תדריך לימוד ליחידה 5
בקורס " אלגברה לינארית 1"- 20109

יחידה זו עוסקת בדטרמיננטות. לכל מטריצה **ריבועית** מותאם , על-ידי חוק מסוים, סקלר שנקרא **דטרמיננטה של המטריצה**. באמצעות המספר הזה, ניתן לבדוק תכונות של מטריצות, אך גם של מערכות משוואות, של וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$, ניתן לחשב שטחים ונפחים גיאומטריים ועוד. לכן המושג הזה שימושי מאוד באלגברה לינארית.

<u>סעיף א'</u>: במבוא זה שתי דוגמאות פשוטות של שימוש בדטרמיננטות; מבחינה היסטורית, הגדרת הדטרמיננטה נבעה מהסתכלות על הנוסחאות של הפתרון של מערכת משוואות לינאריות 2×2 ו- 3×3 (כאשר הפתרון יחיד) וכמובן הוכלל המושג למקרה כללי של מטריצה מסדר $n\times n$.

<u>סעיף ב'</u> : **הגדרה III.34** של הדטרמיננטה באינדוקציה : עמ' 66

משפט III.36 (עמ' 68), על פיתוח של דטרמיננטה לפי כל שורה או כל עמודה.
<u>מכך נובע מיד שהדטרמיננטה של מטריצה שמכילה שורת אפסים או עמודת אפסים שווה ל-0</u>.
(הוכחה נוספת של העובדה הזאת בעמ'80, מסקנה III.41)
שימו לב , בתחילת עמוד 69 , דוגמת הלוח שחמט **לכלל הסימנים** בפיתוח הדטרמיננטה.

<u>סעיף ג'</u> : התכונות של הדטרמיננטות **מקלות מאוד** על חישוב הדטרמיננטות.
ע"פ **משפט III.37** (עמ'73), $\det A^t = \det A$, מזה נובע שלכל משפט (על דטרמיננטות) הקשור לשורות של דטרמיננטה A יש משפט אנלוגי לגבי העמודות של A .
המשפטים **III.38** (עמ'74) **, III.40 א'** (עמ'77) **ו- III.42** (עמ' 80) קשורים להשפעה של כל סוג של **פעולה אלמנטרית** על דטרמיננטה של המטריצה.
שאלה 76 ב' (עמ'79) נובע כי $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ עבור כל מטריצה ריבועית A מסדר n ו- λ סקלר (הוכח בשאלה 76 ב', עמ' 79).

איך לחשב דטרמיננטה? שיטת חישוב מפורטת עם כל השלבים בעמ' 81 (מהשורה החמישית מסוף העמוד) ועמ' 82. **כמובן חשוב לתרגל את נושא זה ומומלץ במיוחד לפתור את כל השאלות ביחידה הזאת!**
המקרה הפרטי של דטרמיננטה של **מטריצה <u>משולשית</u>** (ולכן של **מטרצה <u>אלכסונית</u>**) מטופל **במשפט III.44** (עמ'84).

<u>סעיף ד׳</u>: שימושים חביבים של הדטרמיננטה לגיאומטריה. מעניין מאוד!

<u>סעיף ה׳</u>:

במשפט III.45 (עמ׳ 92), אחד השימושים העיקריים בדטרמיננטה: בדיקת הפיכות.

שימו לב **ללמה III.46**

מההערות (בעמ׳ 93) יוצא כי:

<u>כל אחד מהתנאים שמופיעים במשפט III.33 שקול לעובדה ש-</u> $|A| \neq 0$

<u>סעיף ו׳</u>: **משפט III.47**, משפט המכפלה, חשוב ביותר. ממנו נובעת המסקנה הבאה <u>שלא מופיעה בספר</u>:

<u>טענה</u>: אם A **מטריצה הפיכה, אז:** $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

שימו לב :

