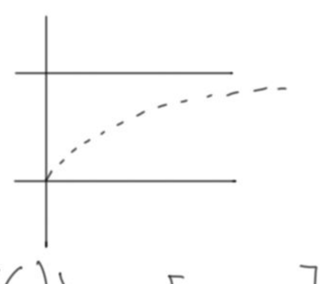
24.05.21

тема: Признаки сходимости числовых рядов

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0$, $\left(-\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \leq 0\right)$

Теорема: $\sum a_n, a_n \geq 0$ сходится $\Leftrightarrow$ S_n ограничена сверху

▶ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ ↗ $S_n \geq 0$



$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup\{S_n\}$ $\exists \sup$

$\{$либо ∞ либо $\sup\}$ ◀

Теорема $f(x) \geq 0$, $f(x)\downarrow$ на $[p; +\infty]$, тогда

$\int_p^{+\infty} f(x)dx$ сходится или расходится одновременно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$

▶ Возьмём $n \leq x \leq n-1$

$$\sum_{n=p}^{p+M} f_n = \int_n^{n+1} f(n)dx \geq \int f(x)dx \geq f(n+1)dx = \sum_{n=p}^{p+m} f(n+1)$$

$n \quad n+1 \quad n+2$

$$\sum_{n=p}^{p+m} \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+2} f(x)dx = \int_p^{p+m} f(x)dx$$

$p \quad p+1 \quad p+2 \quad p+m$

$$S(p, p+m) \geq \int_p^{p+m} f(x)dx \geq S(p, p+m)$$

∞ число $+\infty$ число

$\sum a_n$ расх. $\Rightarrow \int$ расх

$\sum a_n$ сх. $\Rightarrow \int$ сх. и т.д. ◀

По этому признаку можно исследовать

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

$\begin{cases} \text{сх}, \alpha > 1 \\ \text{расх}, \alpha \leq 1 \end{cases}$ ⟵ сх.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расх. $\alpha = \frac{1}{2}$

$\sum \frac{1}{n}$ расх.

$\sum \frac{1}{n^2}$ сх.

Т. Признак $0 \leq a \leq b$ * из сх-ой $\sum b_n \Rightarrow$ сх-ть $\sum a_n$

из расх. $\sum a_n \Rightarrow$ расх $\sum b_n$

▶ частн. суммы $\sum b_n$ огр. (сх. $\sum b_n$) $\Rightarrow$ огр. $\sum a_n \Rightarrow \sum a_n$ сх.

$\sum a_n$ расх $\Rightarrow$ частн. сумма $\sum a_n$ неогр. $\Rightarrow \sum b_n$ неогр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow b_n$ расх.

Если заменить * на $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то фор. не изменится

$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}$

$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \quad \ldots\ldots \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$

умножим

$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_1}$

из $(*) \Rightarrow (2) \Rightarrow$ пр. ср. работает ◀

Теорема (признак сравнения в предельной форме): $a_n \geq 0, b_n \geq 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, k \neq 0, \infty$ $\quad \sum a_n \sim \sum b_n$ в вопр. сх.

▶ $\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$ с некоторого номера n

$b_n > 0 \qquad \varepsilon = \frac{k}{2}$

$k > 0$

$-\frac{k}{2} < a_n \leq \frac{3}{2}kb_n$ умножение на константу

$\frac{kb_n}{2} < a_n < \frac{3}{2}kb_n$ на сходимость ряда не влияет ◀

Пр:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+7}$, $\quad \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+7} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} \sim \frac{1}{n^{1,5}}$ $\quad 1,5 > 1 \Rightarrow$ сх.

$\sum \frac{\sqrt{n+2}}{n}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ $0,5 < 1 \Rightarrow$ расх.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\frac{1}{n^3}$ $\quad tg\alpha \sim \alpha$ (б.м) $\quad tg\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}$ $\quad \cos\frac{1}{n^2} \sim 1$

$\cos 0 = 1$

необх. признак не влиет

Теорема (признак Деламбера в обычной форме): 1) Если $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, q < 1$, то $\sum a_n$ сх.

2) Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то $\sum a_n$ расх.

▶ сравнение с геометрической прогрессией

$b_n = q^n$

$a_n = q^n \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q \quad \sum q^n$ сх-ся, $q < 1$

2) $a_{n+1} \geq a_n \geq a_1$, $\quad a_1 \sum$ расх $\Rightarrow a_n$ расх.

$a_n \geq 1 \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ◀

Теорема (признак Деламбера в предельной форме):

$a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $q < 1 \Rightarrow$ сх

$q > 1 \Rightarrow$ расх.

$q = 1$? вопрос открытый

▶ $q < 1$ — $q \quad q+1$ некоторые номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < a_1 < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сх.

$q > 1 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > a_1 > 1$ обычный признак Деламбера

▶ повторяет признак Деламбера ◀

Ряды с произвольными слагаемыми (по знакам)

$\sum |a_n|$ сх-ся, то ряд сх-ся абсолютно

$\sum a_n$ сх-ся, но не абсолютно, то ряд сх-ся условно

Теорема (Если ряд сходится абсолютно $\Rightarrow$ он сх-ся

▶ $\lim S_n = S$ число. Критерий $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N, \forall p \in N$

$|S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ сх $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

$\left|\sum\limits_{k=k+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$

$\sum |a_k|$ вып. кр. Коши $\Rightarrow \sum |a_k| < \varepsilon \Rightarrow |\sum a_k| < \varepsilon \Rightarrow$ вып. кр. Коши $\sum a_k \Rightarrow \sum a_k$

Знакочередующиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, b_n > 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$ необх. признак $\lim |a_n| \neq 0$

то ряд сх.

Опр.

Знакочередующийся ряд, у которого слагаемые по модулю монотонно убывают к нулю называют рядом Лейбница

$b_n \geq b_{n+1} \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \quad b_n = |a_n|$

Теорема (признак Лейбница): Всякий ряд Лейбница сх-ся и его остаток по модулю не превосходит первого отбрасываемого слагаемое

$\sum \frac{(-1)^n(n+2)}{n+5}$ $\quad \lim |a_n| \neq 0$

$\lim |a_n| = 1$ ряд сх

$\sum (-1)^n \underbrace{tg\frac{1}{n}}_{\to 0}$ сх-ся $\quad \sum (-1)^n \cos\frac{1}{n}$ расх

▶ p = четное $\overset{\geq 0}{}$ $\quad b_n - b_{n+1} + b_{n+2} - b_{n+3} + \ldots + b_{n+p-1} - b_{n+p} = b_n - (b_{n+1} - b_{n+2}) \ldots (+\,-) - b_{n+p} \leq b_n$

p нечет $\quad 0 \leq b_n - (b_{n+1} - b_{n+2}) \ldots (b_{n+p-1} - b_{n+p}) \leq b_n$

$\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} (-1)^k b_k\right| \leq b_k \qquad p \to \left|\underbrace{\sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^k b_k}_{\text{остаток}}\right| \leq b_n$

$b_n \to 0$

ост. $\to 0$

расх-ся ◀