Кр №2   Одновш

№1

Однородное д/у второго порядка
с переменными коэф.
Замена $y' = uy$

$$x^2 y y'' = x^2 y'^2 + 2y^2$$

$$y' = uy \qquad y'' = u'y + uy' = u'y + u^2 y = y(u' + u^2)$$

$$x^2 y \cdot y(u' + u^2) = x^2 u^2 y^2 + 2y^2$$

$$x^2(u' + u^2) = x^2 u^2 + 2$$

$$x^2 u' + x^2 u^2 = x^2 u^2 + 2$$

$$x^2 u' = 2$$

$$\int du = \int \frac{2dx}{x^2}$$

$$u = -2\frac{1}{x} + C_1$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} + C_1$$

$$\ln y = -2\ln x + C_1 x + \ln C_2$$

Ответ: $\underline{y = x^{-2} \cdot e^{C_1 x} \cdot C_2}$

№2 лин. неодн. д/у с характ. правой частью
4-ого порядка с постоянными коэф.

$$y^{IV} - 2y''' + 6y'' - 32y' + 40y = 3e^{-x}\cos x \sin x - (3x+1)\cdot e^{-x}\sinh 2x \sin 3x$$

$$\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}$$

1) $k^4 - 2k^3 + 6k^2 - 32k + 40 = 0$

$[0][-1\pm 2i]$

$k_{1,2} = 2$; $k_{3,4} = -1 \pm 3i$

$$y_{00} = C_1 e^{2x} + x C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}\sin 3x + C_4 e^{-x}\cos 3x$$

2) $L(y) = \frac{3}{2}e^{-x}\sin 2x - (3x+1)\cdot e^{-x}\sin 3x\left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}\right)$

$\underbrace{\qquad}$

$[i][1\pm 3i] \quad [1][-3\pm 3i]$

$\Rightarrow \dfrac{(3x+1)e^{x}\sin 3x}{2} + \dfrac{(3x+1)e^{-3x}\sin 3x}{2}$

$$y_{чн} = A_1 \cdot e^{-x}\cdot \sin 2x + A_2 e^{-x}\cos 2x + (B_1 x + D_1)e^{x}\sin 3x + (B_2 x + D_2)e^{x}\cos 3x + (E_1 x + F_1)e^{-3x}\cdot\sin 3x + (E_2 x + F_2)e^{-3x}\sin 3x$$

Ответ: $y_{чн} = -\dfrac{(15x-34)e^{x}\sin 3x}{4000} - \dfrac{C_3 \sin 3x}{1965 2000 e^{x}} - \dfrac{111 x \sin 3x}{46240 e^{x}} - \dfrac{3589\sin 3x}{982600 e^{3x}} - \dfrac{(C_2 e^{2x} - 99450x - 86295)\cos 3x}{39304000 e^{3x}} - \dfrac{9x e^{x}\cos 3x}{800} - \dfrac{21 e^{x}\cos 3x}{800} - \dfrac{3\sin 2x}{338 e^{x}} + \dfrac{18\cos 2x}{845 e^{x}} + C_1 x e^{x} + C_2 e^{2x}$

№3 лин. неодн. д/у с общей правой частью
с переменными коэф.
Замена: $x = e^u$ Уравнение Эйлера

$$x^2 y'' + x y' + y = 2\sin\ln x \quad \Big| x = e^u$$

$$\downarrow$$

$(k-1)k + k + 1 = 0$

$k^2 + 1 = 0$

$k_{1,2} = \pm i$

1) $y_{00} = C_1 \sin u + C_2 \cos u$

2) $y_{чн} = u(A\sin u + B\cos u) = -u\cos u$

$y_{чн}'' = (-Au - 2B)\sin u + (2A - Bu)\cos u$

$2A\cos u - 2B\sin u = 2\sin u \Rightarrow B = -1, \ A = 0$

Ответ: $\underline{y_{ОН} = C_1 \sin\ln x + C_2\cos\ln x - \ln x\cos\ln x}$

№4   ЛОДУ 2-ого порядка с переменными коэф.

$$r'' + r' + \frac{r}{\theta} = 0 \ , \quad r(0) = 0, \ r'(0) = 1 \qquad \text{метод Лиувилле}$$

Ответ: $\underline{r = e^{-\theta}\theta}$