

Synthèse des travaux présentée par
Olivier DOARÉ
Enseignant-Chercheur
ENSTA-Paristech, Unité de Mécanique
pour obtenir le
Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

Interactions entre fluides et structures actives : Instabilités, contrôle et récupération d'énergie

Olivier DOARÉ
ENSTA-Paristech, Unité de Mécanique
828, Boulevard des Maréchaux
91762, Palaiseau Cedex

olivier.doare@ensta-paristech.fr

Table des matières

Avant-propos	5
I. Instabilités de flottement aéroélastiques : effets de confinement, d'amortissement, de décollement	7
1. Interaction entre un solide en vibration et un écoulement potentiel	9
1.1. Position du problème couplé fluide-structure	9
1.1.1. Équations dans le fluide et conditions aux limites	9
1.1.2. Linéarisation du problème	10
1.2. Description modale de la dynamique du solide et projection de la contrainte fluide	11
1.3. Le cas des structures élancées	13
1.3.1. Écriture du problème couplé dans le cas élancé	13
1.3.2. Étude de stabilité du problème de longueur infinie : stabilité locale	15
1.3.3. Étude de stabilité du système de longueur finie : stabilité globale	16
1.4. Bilan	19
2. Influence du confinement sur l'instabilité de flottement de plaques élastiques	21
2.1. Position du problème	22
2.1.1. Les différents cas limites de la fonction g	24
2.2. Analyse de stabilité locale	26
2.3. Stabilité du drapeau de longueur finie dans un canal rectangulaire	27
2.3.1. Effet des parois transversales (C^* fini, $D^* = \infty$)	28
2.3.2. Cas général d'un drapeau dans un canal rectangulaire	29
2.4. Bilan et perspectives	29
3. Stabilisation et déstabilisation par l'amortissement	33
3.1. Position du problème	35
3.1.1. Modèle de poutre avec effort linéaires	35
3.1.2. Équations sans dimension	36
3.2. Instabilité locale	37
3.2.1. Cas conservatif	37
3.2.2. Notion d'énergie des ondes et ondes d'énergie négative	38
3.2.3. Stabilité locale avec amortissement	39
3.3. Instabilité globale	40
3.4. Bilan et perspectives	42
4. Influence du décollement sur l'instabilité à l'origine de la vibration des cordes vocales	45
4.1. introduction	45
4.2. Dispositif expérimental	47
4.3. Résultats expérimentaux	48
4.4. Conclusion	49

Table des matières

II. Comportement dynamique de structures actives : application au contrôle vibratoire et à la récupération d'énergie des écoulements	51
Les matériaux actifs	53
5. Dynamique des structures piézoélectriques : application au contrôle du rayonnement de plaques planes	57
5.1. Modèle de plaque plane circulaire forcée par un système bobine-aimant et deux anneaux piézoélectriques	58
5.1.1. Forçage d'une plaque par un système bobine-aimant	59
5.1.2. Forçage de la plaque par les patchs piézoélectriques	61
5.1.3. Modèle dynamique d'ordre réduit et fonctions de transfert	61
5.2. Recherche d'une géométrie optimale	63
5.3. Confrontation des résultats expérimentaux et théoriques sur un haut-parleur optimisé	63
5.4. Bilan et perspectives	65
6. Récupération de l'énergie du flottement de structures piézoélectriques dans un écoulement	67
6.1. Modèle linéaire de plaque plane piézoélectrique dans un écoulement	68
6.1.1. Puissances et notion d'efficacité	69
6.2. Stabilité linéaire et efficacité dans le cas infini	70
6.2.1. Équations et paramètres sans dimension	70
6.2.2. Relation de dispersion	70
6.2.3. Stabilité et ondes d'énergie négative	71
6.2.4. Recherche d'un maximum d'efficacité	71
6.3. Stabilité linéaire et efficacité dans le cas fini	72
6.3.1. Équations et paramètres sans dimension	72
6.3.2. Résolution numérique	72
6.3.3. Recherche d'un maximum d'efficacité	73
6.4. Étude non linéaire	73
6.4.1. Modèle non-linéaire	74
6.4.2. Notion d'efficacité au sens non linéaire	75
6.4.3. Principaux résultats	76
6.5. Bilan et perspectives	76
7. Oscillations mécaniques et pseudoélasticité	79
7.1. Analyse expérimentale de la dynamique d'un pendule de torsion présentant une raideur pseudoélastique	80
7.1.1. Présentation du dispositif expérimental	80
7.1.2. Comportement du fil en régime quasi-statique	81
7.1.3. Comportement dynamique	83
7.2. Étude numérique des oscillations en présence d'une raideur pseudoélastique	85
7.2.1. Modèle thermodynamique du comportement d'un alliage à mémoire de forme	85
7.2.2. Principaux résultats	87
7.3. Bilan et perspectives	90
Perspectives	91
Références	93
Annexes	101
A. Curriculum vitae	105
B. Sélection d'articles	113

Avant-propos

Ce manuscrit est une synthèse des recherches que j'ai menées depuis mon arrivée à l'ENSTA-Paristech en 2003, après une thèse sur les instabilités en interaction fluide-structure, un post-doctorat sur la dynamique des couverts végétaux et un ATER¹ pendant lequel j'ai travaillé sur les instabilités de l'écoulement entre disques tournants.

J'ai intégré l'équipe "Matériaux et Structures" (MS) de l'Unité de Mécanique (UME) de l'ENSTA en septembre 2003. De part mon expérience antérieure en interaction fluide-structure, mon intégration dans le laboratoire avait entre autres pour objet d'aider au développement de recherches à même d'impliquer deux équipes du laboratoire : l'équipe MS et l'équipe DFA (Dynamique des Fluides et Acoustique). En 2010, afin de donner plus de cohérence aux équipes, suite aux recommandations de l'AERES, j'ai intégré l'équipe DFA. L'organisation des divers thèmes scientifiques développés dans ce mémoire est la conséquence de cet environnement et de cet historique particulier : une forte présence de la problématique des instabilités en interaction fluide-structure et des extensions dans le domaine des matériaux actifs et de l'acoustique.

Ce mémoire traite donc en premier lieu des phénomènes d'instabilité en interaction fluide-structure qui demeure mon domaine de recherche de prédilection. La première partie y est entièrement consacrée. Les problèmes spécifiques qui sont abordés sont le plus souvent fondamentaux : les plaques en flottement en présence d'un écoulement axial (instabilité du drapeau), le flottement du tuyau d'arrosage, la dynamique d'oscillateurs masse-ressort sous écoulement. Ces systèmes sont représentatifs de nombreux phénomènes vibratoires rencontrés dans la vie courante ou l'industrie : les vibrations de structures sous écoulement dans l'industrie nucléaire, le flottement de panneaux souples en aéronautique, les vibrations de structures soumises au vent dans le génie civil, les oscillations du papier défilant à grande vitesse entre les tambours d'imprimerie, la vibration de la glotte à l'origine du ronflement ou la vibration des cordes vocales.

J'ai aussi été amené à travailler sur des problématiques de dynamique de structures actives comme les vibrations de plaques piézoélectriques pour la reproduction sonore ou les oscillations structures en alliage à mémoire de forme forcées, dont il est envisagé l'utilisation pour amortir les vibrations en génie civil. L'extension naturelle de l'ensemble de ces travaux consiste finalement à s'atteler à des problèmes d'interaction entre écoulements et structures actives. Un premier projet sur ce thème est présenté dans ce manuscrit : la récupération d'énergie du flottement de plaques piézoélectriques. L'ensemble de mes travaux sur les matériaux actifs et leur couplage avec les écoulements sont présentés dans la deuxième partie de ce mémoire.

Avant de clore cet avant propos, je tiens à présenter brièvement l'ensemble du déroulement de ce document en insistant sur le contexte et les personnes impliquées dans chaque thème.

Partie 1 - Instabilités en interaction fluide structure

Le chapitre 1 a pour but d'introduire de façon unifiée toutes les équations et tous les concepts nécessaires aux trois chapitres suivants. Ce sera aussi l'occasion de présenter quelques-uns de mes travaux relatifs à l'interaction fluide-structure antérieurs à mon arrivée à l'ENSTA.

Le chapitre 2 traite de l'instabilité connue sous le nom de "flottement du drapeau", en s'intéressant plus particulièrement aux effets de confinements induits par la proximité de parois immobiles. Ce travail théorique et expérimental, initié dans le cadre d'un contrat de l'Agence Nationale de la Recherche², a été effectué en collaboration avec Christophe Eloy (IRPHE, Marseille).

Le chapitre 3 traite de l'influence de la dissipation sur les instabilités de structures sous écoulement. Le cas du tuyau avec écoulement interne y est présenté comme un système modèle, représentatif de nombreux cas

1. Attaché Temporaire Enseignement Recherche

2. ANR "DRAPEAU" no ANR-06-JCJC-0087

Table des matières

rencontrés non-seulement en interaction fluide-structure, mais aussi dans d'autres disciplines de la physique, qui présentent un comportement contre-intuitif de déstabilisation par ajout d'amortissement.

Le travail présenté dans *le chapitre 4* a été effectué dans le cadre d'un séjour en France de Petr Sidlof, doctorant de l'Université Saint-Charles à Prague. Sa thèse portait sur l'étude de la vibration des cordes vocales en régime de phonation (Sidlof, 2007). En collaboration avec Olivier Cadot et Antoine Chaigne et durant 18 mois à l'ENSTA, j'ai encadré son travail expérimental. Il s'agissait de caractériser le décollement du jet se développant en aval des cordes vocales.

Partie 2 - Matériaux actifs et interaction avec les écoulements

Le chapitre 5 est le fruit d'une collaboration avec Gérald Kergourlay, du centre de recherche français de CANON (CANON-CRF). Suite au rachat du constructeur d'enceintes acoustiques français Cabasse, le groupe industriel japonais CANON a souhaité mettre en place une activité sur les haut-parleurs dans son centre de recherche français, basé à Rennes. Au début de l'année 2009, alors que je souhaitais consacrer un peu de mon temps de recherche à des projets plus appliqués, j'ai eu l'occasion de présenter aux ingénieurs-chercheurs de CANON-CRF quelques-uns de mes résultats sur le contrôle actif du flottement de plaques dans un écoulement (Doaré et al., 2006) et de manifester mon intérêt pour le domaine de la reproduction sonore. S'en est suivie une collaboration entre Cabasse, CANON-CRF et l'UME. Deux contrats de recherche d'un an ont été conclus et deux stages de M2 ont notamment été réalisés à l'UME (Minguell, 2009; Sambuc, 2010). L'objectif affiché de CANON était de développer des haut-parleurs de faible profondeur, adaptés au nouveau format des écrans de télévision modernes et capables de reproduire des basses fréquences. Il fut donc entrepris de réaliser des haut-parleurs dont le principe de fonctionnement était classiquement basé sur un système bobine-aimant, mais dont la membrane transmettant l'énergie acoustique, au lieu d'être constituée d'un cône sur une suspension souple, était formée d'une plaque plane encastrée.

Dans *le chapitre 6*, nous présenterons un travail de modélisation de la dynamique de plaques piézoélectriques souples sous écoulement et son application à la récupération d'énergie. Il s'agit d'une recherche effectuée en collaboration avec Sébastien Michelin (LadHyX). Nous avions tous deux pour ambition de quantifier le potentiel de récupération d'énergie que présente le phénomène de flottement de structures sous écoulement. Nos expériences complémentaires sur les structures élancées (théories locales/globales et piézoélectricité pour ma part, modélisation non-linéaire et simulation numérique pour Sébastien Michelin) nous ont naturellement conduit à collaborer sur ce projet.

Enfin, au *chapitre 7*, nous étudierons le cas d'un autre type de matériau actif : les matériaux à mémoire de forme. La modélisation et l'analyse expérimentale du comportement de ces matériaux est un thème phare de groupe MS. Le travail de recherche qui sera présenté a plus spécifiquement porté sur le comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme à certaines températures. Il a consisté à analyser l'influence de la pseudoélasticité sur la dynamique de structures ou oscillateurs. Cette recherche a été faite en collaboration avec Ziad Moumni et Cyril Touzé, enseignants-chercheurs à l'Unité de Mécanique. Dans ce projet, j'ai notamment développé une expérience originale d'étude des oscillations d'un pendule de torsion (stage de Sbarra, 2010) et co-encadré une thèse portant sur la modélisation du comportement dynamique des alliages à mémoire de forme (Ould Moussa, 2011).

À la fin de ce mémoire, dans un court chapitre, je présenterai un bilan de ces recherches et les perspectives principales que j'entrevois à ce jour.

Première partie .

**Instabilités de flottement aéroélastiques :
effets de confinement, d'amortissement,
de décollement**

1. Interaction entre un solide en vibration et un écoulement potentiel

Lorsqu'un solide élastique est plongé dans un écoulement, les dynamiques des deux milieux se trouvent couplées sur une frontière de géométrie variable dans le temps. Une modélisation complète de ce type de système couplé doit faire intervenir les équations de Navier-Stokes dans le milieu fluide, les équations de l'élasto-dynamique dans le milieu solide et des conditions sur la cinématique et l'équilibre des contraintes dans chaque milieu, qui doivent être satisfaites à chaque instant sur une interface fluide-solide mobile. Il s'agit d'un problème très complexe, ce qui explique pourquoi les cas généraux ne peuvent être résolus qu'à l'aide d'outils numériques et pourquoi il existe une importante communauté de numériciens dans le domaine de l'interaction fluide-structure.

La plupart des cas abordés dans ce mémoire le sont du point de vue des instabilités, ce qui rend pertinente la linéarisation des équations du système couplé et rend possible une résolution analytique, voire semi-analytique du problème. L'objectif premier de la première moitié de ce chapitre est d'introduire brièvement les équations du problème linéarisé sans omettre de souligner les approximations réalisées, et les effets négligés.

La seconde moitié de ce chapitre sera consacrée à l'introduction d'un certain nombre de concepts et méthodes développés dans ce mémoire : la notion de structure élancée, les notions d'instabilités locales et globales, les méthodes de résolution et d'analyse de stabilité des systèmes finis et infinis.

Aussi ce chapitre ne présente t-il pas à proprement parler des résultats scientifiques relatifs à ma thèse d'habilitation. L'objectif est d'en faire un texte de référence utile aux chapitres suivants. Le lecteur éclairé peut donc sans crainte se rendre au chapitre 2.

1.1. Position du problème couplé fluide-structure

1.1.1. Équations dans le fluide et conditions aux limites

Considérons le champ de déformation $\Xi(\underline{X}, T)$ d'un solide quelconque plongé dans un écoulement stationnaire $\underline{U}(\underline{X}, T)$, représenté en figure 1.1. Le domaine solide est noté Ω_s , le domaine fluide Ω_f . On considère le solide à l'équilibre dans le champ de pression exercé par l'écoulement permanent. Cet état d'équilibre est pris comme configuration de référence pour le solide (champ de déplacement nul). On rappelle ici les équations de

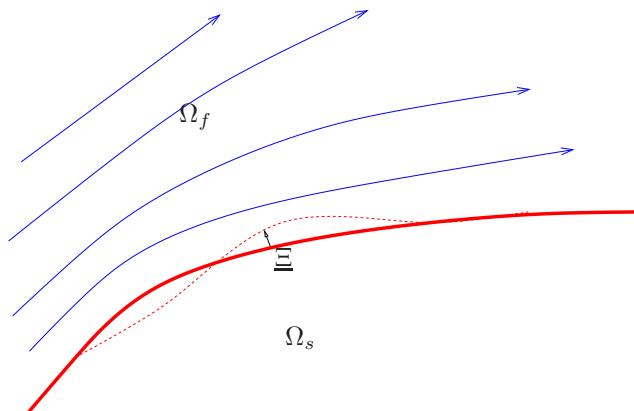


FIGURE 1.1.: Vue schématique d'un solide se déformant à proximité d'un écoulement permanent.

1. Interaction entre un solide en vibration et un écoulement potentiel

conservation de la masse et de la quantité de mouvement sans dimension :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{u}} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial t} + (\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}) \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} p - \frac{1}{R_e} \Delta \underline{\underline{u}} = 0, \quad (1.2)$$

où une longueur de référence η , un temps de référence τ et la masse volumique du fluide ρ_f ont été utilisées pour adimensionner les variables du problème,

$$\underline{\underline{u}} = \frac{\underline{\underline{U}} \tau}{\eta}, \quad p = \frac{P}{\rho_f (\eta/\tau)^2}, \quad (1.3)$$

et où le nombre de Reynolds a pour expression

$$R_e = \frac{\mu \tau}{\rho_f \eta^2}. \quad (1.4)$$

Dans tous les problèmes modélisés dans la suite, nous négligerons les effets visqueux ($R_e \gg 1$) et considérerons un écoulement potentiel et irrotationnel, de sorte que la vitesse dérive d'un potentiel ψ ,

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \psi. \quad (1.5)$$

Sous cette approximation, la condition aux limites à l'interface fluide-solide consiste en l'égalité des vitesses normales de chaque milieu et porte le nom de condition cinématique,

$$\underline{\underline{u}} \cdot \underline{n} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \underline{n}, \quad (1.6)$$

où $\xi = \Xi/\eta$ est le champ de déplacement adimensionné dans le solide. Ce champ est supposé satisfaire un jeu d'équations qui sera propre à chaque cas étudié. Il s'agira par exemple des équations linéarisées décrivant les petits déplacements transversaux d'une poutre sous l'approximation d'Euler-Bernoulli (chapitres 2, 3 et 6), ou d'équations dynamiques du solide sur une base de modes propres supposés connus *a priori* (chapitre 4). Nous reviendrons dans le présent chapitre sur la dynamique du solide en sections 1.2 et 1.3.

1.1.2. Linéarisation du problème

Les équations présentées ci-dessus possèdent des non linéarités à deux niveaux. La première non-linéarité se retrouve dans le terme d'advection de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et la deuxième est cachée dans la condition aux limites cinématique (1.6). Décomposons les variables du problème entre partie permanente et fluctuations,

$$\xi = \epsilon \underline{\xi}', \quad \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0 + \epsilon \underline{\underline{u}}', \quad p = p_0 + \epsilon p', \quad \psi = \psi_0 + \epsilon \psi', \quad (1.7)$$

avec $\epsilon \ll 1$. En introduisant ces développements dans les équations de conservation du fluide, en prenant la divergence de la conservation de la masse et en intégrant une fois la conservation de la quantité de mouvement, nous obtenons à l'ordre zéro,

$$\Delta \psi_0 = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{2} u_0^2 + p_0 = \text{cte}, \quad (1.9)$$

et à l'ordre un,

$$\Delta \psi' = 0, \quad (1.10)$$

$$p' = -\dot{\psi}' - \underline{\underline{u}}_0 \cdot \underline{\underline{\operatorname{grad}}} \psi'. \quad (1.11)$$

1.2. Description modale de la dynamique du solide et projection de la contrainte fluide

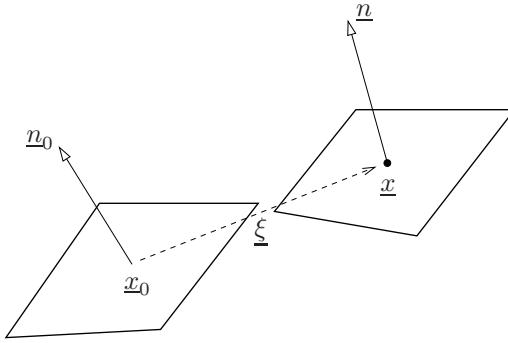


FIGURE 1.2.: Déformation et déplacement d'une surface unitaire au cours de la transformation.

Dans cette dernière équation, la constante d'intégration a été prise nulle, puisque nous nous intéressons aux fluctuations. L'équation (1.9) est l'équation de Bernoulli associée à l'écoulement permanent tandis que l'équation (1.11) est l'équation de Bernoulli instationnaire.

Il reste à linéariser la condition aux limites cinématique à l'interface (1.6). Nous représentons sur la figure 1.2 la déformation d'une surface unitaire orientée. Y apparaît le vecteur unitaire normal à la surface déformée, noté \underline{n}_0 dans la configuration de référence et \underline{n} dans la configuration actuelle. L'équation (1.6) est évaluée au point courant \underline{x} , qui a pour expression,

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \epsilon \underline{\xi}' . \quad (1.12)$$

Effectuons un développement au premier ordre de tous les termes présents dans l'équation (1.6) :

$$\begin{aligned} \underline{u}_0|_{\underline{x}} &= \underline{u}_0|_{\underline{x}_0} + \left(\epsilon \underline{\xi}' \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}_0 \right)_{\underline{x}_0} + O(\epsilon^2), \\ \epsilon \underline{u}'_{\underline{x}} &= \epsilon \underline{u}'_{\underline{x}_0} + O(\epsilon^2), \\ \underline{n} &= \left(1 + \epsilon (\text{div} \underline{\xi}') \underline{1} - \epsilon^t \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}' \right)_{\underline{x}_0} \cdot \underline{n}_0 + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (1.13)$$

En introduisant ces développements dans la condition cinématique, on obtient à l'ordre 0,

$$\underline{u}_0 \cdot \underline{n}_0 = 0. \quad (1.14)$$

On retrouve une condition aux limites classique de mécanique des fluides pour l'écoulement moyen : vitesse normale nulle sur la paroi immobile. À l'ordre 1, on obtient l'expression suivante :

$$\underline{\text{grad}} \psi' \cdot \underline{n}_0 = \frac{\partial \underline{\xi}'}{\partial t} \cdot \underline{n}_0 - \underline{u}_0 \left[(\text{div} \underline{\xi}') \underline{1} - \epsilon^t \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}' \right] \cdot \underline{n}_0 - \underline{\xi}' (\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}_0) \cdot \underline{n}_0. \quad (1.15)$$

Tous les termes de cette équation sont évalués dans la configuration de référence, au point \underline{x}_0 . Nous avons donc à présent les conditions aux limites linéarisées satisfaites par ψ' à l'interface fluide/solide, et la résolution du problème fluide linéarisé consiste à résoudre l'équation de Laplace (1.10) pour le potentiel perturbé par le mouvement du solide avec les conditions aux limites (1.15). La pression est ensuite calculée à l'aide de l'équation de Bernoulli instationnaire (1.11). Cette pression constitue alors un effort externe dans la dynamique du solide, ce que nous abordons à présent.

1.2. Description modale de la dynamique du solide et projection de la contrainte fluide

Supposons la dynamique linéaire du solide dans le vide connue et résolue, c'est à dire que nous connaissons ses modes propres. Supposons les modes propres $\underline{\phi}_j(\underline{x})$, $j \in \mathbb{N}$ du solide en l'absence de fluide connus, et décomposons

1. Interaction entre un solide en vibration et un écoulement potentiel

le mouvement selon ces fonctions,

$$\underline{\xi}'(\underline{x}, t) = \sum_j \underline{\xi}_j(\underline{x}, t) = \sum_j q_j(t) \underline{\phi}_j(\underline{x}). \quad (1.16)$$

Recherchons le champ potentiel ψ'_j associé à chaque mode de déformation. De part la linéarité du problème fluide obtenu, on peut rechercher des solutions pour le potentiel sous forme d'une somme de deux fonctions satisfaisant chacun deux conditions aux limites différentes dont la somme donne la condition (1.15). Nous posons donc,

$$\psi'_j = \mathcal{U}\psi_j^{(1)} + \psi_j^{(2)}, \quad (1.17)$$

où $\mathcal{U} = U_0\eta/\tau$. Les potentiels $\psi_j^{(1)}$ et $\psi_j^{(2)}$ satisfont tous deux l'équation de Laplace. Concernant les conditions aux limites, nous choisissons pour le premier champ,

$$\underline{\text{grad}}\psi_j^{(1)} \cdot \underline{n}_0 = -\underline{\bar{u}} \left((\text{div}\underline{\xi}_j) \underline{1} - {}^t \underline{\underline{\text{grad}}\xi}_j \right) \cdot \underline{n}_0 - \underline{\xi}_j(\underline{\text{grad}}\underline{\bar{u}}) \cdot \underline{n}_0, \quad (1.18)$$

où l'on a posé,

$$\underline{\bar{u}} = \frac{\underline{u}_0}{\mathcal{U}}. \quad (1.19)$$

Il s'agit d'un champ de vitesses unitaire pour l'écoulement permanent. Pour le second champ, nous choisissons,

$$\underline{\text{grad}}\psi_j^{(2)} \cdot \underline{n}_0 = \frac{\partial \underline{\xi}_j}{\partial t} \cdot \underline{n}_0. \quad (1.20)$$

La première condition aux limites fait intervenir le champ de déplacement, tandis que la seconde fait intervenir le champ de vitesse. On peut donc rechercher des solutions à variables séparées sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi_j^{(1)}(\underline{x}, t) &= q(t) \phi_{\psi j}^{(1)}(\underline{x}), \\ \psi_j^{(2)}(\underline{x}, t) &= \dot{q}(t) \phi_{\psi j}^{(2)}(\underline{x}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

En utilisant l'équation (1.11), on obtient l'expression générale de la pression dans le fluide, consécutif au mouvement modal $\underline{\phi}_j$,

$$p_j = -\ddot{q}_j \phi_{\psi j}^{(2)} - \mathcal{U} \dot{q}_j \left(\phi_{\psi j}^{(1)} + \underline{\bar{u}} \cdot \underline{\text{grad}}\phi_{\psi j}^{(2)} \right) - \mathcal{U}^2 q_j \underline{\bar{u}} \cdot \underline{\text{grad}}\phi_{\psi j}^{(1)}. \quad (1.22)$$

Cette pression comprend un terme proportionnel à \ddot{q}_j , qui ne dépend pas de \mathcal{U} , un terme proportionnel à $\mathcal{U}\dot{q}_j$ et un terme proportionnel à $\mathcal{U}^2 q_j$.

La pression totale a naturellement pour expression $p = \sum_j p_j$. En effectuant une troncature à N modes et en projetant la contrainte dans le fluide sur chaque mouvement modal $\underline{\phi}_i$, on obtient l'équation dynamique,

$$[M + M_a] \vec{q} + \mathcal{U} C_a \vec{q} + [K + \mathcal{U}^2 K_a] \vec{q} = \vec{0}, \quad (1.23)$$

où M et K sont des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont les masses et raideurs modales associées à chaque mode et où M_a , C_a et K_a sont appelées respectivement matrices de masse, d'amortissement et de raideur ajoutées, qui ont pour expression,

$$M_{aij} = \int_{\partial\Omega} \phi_{\psi j}^{(2)}(\underline{n} \cdot \underline{\phi}_i) ds, \quad (1.24)$$

$$C_{aij} = \int_{\partial\Omega} \left(\phi_{\psi j}^{(1)} + \underline{\bar{u}} \cdot \underline{\text{grad}}\phi_{\psi j}^{(2)} \right) (\underline{n} \cdot \underline{\phi}_i) ds, \quad (1.25)$$

$$K_{aij} = \int_{\partial\Omega} \left(\underline{\bar{u}} \cdot \underline{\text{grad}}\phi_{\psi j}^{(1)} \right) (\underline{n} \cdot \underline{\phi}_i) ds. \quad (1.26)$$

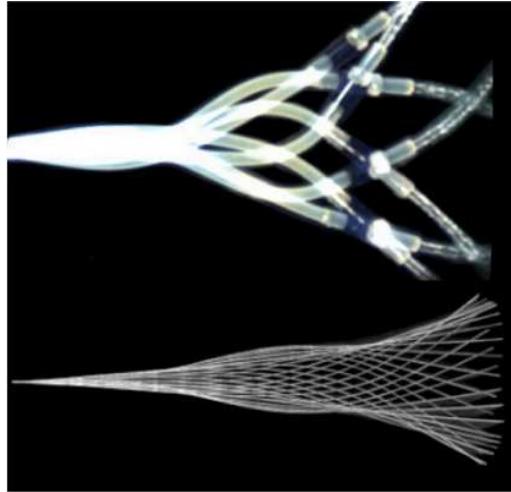


FIGURE 1.3.: Deux cas typiques de structures élancées en flottement dans un écoulement axial : Un tuyau avec écoulement interne et un drapeau dans un écoulement externe. La photographie du drapeau est tirée de Eloy et al. (2008).

L'équation (1.23) montre que les termes de masse ajoutée sont les seuls qui restent lorsque le fluide est au repos. Les termes de raideur ajoutée sont ceux qui dominent lorsqu'on considère les grandes valeurs de la vitesse réduite \mathcal{U} . Aux vitesses intermédiaires, tous les termes doivent être pris en compte¹.

La technique développée pour obtenir les matrices (1.24-1.26) intervenant dans l'équation dynamique (1.23), qui consiste à projeter la dynamique fluide-structure couplée sur les modes propres de la structure dans le vide, est nommée *méthode de Galerkin*. Nous l'utiliserons dans la plupart des chapitres de ce manuscrit. Dans le cas des structures élancées, nous résoudrons la pression dans le fluide dans l'espace de Fourier avant projection sur les modes de structure, point qui est abordé dans la prochaine section.

1.3. Le cas des structures élancées

1.3.1. Écriture du problème couplé dans le cas élancé

Les structures élancées auxquelles nous nous intéresserons aux chapitres 2, 3 et 6 peuvent être des poutres des plaques ou des coques en interaction avec un écoulement axial. Deux cas typiques de ce problème sont illustrés en figure 1.3. La direction de l'élancement est selon \underline{e}_x et l'écoulement, dans l'état d'équilibre de référence, est supposé être homogène dans cette même direction,

$$\underline{U}_0 = U_0 \underline{e}_x \quad \forall X \in \Omega_f. \quad (1.27)$$

Bien que ces systèmes puissent être résolus en projetant directement sur la dynamique modale les efforts de pression consécutifs au déplacement selon chaque mode dans le vide, tel que décrit au cours de la section précédente, nous allons porter une attention particulière à ce type de système en l'abordant d'abord sous l'angle de la propagation des ondes de flexion couplées à l'écoulement. Le déplacement $W(X, T)$ du solide, en tout point selon \underline{e}_y , est ici modélisé sous l'approximation d'Euler-Bernoulli (petits déplacements, inertie de rotation négligée, sections non déformées et normales à la fibre neutre à chaque instant) :

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + \mathcal{A}(W) = \int_{\partial\Omega} (-P \cdot \underline{n}) \underline{e}_y dL, \quad (1.28)$$

1. On retrouve ce résultat dans de Langre (2002a) démontré de façon moins formelle, mais avec des arguments plus physiques.

1. Interaction entre un solide en vibration et un écoulement potentiel

où D est la rigidité en flexion, μ la masse par unité de longueur, \mathcal{A} un opérateur linéaire modélisant des forces supplémentaires s'appliquant sur la structure, qui peuvent être des forces de raideur dues à une fondation élastique, une pré-tension, des forces d'amortissement visqueux ou visco-élastique. Ici, l'interface fluide-solide $\partial\Omega$ est un contour d'intégration désignant l'interface fluide-solide à l'abscisse X et le second membre de l'équation (1.28) est l'expression de la force linéaire exercée par l'écoulement sur la structure, résultant de la projection sur $\underline{\phi} = \underline{e}_y$ de la contrainte dans le fluide, intégrée sur $\partial\Omega$.

En utilisant une longueur caractéristique quelconque, notée η et un temps caractéristique $\tau = \eta^2 \sqrt{\mu/D}$ pour adimensionner le problème, l'équation dynamique devient,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a(w) = \mathcal{M} \int_{\partial\Omega} (-p \cdot \underline{n}) \underline{e}_y dl. \quad (1.29)$$

Le paramètre $\mathcal{M} = \rho_f \eta^2 / \mu$ est appelé rapport de masse. La vitesse sans dimension de l'écoulement permanent prend quant à elle la forme suivante,

$$\underline{u}_0 = \mathcal{U} \underline{e}_x, \quad (1.30)$$

tandis que l'équation de Bernoulli instationnaire devient,

$$p' = -\dot{\psi}' - \mathcal{U} \frac{\partial \psi'}{\partial x}. \quad (1.31)$$

La condition aux limites cinématique (1.15) devient dans ce cas particulier de structure élancée :

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.32)$$

Cette équation est appelée *condition d'imperméabilité*. Les adimensionnements effectivement choisis dans la suite pourront être légèrement différents de ceux utilisés dans ce contexte générique. La forme finale des équations sans dimension sera toutefois similaire.

Introduisons la transformée de Fourier en espace et en temps d'une fonction quelconque $h(x, t)$,

$$\hat{h}(k, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=-\infty}^{+\infty} h(x, t) e^{i\omega t} e^{ikx} dt dx, \quad (1.33)$$

et prenons la transformée de Fourier de l'équation (1.29),

$$[k^4 - \omega^2 + \hat{a}(k, \omega)] \hat{w} = \mathcal{M} \int_{\partial\Omega} (-\hat{p} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_y dl, \quad (1.34)$$

Dans l'espace de Fourier, l'équation de Bernoulli instationnaire devient,

$$\hat{p} = i(\omega - \mathcal{U}k) \hat{\psi}. \quad (1.35)$$

Enfin, on montre aisément à partir de (1.10) et (1.32) que le potentiel dans l'espace de Fourier $\hat{\psi}(k, y, z, \omega)$ est gouverné par l'équation et les conditions aux limites suivantes,

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} = k^2 \hat{\psi} \quad (1.36)$$

$$-\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{n}} = -i(\omega - \mathcal{U}k) \hat{w} (\underline{n} \cdot \underline{e}_y) \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.37)$$

$$\mathcal{B}_n(\hat{\psi}) = 0, \quad n = 1..n, \quad (1.38)$$

où \mathcal{B}_n sont autant de conditions aux limites que nécessaire pour fermer le problème fluide (vitesse nulle sur les parois immobiles, vitesse bornée à l'infini, conditions de symétrie...). Elles dépendent du problème étudié

en pratique. Introduisons un potentiel normalisé $\hat{\varphi} = \hat{\psi} / -i(\omega - \mathcal{U}k) \hat{w}$. Il satisfait au nouveau problème de Helmholtz suivant :

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial z^2} = k^2 \hat{\varphi} \quad (1.39)$$

$$-\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \underline{n}} = \underline{n} \cdot \underline{e}_y \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.40)$$

$$\mathcal{B}_n(\hat{\varphi}) = 0. \quad (1.41)$$

Ce dernier problème ne dépend que du nombre d'onde k et des géométries de la section du problème considéré. En utilisant l'équation de Bernoulli instationnaire, la pression peut être exprimée linéairement par rapport à \hat{w} et être réintroduite dans la relation de dispersion qui prend alors la forme suivante,

$$(k^4 - \omega^2) + \hat{a}(k, \omega) = \mathcal{M} \frac{2g(k, \omega)}{k} (\omega - \mathcal{U}k)^2, \quad (1.42)$$

où la fonction g a pour expression,

$$g(k, \omega) = \frac{k}{2} \int_{\partial\Omega} -\hat{\varphi}(\underline{n} \cdot \underline{e}_y) dl. \quad (1.43)$$

Dans l'espace de Fourier de x et t , le travail consiste donc à obtenir la relation de dispersion (1.42). Pour ce faire, il est nécessaire d'obtenir la fonction g , ce qui passe par la résolution d'un problème de Helmholtz à deux dimensions (équations 1.39-1.41) pour le potentiel normalisé $\hat{\varphi}$. Dans les sections qui suivent, nous considérons le problème résolu. C'est à dire que nous connaissons la fonction g .

1.3.2. Étude de stabilité du problème de longueur infinie : stabilité locale

En l'absence de toute donnée sur les conditions aux limites portant sur x , on considère le problème infini. L'analyse est dite *locale*, dans la mesure où elle est valable *localement*, autour d'un forçage localisé en temps et en espace, sur une durée et un domaine tel que les conditions aux limites ou les inhomogénéités du milieu puissent être négligées. L'analyse consiste alors en l'étude des ondes de flexion se propageant dans ce milieu au travers de la relation de dispersion (1.42) qui lie le nombre d'onde k à la pulsation ω de toute solution sous la forme d'une onde propagative,

$$w(x, t) = w_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (1.44)$$

Le milieu est dit *localement stable* si, pour tout nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$, l'amplitude de l'onde correspondante reste bornée pour $t \rightarrow \infty$, ce qui est conditionné par la partie imaginaire de la pulsation correspondante. Le critère de stabilité locale est donc défini comme suit :

$$\text{Im}(\omega) \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Stabilité locale.} \quad (1.45)$$

Le travail consiste ici à calculer les valeurs de ω associées à k et l'approche est dite *temporelle*. Il est à noter que le signe positif de la partie imaginaire de ω donnant lieu à une instabilité est conditionné par le choix particulier de la forme de l'onde (1.44).

Afin de différencier deux types de comportements à temps longs de la réponse impulsionale d'un milieu, les concepts d'instabilités *convective* et *absolue* ont été introduits par Briggs (1964). Si le système est localement instable (cf. condition 1.45), le paquet d'onde engendré par le forçage impulsional croît exponentiellement aux temps longs. Lorsque celui-ci est advecté par l'écoulement moyen, l'on a affaire à une instabilité *convective*, tandis que lorsque le paquet d'onde croît sur place et envahit tout l'espace, l'instabilité est dite *absolue*. La figure 1.4, tirée de Couairon & Chomaz (1997), représente les réponses impulsionales que l'on obtient dans les trois cas stable, convectivement instable, absolument instable. Les concepts d'instabilités absolue et convective, initialement introduits en physique des plasmas (Briggs, 1964), ont par suite été introduits en mécanique des fluides pour analyser l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (Huerre & Monkewitz, 1985), les transitions dans les sillages (Monkewitz, 1988) ou les jets (Leib & Goldstein, 1986). Les ondes de flexion se propageant dans les structures élancées ont aussi été décrites au travers du prisme des instabilités convectives et absolues. Citons

1. Interaction entre un solide en vibration et un écoulement potentiel

entre autres les travaux de Brazier-Smith & Scott (1984), Carpenter & Garrad (1986), Crighton & Osswell (1991) ou Lucey & Carpenter (1992) pour le cas des panneaux souples en contact avec un écoulement, et de Kulikovskii & Shikina (1988) et de Langre & Ouvrard (1999) pour le cas du tuyau avec écoulement interne.

Plus formellement, on caractérise l'instabilité absolue par l'existence d'ondes de vitesse de groupe nulle ayant un taux de croissance positif :

$$\exists \omega_0 \quad \backslash \quad D(k_0, \omega_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{(k_0, \omega_0)} = 0, \quad \text{Im}(\omega_0) > 0 \quad \Rightarrow \text{Instabilité absolue.} \quad (1.46)$$

On peut aussi la détecter par une analyse des branches spatiales. Les branches spatiales sont les lignes dans le plan complexe définies par les nombres d'onde solution de la relation de dispersion pour $\omega \in [-\infty + i\sigma, +\infty + i\sigma]$. Cette approche est dites *spatiale*. Lorsque σ est bien supérieur au taux de croissance maximal $\sigma_{max} = \max(\text{Im}[\omega(k)])$ avec $k \in \mathbb{R}$, une analyse faisant appel à un calcul de résidus permet de montrer que les branches se trouvant dans le demi-plan complexe supérieur, notées k^+ correspondent aux ondes se développant en aval des perturbations, tandis que les branches se trouvant dans le demi-plan complexe inférieur, notées k^- donnent les ondes se développant en amont des perturbations (Huerre & Monkewitz, 1990). Lorsque σ est diminué, un pincement entre branches k^+ et k^- survient à une certaine valeur de $\sigma_0 < \sigma_{max}$. Si σ_0 est négatif, l'instabilité est convective. L'instabilité est absolue dans le cas contraire. Si l'on note ω_0 la pulsation correspondante, celle-ci vérifie les deux conditions,

$$D(k, \omega_0) = \left. \frac{\partial D(k, \omega)}{\partial k} \right|_{\omega_0} = 0. \quad (1.47)$$

Il est toutefois à noter que des points de pincement entre deux branches k^+ ou deux branches k^- peuvent vérifier cette condition, mais ne donnent pas lieu à une instabilité absolue. Ce critère ne constitue donc pas une prédiction systématique de l'existence d'une transition. Toutefois, dans le cas de systèmes hydroélastiques conservatifs, Crighton & Osswell (1991) ont montré en utilisant les symétries particulières de la relation de dispersion que la transition entre instabilité absolue et convective survient lorsqu'on a affaire à une racine triple,

$$\left. \frac{\partial^2 D(k, \omega)}{\partial k^2} \right|_{\omega_0} = 0. \quad (1.48)$$

Nous utiliserons indirectement ce critère lorsque nous nous intéresserons au drapeau confiné dans un canal (chapitre 2)

1.3.3. Étude de stabilité du système de longueur finie : stabilité globale

Lorsque l'on s'intéresse à la dynamique d'un système de longueur finie, sur des échelles de temps et de longueur telles que les bords ne peuvent plus être négligés, l'on doit tenir compte des conditions aux limites. Dans tous les cas que nous allons étudier dans les deux chapitres suivants, les conditions aux limites seront celles d'une poutre encastrée-libre :

$$w(x=0, t) = w'(x=0, t) = w''(x=l, t) = w'''(x=l, t). \quad (1.49)$$

L'analyse de stabilité de ce problème passe par la recherche de modes propres. En cherchant des solutions sous la forme,

$$w(x, t) = \phi(x) e^{-i\omega t}, \quad (1.50)$$

et puisque les forces exercées par l'écoulement sur la structure sont des fonctions linéaires de w , nous obtenons un problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville possédant une infinité couples (ω, ϕ) solutions. De part la forme de la solution cherchée, donnée en équation (1.50), le système est instable dès qu'une pulsation propre a une partie imaginaire positive. Si la partie réelle de cette pulsation est nulle, on a affaire à une instabilité statique, appelée flambage. Le mouvement correspondant prend la forme d'une déformation exponentiellement croissante, sans oscillation. En revanche, si la partie réelle de cette pulsation est non nulle, nous avons affaire à un mouvement oscillation d'amplitude exponentiellement croissante. L'instabilité est appelée instabilité dynamique, ou flottement.

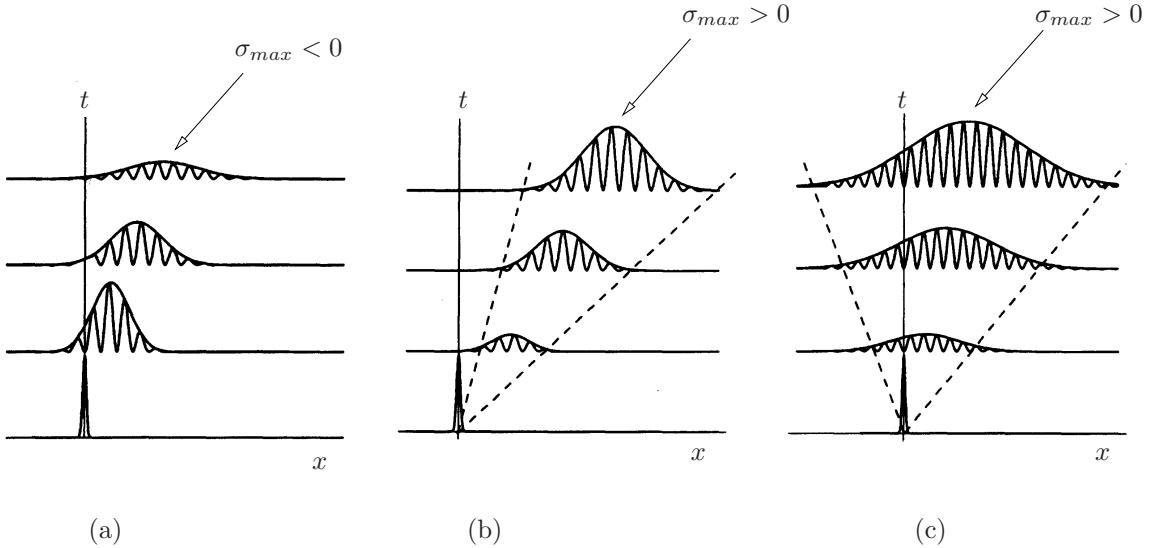


FIGURE 1.4.: Illustration de trois types de réponses impulsionales, tirée de Couairon & Chomaz (1997). (a), le taux de croissance maximal, parmi tous les nombres d'ondes, est négatif, le système est dit localement stable ; (b), le taux de croissance maximal est positif, et le taux de croissance associé aux ondes de vitesse de groupe nulles est négatif, le système est dit convectivement instable, la réponse impulsionale aux temps longs consiste en un paquet d'onde advecté dans la direction de l'écoulement ; (c) le taux de croissance maximal est positif, et le taux de croissance associé aux ondes de vitesse de groupe nulles est positif, le système est dit absolument instable, la réponse impulsionale aux temps longs consiste en un paquet d'onde qui croît sur place et envahit tout l'écoulement.

Il n'existe la plupart du temps pas de solution analytique au problème de Sturm-Liouville mentionné ci-dessus. Pour le résoudre numériquement, la méthode de Galerkin, déjà décrite dans la section 1.2, consiste à résoudre la dynamique linéarisée du fluide associée à chaque mode de poutre dans le vide pour ensuite projeter la contrainte sur les modes. On obtient alors un problème dynamique couplé par les matrices de masse, de raideur et d'amortissement ajoutés. Afin de réduire le coût de calcul de cette méthode, nous pouvons tirer profit du fait que la dynamique du fluide ait déjà été résolue dans l'espace de Fourier. De l'équation (1.42), on tire,

$$\frac{k\hat{f}}{g} = \mathcal{M}(\omega - \mathcal{U}k)^2 \hat{w}. \quad (1.51)$$

La transformée de Fourier inverse en x et t de cette équation permet d'écrire l'expression de la force linéaire en fonction du déplacement sous la forme d'une intégrale de convolution,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 f'(v) G(x-v) dv = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w, \quad (1.52)$$

où $G(x)$ est la transformée de Fourier inverse de $g(k)$,

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{g(k)} dk. \quad (1.53)$$

Nous serons parfois confrontés au cas simple où la réaction aérodynamique est de la forme $g = \alpha k$. Dans ce cas, de l'équation (1.51), on déduit aisément,

$$f = \mathcal{M}\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w. \quad (1.54)$$

1. Interaction entre un solide en vibration et un écoulement potentiel

Ce cas de figure correspond à la limite dite des *corps élancés*, qui se présente lorsque la longueur d'onde étudiée est grande devant les dimensions transversales du problème. Finalement, que ce soit sous la forme implicite (1.52) ou explicite (1.54), nous pouvons considérer que la force linéaire f exercée par le fluide en écoulement sur le solide est connue. La résolution pratique du problème couplé fluide-structure passe ensuite par l'utilisation de méthodes numériques. Nous allons en présenter trois. La première est la méthode de *Galerkin*, déjà introduite en section 1.2. Nous allons rapidement décrire son adaptation au cas élancé. La seconde sera dite *méthode des ondes*, et la troisième *méthode locale/globale*.

