Тема 6

§1 Решение нелинейного уравнения $f(x)=0$

Требуется найти все или некоторые корни уравнения

$$f(x)=0$$

- *<u>Исследование характера корней:</u> расположения, количества, кратности корней;*
- *<u>Отделение корней:</u> выделение областей, в каждой из которых находится единственный корень;*
- *<u>Уточнение корней:</u> вычисление интересующих корней с наперед заданной точностью.*

построение таблицы f(x)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
+	-	+	+	+		-	-

для многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

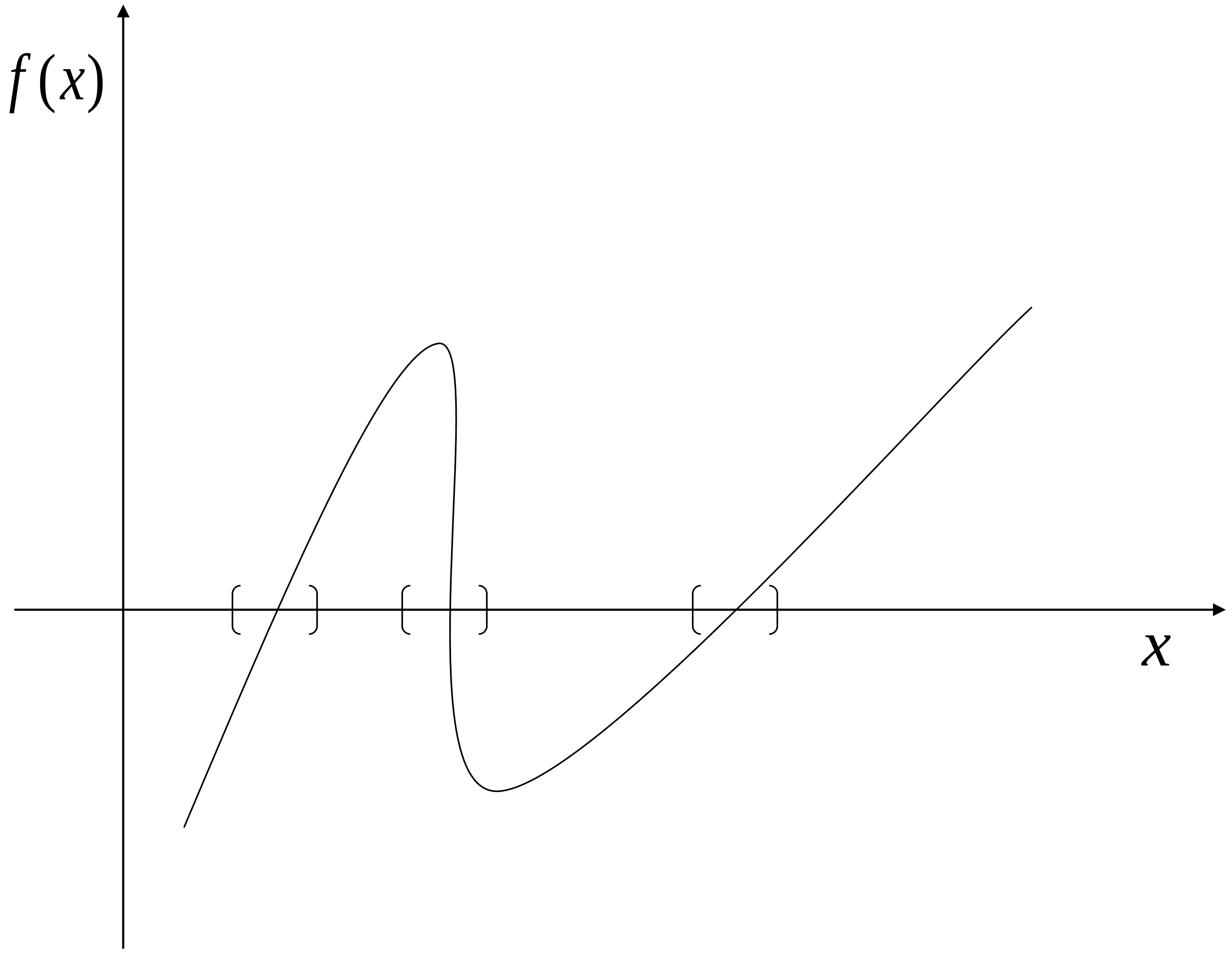
если выполнены неравенства

$$f(x_0) > 0,\ f'(x_0) > 0,\ f''(x_0) > 0, \ldots,\ f^{(m)}(x_0) > 0,$$

то положительные корни не превосходят x_0

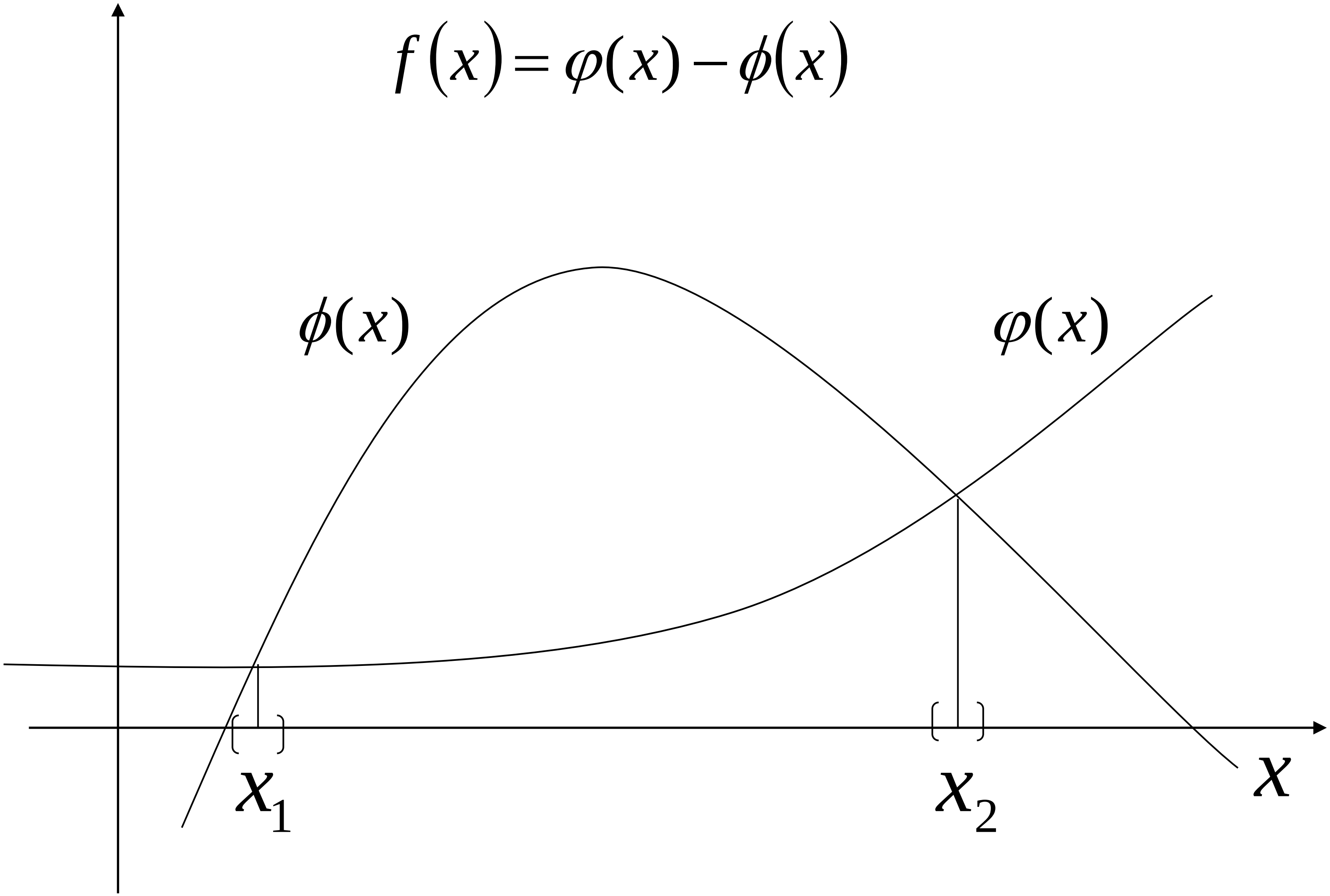
действительно:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$



f(x)
x

$$f(x) = \varphi(x) - \phi(x)$$



1. Дихотомия

Метод деления пополам

Метод бисекции

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, \to x^*, \left| x_m - x_{m-1} \right| < \varepsilon$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x - x*)^k}$$

