# תדריך לימוד ליחידה 7
# בקורס " אלגברה לינארית 1"- 20109

הגענו ליחידה 7 שהזכרתי כבר מספר פעמים בתדריכים הקודמים. יחידה זו חשובה ביותר ומכאן אנחנו עוברים לשלב אחר בקורס, החומר נעשה קצת יותר מופשט.

<u>הערה</u>: מעכשיו תופיע לעיתים קרובות הדוגמה של **הפולינומים**. כדאי לכם לקרוא שוב את הסעיף ה' פרק 2 (עמ' 43-51) בספר הראשון , סעיף זה מוקדש לתכונות של פולינומים שבהן נשתמש בהמשך.

**<u>פרק 1</u>** :

המבנה של "*המבנה מרחב לינארי* (או מרחב וקטורי) *מעל שדה*" הוא ההכללה של מבנה שכבר פגשנו עם $\mathbf{R}^n$ ועם $\mathbf{M}_{m\times n}^{\mathbf{R}}$. נחקור את התכונות של מרחב לינארי באופן כללי וכמובן נוכל להסיק אותן התכונות עבור הדוגמאות השונות של מרחב לינארי.

**– חשוב להבין כי:**

1. בהגדרת מרחב לינארי <u>השדה "מעורב" רק בפעולה של כפל בסקלר</u>. אם נחליף שדה, יתכן שהפעולה לא מוגדרת או שהתכונות של הפעולה הזאת כבר משתנות. למשל, $\mathbf{R}$ הוא מרחב לינארי מעל עצמו, אך אינו מרחב לינארי מעל $\mathbf{C}$. (אגב, *יש לזכור <u>שכל שדה הוא מרחב לינארי מעל עצמו</u>* כאשר החיבור הוא החיבור של השדה והכפל בסקלר הוא הכפל של השדה)
2. המבנה של מרחב לינארי <u>תלוי כמובן בפעולות שמוגדרות עליו</u>. למשל, $\mathbf{R}_+^3$ יחד עם הפעולות מוגדרות *בדוגמה 6 עמ' 9* מהווה מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$, אך עם הפעולות "הרגילות", הוא **לא** מרחב לינארי ( מדוע?).

**– כל הדוגמאות של מרחב לינארי (פרט לדוגמה 8 שדורשת ידע בקורס אחר) מעמ' 4 עד עמ' 10 בסיסיות . קראו אותם היטב!**

**- המשפטים V.3, V.4 ו- V.5** (עמ' 12-15) קשורים לכללי חישוב במרחב לינארי. כבר פגשנו אותם ביחידות הקודמות.

**<u>פרק 2</u>** :

**סעיפי א' ו- ב':** *תת-מרחבים*

המושג של תת-מרחב בסיסי ביותר , המשפטים והדוגמאות חשובות.

***הערה 1:*** נניח שעליכם להוכיח שקבוצה מסוימת $U$ היא מרחב לינארי מעל שדה $F$ לגבי פעולות נתונות. לפני שמתחילים בבדיקת כל האקסיומות של **ההגדרה V.1** , כדאי לבדוק האם $U$ היא בעצם תת-קבוצה של מרחב לינארי ידוע $V$ , כאשר מדובר כמובן באותן פעולות. אם כן, מספיק להוכיח ש-$U$ תת-מרחב של $V$ בעזרת **המשפטים V.8 ו- V.8'** (עמ' 19). בצורה כזאת, תחסכו עבודה רבה!

***הערה 2:*** ע"פ **משפט V.9** (עמ' 20), החיתוך של שני תת-מרחבים הוא תת-מרחב, אך **האיחוד של תת-מרחבים אינו** בדרך כלל **תת-מרחב**. להלן דוגמה נגדית:

$V = \mathbf{R}^2$, $U = Sp\{(1,0)\}, W = Sp\{(0,1)\}$ ( באופן גיאומטרי V הוא המישור ו- $U, W$ הם צירי הקואורדינטות). אז $U \cup W$ **אינו** תת-מרחב של $V$ כי $(1,1) \notin U \cup W$.

<u>*תרגיל*</u> *(קצת קשה)*: $U \cup W$ הוא תת-מרחב של $V$ אם ורק אם $W \subseteq U$ או $U \subseteq W$.

**סעיף ג'**: *צרופים לינאריים*

***הערה 1***: שימו לב להערות אחרי הגדרה V.10 (עמ' 25), בפרט הערות א' ו- ז'.

***הערה 2:*** נובע מהתכונות של תת-מרחב ש<u>כל תת-מרחב סגור ביחס לצרופים לינאריים</u>, במילים אחרות, צרוף לינארי של וקטורים של תת-מרחב שייך גם לאותו תת-מרחב.