Méthode 1 : méthode de Galerkin

La décomposition modale du mouvement, équivalent de l'équation (1.16), s'écrit ici,

$$w(x, t) = e^{-i\omega t} \sum_n a_n \phi_n(x), \quad (1.55)$$

où $\phi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ sont les modes propres de la structure sans fluide et où il est d'ores et déjà supposé une dépendance harmonique en temps, à la fréquence $\omega \in \mathbb{C}$. Après une troncature à N modes, insertion de cette décomposition dans l'équation dynamique (1.29), et projection sur un mode $\phi_m(x)$, on aboutit à un problème linéaire pour le vecteur \vec{a} , dont il existe une solution non triviale si et seulement si le déterminant de la matrice de l'opérateur linéaire s'annule. C'est le cas pour une série discrète de valeurs de ω . La stabilité est assurée si la partie imaginaire de ces fréquences complexes sont toutes nulles ou négatives.

Lorsque la force linéaire f est de la forme simple donnée en équation (1.54), elle peut tout simplement être décomposée selon les mêmes modes de Galerkin (Païdoussis, 1970; Doaré & de Langre, 2002a,b; Lemaitre et al., 2005). Lorsque l'on est obligé de passer par la forme intégrale (1.52), la pression peut par exemple être décomposée selon des polynômes de Chebyshev (Guo & Paidoussis, 2000; Eloy et al., 2007; Doaré et al., 2011b).

Méthode 2 : Méthode des ondes

Donnons une autre définition d'une pulsation et d'un mode propre : Soient $k_n(\omega)$, $n = 1 \dots N_r$, les racines qui satisfont l'équation (1.42) à $\omega \in \mathbb{C}$ donné. La pulsation ω est une pulsation propre du système si les N_r ondes correspondantes peuvent être combinées pour satisfaire les N_r conditions aux limites quel que soit t . Dans les cas d'une structure de type poutre, $N_r = 4$, et l'expression du déplacement comme une superposition des quatre ondes à ω donné s'écrit,

$$w(x, t) = c_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} + c_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} + c_3 e^{i(k_3 x - \omega t)} + c_4 e^{i(k_4 x - \omega t)}. \quad (1.56)$$

L'introduction de cette expression du déplacement dans chacune des 4 conditions aux limites (1.49) donne quatre relations linéaires entre les coefficients c_1 à c_4 . Nous obtenons un système linéaire de la forme $A(\omega)\vec{c} = \vec{0}$, qui n'admet de solution non-triviale que si le déterminant de A s'annule, ce qui sélectionne une suite discrète de pulsations. Le mode propre est alors donné par la résolution du système linéaire et l'introduction des solutions dans l'équation (1.56). Cette méthode fournit les solutions exactes du problème, contrairement à la méthode 1, qui nécessite une troncature et ne permet donc que d'approcher les solutions.

Méthode 3 : Méthode locale/globale

La présentation faite ci-dessus des instabilités locales et globales conduit naturellement à se poser la question de l'influence des ondes instables sur l'instabilité de systèmes de dimension finie. La valeur limite aux grandes longueurs prise par les paramètres critiques d'instabilité du système de longueur finie peut être le plus souvent prédite par le critère de Kulikovskii (?). Dans le cas d'un tuyau sur fondation élastique, en l'absence d'amortissement, nous avons montré que c'est un critère local d'existence d'ondes neutres qui prévaut (Doaré & de Langre, 2002a), ce qui ne peut être prédit par le critère de Kulikovskii. Dans ce cas particulier, nous avons alors affaire à un système globalement instable, bien que localement neutre. Ce phénomène a été attribué à l'existence de bords sur-réfléchissants (Doaré & de Langre, 2002a, 2006). Nous aborderons cette question dans le chapitre 3 en l'étendant aux effets de l'amortissement.

Dans le cas de milieux spatialement inhomogènes, l'analyse locale de stabilité donne là-encore des informations utiles à la compréhension de l'instabilité globale. Nous avons en particulier étudié le cas d'un tuyau suspendu pour lequel la gravité induit une force de tension variant spatialement de zéro à l'aval au poids total du tuyau à l'amont. Nous montrons que le mode global reste confiné dans la zone localement instable où la tension est faible, ce qui permet d'établir des critères de stabilité globale simples (Doaré & de Langre, 2002b). Ce type d'approche a ensuite été étendu aux structures élancées en écoulement externe subissant la gravité ou des efforts de friction (Lemaître et al., 2005; de Langre et al., 2007).

Pour quantifier les rôles respectifs des ondes instables et des réflexions d'onde dans l'instabilité globale, une nouvelle méthode a été développée pendant ma thèse de doctorat dans le cadre du tuyau avec écoulement interne (Doaré, 2001) et généralisée à d'autres cas et publiée quelques années plus tard (Doaré & de Langre, 2006). Elle a été appliquée à d'autres domaines de la mécanique, tels les jets (Gallaire & Chomaz, 2004), les écoulements sanguins (Stewart et al., 2009; Heil & Hazel, 2011) et les fronts de flammes (Nichols et al., 2009).

Basé sur la même définition de la pulsation propre que la méthode 2, cette méthode tient en plus compte de la direction de propagation des ondes dans le milieu et permet d'expliquer certaines instabilités par l'existence de conditions aux limites sur-réfléchissantes. Elle considère pour cela le trajet des ondes émises par un forçage harmonique ponctuel à une pulsation $\omega \in \mathbb{C}$. Ce trajet est exprimé comme un produit de quatre matrices de transfert, quantifiant le trajet des ondes vers l'amont, leur réflexion à la condition aux limites amont, leur trajet vers l'aval, et leur réflexion à la condition aux limites aval. Soit \vec{a} un vecteur de taille N^- dont les éléments quantifient les amplitudes des ondes se propageant vers l'aval, leur amplitude après un trajet aller-retour a pour expression :

$$\vec{a}' = \mathcal{P}^- \mathcal{R}^- \mathcal{P}^+ \mathcal{R}^+ \vec{a} = \mathcal{G} \vec{a}. \quad (1.57)$$

où les matrices apparaissant dans cette équation sont des opérateurs linéaires décrivant le trajet aval, la réflexion aval, le trajet amont et la réflexion amont. Elles dépendent de la pulsation ω , au travers des nombres d'ondes. Si pour une pulsation donnée une des valeurs de G vaut l'unité, aucun forçage n'est nécessaire pour entretenir ces ondes, et nous avons affaire à une pulsation propre. En utilisant les propriétés des valeurs propres de produits de matrices, cette méthode permet non seulement de calculer les pulsations propres et modes propres, mais aussi de séparer les contributions des réflexions d'ondes et des ondes spatialement amplifiées dans l'instabilité globale.

1.4. Bilan

Dans ce chapitre, les équations linéarisées d'un problème d'interaction fluide-structure ont été présentées et détaillées dans le cas des structures élancées. Différents types d'analyses de stabilité ont été présentés. Nous pouvons aborder à présent les trois prochains chapitres en faisant référence à ce qui vient d'être présenté quand cela est nécessaire. Dans les chapitres 2 et 3, qui concernent les corps élancés, les concepts introduits ici pourront directement être utilisés. Par contre, dans le chapitre 4, où nous traiterons le cas des cordes vocales, nous serions tentés d'utiliser directement la théorie des écoulements potentiels pour résoudre la dynamique, en sélectionnant soigneusement les modes de structure utilisés pour la projection. Ce serait sans compter sur le décollement qui survient en aval des cordes vocales, qui met à mal l'hypothèse d'écoulement potentiel. Un certain nombre de travaux maintiennent cette hypothèse dans toute la partie de l'écoulement amont, et considèrent la pression constante après le décollement. Cette technique nécessite toutefois de bien connaître la position du point de décollement, ce qui sera l'objet de l'étude expérimentale du chapitre 4.

2. Influence du confinement sur l'instabilité de flottement de plaques élastiques

Références :

- Doaré, Sauzade, & Eloy (2011b), Flutter of an elastic plate in a channel flow : Confinement and finite-size effects. *Journal of Fluids and Structures*, 27(1) :76–88.
- Doaré, Mano, & Bilbao Ludena (2011a), Effect of spanwise confinement on flag flutter : Experimental measurements, *Physics of Fluids*, 23 :111704.
- Doaré & Eloy (2012), The influence of channel walls on flag flutter. In *Flow Induced Vibration*, Dublin, 2012.

Nous devons à Rayleigh (1879) la première mention du caractère instable de l'interface entre deux fluides en écoulement. Dans sa démonstration, Lord Rayleigh montre que l'interface de longueur infinie est toujours instable. Depuis lors, de nombreux travaux de recherche se sont penchés sur les instabilités de plaques, membranes en présence d'écoulements, qui sont vus comme des problèmes modèles de systèmes plus complexes rencontrés dans la vie courante ou dans l'industrie : les vibrations du papier défilant à grande vitesse dans les tambours des machines d'imprimerie (Watanabe et al., 2002b,a), les oscillations de la glotte en cause dans le ronflement (Aurégan & Dépollier, 1995; Huang, 1995), les vibrations d'assemblages de plaques parallèles dans l'industrie nucléaire (Guo & Paidoussis, 2000) ou bien encore le flottement de panneaux souples tels que les ailerons d'avion en aéronautique (Kornecki et al., 1976). Pendant très longtemps les modèles ont prédit des seuils d'instabilité très différents de ceux observés expérimentalement. Ce chapitre présente des recherches visant à améliorer la prédiction des seuils d'instabilité en tenant compte de la tri-dimensionnalité de l'écoulement et la proximité de parois d'un canal.

La première étude expérimentale publiée de l'instabilité d'un drapeau dans un écoulement a été réalisée par Taneda (1968). D'autres études expérimentales ont suivi, tant dans des écoulements d'air ouverts (Datta & Gottenberg, 1975; Shayo, 1980) ou confinés dans un canal (Huang, 1995; Aurégan & Dépollier, 1995), que dans des écoulements d'eau (Shelley et al., 2005). D'une manière générale une instabilité de flottement est observée lorsque la vitesse de l'écoulement dépasse une certaine vitesse.

Dans le même temps, plusieurs modèles ont été développés pour prédire les seuils d'instabilité, avec comme point commun un milieu solide 1D de type poutre ou plaque et un milieu fluide modélisé par un écoulement potentiel. Le premier modèle, que nous devons à Kornecki et al. (1976), s'inspire des travaux de Theodorsen (1935) pour introduire dans un modèle d'écoulement potentiel une circulation autour de la plaque et un sillage tourbillonnaire tel que la condition de Kutta est satisfaite à tout instant au bord aval¹. Cette technique a par la suite été utilisée pour obtenir des résultats complémentaires sur l'instabilité (Huang, 1995; Watanabe et al., 2002a). Le modèle impliqué dans ces travaux de recherche est dit *modèle simple sillage* pour le distinguer de la modélisation *double sillage*, introduite par Guo & Paidoussis (2000). Ici, la continuité de la pression est simplement imposée au bord aval de la plaque dans la recherche d'une solution potentielle². Cette technique a pour effet d'introduire artificiellement un sillage en amont de l'encastrement de la plaque, d'où l'appellation de *double sillage*. Une troisième classe de modélisation peut être identifiée dans la littérature, la modélisation dite *des corps élancés*. C'est la limite de l'équation (1.54), dans laquelle le coefficient α s'obtient par un calcul bi-dimensionnel de masse ajoutée dans le plan de la section du drapeau. En se basant sur les résultats de Lighthill (1960) obtenus dans le cadre de la propulsion de corps élancés, des modèles de ce type ont été utilisés

1. Il s'agit de la technique présentée en section 1.2 à laquelle on ajoute une contribution de la circulation.

2. Il s'agit donc exactement de la technique présentée en sections 1.2 et 1.3.3.

2. Influence du confinement sur l'instabilité de flottement de plaques élastiques

pour prédire les seuils d'instabilité (Datta & Gottenberg, 1975; Lemaître et al., 2005).

Les vitesses critiques prédictes par ces modèles n'étaient toutefois pas en très bon accord avec les observations expérimentales. En effet, les modèles 2D de type simple et double sillage prédisent des vitesses critiques généralement bien inférieures à celles mesurées, tandis que le modèle de type *corps élancé*, hormis dans le cas d'un ruban (Lemaître et al., 2005), prédit des vitesses critiques trop grandes. Ce constat a été réalisé dès 1980 par Shayo, qui a proposé un modèle prenant en compte le rapport d'aspect du drapeau H/L , où L est la corde et H l'envergure. Ce modèle prédit cependant qu'un drapeau élancé est moins stable qu'un drapeau de grand rapport d'aspect, en contradiction avec l'expérience, ce qui laisse penser que de trop fortes approximations ont été faites par Shayo (1980). L'idée a été reprise par Eloy et al. (2007), en proposant un modèle de type double sillage où l'écoulement 3D est résolu. Ce modèle a amélioré considérablement la prédiction du seuil d'instabilité et a démontré clairement ce que l'intuition et l'observation expérimentale nous indiquaient : le rapport d'aspect du drapeau est un paramètre qui a une influence importante sur le seuil d'instabilité.

Les limites d'une modélisation d'écoulement 2D sont aussi révélées par deux articles concurrents, publiés la même année, portant sur le flottement d'une plaque dans un canal et motivés par la problématique du ronflement (Aurégan & Dépollier, 1995; Huang, 1995). Le premier fait appel à une modélisation de type double sillage, tandis que le second utilise un modèle de type simple sillage. Dans les deux cas les vitesses critiques expérimentales sont supérieures à celles prédictes par la théorie. Pour circonvenir à ce problème Huang suggère que l'instabilité apparaît lorsque le taux de croissance dépasse non pas la valeur zéro, mais une valeur supérieure. En revanche, dans l'article de Aurégan & Dépollier, il est suggéré que la différence vient de la modélisation 2D, alors que l'écoulement dans le canal est 3D. Un facteur de correction dépendant des conditions de confinement de l'écoulement est proposé, qui permet d'améliorer la prédiction. Bien que très empirique, cette correction semble plus en accord avec les phénomènes physiques en jeu. Il est enfin prédict dans cet article que le confinement latéral par des parois perpendiculaires au drapeau engendre un phénomène de blocage qui est de nature à rendre l'écoulement 2D.

La motivation initiale du travail présenté dans ce chapitre a été de quantifier cet effet de blocage dû aux parois latérales, qui jusqu'alors n'était que suggéré dans quelques travaux de recherche. Par suite, ce travail a été étendu aux autres effets de parois en considérant une géométrie de canal complète.

2.1. Position du problème

Nous nous intéressons au problème schématisé sur la figure 2.1. Il s'agit d'une plaque mince de largeur $2H$, de densité surfacique μ , de rigidité en flexion par unité de longueur dans la direction latérale B se trouvant dans un conduit rectangulaire de hauteur $2D$ et de largeur $H + 2C$. L'hypothèse d'écoulement potentiel incompressible est ici encore faite et nous prenons pour point de départ de notre modélisation les résultats obtenus en section 1.3 pour une structure élancée quelconque. Modélisée comme une plaque élastique sous l'approximation d'Euler-Bernoulli, la déformation du solide est supposée ne dépendre que de la coordonnée longitudinale X . Puisqu'il n'y a pas de déformation selon la coordonnée latérale Z , nous pouvons écrire l'équation d'équilibre (1.28) par unité de longueur dans la direction Z en considérant l'effort moyen exercé par le fluide :

$$B \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = \frac{1}{H} \int_{\partial\Omega} (-P \cdot n) e_y dL, \quad (2.1)$$

où $B = EH_p^3/(1-\nu^2)$ pour une plaque mince d'épaisseur H_p de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . La ligne de contour définissant l'interface fluide-solide $\partial\Omega$ est ici composée d'un segment pour la surface supérieure et un autre segment pour la surface

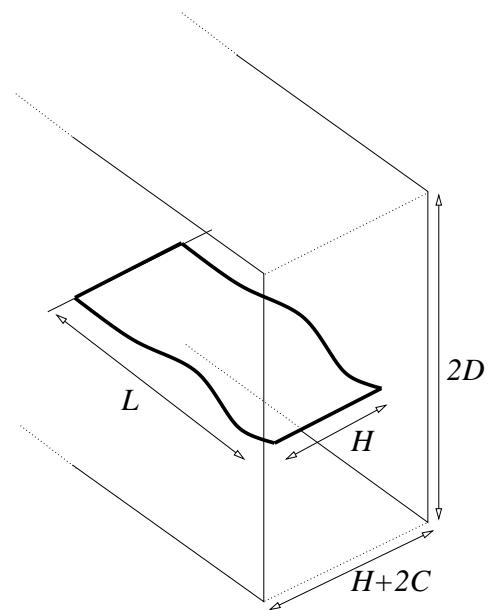


FIGURE 2.1.: Vue schématique d'une plaque encastrée-libre dans un conduit rectangulaire.

2.1. Position du problème

inférieure du drapeau. Ainsi, dans la suite, le second membre sera écrit sous la forme compacte suivante :

$$\frac{1}{H} \int_{\partial\Omega} (-P \cdot \underline{n}) \underline{e}_y dL = \langle [P] \rangle, \quad (2.2)$$

où les crochets $[.]$ indiquent un saut de part et d'autre de la plaque et les angles $\langle . \rangle$ signifient que l'on en prend la valeur moyenne sur la largeur de la plaque. Enfin, notons que dans ce chapitre, les raideurs et amortissements linéaires additionnels sont pris nuls ($\mathcal{A} = 0$).

Écrivons à présent le problème sans dimension. Les longueurs et temps caractéristiques utilisés sont respectivement la demi-largeur de la plaque $\eta = H/2$ et le temps $\tau = H^2 \sqrt{\mu/B}/4$. Toutes les variables du problème issues de cet adimensionnement sont notées par convention en lettres minuscules,

$$x = \frac{2X}{H}, \quad z = \frac{2Z}{H}, \quad t = \frac{4TB}{\mu H^2}, \quad w = \frac{2W}{H}, \quad (2.3)$$

$$p = \frac{P}{\rho U^2}, \quad \psi = \Psi \sqrt{\mu/B}. \quad (2.4)$$

On peut réduire le nombre de paramètres à quatre, un rapport de masse, une vitesse sans dimension et deux paramètres géométriques caractérisant le confinement latéral et transversal, qui ont respectivement pour expression :

$$m = \frac{\rho_f H}{2\mu}, \quad u = \frac{UH}{2} \sqrt{\frac{\mu}{B}}, \quad c = \frac{2C}{H}, \quad d = \frac{2D}{H}. \quad (2.5)$$

En introduisant ces variables et paramètres sans dimension dans l'équation (2.1), on obtient l'équation dynamique sans dimension suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m \langle [p] \rangle. \quad (2.6)$$

Il reste à déterminer la pression p , qui peut être exprimée linéairement par rapport au déplacement. Pour atteindre ce but, notre point de départ est le problème satisfait par le potentiel normalisé $\hat{\varphi}$ dans l'espace de Fourier de la coordonnée longitudinale x (cf. équations 1.39-1.41). La géométrie complète du problème dans l'espace de Fourier est donnée en figure 2.2a. En considérant la symétrie du problème par rapport à l'axe (Oz) et son anti-symétrie par rapport à (Oy), on peut se contenter d'étudier seulement un quart du domaine rectangulaire, comme représenté en figure 2.2b, de sorte que l'équivalent des équations (1.39-1.41) gouvernant le potentiel normalisé $\hat{\varphi}$, s'écrivent dans notre cas particulier,

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial z^2} = k^2 \hat{\varphi}, \quad \text{pour } z \in [0, 1+c], y \in [0, d] \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} = 1 \quad \text{pour } z < 1, y = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = d, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = 1+c. \quad (2.10)$$

Enfin, la fonction g apparaissant au second membre de la relation de dispersion (1.42) est ici,

$$g(k, c, d) = -\frac{k}{2} \langle [\hat{\varphi}] \rangle = -k \langle \hat{\varphi}_{z=0+} \rangle. \quad (2.11)$$

Cette fonction apparaît en facteur de tous les termes fluides de la relation de dispersion. Elle s'apparente physiquement à une réaction aérodynamique qui dépend de trois longueurs : la longueur d'onde, le confinement latéral d et le confinement transversal c .

Le travail consiste donc à résoudre le jeu d'équations (2.7-2.10) afin d'obtenir la fonction g qui intervient dans la relation de dispersion. Une fois la relation de dispersion connue, elle peut être utilisée pour réaliser une analyse de stabilité locale, telle que présentée en section 1.3.2, ou une analyse de stabilité globale, présentée en section 1.3.3.

2. Influence du confinement sur l'instabilité de flottement de plaques élastiques

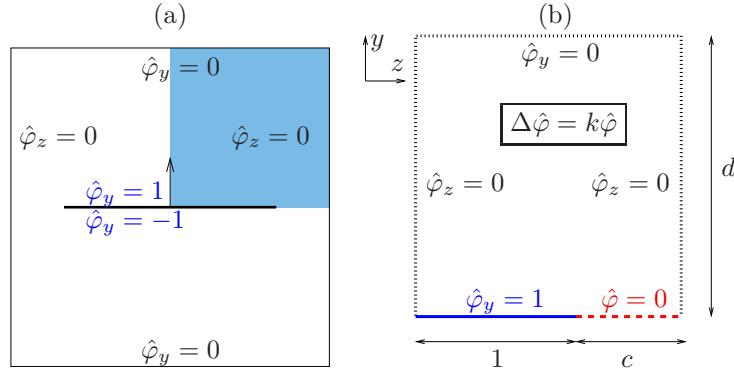


FIGURE 2.2.: (a) Géométrie complète du problème dans l'espace de Fourier de la coordonnée longitudinale. (b) Nouvelle géométrie et conditions aux limites après prise en compte des symétries du problème.

2.1.1. Les différents cas limites de la fonction g

Nous présentons ici le comportement de la réaction aérodynamique g . Dans la plupart des cas limites de la littérature, il existe une solution analytique au problème de Helmholtz défini plus haut. Pour les cas 3D plus complexes, la solution $\hat{\varphi}_{z=0+}$ est recherchée sur la base de polynômes de Chebyshev du second type (Eloy et al., 2007; Doaré et al., 2011b) ou calculée par la méthode des éléments finis (Doaré et al., 2011b; Doaré & Eloy, 2012).

Limite 2D

Le problème bidimensionnel d'une plaque dans un écoulement infini d'un seul côté a été étudié de manière intensive dans le cadre de l'étude des panneaux souples en présence d'un écoulement potentiel (Benjamin, 1963; Brazier-Smith & Scott, 1984; Crighton & Oswell, 1991; Peake, 2001). Dans ce cas, g prend une forme tout à fait triviale :

$$g_{2D1} = \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

S'il y a un écoulement des deux côtés, on trouve naturellement que la résultante des efforts aérodynamiques est doublée (Shelley et al., 2005) :

$$g_{2D2} = 1. \quad (2.13)$$

En présence de parois latérales (d fini), g est de la forme (Guo & Paidoussis, 2000) :

$$g_{2Dd}(k, d) = \frac{1}{\tanh(kd)}. \quad (2.14)$$

Si l'on repousse les parois latérales à l'infini ($d \gg 1$), on retrouve naturellement la limite g_{2D2} .

Limite des corps élancés, parois à l'infini

La limite des corps élancés correspond à une situation telle qu'à chaque valeur de l'abscisse x et à chaque instant, l'écoulement dans le plan (y, z) perpendiculaire au drapeau ne dépend que du déplacement du solide à cette abscisse $w(x, t)$. Dans notre problème, cette limite s'obtient en pratique en considérant que $k \ll 1$, mais elle peut aussi être déduite des résultats de Lighthill (1960) obtenus dans le cadre de la propulsion des corps élancés,

$$g_{SB}(k) = \frac{k\pi}{4}. \quad (2.15)$$

Cas 3D sans parois ($c, d = \infty$)

Le cas général d'un drapeau de largeur finie dans un écoulement sans parois ($c = \infty, d = \infty$) a été résolu par Eloy et al. (2007). Bien que ne présentant pas de solution analytique, un modèle approché a pu être obtenu en combinant les développements asymptotiques pour $k \gg 1$,

$$g(k) = 1 - \frac{1}{2k} + \mathcal{O}(k^2), \quad (2.16)$$

et pour $k \ll 1$ (équation 2.15). La fonction g approchée ainsi obtenue a pour expression,

$$g_{3D\infty} \simeq 1 - \frac{1}{2k + \exp[(\pi/4 - 2)k]}. \quad (2.17)$$

Elle donne des valeurs très proches des solutions numériques. Le fait d'avoir une expression analytique, même approchée, est crucial pour calculer la transformée de Fourier inverse $G(x)$ (équation 1.53) qui intervient dans l'expression de $f'(x)$ sous forme intégrale (équation 1.52).

Cas 3D avec parois transversales (c fini, $d = \infty$)

Ce cas a été étudié dans la référence (Doaré et al., 2011b). La méthode utilisée est similaire au cas 3D sans parois : on recherche une forme empirique de la solution sous forme de deux développements asymptotiques, l'un à k grand et l'autre à k petit puis on combine les deux expressions pour obtenir une forme analytique approchée pour tout k ,

$$g_{3Dc}(k, c) \simeq 1 - \left[\frac{1}{g_{LSc}} + \exp \left(g_{SBc} - \frac{1}{1 - g_{LSc}} \right) \right]^{-1}, \quad (2.18)$$

où g_{SBc} est la limite à k petit de g (limite des corps élancés, ou petit rapport d'aspect),

$$g_{SBc}(k, c) \simeq \frac{k\pi}{4} \left[1 + 0.805 \ln \left(\frac{c + 0.189}{c} \right) \right], \quad (2.19)$$

et g_{LSc} est la limite à k grand de g (grand rapport d'aspect),

$$g_{LSc}(k, c) \simeq 1 - \frac{\left(1 + \frac{0.18}{(kc)^2} \right)^{-0.075}}{2k}. \quad (2.20)$$

Cas 3D général d'un drapeau dans un canal rectangulaire

Dans le cas où c et d ont des valeurs finies, on doit se contenter de solutions numériques (Doaré & Eloy, 2012). La fonction g est tracée en figure 2.3a pour une grande valeur de d avec c compris entre 3×10^{-4} et 3 tandis que sur la figure 2.3b, c est fixé à une grande valeur, $c = 3$, et d varie de 3×10^{-3} à 30. On retrouve ici encore une limite de type corps élancés lorsque $k \ll 1$: g devient une fonction linéaire $g = Ak$ où A dépend des paramètres géométriques c et d . De même, g a un comportement en $\tanh(kd)$ pour kd grand et tend de fait vers l'unité lorsque $k \rightarrow \infty$. Le modèle $3D\infty$ est recouvré lorsque c et d sont grands.

Comme attendu, c'est sur le comportement asymptotique à $k \rightarrow 0$ que la différence entre les modèles 2D et 3D est la plus significative. Dans l'équation (1.42), on peut identifier le terme $\tilde{m}(k) = 2Mg/k$ à une masse ajoutée dépendant du nombre d'onde. Nous avons $\lim_{k \rightarrow 0} \tilde{m} = \infty$ dans le cas 2D, et $\lim_{k \rightarrow 0} \tilde{m} = A$ dans le cas 3D. Cette limite correspond au cas extrême où l'on considère une plaque de longueur infinie en oscillation de translation. Dans la limite 2D, le déplacement de cette plaque nécessite de déplacer une quantité infinie de fluide et la masse ajoutée tend naturellement vers l'infini. En revanche, dans le cas 3D, la largeur finie de la plaque autorise le fluide à contourner le solide et l'inertie du fluide mis en mouvement dans l'oscillation est une quantité finie. Dans ce cas 3D, notons que dans la limite $k \rightarrow 0$, le jeu d'équation (2.7-2.10) est un problème de Laplace que l'on rencontre lorsqu'on effectue un calcul de masse ajoutée classique d'un solide en translation dans un fluide parfait 2D (Blevins, 1990). Enfin, notons une propriété particulière de la fonction g qui n'a pu être mise en évidence par les différents cas limites présentés ci-dessus : g a un comportement non monotone et présente un maximum en $(1/d)$ pour $k \sim 1.6$ (figure 2.3b). C'est à partir de cette valeur du nombre d'onde que les modèles 3D et 2D donnent des valeurs de g proches.

2. Influence du confinement sur l'instabilité de flottement de plaques élastiques

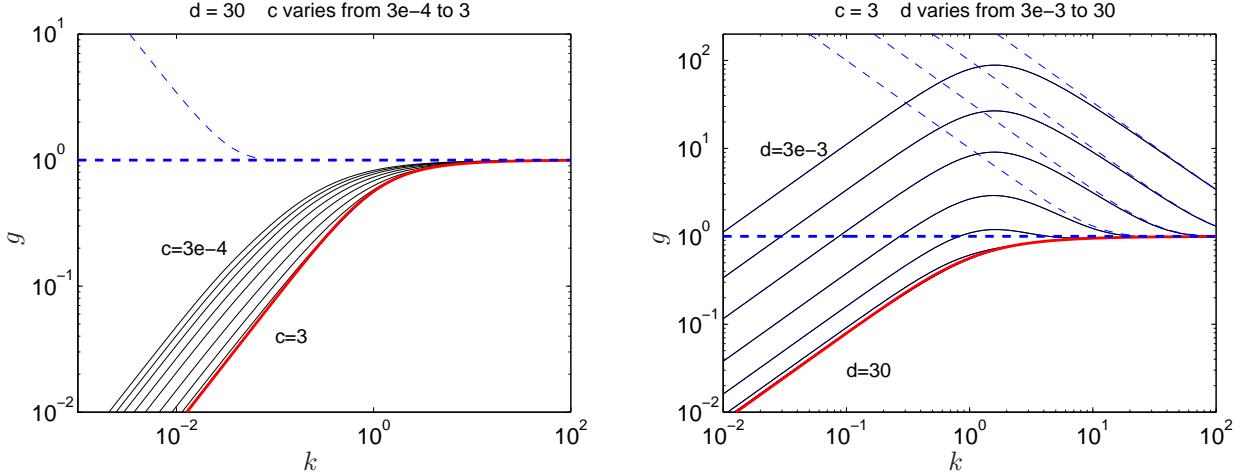


FIGURE 2.3.: Fonction $g(k)$ calculée numériquement pour différents jeux des paramètres c et d (ligne noire pleine) et comparée à différents cas limites de la littérature ; g_{2D2} (ligne bleue épaisse hachurée) ; g_{2Dd} (ligne bleue fine hachurée) ; $g_{3D\infty}$ (ligne rouge pleine épaisse).

2.2. Analyse de stabilité locale

Maintenant que la relation de dispersion du système est connue, nous pouvons l'utiliser pour réaliser une analyse de stabilité. On peut aisément vérifier que le milieu ainsi décrit est localement instable quel que soit c , d et $u \neq 0$. Dans tous ces cas on peut en effet trouver une valeur de $k \in \mathbb{R}$ laquelle $\text{Im}(\omega) > 0$ avec $D(k, \omega) = 0$.

Intéressons-nous ici à la description du type d'instabilité, absolue ou convective, en fonction des paramètres c et d . Pour ce faire, nous utilisons une méthode numérique introduite par de Langre (2002a). Cette méthode suppose que la relation de dispersion puisse être écrite, à l'aide d'un changement de variable, sous la forme,

$$D(\omega, k; a, b) = R(k) - \omega^2 - aF(k)(\omega - bk)^2, \quad (2.21)$$

ce qui est notre cas, à la condition que le milieu soit dépourvu d'amortissement. On utilise alors les symétries particulières de cette relation de dispersion pour représenter le seuil de transition absolu-convectif comme une courbe paramétrique dans l'espace des paramètres, où le paramètre est le nombre d'onde k .

Les courbes de transition absolu-convectif résultantes sont tracées dans le plan $(m, u/m)$ en figures 2.4a et b pour les mêmes valeurs des paramètres que les figures 2.3a et b. Toutes ces courbes partagent une même limite aux grandes valeurs du rapport de masse m . Cette limite ($u/m = 0.148$) est le double de celle prédicta par Crighton & Oswell (1991), dans le cas d'une modélisation 2D et d'un écoulement d'un seul côté de la plaque, alors qu'il est des deux côtés dans notre cas. Cette limite est atteinte lorsque $k \rightarrow \infty$, ce qui est consistant avec le fait que la limite 2D est atteinte pour k grand. L'asymptote verticale aux faibles valeurs de m correspond à la limite opposée des corps élancés ($k \ll 1$). Dans le cas du tuyau avec écoulement interne, décrit par les mêmes équations que le drapeau dans la limite des corps élancés, Kulikovskii & Shikina (1988) ont montré que le seuil de transition absolu/convectif ne dépend que du rapport de masse. Nous observons sur les figures 2.4a et b que plus le confinement est important, plus la valeur du rapport de masse à la transition est faible. Ceci s'explique par l'existence d'un effet de masse ajoutée d'autant plus important que le confinement est important. Enfin, les courbes de transition tendent vers différents cas limites de manière consistante.

D'une manière générale, on peut conclure que le confinement a pour effet de favoriser l'instabilité convective. Ce résultat est consistant avec le constat général selon lequel l'instabilité convective est favorisée par les rapports de masse importants (de Langre, 2002a) puisque le confinement a généralement pour conséquence d'augmenter la masse ajoutée apparente de tout solide en vibration (Gibert, 1988).

2.3. Stabilité du drapeau de longueur finie dans un canal rectangulaire

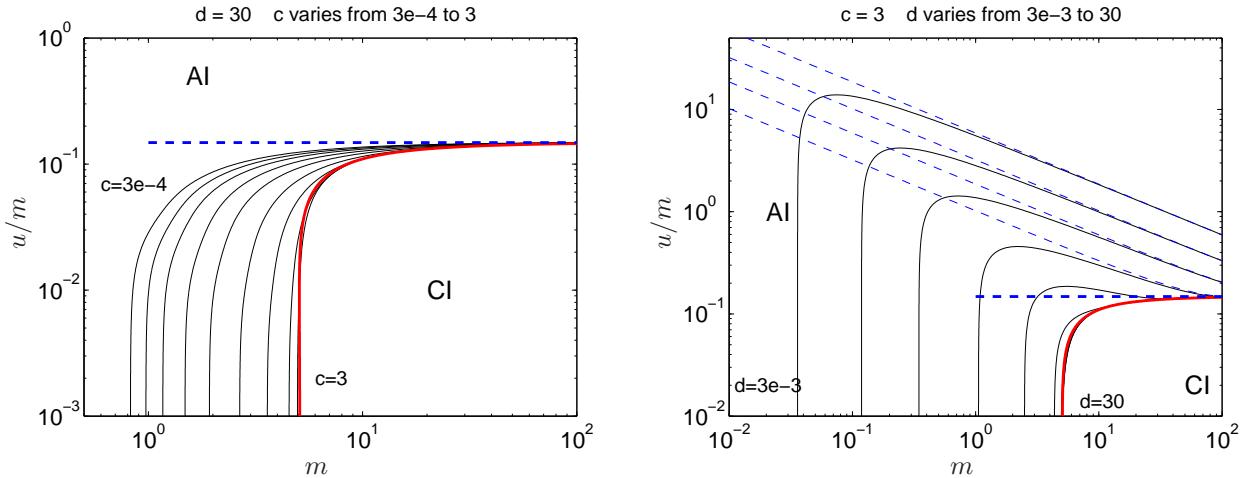


FIGURE 2.4.: Courbes critiques de transition entre instabilité convective et absolue. Les conventions utilisées pour les légendes sont les mêmes qu'en figure 2.3.

2.3. Stabilité du drapeau de longueur finie dans un canal rectangulaire

Nous décrivons à présent les propriétés de stabilité du drapeau de longueur finie, notée L , et doté des conditions aux limites d'une plaque encastrée-libre données en équation (1.49). Le problème est à présent adimensionné en utilisant L comme longueur caractéristique, de sorte que nous introduisons les variables sans dimension suivantes,

$$x = \frac{X}{L}, y = \frac{Y}{L}, z = \frac{Z}{L}, w = \frac{W}{L}, t = \frac{UT}{L}, p = \frac{P}{\rho U^2}, \quad (2.22)$$

et les paramètres sans dimension suivants,

$$M^* = \frac{\rho L}{M}, U^* = \sqrt{\frac{M}{B}} LU, H^* = \frac{H}{L}, C^* = \frac{C}{L}, D^* = \frac{D}{L}. \quad (2.23)$$

Dans cette approche de longueur finie, le problème dépend de quatre paramètres alors que nous en avons trois dans l'analyse locale. Le nouveau paramètre essentiel qui apparaît est le rapport d'aspect du drapeau. Dans cette approche de longueur finie, l'équation dynamique a pour expression,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{U^{*2}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = M^* \langle [p] \rangle. \quad (2.24)$$

Les conditions aux limites sont celles d'une plaque encastrée en $x = 0$ et libre $x = 1$ (cf. éq. 1.49).

L'ensemble des résultats numériques ont été obtenus à l'aide d'une méthode de Galerkin présentée en section 1.3.3. Ici le déplacement $w(x, t)$ est décomposé selon les modes d'une poutre encastrée-libre dans le vide et la dérivée de la pression $p'(x)$ décomposée selon des polynômes de Chebyshev. Dans tous les cas particuliers où nous avons une expression analytique de $g(k)$, une expression analytique de sa transformée de Fourier est accessible, et est directement utilisée dans les calculs numériques. Dans le cas général où nous n'avons $g(k)$ que numériquement pour un nombre discret de valeurs d'onde, $G(x, C^*, D^*, H^*)$ est calculé à l'aide d'une intégration numérique en utilisant :

$$G(x) = \frac{1}{x} + G_1(x), \quad (2.25)$$

avec,

$$G_1(x) = \int_0^\infty \sin(kx) \left(\frac{1}{g(k)} - 1 \right) dk. \quad (2.26)$$

Puisque son intégrande tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, cette dernière intégrale est plus facile à calculer numériquement que sous la forme donnée en équation (1.53).

2. Influence du confinement sur l'instabilité de flottement de plaques élastiques

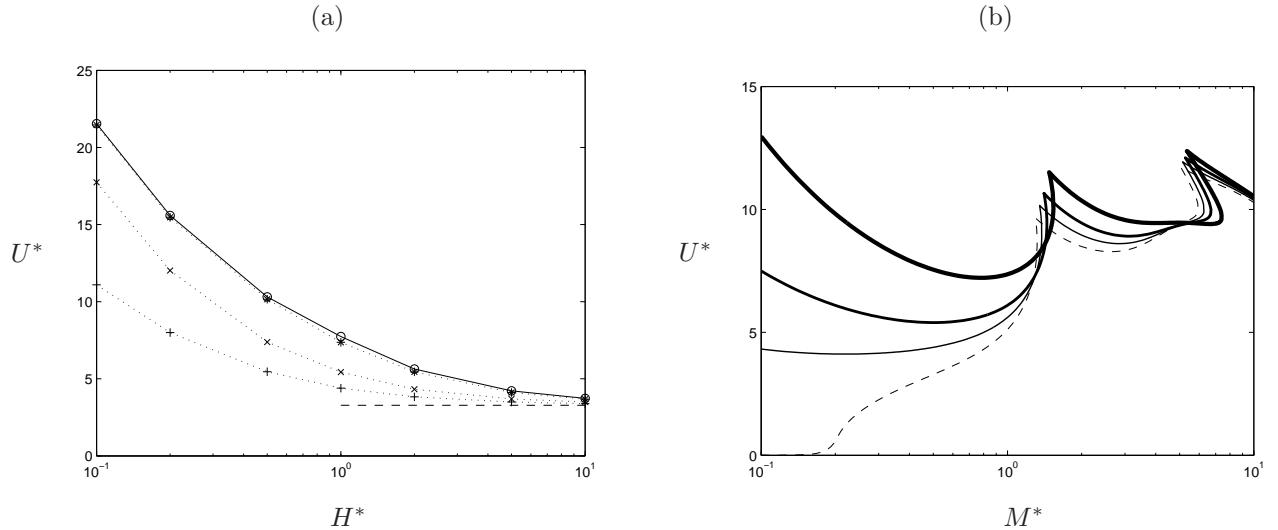


FIGURE 2.5.: (a) Vitesse critique d'instabilité de flottement en fonction du rapport d'aspect H^* pour différentes valeurs du paramètre de confinement $C^* : \infty$ (\circ), 10^{-1} ($*$), 10^{-2} (\times), 10^{-4} ($+$). (b) Vitesse critique d'instabilité de flottement en fonction du rapport de masse M^* pour différentes valeurs du paramètre de confinement $C^* : \infty$ (ligne épaisse), 10^{-2} (ligne semi épaisse), 10^{-4} (ligne fine). Dans les deux figures, la limite 2D est tracée en ligne fine hachurée.

2.3.1. Effet des parois transversales (C^* fini, $D^* = \infty$)

Résultats numériques

Sur la figure 2.5a est tracée la vitesse critique d'apparition de l'instabilité de flottement en fonction du rapport d'aspect H^* pour une valeur assez faible du rapport de masse $M^* = 0.5$ et pour différentes valeurs du paramètre de confinement latéral C^* en utilisant le modèle $3D_c$. La ligne horizontale hachurée correspond à la limite $_{2D\infty}$. Ce graphique montre que la limite $_{2D\infty}$ est atteinte lorsque $H^* \rightarrow \infty$ ou $C^* \rightarrow 0$. La convergence liée au confinement transversal est toutefois très lente puisque même pour $C^* = 10^{-4}$, une différence significative est observée pour des valeurs de H^* inférieures à 1.

Sur la figure 2.5b c'est l'effet de M^* qui est mis en évidence, à $H^* = 1$ fixé. Puisqu'aux petits rapports de masse la différence entre les modèles $3D_\infty$ et $_{2D\infty}$ est la plus significative (Eloy et al., 2007) et puisque le modèle $3D_c$ fait passer continûment la vitesse critique d'un modèle à l'autre, l'effet de C^* est surtout visible aux faibles valeurs du rapport de masse. Ici encore, on observe une convergence très lente vers le modèle $_{2D\infty}$ quand $C^* \rightarrow \infty$.

Il est à noter que de manière similaire Michelin & Llewellyn Smith (2009) ont observé que les modèles simples et double sillage tendaient à prédire des vitesses critiques similaires aux grandes valeurs du rapport de masse. Ceci se comprend aisément en voyant le paramètre M^* non pas comme un rapport de masse, mais comme un paramètre de longueur. La différence entre ces deux modèles se situant au niveau des conditions aux limites, il n'est pas étonnant qu'elle soit de moins en moins importante à mesure qu'on augmente la longueur du système.

Résultats expérimentaux

Des expériences ont été réalisées à l'ENSTA pour valider les résultats numériques sur l'effet du confinement latéral C^* . Le dispositif expérimental est schématisé en figure 2.6. Il est constitué d'une conduite rectangulaire dans laquelle est disposé un mât sur lequel on peut encastre des drapeaux de différentes tailles. Les dimensions du canal peuvent être réduites en disposant des plaques de plexiglas de différentes tailles à l'intérieur, comme cela est représenté en figure 2.6c. Lorsque l'on souhaite encore réduire les dimensions du canal avec plus de précision et de raffinement, des bandes successives de scotch sont collées sur les parois. Ce dispositif permet

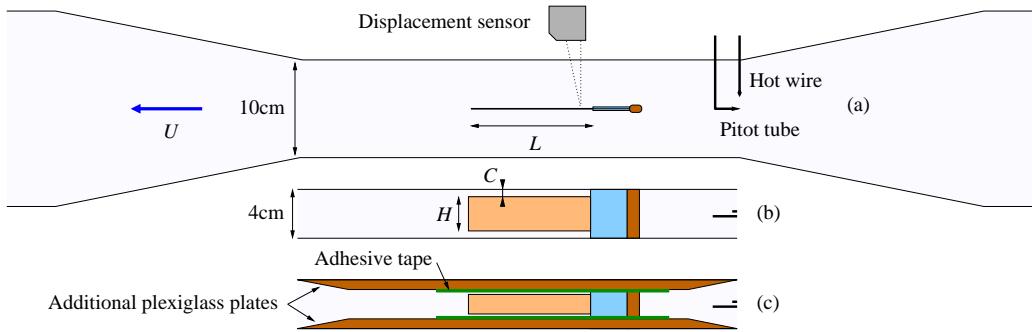


FIGURE 2.6.: Schéma du dispositif expérimental utilisé pour mesurer l'effet de blocage des parois latérales. (a), vue de dessus ; (b), vue de côté ; (c), vue de côté avec des plaques additionnelles en plexiglas pour réduire la section du canal.

de faire varier les dimensions du canal dans une large gamme de confinements. La vitesse de l'écoulement est mesurée à l'entrée de la section à l'aide d'un tube de Pitot. Lorsque la section effective à l'endroit du drapeau est différente de celle où se trouve le tube de Pitot, nous invoquons la conservation du débit et considérons un écoulement homogène de type bouchon pour estimer la vitesse au niveau du drapeau. Une mesure des profils de vitesse à différents endroits de la veine montre que cette approximation peut induire une erreur d'au plus 10% dans l'estimation de la vitesse critique (Doaré et al., 2011a).

La figure 2.7 compare le modèle théorique $3D_c$ avec des mesures expérimentales. Un bon accord général est observé. De plus l'insert montre que lorsque C^* diminue, la vitesse critique converge vers la vitesse critique prédictive par un modèle 2D avec une loi en $C^{*0.15}$, à la fois expérimentalement et numériquement.

2.3.2. Cas général d'un drapeau dans un canal rectangulaire

Donnons à présent quelques résultats d'analyse de stabilité d'un drapeau de longueur finie dans un canal rectangulaire quelconque. À la différence des cas précédents, nous n'avons ici accès à la fonction $g(k)$ qui sous une forme numérique en un nombre discret de valeurs de k . Il en est de même pour sa transformée de Fourier inverse $G(x)$. Pour un jeu de paramètres $(C^*, D^*, H^*, U^*, M^*)$, la méthode nécessite donc un nombre conséquent de calculs numériques : résolution d'un problème de Helmholtz pour un grand nombre de valeurs de k , transformée de Fourier inverse de $g(k)$ pour un nombre suffisant de valeurs de x comprises entre -1 et 1 , calcul de diverses projections sur les modes de Galerkin et les polynômes de Chebyshev, et enfin résolution d'un problème aux valeurs propres. Ces calculs deviennent assez coûteux dès lors que l'on souhaite explorer l'espace des paramètres.