2. Метод простой итерации

$$x = \varphi(x)$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2,\ldots$$

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m, \to x^*$$

Исследуем условия сходимости:

$$x^* = \varphi(x^*)$$

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_n - x^*)$$

$$|\varphi'(x)| \le q < 1$$

$$|x_{n+1} - x^*| \le q|x_n - x^*|$$

Пример $x^2 = a$

$$x = \frac{a}{x}, \varphi(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$$

метод не сходится вообще $\left|\varphi'\left(x^*\right)\right| = \left|-\frac{a}{{x^*}^2}\right| = 1$

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

метод сходится при любом начальном приближении

$$\varphi'\left(x^*\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = 0$$

Условие окончания итерационного цикла

если $\varphi'(x) < 0$ *приближения то слева, то справа от корня*

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_n - x^*)$$

тогда $\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$

если $\varphi'(x) > 0$ *приближения с одной стороны от корня*

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le q\left|x_n - x_{n-1}\right| \quad \Longrightarrow \quad q \approx \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}\right|$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{1-q}\right| \cong \left|\frac{(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1})}{2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}}\right| < \varepsilon$$

3. Метод Ньютона

Метод касательных

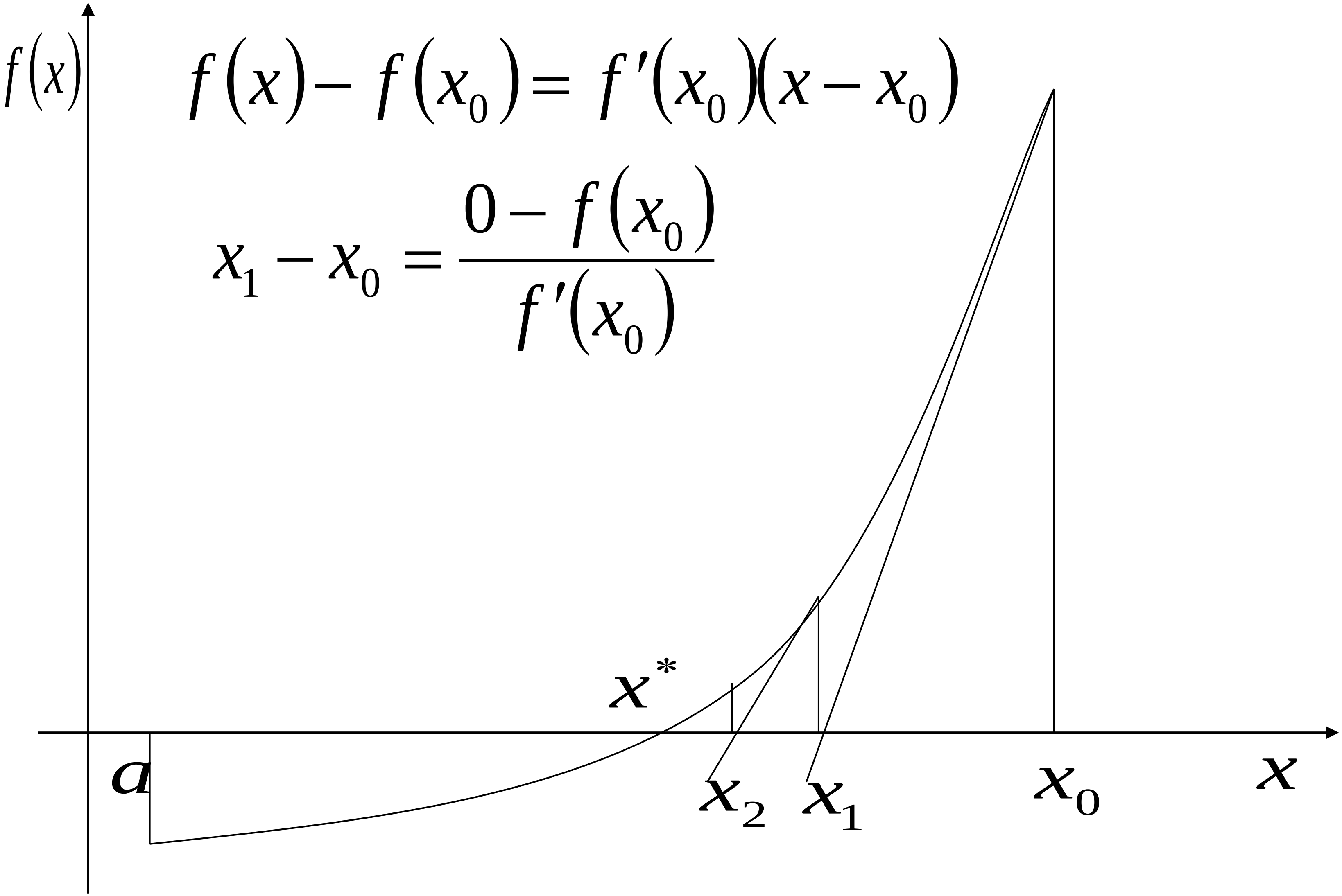
Метод линеаризации

$$f\left(x^*\right) = f\left(x_n\right) + f'(\xi)\left(x^* - x_n\right)$$

$$f'(\xi) \approx f'\left(x_n\right) \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_1 - x_0 = \frac{0 - f(x_0)}{f'(x_0)}$$



сходимость метода Ньютона

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \varphi'(x) = 1 - 1 + \boxed{\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}}$$

