

## מטלה - חלוקת חפצים בדידים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (\*) מזכות בניקוד כפול.

### שאלה 1: פרדוקס אלאבאמה

אלגוריתמים לחלוקת מושבים משמשים גם לחלוקת המושבים בקונגרס בין המדינות בארה"ב. חלוקת-המושבים נקבעת באופן יחסי לאוכלוסיה, ומתעדכנת לפי מפקד שנערך כל 10 שנים. אחרי המפקד של 1880, רצו להגדיל את מספר-המושבים בקונגרס. התברר, שאם מספר המושבים בקונגרס יהיה 299, אז מדינת אלאבאמה תקבל 8 מושבים; אבל אם מספר המושבים יהיה 300, אז אלאבאמה תקבל רק 7 מושבים. מצב זה נקרא פרדוקס אלאבאמה.

א. הראו דוגמה לפרדוקס אלאבאמה כאשר משתמשים בשיטת המילטון.

ב. הוכיחו שפרדוקס אלאבאמה לא קורה כאשר משתמשים בשיטת-מחלק כלשהי.

### \* שאלה 2: חלוקת המושבים בכנסת

מצאו באינטרנט את תוצאות הבחירות האחרונות לכנסת. הפעילו את שיטות אדאמס, וובסטר וג'פרסון על תוצאות הבחירות לכנסת, בשני מצבים:

• א. בלי אחוז חסימה;

• ב. עם אחוז החסימה הנוכחי.

השוו את התוצאות להרכב הכנסת כיום. אילו מפלגות היו מפסידות ואילו מפלגות היו מרוויחות מהשינוי?

### שאלה 3: איזו שיטה טובה יותר למפלגות קטנות?

נתונות שתי שיטות-מחלק עם פוקנציות-מחלק  $f, g$ .

נתון, שלכל  $a, b$  כאשר  $a < b$ , מתקיים:

$$f(a)/f(b) < g(a)/g(b).$$

הוכיחו, ששיטה  $f$  טובה למפלגות קטנות לפחות כמו שיטה  $g$ .

(כלומר: אם מפלגה א קטנה יותר ממפלגה ב, אז בחלוקת מספר מושבים קבוע בין מפלגה א למפלגה ב, מפלגה א תקבל בשיטה  $f$  לפחות אותו מספר מושבים כמו שהיתה מקבלת בשיטה  $g$ ).

## שאלה 4: זיהוי הטיות

כזכור, שיטת הנטינגטון-היל היא שיטת-מחלק עם פונציית המחלק הבאה:

$$f(s) = \sqrt{s(s+1)}$$

זו השיטה המקובלת בארה"ב לחלוקת מושבים בקונגרס בין המדינות. בדקו, ע"י מספר דוגמאות, האם בשיטה הזו ישנה הטיה לטובת מפלגות קטנות או גדולות? ("הטיה" הכוונה שמעגלים למעלה את מספר המושבים של המפלגה הגדולה/הקטנה יותר, גם כאשר השארית שלה קטנה מ-0.5).

## \* שאלה 5: גבול עליון ותחתון

הגבול העליון של מפלגה הוא מספר המושבים המגיע לה מעוגל כלפי מעלה; הגבול התחתון של מפלגה הוא מספר המושבים המגיע לה מעוגל כלפי מטה.

א. הראו דוגמה שבה שיטת ג'פרסון נותנת למפלגה מסויימת מעל הגבול העליון שלה (דרושות שלוש מפלגות לפחות).

ב. הוכיחו שזה לא יכול לקרות עם שיטת אדאמס – כל מפלגה מקבלת לכל היותר את הגבול העליון שלה.

ג. הראו דוגמה שבה שיטת אדאמס נותנת למפלגה מסויימת מתחת לגבול התחתון שלה (דרושות שלוש מפלגות לפחות).

ד. הוכיחו שזה לא יכול לקרות עם שיטת ג'פרסון – כל מפלגה מקבלת לפחות את הגבול התחתון שלה.