Les figures 2.8a-c présentent des courbes de stabilité dans le plan (M^*, U^*) lorsque H^* varie, pour deux valeurs de c différentes et $D^* = 0.2$. On montre que lorsque H^* devient grand la courbe de stabilité de la présente méthode numérique converge vers la courbe de stabilité du modèle $2D_d$ obtenue par Guo & Paidoussis (2000). Cette convergence est d'autant plus rapide que c est petit, ce qui est cohérent avec les résultats de la précédente section, où nous avons montré que le confinement des parois latérales fait tendre vers le problème 2D.

2.4. Bilan et perspectives

Dans ce chapitre a été résumée une étude complète des propriétés de stabilité d'une plaque encastrée-libre modélisée sous l'approximation d'Euler-Bernoulli dans un écoulement potentiel et irrotationnel de canal. Tout d'abord, une étude complète de la réaction aérodynamique dans l'espace de Fourier a été présentée en rappelant l'ensemble des résultats cas limites trouvés dans la littérature. Cette réaction a été utilisée pour réaliser une étude de stabilité locale. Le seuil de transition entre instabilité absolue et instabilité convective a été déterminé à partir des résultats numériques de la réaction aérodynamique. Enfin des résultats de stabilité globale ont été

2. Influence du confinement sur l'instabilité de flottement de plaques élastiques

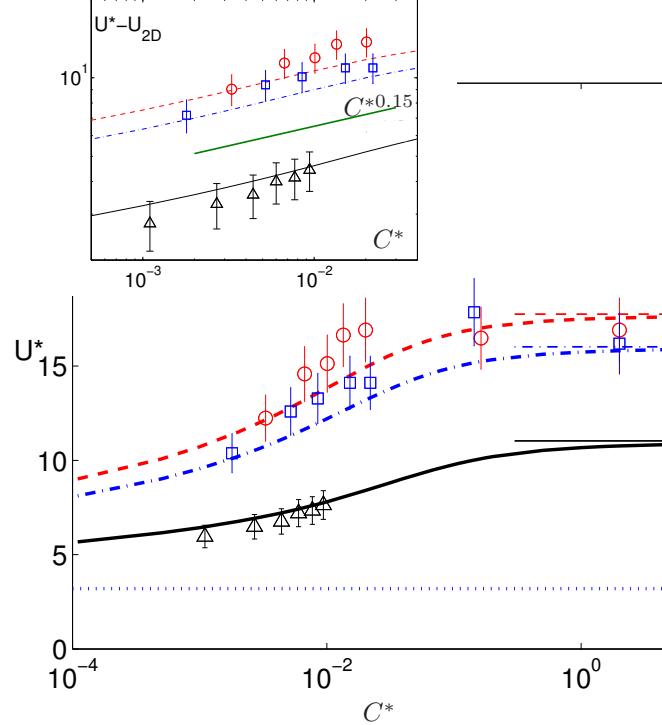


FIGURE 2.7.: Vitesse critique d'instabilité de flottement en fonction du paramètre de confinement C^* . Plaque 1 : $M^* = 0.48$, $h = 0.16$, (o), expérience ; (—), modèle $3D_c$. Plaque 2 : $M^* = 0.48$, $h = 0.2$, (□), expérience ; (---), modèle $3D_c$. Plaque 3 : $M^* = 0.53$, $h = 0.43$, (△), expérience ; (—), modèle $3D_c$. Le modèle $3D_\infty$ est tracé en lignes fines et la ligne pointillée correspond au modèle $2D_\infty$ à $M^* = 0.5$. Dans l'insert, la différence entre la vitesse critique et celle donnée par un modèle 2D est tracée en échelle logarithmique, mettant en évidence un comportement asymptotique de type loi de puissance avec un coefficient de puissance égal à 0.15.

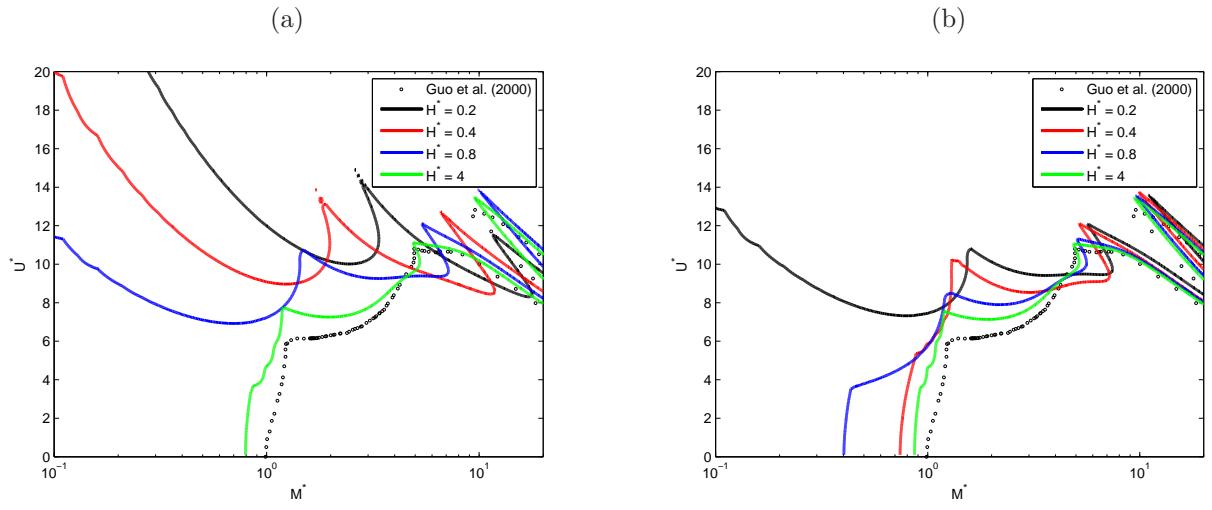


FIGURE 2.8.: Courbes de stabilité marginale à $D^* = 0.2$ pour différentes valeurs de H^* , comparées avec les résultats 2D de Guo & Paidoussis (2000) ; (a), $c=3$; (b), $c=0.001$.

présentés. Nous avons à présent un modèle 3D complet donnant accès aux propriétés de stabilité d'un drapeau dans un canal rectangulaire. Les cas limites obtenus par ce modèle sont en cohérence avec ceux trouvés dans la littérature et des expériences ont permis de valider la démarche générale de modélisation.

Il a été montré que l'effet de blocage lié au confinement transversal (C) fait font converger les vitesses critiques vers celles prédictes par un modèle 2D mais que cette convergence est très lente, de sorte que la modélisation 2D correspond à des situations en pratique inaccessibles expérimentalement. De premiers résultats sur le confinement latéral (D) ont été présentés. Ceux-ci sont en cohérence avec les résultats numériques de Guo & Paidoussis (2000) : aux grands rapports d'aspect et aux petites valeurs du confinement transversal, les vitesses critiques sont proches de celles prédictes par le modèle $2D_d$. Il ressort finalement de l'ensemble de ces résultats que les seuls cas qui puissent être réellement correctement modélisés par l'approximation 2D sont les fils oscillants dans un écoulement de film de savon (Zhang et al., 2000).

L'hypothèse d'effets visqueux négligeables qui a conduit à considérer un écoulement potentiel et irrotationnel mérite à présent d'être discutée dans le contexte des forts confinements. Pour le cas du confinement transversal, on observe sur la figure 2.7 que la diminution de la vitesse critique liée au rapprochement de parois transversales est visible à partir de $C^* \sim 10^{-2}$. Expérimentalement, des mesures de couche limite ont montré que c'est précisément à ce moment-là que les bords du drapeau pénètrent la couche limite. On peut alors se demander si ce phénomène a une influence sur les résultats expérimentaux et si le bon accord entre théorie et expériences de la figure 2.7 pourrait être du à un autre phénomène que l'effet de blocage purement potentiel. On peut identifier trois effets liés à la présence de viscosité. Les deux premiers sont des effets purement visqueux. Tout d'abord, la friction visqueuse peut stabiliser la plaque et donc augmenter la vitesse critique³. Ensuite, à cause de la viscosité, le jeu effectif entre la plaque et la paroi peut être plus petit, ce qui a pour effet de réduire la vitesse critique. Ces deux phénomènes visqueux ont donc des effets opposés. Il est toutefois probable qu'ils aient une influence négligeable, car les effets visqueux de ce type sont surtout influents dans la direction de l'écoulement, mais pas dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, dans laquelle s'effectue le mouvement de la plaque. Enfin le troisième effet est la conséquence de la diminution de la vitesse dans la direction axiale. Localement, à cet endroit les effets déstabilisants de la raideur ajoutée en u^2 et d'amortissement ajouté de Coriolis en u sont réduits consécutivement à la diminution de la vitesse locale, et donc induire une augmentation de la vitesse critique. Cet effet explique peut-être la légère différence entre théorie et expérience, qui semble plus importante aux petits rapports d'aspect, pour lesquels la taille de la couche limite relative à la largeur du drapeau est plus importante.

Diverses pistes peuvent être suivies pour compléter ce travail. Nous en mentionnons ici quelques-unes.

- La validation expérimentale des résultats numériques dans le cas du canal complet (C^*, D^* finis).
- Tout comme cela a été fait dans le cas du confinement C , l'analyse des effets de viscosité devrait être effectuée. Plusieurs travaux 2D ayant introduit un profil de couche limite dans la modélisation peuvent servir de référence (Lucey & Carpenter, 1992; Wippler & Ehrenstein, 2000, 2001)
- La saturation non linéaire des instabilités a été caractérisée dans les cas limites des corps élancés ou 2D (Yadykin et al., 2001; Eloy et al., 2012). Il conviendrait de faire un travail similaire dans le cas confiné.
- L'influence de l'amortissement sur les résultats présentés dans ce chapitre devrait être étudiée. Ce point sera pour partie abordé aux chapitres 3 et 6.

3. Il est à noter que la viscosité peut aussi avoir un effet déstabilisant, mais à des valeurs de M^* bien supérieures à celles explorées expérimentalement. L'effet déstabilisant lié aux amortissements sera abordé au chapitres 3 et 6.

3. Stabilisation et déstabilisation par l'amortissement

Références :

- Doaré & de Langre (2002a), Local and global stability of fluid-conveying pipes on elastic foundations. *Journal of Fluids and Structures*, 16(1) :1–14.
- Doaré & de Langre (2006), The role of boundary conditions in the instability of one-dimensional systems. *European Journal Of Mechanics B-Fluids*, 25 :948–959.
- Doaré (2010), Dissipation effect on local and global stability of fluid-conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 329(1) :72–83.
- Doaré (2012), *Spectral Analysis, Stability and Bifurcations in Modern Nonlinear Physical Systems*, chapter Influence of dissipation on local and global instabilities. Springer, 2012. En préparation.

L'amortissement est la fonction d'un dispositif qui a but d'absorber les vibrations ou les oscillations d'un système mécanique. Il porte aussi le nom de *dissipation*, lorsqu'on l'associe au phénomène physique à l'origine, la plupart du temps une production d'énergie sous forme de chaleur. En vertu du second principe de la thermodynamique, cette énergie ainsi *dissipée* ne peut être intégralement reconvertisse en énergie mécanique. Un système dépourvu d'amortissement est qualifié de *conservatif*, et *dissipatif* dans le cas contraire.

Une fois ces définitions triviales introduites, si la question “l'amortissement peut-il favoriser les instabilités?” nous était posée, l'intuition nous inciterait bien-entendu à répondre par la négative. En effet, un système conservatif stable, devrait le rester si l'on y ajoute un système qui absorbe les vibrations. Cependant, en 1952, Hans Ziegler a publié un travail qui est devenu un classique à la fois dans la communauté des mécaniciens et des mathématiciens (Ziegler, 1952, 1953). Ziegler y réalise une analyse de stabilité d'un pendule double à l'extrémité duquel est exercée une force longitudinale, appelée force suiveuse (figure 3.1). Il y met en évidence un phénomène inattendu : non seulement le domaine de stabilité de ce système change de façon discontinue lorsque l'amortissement visqueux passe de zéro à une valeur infinitésimale, mais encore l'ajout d'amortissement peut pour certaines valeurs des paramètres avoir un effet déstabilisant. Ce phénomène est depuis lors appelé “paradoxe de Ziegler”. Motivé par le résultat contre-intuitif de Ziegler, Bottema (1955, 1956) a décrit de manière exhaustive l'influence stabilisante ou déstabilisante de l'amortissement sur un système mécanique à deux degrés de liberté plus général. Il y décrit les propriétés que doivent présenter les matrices de masse, d'amortissement et de raideur pour que la dissipation ait un effet déstabilisant. Dans un récent article, Kirillov & Verhulst (2010) décrivent l'origine mathématique de la déstabilisation en faisant appel aux travaux de Whitney (1943). Selon Kirillov & Verhulst (2010), cette discontinuité a un lien avec l'existence de singularités dans les applications d'une variété de dimension n vers un espace de dimension $2n - 1$, telles que décrites par Whitney dans un contexte purement mathématique, indépendant de la présente application aux effets de l'amortissement.

Le pendule double décrit par Ziegler n'est toutefois pas le seul système mécanique qui présente ce comportement surprenant de déstabilisation par ajout d'amortissement. D'une manière générale, c'est l'ensemble des systèmes présentant des termes gyroscopiques qui peuvent présenter cette singularité. Nous pouvons citer entre autres les systèmes présentant une résonance paramétrique (Arnold, 1983; Bolotin, 1963; Verhulst, 2009), les machines tournantes (Ruijgrok et al., 1993), les systèmes continus soumis à une force suiveuse (Sugiyama & Langthjem, 2007) et, bien-entendu, les systèmes couplant une dynamique de structure à un écoulement. Dans cette catégorie, nous pouvons mentionner les travaux de Lottati & Kornecki (1986), où est étudié l'effet d'un amortissement visco-élastique de la structure sur les seuils d'instabilité d'un tuyau avec écoulement interne encastré en amont et libre en aval. Un effet déstabilisant a été observé aux grands rapports de masse. Enfin, les

3. Stabilisation et déstabilisation par l'amortissement

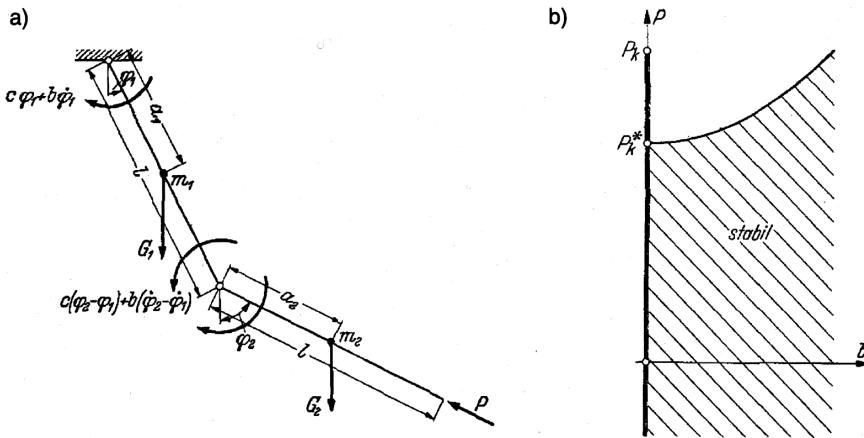


FIGURE 3.1.: Figures originales de Ziegler (1952), extraits de l'article de Kirillov & Verhulst (2010). (a), vue schématique d'un pendule double avec une force suiveuse d'amplitude P . (b), critère de stabilité P_k^* en fonction du paramètre d'amortissement b . P_k est le critère de stabilité sans amortissement. On observe que lorsque b tend vers 0, P_k^* tend vers une valeur significativement inférieure à P_k .

systèmes aéroélastiques discrets tels que les modèles simplifiés de profils d'aile en flexion torsion sont eux aussi sujets au phénomène de déstabilisation (Lee et al., 1997, 2005).

En même temps que les mathématiciens et certains mécaniciens se penchaient sur les systèmes discrets, des effets de déstabilisation par ajout d'amortissement ont été mis en évidence dans les problèmes de physique ou de mécanique ondulatoire. La communauté scientifique qui a été le plus tôt confrontée à cette problématique et qui a développé la plupart des outils théoriques est la communauté de la physique des plasmas. C'est dans cette communauté qu'a été introduite l'idée d'énergie négative, qui a constitué un apport considérable dans la discussion des instabilités (Briggs, 1964; Bekefi & Chang, 1969; Coppi et al., 1969; Rosenbluth et al., 1969; Davidson, 1972; Nezlin, 1976). On en trouve des manifestations concrètes dans les plasmas solaires (Joarder et al., 1997).

Les dynamiciens des fluides n'ont pas tardé à s'approprier tous ces concepts. C'est presque simultanément, en étudiant la stabilité d'une couche limite au dessus d'une paroi souple, que Landahl (1962) a mis en évidence un phénomène de déstabilisation d'ondes neutres par ajout de viscosité. En même temps que les concepts d'instabilités absolues et convectives ont été appliqués avec succès en mécanique des fluides pour décrire les instabilités des couches de mélange (Huerre & Monkewitz, 1985, 1990), le concept d'énergie négative a été introduit dans ce contexte (Cairns, 1979). C'est Cairns qui, à la lumière des travaux en physique des plasmas cités plus haut, a attribué le phénomène de déstabilisation par ajout de viscosité à l'existence d'ondes neutres d'énergie négative dans le milieu conservatif.

En interaction fluide-structure, la stabilité des ondes a aussi fait l'objet d'un nombre conséquent de recherches fondamentales. C'est à Roth (1964) que nous devons le critère de stabilité du tuyau infini où une dissipation visqueuse est prise en compte dans la modélisation. Ce critère n'a toutefois pas été rapproché du critère sans amortissement. Les plaques et panneaux souples ont aussi beaucoup été étudiés de ce point de vue. C'est Benjamin (1963) qui a le premier étudié les propriétés de stabilité des ondes de flexion se propageant dans une paroi élastique en contact avec un écoulement de fluide parfait. On lui doit la classification des ondes en trois catégories (A,B ou C), qui distinguent leurs propriétés de stabilité en l'absence d'amortissement et leur réaction à l'ajout d'amortissement. Les ondes de classe A sont des ondes temporellement instables. Les ondes de classe B sont des ondes temporellement stables sans amortissement qui deviennent instables quand on ajoute de l'amortissement. Les ondes de classe C sont des ondes inconditionnellement stables.

Ce type de milieu a par la suite été étudié plus avant. Notamment, les critères de transition absolu-convectif ont été établis (Brazier-Smith & Scott, 1984; Carpenter & Garrad, 1986; Crighton & Osswell, 1991). Peake (2001, 2004) a établi le lien entre les ondes d'énergie négative, les critères de stabilité avec amortissement et la

3.1. Position du problème

saturation non-linéaire des ondes instables. Wiplier & Ehrenstein (2000, 2001) et Carpenter & Garrad (1985) ont étudié un écoulement de couche limite plutôt qu'un écoulement homogène de fluide parfait. Enfin, Peake (1997) a étudié les structures de type coque.

Mettions l'accent sur les deux points suivants qui ressortent de ces études :

- La comparaison des travaux étudiant l'influence de l'amortissement sur la stabilité de structures élancées en écoulement axial montre que bien que la physique de l'écoulement ou les géométries soient modifiées, les phénomènes observés et les propriétés de stabilité restent très similaires du point de vue de la structure. Qu'il s'agisse d'un tuyau, d'un drapeau, d'une plaque ou d'une coque, qu'une couche limite soit prise en considération ou non, l'analyse globale conduit toujours à l'identification d'une instabilité de flottement après un certain seuil de vitesse d'écoulement, et l'amortissement peut à chaque fois avoir un effet déstabilisant. Lorsque le milieu est infini, une déstabilisation d'ondes neutres d'énergie négative est toujours observée. De même on montre que les instabilités absolues et convectives peuvent survenir dans certaines gammes de paramètres. En résumé, bien que le sens des paramètres et les seuils diffèrent, les phénomènes physiques demeurent similaires.
- En revanche, aucun des travaux mentionnés plus haut n'étudie l'effet de l'amortissement conjointement du point de vue local et du point de vue global, que ce soit en interaction fluide-structure ou dans un autre domaine. Cela a été réalisé dans des cas conservatifs, comme le tuyau sur fondation élastique (Doaré & de Langre, 2002a, 2006) ou des écoulements dans les artères (Stewart et al., 2009), mais on ne trouve pas d'étude spécifique sur l'effet de l'amortissement.

Le travail présenté dans ce chapitre a donc pour but de réaliser une étude conjointe des propriétés locales et globales d'un système générique de structure élancée en présence d'un écoulement axial. Le système choisi est un tuyau avec écoulement interne soumis à deux forces de raideur : une rigidité de flexion couplée soit à une raideur de fondation élastique soit à une raideur de tension. Les résultats de cette étude peuvent être considérés comme représentatifs de ce qui peut être observé dans un grand nombre de systèmes en interaction fluide-structure.

3.1. Position du problème

3.1.1. Modèle de poutre avec effort linéiques

Le tuyau auquel nous nous intéressons ici est de section circulaire de rayon R_0 . La géométrie considérée ici est schématisée en figure 3.2. Dans notre cas particulier, le domaine solide Ω_s étant un anneau de rayon interne R_0 , l'interface fluide-solide $\partial\Omega$ est un cercle de même rayon. Le solide est modélisé comme une poutre d'Euler Bernoulli (équation 1.28) de rigidité en flexion,

$$D = E \int_{\Omega_s} y^2 ds. \quad (3.1)$$

La première étape de modélisation consiste à calculer les efforts linéiques exercés par l'écoulement sur la structure en utilisant le formalisme développé au chapitre 1.3. On utilise la longueur $\eta = R_0$ et le temps $\tau = R_0^2 \sqrt{\frac{F}{D}}$ pour adimensionner le problème. Le problème fluide à résoudre pour le potentiel des vitesses normalisé dans l'espace de Fourier $\hat{\varphi}$ est décrit par les équations (1.39-1.41). La réaction aérodynamique $g(k)$ obtenue après résolution analytique de ce est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1 du premier type,

$$g(k) = I_1(k). \quad (3.2)$$

Supposons à présent que les longueurs d'ondes de déformation du solide sont grandes devant R_0 . Cette approximation dite des *corps élancés* revient à considérer k petit de sorte que,

$$g(k) = k + \mathcal{O}(k^2). \quad (3.3)$$

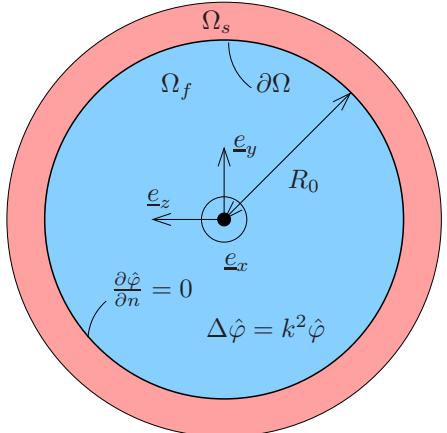


FIGURE 3.2.: Géométrie d'une section de tuyau et notations.

3. Stabilisation et déstabilisation par l'amortissement

Lorsque la fonction g dépend linéairement de k , le calcul de la transformée de Fourier inverse de \hat{f} (équation 1.51) est trivial, si bien que dans l'espace physique, la force fluide linéaire a pour expression :

$$f = \mathcal{M} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w(x, t), \quad (3.4)$$

où \mathcal{M} et \mathcal{U} sont respectivement le rapport de masse et la vitesse réduite,

$$\mathcal{M} = \frac{\rho_f \pi R_0^2}{\mu}, \quad \mathcal{U} = \frac{U_0 R_0 \sqrt{\mu}}{\sqrt{D}}, \quad (3.5)$$

Ainsi, l'équation d'onde locale du tuyau avec écoulement interne est,

$$(1 + \mathcal{M}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mathcal{M} \mathcal{U}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\mathcal{M} \mathcal{U} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0, \quad (3.6)$$

Enfin, il convient d'ajouter les conditions aux limites (1.49) à cette dernière équation si l'on considère un système de longueur finie.

Revenant aux variables et paramètres dimensionnels, l'équation (3.6) devient,

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + (\mu + \mu_f) \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + \mu_f U_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 2\mu_f U_0 \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T} = 0. \quad (3.7)$$

où $\mu_f = \rho_f \pi R_0^2$. Cette équation, obtenue à partir du formalisme général de structure élancée quelconque développé au chapitre 1, est identique à celle obtenue par des méthodes différentes par d'autres auteurs (Bourrières, 1939; Gregory & Païdoussis, 1966; Païdoussis, 1998).

Détaillons à présent les efforts de raideur et d'amortissement typiques qui vont être considérés dans la suite. Tout d'abord, deux types d'efforts de raideur vont être considérés. Il s'agit d'une raideur de fondation élastique et une raideur due à une tension qui ont respectivement pour expression :

$$\mathcal{A}_1 = SW, \quad \mathcal{A}_2 = -T \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}. \quad (3.8)$$

Ensuite, deux efforts de type amortissement vont être considérés. L'amortissement visqueux et l'amortissement visco-élastique ont respectivement pour expression :

$$\mathcal{A}_3 = C \frac{\partial W}{\partial T} \quad \mathcal{A}_4 = D^* \frac{\partial^5}{\partial T \partial X^4}. \quad (3.9)$$

Le premier généralement lié à la présence d'un fluide visqueux environnant, tandis que le second est lié aux amortissements internes au matériau. Dans la suite, nous allons nous intéresser à l'effet de l'amortissement (visqueux ou visco-élastique) sur trois configurations différentes :

Cas 1 : Le tuyau sans raideurs additionnelles ($\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = 0$)

Cas 2 : Le tuyau sur fondation élastique ($\mathcal{A}_2 = 0$)

Cas 3 : Le tuyau avec tension ($\mathcal{A}_1 = 0$)

3.1.2. Équations sans dimension

L'équation dynamique est adimensionnée en utilisant comme longueur caractéristique un longueur basée sur deux forces présentes dans le système : la raideur en flexion, toujours présente et une autre force en fonction du cas étudié (réaction aérodynamique dans le cas 1, fondation élastique dans le cas 2, ou tension dans le cas 3). Ces trois longueurs caractéristiques ont respectivement pour expression,

$$\eta_R = \left(\frac{D}{\mu_f U^2} \right)^{1/2}, \quad \eta_S = \left(\frac{D}{S} \right)^{1/4}, \quad \eta_T = \left(\frac{D}{N} \right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Un temps caractéristique est alors associé à chacune de ces longueurs,

$$\tau_i = \left(\frac{(\mu + \mu_f)\eta_i^4}{D} \right)^{1/2}, \quad (3.11)$$

où $i = R, S, T$ selon le cas considéré. Utilisant les variables et paramètres sans dimension suivants,

$$x = X/\eta_i, \quad w = W/\eta_i, \quad t = T/\tau_i, \quad \beta = \mu_f/(\mu + \mu_f), \\ v = U_0 \sqrt{\beta} \frac{\tau_i}{\eta_i}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{D(\mu + \mu_f)} \frac{D^*}{\eta_i^2}}, \quad \sigma = \frac{c\eta_i^2}{\sqrt{EI(\mu + \mu_f)}}, \quad (3.12)$$

l'équation dynamique sans dimension devient,

$$\alpha \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (v^2 - a) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta} v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \sigma \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + bw = 0, \quad (3.13)$$

avec $(a, b, v) = (0, 0, 1)$ dans le cas 1, $(0, 1, v)$ dans le cas 2 et $(1, 0, v)$ dans le cas 3.

À présent que nous avons explicitement l'équation de propagation des ondes de flexion dans le milieu, que nous connaissons les conditions aux limites, nous pouvons aborder l'étude de stabilité de ce système en mettant l'accent sur l'effet de l'amortissement. Dans un premier temps les propriétés de stabilité locale sont étudiées. Nous présenterons ensuite les propriétés de stabilité globale lorsque le jeu de conditions aux limites (1.49) est ajouté aux équations.

3.2. Instabilité locale

3.2.1. Cas conservatif

Cas 1

Du point de vue local, le problème ne dépend ici que d'un paramètre, le rapport de masse β . La relation de dispersion du système est,

$$k^4 - \omega^2 + 2\sqrt{\beta}k\omega - k^2 = 0. \quad (3.14)$$

La pulsation associée à un nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$ a pour expression,

$$\omega = \sqrt{\beta}k \pm k\sqrt{\beta + k^2 - 1}. \quad (3.15)$$

Pour $\beta \in [0, 1[$ et $k \in [0, \sqrt{1 - \beta}]$, les pulsations ω_{\pm} sont complexes conjuguées, la pulsation de partie imaginaire positive donnant lieu à une onde temporellement amplifiée. Pour $k > \sqrt{1 - \beta}$, $\omega(k) \in \mathbb{R}$ et nous avons affaire à des ondes neutres. Ainsi, le système est localement instable pour $\beta \in [0, 1[$. Inversement, lorsque $\beta \geq 1$, le système est localement stable. Il est à noter toutefois que toute valeur de β en dehors de l'intervalle $[0, 1]$ n'a pas de sens physique dans la présente application. Enfin, Kulikovskii & Shikina (1988) ont montré que la transition entre instabilité absolue et convective a lieu pour $\beta = 8/9$.

Cas 2 et 3

Les figures 3.3a et c présentent dans le plan (β, v) les propriétés de stabilité locale du milieu dans le cas 1, $(a, b) = (0, 1)$ (tuyau sur fondation élastique) et le cas 2, $(a, b) = (1, 0)$ (tuyau avec tension). Y apparaissent différentes zones qui distinguent différents comportements des ondes se propageant dans le milieu.

- Cas “Stabilité avec ondes évanescentes” : Dans ce cas, l'approche temporelle permet de montrer que le milieu est stable. En utilisant l'approche spatiale, on montre que lorsque le milieu est forcé ponctuellement à une fréquence réelle donnée, des ondes spatialement évanescantes sont émises quelque soit la fréquence. Le milieu est dit *évanescant*.

3. Stabilisation et déstabilisation par l'amortissement

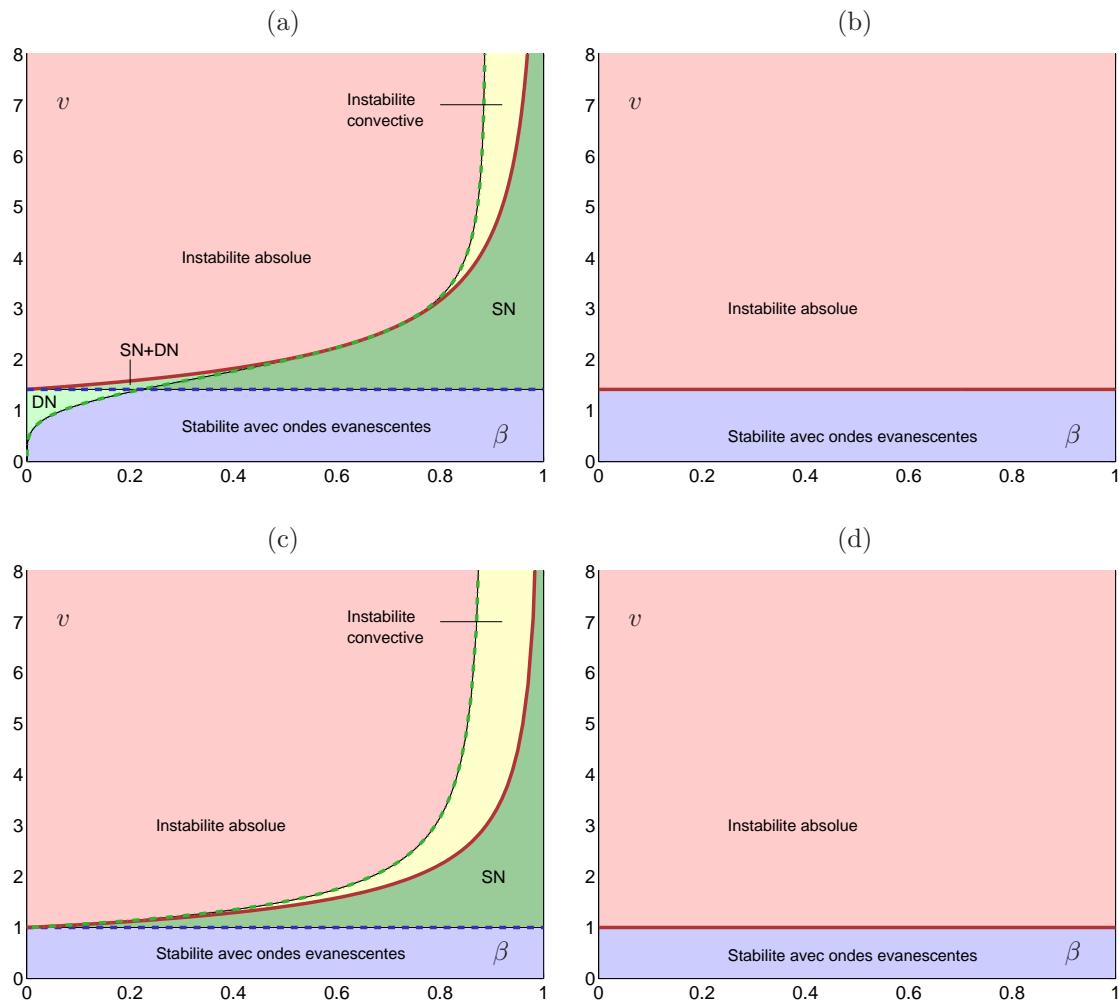


FIGURE 3.3.: Diagramme de stabilité dans le plan (β, v) des ondes de flexion dans le tuyau sur fondation élastique (cas 1) (a,b) et le tuyau avec tension (cas 2) (c,d); (SN); ondes neutres dans l'intervalle statique; (DN); ondes neutres dans l'intervalle dynamique; (a,c), sans amortissement; (b,d), avec amortissement.

- Cas “Stabilité avec ondes neutres” : Ici aussi l’approche temporelle montre que le milieu est stable. En revanche, l’approche spatiale permet de montrer que dans certaines gammes de fréquences, les ondes émises par un forçage harmonique sont toutes spatialement neutres. Si l’intervalle de fréquence apparaît à la fréquence nulle, celui-ci est qualifié de *statique*, s’il apparaît à une fréquence non-nulle, il est qualifié de *dynamique*.
 - Cas “convectivement instable” : Ce cas a été décrit en section 1.3.2.
 - Cas “absolument instable” : Ce cas a été décrit en section 1.3.2.

Les diagrammes de stabilité du tuyau du fondation élastique et du tuyau avec tension sont très similaires. La seule différence se situe au niveau de l'intervalle dynamique, qui n'existe pas dans le cas du tuyau avec tension.

3.2.2. Notion d'énergie des ondes et ondes d'énergie négative

Il est possible de prédire l'effet de l'amortissement sur les ondes neutres identifiées plus haut en calculant l'énergie au sens de Cairns (1979). Considérons pour cela une onde qui porte une quantité mécanique w , de pulsation ω , de nombre d'onde k et d'amplitude w_0 , de sorte que $w = w_0 e^{i(kx - \omega t)}$. On suppose qu'il existe dans

le milieu des ondes où ω et k , liés par la relation de dispersion $D(k, \omega) = 0$, sont réels tous les deux. On a alors affaire à une onde dite neutre, ou marginalement stable¹. Supposons qu'il soit possible d'engendrer l'onde en imposant une force entre $t = -\infty$ et $t = 0$. Le travail de cette force est l'énergie recherchée. Si ce travail est négatif, cela signifie qu'il a fallu soustraire de l'énergie au système pour créer l'onde. Nous avons ainsi affaire à une onde d'énergie négative. Dans un milieu particulier, les ondes à l'interface entre deux fluides non-miscibles, mais sans perdre de généralité, Cairns (1979) a calculé l'énergie E d'une onde neutre :

$$E = -\frac{\omega}{4} \frac{\partial D}{\partial \omega} w_0^2. \quad (3.16)$$

Considérons une onde neutre se propageant dans le milieu conservatif, de pulsation $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et de nombre d'onde $k_0 \in \mathbb{R}$, de sorte qu'ils satisfont la relation de dispersion du milieu sans amortissement,

$$D(\omega_0, k_0) = 0. \quad (3.17)$$

La relation de dispersion avec un amortissement visqueux s'écrit alors,

$$D_1(k, \omega) = D(\omega, k) - i c \omega = 0, \quad (3.18)$$

où c est le coefficient d'amortissement. La valeur perturbée de la pulsation lorsqu'un amortissement de faible amplitude est ajouté est notée $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ avec $\delta\omega \ll \omega$. À l'ordre dominant en $\delta\omega$, nous obtenons,

$$\delta\omega \frac{\partial D}{\partial \omega} \Big|_{(k_0, \omega_0)} = i c \omega_0. \quad (3.19)$$

On en déduit aisément la variation du taux de croissance consécutive à l'ajout d'amortissement, soit la partie imaginaire de $\delta\omega$:

$$\delta\sigma = \frac{4c\omega_0}{\partial D / \partial \omega}. \quad (3.20)$$

La variation du taux de croissance est donc directement proportionnelle et de signe opposé à l'énergie de l'onde telle que définie en équation (3.16). Une onde d'énergie négative est donc désstabilisée par l'ajout d'un amortissement, tandis qu'une onde d'énergie positive sera stabilisée. Lorsqu'un amortissement visco-élastique est considéré, on montre aisément que,

$$\delta\sigma = \frac{4ak_0^4\omega_0}{\partial D / \partial \omega}, \quad (3.21)$$

ce qui nous conduit aux mêmes conclusions.

3.2.3. Stabilité locale avec amortissement

Cas 1

Dans ce cas l'énergie E a pour expression,

$$E_{\pm} = \frac{\pm k^2 \sqrt{\beta(k^2 + \beta + 1) + k^4} \pm (1 - \beta)k^2}{2}, \quad (3.22)$$

et E_- présente des valeurs négatives pour $k \in]\sqrt{1-\beta}, 1[$. Ainsi, alors qu'en l'absence d'amortissement il a été montré que l'intervalle de nombres d'onde instables est $k \in [0, \sqrt{1-\beta}]$, il devient $[0, 1]$ avec amortissement. L'amortissement a élargi l'intervalle de nombres d'onde instables.

1. Cairns (1979) soutient que l'extension du concept d'énergie aux ondes qui ne sont pas marginalement stables pose problème, mais ne donne pas plus de détails sur cette assertion dans son article.

3. Stabilisation et déstabilisation par l'amortissement

Cas 2 et 3

Les diagrammes de stabilité locale avec amortissement sont donnés en figure 3.3b et 3.3d pour le cas avec fondation élastique et le cas avec tension respectivement. Un fait remarquable à noter sur ces graphiques est que les propriétés de stabilité locale ne dépendent ni du type d'amortissement qui est ajouté, ni de son amplitude. Ces diagrammes de stabilité sont beaucoup moins riches que ceux du cas conservatif, le milieu étant soit stable avec ondes évanescentes, soit absolument instable. On observe de plus que là où le milieu est évanescence ou neutre dynamiquement sans amortissement, il devient stable avec amortissement. En revanche, le cas statiquement neutre devient instable lorsque l'amortissement est ajouté. Ces résultats sont tout à fait conformes aux prédictions que l'on peut faire à partir du calcul de l'énergie des ondes discuté à la section précédente.

3.3. Instabilité globale

Un système de longueur L avec les conditions aux limites (1.49) est à présent considéré. Dans sa version adimensionnée, le système est de longueur $l = L/\eta_i$ ($i = R, S, T$). L'analyse de stabilité passe à présent par le calcul des pulsations propres et modes propres. Les résultats présentés ici ont été obtenus à l'aide de la méthode de Galerkin présentée au chapitre 1. En pratique, jusqu'à 100 modes de Galerkin ont été utilisés pour calculer les valeurs propres du système aux plus grandes longueurs.

Cas 1

Sans amortissement, le milieu est localement instable quelque soit $\beta \in [0, 1]$. La courbe de stabilité marginale est tracée en figure 3.6a (ligne bleue épaisse). Cette courbe peut être vue comme la ligne de contour où le taux de croissance maximal est nul. Au dessus, le système est instable, en dessous, il est stable. On observe sur cette figure que la limite de stabilité globale tend vers la limite locale lorsque $l \rightarrow \infty$, soit $\beta = 1$ (Doaré & de Langre, 2006).

Lorsque de l'amortissement est ajouté, le milieu est localement instable $\forall \beta$. Le système de longueur finie doit donc être instable $\forall \beta$ aux grandes longueurs. C'est ce qui est observé sur la figure 3.6a où sont tracées les courbes de stabilité marginale du système de longueur finie pour différentes valeurs de l'amortissement. Ces courbes n'ont pas de limite asymptotique aux grandes valeurs de l , ce qui est lié au fait que le système est localement instable quel que soit β .

Nous proposons à présent d'établir un critère simple permettant de prédire longueur critique d'instabilité. Considérons pour cela que la longueur caractéristique associée au déformations du mode global instable est la longueur l du système (cf. figure 1.3). La longueur critique d'instabilité est alors la plus petite longueur d'onde instable prédite par l'approche temporelle. L'application de ce critère donne :

$$l > \frac{2\pi}{\sqrt{1-\beta}} \text{ sans amortissement,} \quad l > 2\pi \text{ avec amortissement.} \quad (3.23)$$

Ces critères approchés sont tracés en figure 3.6a et comparés au critère de stabilité global obtenu par une méthode de Galerkin. Sans amortissement, la courbe de stabilité globale est approximée de manière satisfaisante par le critère l_0 , tandis qu'elle tend progressivement vers le critère l_1 à mesure qu'on augmente l'amortissement. Pour tester la pertinence de ces critères dans un cas similaire, la figure 3.6b utilise le même raisonnement dans le cas du drapeau encastré-libre sous l'approximation 2D. Le même comportement est observé.

Cas 2 et 3

Sur la figure 3.5(a) sont tracées les courbes de stabilité marginale du tuyau sur fondation élastique (cas 2) lorsque l'amortissement est absent. Aux faibles longueurs, le seuil d'instabilité globale est bien au dessus des seuils locaux de transition. À mesure que la longueur augmente, la courbe marginale de stabilité globale tend vers un critère local : le critère d'existence d'ondes neutres dans l'intervalle dynamique. Ainsi, aux grandes longueurs, nous avons affaire à un système globalement instable, bien qu'il soit localement stable. Ce phénomène

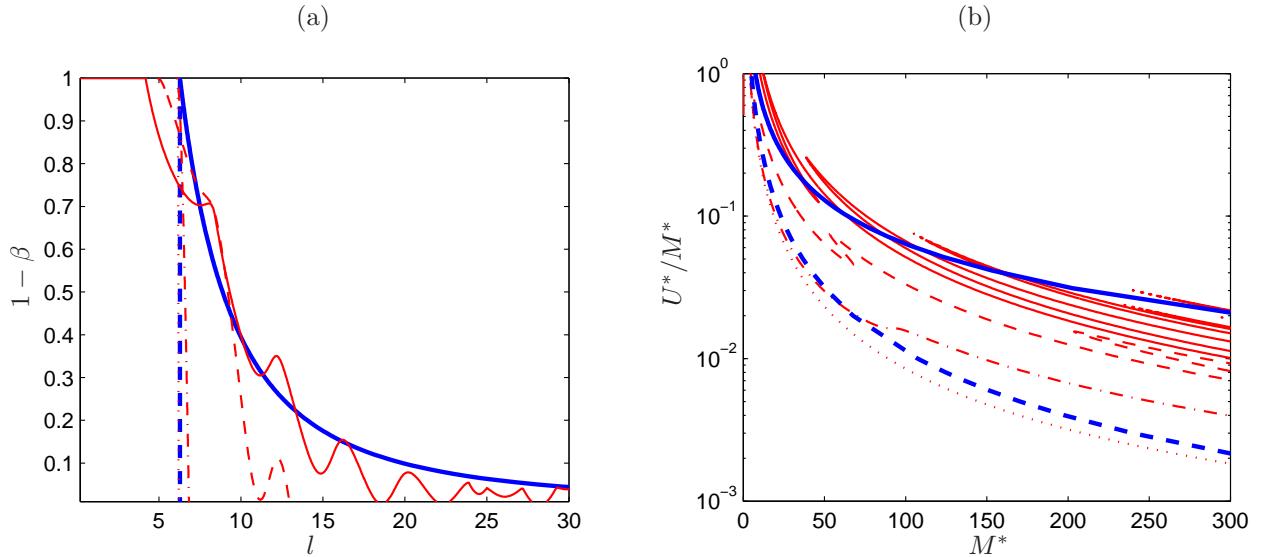


FIGURE 3.4.: (a) Courbes de stabilité globale du tuyau avec écoulement interne pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement visqueux σ en traits fins; $\sigma = 0$ en ligne pleine, $\sigma = 10$ en ligne hachurée, $\sigma = 100$ en ligne hachurée-pointillée, $\sigma = 1000$ en ligne pointillée. Le trait plein épais indique le critère simplifié basé sur les longueurs d'ondes instables sans amortissement, le trait plein hachuré correspond au même critère avec amortissement. (b) Même analyse effectuée dans le cas du drapeau modélisé à l'aide de la technique double sillage dans le cas 2D (cf. chapitre 2).

a été attribué à des conditions aux limites sur-réfléchissantes dans la référence (Doaré & de Langre, 2002a). Lorsque l'amortissement est ajouté au système, cette fois, la courbe de stabilité globale tend vers un critère local différent : le critère de stabilité. Aux faibles valeurs de β , ce dernier critère prédit une valeur supérieure à celle du critère d'existence d'ondes neutres dynamiques, tandis que c'est l'inverse aux grands rapports de masse. Ainsi, nous observons que le critère qui pilote l'instabilité globale aux grandes longueurs diffère lorsque de l'amortissement est ajouté. Le cas du tuyau avec tension, non présenté ici, donne des résultats similaires (Doaré, 2010).

