזרים 25 כדורים זהים בין 6 תאים שונים. מהו מספר התוצאות, שבהן כל אחד משלושת התאים הראשונים מכיל לכל היותר 6 כדורים?

תשובה:

נגדיר את הקבוצות הבאות:

A_i - קבוצת הפיזורים בהן 7 כדורים ומעלה בתא i. לכן A_i' - קבוצת הבחירות בהן עד 6 כדורים בתא i.

אנו מחפשים את מספר הבחירות בהן פוזרו עד 6 כדורים בכל תא, כלומר $\left|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4' \cap A_5' \cap A_6'\right|$.

נחשב את S_k - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_k, יש $D\left(6,25-7k\right)$ איברים, כי בכל קבוצה כזו מפזרים מלכתחילה ב-k תאים 7 כדורים. סה"כ יש $C\left(6,k\right)$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_k = D\left(6,25-7k\right)\cdot C\left(6,k\right)$.

כמובן שמעבר ל-$k=3$, לא ניתן לשבץ 7 כדורים בכל תא (כי יש רק 25 כדורים), לכן $S_4 = S_5 = S_6 = 0$.

בסה"כ

$$\left|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4' \cap A_5' \cap A_6'\right| = \left|U\right| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6 = \sum_{k=0}^{3} S_k = \left(-1\right)^k D\left(6,25-7k\right)\cdot C\left(6,k\right)$$

שאלה מס' 19.

מהו מספר התמורות של המספרים מ- 1 עד 10, שבהן אף מספר אי-זוגי אינו נמצא במקומו? (המספרים הזוגיים יכולים להיות בכל מקום שהוא).

תשובה:

נגדיר את הקבוצות הבאות:

A_i - קבוצת התמורות בהן המספר i במקומו. לכן $A_i^{'}$ - קבוצת התמורות בהן המספר i אינו במקומו.

מחפשים את מספר התמורות בהן אף מספר אי-זוגי אינו נמצא במקומו, כלומר $\left|A_1^{'}\cap A_3^{'}\cap A_5^{'}\cap A_7^{'}\cap A_9^{'}\right|$.

נחשב את S_k - בכל קבוצה הנמנית בתוך S_k, יש $(10-k)!$ איברים, כי בכל קבוצה כזו k מספרים ממוקמים במקומם. סה"כ יש $C(5,k)$ חיתוכי קבוצות כאלה, לכן $S_k=C(5,k)\cdot(10-k)!$.

בסה"כ

$$\begin{aligned}&\left|A_1^{'}\cap A_3^{'}\cap A_5^{'}\cap A_7^{'}\cap A_9^{'}\right|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5=\\&10!-C(5,1)\cdot(10-1)!+C(5,2)\cdot(10-2)!-C(5,3)\cdot(10-3)!+C(5,4)\cdot(10-4)!-C(5,5)\cdot(10-5)!=\\&=10!-5\cdot 9!+10\cdot 8!-10\cdot 7!+5\cdot 6!-5!\end{aligned}$$

שאלה מס' 20.

$$\Theta(n)=n-\sum_{1\le i\le k}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{n}{p_ip_j}+\sum_{1\le i<j<h\le k}\frac{n}{p_ip_jp_h}+\ldots+(-1)^k\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}=$$

$$=n\left(1-\sum_{1\le i\le k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{1}{p_ip_j}-\sum_{1\le i<j<h\le k}\frac{1}{p_ip_jp_h}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{p_1p_2\cdots p_k}\right)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

הוכח את המעבר האלגברי האחרון בחישוב הנ"ל.

תשובה:

לפני ההוכחה נזכיר כי $\Theta(n)$ מסמנת את מספר השלמים החיוביים הקטנים וזרים ל-n.

$p_1,p_2,\ldots,p_k$ - יסמנו את הגורמים הראשוניים של n.

הוכחת המעבר האחרון: נבצע את המעבר מלמטה למעלה: כדי לקבל מכפלה כלשהי של מספר $\frac{1}{p_i}$-ים צריך לבחור אותם מהסוגריים המתאימים, ולבחור 1 משאר הסוגריים. המחובר שנקבל יהיה עם סימן חיובי אם בחרנו מס' זוגי של $\frac{1}{p_i}$-ים, ואי זוגי אחרת. בצורה זו בעצם נקבל את כל ההרכבים השונים המופיעים בנוסחא שלפני המעבר האחרון.

שאלה מס' 21.

חשב: א) $\Theta(30)$ ב) $\Theta(1001)$ ג) $\Theta(210)=\Theta(2\cdot3\cdot5\cdot7)$

ד) $\Theta(12{,}600)=\Theta\left(2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\right)$ ה) $\Theta(1{,}000{,}000)$.

תשובה:

א. $\Theta(30)=\Theta(2\cdot3\cdot5)=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=30\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}=8$

ב. $\Theta(1001)=\Theta(11\cdot7\cdot13)=1001\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)=1001\frac{10}{11}\frac{6}{7}\frac{12}{13}=720$

ג. $\Theta(210)=\Theta(2\cdot3\cdot5\cdot7)=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=210\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}=48$

ד. $\Theta(12{,}600)=\Theta\left(2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\right)=12{,}600\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=12{,}600\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}=2880$

ה. $\Theta(1{,}000{,}000)=\Theta\left(10^6\right)=\Theta\left(2^6\cdot5^6\right)=10^6\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=10^6\frac{1}{2}\frac{4}{5}=400{,}000$

שאלה מס' 22.