$$\left|\varphi'\left(x^*\right)\right| = 0$$

скорость сходимости метода Ньютона

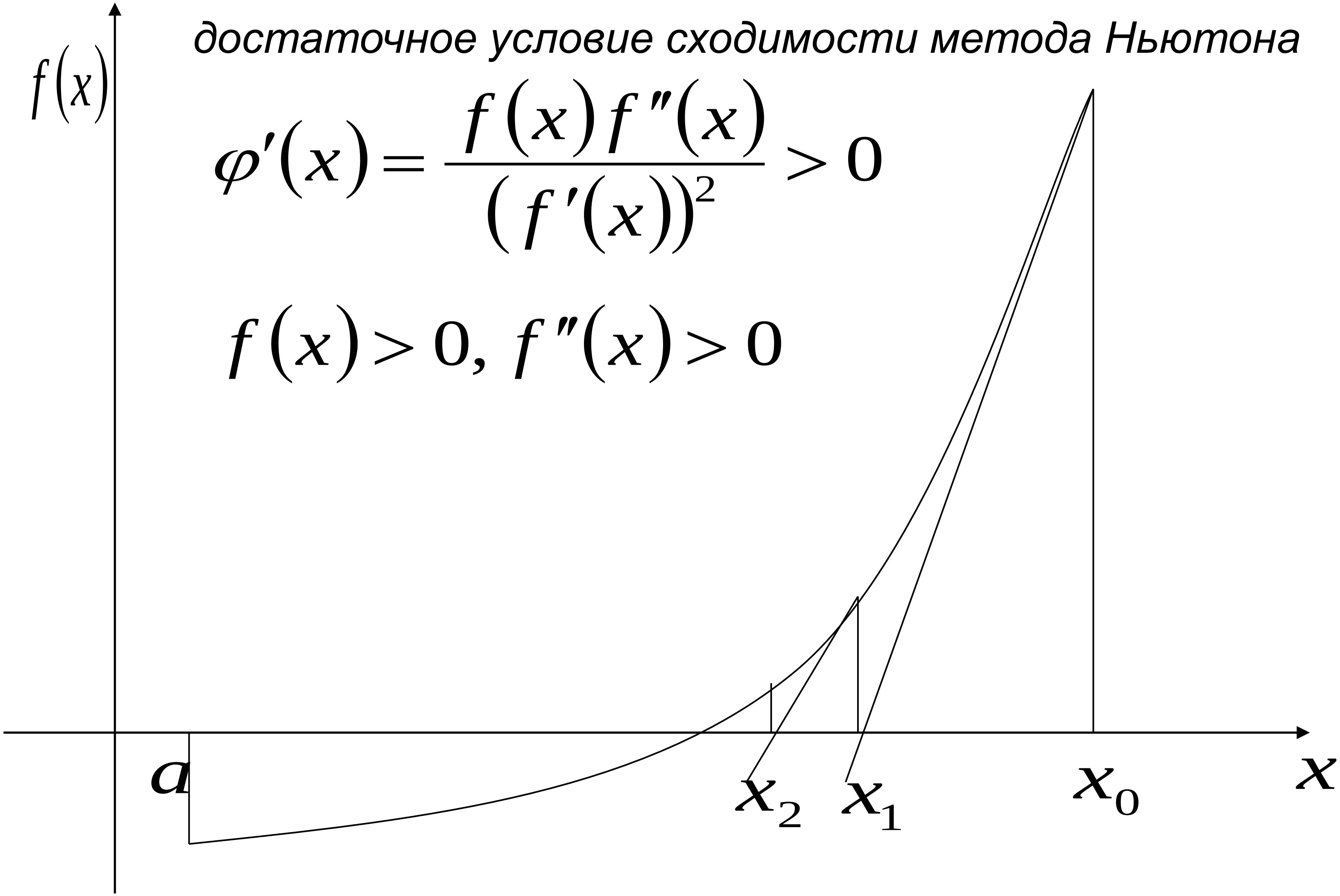
$$x_{n+1} - x^* = \varphi\left(x_n\right) - x^* =$$

$$= \cancel{\varphi\left(x^*\right)} + \cancel{\varphi'\left(x^*\right)}\left(x_n - x^*\right) + \frac{\varphi''\left(x^*\right)}{2}\left(x_n - x^*\right)^2 + \ldots - \cancel{x^*} =$$

достаточное условие сходимости метода Ньютона

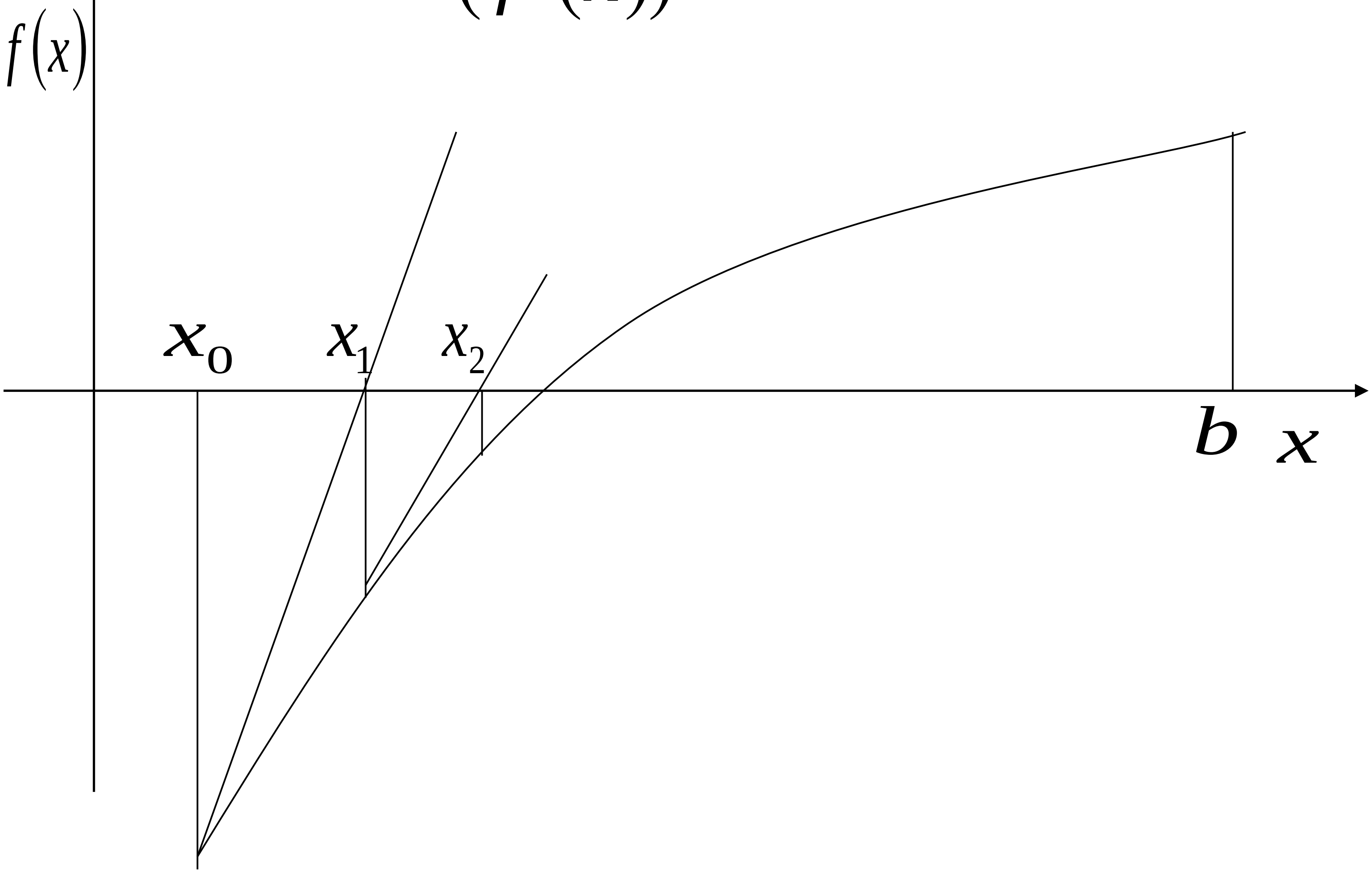
$$\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}>0$$

