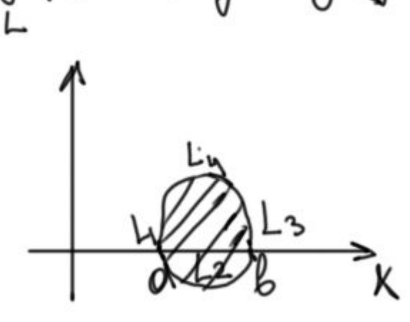
03.05.21

Формулы Грина и Остроградского-Гаусса (доказательства)

<u>Т.1</u>: (формула Грина). $\exists$ D - выпуклый, измеримый по Жордану компакт, граница $L=\partial D$ которого является замкнутой невырожденной кусочно-гладкой кривой. $\exists$ также ф-ии $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на D и имеют там же непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива формула:

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,\text{ где } L=L^+$$

▶ $\int_L Pdx=\iint P'_y\,dxdy$ (для Q аналогично)



$$\int_L Pdx=\int_{L}^{0}+\int_{L_2}^{x=a,dx}+\int_{L_3}^{0}+\int_{L_4}=\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx-$$

$a\le x\le b$
$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$

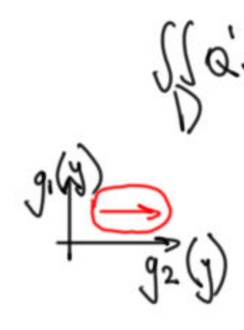
$$-\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx \;=$$

$x=t,\ y=\varphi(t),\ t\in[a;b]$

$$= -\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P'_y(x,y)dy=-\iint_D P'_y\,dxdy$$

$$\iint_D Q'_x\,dxdy=\int_L Qdy$$

$c\le y\le d$
$g_1(y)\le x\le g_2(y)$



$$-\int_L^{dy} Q(g_1(y),g_2(y))+\int_c^d Q(g_2(y)),y\,p'_y)$$

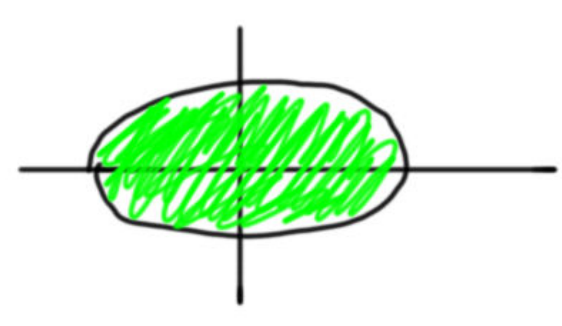
◀

Площадь области D выражается согласно формуле через криволинейный интеграл в следующем виде:

$$\mu(D)=\oint_L xdy=-\oint_L ydx=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$

$$\int xdy=\left[\begin{matrix}P=0\\Q=x\end{matrix}\right]=\iint_D dxdy=\int(D)$$

<u>Пример</u>:

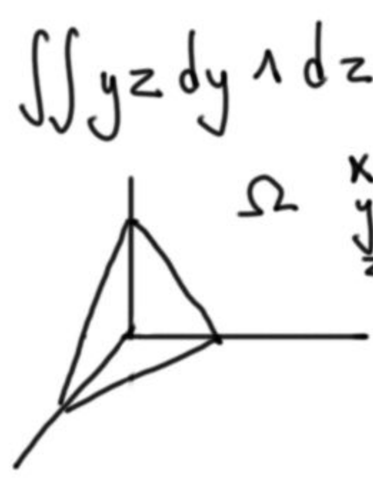


$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$x=a\cos t$
$y=b\sin t$ $\qquad 0\le t\le 2\pi$

$$\int=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\, b\sin t+b\sin t\cdot a\sin t)dt=\frac{1}{2}\,2\pi ab=\pi ab$$

$$\iint yz\,dy\wedge dz+zdz\wedge dx+xydx\wedge dz=0 \quad (\text{лекция №7})$$



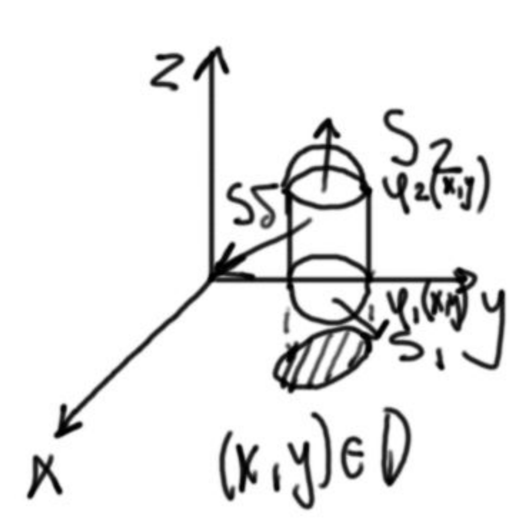
Ω $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$