מצא את מספר הפתרונות השלמים של המשוואה:

$x_1+x_2+x_3+x_4=25$ המקיימים: $1\le x_1\le6$, $0\le x_2\le8$, $-2\le x_3\le3$, $6\le x_4\le10$.

תשובה:

תחילה נטפל בבעיות הקלות – בעיות החסמים התחתונים: מספר הפתרונות של הבעיה הנ"ל שווה למספר הפתרונות של הבעיה: $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ המקיימים: $0\le x_1\le5$, $0\le x_2\le8$, $0\le x_3\le5$, $0\le x_4\le4$.

A_1 - קבוצת הפתרונות בהם $6\le x_1$. A_2 - קבוצת הפתרונות בהם $9\le x_2$.

A_3 - קבוצת הפתרונות בהם $6\le x_3$. A_4 - קבוצת הפתרונות בהם $5\le x_4$.

מחפשים את הפתרונות הטבעיים של $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ השייכים לקבוצה $A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'$,

$$S_1=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|=D(4,14)+D(4,11)+D(4,14)+D(4,15)$$

$$S_2=|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_3\cap A_4|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_4|=$$
$$=D(4,5)+D(4,5)+D(4,9)+D(4,8)+D(4,9)+D(4,6)$$

$$S_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_3\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_1\cap A_2\cap A_4|=0+D(4,0)+D(4,3)+D(4,0)=22$$

$S_4=0$, לכן

$$|A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4=D(4,20)-\left[D(4,14)+D(4,11)+D(4,14)+D(4,15)\right]+$$
$$+\left[D(4,5)+D(4,5)+D(4,9)+D(4,8)+D(4,9)+D(4,6)\right]-22+0$$

שאלה מס' 23.

מצא את מספר המספרים בני 7 ספרות, שסכום ספרותיהם הוא 19 (אין להתחיל מספר ב- 0).

תשובה:

הבעיה שקולה לבעיה הבאה: מצא את מספר הפתרונות השלמים של המשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=19$ המקיימים: $1\le x_1\le 9$, $0\le x_2,x_3,\dots,x_7\le 9$. או $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=18$ $0\le x_1\le 8$, $0\le x_2,x_3,\dots,x_7\le 9$

A_1 - קבוצת הפתרונות בהם $9\le x_1$. $i=2,3,\dots,7$ A_i - קבוצת הפתרונות בהם $10\le x_i$.

מחפשים את הפתרונות הטבעיים של $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=18$ השייכים לקבוצה $A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5'\cap A_6'\cap A_7'$. $S_1=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|+|A_6|+|A_7|=D(7,9)+6\cdot D(7,8)$

בחיתוכי 2 קבוצות נקבל תמיד קבוצות ריקות (כי לא יכול להיות שמשתנה אחד יהיה גדול מ-10 ועוד משתנה יהיה גדול מ-9 או מ-10, כשסכום כל המשתנים הוא 18. באותו אופן, ברור כי גם חיתוכי 3,4,5,6,7 קבוצות יהיו ריקים – לכן $S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=S_7=0$.

לכן $\left|A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5'\cap A_6'\cap A_7'\right|=|U|-S_1=D(7,18)-\left[D(7,9)+6\cdot D(7,8)\right]$

שאלה מס' 24.

הראה כי מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k$ המקיימים $(i=1,2,3,4,5)$ $x_i\le b$, הוא:

$$\binom{5-1+k}{4}-\binom{k}{1}\binom{5-1+k-b}{4}+\binom{k}{2}\binom{5-1+k-2b}{4}-\binom{k}{3}\binom{5-1+k-3b}{4}+\binom{k}{4}\binom{5-1+k-4b}{4}-\dots$$

המחוברים בסכום הזה שונים מאפס, אם $5-1+k-mb\ge 0$ הכלל את התוצאה למשוואה עם n משתנים.

תשובה:

$i=1,2,\dots,5$ A_i - קבוצת הפתרונות בהם $b\le x_i$.

מחפשים את הפתרונות הטבעיים של $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k$ השייכים לקבוצה $A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5'$.

בחיתוכי m קבוצות נקבל תמיד את הבעיה השקולה הבאה: מצא את מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k-mb$, ותמיד נקבל $D(5,k-mb)$. מס' החיתוכים של m קבוצות מתוך 5 הוא $C(5,m)$. לכן $S_m=C(5,m)\cdot D(5,k-mb)$, ובסה"כ

$$\left|A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5'\right|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5=D(5,k)-\sum_{m=1}^{5}(-1)^{m+1}C(5,m)\cdot D(5,k-mb)$$

וזה בדיוק הביטוי שבשאלה. באופן כללי, למשוואה עם n משתנים נקבל

$$D(n,k)-\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}C(n,m)\cdot D(n,k-mb).$$