1. <u>אין משפט אנלוגי לגבי הסכום</u>, $|A+B| \neq |A| + |B|$ והשוויון חריג ביותר. במשפט III.40 ב׳ מופיע מצב, בו יש שוויון.
2. בזכות **מסקנה III.48** (עמ׳96) מספיק לבדוק את השוויון $AB = I$ כדי להסיק ש- A **ו-** B הפיכות (אין צורך בהוכחת $BA = I$).
3. **במסקנה III.48** , המטריצות B, A **ריבועיות.** (בחלק מהספרים, ההנחה הזאת אינה מופיעה, אנא תקנו אם צריך)

<u>סעיפי ז׳ ו-ח׳</u>:

- **נוסחת קרמר** היא ההכללה של הנוסחה שראינו במבוא עבור פתרון למערכת.
- **נסיים <u>בתוספת לחומר הקורס</u> הקשורה למטריצה הצמודה** (<u>לא מופיעה בספר</u>)

משפט III.51 על המטריצה הצמודה.

ביחידת הלימוד 5 ,שיעור III , לאחר הגדרת המטריצה הצמודה , מופיעה בעמ׳ 102 המסקנה הבאה:

<u>מסקנה</u>: אם A מטריצה רגולרית, אז מתקיים $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adjA$ (1).

לאחר הצבה של (1) בשוויון $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ והכפלת השיווין שהתקבל ב- $|A|$, יוצא:

$$A(adjA) = (adjA)A = |A| I \quad (2).$$

מסתבר שהשוויון (2) נכון עבור **כל** מטריצה, רגולרית או סינגולרית. נוכיח את המשפט הזה.

<u>משפט III.51</u>: לכל מטריצה A מתקיים $A(adjA) = (adjA)A = |A| I$.

הוכחה :

א. תהי $A=(a_{ij})$, $adjA=(b_{ij})$. נסמן $C=(adjA)A=(c_{ij})$. נוכיח $(adjA)A=|A|I$.

נוכיח ראשית כי לכל i מתקיים $c_{ii}=|A|$.

c_{ii} שווה למכפלת השורה ה-i של $adjA$ בעמודה ה-i של A , כלומר

$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}M_{ki}^{A}a_{ki}=|A|$, שכן זה אינו אלא פיתוח $|A|$ לפי העמודה ה-i.

נוכיח עתה שאם $i\neq j$, אז $c_{ij}=0$.

c_{ij} שווה למכפלת השורה ה-i של $adjA$ בעמודה ה- j של A כלומר

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(-1)^{i+k}M_{ki}^{A}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{kj}M_{ki}^{A}$$

בסכום האחרון איברי העמודה ה-i של A אינם משתתפים. לכן אילו במקום המטריצה A היינו לוקחים את המטריצה המתקבלת מ-A על ידי מחיקת העמודה ה-i וכתיבת העמודה ה-j במקומה, הסכום לא היה משתנה. לכן, אם $D=(d_{ij})$ היא המטריצה המתקבלת מ-A בצורה הנ"ל, אז :

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}d_{kj}M_{ki}^{D}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}d_{ki}M_{ki}^{D}$$

(כי $d_{ki}=d_{kj}=a_{kj}$ לכל $1\le k\le n$).

אולם בשוויון הימני רשום בדיוק פיתוח הדטרמיננטה של D לפי העמודה ה- i , ומכיוון שב-D יש שתי שורות שוות – הדטרמיננטה היא 0. לכן $c_{ij}=|D|=0$.

קיבלנו , אפוא , כי $|A|I=\begin{pmatrix}|A| & 0 & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & |A| & 0 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & |A|\end{pmatrix}=(adjA)A$.

ב. כדי להוכיח ש- $A(adjA)=|A|I$, נפעיל את חלק א' ל- A^t :

$(adjA^t)A^t=(adjA)^tA^t=(A(adjA))^t=(|A|I)^t=|A|I$.

(השתמשנו בשוויון $adjA^t=(adjA)^t$, שנשאיר לך להוכיח)

ולכן $A(adjA)=(|A|I)^t=|A|I$.

זהו. בחוברת לתרגול עצמי(עמ' 29-35) וגם בבחינות באתר, תמצאו שאלות נוספות לתרגול.