$$f(x)>0,\ f''(x)>0$$

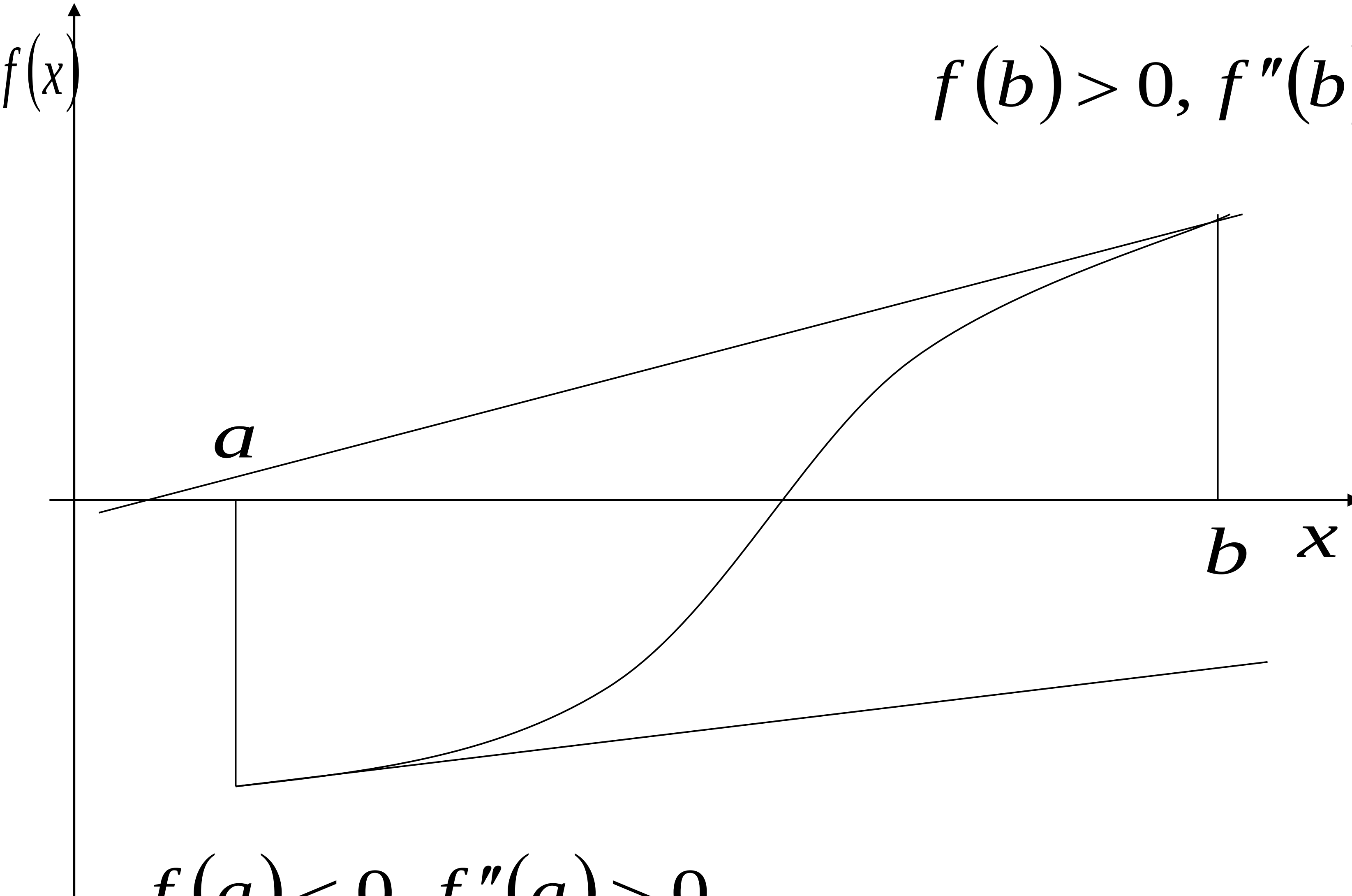


$$\varphi'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

$$f(x) < 0,\ f''(x) < 0$$



$$f(b) > 0,\ f''(b) < 0$$



$$f(a) < 0,\ f''(a) > 0$$

4. Модифицированный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n = 0,1,\ldots}$$

Если

$$f = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x) \right)^T$$

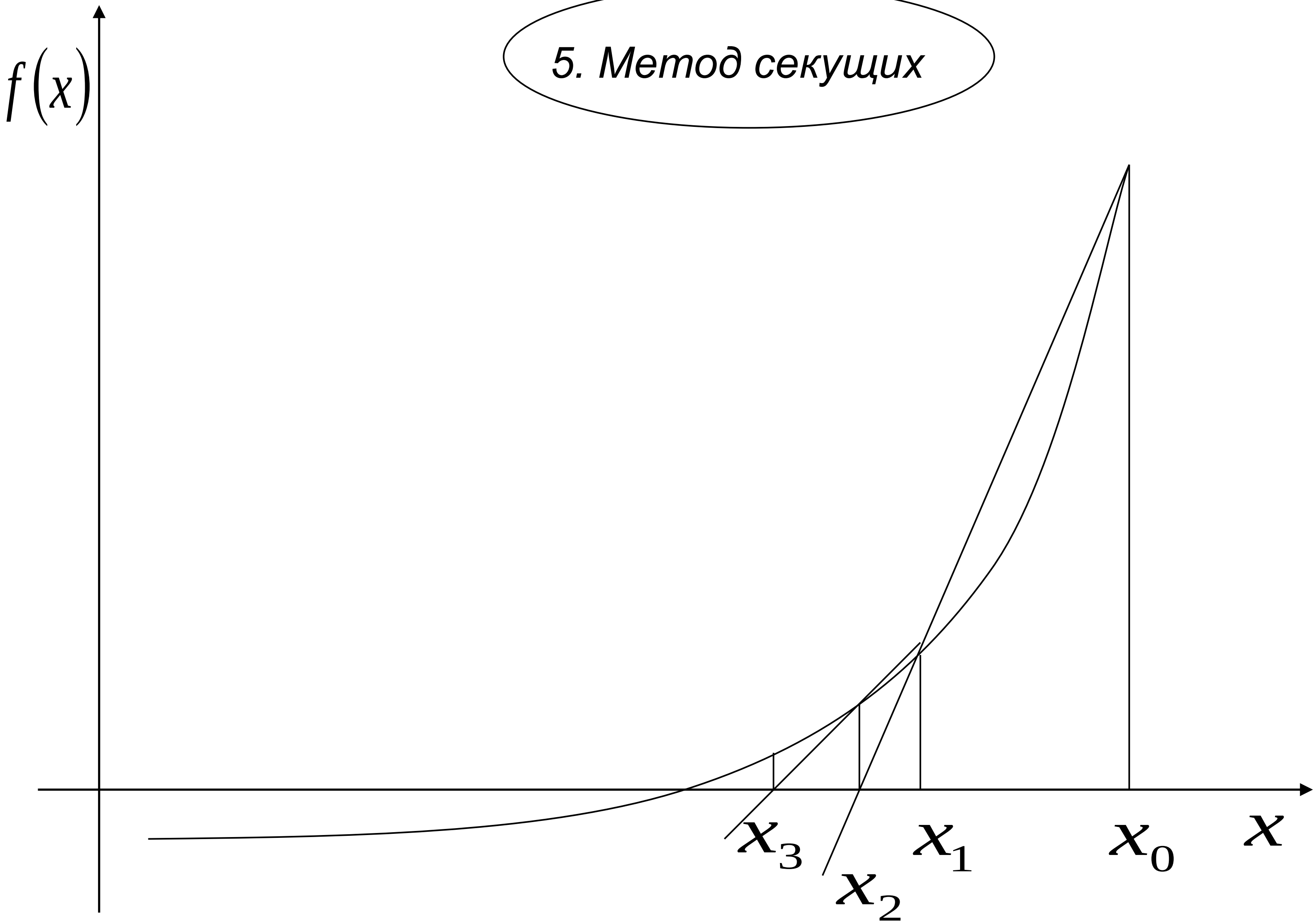
тогда

$$x_{n+1} = x_n - \left[f'(x_n) \right]^{-1} f(x_n)$$

для уменьшения количества арифметических операций на одном шаге итерации используется модификация

$$x_{n+1} = x_n - \left[f'(x_0) \right]^{-1} f(x_n)$$

5. Метод секущих



Уравнение прямой $$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{f\left(x_0\right)-f\left(x_1\right)}$$

$$x_2-x_1=\left(x_0-x_1\right)\frac{0-f\left(x_1\right)}{f\left(x_0\right)-f\left(x_1\right)}$$

$$x_{n+1}=x_n+f\left(x_n\right)\frac{x_n-x_{n-1}}{f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_n\right)}$$

<u>преимущества</u> метода секущих: простота реализации

нет производных

<u>недостатки</u> метода секущих: неизбежные погрешности, возникающие при вычитании близких чисел в знаменателе

сходимость не более, чем линейная

$$\varphi(x) = x + f(x)\frac{x - x_{n-1}}{f(x_{n-1}) - f(x)} = \frac{f(x_{n-1})x - f(x)x_{n-1}}{f(x_{n-1}) - f(x)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{(x_{n-1}f' - f(x_{n-1}))(f - f(x_{n-1})) - f'(x_{n-1}f - f(x_{n-1})x)}{(f - f(x_{n-1}))^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x_{n-1}ff'} - f(x_{n-1})f - x_{n-1}f(x_{n-1})f' + f^2(x_{n-1}) - \cancel{x_{n-1}ff'} + f(x_{n-1})xf'}{(f - f(x_{n-1}))^2}$$

$$\varphi' = \frac{f(x_{n-1}) - f + f'(x - x_{n-1})}{(f - f(x_{n-1}))^2} \quad \varphi'(x^*) = \frac{f(x_{n-1}) + f'(x^*)(x^* - x_{n-1})}{f(x_{n-1})}$$

$$\varphi'\left(x^*\right)=\frac{f\left(x_{n-1}\right)+f'\left(x^*\right)\left(x^*-x_{n-1}\right)}{f\left(x_{n-1}\right)}$$