À ce stade, nous pouvons dresser de premières conclusions. Tout d'abord, nous venons d'identifier un effet déstabilisant de l'amortissement aux grandes longueurs. Cet effet peut être expliqué par la déstabilisation d'ondes neutres d'énergie négative. Se pose alors la question suivante : Puisque l'amortissement change à ce point les propriétés de stabilité locale et globale, et puisque tout système mécanique présente de l'amortissement, quelle est la pertinence d'une étude de stabilité du système conservatif ?

Un premier élément de réponse peut être donné par l'observation du comportement de la courbe de stabilité globale aux longueurs intermédiaires en figure 3.5b. On s'aperçoit sur cette figure que pour les longueurs intermédiaires, la courbe globale de stabilité s'approche du critère local sans dissipation, puis tend vers le critère local de stabilité avec dissipation. De plus, la convergence vers le critère local semble d'autant plus rapide que l'amortissement est important. Ce constat a inspiré un raisonnement basé sur les longueurs caractéristiques des phénomènes de raideurs et les phénomènes dissipatifs. Les longueurs caractéristiques associées aux amortissements visqueux ou visco-élastiques sont respectivement,

$$\eta_\sigma = \left(\frac{D(\mu_f + \mu)}{c^2} \right)^{1/4}, \quad \eta_\alpha = \left(\frac{D(\mu_f + \mu)}{D^{*2}} \right)^{1/4} \eta_i^2. \quad (3.24)$$

Dans le raisonnement qui suit, η_d fait référence à η_σ ou η_α , selon l'amortissement considéré, de même que η_i fait référence à la longueur caractéristique du cas considéré (sans raideur supplémentaire, avec fondation élastique, ou tension). Nous notons aussi $\rho = \eta_d/\eta_i$. Ce nombre est d'autant plus petit que l'amortissement est important. Trois configurations différentes peuvent alors être envisagées :

3. Stabilisation et déstabilisation par l'amortissement

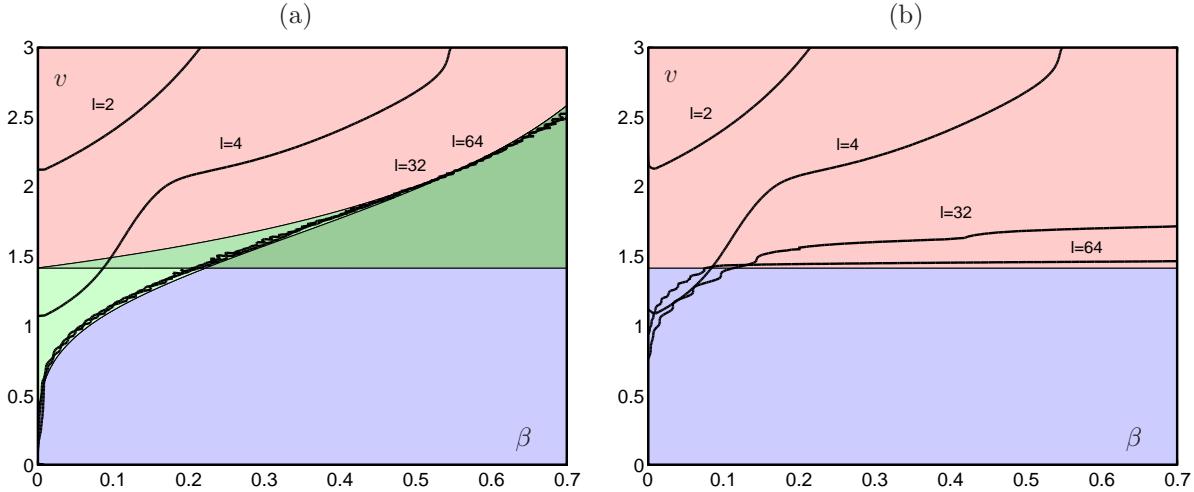


FIGURE 3.5.: Courbes de stabilité globale du tuyau sur fondation élastique avec et sans amortissement (a et b resp.), pour différentes valeurs de la longueur sans dimension l . La signification des régions colorées est la même qu'en figure 3.3. Au dessus de ces courbes, le système est instable par flottement. Lorsque la longueur augmente, la courbe de stabilité tend vers le critère local d'ondes neuves dans le cas (a) et vers le critère local de stabilité dans le cas (b).

- **Système court** : Si $L < \eta_d$ et $L < \eta_i$, la stabilité globale ne peut être prédite par un critère local. En variables sans dimension, ce critère s'écrit $l < 1$ et $l < \rho$
- **Système long, très dissipatif** : Si $L \gg \eta_d$, la stabilité globale est prédite par le critère local avec dissipation. En variables sans dimensions : $l \gg \rho$.
- **Système long, peu dissipatif** : Si $L \gg \eta_i$, et $L < \eta_d$ la stabilité globale est prédite par le critère local sans dissipation. En variables sans dimensions : $l \gg 1$ et $l < \rho$.

Les quatre courbes représentées en figure 3.6 illustrent ce critère dans quatre cas typiques. Lorsque ρ est suffisamment grand, on observe bien que la courbe globale de stabilité tend tout d'abord vers le critère local conservatif. Pour $l \sim \rho$, le critère global quitte la valeur prédite par le critère local conservatif et tend vers le critère local dissipatif.

3.4. Bilan et perspectives

Une étude de l'effet de l'amortissement sur les propriétés de stabilité locales et globales du tuyau avec écoulement interne a été présentée. Nous avons montré que les ondes d'énergie négative sont toujours à l'origine de la déstabilisation du système de longueur finie. Nous avons présenté quelques critères basés sur les longueurs caractéristiques des ondes instables dans le milieu permettent d'obtenir des critères simples, qui évitent de longs calculs numériques.

L'analyse de stabilité du tuyau simple (Cas 1) démontre le rôle clef du terme gyroscopique (terme en facteur de $\sqrt{\beta}$ de l'équation 3.13). En effet, en l'absence d'amortissement, plus β est grand, plus l'intervalle de nombres d'onde instables est petit, jusqu'à disparaître pour $\beta = 1$. Le terme gyroscopique est donc stabilisant. Mais les ondes ainsi stabilisées sont alors des ondes d'énergie négative. Ainsi, lorsque l'amortissement est ajouté, l'intervalle de nombre déstabilisées redevient le même que celui à $\beta = 0$. Ainsi, la présence du terme gyroscopique stabilise le système et cet effet est annulé par l'ajout d'amortissement.

Sur le plan des perspectives, plusieurs aspects complémentaires peuvent être envisagés :

- Nous avons conclu le bilan de ce chapitre en affirmant que les ondes d'énergie négative sont toujours à l'origine de la déstabilisation par amortissement du système de longueur finie. Or, l'analyse de Sugiyama & Langthjem (2007), qui s'intéresse à un poutre soumise à une force suiveuse, n'a besoin que de bilans d'énergie aux bords du domaine pour prédire un effet déstabilisant de l'amortissement, indépendamment

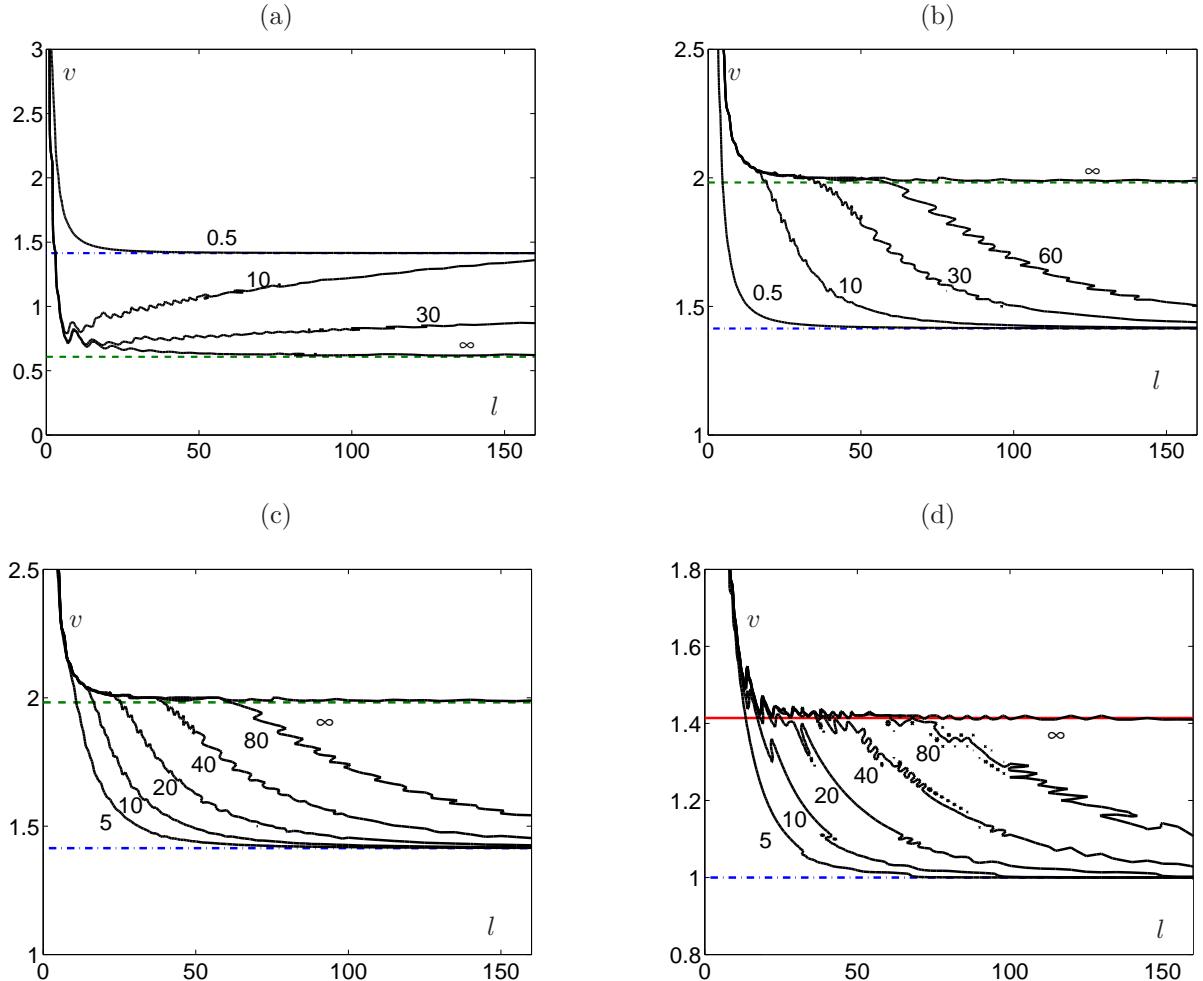


FIGURE 3.6.: Vitesse critique d'instabilité de flottement en fonction de la longueur, pour différents cas et différentes valeurs de ρ ; (a), cas 1 avec amortissement visqueux et $\beta = 0.01$; (b), cas 1 avec amortissement visqueux et $\beta = 0.5$; (c) cas 1 avec amortissement visco-élastique et $\beta = 0.5$; (d) cas 2 avec amortissement visqueux et $\beta = 0.5$. La longueur à partir de laquelle la vitesse critique d'instabilité quitte l'asymptote prédicta par le critère conservatif pour rejoindre le critère dissipatif est toujours approximativement égale à ρ .

3. Stabilisation et déstabilisation par l'amortissement

de considération sur la propagation des ondes. Les rôles respectifs des propagations et réflexions d'ondes ne sont donc toujours pas clairement définis et un travail mathématique spécifique devrait être réalisé sur ce point.

- Il conviendrait de mettre en évidence expérimentalement un phénomène de déstabilisation par amortissement.
 - D'autres phénomènes dissipatifs pourraient être étudiés. Ce point sera abordé au chapitre 6 lorsque nous introduirons l'amortissement induit par la récupération d'énergie du flottement de structures piézoélectriques.
 - L'étude de la saturation non linéaire des ondes et modes déstabilisées par l'amortissement serait à réaliser. On peut s'inspirer sur ce point du travail de Peake (2004), qui montre que la saturation non linéaire des ondes d'énergie négatives déstabilisées par l'amortissement résultent en une instabilité de divergence.
-

4. Influence du décollement sur l'instabilité à l'origine de la vibration des cordes vocales

Références :

- Sidloff, Lunéville, Chambeyron, Doaré, Chaigne, & Horacek (2010), Finite Element Modeling of Airflow During Phonation, *Applied and Computational Mechanics*, 4, 121-132.
- Šidlof, Doaré, Cadot, & Chaigne (2011), Measurement of flow separation in a human vocal folds model, *Experiments in Fluids*, 51(1), 123-136.

4.1. introduction

Les cordes vocales sont deux tissus symétriques situés dans la trachée qui sous certaines conditions de pression, de vitesse de l'écoulement et de tension des muscles internes, peuvent entrer en auto-oscillation. Ce phénomène engendre des ondes acoustiques et constitue le moteur de la voix parlée ou chantée. La fréquence de cette oscillation détermine la hauteur de la voix ou hauteur de note dans le cas de la voix chantée. Le timbre, au sens phonétique du terme, est contrôlé par la géométrie de l'ensemble du conduit vocal (trachée, langue, bouche) qui agit comme un filtre pour le son produit par les cordes vocales.

La compréhension du comportement des cordes vocales et son interaction avec le champ de pression acoustique est cruciale dans de nombreuses applications biomédicales ou bien encore pour développer des algorithmes de synthèse vocale réalistes et performants. Elle repose notamment sur une bonne connaissance de l'aérodynamique dans le larynx. Pour une donnée du différentiel de pression entre les poumons et l'atmosphère, la prédiction du mécanisme d'auto-oscillation nécessite la donnée de la distribution de pression à l'interface entre l'écoulement et les tissus des cordes vocales. À des valeurs du nombre de Reynolds suffisamment élevées et en l'absence de tout décollement, les résultats théoriques obtenus dans le cadre de la théorie potentielle pourraient être directement réutilisés, pourvu que l'on ait connaissance de la configuration d'équilibre de base du système fluide-solide (écoulement de base et position d'équilibre des cordes vocales). Cependant, la géométrie du conduit est bien différente des corps élancés abordés dans les deux précédents chapitres, et un décollement se produit toujours, empêchant une application directe de la théorie des écoulements potentiels. La figure 4.2 donne une représentation schématique du larynx humain, qui peut être vu comme une tuyère dont la taille du col est variable. Dans la partie amont, le canal est convergent et de part la conservation du débit, le fluide est accéléré. En aval, un décollement s'opère, et un jet se forme.

Les travaux pionniers de Pelorson et al. (1994) ont permis de fixer les principes et méthodes qui sont à la base de la plupart des recherches qui ont suivi. Il s'agit de considérer que l'on a affaire à un écoulement potentiel dans toute la région en amont du décollement, de rajouter éventuellement des effets visqueux effets de masse ajoutée du fluide comme des correctifs et d'utiliser un modèle simple quasi-statique prédisant la position du point de décollement en fonction de l'ouverture, validé expérimentalement. Ces travaux et d'autres qui ont suivi ont montré que la connaissance de la position du point de séparation, même empirique, est cruciale pour la prédiction des seuils, fréquences et amplitudes d'oscillation des cordes vocales (Krane & Wei, 2006; Zhang, 2008).

Bien que la séparation des écoulements ait été beaucoup étudiée, nous n'avons de critères utiles que pour des cas simples. Par exemple, nous devons à Fox & Kline (1962), la caractérisation du décollement dans un cône en expansion. Pour des géométries plus compliquées comme les cordes vocales, il n'existe pas de critère générique permettant de prédire la position du point de séparation. En effet, elle dépend de nombreux paramètres tels

4. Influence du décollement sur l'instabilité à l'origine de la vibration des cordes vocales

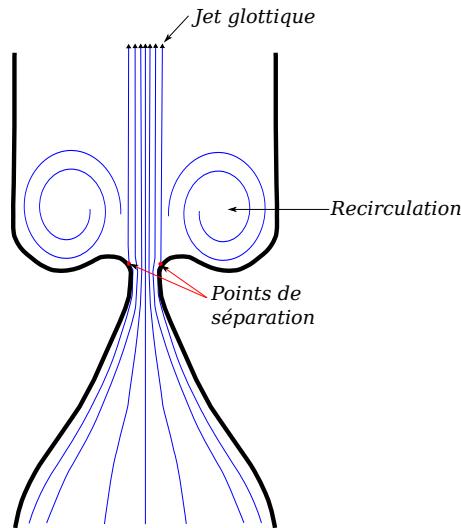


FIGURE 4.1.: Vue schématique du jet en sortie des cordes vocales.

que l'interaction du jet avec les structures turbulentes en aval, la forme et la position des cordes vocales ou les propriétés de la couche limite en amont.

Dans les modèles phénoménologiques les plus simples développés jusqu'ici, la position de ce point de décollement est supposée fixe (Story & Titze, 1995; Horáček et al., 2005; Zanartu et al., 2007; Zhang et al., 2007) ou mobile le long de la partie divergente de la glotte, sa position étant spécifiée par un critère semi-empirique,

$$\frac{A}{A_{min}} = FSC, \quad (4.1)$$

où A_{min} est la section minimale, A la section à laquelle apparaît le décollement et FSC une constante fixée, appelée *constante de séparation de l'écoulement*. La valeur de FSC effectivement utilisée dépend des auteurs. Elle est par exemple de 1.1 pour le modèle de Lucero (1998), de 1.2 pour Pelorson et al. (1994) et Deverge et al. (2003). Decker & Thomson (2007) ont utilisé les valeurs 1.2 et 1.47.

En effectuant des simulations avec une géométrie variable, mais statique par rapport à l'écoulement, Cisonni et al. (2008) observent que la constante FSC est à peu près constante et vaut 1.08 lorsqu'un écoulement amont de type Poiseuille est considéré, ou varie entre 1.02 et 1.07 lorsqu'un modèle de type Bernoulli est utilisé.

L'hypothèse d'une constante de séparation de l'écoulement constante est toutefois sujette à controverse. En modélisant les équations de Navier-Stokes à l'aide d'une méthode basée sur la dynamique de la vorticité¹, Hofmans et al. (2003) prédisent une valeur de 1.2 pour une glotte étroite et une valeur comprise entre 1.4 et 1.6 pour des cordes vocales grandes ouvertes. L'étude numérique Van Hirtum et al. (2005) conduit à une valeur comprise entre 1.2 et 1.75, tandis que celle de Alipour & Scherer (2004) aboutit à un domaine de valeurs plus large, $FSC \in [1.1, 1.9]$. Toutes ces simulations numériques ont été réalisées dans des configurations quasi-statiques, c'est à dire avec un solide immobile. Cette hypothèse mérite d'être discutée au regard des vitesses caractéristiques dans une corde vocale typique : de 1 à 10 m/s pour le fluide et jusqu'à 1 m/s pour le solide. L'ordre de grandeur de l'interface fluide-solide ne peut donc être négligée face à la vitesse de l'écoulement. Dans ces conditions, nous avons affaire à un couplage fort (de Langre, 2002b) et la dynamique du solide ne peut être négligée lorsqu'on souhaite résoudre la dynamique du fluide. Récemment, Sciamarella & le Quéré (2008) ont étudié l'écoulement en aval de cordes vocales rigides oscillantes et trouvent une valeur de la constante de séparation comprise entre 1.0 et 1.3. Enfin, mentionnons le travail numérique de Thomson et al. (2005), qui est l'un des seuls s'étant attelé à la résolution du couplage fluide-structure complet de ce problème, tout en comparant avec des résultats expérimentaux. Il n'est toutefois pas fait d'étude sur la constante de séparation dans ce travail.

1. Vortex blobs method (Anderson, 1986)

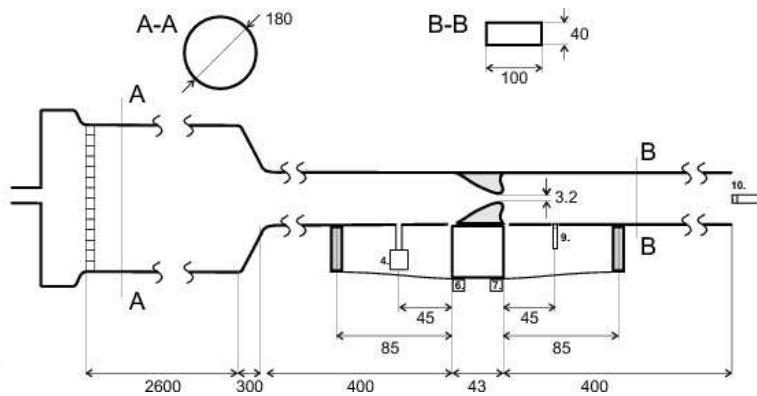


FIGURE 4.2.: Vue schématique du montage expérimental et principales dimensions.

Parmi les études expérimentales que l'on trouve dans la littérature, celles ne faisant pas appel à la vélocimétrie par images de particules (PIV) n'ont pas une résolution suffisante pour permettre de capturer la position du décollement (Barney et al., 1999; Scherer et al., 2001; Alipour & Scherer, 2006). Les études expérimentales utilisant la PIV les plus notables sont celle de Neubauer et al. (2007), qui fournissent un comportement qualitatif de la position du décollement, celle de Becker et al. (2009) qui démontre l'existence d'un effet Coanda et celle de Erath & Plesniak (2010) sur le caractère asymétrique de l'écoulement dans la glotte.

Pour autant, l'observation expérimentale et quantitative de la position de la ligne de décollement donnant naissance au jet glottique restait à réaliser, ce qui a motivé le travail expérimental à l'UME de la thèse de Petr Sidlof, présenté dans ce chapitre. Ainsi, l'objectif premier de ce travail était d'obtenir une caractérisation expérimentale de l'écoulement instationnaire environnant les cordes vocales en régime de phonation. Le choix s'est porté sur une maquette de cordes vocales de dimensions environ quatre fois supérieures aux cordes vocales humaines pour faciliter l'observation de la position du point de décollement et du jet se formant en aval.

La suite de ce chapitre est divisée en trois courtes sections : une description du dispositif expérimental, une présentation de quelques résultats principaux et une discussion.

4.2. Dispositif expérimental

La figure 4.2 présente une vue schématique du montage expérimental réalisé à l'UME. Sur cette figure, l'écoulement va de la gauche vers la droite. Il est engendré par une turbine située à l'amont. L'écoulement passe d'abord dans une conduite circulaire de grande longueur où se trouve un débitmètre à ultrasons. La section utile du dispositif expérimental est rectangulaire, de hauteur 4cm et profondeur 10cm. Les mesures de vitesses sont effectuées en position médiane. Dans le modèle de cordes vocales choisi, une seule des deux est mobile, tandis que l'autre est fixe. C'est un jeu de quatre ressorts à lames qui assure la souplesse à la corde vocale mobile en latex et lui confère deux degrés de liberté en translation verticalement et en rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'écoulement. Un nombre important de capteurs de pression est disposé autour de la veine et deux accéléromètres permettent de recueillir la donnée du mouvement de la corde vocale mobile en translation et en rotation. Le signal renvoyé par les accéléromètres est utilisé pour piloter le déclenchement du laser et de la caméra du système de PIV. Une légère désynchronisation est imposée au système de PIV de sorte qu'au cours de 40 périodes d'oscillations, 40 images sont enregistrées à des phases différentes, couvrant ainsi l'ensemble du mouvement périodique des cordes vocales. Ce dispositif expérimental permet ainsi de recueillir différents signaux de pression en amont et en aval de l'écoulement, le déplacement du solide mobile en flexion et en torsion ainsi que le champ de vitesse en aval au cours du mouvement périodique.

Les principaux paramètres et nombres sans dimension du problème sont données dans le tableau de la figure 4.3 dans un larhinx réel et dans le modèle réalisé à l'UME. En particulier les plages de nombres de Reynolds et de nombres de Strouhal explorées avec le dispositif expérimental sont comprises dans les plages du cas réel.

4. Influence du décollement sur l'instabilité à l'origine de la vibration des cordes vocales

	Real larynx	Physical model
U_0 (m/s)	1–10	1.4–2.5
H_0 (mm)	10–20	40
L (mm)	10	40
f (Hz)	100–400	10–14
Δp (Pa)	200–2,000	50–250
Re	600–6,000	3,000–6,000
St	0.1–1	0.2–0.3

FIGURE 4.3.: Principaux paramètres et nombres sans dimension d'un larynx réel et du modèle expérimental. U_0 est la vitesse à l'amont, L est la longueur des cordes vocales, H_0 la hauteur du canal, f la période d'oscillation, Δp le saut de pression, Re et St les nombres de Reynolds et de Strouhal.

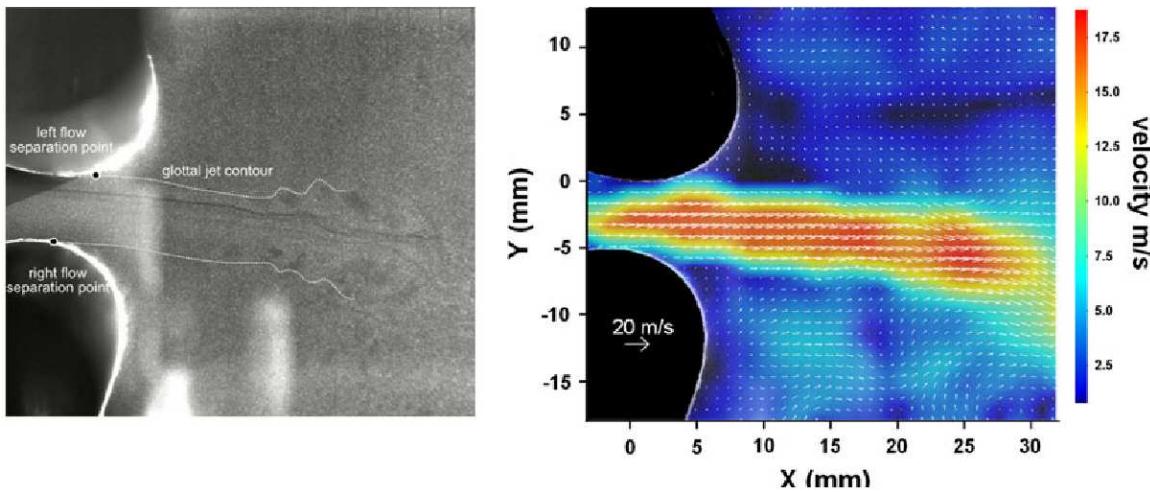


FIGURE 4.4.: Image de particules pour un écoulement typique en sortie des cordes vocales.

4.3. Résultats expérimentaux

La figure 4.6 présente une image typique recueillie par la caméra en haut et un champ de vitesse reconstruit à partir de deux images successives en bas. Les particules disposées dans l'écoulement laissent clairement apparaître le jet glottique. Deux lignes blanches ont été tracées pour le mettre en évidence. En dessous est représenté le champ de vitesse reconstruit à partir de cette image et une autre image consécutive. On remarque aussi clairement une dissymétrie de l'écoulement. Cette dissymétrie a déjà été observée dans d'autres travaux expérimentaux où les deux cordes vocales étaient immobiles et ne peut donc être attribuée à la dissymétrie intrinsèque engendrée par la corde vocale supérieure immobile. Une telle dissymétrie implique par ailleurs que la section la plus étroite n'est plus nécessairement perpendiculaire à l'écoulement. Pour en tenir compte, nous généralisons la notion de constante de séparation (4.1) en introduisant deux constantes de séparation distinctes,

$$FSC_L = \frac{2w_L}{d}, \quad FSC_R = \frac{2w_R}{d}, \quad (4.2)$$

avec d la distance minimale entre les deux cordes vocales et w_L et w_R les distances entre l'axe perpendiculaire à la section minimale et les points de décollement gauche et droit respectivement.

La figure 4.6 présente l'évolution des deux constantes de séparation en fonction du temps au cours d'un cycle.

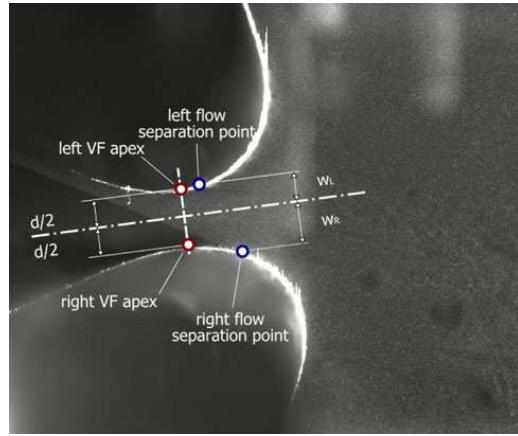


FIGURE 4.5.: Image de particules pour un écoulement typique en sortie des cordes vocales et définition des paramètres géométriques décrivant le décollement du jet.

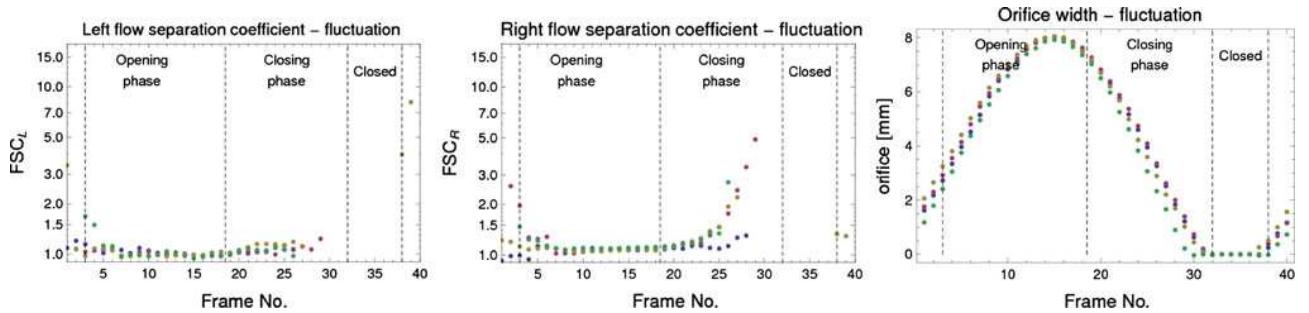


FIGURE 4.6.: Image de particules pour un écoulement typique en sortie des cordes vocales.

Les données correspondant à trois cycles différents sont superposés afin de mettre en évidence la répétabilité des résultats. La largeur de l'interstice entre les cordes vocales est elle aussi tracée. Dans l'expérience présentée sur cette figure, il y a fermeture complète de l'orifice durant à peu près le quart de la période totale d'oscillation. Pendant toute la phase de fermeture, on ne peut évidemment définir une constante de séparation. Lorsque l'orifice est ouvert, on distingue clairement deux régimes. Un des régimes correspond aux grandes ouvertures, où les valeurs de FSC_L et FSC_R sont de l'ordre de 1 et 1.2 respectivement, ce qui est en bon accord avec les précédentes études. Par contre, lorsque l'orifice est très petit, en phase d'ouverture ou de fermeture, les constantes de séparation peuvent devenir assez importantes.

4.4. Conclusion

La campagne expérimentale menée à l'ENSTA sur l'aérodynamique des cordes vocales a permis d'obtenir un jeu de données inédit et utile pour le développement de modèles théoriques. Nous quantifié, dans un régime dissymétrique établi, l'évolution spatiotemporelle du décollement de l'écoulement en aval des cordes vocales. Les résultats expérimentaux permettent d'avancer dans la compréhension de la physique du jet glottique et fournit un jeu de données qui peut s'avérer utile à l'enrichissement des modèles.

Dans les modèles simplifiés basés sur les équations d'Euler où l'on prend en compte un décollement, la position du décollement est considérée constante par rapport à la section minimale. Cela implique que l'on considère que l'écoulement symétrique décolle au même endroit de chaque côté. Dans le présent travail, la distinction entre les points de décollement de l'écoulement sur chaque corde vocale a été introduite, au travers des coefficients

4. Influence du décollement sur l'instabilité à l'origine de la vibration des cordes vocales

FSC_L et FSC_R . Les résultats expérimentaux obtenus montrent que l'utilisation d'une constante de séparation symétrique et comprise entre 1.1 et 1.5 est tout à fait pertinente sur l'essentiel de la période d'oscillation, lorsque les cordes vocales ne sont pas trop proches. Lorsqu'elles sont presque fermées, les valeurs mesurées de FSC montrent que l'un des deux coefficients augmente de manière significative, ce qui indique que le jet décolle bien plus en aval sur la corde vocale correspondante. Ceci est consistant avec les résultats de Neubauer et al. (2007), qui ont observé qu'au début de la phase d'ouverture, le jet s'attache à l'une des cordes vocales et est fortement courbé. Si les cordes vocales sont parfaitement symétriques, nous avons affaire à une situation bistable où le jet peut s'incurver des deux côtés. Expérimentalement, une petite dissymétrie suffit à favoriser l'attachement du jet d'un seul côté. Ce type de comportement a aussi été observé par Erath & Plesniak (2010), qui ont montré que de petites imperfections peuvent imposer au jet de rester attaché préférentiellement d'un seul côté.

Deuxième partie .

Comportement dynamique de structures actives : application au contrôle vibratoire et à la récupération d'énergie des écoulements

Les matériaux actifs

On parle de matériau actif, ou matériau intelligent, lorsque s'opère en son sein un couplage entre les champs mécaniques et d'autres champs tels que les champs électrique, magnétique, thermique, chimique ou optique. Au travers de ce couplage, ces matériaux sont capables de modifier leur champ électrique, leur champ magnétique, leur champ de température, leurs propriétés chimiques ou optiques en réponse à un stimulus mécanique et peuvent, de manière symétrique, se déformer ou modifier leurs propriétés rhéologiques en réponse à un de ces champs. Voici quelques matériaux typiques et le type de champ qui s'y trouve couplé aux champs mécaniques (Tzou et al., 2004) :

- Matériaux magnétostrictifs (champ magnétique)
- Matériaux piézoélectriques (champ électrique)
- Alliages à mémoire de forme (phase cristalline et champ thermique)
- Fluides magnétohéologiques (champ magnétique)
- Polymères électroactifs (champ électrique)
- Matériaux électrostrictifs (champ électrique)
- Matériaux photostrictifs (champ optique)

Dans les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit, nous abordons les matériaux piézoélectriques et les alliages à mémoire de forme. Nous présentons ici brièvement les principes physiques qui régissent le comportement de ces deux matériaux.

La piézoélectricité

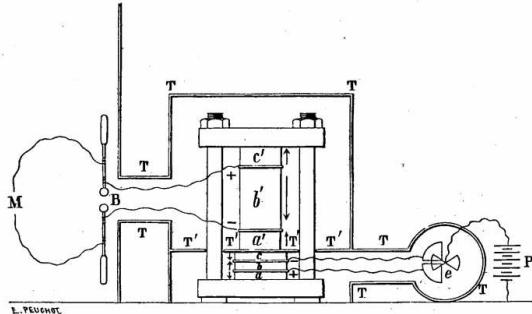
La piézoélectricité est une propriété électromécanique que possèdent certains solides, généralement des cristaux, dans lesquels le champ de déformation est couplé au champ électrique. Nous devons la première démonstration expérimentale de l'effet piézoélectrique et son lien avec la structure cristalline du matériau à Pierre et Jacques Curie (Curie & Curie, 1880). Il fut démontré que lorsque ces matériaux subissent une déformation, une charge électrique peut être engendrée : c'est l'effet piézoélectrique direct. Inversement, lorsqu'un champ électrique est appliqué, ces matériaux peuvent se déformer. Ce dernier effet est appelé effet piézoélectrique inverse. Un schéma de l'expérience des frères Curie est reproduit en figure 4.7. La découverte des frères Curie a ouvert un vaste champ d'applications. On retrouve des objets usuels tirant profit de l'effet piézoélectrique dans tous les foyers et dans tous les domaines industriels. Ce sont les quartz, ces petites pièces électroniques composées d'un matériau piézoélectrique fonctionnant comme un oscillateur mécanique, qui donnent le tempo à tous nos circuits électroniques. De nombreux capteurs dynamiques utilisent ce principe (capteurs de force, accéléromètres, certains microphones...). Les applications de contrôle actif de structures faisant appel à l'effet piézoélectrique sont nombreuses, dans tous les domaines industriels, comme en témoigne l'importante littérature scientifique, que plusieurs ouvrages tentent de résumer (Rogacheva, 1994; Fuller et al., 1996; Jalili, 2010). Ainsi, c'est l'ensemble de notre industrie et l'ensemble de notre vie courante qui sont dépendants de l'effet piézoélectrique.

La figure 4.8 illustre plus précisément l'effet dont nous tirons profit dans les travaux présentés ici. En figures 4.8a et 4.8b sont respectivement représentées les configurations non déformée et déformée d'un cristal piézoélectrique typique. Lorsque le solide est à l'équilibre, le centre des charges positives est confondu avec le centre des charges négatives, de sorte que le champ électrique est nul. Lorsque le solide est déformé, les centres des charges positives et négatives se déplacent et un champ électrique est produit dans le matériau, perpendiculairement au champ de déformation. Le présent mécanisme met donc en jeu un couplage entre un champ de compression/étirement selon le vecteur unitaire e_1 et un champ électrique selon une direction perpendiculaire e_3 . Cet effet est typiquement utilisé dans des applications de contrôle de plaques ou de poutres. En figure 4.8c est représenté un élément de poutre en flexion sur lequel sont collés deux patchs piézoélectriques de sorte que leur polarités respectives sont inversées. C'est à dire que le cristal de la face supérieure est retourné à 180°

4. Influence du décollement sur l'instabilité à l'origine de la vibration des cordes vocales

Les blocs de quartz a' , b' , c' (fig. 3) sont maintenus serrés dans une presse et séparés par des plateaux métalliques entre lesquels on établit une différence de potentiel électrique au moyen de la machine électrique M. Pour

Fig. 3.



déceler la variation de pression, on utilise les phénomènes de la piézo-électricité elle-même. Trois lames de quartz a , b , c , serrées dans la même presse, donnent, lors d'une variation de pression, un dégagement électrique que l'on utilise pour faire dévier un électromètre e . Des écrans métalliques T , T' séparent, au point de vue électrique, les diverses parties de l'appareil. Le dynamomètre piézo-électrique ainsi constitué est capable de déceler un effort de quelques grammes.

FIGURE 4.7.: Figure et description de l'expérience originale des frères Curie (Curie & Curie, 1880), tirée de la référence (Curie, 1902).

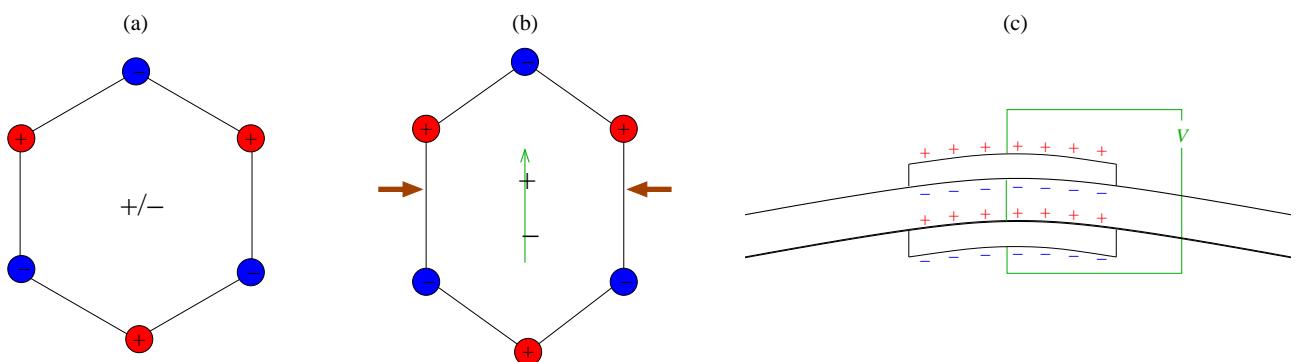


FIGURE 4.8.: Représentation schématique d'un cristal piézoélectrique en configuration non-déformée, à l'équilibre (a) et lorsqu'un champ de déformation est imposé (b). Lorsque l'élément du cristal se déforme, le décalage des centres des charges positives et négatives créé un dipôle, qui induit un champ électrique ; (c), déformation de flexion d'un élément de poutre sur lequel sont collés deux patchs piézoélectriques de polarités opposées.

par rapport au schéma de la figure 4.8b. Lorsque la poutre subit une déformation de flexion, le patch du dessus est étiré, tandis que celui du dessous est comprimé. Si les faces intérieures de chaque patch piézoélectrique sont connectées entre elles, on peut mesurer une tension entre les faces extérieures proportionnelle à la déformation de flexion.

Nous utiliserons cet effet dans deux applications. Au chapitre 5, nous utiliserons ce principe pour contrôler la dynamique d'une plaque circulaire encastrée utilisée comme un haut-parleur. Au chapitre 6, nous tirerons profit de l'effet piézoélectrique direct pour convertir l'énergie cinétique d'un écoulement en énergie électrique à partir du flottement de plaques minces dans un écoulement axial.

Les alliages à mémoire de forme

Les alliages à mémoire de forme sont des alliages qui possèdent des propriétés mécaniques particulières, causées par un changement de phase entre deux états solides : l'*austénite*, qui est stable à haute température, et la *martensite* qui est une phase présente à basse température. Les changements de phase sont engendrés soit par des variations de température (échauffements/refroidissements), soit par des déformations (chargements/déchargements). D'un point de vue microscopique, les phases martensitiques et austénitiques sont deux structures cristallographiques de l'alliage. Elles doivent leurs noms respectifs à Adolf Martens et William Chandler Roberts-Austen, deux célèbres métallurgistes du XIX^e siècle.

La figure 4.9a présente un diagramme de phase dans le plan (température, contrainte) des matériaux à mémoire de forme considéré dans de nombreux travaux de recherche. On y distingue 3 phases différentes : deux phases martensitiques stables à basse température, et une phase austénitique stable à haute température. La transition entre ces phases s'opère au sein des zones bleues. Les transitions directe et inverse entre la phase austénitique et la phase martensitique ont lieu à des valeurs différentes de contrainte. Ces différences de valeurs seuil engendrent des hystérésis dans les relations (température, déformation) et (déformation, contrainte) illustrées sur les figures 4.9b et c.

Sur la première figure est présenté l'hystérésis thermique survenant lorsque le matériau subit une augmentation et diminution de température, à contrainte nulle. Les températures M_f^0 , M_s^0 , A_s^0 et A_f^0 sont respectivement les températures seuil à contrainte nulle de fin de transformation martensitique, de début de transformation martensitique, de début de transformation austénitique et de fin de transformation austénitique.

Sur la figure 4.9c est illustré l'effet qui va nous intéresser plus particulièrement au cours du chapitre 7. Ce comportement mécanique est nommé *pseudoélastique*. Lorsque le matériau commence à subir un chargement, il est dans une phase purement austénitique et a un module d'Young égal à E_a . À partir d'une contrainte seuil σ_{ms} , la transformation de phase débute. Durant le changement de phase, le matériau présente une raideur plus faible. Le processus s'arrête quand l'ensemble du matériau est dans sa phase martensitique, de raideur E_m . Lorsque l'on relâche la contrainte, la transformation inverse survient à une valeur σ_{as} inférieure à σ_{mf} . La contrainte de fin de transformation inverse est notée σ_{af} . La boucle d'hystérésis a pour conséquence directe une dissipation d'énergie égale à l'aire de la boucle. Cette caractéristique fait de ces alliages de bon candidats pour la réduction passive des vibrations de structures. C'est ce type d'application qui a motivé les travaux de recherche sur les oscillations mécaniques en présence de raideurs pseudoélastiques du chapitre 7.

La partie II de ce manuscrit est donc composée de trois chapitres. Dans les deux premiers, le phénomène piézoélectrique sera mis à profit dans des applications de contrôle vibratoire et de récupération d'énergie du flottement de structures minces. Dans le troisième, nous étudierons l'effet d'un comportement pseudoélastique sur les oscillations mécaniques de structures forcées.

4. Influence du décollement sur l'instabilité à l'origine de la vibration des cordes vocales

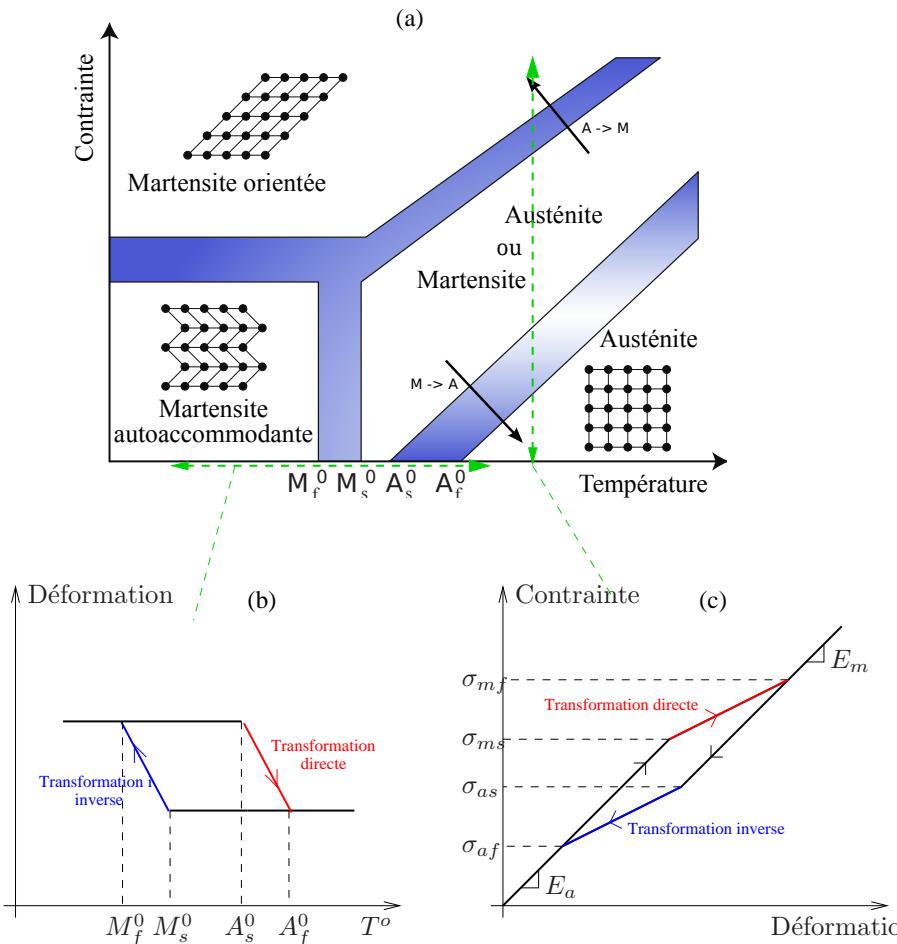


FIGURE 4.9.: (a), diagramme de phases typique d'un matériau à mémoire de forme dans le plan (Température,Contrainte), tiré de Zaki (2006) ; (b) hystérésis thermique survenant lorsque le matériau subit un cycle d'échauffement/refroidissement à contrainte nulle ; (c), hystérésis mécanique lorsque le matériau subit un cycle chargement/déchargement à température constante supérieure à A_f^0 .