**סעיף ד'**: מוצג כאן מושג בסיסי של הקורס, ***התת-מרחב הנפרש ע"י קבוצה.*** זהו התת-מרחב הקטן ביותר שמכיל את הקבוצה $K$ , זו המשמעות של הסעיף ב' של ה**משפט V.11** (עמ'28), והוא אוסף של כל הצרופים הליניאריים של וקטורי $K$.

- ***התכונות של התת-מרחב הזה מופיעות בשאלות הבאות:***

  שאלה 41 (עמ'31), שאלה 50 , שאלה 51 (עמ' 35).

- ***שימו לב להגדרה של מרחב שורות של מטריצה*** <u>בשאלה 46</u> (עמ' 46) ***ולטענה הבאה***:

  *טענה*: <u>אם שתי מטריצות שקולות שורות, אז יש להן אותו מרחב שורות</u>.

- ***בשאלה 48(עמ' 33) דוגמה מעניינת של מרחב לינארי <u>שלא</u> נוצר סופית.***

- <u>***סיכום לשיטות הוכחה שקבוצה*** $W$ ***נתונה היא תת-מרחב:***</u>

  ***1.*** שימוש במשפטים V.8 או-V.8'

  ***2.*** למצוא קבוצה פורשת $K$ של $W$ , כלומר להוכיח ש- $W = Sp(K)$ ואז ע"פ משפט V.11א, $W$ הוא תת-מרחב של $V$.

  ***3.*** להוכיח ש- $W$ הוא מרחב פתרונות של מערכת הומוגנית וע"פ דוגמה 4 עמ' 6, $W$ הוא תת-מרחב. למשל: $W = \{(a,b,c,d) \in \mathbf{C}^4 \mid a - 2b = c + d\}$ הוא מרחב הפתרונות של המשוואה $a - 2b - c - d = 0$.

**סעיף ה' ו-ו':** *סכום וסכום ישר של תת-מרחבים-* עוד מושגים בסיסיים ביותר,בקורס הזה. ראינו שבדרך כלל, האיחוד של תת-מרחבים **אינו** תת-מרחב . לכן נשאלת השאלה : מהו התת-מרחב הקטן ביותר שמכיל את $U$ ו- $W$, או במילים אחרות מהו $Sp(U \cup W)$ ? <u>התשובה היא התת-מרחב</u> $Sp(U \cup W) = U + W$ .

***הערות:***

1. הטענה הבאה מאפשרת למצוא קבוצה פורשת של הסכום של שני תת- מרחבים :

**<u>טענה</u>:**

**יהיו $U = Sp(S)$, $W = Sp(T)$ שני תת-מרחבים של מרחב לינארי $V$ , כאשר $S$, $T$ תת-קבוצות לא ריקות של $V$.**

**אז:** $U + W = Sp(S) + Sp(T) = Sp(S \cup T)$

**במילים אחרות, האיחוד של הקבוצות הפורשות של $U$ ו- $W$ הוא קבוצה פורשת של הסכום של התת- מרחבים $U+W$.**

ההוכחה מאוד פשוטה ונשאיר אותה לקורא, כתרגיל.

שימו לב, <u>באופן חריג</u>, <u>אפשר יהיה להשתמש בה במבחן מבלי להוכיח אותה מחדש</u>.

*דוגמה לשימוש בטענה זו* :

נניח ש- $U = Sp\{u_1,\dots,u_k\}$ ו- $W = Sp\{w_1,\dots,w_l\}$. אז $U + W = Sp\{u_1,\dots,u_k, w_1,\dots,w_l\}$.

2. נניח ש- $V = U \oplus W$. אז אם $v \in V$ , כך ש- $v \notin U$, זה **לא** גורר ש- $v \in W$ ! מצאו דוגמה נגדית.

3. יתכן בהחלט ש- $V = U \oplus W_1$ וגם $V = U \oplus W_2$, אך $W_1 \neq W_2$; במילים אחרות, **אין** חוק צמצום במקרה הזה. דוגמה כזו בעמ'47 סעיף ז'.

עד כאן. שוב אני מזכירה לכם שחשוב להבין היטב את **כל הדוגמאות** השונות בפרק וגם לפתור בעצכם את **השאלות** שמופיעות בספר על מנת להגיע להבנה מלאה של **החומר הבסיסי הזה**.