но с другой стороны, по формуле Тейлора

$$f\left(x_{n-1}\right)=\cancel{f\left(x^*\right)}+f'\left(x^*\right)\left(x_{n-1}-x^*\right)+\frac{f''\left(\xi\right)}{2}\left(x_{n-1}-x^*\right)^2$$

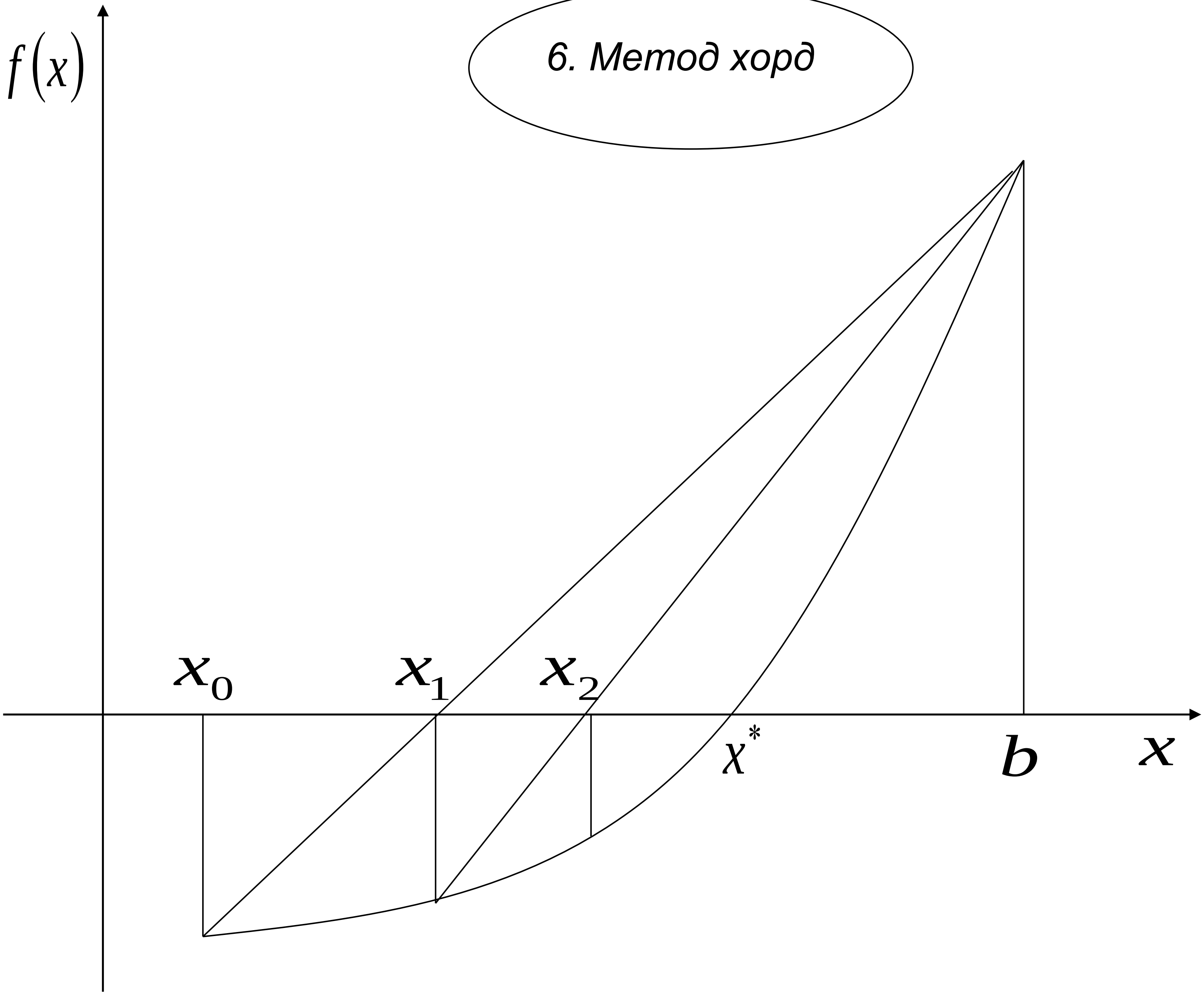
числитель равен

$$f\left(x_{n-1}\right)-f'\left(x^*\right)\left(x_{n-1}-x^*\right)=\frac{f''\left(\xi\right)}{2}\left(x_{n-1}-x^*\right)^2$$

следовательно

$$\varphi'\left(x^*\right)=\frac{f''\left(\xi\right)\left(x^*-x_{n-1}\right)^2}{2f\left(x_{n-1}\right)}$$

6. Метод хорд



Уравнение хорды

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

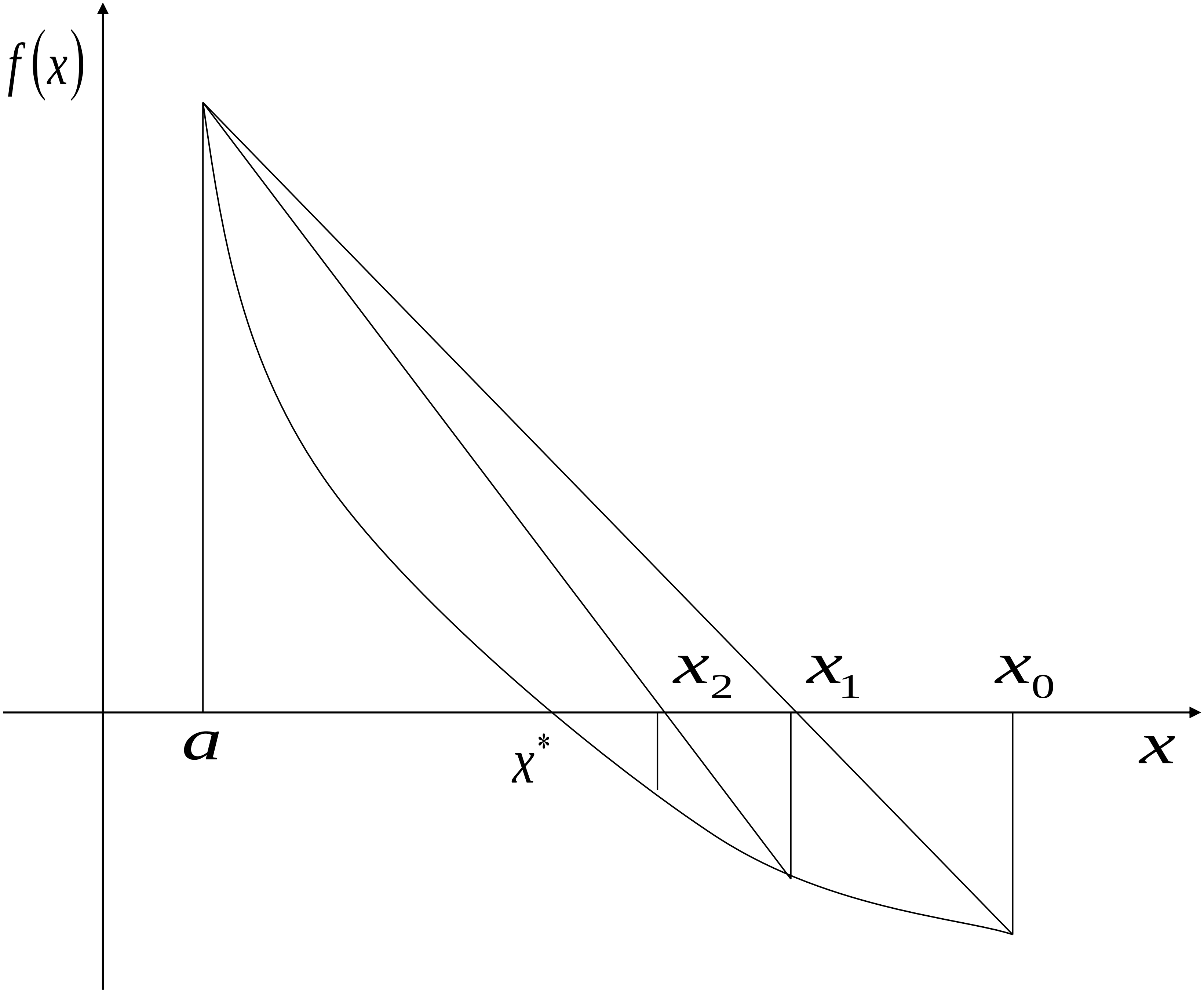
$$x_1-a=(b-a)\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