5. Dynamique des structures piézoélectriques : application au contrôle du rayonnement de plaques planes

Références :

- Doaré, Kergourlay, & Sambuc (2012), Design of a circular clamped plate excited by a voice coil and piezoelectric patches used as a loudspeaker. *Transactions od the ASME : Journal of Vibration and Acoustics*, under review.
- Kergourlay & Doaré (2012), Method and device for controlling the vibration modes of a vibrating support. *Brevet*, No de publication UK : GB1105681.9.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la production de son par un haut-parleur constitué d'une plaque plane, excitée à la fois par un système bobine aimant et par des anneaux piézoélectriques collés sur sa surface. La figure 5.1a donne une représentation schématique d'un haut-parleur classique constitué d'un cône rigide fixé sur une suspension souple, et enfermé dans une enceinte. Ce système se comporte comme un oscillateur de masse m égale à la masse totale en mouvement, de raideur k provenant de la rigidité de la suspension et de la compressibilité de l'air emprisonné dans le volume clos, et d'amortissement c provoqué par des dissipations au sein de la structure, mais aussi liées à la perte d'énergie liée au rayonnement (Lax, 1944; Nouira et al., 2007; Kraftmakher, 2010). Une bobine, fixée au cône, se trouve dans un champ magnétique radial créé par un aimant permanent, de sorte qu'en tout point le courant traversant la bobine se trouve perpendiculaire au champ magnétique, ce qui engendre une force F (Beranek, 1954). Le rayonnement de ce système est habituellement modélisé en considérant un piston plan dans un baffle infini (figure 5.1b). Nous devons les travaux de référence sur la modélisation des hauts parleurs à Thiele (1971a,b) dans le cadre des enceintes closes et Small (1972, 1973) dans le cadre des enceintes à événement¹, si bien que les paramètres de référence caractérisant tout haut-parleur commercial sont dénommés *paramètres de Thiele et Small*. Dans les travaux de Thiele et Small, les oscillateurs mécaniques sont modélisés par des circuits électriques équivalents, connectés au circuit électrique de l'amplificateur. Il est à noter que nous adoptons ici l'approche inverse qui consiste à modéliser la dynamique des circuits électriques à l'aide d'équations aux dérivées ordinaires, comme le font plus volontiers les mécaniciens.

L'utilisation d'une plaque plane encastrée au lieu d'un cône sur suspension ne modifie pas fondamentalement la physique du fonctionnement du haut-parleur, ce qui est illustré en figure 5.1c,d. Cette fois nous avons affaire à un système mécanique à plusieurs modes. Ce qui est gagné en encombrement par ce système, voire en directivité du rayonnement (Alper & Magrab, 1970), a des répercussions néfastes sur la qualité du rayonnement. En effet, la bande passante utile d'un haut-parleur, c'est à dire l'intervalle de fréquences au sein duquel l'énergie rayonnée est constante, est compris entre les deux premières fréquences propres du haut-parleur. Le haut-parleur classique de type cône sur suspension possède comme toute structure une infinité de modes, mais le premier d'entre eux, qui consiste en la translation du cône, a une fréquence bien inférieure aux suivants, qui eux impliquent une déformation de la membrane cône (Kuo et al., 2011) et sont le plus souvent négligés. La séparation entre le premier mode d'une plaque plane encastrée et les suivants est moindre. La bande passante est par conséquent réduite. Pour se convaincre des problèmes engendrés par la multiplicité des modes de la plaque plane, la figure 5.2 représente deux fonctions de transfert typiquement mesurées ou calculées lorsque l'on étudie un haut-parleur. Il s'agit d'une part de l'impédance électrique mesurée aux bornes de la bobine excitatrice et d'autre part du

1. Le volume intérieur se comporte alors comme un résonateur de Helmholtz, si bien qu'à la raideur k , il faut adjoindre une masse supplémentaire m_a , correspondant à un volume d'air en oscillant au niveau de l'événement.

5. Dynamique des structures piézoélectriques : application au contrôle du rayonnement de plaques planes

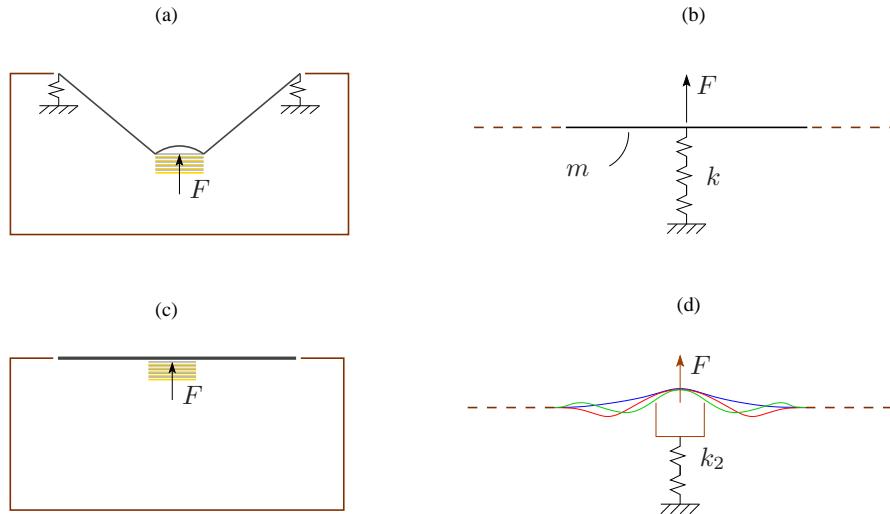


FIGURE 5.1.: Comparaison des principes de fonctionnement et de modélisation d'un haut-parleur à cône rigide et d'un haut-parleur à plaque plane souple ; (a), schéma d'un haut-parleur typique au sein d'une enceinte close, forcé par la bobine ; (b), modèle piston-plan baflé équivalent couramment utilisé où la raideur k est due à la fois à la suspension et compressibilité du volume d'air emprisonné ; (c), schéma d'un haut-parleur typique basé sur le principe d'une plaque plane souple encastrée ; (d), modèle équivalent dans lequel plusieurs modes de plaque sont forcés par la bobine et où la raideur k_2 vient du volume d'air emprisonné dans l'enceinte close uniquement. En pratique, de même qu'à chaque mode correspond une masse et une raideur modale, il existe une raideur ajoutée k_2 pour chaque mode, dont l'ordre de grandeur dépend de la variation de volume associée à chaque mouvement modal.

niveau de pression acoustique à un mètre dans l'axe du haut-parleur. Ces courbes typiques ont été obtenues grâce au modèle qui sera présenté en section 5.1 en utilisant des valeurs arbitraires, mais représentatives des paramètres. L'impédance électrique tend vers une constante aux basses fréquences égale à la résistance du fil de la bobine en courant continu. La remontée lente de l'impédance aux hautes fréquences est due à l'influence de l'inductance de la bobine. Enfin, aux fréquences intermédiaires, on observe une succession de pics, qui correspondent aux résonances mécaniques du transducteur. À ces fréquences, le couplage électromécanique implique qu'une quantité significative de l'énergie électrique est convertie en énergie mécanique, ce qui a pour conséquence une importante augmentation de l'impédance électrique autour de ces fréquences. La présence de ces multiples modes a des conséquences visibles sur l'énergie acoustique rayonnée dans l'axe du haut parleur : celle-ci est très irrégulière. À titre de comparaison, les impédances calculées en ne retenant que le premier mode de plaque sont tracées sur les mêmes graphiques. Cette fois, un seul pic apparaît dans la courbe d'impédance électrique, et la pression acoustique rayonnée dans l'axe est homogène à partir de la fréquence de résonance.

Pour palier au problème de déséquilibre de l'énergie rayonnée, nous proposons de disposer des anneaux piézoélectriques sur la plaque circulaire afin d'exercer un forçage secondaire sur la structure, capable d'amortir la dynamique selon les modes indésirables et ainsi de s'approcher du fonctionnement d'une plaque à un mode unique, tel que représenté en figure 5.2b.

5.1. Modèle de plaque plane circulaire forcée par un système bobine-aimant et deux anneaux piézoélectriques

La géométrie considérée dans l'étape de modélisation est représentée en figure 5.3. Nous considérons une plaque circulaire encastrée en $R = R_0$, la présence d'une bobine en $R = C$, de deux patchs piézoélectriques entre $R = A$ et $R = B$. Un modèle linéaire de plaque de type Kirchhoff-Love a été considéré dans ce travail, de sorte que le déplacement $W(R, T)$ de la plaque, de rigidité en flexion $D(R)$ et de masse surfacique $\mu(R)$ obéit à l'équation

5.1. Modèle de plaque plane circulaire forcée par un système bobine-aimant et deux anneaux piézoélectriques

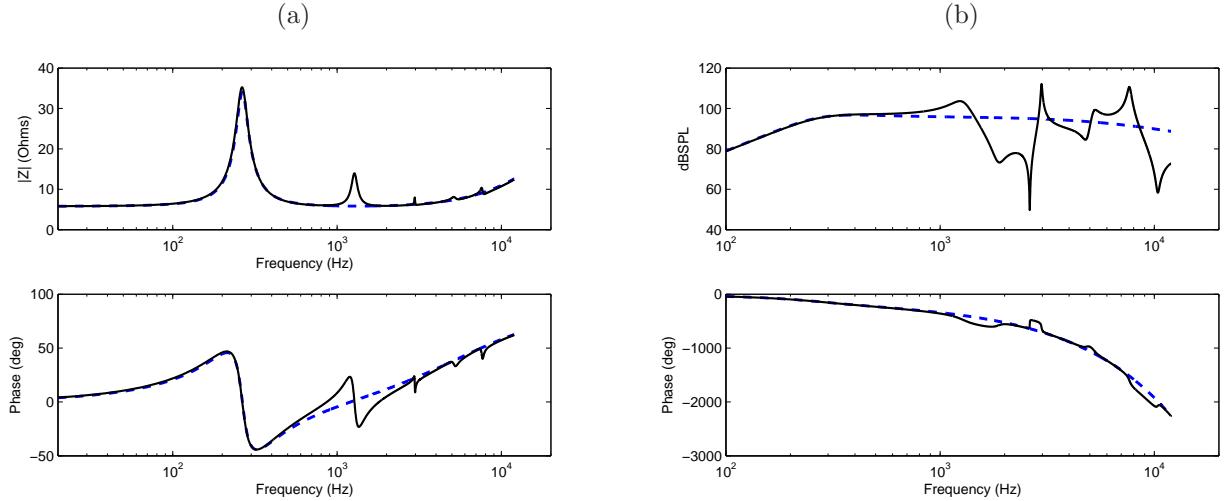


FIGURE 5.2.: Fonctions de transfert typiques obtenues par le modèle de plaque circulaire encastrée qui sera présenté en section 5.1 lorsque seulement la bobine est utilisée ; (a) impédance électrique de la bobine ; (b) pression rayonnée dans l'axe à 1m ; les courbes en trait plein sont obtenues lorsque 10 modes sont retenus dans la modélisation tandis que les traits hachurés correspondent à une approximation à un seul mode. Puisque la pression rayonnée dans le cas du modèle à un mode est plus équilibrée, l'objectif est de s'en approcher en forçant le système à l'aide d'actionneurs supplémentaires.

locale suivante :

$$D(R)\Delta^2 W(R, T) + \mu(R)\ddot{W}(R, T) = P_c(R, T) + P_p(R, T) + P_v(R, T), \quad (5.1)$$

à laquelle il convient d'ajouter des conditions aux limites de type encaissement en $R = R_0$, et où P_c , P_p et P_v sont des termes de pression dus respectivement au forçage par le système bobine-aimant, au forçage par les patchs piézoélectriques, et aux forces de pression externes, en particulier les forces de pression consécutives à la présence d'un volume clos à l'arrière de l'enceinte. Il est à noter que le choix de considérer un déplacement indépendant de l'angle polaire vient de ce que l'ensemble des forçages exercés sont eux-mêmes axi-symétriques. Enfin, la dépendance en R de la masse surfacique et de la rigidité en flexion provient de la présence de la bobine et des patchs piézoélectriques.

5.1.1. Forçage d'une plaque par un système bobine-aimant

La force exercée par le système bobine-aimant est proportionnelle à l'intensité électrique traversant la bobine dQ_c/dt , au champ magnétique permanent B et à la hauteur de la bobine l . Cette force s'exerce sur un cercle de rayon C , de sorte que la pression P_c au second membre de l'équation (5.1) a pour expression,

$$P_c(R, T) = Bl \frac{dQ_c}{dT} \frac{\delta(R - C)}{2\pi C}. \quad (5.2)$$

La bobine se comporte électriquement comme une inductance L_c en série avec une résistance R_c et une force électromotrice, proportionnelle à la vitesse de translation de la bobine perpendiculairement au champ magnétique radial. Le circuit électrique équivalent est représenté en figure 5.4a. Ce circuit électrique est connecté à un générateur de tension u_c imposé par un amplificateur. La charge électrique $Q_c(t)$ obéit alors à l'équation aux dérivées ordinaires suivante,

$$R_c \frac{dQ_c}{dt} + L_c \frac{d^2 Q_c}{dt^2} + Bl \frac{dW(C)}{dt} = u_c(t). \quad (5.3)$$

5. Dynamique des structures piézoélectriques : application au contrôle du rayonnement de plaques planes

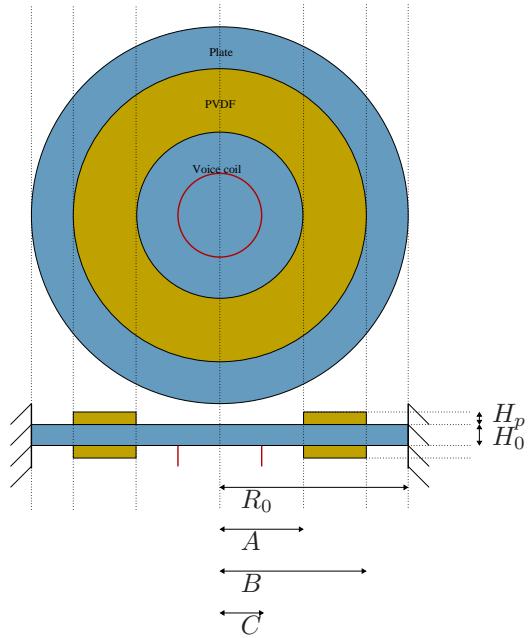


FIGURE 5.3.: Représentation schématique de la plaque plane encastrée équipée de deux anneaux piézoélectriques et d'une bobine.

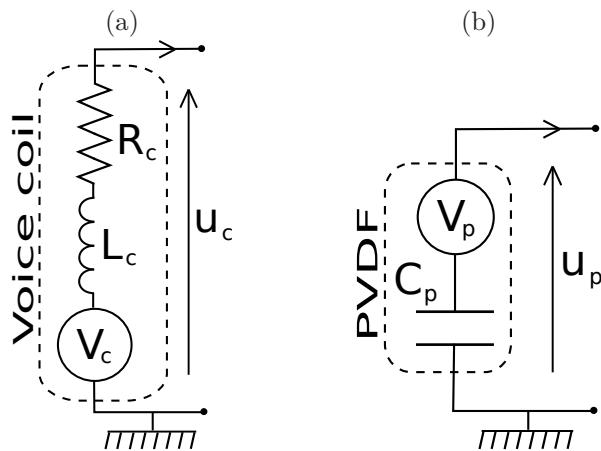


FIGURE 5.4.: Modèles de circuits électriques; (a), bobine se comportant comme une inductance en série avec une résistance, couplée à une source de tension ; (b) patch piézoélectrique se comportant comme un condensateur, couplé à une source de tension.

5.1. Modèle de plaque plane circulaire forcée par un système bobine-aimant et deux anneaux piézoélectriques

5.1.2. Forçage de la plaque par les patchs piézoélectriques

La modélisation de cet effet a été traitée dans de nombreux articles et ouvrages de références. C'est le travail de Lee & Moon (1989) qui a constitué le point de départ de notre modélisation. Dans ce travail, il est considéré un élément de plaque constitué d'une couche faite d'un matériau non piézoélectrique entouré de deux couches constituées d'un matériau piézoélectrique de polarités opposées, dont les électrodes situées sur les faces internes sont connectées entre elles. Une différence de potentiel peut alors être appliquée entre les deux faces externes de cette plaque sandwich à trois couches. Dans le travail de Lee & Moon (1989), les équations de plaque forcées par les patchs piézoélectriques sont exprimées en coordonnées cartésiennes dans un cadre plus général que celui de la présente application. Notamment, les couplages piézoélectriques dans plusieurs directions sont considérés. Appliqué à notre cas, en coordonnées polaires, la pression P_p prend la forme suivante,

$$P_p(R, T) = -u_p(T)\chi \left(\frac{\partial^2 F_p}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_p}{\partial R} \right), \quad (5.4)$$

où u_p est la tension imposée, χ est un paramètre qui dépend du coefficient de couplage piézoélectrique du matériau e_{31} et des épaisseurs des différentes couches de la plaque sandwich,

$$\chi = e_{31} \frac{H_0 + H_p}{2}. \quad (5.5)$$

L'équation (5.4) contient deux simplifications par rapport au cas présenté par Lee & Moon (1989). Tout d'abord, nous avons négligé les effets de la torsion, ce qui est justifié par le fait que les matériaux utilisés dans notre application ne présentent pas de couplage piézoélectrique via la torsion. Ensuite, nous avons considéré une polarité constante, ce qui est là-aussi justifié par notre application. Dans l'équation (5.4), F_p est une fonction qui décrit la disposition du patch piézoélectrique. Elle vaut 1 là où se trouve le patch, et zéro ailleurs,

$$F_p = H(R - A) - H(R - B), \quad (5.6)$$

H étant la fonction de Heaviside.

Un patch piézoélectrique se comporte électriquement comme un condensateur en série avec une force électromotrice due au couplage piézoélectrique. Lorsque ce circuit est connecté à une source de tension u_p provenant d'un amplificateur (figure 5.4b), la charge électrique Q_p dans le circuit est gouvernée par l'équation suivante,

$$\frac{1}{C_p} Q_p + \frac{\chi}{C_p} \int_S F_p(R) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} \right) dS = u_p(t). \quad (5.7)$$

5.1.3. Modèle dynamique d'ordre réduit et fonctions de transfert

Pour obtenir un modèle dynamique permettant de calculer aisément des fonctions de transfert entre les tensions imposées aux bornes des transducteurs et diverses quantités cinématiques, une méthode de Galerkin a été utilisée en choisissant la base modale tronquée à 5 modes de la plaque avec patchs piézoélectriques mais sans bobine. Les principales étapes de la modélisation sont (1) l'adimensionnement des équations dynamiques, (2) le calcul des modes propres de la plaque avec patchs piézoélectriques et sans bobine, (3) la représentation du déplacement comme une somme de contributions modales et troncature à N modes dans l'équation (5.1) et dans les équations électriques (5.3) et (5.7), (4) la projection de l'équation (5.1) sur les N modes. Ce travail

5. Dynamique des structures piézoélectriques : application au contrôle du rayonnement de plaques planes

permet d'obtenir la dynamique discrète qui se met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{M} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \bar{L}_c & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{q}_w \\ \vdots \\ \vec{q}_c \\ \ddot{q}_{p1} \\ \ddot{q}_{p2} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc|ccc} \ddots & & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{C} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \bar{\tau}_{ec}\vec{\chi}_c^t & \cdots & R_c & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{q}_w \\ \vdots \\ \dot{q}_c \\ \dot{q}_{p1} \\ \dot{q}_{p2} \end{bmatrix} \\ & + \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v & \vdots & 0 & -\frac{\bar{\tau}_p}{C_p}\vec{\chi}_p & -\frac{\bar{\tau}_p}{C_p}\vec{\chi}_p \\ \cdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & -\bar{\tau}_{ep}\vec{\chi}_p^t & \cdots & 0 & 1/\bar{C}_p & 0 \\ \cdots & -\bar{\tau}_{ep}\vec{\chi}_p^t & \cdots & 0 & 0 & 1/\bar{C}_p \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{q}_w \\ \vdots \\ q_c \\ q_{p1} \\ q_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ u_c \\ u_{p1} \\ u_{p2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

On reconnaît-là une équation dynamique d'oscillateurs couplés classique, forcée au second membre par les tensions imposées par les amplificateurs. Le vecteur \vec{q}_w est un vecteur colonne de taille N contenant les déplacements modaux, et q_c , q_{p1} et q_{p2} sont respectivement les charges dans les circuits de la bobine et dans les deux circuits des patchs piézoélectriques. La partie mécanique de la matrice de masse \mathbf{M} contient les termes diagonaux des raideurs modales du problème sans bobine, dont les modes propres ont été utilisés pour la projection, et des termes hors diagonale provenant de la masse de la bobine. La partie mécanique de la matrice d'amortissement \mathbf{C} est supposée diagonale et ses coefficients ajustés à partir d'expériences. La partie mécanique de la matrice de raideur est la somme de trois matrices, \mathbf{K} , une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les raideurs modales de la plaque sans bobine et sans couplage piézoélectrique, \mathbf{K}_v qui contient les termes de raideur ajoutée dues à la présence d'un volume clos d'un côté du haut-parleur et \mathbf{K}_p qui contient des termes de raideur ajoutée consécutifs au comportement capacitif des patchs piézoélectriques. Il est à noter que toutes les quantités purement mécaniques sont sans dimension alors qu'un adimensionnement partiel a été effectué pour les quantités électriques. Le temps y a été adimensionné comme dans la partie mécanique, alors qu'une normalisation a été effectuée de sorte que les charges électriques, et leurs dérivées successives par rapport au temps sans dimension sont exprimées en Ampères tandis que les tensions électriques sont exprimées en Volts. Cette normalisation permet de réduire le nombre de paramètres indépendants du problème tout en conservant les quantités électriques correspondant aux intensités et aux tensions, ce qui rend plus aisée la comparaison avec l'expérience, en particulier lorsque l'on s'intéresse à des impédances électriques. Les paramètres $\bar{\tau}_{ec}$ et $\bar{\tau}_{ep}$ sont des coefficients de couplage entre les parties mécaniques et électriques, homogènes à des Volts tandis que $\bar{\tau}_c$ et $\bar{\tau}_p$, homogènes à des Ampères $^{-1}$, couplent les deux physiques dans l'autre sens. Les vecteurs $\vec{\chi}_c$ et $\vec{\chi}_p$ proviennent respectivement des projections modales des efforts dus à la bobine et aux patchs piézoélectriques,

$$\vec{\chi}_c = \begin{pmatrix} \phi_1(c) \\ \vdots \\ \phi_n(c) \\ \vdots \\ \phi_N(c) \end{pmatrix}, \vec{\chi}_p = \begin{pmatrix} 2\pi[r\phi'_1]^b_a \\ \vdots \\ 2\pi[r\phi'_n]^b_a \\ \vdots \\ 2\pi[r\phi'_N]^b_a \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

avec $a = A/R_0$, $b = B/R_0$ et $c = C/R_0$.

Il est important de noter que dans cette équation d'oscillateurs couplés, seuls les termes diagonaux de la partie mécanique de la matrice d'amortissement restent à ajuster à ce stade. En effet, l'ensemble des autres paramètres sont des quantités évaluées ou mesurées par des processus indépendants. Par exemple les propriétés des plaques sont évaluées par des expériences mécaniques simples sur des plaques rectangulaires, les quantités électriques sont estimées à partir de mesures d'impédance indépendantes ou bien encore les propriétés des patchs piézoélectriques sont données par le fournisseur.

L'équation (5.8) a une forme parfaitement adaptée au calcul de diverses fonctions de transfert. Lorsque l'on s'intéresse au champ acoustique rayonné par le système, l'intégrale de Rayleigh est utilisée (Pierce, 1989; Chaigne & Kergomard, 2008).

5.2. Recherche d'une géométrie optimale

Nous cherchons à présent à calculer un jeu de paramètres optimaux qui permette au haut-parleur d'avoir un comportement le plus proche possible d'un haut-parleur de type piston-plan conique. Comme discuté plus haut, la réponse en fréquence typique de ce type de transducteur peut être obtenue en ne retenant que le premier mode dans la modélisation. Il fut envisagé d'approcher ce mode de fonctionnement en annulant l'effet des résonances selon les modes 2 et 3. Pour ce faire, les paramètres furent ajustés de sorte que le forçage sur le mode 3 de la bobine et des piézos s'annulent tandis que l'effort sur le mode 2 devait être annulé en ajustant les amplitudes respectives des tension imposées à la bobine et aux patchs piézoélectriques. Afin de s'assurer d'une bonne efficacité du forçage exercé par le patch piézoélectrique, il fut par ailleurs fait en sorte que l'effort exercé par le patch piézoélectrique sur le mode 2 soit le plus important possible. Sous une forme compacte, le processus d'optimisation s'écrit finalement :

$$\text{Maximiser } \chi_{p2} \text{ avec } \chi_{c3} \equiv 0 \text{ et } \chi_{p3} \equiv 0. \quad (5.10)$$

L'équation (5.9) indique que $\vec{\chi}_c$ et $\vec{\chi}_p$ ne dépendent que de a , b , c et des modes propres ϕ_n . Ces derniers dépendent eux-mêmes de a , b , c et de divers paramètres matériau. Ainsi, ayant fixé l'ensemble des paramètres matériau du problème, la recherche d'un optimal s'effectue dans l'espace à trois dimensions (a, b, c) . La figure 5.5 présente le calcul d'optimisation qui a été effectué. Pour différentes valeurs de c , les lignes de contour ou χ_{p3} et χ_{c3} s'annulent sont tracées par dessus les courbes de niveaux de χ_{p2} dans le plan (a, b) . Plusieurs combinaisons optimales des trois paramètres géométriques peuvent être trouvées. Elles correspondent à un croisement des courbes $\chi_{p3} = 0$ et $\chi_{c3} = 0$ près d'un maximum de χ_{p2} et sont indiquées par des flèches. Des différents choix possibles, la configuration retenue a finalement été la suivante :

$$a = 0.360, \quad b = 0.800, \quad c = 0.254. \quad (5.11)$$

5.3. Confrontation des résultats expérimentaux et théoriques sur un haut-parleur optimisé

A partir des recommandations obtenues dans la phase d'optimisation, un prototype a été réalisé par Cabasse (figure 5.6). Le collage des anneaux piézoélectriques sur les plaques de mousse de rohacell a été réalisé par l'entreprise Piezotech. Malheureusement, la précision théorique requise par le modèle n'a pu être satisfaite par le procédé de fabrication manuel du haut parleur. Les valeurs des paramètres finalement obtenues pour ce transducteur sont,

$$a = 0.363, \quad b = 0.787, \quad c = 0.244. \quad (5.12)$$

Diverses fonctions de transfert expérimentales et théoriques ont été comparées afin d'estimer les amortissements diagonaux du problème matriciel, seuls paramètres restant à ajuster. Un très bon accord entre théorie et expérience est observé, comme en témoignent deux fonctions de transfert données en figure 5.7. Il faut toutefois noter que le mode 3, dont le pic de résonance se situe vers 3000 Hz, reste excité, contrairement aux objectifs de l'optimisation.

Ensuite, des expériences ont été réalisées où la plaque était forcée simultanément par la bobine et les patchs piézoélectriques. Les amplitudes respectives ont été ajustées de sorte que l'allure de la fonction de transfert entre tension à la bobine et déplacement au centre de la plaque soit le plus proche de l'approximation $N = 1$. Un facteur 250 a finalement été trouvé entre la tension à la bobine et la tension aux bornes des patchs piézoélectriques.

Enfin la pression rayonnée dans l'axe à 84cm a été mesurée en chambre anéchoïque sur le prototype bafflé dans une plaque rigide rectangulaire de 60cm par 65cm. Deux expériences ont été réalisées : l'une avec un

5. Dynamique des structures piézoélectriques : application au contrôle du rayonnement de plaques planes

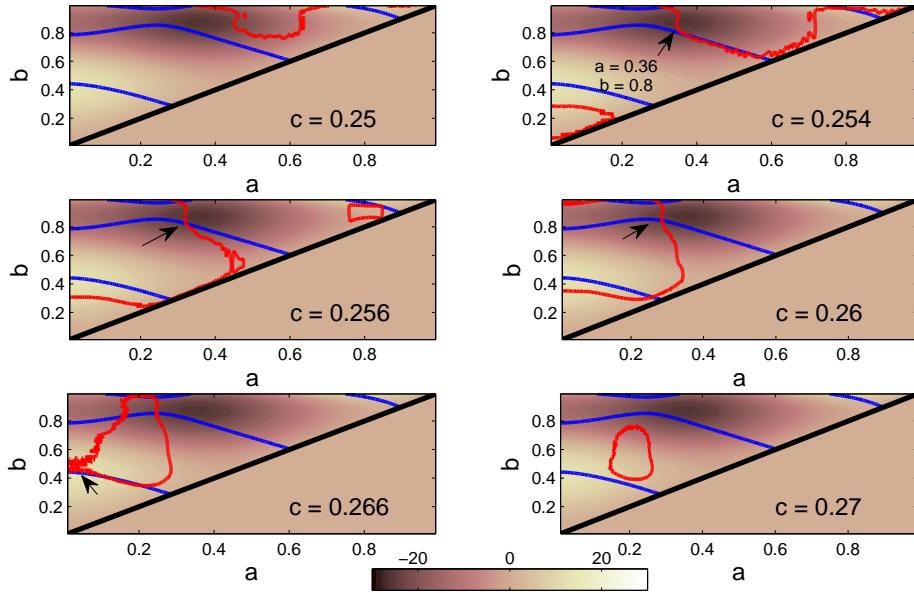


FIGURE 5.5.: Valeurs de χ_{p2} (échelle de couleurs), zéros de χ_{p3} (bleu) et zéros de χ_{c3} (rouge) dans le plan (a, b) , et pour différentes valeurs de c . Les points qui satisfont le critère (5.10) sont indiqués par une flèche.

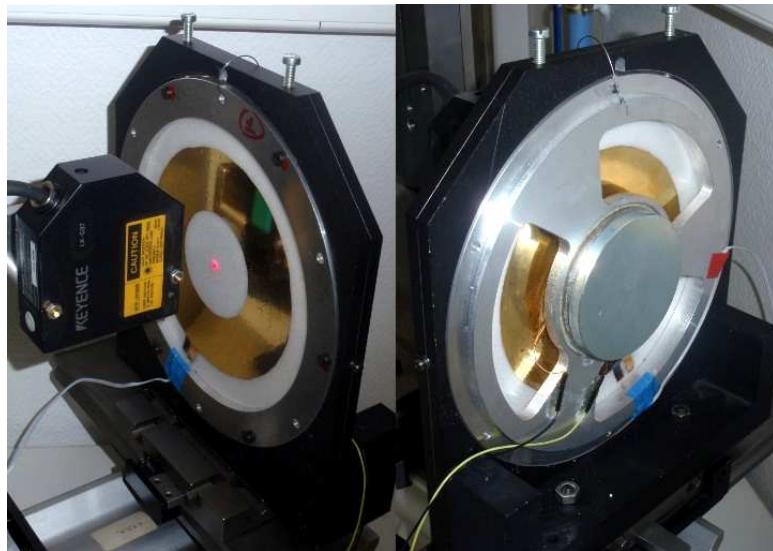


FIGURE 5.6.: Photographies du prototype construit par Cabasse à partir des recommandations données en équation (5.11).

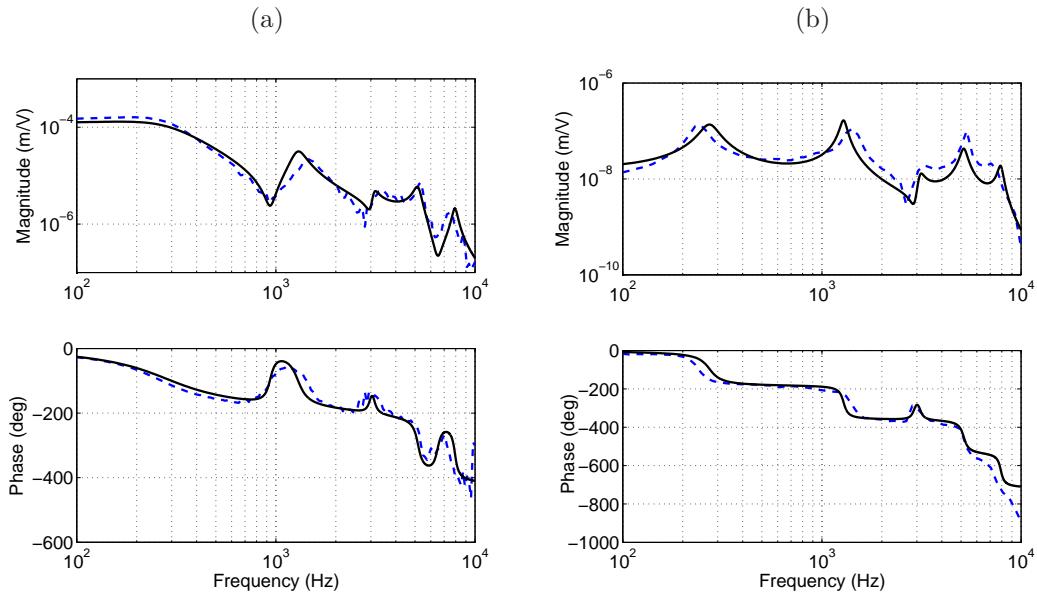


FIGURE 5.7.: Comparaison des fonctions de transfert expérimentales (ligne hachurée bleue) et théoriques (ligne noire pleine); (a) fonction de transfert entre tension aux bornes de la bobine et déplacement au centre de la plaque ; (b) fonction de transfert entre tension aux bornes des patchs piézoélectriques et déplacement au centre de la plaque lorsque la bobine est en circuit ouvert.

forçage par la bobine seule (système non-contrôlé) l'autre lorsqu'un forçage conjoint de la bobine et des piézo est effectué (système contrôlé). Les fonctions de transfert obtenues sont tracées et comparées avec la théorie en figure 5.8. Expérimentalement, le fait que le haut parleur ne soit pas baffle dans un plan infini fait que le rayonnement arrière interfère avec le rayonnement avant pour des longueurs d'onde supérieures ou égales aux dimensions typiques du baffle (Pierce, 1989). Les résultats expérimentaux aux basses fréquences ne peuvent donc être comparés avec les calculs numériques, qui considèrent un baffle infini. L'intervalle de fréquences en question est grisé sur la figure 5.8.

À cause de la résonance et l'anti-résonance du second mode, le rayonnement du système non contrôlé présente un pic à 1500Hz, suivi d'un trou important. Dans le cas du système contrôlé, cet effet est fortement réduit. De même, un effet de la résonance du troisième mode est visible sur le système non contrôlé. Cet effet est lui aussi réduit sur le système contrôlé². Finalement, si l'on tolère une différence d'au plus 10dB entre le maximum le minimum du rayonnement théorique de ce haut-parleur, l'on peut conclure que nous avons étendu sa bande passante de [200-1500Hz] à [200-4000Hz].

5.4. Bilan et perspectives

L'objectif premier de la collaboration scientifique était de modéliser le comportement dynamique linéaire d'une plaque plane encastrée forcée par une bobine et des patchs piézoélectriques, et d'utiliser ce modèle pour trouver un jeu de paramètres optimal à même de faire fonctionner la plaque sur son mode 1 uniquement. Nous pouvons considérer cet objectif initial atteint, même si des efforts supplémentaires devraient être faits sur la précision des géométries dans le processus de fabrication des prototypes.

S'est alors posée la question de poursuivre le travail sur ce projet. À ce moment, les activités audio de CANON-CRF étaient en cours de réaffectation vers une autre activité que les haut-parleurs. La jeune activité sur le rayonnement de plaques planes aurait pu toutefois subsister si deux problèmes n'avaient pas empêché la

2. Ce résultat positif a été obtenu de manière tout à fait fortuite. En effet, ceci ne faisait pas partie de l'objectif d'optimisation, puisqu'il s'agissait pour ce mode d'annuler le forçage par la bobine et les piézos indépendamment.

5. Dynamique des structures piézoélectriques : application au contrôle du rayonnement de plaques planes

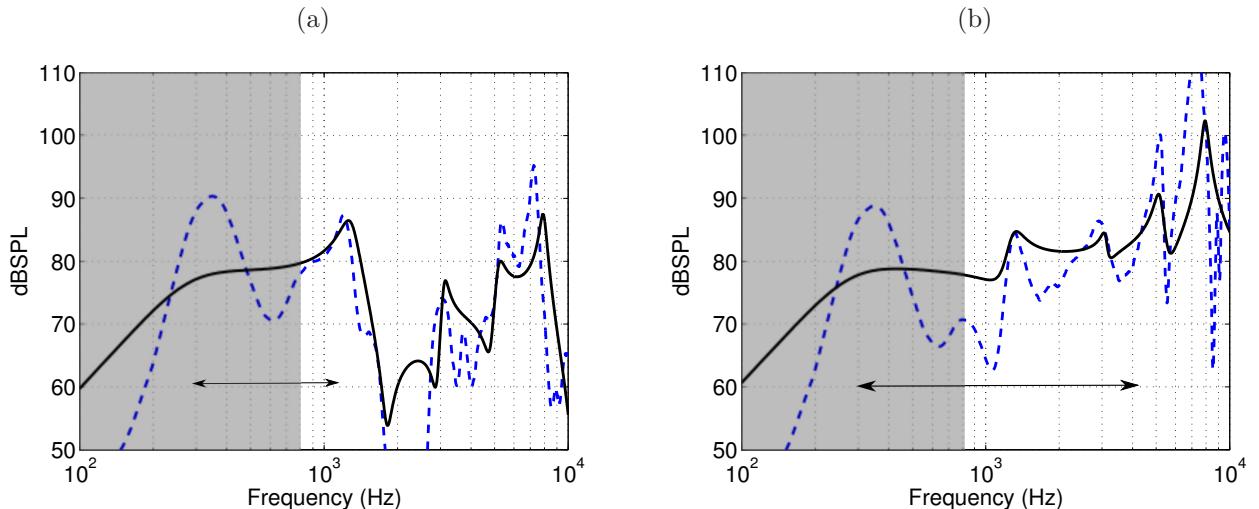


FIGURE 5.8.: Puissance rayonnée par la plaque dans l'axe à 84cm, comparaison du système non contrôlé (a), et du système contrôlé (b). L'expérience est en bleu hachuré, la théorie en trait plein noir. La région grisée correspond à un domaine de fréquences où le rayonnement arrière interfère avec le rayonnement direct, ce qui n'est pas pris en compte par la modélisation. La double flèche indique la bande passante du haut-parleur si l'on tolère une différence maximale de 10dB entre les valeurs minimale et maximales de la courbe théorique.

hiérarchie japonaise de donner son accord : d'une part les puissances en jeu dans le forçage piézoélectrique du prototype étaient 100 fois supérieures à celles d'un système bobine-aimant classique, ce qui représentait un frein économique évident pour la conception d'amplificateurs adaptés, et d'autre part le projet n'apportait pas de rupture technologique majeure qui aurait pu faire bénéficier la marque d'un argument commercial de poids³.

Parmi les pistes qui auraient été suivies si le projet avait dû se prolonger, la première d'entre elles aurait été l'étude des non linéarités. Plus que la puissance nécessaire à l'alimentation des piézos, qui aurait pu être circonvenue par l'utilisation d'autres matériaux, c'est le problème des non linéarités qui aurait été le plus dommageable au projet. Cette problématique n'a pas du tout été abordée ici, alors qu'elle représente un défi majeur lorsqu'une plaque plane encastrée est utilisée. Des tensions internes dans la direction radiale naissent dans la plaque consécutivement à sa déformation qui engendrent des non linéarités de comportement. Ces non linéarités induisent la présence d'harmoniques dans le signal acoustique reproduit, nuisibles à la qualité de reproduction du haut-parleur. Un travail spécifique devrait être fait sur ce point.

Utiliser des patchs piézoélectriques à polarité spatialement in-homogène aurait pu constituer un axe intéressant de recherche. Cela aurait permis d'envisager la conception d'actionneurs modaux, c'est à dire ne forçant qu'un seul mode (Lee, 1990; Lee & Moon, 1990; Donoso & Bellido, 2009).

Il aurait pu aussi être envisagé d'utiliser d'autres matériaux que les plaques de rohacell de 3 mm d'épaisseur. En effet, ce matériau a été choisi car il est couramment utilisé par Cabasse pour réaliser ses membranes coniques de haut-parleurs fonctionnant en mode piston. Rien ne dit pourtant qu'il s'agisse du matériau le plus adapté à ce type de système.

3. La technologie piézoélectrique est déjà en œuvre dans certains haut-parleurs destinés à la reproduction des aiguës.

6. Récupération de l'énergie du flottement de structures piézoélectriques dans un écoulement

Références :

- Doaré & Michelin (2011), Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency. *Journal of Fluids and Structures*, 27(8) :1357–1375.
- Michelin & Doaré (2012), Energy harvesting efficiency of piezoelectric flags in axial flows. *Journal of Fluid Mechanics*, accepted.

Les ressources limitées en énergie fossile et leur impact environnemental impose aux pays industrialisés une réflexion sur leurs méthodes de production et de consommation et un développement significatif des énergies renouvelables. Les écoulements géophysiques tels que le vent, les courants océaniques, les rivières représentent une souche d'énergie attractive de par leur grande disponibilité, à toutes les échelles. Le seul système actuellement déployé pour convertir l'énergie de ces écoulements en énergie électrique utile est l'hélice, que l'on retrouve sur les éoliennes, dans les turbines des barrages, ou dans les hydroliennes. Il apparaît aujourd'hui nécessaire non seulement de développer les technologies actuelles, mais aussi d'identifier de nouvelles méthodes de production.

Les recherches fondamentales sur les interactions fluide-structure ont permis d'identifier et de comprendre de nouveaux mécanismes qui conduisent à des oscillations auto-entretenues de structures. Ces mécanismes sont à la base de quelques projets de récupération d'énergie à finalité commerciale : Le projet VIVACE (Bernitsas et al., 2008) utilise le phénomène des vibrations induites par vortex (Williamson & Govardhan, 2004; Païdoussis et al., 2011). Le projet STINGRAY (Westwood, 2004) est basé sur le principe du flottement par confusion de fréquences d'un profil en flexion/torsion (McKinney & DeLaurier, 1981; Zhu & Peng, 2009). Quant au projet "Eel", il met en jeu le battement d'un film dans le sillage d'un corps cylindrique en amont (Taylor et al., 2001; Allen & Smits, 2001). Le projet de recherche présenté ici s'intéresse à la possibilité d'utiliser un autre mécanisme de transfert d'énergie d'un écoulement vers un mouvement solide. Il s'agit du phénomène flottement d'une plaque flexible dans un écoulement, dont l'analyse sous l'angle de l'instabilité linéaire a déjà été très largement abordée dans la première partie de ce manuscrit. Le mécanisme à la base du récupérateur considéré ici est différent de ceux cités auparavant dans la mesure où il fait appel à une instabilité de flottement pour transférer de l'énergie d'un écoulement vers une structure oscillante alors que Taylor et al. ou Allen & Smits ont basé leur récupérateur sur le forçage instationnaire du solide par un sillage tourbillonnaire. Pour convertir l'énergie mécanique en énergie électrique utile, le choix s'est porté vers la piézoélectricité. En combinant les modélisations fluide-structure et piézoélectrique déjà présentées, il est possible de construire un modèle de structure active couplée à un fluide présentant une instabilité de flottement. La modélisation complète du couplage fluide-solide-électrique constitue l'originalité essentielle de ce projet. En effet dans des études précédentes, la récupération est simplement modélisée comme un amortissement supplémentaire (Peng & Zhu, 2009; Tang & Païdoussis, 2009).

Dans le domaine de l'amortissement de structures par l'utilisation de circuits électriques passifs connectés à des patchs piézoélectriques, l'article pionnier de Hagood & von Flotow (1991) a inspiré des recherches sur l'utilisation de patchs piézoélectriques arrangés en réseaux pour amortir les vibrations de poutres et de plaques (Maurini et al., 2004; Bisegna et al., 2006). Les circuits électriques et la démarche de modélisation adoptée dans ce travail présentent de nombreuses similitudes avec ces travaux, bien que les objectifs soient différents (la minimisation d'une énergie mécanique dans un cas, et la maximisation d'un transfert d'énergie dans l'autre).

