№1

Построить шары $B[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если для $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3$ нормы определены следующим образом:

д) $\|x\| = \sqrt{4|\xi_1|^2 + \frac{1}{9}|\xi_2|^2 + |\xi_3|^2}$.

$\exists\, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \sqrt{4|\varepsilon_1|^2} \le 1$

$2\varepsilon_1 \le 1$

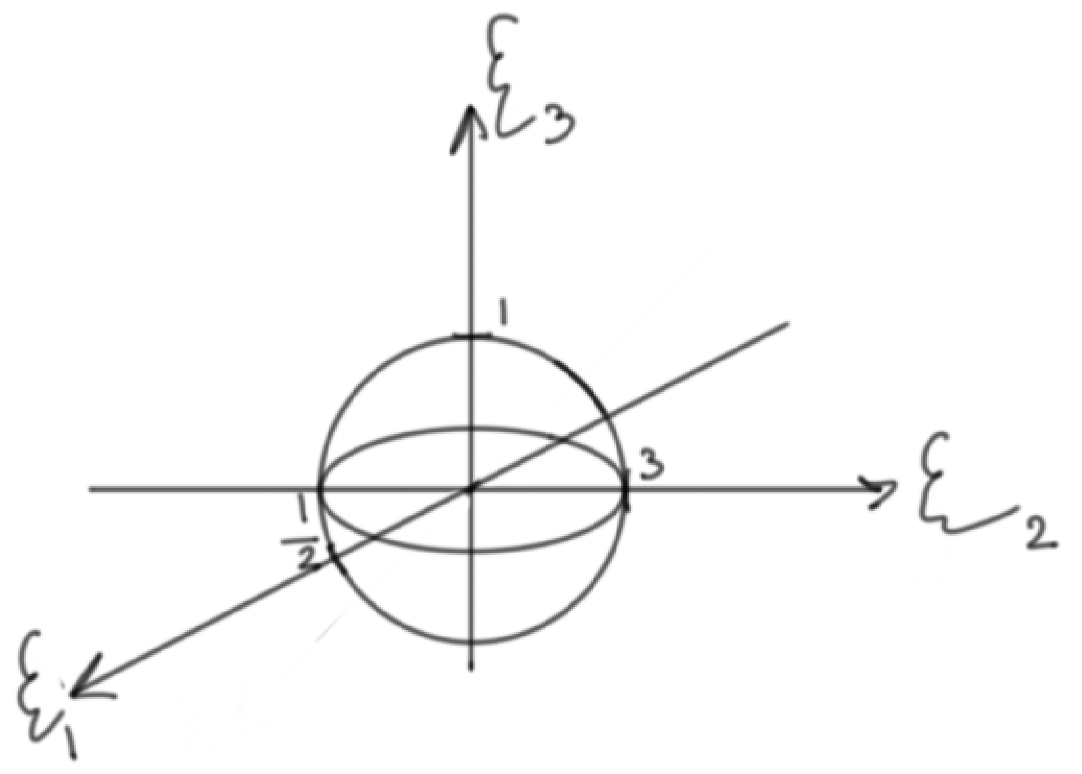
$\varepsilon_1 \le \frac{1}{2}$

$\exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{9}|\varepsilon_2|^2} \le 1$

$\pm\frac{1}{3}\varepsilon_2 \le 1$

$\varepsilon_2 \le 3$

$\exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon_3 \le 1$



№2

Сходятся ли следующие последовательности в пространствах $C[0,1]$, $C^1[0,1]$, $L_1[0,1]$, $\widetilde{L}_1[0,1]$:

г) $x_n(t) = ne^{-nt}$?

а) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ t=0}} ne^{-nt} = \infty$

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ t>0}} ne^{-nt} = 0$

1) $\rho(x_n, x_0) = \max\limits_{t\in[0;1]} |ne^{-nt} - 0| = 0$ – не сходится

$(ne^{-nt})' = -n^2e^{-nt} \ne 0$

б) $\|x_n - x_0\|_{n\to\infty} = \int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|\,dt = \int_0^1 |ne^{-nt} - 0|\,dt \approx 1$ – не сходится

Ответ: не сходится

№3

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{t}x(t^2)dt,$$

Выяснить, является ли норма достижимой.

а) $X = C[0,1]$;

$\|f\| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t}\, x(t^2)\,dt\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sqrt{t}|\cdot|x(t^2)|\,dt \le \|x\|_C \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sqrt{t}|\,dt = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{6}\|x\|_C$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{6}$

$\|f\| \le \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{6}$

$\exists\, x(t^2) = 1 \Rightarrow \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t}\,dt\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sqrt{t}|\,dt = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{6}$ — норма достижима.