если неподвижный правый конец отрезка: ***в***

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} \qquad x_0=a, n=1,2,...$$

получаем ограниченную сверху монотонно возрастающую последовательность приближений

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x^*<b$$



f(x)
x₂
x₁
x₀
a
x*
x

если неподвижный левый конец отрезка: ***a***

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \qquad x_0 = b, n = 1,2,...$$

получаем ограниченную снизу монотонно убывающую последовательность приближений

$$a < x^* < ... < x_2 < x_1 < x_0 = b$$

возможны варианты:

1. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

2. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

3. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

4. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

<u>неподвижный конец</u> отрезка для метода хорд: для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной

$$f(x)f''(x) > 0$$

Другие методы решения нелинейного уравнения

Метод Шредера:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) f'(x_n)}{\left(f'(x_n)\right)^2 - f(x_n) f''(x_n)}$$

<u>Классификация методов решения</u>

1. Метод простой итерации, послед. приближений $k=1$
2. Метод секущих $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.61...$
3. Метод Ньютона $k=2$
4. Метод Галлея $k=3$

Найти самостоятельно

5. Метод Чебышева $k = n \in N$

Метод Чебышёва построения итерационных процессов высшего порядка

Предположим, что существует функция g(u), обратная к f(u). При этом u= g[f(u)], U = g(0).

Пусть, кроме того, f(u) непрерывна и имеет необходимое число непрерывных производных,

Обратная функция имеет такое же количество непрерывных производных, как и f(u).

Разложим функцию g(f[u]) = g(h) в ряд Тейлора в окрестности корня - точки w = f(u)

$$g(h) \approx g(w) + \sum_{i=1}^{n} \frac{g^{(i)}(w)}{i!}(h-w)^i.$$

Тогда, учитывая, что u = g[f(u)], w = f(u), h = f(v), получим

$$g(0) = U \approx u + \sum_{i=1}^{n} \frac{g^i[f(u)]}{i!}[-f(u)]^i + \dots.$$

Можно показать, что итерационный метод

$$u_{k+1} = u_k + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{g^{(i)}[f(u_k)]}{i!}[f(u_k)]^i, u^0 = a$$

имеет порядок сходимости n + 1. Для вычисления производных обратной функции u = g[f(u)] воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$1 = g^{(1)}[f(u)] \cdot f^{(1)}(u),$$

$$0 = g^{(2)}[f(u)] \cdot [f^{(1)}(u)]^2 + g^{(1)}[f(u)] \cdot f^{(2)}_{(u)},$$

$$0 = g^{(3)}[f(u)] \cdot [f^{(1)}_{(u)}]^3 + 3g^{(2)}[f(u)] \cdot f^{(2)}_{(u)} \cdot f^{(1)}_{(u)} + g^{(1)}[f(u)] \cdot f^{(3)}_{(u)},$$

$$\dots$$

метод секущих – установление факта о сверхлинейной сходимости метода

Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). – М.: ОНИКС 21 век, 2005.

метод Галлея , методы Чебышева, метод Шредера и другие

энциклопедия математических формул и математических достижений в мире

автор Вольфрам (Wolfram)

Mathworld

СКМ «Математика»

Продолжение рассмотрения метода Ньютона

≈ 300 лет назад Токакадзу ║ с Ньютоном открыл метод

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n = 0,1,...$$

1. *если x – число, f - функция*

2. *если x – функция, f - оператор*

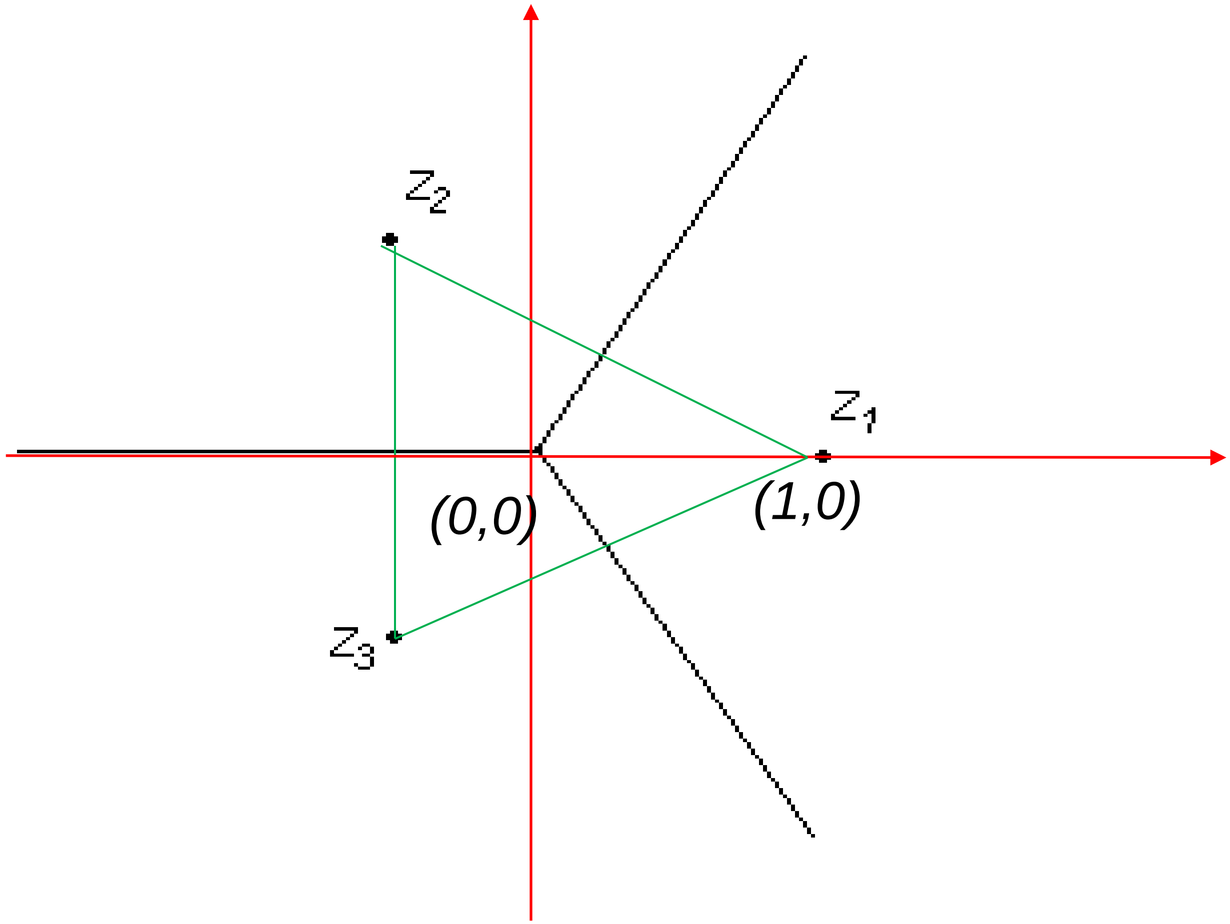
3. *если x – последовательность, f - оператор*