En réalisant une étude paramétrique des propriétés de stabilité du système nous serons capables de répondre à la question "Quand peut-on récupérer de l'énergie ?". Afin de répondre à la question "Quelle quantité d'énergie peut-on récupérer?", nous présenterons un modèle non-linéaire. Celui-ci nous donnera en effet accès au régime

6. Récupération de l'énergie du flottement de structures piézoélectriques dans un écoulement

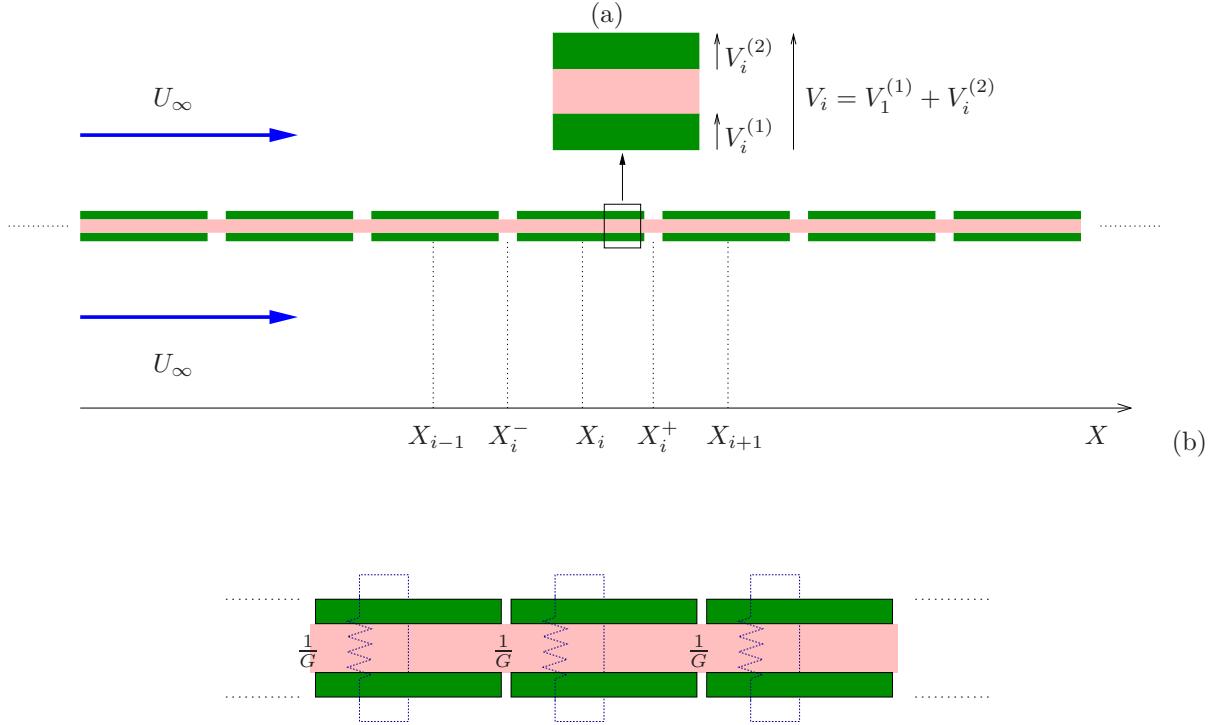


FIGURE 6.1.: (a) Vue schématique d'une plaque infinie équipée de paires d'éléments piézoélectriques. (b) Circuits électriques connectés à chaque paire de patchs piézoélectrique, ici des résistances dont la valeur de la conductance est $G = 1/R$.

saturé, qui lui seul nous permet d'évaluer la puissance électrique transférée aux circuits électriques en régime établi.

Le travail présenté ici constitue une première étape du projet qui a vocation à être un axe central de mes activités de recherche dans les années à venir. Nous présenterons un certain nombre de perspectives à la fin de ce chapitre.

6.1. Modèle linéaire de plaque plane piézoélectrique dans un écoulement

Considérons le problème d'une plaque infinie dans la direction \$X\$ sur laquelle sont collées une succession de paires de patchs piézoélectriques, entre les abscisses \$X_i^- et \$X_i^+\$ (figure 6.1a). Cette plaque sandwich a une masse surfacique \$\mu\$ et une rigidité en flexion \$D\$. Les électrodes de chaque paire de patchs situées sur les faces internes sont connectées électriquement entre elles tandis que les électrodes des faces externes sont connectées à un élément purement résistif de résistance \$R = 1/G\$ (figure 6.1b). Il existe aux bornes de chaque paire de patchs une tension \$V_i\$ qui dépend de la déformation locale de la plaque (cf. figure 4.8). Un développement similaire à celui effectué en section 5.1.2 dans un cas polaire axisymétrique permet de formaliser les couplages électromécaniques engendrés par l'effet piézoélectrique. Dans la présente application, nous avons affaire à une série infinie de paires de patchs (\$i \in \mathbb{Z}\$), et donc autant de valeurs de tensions, de déplacement de charges électriques et de sources d'efforts pour la plaque à considérer. Le déplacement de charge au sein du circuit numéro \$i\$ s'écrit,

$$Q_i = \chi[W']_{X_i^-}^{X_i^+} + CV_i, \quad (6.1)$$

C'est l'équivalent de l'équation (5.7) dans le cas annulaire du chapitre précédent. \$C\$ est la capacité électrique équivalente des deux patchs piézoélectriques en série et \$V_i\$ la tension et le coefficient de couplage \$\chi\$ a la même

6.1. Modèle linéaire de plaque plane piézoélectrique dans un écoulement

définition qu'au chapitre précédent (équation 5.5) . Le moment dans la plaque est la somme d'une contribution mécanique et de l'ensemble des contributions des patchs piézoélectriques.

$$\mathcal{M} = BW'' - \sum_i \chi \bar{V}_i F_i. \quad (6.2)$$

L'équivalent dans le cas annulaire est donné en équation (5.4). F_i est une fonction décrivant la position et la polarité des piézos. Dans notre cas les piézos sont à polarité constante et $F_i = H(X - X_i^-) - H(X - X_i^+)$. La dynamique du système mécanique est gouvernée par l'équation de conservation du moment :

$$\mu \ddot{W} = -\mathcal{M}'' - [P], \quad (6.3)$$

Dans cette dernière équation, le terme $[P]$ est le saut de pression de part et d'autre de la plaque. Dans la suite nous utiliserons le modèle d'écoulement potentiel et irrotationnel déjà utilisé aux chapitres 1, 2 et 3 obtenir son expression. Enfin la relation entre le déplacement électrique Q_i et la tension V_i est donnée par la loi d'Ohm,

$$V_i + \frac{\dot{Q}_i}{G} = 0. \quad (6.4)$$

Si la longueur des patchs piézoélectriques $L_p = X_i^+ - X_i^-$ est petite devant les longueurs d'onde typiques des déformations de flexion dans la plaque, nous pouvons considérer la limite où la tension, le déplacement électrique et l'effort consécutif au couplage piézoélectrique sont des fonctions continues de X . En utilisant la loi d'Ohm (6.4) pour exprimer $V(X)$ en fonction de $Q(X)$ dans les équations (6.2) et (6.3), on montre alors que la dynamique est gouvernée par deux équations d'onde couplées :

$$\left(B + \frac{\chi^2}{\bar{C}} \right) W''' + \mu \ddot{W} - \frac{\chi}{\bar{C}} \bar{Q}'' = -[P], \quad (6.5)$$

$$\frac{\bar{C}}{G} \dot{\bar{Q}} + \bar{Q} - \chi W'' = 0. \quad (6.6)$$

Ces deux équations d'onde décrivent le déplacement mécanique et le déplacement de charge électrique par unité de longueur $\bar{Q} = Q/L_p$. Les quantités \bar{C} et \bar{G} sont respectivement les capacités et conductances par unité de longueur. Le rapport \bar{C}/\bar{G} dans l'équation (6.6) est le temps caractéristique de décharge d'un condensateur \bar{C} dans une résistance $1/\bar{G}$. Si $\bar{C}/\bar{G} \rightarrow 0$ (circuit fermé), on peut exprimer la charge en fonction de W'' à l'aide de l'équation (6.6), et l'introduire dans (6.5) pour montrer que l'on a alors affaire à un système sans couplage piézoélectrique. Si $\bar{C}/\bar{G} \rightarrow \infty$ (circuit ouvert), on obtient que la charge est nulle à tout instant, de sorte que l'équation (6.5) prend la forme d'une équation similaire à celle d'une plaque sans couplage piézoélectrique, mais avec un terme de raideur ajoutée due à un phénomène de stockage d'énergie potentielle électrique dans le condensateur.

6.1.1. Puissances et notion d'efficacité

Dans cette approche, la récupération d'énergie électrique est modélisée par le terme de dissipation au sein des résistances sous forme de chaleur, \dot{Q} dans l'équation (6.6). Nous savons que la position d'équilibre de la plaque (finie ou infinie) peut être instable pour certaines valeurs des paramètres. C'est cette instabilité que nous comptons exploiter pour entretenir un mouvement à même de dissiper de l'énergie électrique dans les résistances. La condition préalable est donc que le système soit linéairement instable. Dans cette approche linéaire où l'oscillation croît exponentiellement dans le temps, si nous voulons quantifier l'efficacité de récupération d'énergie du système, il nous faut une définition indépendante de l'amplitude du mouvement. Nous avons choisi la définition suivante : l'efficacité au sens linéaire du système est définie pour un mode instable comme le rapport entre l'énergie totale dissipée sur une période et l'énergie moyenne présente dans le système sur cette même période,

$$r = \frac{\int_0^T \langle -V \dot{\bar{Q}} \rangle dt}{\frac{1}{2T} \int_0^T \langle \mu \dot{W}^2 + BW''^2 + \bar{C} V^2 \rangle dt}, \quad (6.7)$$

6. Récupération de l'énergie du flottement de structures piézoélectriques dans un écoulement

où $\langle \cdot \rangle$ indique une intégration sur le mode instable considéré. Il peut s'agir d'une onde dans le cas infini. Au numérateur de cette équation, on reconnaît la puissance dissipée dans les résistances, tandis qu'au dénominateur figure la somme de l'énergie cinétique de la plaque, son énergie potentielle et l'énergie électrique stockée dans les condensateurs. L'ensemble de ces quantités dépendent quadratiquement de l'amplitude du mode linéaire instable, qui disparaît donc quand on en prend le rapport.

6.2. Stabilité linéaire et efficacité dans le cas infini

6.2.1. Équations et paramètres sans dimension

Pour étudier l'effet du couplage piézoélectrique sur la dynamique linéaire du système de longueur infinie, nous utilisons μ/ρ_f , $\mu/\rho_f U_\infty$, ρU_∞^2 et $U_\infty \sqrt{\mu c}$ respectivement comme longueur, temps, pression et densité de charge. En notant toutes les variables sans dimension avec des lettres minuscules, nous obtenons,

$$\frac{1}{v^2}(1 + \alpha^2)w'''' + \ddot{w} - \frac{\alpha}{v}q'' = -[\tilde{p}], \quad (6.8)$$

$$\gamma\dot{q} + q - \frac{\alpha}{v}w'' = 0, \quad (6.9)$$

avec

$$v = \sqrt{\frac{\mu^3 U_\infty^2}{B\rho_f^2}}, \quad \alpha = \frac{\chi}{\sqrt{CB}}, \quad \gamma = \frac{\rho_f U_\infty \bar{C}}{\mu \bar{G}}. \quad (6.10)$$

Le paramètre v est la vitesse sans dimension du fluide¹, α quantifie l'ordre de grandeur du couplage piézoélectrique et γ peut être vu comme rapport des temps caractéristiques du système fluide solide et des circuits électriques. Les limites du circuit fermé ou ouvert discutées plus haut correspondent ici aux limites $\gamma \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow \infty$.

6.2.2. Relation de dispersion

Dans l'analyse locale, les déplacements mécanique et électrique sont exprimés sous la forme d'ondes harmoniques de nombre d'onde k et de pulsation ω ,

$$\begin{pmatrix} w \\ q \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} w_0 \\ q_0 \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)} \right]. \quad (6.11)$$

Tout comme aux chapitres 1 et 2, la pression est calculée en considérant un écoulement potentiel, irrotationnel. Dans l'espace de Fourier, nous savons maintenant qu'il est possible de l'exprimer de façon explicite en fonction de l'amplitude du déplacement de la plaque associée à toute onde de flexion ($g = 1$ pour cette approche 2D, tel que donné au chapitre 2). Nous obtenons finalement la relation de dispersion sous la forme d'un système linéaire pour w_0 et q_0 ,

$$\begin{bmatrix} D_0 + D_1^2 & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ q_0 \end{Bmatrix} = \mathcal{L}(k, \omega) \begin{Bmatrix} w_0 \\ q_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.12)$$

avec

$$D_0 = -\omega^2 \left(1 + \frac{2}{|k|} \right) - 2|k| + 4\tilde{\omega} \frac{k}{|k|} + \frac{k^4}{v^2}, \quad (6.13)$$

$$D_1 = \frac{\alpha k^2}{v}, \quad (6.14)$$

$$D_2 = 1 - i\gamma\omega. \quad (6.15)$$

1. Il est à noter que ce paramètre est égal aux rapports u/m et U^*/M^* du chapitre 2

L'équation (6.12) admet des solutions non triviales si et seulement si le déterminant de \mathcal{L} s'annule, ce qui conduit à la relation de dispersion suivante :

$$D_0(k, \omega) = D_1(k, \omega)^2 \left(\frac{1}{D_2(k, \omega)} - 1 \right). \quad (6.16)$$

Pour (k, ω) solutions de (6.16), l'équation (6.12) détermine les amplitudes relatives des déplacements mécanique et électrique de l'onde correspondante.

6.2.3. Stabilité et ondes d'énergie négative

Les propriétés de stabilité du système non-couplé ont largement été abordées dans la partie I, où il a été montré qu'en l'absence de couplage, celui-ci est localement instable pour toute vitesse d'écoulement non-nulle. Souvenons-nous aussi que ce système présente des ondes d'énergie négatives pour un intervalle de nombre d'ondes dépendant de la vitesse de l'écoulement. L'on peut alors se demander quel effet peut avoir le couplage piézoélectrique sur la stabilité des ondes d'énergie négatives. Pour ce faire, de manière identique au travail réalisé au chapitre 3, considérons une onde neutre se propageant dans le système non-couplé, de pulsation $\omega_0(k)$, de sorte que $D_0(\omega_0, k) = 0$ et $\omega_{0i} = 0$. En calculant la valeur perturbée de $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, il est possible de montrer que la variation du taux de croissance de l'onde vaut à l'ordre dominant,

$$\delta\omega_i \simeq \frac{\omega_0 \alpha^2 \gamma k^4}{V^{*2} (1 + \omega_0^2 \gamma^2) \frac{\partial D_0}{\partial \omega}}. \quad (6.17)$$

Au dénominateur apparaît l'opposé de l'énergie de l'onde neutre du système sans couplage. Pour une onde d'énergie négative, $\delta\omega_i$ est donc positif, et l'onde est déstabilisée.

En résumé, le milieu de longueur infinie est toujours instable et le couplage piézoélectrique est de nature à étendre la gamme de nombre d'ondes instables.

6.2.4. Recherche d'un maximum d'efficacité

Pour un couple donné des valeurs des paramètres α et v , ce qui revient à considérer un cas particulier du problème fluide-solide, la quête du meilleur transfert d'énergie consiste à se demander quelle onde instable et quel circuit électrique maximisent l'efficacité. Cela revient à rechercher un maximum de r_l parmi l'ensemble des ondes ($k \in \mathbb{R}, \omega / \text{Im}(\omega) > 0$) et pour toutes les valeurs de $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Cette étude paramétrique faite, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Pour une onde instable donnée, l'efficacité est maximale lorsque le circuit électrique est synchronisé avec l'oscillation de l'onde : $\gamma \sim 1/\omega$.
- Le nombre d'onde qui maximise l'efficacité correspond toujours à une onde d'énergie négative. C'est ce qui est représenté en figure 6.2a où sont tracées en fonction de v , à α donné, la valeur du nombre d'onde qui maximise r_l . Ce nombre d'onde est toujours dans la zone grisée qui délimite l'intervalle d'ondes d'énergies négatives. Les ondes d'énergie négative sont donc non-seulement déstabilisées par le couplage piézoélectrique, mais elles sont aussi celles qui maximisent le transfert d'énergie entre le système fluide-solide et le système électrique.
- L'efficacité maximale r_{lm} a un comportement en α^2 comme le montre la figure 6.2b, ce qui met en lumière l'importance de ce coefficient de couplage dans une application.

6. Récupération de l'énergie du flottement de structures piézoélectriques dans un écoulement

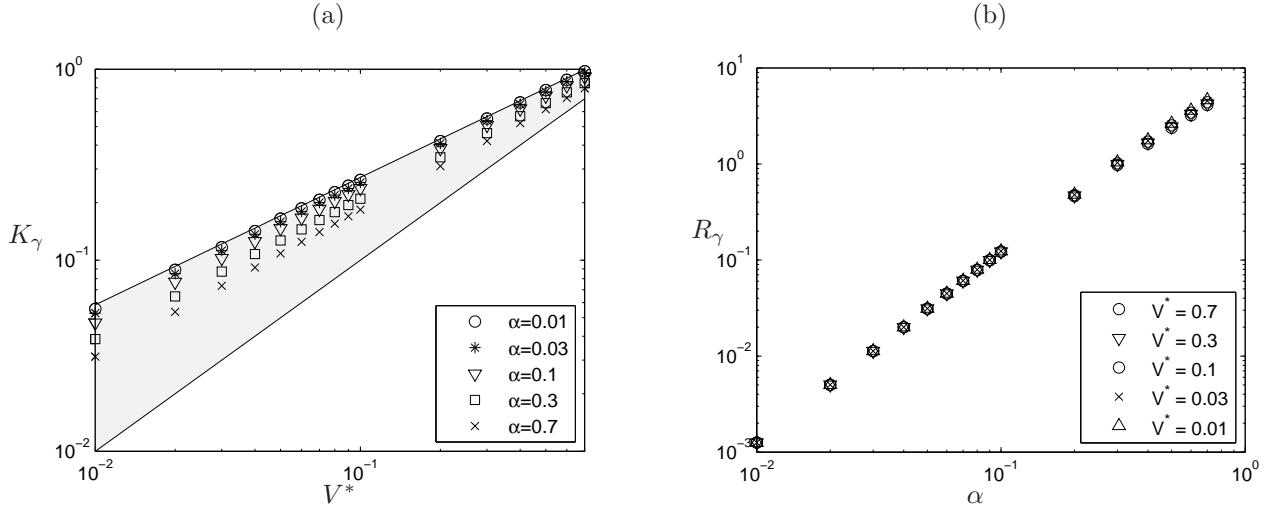


FIGURE 6.2.: (a) Valeur de k qui maximise l'efficacité en fonction de V^* ; (b) valeur de l'efficacité maximale en fonction de α .

6.3. Stabilité linéaire et efficacité dans le cas fini

6.3.1. Équations et paramètres sans dimension

Du fait de la présence de la présence de la longueur du système dans les paramètres du problème, l'adimensionnement naturel fait intervenir L et les équations d'onde prennent la forme :

$$\frac{1}{U^{*2}}(1 + \alpha^2)w'''' + \ddot{w} - \frac{\alpha}{U^*}q'' = -M^*p, \quad (6.18)$$

$$\beta\dot{q} + q - \frac{\alpha}{U^*}w'' = 0, \quad (6.19)$$

où la définition du paramètre de couplage α est inchangée (équation 6.10) et

$$M^* = \frac{\rho_f L}{\mu}, \quad \beta = \frac{\bar{C}U_\infty}{gL} = \frac{\gamma}{M^*}, \quad U^* = UL\sqrt{\frac{\mu}{B}} = vM^*. \quad (6.20)$$

Les paramètres M^* et U^* sont les mêmes que ceux introduits dans l'étude du drapeau au chapitre 2. Ici, β est le temps caractéristique du circuit électrique connecté aux piézos. C'est l'équivalent du paramètre γ utilisé dans l'approche locale. Les conditions aux limites considérées sont celles d'une plaque encastrée à l'amont et libre à l'aval².

6.3.2. Résolution numérique

Au lieu de considérer les déplacements mécanique et électrique du système sous la forme de deux ondes propagatives, on l'exprime ici comme deux modes globaux définis entre 0 et 1 associés à la fréquence complexe ω ,

$$\begin{pmatrix} w \\ q \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \Gamma(x) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \right]. \quad (6.21)$$

Le système d'équations est résolu à l'aide d'une technique du type de celles présentées dans la partie I : on exprime la pression dans le fluide linéairement par rapport au déplacement du solide afin d'obtenir des efforts exercés sur le solide uniquement fonction du déplacement w . Le système d'équation est alors discréteisé pour

2. En prenant soin de ne pas oublier la contribution du forçage piézoélectrique dans le moment qui s'annule en $x = 1$.

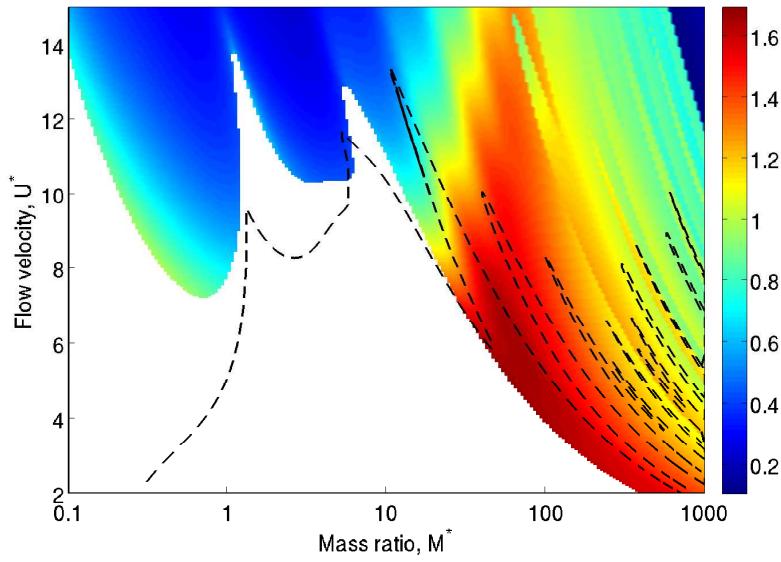


FIGURE 6.3.: Efficacité de conversion r_l du mode le plus instable pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.25$. Dans la région blanche, tous les modes sont stables. La ligne hachurée correspond à la limite de stabilité du cas non couplé ($\alpha = 0$).

obtenir un système dynamique propice à une résolution aux valeurs propres, qui donne les pulsations propres du système. Les vecteurs propres correspondants donnent les modes propres $(\varphi(x), \Gamma(x))$ sous une forme discrétisée.

6.3.3. Recherche d'un maximum d'efficacité

De manière similaire à l'étude locale, l'efficacité r_l est définie pour un mode instable. La figure 6.3 présente une étude paramétrique de l'efficacité r_l pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.25$. Y sont représentés les niveaux de couleur de l'efficacité du mode le plus instable. La couleur blanche correspond à un cas stable, pour lequel l'efficacité n'a pas de sens. Sur le même graphique est tracé la courbe de stabilité marginale en l'absence de couplage piézoélectrique ($\alpha = 0$). L'observation de ce graphique permet de dénoncer les principes généraux suivants :

- Le couplage piézoélectrique a un effet stabilisant aux faibles rapports de masse et déstabilisant aux grands rapports de masse. Cet effet est tout à fait similaire à ce qui a été observé dans le chapitre 2 consacré à l'effet de l'amortissement. On se souvient ici que le rapport de masse M^* , défini en équation (6.20) est avant tout une longueur sans dimension. Aussi n'est-il pas surprenant qu'à $M^* \gg 1$, les propriétés de stabilité du système de longueur finie soient dominées par les propriétés locales de stabilité, en l'occurrence une déstabilisation des ondes d'énergie négative.
- L'efficacité r_l est maximisée dans la zone déstabilisée par l'ajout du couplage piézoélectrique, ce qui est sans doute lié à l'effet des ondes d'énergie négatives.

Enfin, la figure 6.4 montre pour trois valeurs de M^* , l'influence du temps caractéristique électrique β sur les seuils d'instabilité et l'efficacité du mode instable au seuil. On y observe que l'effet du couplage piézoélectrique est maximal lorsque le circuit électrique est synchronisé avec la dynamique fluide-solide.

6.4. Étude non linéaire

La modélisation linéaire présentée a permis d'obtenir déjà un certain nombre de prédictions sur les régimes instables et les configurations favorables au transfert d'énergie. Un modèle non-linéaire est toutefois nécessaire pour accéder au régime saturé de l'instabilité. Nous présentons dans un premier temps le modèle, puis la notion

6. Récupération de l'énergie du flottement de structures piézoélectriques dans un écoulement

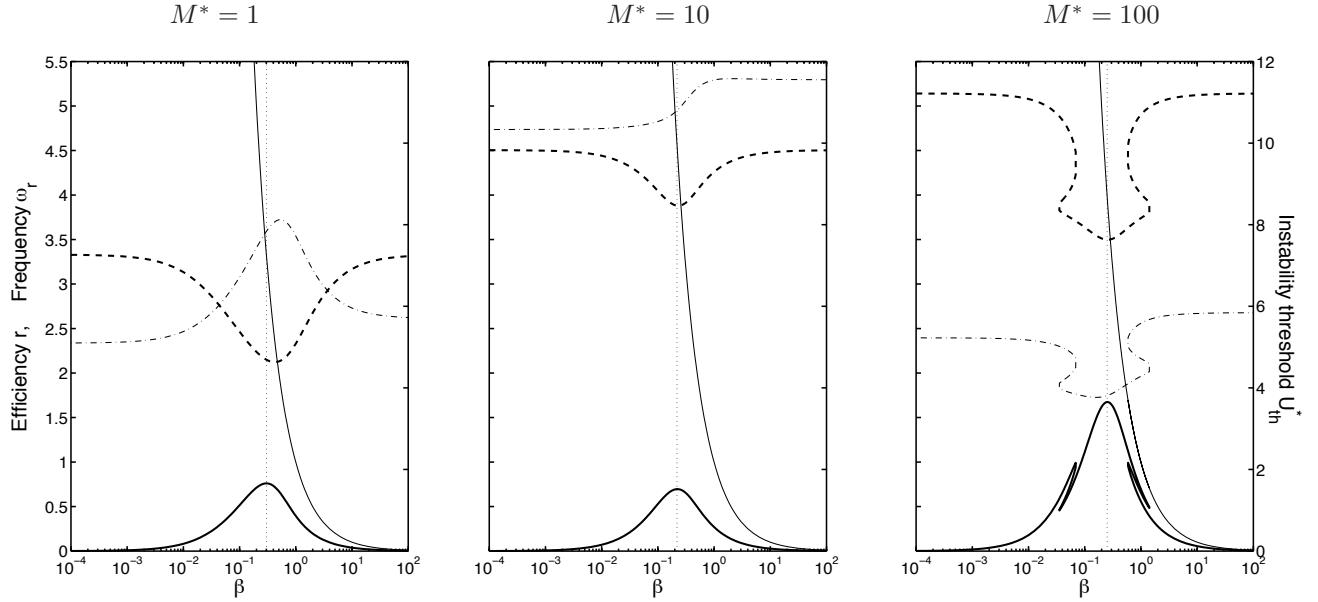


FIGURE 6.4.: Efficacité (ligne pleine épaisse) et fréquence (ligne hachurée épaisse) en fonction de β au seuil de stabilité; (a), $M^* = 1$; (b), $M^* = 10$ (c), $M^* = 100$. L'évolution de la vitesse critique est aussi tracée (ligne fine hachurée/pointillée), de même que la valeur de $1/\beta$ (ligne pleine fine). La ligne verticale indique la valeur de β pour laquelle l'efficacité de conversion est maximale.

d'efficacité au sens non linéaire et enfin quelques résultats de simulations numériques.

6.4.1. Modèle non-linéaire

Les hypothèses de petit déplacement selon lesquelles la configuration initiale et la configuration actuelle sont confondues, et le déplacement de la plaque, fonction de l'abscisse x , est en tout point perpendiculaire à la surface doivent à présent être levées. La plaque est représentée dans l'état initial non perturbé par le segment ($X \in [0, L], Y = 0$). La coordonnée curviligne S est introduite et le déplacement, qui peut s'effectuer selon \underline{e}_x ou \underline{e}_y , est noté $\underline{X}(S)$. La conservation du moment et la condition d'inextensibilité du drapeau s'écrivent (Eloy et al., 2012) :

$$\mu \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left[\underline{F}_t \underline{e}_t - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \underline{e}_n \right] + \underline{F}_f \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial S} = \underline{e}_t. \quad (6.23)$$

Dans ces deux équations, $\underline{F}_t(S, T)$ est la tension locale qui agit comme un multiplicateur de Lagrange dans l'équation (6.29) pour assurer l'inextensibilité du drapeau. Tout comme dans l'approche linéaire présentée plus haut, nous considérons ici une distribution de piézos de longueur petite devant les longueurs caractéristiques de déformation de la plaque. Le couplage piézoélectrique direct lie la fonction continue de déplacement de charge électrique $\bar{Q}(S)$ à la courbure locale du drapeau $\partial \theta / \partial S$,

$$\bar{Q} = \bar{C}V + \chi \frac{\partial \theta}{\partial S}, \quad (6.24)$$

où \bar{C} et $V(S)$ sont ici encore la capacité par unité de longueur des patchs piézoélectriques et la tension. Le couplage piézoélectrique inverse induit un moment supplémentaire sur la plaque qui dépend linéairement de la

tension locale,

$$\mathcal{M} = B \frac{\partial \theta}{\partial S} - \chi V, \quad (6.25)$$

où B est la rigidité en flexion de la poutre. Au jeu d'équations (6.22-6.25), il convient d'ajouter un jeu de conditions aux limites pour fermer le problème. Dans leur forme non-linéaire, les conditions aux limites pour une poutre encastrée-libre sont,

$$\underline{X}(0) = \theta(0) = \mathcal{M}(L) = \left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \right|_{S=L} = \underline{\iota}(L) = 0, \quad (6.26)$$

Reste à modéliser le fluide. Il est supposé ici que les efforts exercés par le fluide sur la structure ont deux origines. D'une part l'écoulement exerce des efforts de réaction qui peuvent être déduits des travaux de Lighthill (1960), obtenus dans le cadre de la propulsion de corps élancés,

$$\underline{F}_{\text{reac}} = -m_a \rho_f H^2 \left(\frac{\partial U_n}{\partial T} - \frac{\partial U_n U_t}{\partial S} + \frac{1}{2} U_n^2 \frac{\partial \theta}{\partial S} \right) \underline{n}, \quad (6.27)$$

où m_a est un coefficient sans dimension de masse ajoutée qui vaut $\pi/4$ dans le cas d'une plaque mince en translation³. Il est enfin considéré que les seuls efforts de traînée d'ordre de grandeur significative proviennent du déplacement normal de la plaque (Eloy et al., 2012; Singh et al., 2012) :

$$\underline{F}_{\text{resist}} = -\frac{1}{2} \rho_f H C_D U_n |U_n| \underline{n}, \quad (6.28)$$

avec $C_d = 1.8$ pour une plaque plane.

En utilisant les mêmes adimensionnements que dans l'approche linéaire, en connectant un circuit purement résistif aux patchs piézoélectriques, et en utilisant des quantités adimensionnées en lettres minuscules pour les différencier des quantités dimensionnelles, nous obtenons le jeu d'équations non-linéaires suivantes :

$$\frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\underline{\tau} \underline{e}_t - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\alpha}{U^*} v \right) \underline{e}_n \right] + M^* f_f \underline{e}_n \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial s} = \underline{e}_t \quad (6.30)$$

$$f_f = -m_a H^* \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u_n u_t}{\partial s} + \frac{1}{2} u_n^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) - \frac{1}{2} C_D u_n |u_n|, \quad (6.31)$$

$$q = cv + \chi \frac{\partial \theta}{\partial s}, \quad (6.32)$$

$$\beta \dot{q} + v = 0. \quad (6.33)$$

Les paramètres U^* et M^* ont la même définition que l'approche linéaire (équation 6.20). Le fait qu'un drapeau de largeur finie soit considéré dans cette modélisation non linéaire, un paramètre supplémentaire H^* est introduit. Il doit toutefois être souligné que la limite aux petits déplacement de ce modèle n'est pas la limite 2D utilisée dans l'analyse linéaire de la section précédente, mais la limite des corps élancés. Dans cette limite, le problème ne dépend plus que de deux paramètres, U^* et $m_a M^* H^* = \rho_f H \pi / 4 \mu$ qui est le rapport entre la masse ajoutée linéaire et la masse linéaire du solide.

6.4.2. Notion d'efficacité au sens non linéaire

Le modèle non linéaire ainsi présenté nous permet non seulement de prédire les jeux de paramètres pour lesquels existe une instabilité de flottement, mais aussi d'accéder au régime saturé de l'instabilité. Dans ces conditions, nous pouvons définir une efficacité de récupération d'énergie très similaire à celle utilisée dans l'éolien :

$$r_{nl} = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho U^3 A}, \quad (6.34)$$

3. C'est cette même valeur de $\pi/4$ qui donne la forme de la réaction aérodynamique g_{SB} en équation (2.15) et c'est le coefficient A étudié dans le cas d'une plaque en présence de parois page 25, lorsque les parois se repoussent à l'infini.

6. Récupération de l'énergie du flottement de structures piézoélectriques dans un écoulement

où P est la puissance électrique moyenne récupérée par le système, U la vitesse de l'écoulement incident, A la surface perpendiculaire à l'écoulement occupée par le récupérateur d'énergie. Dans le cas d'une éolienne, cette surface est tout simplement le disque occupé par l'hélice en rotation, soit πE^2 , où E est l'envergure d'une pale de l'hélice. Dans le cas du drapeau en flottement, cette définition doit être adaptée d'une part parce que la puissance dissipée dans la résistance n'est pas constante, voire non périodique pour certains régimes non linéaires, d'autre part parce que la surface occupée par le drapeau est une quantité elle même fluctuante. Exprimée en fonction des quantités adimensionnées de notre problème, la définition suivante est finalement proposée :

$$r_{nl} = \frac{1}{\beta M^*} \frac{\langle v^2 \rangle}{\sqrt{2\langle y^2 \rangle}}, \quad (6.35)$$

où y est le déplacement de l'extrémité libre du drapeau et $\langle . \rangle$ est la moyenne statistique sur une longue période d'une quantité fluctuante. La quantité $\mathcal{A} = \sqrt{2\langle y^2 \rangle}$ peut être vue comme une définition statistique de l'amplitude d'un mouvement qui n'est pas forcément périodique. Lorsque ce dernier est sinusoïdal, on retrouve bien la valeur du pic d'amplitude.

6.4.3. Principaux résultats

Le système d'équations (6.29-6.33) est intégré en temps en utilisant une méthode numérique développée par Alben (2009). En choisissant pour condition initiale la position d'équilibre $\theta = \dot{\theta} = 0$ pour un jeu de paramètres donnant lieu à une instabilité de flottement, une petite perturbation est imposée au champ de vitesse du fluide. Le système est intégré en temps jusqu'à ce qu'une solution périodique soit obtenue ou bien, lorsqu'après un temps suffisamment long, on considère qu'aucune solution périodique ne peut être obtenue. Dans ce dernier cas, la solution non périodique est utilisée sur une longue durée pour le calcul d'efficacité.

En figure 6.5 sont tracés les niveaux de l'amplitude \mathcal{A} et l'efficacité r_{nl} dans le plan (β, U^*) pour deux valeurs du rapport de masse, $M^* = 1$ et $M^* = 100$. À proximité du seuil d'instabilité linéaire, l'amplitude du cycle limite est une fonction croissante de la vitesse, comme cela a déjà été montré sur des études non linéaires portant sur le drapeau (Shelley et al., 2005; Eloy et al., 2008). Mais on observe aussi pour $M^* = 100$ de brusques diminutions de l'amplitude, liées à un changement de mode non linéaire. La puissance dissipée dans les résistances étant une fonction à peu près quadratique de l'amplitude, l'efficacité en est une fonction linéaire. Ainsi, r_{nl} suit globalement la tendance de l'amplitude et en subit donc les brusques diminutions. On note enfin que le maximum local d'efficacité se situe aux alentours de $\beta = 0.15 - 0.3$. Comme déjà souligné dans le cas linéaire, ceci est la manifestation du fait que qu'une synchronisation entre le circuit récupérateur et le mouvement de flottement est favorable au transfert d'énergie entre le système fluide-solide et le système électrique. Si l'on note ω la pulsation dominante du cycle limite, le maximum d'efficacité intervient toujours pour $\beta\omega \sim 1$.

La figure 6.6 présente une étude paramétrique de l'efficacité maximale dans le plan (M^*, U^*) . La courbe de stabilité linéaire y est aussi représentée. Pour chaque point de ce graphique, le temps caractéristique β optimal est recherché. Dans le coin supérieur droit de ce graphique, soit pour un grand rapport de masse et une grande vitesse d'écoulement, on atteint des efficacités supérieures à 10%. Étant donnée la tendance observée sur ce graphique, il ne fait aucun doute que des efficacités plus importantes pourraient être obtenues en explorant de plus grandes valeurs de M^* et U^* . Toutefois, la multiplication des changements de mode à mesure que l'on augmente M^* et les saut d'efficacité qui y sont associés rendent le système de plus en plus sensible à la vitesse effective de l'écoulement.

Enfin, une étude de l'effet du paramètre de couplage piézoélectrique α montre, tout comme dans le cas linéaire, que l'efficacité varie en α^2 , et donc l'importance de bien optimiser ce paramètre dans le cas d'une application. Il est toutefois montré que tous les autres paramètres étant égaux par ailleurs, un couplage piézoélectrique trop important est de nature à restabiliser le système.

6.5. Bilan et perspectives

Nous venons d'aborder théoriquement la question de la faisabilité et les conditions les plus favorables à l'utilisation d'une plaque piézoélectrique en flottement dans un écoulement pour convertir l'énergie cinétique de cet

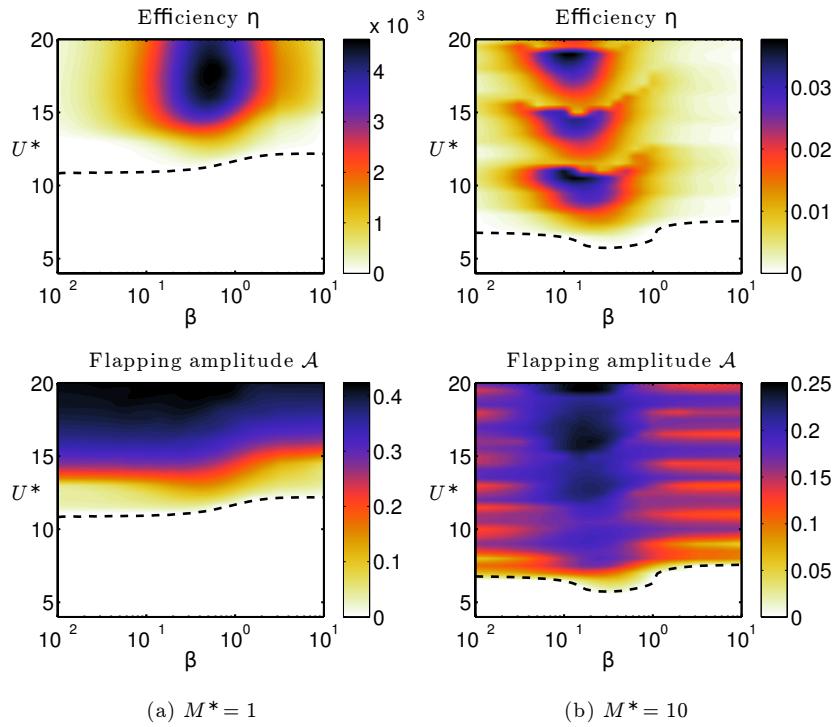


FIGURE 6.5.: Amplitude du mode et efficacité en fonction de β pour deux valeurs de M^* .

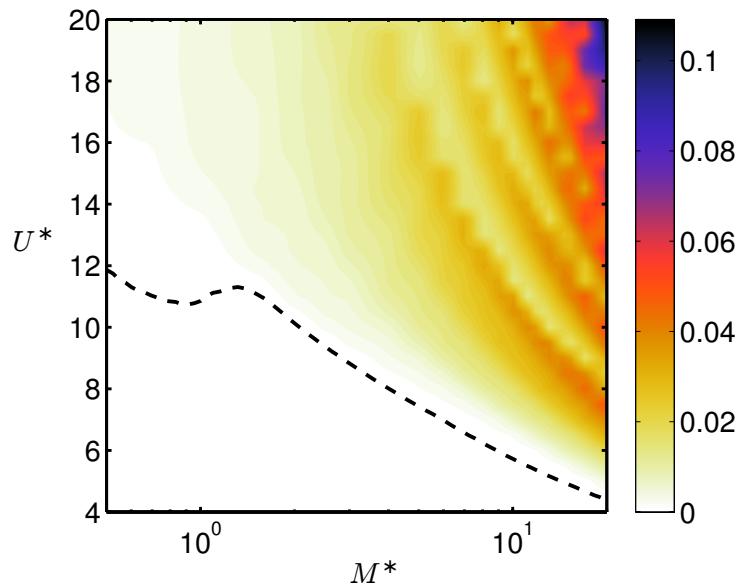


FIGURE 6.6.: Efficacité maximale dans le plan (M^*, U^*) .

6. Récupération de l'énergie du flottement de structures piézoélectriques dans un écoulement

écoulement en énergie électrique. Ce travail de recherche s'inscrit dans une importante littérature, sans cesse croissante. L'utilisation patchs piézoélectrique sur des drapeaux se retrouve par exemple dans les travaux de Taylor et al. (2001) ou Akcabay & Young (2012). L'originalité de notre approche se situe dans la modélisation complète de la dynamique fluide-solide-électrique, linéaire et non linéaire, et de son utilisation pour déterminer les conditions favorables à la récupération d'énergie.

Nous avons montré l'importance de la synchronisation entre le circuit électrique et la dynamique fluide-solide, l'existence d'ondes d'énergie négatives, déstabilisées par le couplage piézoélectrique, l'effet favorable du rapport de masse et du coefficient de couplage α et la sensibilité aux paramètres de l'efficacité causée par les changements de modes non linéaires.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses et nous donnons ici quelques pistes :

1. D'autres circuits linéaires peuvent être étudiés. En premier lieu, on peut adjoindre une inductance au simple circuit résistif considéré jusqu'ici, de sorte que le circuit se comporte comme un résonateur (circuit RLC). Un second paramètre d'optimisation électrique viendrait à être considéré. Le travail pionnier de Hagood & von Flotow (1991) sur l'utilisation de shunts linéaires dans le domaine de l'amortissement passif des vibrations ont montré que la synchronisation entre l'oscillateur électrique et l'oscillateur mécanique représentait le cas le plus favorable à l'amortissement des vibrations. Il conviendrait d'étudier cette question dans le contexte des instabilités de plaque et la récupération d'énergie.
2. Il serait aussi intéressant de considérer des réseaux électriques linéaires plus complexes, dans lesquels des composants électriques relient les paires de patchs adjacents entre eux, alors qu'ils sont indépendants sur la figure 6.1b. Ce type d'approche peut être retrouvé dans les travaux de Bisegna et al. (2006), toujours dans le domaine des vibrations de structures. Dans ce cas l'équation électrique elle-même aurait une structure à même de propager de l'énergie⁴.
3. Il conviendrait de s'intéresser aux effets de taille finie des patchs piézoélectriques. En effet, la limite infinitésimale considérée dans le présent travail peut être vue comme le cas le plus favorable où la contribution des dissipations de chaque élément de poutre sont sommés pour obtenir la puissance dissipée globale. La situation la moins favorable est obtenue pour un patch piézoélectrique de longueur égale à une longueur d'onde. Dans ce cas la contribution de la partie positive de la courbure est exactement compensée par la partie négative de la courbure et la tension électrique est toujours nulle. On peut alors se poser la question suivante : "Combien de piézos faut-il disposer sur un drapeau donné pour s'approcher de manière satisfaisante du cas idéal où les piézos sont de longueur infinitésimale ?". Lors de l'étude de propagation des ondes nous serions confrontés à un milieu périodique et pourrions nous inspirer des travaux de Brillouin (1946).
4. L'étude des circuits non linéaires représente une extension naturelle de ce travail. Dans plusieurs domaines scientifiques, la dynamique vibratoire, tout comme l'électronique de puissance, des circuits mettant en œuvre des techniques de switch actif ont permis d'optimiser encore le transfert d'énergie entre la dynamique du solide et la dynamique électrique (Lallart & Guyomar, 2008).
5. Enfin, il convient à présent de mettre en œuvre et valider ces concepts expérimentalement. Des premiers prototypes consistant en une feuille de mylar sur laquelle sont collés de chaque côté un film PVDF sont d'ores et déjà en fonctionnement à l'UME. L'utilisation de PVDF présente l'avantage d'être très simple d'utilisation et de mise en œuvre. Il s'agit en effet de films polymères qui se découpent et se collent très simplement. Leur inconvénient majeur réside dans le faible coefficient de couplage. Dans les prototypes actuellement étudiés, il est de l'ordre de 3×10^{-2} , une valeur trop faible pour qu'un circuit passif puisse modifier la dynamique fluide-solide. Un travail de recherche de matériaux adaptés au présent problème doit donc être réalisée.

4. En effet, l'équation (6.6) du présent travail ne contenant aucune dérivée spatiale elle ne peut être considérée comme une équation d'onde en l'absence de couplage.

7. Oscillations mécaniques et pseudoélasticité

Références :

- Doaré, Sbarra, Touzé, Ould Moussa, & Moumni (2012), Expérimental analysis of the quasi-static and dynamic torsional behaviour of shape memory alloys. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1) :32–42.
- Ould Moussa, Moumni, Doaré, Touzé, & Zaki (2012), Non-linear dynamic thermomechanical behaviour of Shape Memory Alloys. *Journal of Intelligent Material systems and structures*, 23(14) :1593–1611.

Le travail de recherche présenté dans ce chapitre est centré autour du comportement pseudoélastique que présentent les alliages à mémoire de forme au dessus d'une certaine température A_f . Ce comportement a été brièvement présenté au début de la partie II (figure 4.9c). La présence d'une boucle d'hystérésis dans la relation contrainte déformation entraîne un dissipation d'énergie mécanique qui fait des alliages à mémoire de forme de bons candidats pour la réduction passive des vibrations de structure. Plusieurs applications dans le domaine du génie civil à des fins de protection séismique sont d'ores et déjà proposées dans la littérature (Saadat et al., 2002; Auricchio & Desroches, 2008; Ozbulut & Hurlebaus, 2011; Carreras et al., 2011). Ces applications ont motivé des travaux de recherche visant à comprendre et modéliser la dépendance en temps du comportement de ces matériaux (Sun & Hwang, 1993; Leo & Shield, 1993; Shaw & Kyriakides, 1995; Bruno et al., 1995; Piedboeuf et al., 1998; Zhang et al., 2010). Il résulte de ces travaux que les effets thermiques ont une influence considérable sur le comportement de ces matériaux. En effet, la production de chaleur liée à la chaleur latente du changement de phase et des échauffements internes d'origine dissipative s'opèrent dans le matériau lors du changement de phase. Ces deux sources de chaleur entrent en compétition avec les échanges de chaleur avec le milieu extérieur à température ambiante. Puisque les valeurs seuil des contraintes dépendent de la température (cf. figure 4.9a), la forme de la boucle d'hystérésis se trouve affectée par ces échanges thermiques et l'énergie mécanique dissipée dans ces matériaux dépend des temps caractéristiques de l'excitation mécanique et de la dissipation de chaleur dans le milieu extérieur (He & Sun, 2010). Généralement, dans les les travaux qui viennent d'être cités, les termes *dynamique* et *quasi-statique* distinguent les modèles prenant en compte ou non ces effets thermiques.