$\bar{a}=(\overset{P}{yz};\overset{Q}{xz},\overset{R}{xy})$ $\quad div\,\bar{a}=P'_x+Q'_y+R'_z$

<u>Т 2</u>: (Формула Гаусса-Остроградского):

$\exists$: 1) мн-во $V\in R^3$ - выпуклый, измеримый по Жордану компакт
2) заданы гладкие ф-ии $P=P(x,y,z),Q=Q(x,y,z),R=R(x,y,z)$ на V
3) граница S мн-ва V есть невырожденная (без особых точек) кусочно-гладк. пов-ть

Тогда имеет место ф-ла: $\iint_{S^+} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iiint_V(P'_x+Q'_y+R'_z)\,dxdydz$



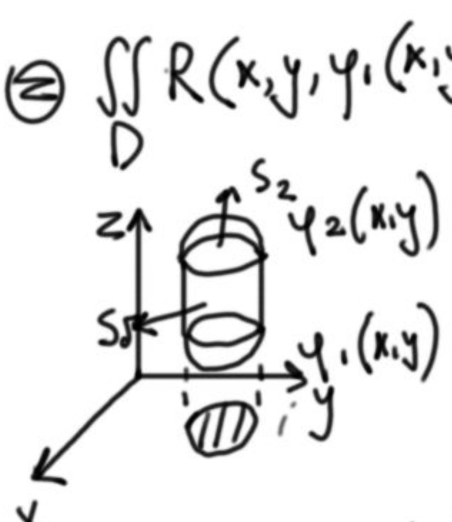
$$\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)$$

$$\iint_{S^+}Rdx\wedge dy=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}=\Big[dx\wedge dy=\underbrace{\cos\gamma\,dS}_{\text{на } S_5}=0\Big]$$

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=r$$

$(x,y)\in D$

$$=\iint_D R(x,y,\varphi_1(x,y))dxdy+\iint_D R(x,y,\varphi_2(x,y))$$



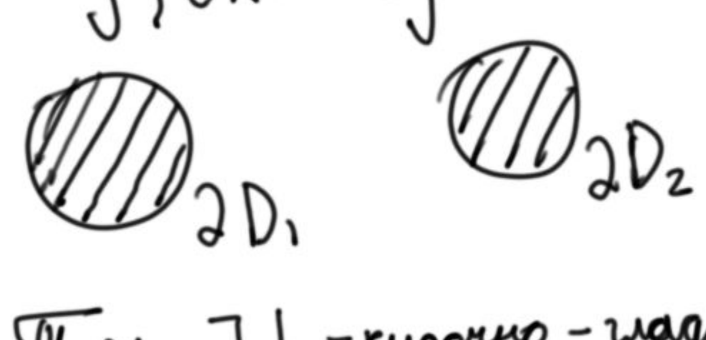
$$=\iint_D dxdy\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}R'_z(x,y,z)\right)dz=\iiint_V R'_z(x,y,z)dxdydz$$

Замечание: Если $D=D_1\cup D_2$ выполняется, то справедлива ф-ла Грина

$$\int_{\partial D}Pdx=\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_1}+\int_{L'_1}=\int_{\partial D_1}+\int_{\partial D_2}=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\iint_D$$

изменение напр. обхода

$$\int Pdx+Qdy$$



∂D_1 $\quad\partial D_2$

<u>Т.3</u>: $\exists$ L - кусочно-гладкая невырожденная кривая. Тогда для того чтобы интеграл

$$I=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

не зависит от пути интегрирования (а зависит только от начальной и конечной точек кривой L), необходимо и достаточно, чтобы $\exists$ ф-ия $h(x,y,z)$:

$$dh=Pdx+Qdy+Rdz$$

$\boxed{P,Q,R \text{ выпук}}$

Теорема о независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования

h - потенциальная ф-ия

▶ $h(x,y,z)=\int_{M_0M}Pdx+Qdy+Rdz$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$
$M(x,y,z)$

$$\Delta xh=h(M')-h(M)=\iint_z Pdx=P(\varepsilon)\Delta x$$

$$h'_x=P\quad h'_y=Q\quad h'_z=R$$

нез. (инвар. первого диф.)

$$\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\gamma dh=0$$

$$\gamma=\int_0^1 dh(t)$$

$\gamma=\gamma(t)$
$t\in[0;1]$

$$=h(t)\Big|_0^1=h(1)-h(0)=h(B)-h(A)$$

$$\frac{t}{\tilde{h}(t)=h(\bar{\gamma})}=h(\bar{\gamma}(t))$$