4. *если x – матрица, f - преобразование*

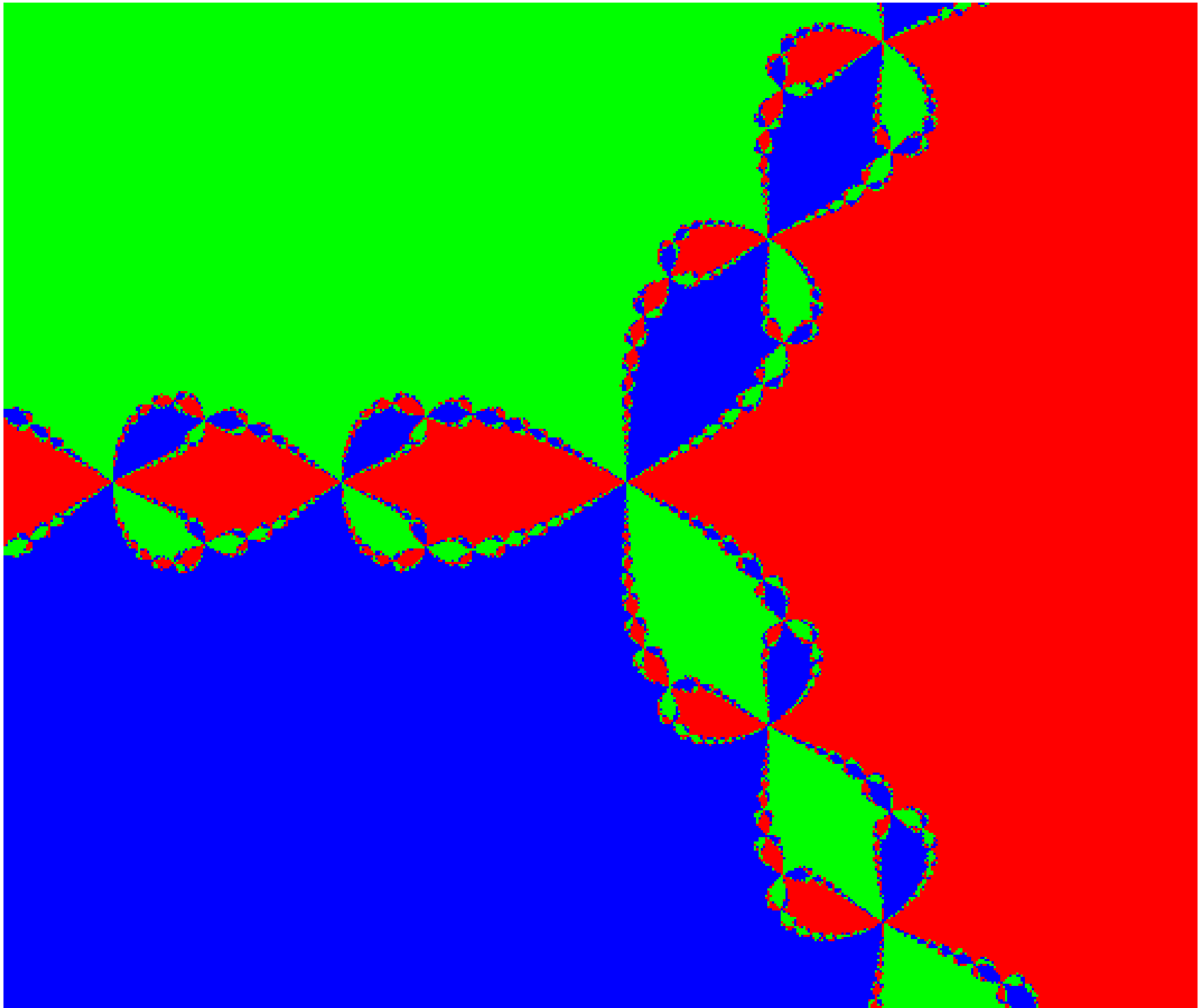
поиск методом Ньютона корней многочлена

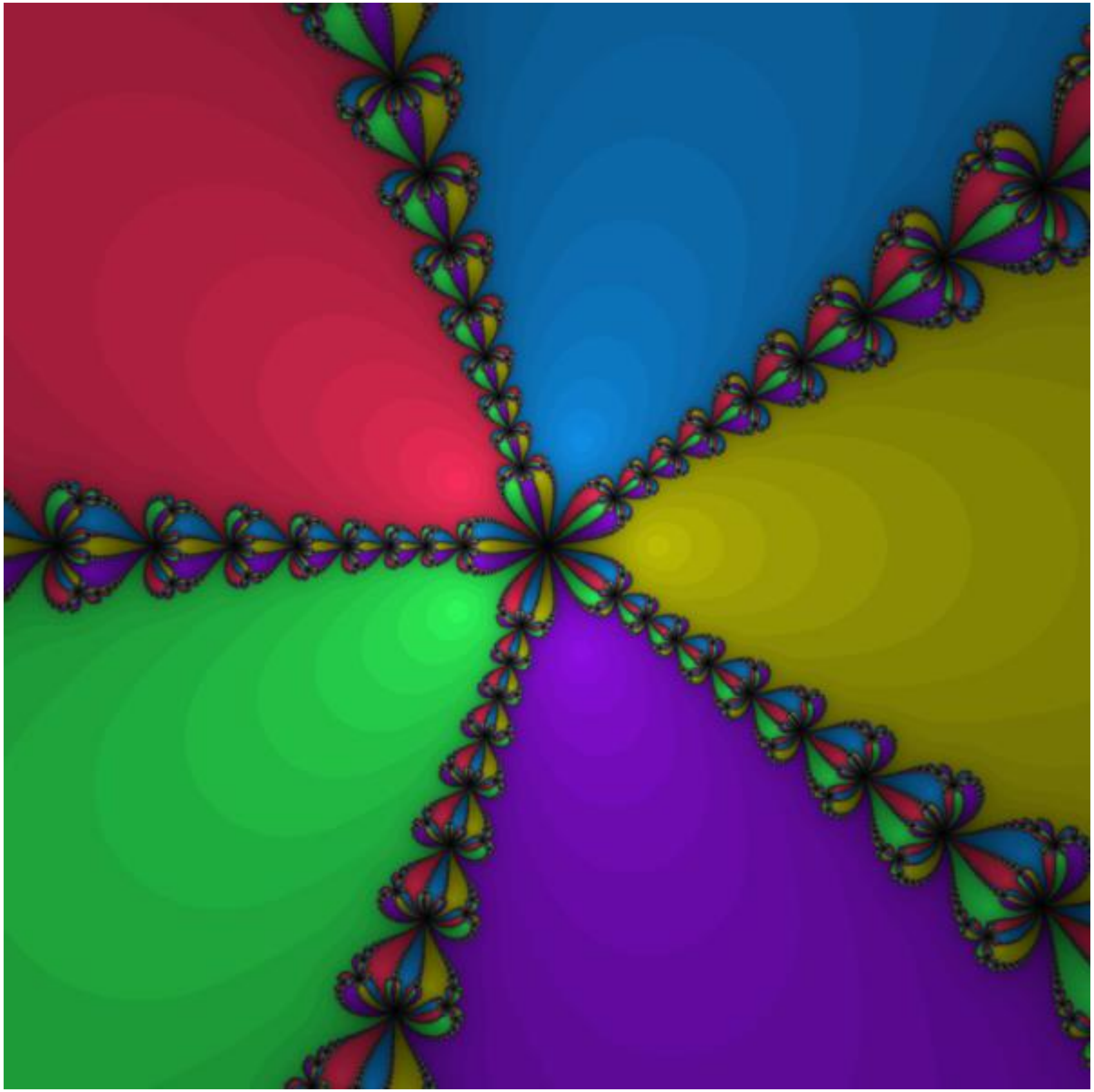
$$f(z) = (z^3 - 1)$$

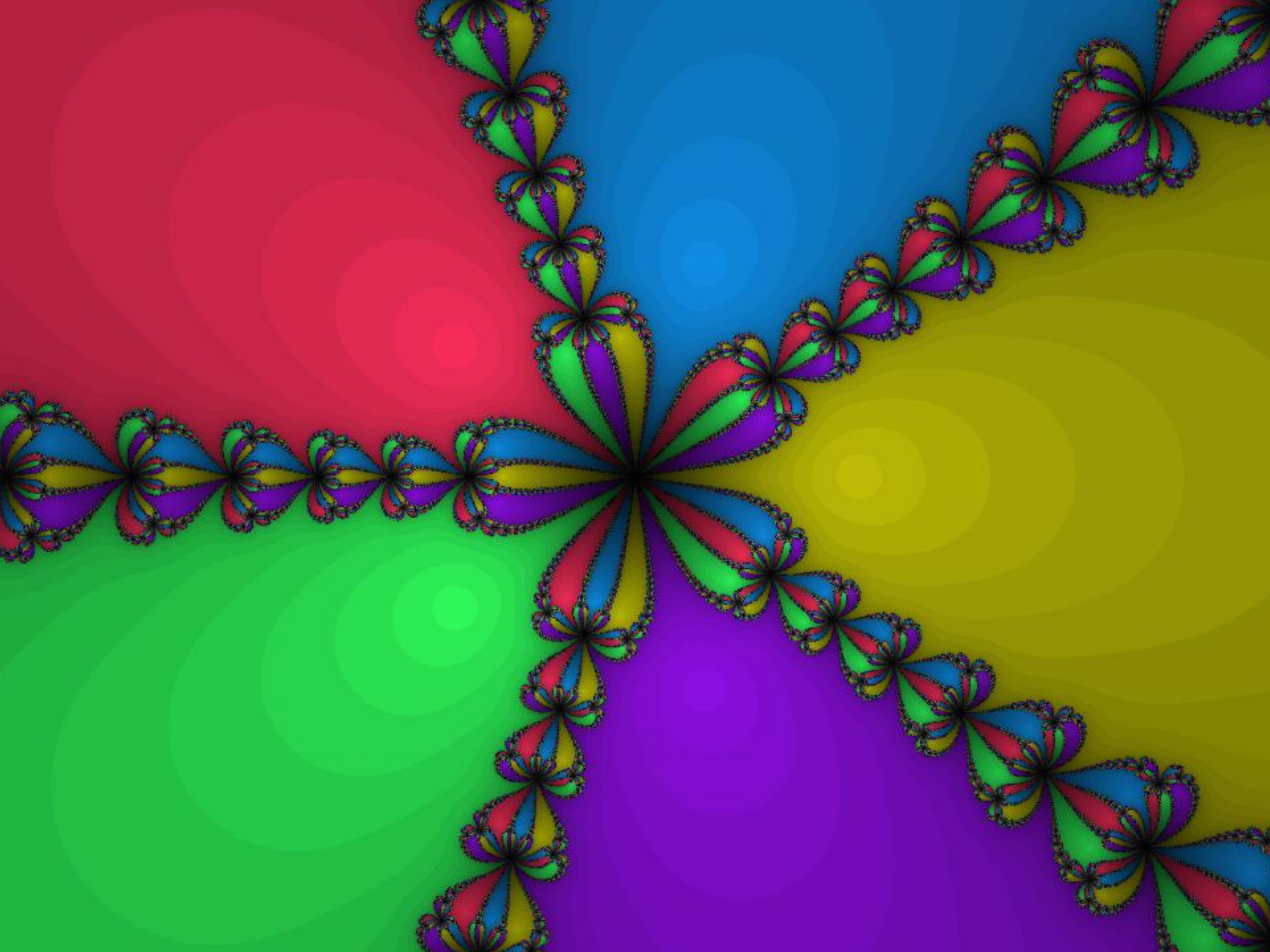
ω1 = 1, ω2 = -1/2 + i√3/2 и ω3 = -1/2 - i√3/2



фрактал - бассейн Ньютона