Lorsque l'on s'intéresse à l'influence du comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme sur la réponse dynamique de structures forcées, la modélisation la plus simple consiste à considérer un oscillateur harmonique, qui peut provenir d'une réduction à un mode de la dynamique d'une structure ou tout simplement être un système masse-ressort non linéaire. Il est à noter que dans ce chapitre, contrairement à ce qui est fait dans les études thermomécaniques citées plus haut, les notions de *quasi-statique* et *dynamique* feront plutôt référence à la prise en compte des effets inertIELS ou non. On trouve déjà dans la littérature un certain nombre d'études théoriques sur les oscillations mécaniques en présence d'un comportement pseudo-élastique (Masuda & Noori, 2002; Bernardini & Vestroni, 2003; Lacarbonara et al., 2004; Bernardini & Rega, 2010). Différentes modifications de la réponse en fréquence par le comportement pseudo-élastique ont été mis en évidence : (1) un comportement assouplissant lorsque la boucle d'hystérésis est partiellement parcourue au cours de l'oscillation, (2) un comportement raidissant aux plus grandes amplitudes de forçage, lorsque la boucle d'hystérésis est entièrement parcourue, (3) des régimes chaotiques à certaines amplitudes et fréquences de forçage, (4) des régimes superharmoniques, (5) des sauts dans la réponse en fréquence provoqués par les effets raidissants et assouplissants. Le cas des oscillations mécaniques d'un pendule de torsion sont abordées dans l'étude théorique de Seelecke (2002) tandis que divers autres articles s'intéressent à la dynamique d'oscillateurs couplés dans le contexte de la pseudoélasticité (Machado et al., 2003; Sitnikova et al., 2008).

Sur le plan expérimental, le comportement dynamique de barres en traction-compression a été étudié par Li & Feng (1997). Toutefois, les fréquences explorées sont grandes, de l'ordre de 1000Hz et l'apparition d'une transformation martensitique, et surtout la comparaison avec le comportement en régime quasi-statique n'est

7. Oscillations mécaniques et pseudoélasticité

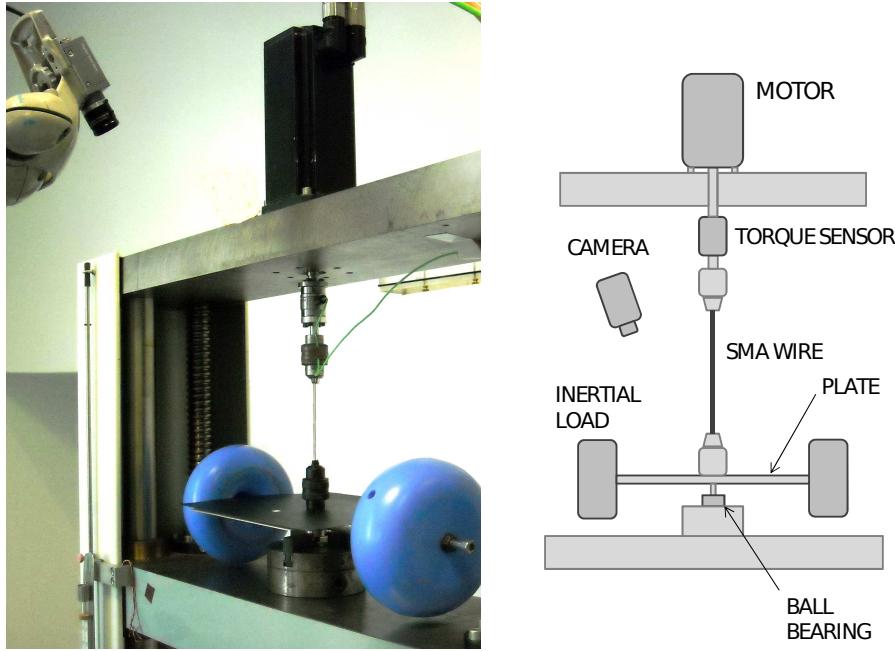


FIGURE 7.1.: (a) : Photographie du dispositif expérimental développé à l'UME. (b) : Vue schématique des composants principaux.

pas forcément pertinente. Collet et al. (2001) ont réalisé une caractérisation expérimentale de la réponse forcée de poutres en Cuivre-Aluminium-Beryllium autour de la première fréquence de résonance. Cette fréquence se situant aux alentours de 40Hz, nous pouvons ici encore nous demander ce qu'il reste du comportement quasi-statique et de la boucle d'hystérésis à la résonance. Ces deux travaux mettent clairement en évidence un décalage vers les basses fréquences de la fréquence de résonance lorsque l'amplitude du forçage est augmentée, sans toutefois faire apparaître des phénomènes de saut.

L'objectif du travail présenté dans ce chapitre sont multiples. Tout d'abord il s'agit de mettre en place un dispositif expérimental permettant de caractériser les comportements quasi-statique et dynamique dans un même intervalle de fréquences. Nous souhaitions aussi éventuellement observer des phénomènes de sauts d'amplitude, des réponses chaotiques ou des régimes super-harmoniques. Pour cela il fut choisi de s'intéresser à un pendule de torsion mettant en jeu un fil de Nickel-Titane. D'un point de vue de la modélisation, nous souhaitions réaliser une étude du comportement dynamique d'oscillateurs à à l'aide d'un modèle tridimensionnel (Zaki & Moumni, 2007), car il ouvrirait la possibilité au calcul dynamique de structures plus complexes que les oscillateurs à un degré de liberté. Enfin, nous souhaitions pouvoir réaliser une comparaison théorie/expérience sur le problèmes du comportement dynamique du pendule de torsion.

Ce chapitre est composé de deux sections principales. La section 7.1 présente le travail expérimental réalisé sur un pendule de torsion et en section 7.2, nous aborderons la modélisation des oscillations mécaniques à l'aide d'un modèle theromécanique tridimensionnel et thermodynamiquement admissible (Zaki & Moumni, 2007).

7.1. Analyse expérimentale de la dynamique d'un pendule de torsion présentant une raideur pseudoélastique

7.1.1. Présentation du dispositif expérimental

La figure 7.1 présente le dispositif expérimental mis au point à l'UME, permettant de réaliser l'étude du comportement en torsion de fils en alliage à mémoire de forme. Le haut du fil est attaché à un capteur de couple,

7.1. Analyse expérimentale de la dynamique d'un pendule de torsion présentant une raideur pseudoélastique

lui-même solidaire d'un moteur pas à pas. Le bas du fil est fixé à un roulement à billes et une masse inertie. Le roulement à billes est fermement fixé à une structure fixe. Sur la masse inertie est collée une plaque de couleur noire sur laquelle est dessiné un point blanc. Le suivi de ce point blanc à l'aide d'une caméra et un traitement d'image en temps réel permet de réaliser des séries temporelles de l'angle de rotation du système en bas du fil tandis que l'angle du système en haut du fil est connu, puisqu'imposé par le moteur pas à pas. À l'aide de ce dispositif expérimental, nous avons donc accès en temps réel à l'angle de torsion du fil, ainsi qu'au couple de torsion par l'intermédiaire du capteur dédié, placé entre le fil et le moteur.

Ce dispositif permet de réaliser, sur un même fil, deux types d'expériences.

- En bloquant tout mouvement de rotation de la masse inertie en bas du dispositif, on obtient une machine d'essais de torsion classique contrôlée en déplacement¹. Ce mode de fonctionnement est utilisé pour obtenir le comportement couple/angle du fil pour différents trajets de chargement en déplacement, à différentes fréquences $F_f \in [10^{-5}, 1]$ Hz. Les expériences réalisées avec ce mode de fonctionnement sont dites *quasi-statiques* car la structure est forcée à des fréquences petites par rapport ses fréquences propres².
- Lorsqu'enfin la masse inertie est libérée, et si son inertie de rotation est grande devant l'inertie de rotation du fil, la première fréquence propre du système est très faible devant les suivantes et l'angle de rotation du mode propre correspondant est une fonction linéaire de l'abscisse le long du fil. Ainsi, lorsque le système est forcé autour de sa première fréquence propre, il se comporte comme un oscillateur, et le champ de déplacement dans le fil est identique à celui dans les expériences quasi-statiques. Ces expériences sont dites *dynamiques*.

7.1.2. Comportement du fil en régime quasi-statique

Plusieurs spécimens de fils de Nickel-Titane présentant un comportement pseudoélastique ont été sollicités en torsion à différentes fréquences, différentes amplitudes, différents trajets de chargement, et à différentes températures. Quelques résultats principaux sont présentés sur la figure 7.2.

Tout d'abord, L'effet de l'amplitude de changement cyclique sur un même spécimen est caractérisé sur la figure 7.2a. Pour des amplitudes inférieures à 100°, un comportement élastique est observé. Pour des amplitudes supérieures, la transformation martensitaire s'opère au sein du matériau. La transformation inverse survient dans le matériau à des valeurs différentes de la contrainte, ce qui entraîne l'apparition d'une boucle d'hystérésis dans les courbes de contrainte déformation. La différence la plus notable dans le comportement quasi-statique du fil en torsion, comparativement à des cylindres creux (Predki et al., 2006) ou des éprouvettes en traction/compression (Zaki & Moumni, 2007) est l'absence de retour à une phase purement élastique aux grandes valeurs du couple. Ce phénomène se comprend aisément en considérant la distribution de contrainte dans une section de fil. Celle-ci tend vers zéro lorsque le rayon tend vers zéro. Aussi existe-t-il toujours une petite zone au centre du fil qui reste dans la phase austénitique. La taille de cette zone tend vers zéro lorsque le couple exercé tend vers l'infini et le comportement purement élastique de la phase martensitaire n'est atteint qu'asymptotiquement.

En figure 7.2b, le comportement de deux fils différents provenant d'un même lot sont comparés dans des conditions équivalentes, ce qui laisse entrevoir l'importante difficulté de maîtriser le processus de fabrication et le contrôle des propriétés pseudoélastique des matériaux.

La figure 7.2c compare sur un même graphique le comportement d'un même échantillon à deux températures différentes. Ce graphique montre qu'à 65° la raideur de la phase élastique purement austénitique, l'aire de la boucle d'hystérésis sont plus importantes qu'à température ambiante.

Sur les trois figures 7.2a-c, on observe que le point de départ de la relation couple/angle est décalé après un cycle. Cela peut provenir d'un effet de refroidissement dû à la chaleur latente absorbée lors du changement de phase inverse, comme proposé par He & Sun (2011) ou de l'accumulation de déformations de glissement ou de martensites résiduelles qui induisent un angle résiduel (Morin et al., 2011).

Enfin, en figure 7.2d, l'aire de la boucle d'hystérésis, égale à l'énergie dissipée au cours d'un cycle et qui quantifie la capacité d'absorption du matériau, est tracée en fonction de la fréquence de forçage pour quatre amplitudes différentes de forçage. L'énergie dissipée présente une valeur maximale à 10⁻³Hz, semble atteindre

1. Un asservissement du moteur au capteur de couple permettrait d'en faire aussi une machine d'essais contrôlée en force.

2. Fréquences propres d'un fil de torsion encastré à ses deux extrémités.

7. Oscillations mécaniques et pseudoélasticité

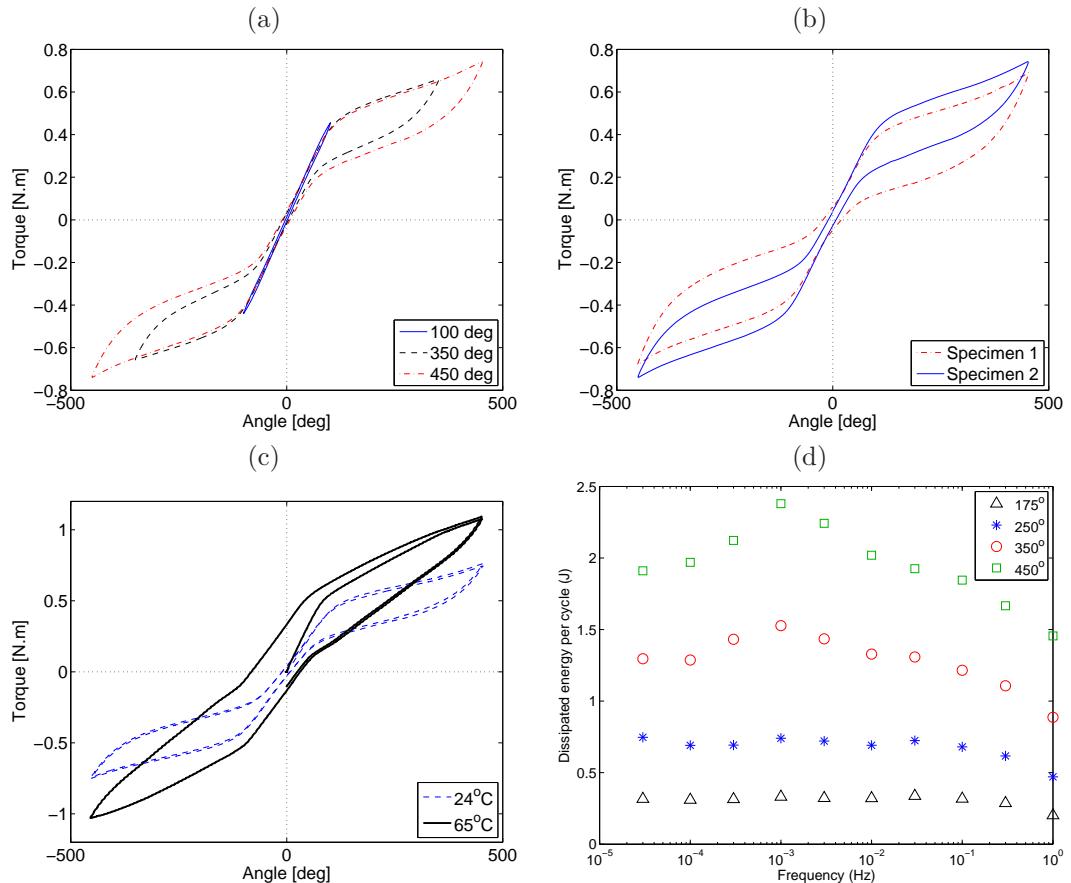


FIGURE 7.2.: Expériences de torsion quasi-statique sur des fils en Nickel-Titane ; (a), pour différentes amplitudes de forçage ; (b), pour deux spécimens différents ; (c), pour deux températures différentes ; (d), aire de la boucle d'hystérésis en fonction de la fréquence de forçage pour différentes amplitudes de forçage.

7.1. Analyse expérimentale de la dynamique d'un pendule de torsion présentant une raideur pseudoélastique

une valeur constante en basses fréquences et décroît de façon monotonique aux hautes fréquences. Ce comportement particulier a déjà été observé expérimentalement en traction (Piedboeuf et al., 1998) et peut être interprété comme la conséquence des trois effets thermiques différents discutés en introduction de ce chapitre (chaleur latente, dissipation, échanges thermiques avec l'extérieur). Chacun de ces effets thermiques a lieu sur un temps caractéristique qui lui est propre et qui dépend des propriétés du matériau, du fluide environnant, voire même des conditions de convection si le matériau est dans un écoulement (He & Sun, 2011). La conséquence en est une forte dépendance du comportement du matériau avec la fréquence de forçage. L'asymptote horizontale atteinte aux très basses fréquences correspond à la limite où les échanges de chaleur avec l'extérieur sont dominants et maintiennent à chaque instant le matériau à la température ambiante (limite isotherme). La limite inverse est obtenue lorsque la fréquence de forçage tend vers l'infini. Dans ce cas, toute la chaleur produite n'a pas le temps d'être évacuée et s'accumule dans le matériau qui s'échauffe indéfiniment (limite adiabatique).

Maintenant que le comportement quasi-statique du fil a été caractérisé, le cas dynamique est abordé.

7.1.3. Comportement dynamique

Le cas où la masse inertielle en bas du dispositif est libérée est considéré. Le système se comporte à présent comme un oscillateur forcé. La figure 7.3 présente les courbes de réponse en fréquence de l'angle de torsion du fil pour différentes amplitudes de forçage angulaire, et dans trois cas différents : (a) avec l'échantillon 1 à une température de 24° , (b) avec l'échantillon 2 à une température de 24° , (c) avec l'échantillon 2 à une température de 65° . Pour obtenir ces courbes, un signal sinusoïdal à une fréquence croissante, puis décroissante est envoyé au moteur. Chaque point des données expérimentales correspond à une mesure d'environ une minute. Le maximum d'angle de torsion est recherché sur les trente dernières secondes afin de ne pas être perturbé par d'éventuels transitoires. Autour de la fréquence de résonance, le pas de fréquence est fixé à 0.001Hz, loin de la résonance, il est fixé à 0.02Hz.

En basses fréquences l'amplitude de la réponse tend vers 0. Cette différence par rapport à la réponse en fréquence du déplacement dans le cas d'un oscillateur forcé classique vient du type de forçage. La sollicitation externe venant d'un déplacement angulaire sinusoïdal à la fréquence ω_f , imposé au niveau de l'encastrement en haut du système, le forçage effectif peut être déduit en se plaçant dans le référentiel de l'extrémité du haut, qui tourne avec le moteur. Dans ce référentiel, chaque section horizontale du système subit une force égale à son moment d'inertie multiplié par l'accélération angulaire du référentiel tournant. Projété sur le premier mode du système, on obtient une équation d'oscillateur forcée dont l'amplitude du forçage varie comme ω_f^2 , ce qui explique la tendance de la réponse lorsque $\omega_f \rightarrow 0$.

Aux faibles amplitudes de forçage, les réponses en fréquence de ces trois graphiques peuvent être expliquées par un modèle linéaire. Notamment, la fréquence de résonance est la même pour les deux spécimens à température ambiante ($\sim 0.55\text{Hz}$), et est supérieure à 65° ($\sim 0.65\text{Hz}$), ce qui s'explique aisément par le raidissement du matériau en phase austénitique lorsqu'il est chauffé. La comparaison entre un modèle linéaire de pendule en torsion et ces expériences à faible amplitude a permis d'estimer l'ordre de grandeur des dissipations présentes dans le système, notamment celle introduite par le roulement à billes.

Lorsque l'amplitude du forçage augmente, deux phénomènes remarquables peuvent être mentionnés. Tout d'abord, la fréquence de résonance diminue, ce qui est lié à l'assouplissement du matériau induit par la transformation martensitique. Ensuite un phénomène de saut dans la réponse en fréquence apparaît. Ce saut survient à une fréquence différente selon que la fréquence est augmentée ou diminuée, induisant un effet d'hystérésis dans la réponse en fréquence. Ces trois courbes représentent la première mise en évidence expérimentale claire du phénomène de saut et de l'hystérésis dans la réponse en fréquence d'un oscillateur pourvu d'une raideur pseudoélastique.

Enfin, l'amplitude maximale de la réponse est d'environ 200° pour le spécimen 1, de 250° pour le spécimen 2 et 150° pour le spécimen 3, ce qui est en cohérence avec les observations faites dans l'analyse quasi-statique : plus l'aire de la boucle d'hystérésis dans la relation contrainte déformation est grande, plus la capacité d'amortissement du matériau est importante et plus faible est l'amplitude de l'angle de torsion au pic de résonance.

7. Oscillations mécaniques et pseudoélasticité

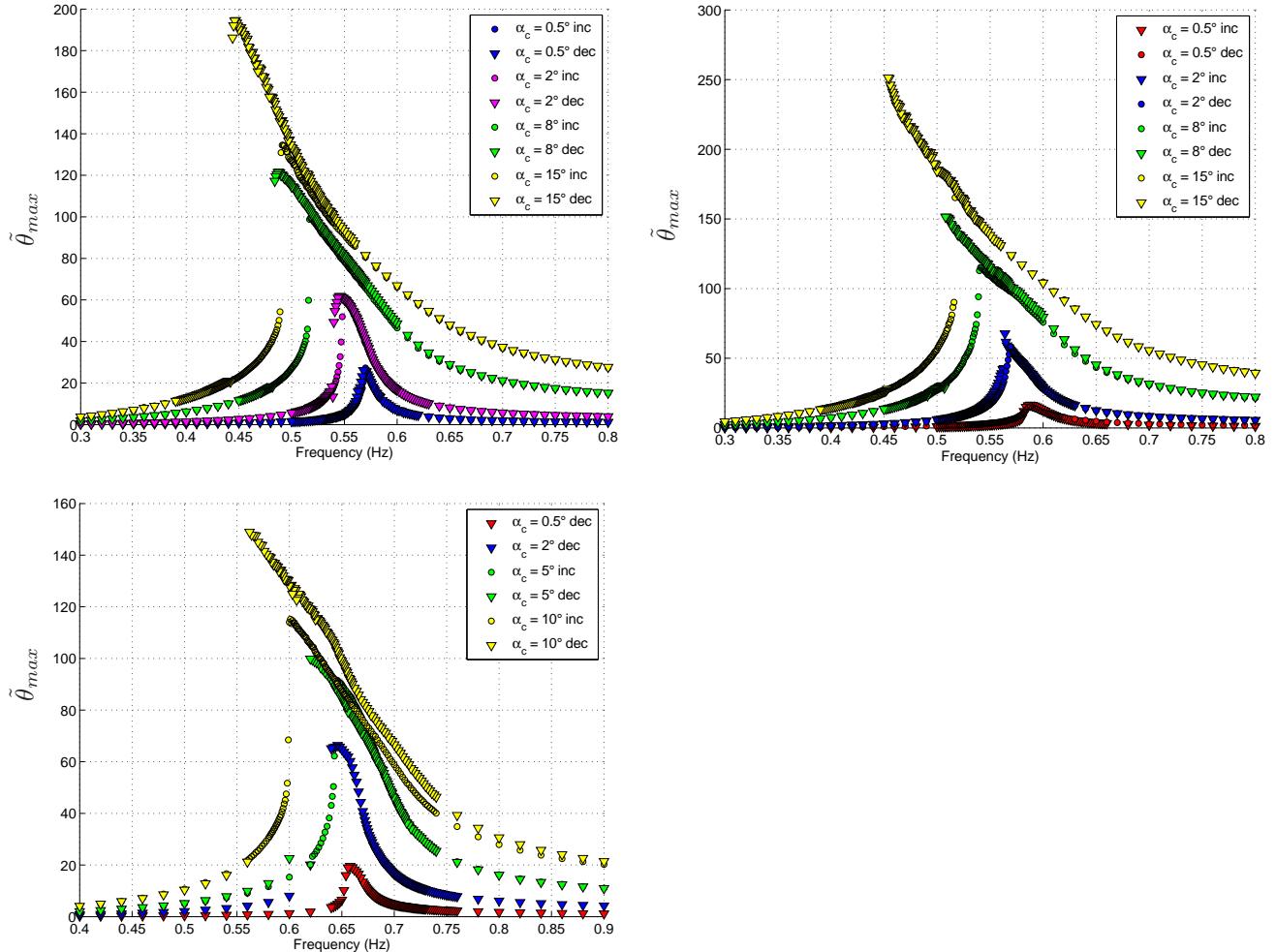


FIGURE 7.3.: Frequency-response functions (FRFs) for specimen S1, for increasing values of the forcing amplitude : $\alpha_c=0.5^\circ$, 2° , 8° and 15° . Measured responses for increasing values of f_c are marked by circles, and by triangles for decreasing values.

7.2. Étude numérique des oscillations en présence d'une raideur pseudoélastique

Un travail de modélisation et simulation du comportement d'un oscillateur dont la raideur présente un comportement pseudo-élastique est maintenant présenté. Ce travail consiste à utiliser un modèle de comportement tridimensionnel, stable thermodynamiquement et capable de reproduire la plupart des comportements d'un matériau à mémoire de forme, de le particulariser au cas d'un oscillateur à un degré de liberté et de l'introduire dans un calcul dynamique. L'ensemble de ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse de Mohamed Ould Moussa (Ould Moussa, 2011).

7.2.1. Modèle thermodynamique du comportement d'un alliage à mémoire de forme

Les matériaux standard généralisés

Le modèle de comportement est développé ici dans le cadre des matériaux standard généralisés (Halphen & Nguyen, 1975) et consiste en premier lieu à définir trois potentiels. Le premier, noté \mathcal{W} , représente l'énergie libre de Helmholtz du matériau, qui dépend de toutes les variables du problème. Dans le cas présent il s'agit de la température T , du tenseur de déformation macroscopique $\underline{\epsilon}$, de la fraction volumique de martensite z , des déformations locales des phases austénitique $\underline{\epsilon}_a$ et martensitique $\underline{\epsilon}_m$, et de l'orientation du tenseur des déformations $\underline{\epsilon}_{\text{ori}}$. Le second potentiel, noté \mathcal{W}_c , est introduit, pour tenir compte de toutes les contraintes que doivent satisfaire les variables internes et nécessite donc l'introduction des multiplicateurs de Lagrange associés. Le troisième potentiel est un pseudo-potentiel de dissipation, noté \mathcal{D} qui dépend des variables internes introduites pour tenir compte des changements de phases du matériau. Une fois ces trois potentiels définis, on introduit le Lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_c$ duquel dérivent l'ensemble des équations d'état du matériau. Enfin, imposer à l'ensemble des forces thermodynamiques d'être des sous-gradiants de \mathcal{D} permet de définir les conditions d'évolution des variables associées au changement de phase. Ce cadre théorique permet de s'assurer que le système étudié soit thermodynamiquement admissible. Il existe une importante littérature sur les modèles thermodynamiques de comportement des matériaux définis dans le cadre des matériaux standard généralisés. Dans la présente application, on se référera à Halphen & Nguyen (1975) pour les principes généraux, à Moumni & NGuyen (1996) pour l'introduction de contraintes internes, à Zaki & Moumni (2007) sur le développement d'un modèle tridimensionnel isotherme, à Morin et al. (2011) et Ould Moussa et al. (2012) pour la prise en compte des effets de couplage thermiques dans l'équation de la chaleur qui introduisent une dépendance en temps du comportement.

Modèle de comportement 1D et introduction dans un oscillateur à un degré de liberté

En particularisant le modèle tridimensionnel au cas à un degré de liberté d'une barre en traction/compression, on obtient un modèle de ressort non-linéaire en AMF. La force de raideur de ce ressort dépend de l'elongation totale, de la fraction martensitique et de la déformation d'orientation,

$$F = \mathcal{K}(z)(X - zX_{\text{ori}}), \quad (7.1)$$

où $\mathcal{K}(z)$ dépend de la fraction volumique martensitique z et des raideurs de chacune des deux phases,

$$\mathcal{K}(z) = \left(\frac{1-z}{K_a} + \frac{z}{K_m} \right)^{-1}. \quad (7.2)$$

Cette raideur est couplée à une masse, un amortissement, et le système subit un forçage harmonique externe (figure 7.6), de sorte que le déplacement obéit à l'équation d'oscillateur suivante :

$$\mathcal{M}\ddot{X} + \mathcal{C}\dot{X} + \mathcal{K}(z)(X - zX_{\text{ori}}) = F_{\text{max}} \cos \omega t. \quad (7.3)$$

L'évolution de la fraction martensitique obéit aux quatre critères suivants,

$$F_{\pm}^{\text{crit}} \leq 0, \quad \dot{z}F_{\pm}^{\text{crit}} = 0, \quad (7.4)$$

7. Oscillations mécaniques et pseudoélasticité

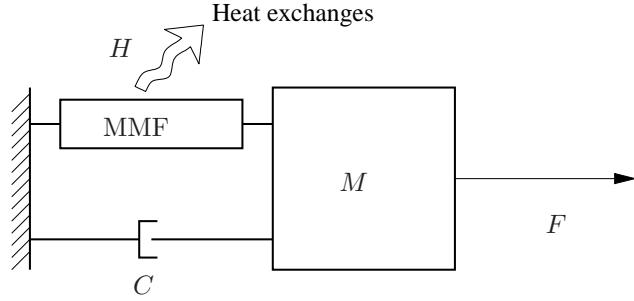


FIGURE 7.4.: Vue schématique d'un oscillateur dont la raideur présente un comportement pseudoélastique.

où F_{\pm}^{crit} sont les fonctions critères de changement de phase aller et retour,

$$F_{\pm}^{\text{crit}} = \pm \mathcal{A}_z - a(1 - z) - bz. \quad (7.5)$$

Dans l'équation (7.5) apparaît \mathcal{A}_z , la force thermodynamique associée à la fraction martensitique et les coefficients a et b , qui dépendent de manière non triviale des différents seuils de transformation (Ould Moussa et al., 2012). Enfin, en supposant dans ce cas à un degré de liberté une température du matériau homogène, l'équation de la chaleur prend la forme,

$$\rho C_p \dot{T} = \mathcal{A}_z \dot{z} + \xi T \dot{z} + H(T_{\text{ext}} - T). \quad (7.6)$$

Les deux premiers termes du membre de droite sont deux sources de chaleur liées au changement de phase : la dissipation intrinsèque et la chaleur latente du changement de phase. Le dernier terme tient compte des échanges entre le matériau à la température T et un milieu extérieur à la température T_{ext} . Le coefficient d'échange H dépend des capacités calorifiques, et des conditions de convection naturelle.

Modèle sans dimension

En utilisant la pulsation $\omega_a = K_a / \mathcal{M}$ pour adimensionner le temps, X_{ms} le déplacement de début de transformation martensitique pour adimensionner les longueurs, et une température de référence T_{ref} , le modèle sans dimension prend la forme suivante,

$$\ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + x - zx_{\text{ori}} = \gamma \cos \Omega \tau \quad (7.7)$$

$$\dot{\theta} - A\dot{z} - B\theta\dot{z} = h(\theta_{\text{ext}} - \theta), \quad (7.8)$$

où

$$A = \frac{\mathcal{A}_z}{\rho T_{\text{ref}} C_p}, \quad B = \frac{\xi}{\rho C_p}, \quad \zeta = \frac{C}{2\omega_a \mathcal{M}}, \quad \gamma = \frac{F_{\text{max}}}{F_{\text{ms}}}, \quad h = \frac{H}{\rho C_p \omega_a}. \quad (7.9)$$

et où les fonctions critère demeurent inchangées.

L'équation dynamique du modèle est intégrée en utilisant un algorithme de Newmark au sein duquel un traitement spécifique est réservé aux quatre conditions portant sur les fonctions critères (F_{+}^{crit} dans le cas du chargement, F_{-}^{crit} dans le cas du déchargement). L'équation de la chaleur est quant à elle résolue en utilisant un schéma d'Euler implicite.

Choix de paramètres

Le travail de Lacarbonara et al. (2004) a servi de référence pour valider la présente modélisation. Dans leur article, les auteurs considèrent un modèle simplifié de comportement pseudoélastique dans lequel les pentes élastiques des phases austénitiques et martensitiques sont égales, de même que les pentes durant les changements

7.2. Étude numérique des oscillations en présence d'une raideur pseudoélastique

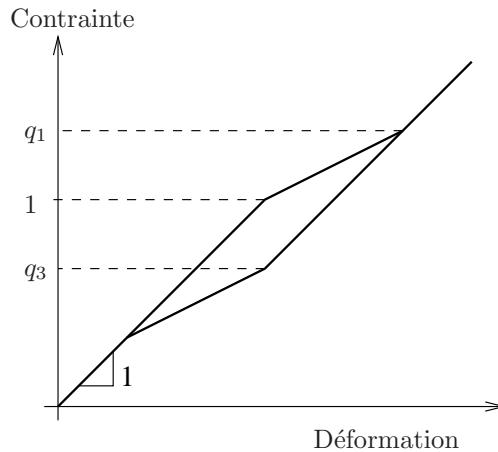


FIGURE 7.5.: Relation contrainte déformation pseudoélastique adimensionnée où les pentes élastiques K_a et K_m sont égales, de même que les pentes durant les changements de phase direct et inverse.

de phase direct et inverse. La boucle d'hystérésis prend dans ce cas la forme d'un parallélogramme et la version adimensionnée de ce modèle ne nécessite que deux paramètres indépendants :

$$q_1 = \frac{F_{mf}}{F_{ms}}, \quad q_3 = \frac{F_{as}}{F_{ms}}, \quad (7.10)$$

où F_{ms} et F_{mf} sont les seuils de début et de fin de transformation en chargement et F_{as} le seuil de début de transformation en déchargement. La figure 7.5 présente la relation contrainte/déformation de ce modèle adimensionné. Le fait que la pente dans les phases purement élastiques et la valeur de la contrainte au début de la transformation martensitique soient égales à l'unité provient de l'adimensionnement choisi.

Une méthode de continuation est utilisée par Lacarbonara et al. (2004), ce qui leur permet d'obtenir à la fois les branches stables et instables des réponses en fréquences alors que l'intégration numérique directe de la présente méthode ne donne accès qu'aux branches stables.

7.2.2. Principaux résultats

Cas isotherme

La figure 7.6a présente l'amplitude maximale du déplacement périodique de l'oscillateur en fonction de la fréquence de forçage à différentes amplitudes de forçage γ . Puisque la longueur de référence utilisée pour adimensionner le déplacement est X_{ms} , une amplitude de déplacement inférieure à 1 indique que le matériau reste dans sa phase austénitique et nous avons affaire à un comportement linéaire. C'est ce qui est observé pour $\gamma = 0.1$. En revanche, lorsque $\gamma = 0.2$, l'amplitude dépasse 1 autour de la résonance, la transformation martensitique s'opère au cours de l'oscillation et le comportement assouplissant du matériau commence à exercer son influence : la courbe de résonance s'incurve vers la gauche. Le phénomène est encore plus prononcé pour $\gamma = 0.5$. On observe de plus qu'à partir du moment où la transformation martensitique a lieu durant l'oscillation, un phénomène d'hystérésis survient : le trajet suivi le long de la courbe de résonance diffère selon que l'on diminue ou augmente la fréquence. Pour $\gamma = 0.8$, une troisième branche est observée dans la réponse en fréquence (notée FD sur la figure). Celle-ci survient dès que l'amplitude du déplacement est telle que la transformation martensitique du matériau est totale. Cette branche est incurvée vers la droite, ce qui est la manifestation d'un raidissement apparent de la relation contrainte/déformation lorsque le matériau est complètement en phase martensitique. Un nouveau phénomène de saut et un hystérésis associé peuvent être observés lorsque cette troisième branche est présente.

En figure 7.6b, les résultats de notre modèle sont comparés aux résultats de Lacarbonara et al. (2004) pour les mêmes valeurs des paramètres de l'équation (7.10) et pour deux valeurs différentes de γ . L'accord est

7. Oscillations mécaniques et pseudoélasticité

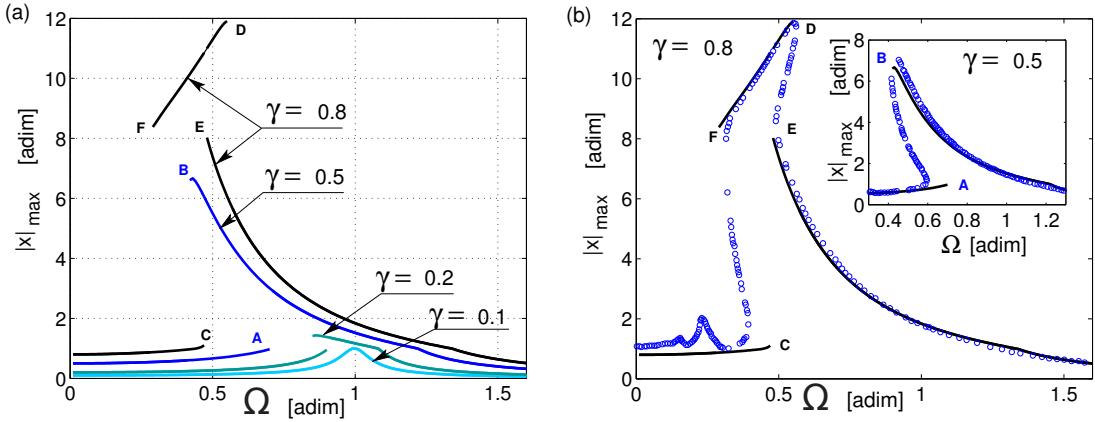


FIGURE 7.6.: (a), réponse en fréquence pour plusieurs valeurs de l'amplitude de forçage sans dimension γ ; (b), comparaison avec les résultats fournis par Lacarbonara et al. (2004) pour $\gamma = 0.5$ (insert) et $\gamma = 0.8$.

satisfaisant dans l'ensemble. Quelques différences peuvent toutefois être notées. D'une part, la valeur à laquelle le saut d'amplitude survient diffère légèrement d'un modèle à l'autre (points A, B, C, D, E et F sur la figure 7.6b). Ensuite, à $\gamma = 0.9$, Lacarbonara et al. (2004) prédisent de pics secondaires à faible fréquence liés à l'existence de résonances super-harmoniques d'ordre 3 et 5. Notre modèle ne les prédit pas à cette valeur de γ .

Enfin, la figure 7.7 présente le cas $\gamma = 1.2$, non exploré par Lacarbonara et al. (2004). À cette amplitude de forçage, la réponse en fréquence présente bien cette fois en basse fréquence des régimes super-harmoniques, des régimes chaotiques, comme le laisse entrevoir la section de poincaré présentée dans l'insert de la figure 7.7, qui représente une stroboscopie à la fréquence de forçage de la réponse de l'oscillateur.

Cas non isotherme

Lors de la présentation des résultats expérimentaux de torsion, nous avons montré que la capacité d'amortissement du matériau lié à la boucle d'hystérésis dépend fortement de la fréquence de sollicitation (figure 7.3c). Ce phénomène dépend de la production de chaleur dans le matériau lors des changements de phase et de la capacité du milieu environnant à évacuer cette chaleur produite. Ceci est illustré par la figure 7.8a, où sont présentés les résultats d'une simulation temporelle du modèle tenant compte des effets thermiques. Y est tracée la température en fonction du temps pour différentes valeurs du coefficient d'échanges thermiques h . Les oscillations observées ont lieu au double de la fréquence de forçage de l'oscillateur. Elles sont dues à la chaleur latente de changement de phase. On observe en plus un échauffement global du matériau au début de la sollicitation mécanique. Cet échauffement est du à la dissipation. Lorsque $h = 0$, nous avons affaire à un système adiabatique. Toute la chaleur produite dans le matériau y reste et la température ne cesse d'augmenter. En revanche, lorsque h a une valeur non-nulle, un équilibre est trouvé aux temps longs, lorsque la chaleur produite dans le matériau est égale à la chaleur évacuée dans le milieu extérieur. Dans le cas isotherme qui correspond à la limite $h \rightarrow \infty$, nous devrions observer $\theta = 1\forall t$.

La figure 7.8b présente l'effet des échanges de chaleur avec le milieu extérieur sur la réponse en fréquence de l'oscillateur. Lorsque h devient petit (échanges importants), la capacité d'amortissement du matériau augmente en même temps que le matériau se raidit, ce qui induit une diminution de l'amplitude à la résonance, une augmentation de la fréquence de résonance. Il est à noter que pour $h = 0.01$, l'aire de l'hystérésis parcourue est quasi-nulle, et la réponse se rapproche d'une réponse d'oscillateur linéaire. Ainsi, la diminution de l'amplitude à $h = 0.01$ est plus liée au raidissement apparent du matériau qu'à l'amortissement induit par la boucle d'hystérésis.

7.2. Étude numérique des oscillations en présence d'une raideur pseudoélastique

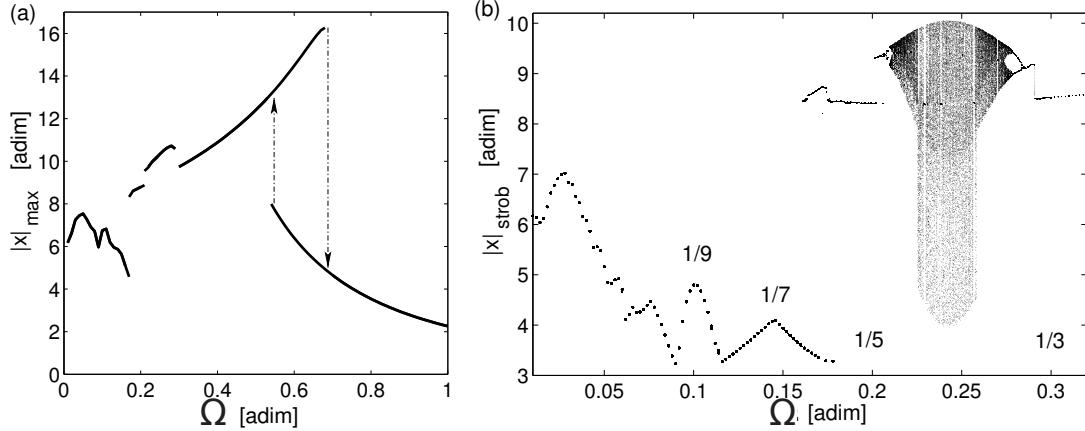


FIGURE 7.7.: réponse en fréquence pour $\gamma = 1.2$ et section de Poincaré, laissant entrevoir une réponse chaotique du système pour un intervalle de fréquences compris entre 0.2 et 0.3.

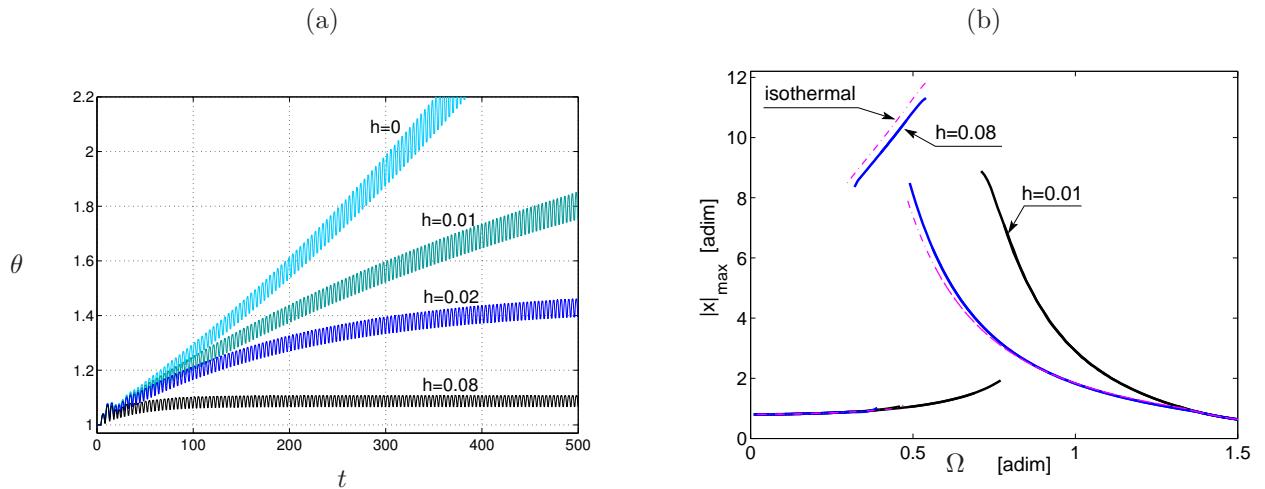


FIGURE 7.8.: (a), Température en fonction du temps pour quatre valeurs typiques du coefficient d'échange thermique h ; (b), Réponse en fréquence pour un comportement isotherme et un comportement nonisotherme.

7.3. Bilan et perspectives

Le travail de recherche présenté dans cette section a eu pour objet l'étude expérimentale et numérique d'oscillations mécaniques en présence de raideurs pseudoélastiques. Une expérience originale d'un pendule de torsion a permis de mettre en évidence le phénomène de saut dans la réponse en fréquence jusqu'alors observé uniquement dans les simulations numériques.

Un modèle tridimensionnel développé dans le cadre des matériaux standard généralisés prenant en compte les effets thermiques a été présenté. Particularisé et validé dans un cas unidimensionnel, il a été utilisé pour réaliser une étude numérique de la réponse d'un oscillateur forcé dont la raideur a un comportement pseudoélastique. Les résultats sont en cohérence avec résultats de Lacarbonara et al. (2004). Des phénomènes d'assouplissement, d'hystérosérisis, des régimes super-harmoniques et chaotiques ont été observés. Enfin, la question de l'influence des effets thermiques a été abordée.

Nous mentionnons à présent quelques perspectives possibles de ce travail.

- D'un point de vue expérimental, la suite naturelle de ce travail serait d'accéder à des mesures de températures du matériau, de quantifier et contrôler les échanges thermiques avec le milieu extérieur, à la fois dans le cadre de mesures quasi-statiques et les mesures dynamiques.
 - L'utilisation de ce modèle dans le cas d'une structure réelle serait une extension naturelle de l'étude numérique déjà réalisée. De premiers résultats quasi-statiques sur le cas d'un cylindre en torsion ont été obtenus durant la thèse de Mohamed Ould Moussa et il conviendrait à présent de traiter le cas dynamique pour obtenir une comparaison expériences/théorie à même de valider la modélisation.
 - Enfin, mentionnons l'idée de l'utilisation d'amortisseurs pseudoélastiques dans le contexte des instabilités aéroélastiques, qui serait une extension naturelle du travail de ce chapitre et des chapitres précédents.
-

Perspectives

Dans ce mémoire ont été présentés mes travaux de recherche à l'ENSTA dans le domaine des instabilités en interaction fluide-structure, de la dynamique des matériaux actifs et du couplage entre écoulements et structures actives. À la fin de chaque chapitre, nous avons exposé un certain nombre de questions restant ouvertes et proposé quelques pistes de travail. Nous mettons ici finalement l'accent quelques projets qui seront privilégiés dans les années à venir. La ligne directrice principale de ces projets peut simplement se résumer en *interaction fluide-structures actives*.