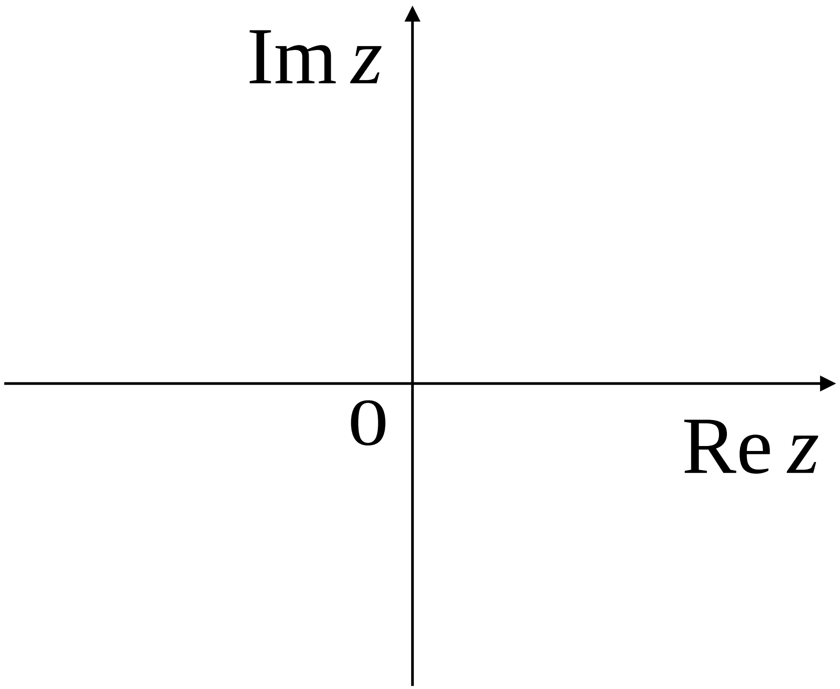


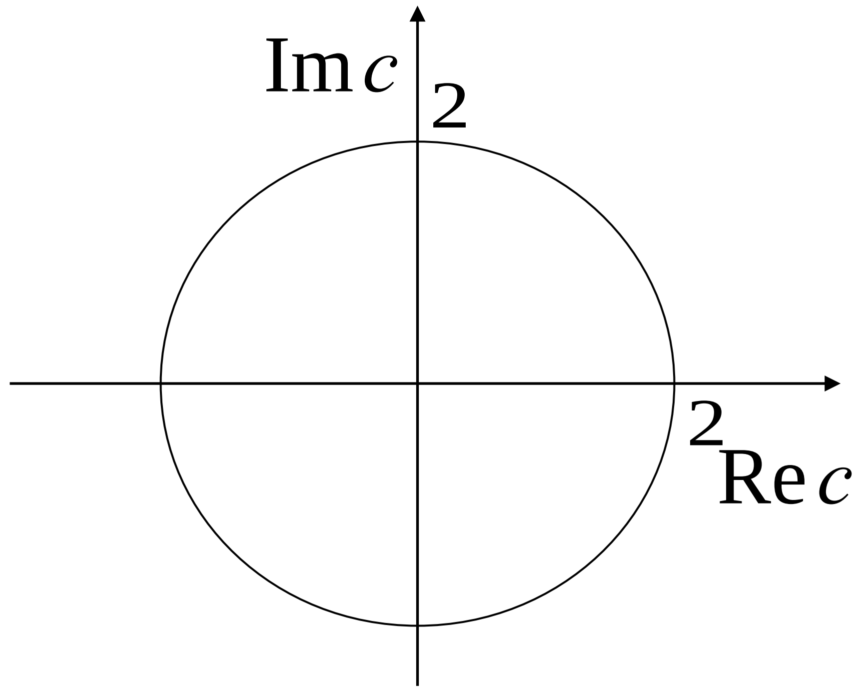




итерационный процесс в комплексной плоскости

$$z_{n+1} = z_n^2 - c \qquad z_0 = 0$$





(Mandelbrot) Фрактальная геометрия природы. 1977.

фрактал – множество Мандельброта – это геометрия итерационного процесса