Récupération d'énergie du flottement de plaques piézoélectriques

Projet en collaboration avec Sébastien Michelin (LadHyX) et Dejan Vasic (SATIE)

Le chapitre 6 constitue le point de départ d'un projet plus ambitieux sur la récupération d'énergie. Nos premiers travaux ont permis de poser les bases d'une démarche de modélisation et de l'appliquer à un cas simple de drapeau avec distribution continue de patchs piézoélectriques connectés à des circuits purement dissipatifs. Nos résultats montrent l'importance du coefficient de couplage et de l'accord des temps caractéristiques fluide-solide et électrique dans le travail d'optimisation. Nous avons aussi mis en évidence un phénomène de déstabilisation du au couplage piézoélectrique, qui maximise l'efficacité linéaire.

Optimisation du circuit aval / Expérimentations / Interactions entre plusieurs récupérateurs - Thèse EDX de Yifan Xia - Co-encadrement Sébastien Michelin(LadHyX)/Olivier Doaré

La thèse de Yifan Xia, débutée en octobre 2012, consiste à considérer d'autres types de circuits aval, par exemple des circuits inductifs, propagatifs, ou actifs. Ce travail devrait permettre d'augmenter l'efficacité de récupération du système. Ensuite une campagne d'expériences sera menée sur un système donné. Dans un troisième temps, l'interaction hydrodynamique ou électrique entre systèmes récupérateurs sera envisagée.

Développement d'un modèle d'impédance - Post-doc de Miguel Pineirua - Financement via le LABEX LASIPS

Le travail de Miguel Pineirua, débuté le 1er Septembre 2012, consiste à développer un modèle non linéaire d'impédance d'un patch piézoélectrique collé sur une plaque en flottement. Il est envisagé pour ce travail d'écrire un développement faiblement non linéaire d'une version des équations (6.29-6.33) où une distribution discrète de patchs piézoélectriques est introduite, et d'effectuer une projection de type Galerkin. Le modèle d'ordre réduit ainsi obtenu pourra être utilisé pour réaliser un travail d'optimisation du circuit récupérateur. En collaboration avec Dejan Vasic, maître de conférences au laboratoire SATIE (ENS-Cachan), nous pourrons alors aborder l'étude de circuits non-linéaires actifs de type SSHI (Lefeuvre et al., 2006; Lallart & Guyomar, 2008), qui permettent d'augmenter significativement le potentiel de récupération d'énergie.

ANR FLUTTENER

Nous envisageons le développement de cette activité grâce au financement de l'ANR. Des aspects complémentaires des travaux de la thèse de Yifan Xia et du post-doc de Miguel Pineirua doivent y être développés (cf. section 6.5). L'objectif de l'ANR est le formaliser une collaboration de trois chercheurs de compétences complémentaires couvrant l'ensemble des aspects de ce projet (mécanique/électronique de puissance, théorie/numérique/expérimental).

Flottement de plaques couplées avec un champ électromagnétique

Projet en collaboration avec Jean Boisson (UME)

7. Oscillations mécaniques et pseudoélasticité

Pour convertir l'énergie mécanique du flottement de structures sous écoulement, le couplage par induction peut représenter une autre solution avantageuse par rapport au couplage piézoélectrique. Ce type d'application a déjà été proposé par Tang et al. (2009), sous la forme d'une plaque conductrice oscillant entre deux panneaux magnétiques. Dans ce travail, seul le couplage a été modélisé dans un seul sens, en omettant de considérer les efforts induits sur la structure par le couplage électromécanique.

Dans ce projet, nous souhaitons revenir à la base de la problématique, en abordant en premier lieu au couplage complet fluide-structure-induction. Dans ce cadre toutes les configurations peuvent être envisagées : champ magnétique produit par une plaque magnétique en oscillation, efforts induits sur une plaque conductrice par un champ magnétique, interaction entre une plaque magnétique en oscillation et un fluide conducteur. Ensuite, nous pouvons envisager l'adjonction de bobines dans la modélisation, qui crée un échange d'énergie entre un circuit électrique et le système mécanique, grâce au phénomène d'induction. Nous envisageons d'aborder cette problématique à la fois par la modélisation et l'expérimentation.

Aéro-pseudo-élasticité et autres effets de non-linéarités de structure sur les cycles limites aéroélastiques

Projet en collaboration avec Cyril Touzé (UME) et Xavier Amandolèse (LadHyX)

Nous avons montré au chapitre 7 que la boucle d'hystérésis avait à la fois un effet amortissant et un effet assouplissant sur la réponse dynamique d'oscillateurs forcés. Nous avons aussi mis en évidence des hystérésis dans les réponses en fréquences. L'on peut à présent se demander quelle est l'influence de la boucle d'hystérésis caractéristique du comportement pseudo-élastique des alliages à mémoire de forme sur les caractéristiques des cycles limites consécutifs à une instabilité aéroélastique de type flottement de plaque en écoulement axial ou flottement de profil d'aile en flexion-torsion. De premiers résultats préliminaires ont été obtenus dans le cadre du stage de Thibaut Rouchon (2012, M2 TACS) sur un profil d'aile en flexion-torsion dont la raideur de torsion présente un comportement pseudoélastique. Nous montrons que l'amplitude du cycle limite aéroélastique présente des caractéristiques particulières dues à l'hystérésis de la relation contrainte/déformation, à l'amortissement consécutif à l'hystérésis, mais aussi à l'assouplissement du matériau pendant le changement de phase. Une collaboration avec Xavier Amandolèse, du LadHyX, est prévue sur la partie expérimentale.

Ce projet ne se limitera pas aux alliages à mémoire de forme et d'autres types de comportements non linéaires seront abordés. Nous envisageons notamment d'aborder la question de l'utilisation d'un amortissement purement non linéaire, dans la lignée des études produites par Vakakis et al. (2008). Les systèmes discrets de type aile en flexion/torsion ou continus de type tuyau ou drapeau pourront être abordés, et les techniques développées par Cyril Touzé sur l'utilisation de modes non linéaires seront ici très utiles (Touzé & Thomas, 2006).

Amortissements induits par un écoulement axial

Projet en collaboration avec Pierre Moussou (EDF-LaMSID) et Olivier Cadot (UME) - Thèse CIFRE de Lise Divaret

Ce travail est né des préoccupations d'EDF de maîtriser l'amortissement et les oscillations des structures élancées en écoulement axial de type barres de combustibles ou échangeurs de chaleur, en particulier lorsqu'elles sont soumises à un séisme. La thèse de Lise Divaret a débuté en Janvier 2012 sur cette problématique. Le cas simple d'un barreau cylindrique dans un écoulement axial, en oscillations transversales, a été abordé expérimentalement et des résultats nouveaux et pour l'instant inexplicables ont été obtenus. Dans cette configuration l'amortissement du barreau est dû à une fluctuation de portance induite par une variation de l'angle apparent de l'écoulement dans le référentiel de la structure. Pour caractériser ce phénomène, il a été quantifié expérimentalement la portance d'un barreau cylindrique élancé et a trouvé aux faibles angles d'attaque des résultats incompatibles avec la théorie de Taylor (1952), qui prédit un coefficient de portance variant quadratiquement avec l'angle d'attaque. Le travail expérimental et de modélisation de Lise Divaret continue et concernera bientôt le cas de plusieurs cylindres, qui se rapproche de la configuration industrielle qui intéresse EDF.

Bibliographie

- D. T. Akcabay & Y. L. Young. Hydroelastic response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow. *Physics of Fluids*, 24(5) :054106, 2012.
- S. Alben. Simulating the dynamics of flexible bodies and vortex sheets. *Journal of Computational Physics*, 228 (7) :2587–2603, 2009.
- F. Alipour & R. C. Scherer. Flow separation in a computational oscillating vocal fold model. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(3) :1710–1719, 2004.
- F. Alipour & R. C. Scherer. Characterizing glottal jet turbulence. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(2) :1063–1073, 2006.
- J.J. Allen & A.J. Smits. Energy harvesting eel. *Journal of fluids and structures*, 15 :629–640, 2001.
- S. Alper & E. B. Magrab. Radiation from forced harmonic vibrations of a clamped circular plate in an acoustic fluid. *Journal Of The Acoustical Society Of America*, 48 :681–691, 1970.
- C. R. Anderson. A method of local corrections for computing the velocity field due to a distribution of vortex blobs. *Journal of Computational Physics*, 62(1) :111–123, 1986.
- V. I. Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. New York, 1983.
- Y. Aurégan & C. Dépollier. Snoring : Linear stability and in-vitro experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 188(1) :39–53, 1995.
- D. Auricchio, F. and Fugazza & R. Desroches. Rate-dependent Thermo-mechanical Modelling of Superelastic Shape-memory Alloys for Seismic Applications. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 19 (1) :47–61, 2008.
- A. Barney, C. H. Shadle, & P. O. A. L. Davies. Fluid flow in a dynamic mechanical model of the vocal folds and tract. I. Measurements and theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105 :444–455, jan 1999.
- S. Becker, S. Kniesburges, S. Müller, A. Delgado, G. Link, M. Kaltenbacher, & M. Döllinger. Flow-structure-acoustic interaction in a human voice model. *Acoustical Society of America Journal*, 125 :1351, 2009.
- G. Bekefi & Howard H. C. Chang. Radiation Processes in Plasmas. *Physics Today*, 22(1) :103–107, 1969.
- T. B. Benjamin. The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 16(3) :436–450, 1963.
- L. L. Beranek. *Acoustics*. New-York, 1954.
- D. Bernardini & G. Rega. The influence of model parameters and of the thermomechanical coupling on the behavior of shape memory devices. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(10) :933–946, 2010. ISSN 0020-7462.
- D. Bernardini & F. Vestroni. Non-isothermal oscillations of pseudoelastic devices. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(9) :1297–1313, 2003. ISSN 0020-7462.
- M. M. Bernitsas, K. Raghavan, Y. Ben-Simon, & E. M. H. Garcia. VIVACE (Vortex Induced Vibration Aquatic Clean Energy) : A New Concept in Generation of Clean and Renewable Energy From Fluid Flow. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 130 :041101–1, 2008.
- P. Bisegna, G. Caruso, & F. Maceri. Optimized electric networks for vibration damping of piezoactuated beams. *Journal of Sound and Vibration*, 289(4-5) :908–937, 2006.
- R.D. Blevins. *Flow-induced vibration*. 1990.
- V. V. Bolotin. *Non-conservative Problems of the Theory of Elastic Stability*. Pergamon, Oxford, 1963.

BIBLIOGRAPHIE

- O. Bottema. On the stability of the equilibrium of a linear mechanical system. *Z. Angew. Math. Phys.*, 6 : 97–104, 1955.
- O. Bottema. The Routh-Hurwitz condition for the biquadratic equation. *Indagationes Mathematics*, 18 :403–406, 1956.
- F. J. Bourrières. Sur un phénomène d'oscillation auto-entretenue en mécanique des fluides réels. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, 147, 1939.
- P. R. Brazier-Smith & J. F. Scott. Stability of fluid flow in the presence of a compliant surface. *Wave Motion*, 6 :547–560, 1984.
- R. J. Briggs. *Electron-Stream Interaction with Plasmas*. The MIT Press, 1964.
- L. Brillouin. *Wave Propagation in Periodic Structures*. 1946.
- O. P. Bruno, P. H. Leo, & F. Reitich. Free Boundary Conditions at Austenite-Martensite Interfaces. *Physical Review Letters*, 74(5) :746–749, 1995.
- R. A. Cairns. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 92 :1–14, 1979.
- P. W. Carpenter & A. D. Garrad. The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien-Schlichting instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 155() :465–510, 1985.
- P. W. Carpenter & A. D. Garrad. The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 170 :199–232, 1986.
- G. Carreras, F. Casciati, S. Casciati, A. Isalgue, A. Marzi, & V. Torra. Fatigue laboratory tests toward the design of SMA portico-braces. *Smart Structures and Systems*, 7(1) :41–57, 2011.
- A. Chaigne & J. Kergomard. *Acoustique des Instruments de Musique*. 2008.
- J. Cisonni, A. Van Hirtum, X. Pelorson, & J. Willem. Theoretical simulation and experimental validation of inverse quasi-one-dimensional steady and unsteady glottal flow models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(1) : 535–45, 2008.
- M. Collet, E. Foltête, & C. L'Excellent. Analysis of the behavior of a Shape Memory Alloy beam under dynamical loading. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20(4) :615–630, 2001.
- B. Coppi, M. N. Rosenbluth, & R. N. Sudan. Nonlinear interactions of positive and negative energy modes in rarefied plasmas (I). *Annals of Physics*, 55(2) :207–247, 1969.
- A. Couairon & JM Chomaz. Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 108(3) :236–276, 1997.
- D. Crighton & J. E. Osswell. Fluid loading with mean flow. I. Response of an elastic plate to localized excitation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 335 :557–592, 1991.
- J. Curie & P. Curie. Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémédres à faces inclinées. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 91 :294–295, 1880.
- P. Curie. *Notice sur les Travaux Scientifiques de M. P. Curie*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Librairie, du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, Quai des Grands-Augustins, Paris, 1902.
- S.K. Datta & W.G. Gotthenberg. Instability of an elastic strip hanging in an airstream. *Journal of Applied Mechanics*, 42 :195–198, 1975.
- R. C. Davidson. *Methods in nonlinear plasma theory*. Academic Press, 1972.
- E. de Langre. Absolutely unstable waves in inviscid hydroelastic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 256 (2) :299–317, 2002a.
- E. de Langre. *Fluides et Solides*. 2002b.
- E. de Langre & A. E. Ouvrard. Absolute and convective bending instabilities in fluid-conveying pipes. *Journal of Fluids and Structures*, 13(6) :663–680, 1999. ISSN 0889-9746.
- E. de Langre, M. P. Païdoussis, O. Doaré, & Y. Modarres-Sadeghi. Flutter of long flexible cylinders in axial flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 571 :371–389, 2007.

- G. Z. Decker & S. L. Thomson. Computational Simulations of Vocal Fold Vibration : Bernoulli Versus Navier–Stokes. *Journal of Voice*, 21(3) :273–284, 2007.
- M. Deverge, X. Pelorson, C. Vilain, P. Y. Lagree, F. Chentouf, J. Willems, & A. Hirschberg. Influence of collision on the flow through in-vitro rigid models of the vocal folds. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(6) :3354–3362, 2003.
- O. Doaré. *Instabilités Locales et Globales en Interaction Fluide-Structure*. PhD thesis, École Polytechnique, 2001.
- O. Doaré. Dissipation effect on local and global stability of fluid-conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 329(1) :72–83, 2010.
- O. Doaré. *Spectral Analysis, Stability and Bifurcations in Modern Nonlinear Physical Systems*, chapter Influence of dissipation on local and global instabilities. Wiley, 2012. in prep.
- O. Doaré & E. de Langre. Local and global stability of fluid-conveying pipes on elastic foundations. *Journal of Fluids and Structures*, 16(1) :1–14, 2002a.
- O. Doaré & E. de Langre. The flow-induced instability of long hanging pipes. *European Journal of Mechanics/A-Solids*, 21 :857–867, 2002b.
- O. Doaré & E. de Langre. The role of boundary conditions in the instability of one-dimensional systems. *European Journal Of Mechanics B-Fluids*, 25 :948–959, 2006.
- O. Doaré & C. Eloy. The influence of channel walls on flag flutter. In *Flow Induced Vibration*, 2012.
- O. Doaré, G. Kergourlay, & C. Sambuc. Design of a circular clamped plate excited by a voice coil and piezoelectric patches used as a loudspeaker. *Transactions od the ASME : Journal of Vibration and Acoustics*, under review, 2012.
- O. Doaré, D. Mano, & J. C. Bilbao Ludena. Effect of spanwise confinement on flag flutter : Experimental measurements. *Physics of Fluids*, 23 :111704, 2011a.
- O. Doaré & S. Michelin. Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency. *Journal of Fluids and Structures*, 27(8) :1357–1375, 2011.
- O. Doaré, T. Paes, & M. Ferre. Feedback Control of the Flutter of a Cantilevered Plate in an Axial Flow. *ASME Conference Proceedings*, 2006(47888) :425–430, 2006.
- O. Doaré, M. Sauzade, & C. Eloy. Flutter of an elastic plate in a channel flow : Confinement and finite-size effects. *Journal of Fluids and Structures*, 27(1) :76–88, 2011b.
- O. Doaré, A. Sbarra, C. Touzé, M. Ould Moussa, & Z. Moumni. Experimental analysis of the quasi-static and dynamic torsional behaviour of shape memory alloys. *International Journal of Solids and Structures*, 49 (1) :32–42, 2012.
- A. Donoso & J. C. Bellido. Distributed piezoelectric modal sensors for circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2) :50–57, 2009.
- C. Eloy, N. Kofman, & L. Schouveiler. The origin of hysteresis in the flag instability. *Journal of Fluid Mechanics*, In press, 2012.
- C. Eloy, R. Lagrange, C. Souilliez, & L. Schouveiler. Aeroelastic instability of cantilevered flexible plates in uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 611 :97–106, 2008.
- C. Eloy, C. Souilliez, & L. Schouveiler. Flutter of a rectangular plate. *Journal of Fluids and Structures*, 23(6) :904–919, 2007.
- B. Erath & M. Plesniak. An investigation of asymmetric flow features in a scaled-up driven model of the human vocal folds. *Experiments in Fluids*, 49(1) :131–146, 2010.
- R. Fox & S. Kline. Flow regime data and design methods for curved subsonic diffusers. *Trans. of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 84 :303–312, 1962.
- C. R. Fuller, S. J. Elliott, & P. A. Nelson. *Active Control of Vibration*. 1996.
- F. Gallaire & J. M. Chomaz. The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown. *Physics of Fluids*, 16 :274–286, feb 2004.

BIBLIOGRAPHIE

- R. J. Gibert. *Vibrations des Structures*. 1988.
- R. W. Gregory & M. P. Paidoussis. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluids. I. Theory. *Proceedings of the Royal Society of London, A* 293 :512–527, 1966.
- C. Q. Guo & M. P. Paidoussis. Stability of Rectangular Plates With Free Side-Edges in Two-Dimensional Inviscid Channel Flow. *Journal of Applied Mechanics*, 67(1) :171–176, 2000.
- N.W. Hagood & A. von Flotow. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2) :243–268, 1991.
- B. Halphen & Q. S. Nguyen. Generalized Standard Materials. *Journal de Mécanique*, 14(1) :39–63, 1975.
- Y. J. He & Q. P. Sun. Frequency-dependent temperature evolution in NiTi shape memory alloy under cyclic loading. *Smart Materials & Structures*, 19(11), 2010.
- Y. J. He & Q. P. Sun. On non-monotonic rate dependence of stress hysteresis of superelastic shape memory alloy bars. *International Journal of Solids and Structures*, 48(11-12) :1688–1695, 2011.
- M. Heil & A. L. Hazel. Fluid-Structure Interaction in Internal Physiological Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43(1) :141–162, 2011.
- G. C. J. Hofmans, G. Groot, M. Ranucci, G. Graziani, & A. Hirschberg. Unsteady flow through in-vitro models of the glottis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(3) :1658–1675, 2003.
- J. Horáček, P. Šídlof, & J. G. Švec. Numerical simulation of self-oscillations of human vocal folds with Hertz model of impact forces. *Journal of Fluids and Structures*, 20(6) :853–869, 2005.
- L. Huang. Flutter of cantilevered plates in axial flow. *Journal of Fluids and Structures*, 9(2) :127–147, 1995.
- P. Huerre & PA Monkewitz. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 159(OCT) :151–168, 1985.
- P. Huerre & PA Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22 :473–537, 1990.
- N. Jalili. *Piezoelectric-Based Vibration Control*. 2010.
- P. S. Joarder, V. M. Nakariakov, & B. Roberts. A Manifestation of Negative Energy Waves in the Solar Atmosphere. *Solar Physics*, 176(2) :285–297, 1997. ISSN 0038-0938. 10.1023/A:1004977928351.
- G. Kergourlay & O. Doaré. Method and device for controlling the vibration modes of a vibrating support. Patent, 2012. UK publication number : GB1105681.9.
- O. N. Kirillov & F. Verhulst. Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella? *Z. Angew. Math. Mech.*, 90(6) :462–488, 2010.
- A. Kornecki, E. H. Dowell, & J. O'Brien. On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration*, 47(2) :163–178, 1976.
- Y. Kraftmakher. Further experiments with a loudspeaker. *European Journal of Physics*, 31(3) :579–589, 2010.
- Michael H. Krane & Timothy Wei. Theoretical assessment of unsteady aerodynamic effects in phonation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(3) :1578–1588, 2006.
- A. G. Kulikovskii & I. S. Shikina. On the bending oscillations of a long tube filled with moving fluid. *Izv. Akad. Nauk. ArmSSR, Mekhanika*, 41(1) :31–39, 1988.
- D. Kuo, Y. C. Shiah, & J. H. Huang. Modal Analysis of a Loudspeaker and Its Associated Acoustic Pressure Field. *Journal of Vibrations and Acoustics-Transactions of the ASME*, 133(3), 2011.
- W. Lacarbonara, D. Bernardini, & F. Vestroni. Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices. *International Journal of Solids and Structures*, 41(5-6) :1209–1234, 2004.
- M. Lallart & D. Guyomar. An optimized self-powered switching circuit for non-linear energy harvesting with low voltage output. *Smart Materials and Structures*, 17(3) :035030, 2008.
- M. T. Landahl. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(4) :609–632, 1962.

- M. Lax. The Effect of Radiation on the Vibrations of a Circular Diaphragm. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 16(1) :5–13, 1944.
- B. H. K. Lee, L. Gong, & Y. S. Wong. Analysis and computation of nonlinear dynamic response of a two degree of freedom system and its application in aeroelasticity. *Journal of Fluids and Structures*, 11(3) :225–246, 1997.
- C. K. Lee. Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors actuators .1. Governing equations and reciprocal relationships. *Journal Of The Acoustical Society Of America*, 87 :1144–1158, 1990.
- C. K. Lee & F. C. Moon. Laminated piezopolymer plates for torsion and bending sensors and actuators. *Journal Of The Acoustical Society Of America*, 85 :2432–2439, 1989.
- C. K. Lee & F. C. Moon. Modal Sensors/Actuators. *Journal of Applied Mechanics*, 57(2) :434–441, 1990.
- Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, & G. Kerschen. Triggering mechanisms of limit cycle oscillations due to aeroelastic instability. *Journal of Fluids and Structures*, 21(5-7) :485–529, 2005.
- E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard, L. Petit, & D. Guyomar. A comparison between several vibration-powered piezoelectric generators for standalone systems. *Sensors and Actuators A : Physical*, 126(2) :405–416, 2006.
- S. J. Leib & M. E. Goldstein. Convective and absolute instability of a viscous-liquid jet. *Physics of Fluids*, 29 (4) :952–954, APR 1986.
- C. Lemaitre, P. Hémon, & E. de Langre. Instability of a long ribbon hanging in axial air flow. *Journal of Fluids and Structures*, 20(7) :913–925, 2005.
- P. H. Leo & T. W. Shield. Transient heat transfer effects on the pseudoelastic behavior of shape-memory wires. *Acta metallurgica*, 41(8) :2477–2485, 1993.
- D.Z. Li & Z.C. Feng. Dynamic properties of pseudoelastic shape memory alloys. In *Structural dynamics : recent advances. International conference No6*, Southampton , UK, 1997.
- M.J. Lighthill. Note on the swimming of slender fish. *Journal of Fluid Mechanics*, 9(2) :305–317, 1960.
- I. Lottati & A. Kornecki. The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 2(109) :327–338, 1986.
- J. C. Lucero. Optimal glottal configuration for ease of phonation. *Journal of Voice*, 12(2) :151–158, 1998.
- A. D. Lucey & P. W. Carpenter. A numerical simulation of the interaction of a compliant wall and inviscid flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 234() :121–146, 1992.
- L. G. Machado, M. A. Savi, & P. M. C. L. Pacheco. Nonlinear dynamics and chaos in coupled shape memory oscillators. *International Journal of Solids and Structures*, 40(19) :5139–5156, 2003.
- A. Masuda & M. Noori. Optimization of hysteretic characteristics of damping devices based on pseudoelastic shape memory alloys. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 37(8) :1375–1386, 2002.
- M. Maurini, F. dell'Isola, & D. D. Vescovo. Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(5) :1243–1271, 2004.
- W. McKinney & J.D. DeLaurier. The wingmill : an oscillating-wing windmill. *Journal of Energy*, 5(2) :109–115, 1981.
- S. Michelin & O. Doaré. Energy harvesting efficiency of piezoelectric flags in axial flows. *Journal of Fluid Mechanics*, under revision, 2012.
- S. Michelin & S. G. Llewellyn Smith. Linear stability analysis of coupled parallel flexible plates in an axial flow. *Journal of Fluids and Structures*, 25(7) :1136–1157, 2009.
- J. Minguell. Active control of flat plates and application to loudspeakers. Master's thesis, ENSTA-Paristech, 2009.
- P. A. Monkewitz. The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds-numbers. *Physics of Fluids*, 31(5) :999–1006, 1988.
- C. Morin, Z. Moumni, & W. Zaki. A constitutive model for shape memory alloys accounting for thermomechanical coupling. *International Journal of Plasticity*, 27(5) :748–767, 2011.

BIBLIOGRAPHIE

- Z. Moumni & Q. S. NGuyen. A model of material with phase change and applications. *Journal de Physique IV, Volume C1-III*, pages 335–345, 1996.
- J. Neubauer, Z. Zhaoyan, M. Reza, & A. B. David. Coherent structures of the near field flow in a self-oscillating physical model of the vocal folds. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121(2) :1102–1118, 2007.
- M. V. Nezlin. Negative-energy waves and the anomalous Doppler effect. *Soviet Physics Uspekhi*, 19(11) :946, 1976.
- J. W. Nichols, J. M. Chomaz, & P. J. Schmid. Twisted absolute instability in lifted flames. *Physics of Fluids*, 21(1) :015110, 2009.
- H. Nouira, E. Foltête, L. Hirsinger, & S. Ballandras. Investigation of the effects of air on the dynamic behavior of a small cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 305(1-2) :243–260, 2007.
- M. Ould Moussa. *Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des structures en matériaux à mémoire de forme*. PhD thesis, École Polytechnique, 2011.
- M. Ould Moussa, Z. Moumni, O. Doaré, C. Touzé, & W. Zaki. Non-linear dynamic thermomechanical behaviour of Shape Memory Alloys. *Journal of Intelligent Material systems and structures*, 23(14) :1593–1611, 2012.
- O. E. Ozbulut & S. Hurlebaus. Optimal design of superelastic-friction base isolators for seismic protection of highway bridges against near-field earthquakes. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 40(3) :273–291, 2011.
- M. P. Païdoussis. Dynamics of tubular cantilevers conveying fluids. *Journal of Mechanical engineering Science*, 12(2) :85, 1970.
- M. P. Païdoussis. *Fluid-Structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow*, volume 2. Academic Press, 1998.
- M. P. Païdoussis, S. J. Price, & E. de Langre. *Fluid-Structure Interactions - Cross-Flow-Induced Instabilities*. 2011.
- N. Peake. On the behaviour of a fluid-loaded cylindrical shell with mean flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 338 :387–410, 1997.
- N. Peake. Nonlinear stability of a fluid-loaded elastic plate with mean flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 434 :101–118, 2001. ISSN 0022-1120.
- N. Peake. On the unsteady motion of a long fluid-loaded elastic plate with mean flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 507 :335–366, 2004.
- X. Pelorson, A. Hirschberg, R. R. van Hassel, A. P. J. Wijnands, & Y. Auregan. Theoretical and experimental study of quasisteady flow separation within the glottis during phonation. Application to a modified two ?mass model. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96(6) :3416–3431, 1994.
- Z. Peng & Q. Zhu. Energy harvesting through flow-induced oscillations of a foil. *Physics of Fluids*, 21(12) :123602, 2009.
- M. C. Piedboeuf, R. Gauvin, & M. Thomas. Damping behaviour of shape memory alloys : strain amplitude, frequency and temperature effects. *Journal of Sound and Vibration*, 214(5) :885–901, 1998.
- A. D. Pierce. *Acoustics : An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. 1989.
- W. Predki, M. Klönne, & A. Knopik. Cyclic torsional loading of pseudoelastic NiTi shape memory alloys : Damping and fatigue failure. *Materials Science and Engineering : A*, 417(1-2) :182–189, 2006.
- Lord Rayleigh. On the instability of jets. *Proc. London Mat. Soc.*, X :4–13, 1879.
- N. N. Rogacheva. *The Theory of Piezoelctric Shells and Plates*. 1994.
- M. N. Rosenbluth, B. Coppi, & R. N. Sudan. Nonlinear interactions of positive and negative energy modes in rarefied plasmas (II). *Annals of Physics*, 55(2) :248–270, 1969.
- W. Roth. Instabilität durchströmter Rohre. *Ingenieur-Archiv*, 33 :236–263, 1964.
- T. Rouchon. Effets d' un comportement pseudo-élastique sur les cycles limites aéroélastiques. Master's thesis, ENS-Cachan / ENSTA-ParisTech, 2012.

- M. Ruijgrok, A. Tondl, & F. Verhulst. Resonance in a rigid rotor with elastic support. *Z. Angew. Math. Mech.*, 73 :255–263, 1993.
- S. Saadat, J. Salichs, M. Noori, Z. Hou, H. Davoodi, I. Bar-On, Y. Suzuki, & A. Masuda. An overview of vibration and seismic applications of NiTi shape memory alloy. *Smart Materials & Structures*, 11(2) : 218–229, 2002.
- C. Sambuc. Active control of a circular flat plate used as electro-dynamical loudspeaker. Internship report, M2 ATIAM, 2010.
- A. Sbarra. Dynamic behavior of shape-memory alloys : Experimental analysis of a pseudo-elastic torsional pendulum. Master’s thesis, ENSTA-ParisTech, 2010.
- R. C. Scherer, D. Shinwari, K. J. de Witt, C. Zhang, B. R. Kucinschi, & A. A. Afjeh. Intraglottal pressure profiles for a symmetric and oblique glottis with a divergence angle of 10 degrees. *Journal of the Acoustical Society of America*, 109 :1616–1630, apr 2001.
- D. Sciamarella & P. le Quéré. Solving for unsteady airflow in a glottal model with immersed moving boundaries. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 27(1) :42–53, 2008.
- S. Seelecke. Modeling the dynamic behavior of shape memory alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37(8) :1363–1374, 2002.
- J. A. Shaw & S. Kyriakides. Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(8) :1243–1281, 1995.
- L. K. Shayo. The stability of cantilever panels in uniform incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration*, 68(3) :341–350, 1980.
- M. Shelley, N. Vandenberghe, & J. Zhang. Heavy Flags Undergo Spontaneous Oscillations in Flowing Water. *Phys. Rev. Lett.*, 94(9) :094302, Mar 2005.
- P. Sidlof. *Fluid-Structure interaction in human vocal folds*. PhD thesis, Charles University, 2007.
- P. Šidlof, O. Doaré, O. Cadot, & A. Chaigne. Measurement of flow separation in a human vocal folds model. *Experiments in Fluids*, pages 1–14, 2011.
- P. Sidlof, E. Lunéville, C. Chambeiron, O. Doaré, A. Chaigne, & J. Horacek. Finite Element Modeling of Airflow During Phonation. *Applied and Computational Mechanics*, 4 :121–132, 2010.
- K. Singh, S. Michelin, & E. de Langre. Energy harvesting from fluid-elastic instabilities of a cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, in press, 2012.
- E. Sitnikova, E. Pavlovskaia, & M. Wiercigroch. Dynamics of an impact oscillator with SMA constraint. *The European Physical Journal - Special Topics*, 165(1) :229–238, 2008.
- R. H. Small. Closed-Box Loudspeaker Systems-Part 1 : Analysis. *Journal Of The Audio Engineering Society*, 20(10) :798–808, 1972.
- R. H. Small. Closed-Box Loudspeaker Systems-Part 2 : Synthesis. *Journal Of The Audio Engineering Society*, 21(1) :11–18, 1973.
- Peter S. Stewart, Sarah L. Waters, & Oliver E. Jensen. Local and global instabilities of flow in a flexible-walled channel. *European Journal of Mechanics B-Fluids*, 28(4) :541–557, 2009.
- B. H. Story & I. R. Titze. Voice simulation with a body cover model of the vocal folds. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97(2) :1249–1260, 1995.
- Y. Sugiyama & M. A. Langthjem. Physical mechanism of the destabilizing effect of damping in continuous non-conservative dissipative systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(1) :132–145, 2007. Nonlinear Dynamic Stability of Nonconservative Dissipative Systems.
- Q. P. Sun & K. C. Hwang. Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys—I. Derivation of general relations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(1) : 1–17, 1993.
- S. Taneda. Waving motions of flags. *Journal of the Physical Society of Japan*, 24(2) :392–401, 1968.

BIBLIOGRAPHIE

- L. Tang & M. P. Païdoussis. The coupled dynamics of two cantilevered flexible plates in axial flow. *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5) :790–801, 2009.
- L. Tang, M.P. Païdoussis, & J. Jiang. Cantilevered flexible plates in axial flow : Energy transfer and the concept of flutter-mill. *Journal of Sound and Vibration*, 326 :263–276, 2009.
- G. Taylor. Analysis of the Swimming of Long and Narrow Animals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 214(1117) :158–183, 1952.
- G.W. Taylor, J.R. Burns, Kammann S.M., Powers W.B., & T.R. Welsh. The Energy Harvesting Eel : A Small Subsurface Ocean/River Power Generator. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 26(4) :539–547, 2001.
- T. Theodorsen. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. *NACA Report*, 496, 1935.
- N. Thiele. Loudspeakers In Vented Boxes : Part 1. *Journal Of The Audio Engineering Society*, 19 :181–191, 1971a.
- N. Thiele. Loudspeakers in Vented Boxes : Part 2. *Journal Of The Audio Engineering Society*, 19(6) :471–483, 1971b.
- S. L. Thomson, L. Mongeau, & S. H. Frankel. Aerodynamic transfer of energy to the vocal folds. *Acoustical Society of America Journal*, 118 :1689–1700, sep 2005.
- C. Touzé & O. Thomas. Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : Effect of the geometry. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(5) :678–692, 2006.
- H. S. Tzou, H. J. Lee, & S. M. Arnold. Smart Materials, Precision Sensors/Actuators, Smart Structures, and Structronic Systems. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11(4-5) :367–393, 2004.
- A.F. Vakakis, O.V. Gendelman, L.A. Bergman, D.M. McFarland, G. Kerschen, & Y.S. Lee. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Springer, 2008.
- A. Van Hirtum, X. Pelorson, & P. Lagrée. In vitro validation of some flow assumptions for the prediction of the pressure distribution during obstructive sleep apnoea. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 43(1) :162–171, 2005.
- F. Verhulst. *Perturbation Analysis of Parametric Resonance*. Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Berlin, Heidelberg, New York, 2009.
- Y. Watanabe, K. Isogai, S. Suzuki, & M. Sugihara. A theoretical study of paper flutter. *Journal of Fluids and Structures*, 16(4) :543–560, 2002a.
- Y. Watanabe, S. Suzuki, M. Sugihara, & Y. Sueoka. An experimental study of paper flutter. *Journal of Fluids and Structures*, 16(4) :529–542, 2002b.
- A. Westwood. Ocean power : Wave and tidal energy review. *Refocus*, 5(5) :50–55, 2004.
- H. Whitney. The general type of singularity of a set of $2n - 1$ smooth functions of n variables. *Duke Math. J.*, 10 :161–172, 1943.
- C. H. K. Williamson & R. Govardhan. Vortex-Induced Vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36 : 413–455, 2004.
- O. Wippler & U. Ehrenstein. Numerical simulation of linear and nonlinear disturbance evolution in a boundary layer with compliant walls. *Journal of Fluids and Structures*, 14(2) :157–182, 2000.
- O. Wippler & U. Ehrenstein. On the absolute instability in a boundary-layer flow with compliant coatings. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 20(1) :127–144, 2001.
- Y. Yadykin, V. Tenetov, & D. Levin. The flow-induced vibration of a flexible strip hanging vertically in a parallel flow, part 1 : temporal aeroelastic instability. *Journal of Fluids and Structures*, 15(8) :1167–1185, 2001.
- W. Zaki. *Comportement thermo-mécanique des matériaux à mémoire de forme*. PhD thesis, École Polytechnique, 2006.
- W. Zaki & Z. Moumni. A three-dimensional model of the thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :2455–2490, 2007.

- M. Zanartu, L. Mongeau, & G. R. Wodicka. Influence of acoustic loading on an effective single mass model of the vocal folds. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 121(2) :1119–1129, 2007.
- J. Zhang, S. Childress, A. Libchaber, & M. Shelley. Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind. *Nature*, 408 :835–839, 2000.
- X. Zhang, P. Feng, Y. J. He, T. Yu, & Q. P. Sun. Experimental study on rate dependence of macroscopic domain and stress hysteresis in NiTi shape memory alloy strips. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (12) :1660–1670, 2010.
- Z. Zhang. Influence of flow separation location on phonation onset. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(3) :1689–1694, 2008.
- Z. Zhang, J. Neubauer, & D. A. Berry. Physical mechanisms of phonation onset : A linear stability analysis of an aeroelastic continuum model of phonation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(4) :2279–2295, 2007.
- Q. Zhu & Z. Peng. Mode coupling and flow energy harvesting by a flapping foil. *Physics of Fluids*, 21(3) :033601, 2009.
- H. Ziegler. Die stabilitätskriterien der elastomechanik. *Ing.-Arch*, 20 :49–56, 1952.
- H. Ziegler. Linear elastic stability : A critical analysis of methods. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 4(2) :89–121, 1953.

Annexes

A. Curriculum vitae

Enseignant-Chercheur à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA-Paristech
Chargé d'enseignement au Département de Mécanique de l'École Polytechnique

Adresse :	ENSTA - Paristech	Tél. :	(33)(0) 1 69 31 97 39
	Unité de Mécanique	Fax :	(33)(0) 1 69 31 99 97
	828, Boulevard des Maréchaux	Email :	olivier.doare@ensta.fr
	91762, Palaiseau Cedex	Homepage :	http://www.ensta.fr/~doare

Titres universitaires

2001 : Docteur de l'École Polytechnique, spécialité Mécanique. Titre : "Instabilités locales et globales en interaction fluide-structure" - Directeur de Thèse : Emmanuel de Langre, LadHyX, École Polytechnique

1998 : D.E.A. Dynamique des Fluides et des Transferts, Université Paris XI

1997 : Maîtrise de Mécanique, Université Paris XI

1996 : Licence de Mécanique, Université Paris XI

1995 : DEUG Sciences de la Matière, Université Paris XI

Parcours

2010- : Chargé d'enseignement au Département de Mécanique de l'École Polytechnique

2003- : Enseignant-Chercheur à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA-Paristech

2002-2003 : ATER à l'Université Paris XI avec une recherche au laboratoire FAST

2001-2002 : Post-Doc INRA/École Polytechnique

Prix

- Prix de thèse de l'École Polytechnique (2001)

A. Curriculum vitae

Activités d'enseignement

- À l'ENSTA (60 à 80h par an) :
 - . Cours "Dynamique des Systèmes Mécaniques, Ondes et Vibrations" (Cours et TD, deuxième année, depuis 2006)
 - . Cours "Interaction Fluide-Structure" (Cours et TD, deuxième année, depuis 2008)
 - . Travaux dirigés du cours "Élasticité linéaire" (2003-2009)
 - . Travaux dirigés du cours "Plasticité" (2003-2006)
 - . Travaux pratiques et projets expérimentaux
- À l'École Polytechnique (60 à 80h par an) :
 - . Projets expérimentaux de l'enseignement "Potentiel hydraulique, éolien et solaire"
 - . Projets expérimentaux de l'enseignement "aérodynamique"
- À l'Université Paris XI (21h par an) :
 - . Cours "Interaction fluide-structure" (M2)
- École d'été :
 - . Intervention à l'École d'Été "Renewable Marine Energies", Brest, 16-20 juillet 2012. Titre de l'intervention :
- Notes de cours :
 - . 2006 : Doaré, O. et Touzé, C., Dynamique des systèmes mécaniques : Ondes et vibrations, Polycopié de cours de 2^{eme} année, ENSTA-Paristech
 - . 2009 : Doaré, O., Interaction fluide-structure, Polycopié de cours de 2^{eme} année, ENSTA-Paristech
 - . 2010 : Doaré, O., Interaction fluide-structure, Polycopié de cours de M2, Université Paris XI

Activités liées à la gestion de l'enseignement

- Co-responsable de la filière d'enseignement de troisième année de l'ENSTA-Paristech "Offshore engineering"
- Responsable du module de 3^{eme} année "Interaction fluide-structure" à l'ENSTA-Paristech
- Responsable du stage de formation professionnelle "Interaction Fluide-structure - Application au domaine électronucléaire" de l'EUROSAE
- Participation à l'organisation de l'École d'Été "Renewable Marine Energies", Brest, 16-20 juillet 2012.

Activités liées à la recherche

Participation à des comités, Editorial boards, organisation de colloques, séminaires...

- Membre du comité d'organisation du congrès international "Flow-Induced Vibration" à l'École Polytechnique, Palaiseau, France, Juillet 2004.
- Membre du comité d'organisation du colloque international "Fluids and Elasticity" à Carry-le-Rouet, France, Juin 2009.
- Entre 1999 et 2001 au LadHyX et depuis 2003 à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA : Organisation des séminaires du laboratoire.

- Expertise d'articles pour *Journal of Fluid Mechanics*, *Journal of Fluids and Structures*, *Journal of Sound and Vibration*, *Physical Review Letters*, *Comptes Rendus à l'Accadémie des Sciences* : 5 à 6 articles par an.
- Membre du conseil de la recherche d'Unité de Mécanique de l'ENSTA (2006-2010)
- Membre du GDR Interactions Fluides-Structures
- Membre de jury de thèse : thèse de Catherine Marais, PMMH, soutenue le 14 Janvier 2011. Directeurs de thèse : J.E. Wesfreid et R. Godoy-Diana.

Animation de la recherche

- 2006-2009 : Participant à l'ANR jeunes chercheurs “DRAPEAU” (60%). Coordinateur du projet : C. Eloy, IRPHE.
- 2012-2013 : Coordinateur du projet “Piezoflag”, financé par le Labex LASIPS.

Transfert technologique et relations industrielles

- Brevet : G. Kergourlay & O. Doaré, Method and device for controlling the vibration modes of a vibrating support, 2012. UK publication number : GB1105681.9.
- 2009 : Contrat de recherche avec la société CANON, *Contrôle actif des vibrations d'un haut-parleur plan*, 12k€.
- 2010 : Contrat de recherche avec la société CANON, *Contrôle actif des vibrations d'un haut-parleur plan*, 12k€.

Encadrement

Thèses

- Thèse de Petr Sidlof (PhD, Charles University, Prague), co-encadrement à 30%, *Fluid-Structure interaction in human vocal folds*, soutenue le 4 Septembre 2007.
- Thèse de Mohamed Ould Moussa (PhD EDX), co-encadrement à 30%, *Comportement dynamique des alvéages à mémoire de forme*, soutenance prévue en Janvier 2012.
- Thèse de Lise Divaret (CIFRE EDF-ENSTA), co-encadrement à 30%, thèse débutée en Mars 2011, *Amortissement de structures en grand déplacement induit par un écoulement axial*.
- Thèse de Yifan Xia (PhD EDX), co-encadrement à 50%, thèse débutée en Septembre 2012, *Récupération de l'énergie de flottement d'une plaque piézoélectrique dans un écoulement axial*.

Post-doc

- Post-doctorat de Miguel Pinueira, Sept 2012 à Sept 2013, *Modèle d'impédance non-linéaire d'un drapeau piézoélectrique*

A. Curriculum vitae

Stages de niveau M2

- Stage M2 de Isma Sada N'Diaye (M2 DFT, Univ. Paris XI, 2006), *Instabilités de flottement et de flambage d'un long cylindre souple dans un écoulement axial*
- Stage de niveau M2 de Joel Minguell (ENSTA, 2009), *Active control of vibrations of flat plates used as loudspeakers.*
- Stage de niveau M2 de Alessandro Sbarra (Univ. Roma, 2010), *Dynamic behavior of shape-memory alloys : Experimental analysis of a pseudo-elastic torsional pendulum*
- Stage M2 de Clément Sambuc (M2 ATIAM, Univ. Paris VI, 2010), *Active control of a circular flat plate used as electro-dynamical loudspeaker.*
- Stage M2 de Thibaut Rouchon (M2, ENS-Cachan, 2012), *Effet d'un comportement pseudoélastique sur les instabilités de flottement*

Autres stages

- Adelphe Biley Ekponon (2e année, ENSTA, 2004), *Utilisation de la méthode de Galerkin pour le calcul des modes propres d'une structure élancée dans un écoulement axial*
- Thijs Paes (M1, TU Eindhoven, 2005), *Feedback control of an unstable plate under an axial flow*
- Irina Hirova (2e année, ENSTA, 2006), *Influence de la dissipation sur l'instabilité de flottement d'un tuyau d'arrosage*
- Joakim Erlandsson (2e année ENSTA & KTH University, 2009), *Feedback control of a plate in axial flow*
- Alexandre Hercova (L3 Mécanique, Univ. Paris XI, 2009), *Rôle du confinement dans l'instabilité du drapeau*
- Pierre le Moual (L3 Mécanique, Univ. Paris XI, 2009), *Simulation numérique des vibrations d'une corde de tempura par différences finies*
- Estelle Deguillard (L3 Mécanique, Univ. Paris XI, 2009), *Simulation numérique des vibrations d'une corde de tempura par guides d'ondes*
- Martin Sauzade (2e année, ENSTA, 2009), *Étude numérique de l'effet de confinement dans l'instabilité du drapeau*
- David Mano (2e année, ENSTA, 2010) *Étude expérimentale de l'effet de confinement dans l'instabilité du drapeau*
- David Raus (L3 Physique et applications, Univ. PXI, 2011), *Étude expérimentale de l'amortissement lié au rayonnement*
- Shanshan Geng (2e année, ENSTA, 2011), *Récupération de l'énergie de structures piézoélectriques dans un écoulement axial*
- Francesc Bonoch-Freginals (2e année, ENSTA, 2011), *Experimental torsion tests of Nitinol wires*
- Juan Carlos Bilbao Ludena (Bsc, TU Berlin), *Flag Flutter : Instability Analysis and Energy Harvesting*
- Jiawan Chen (2e année, ENSTA, 2012), *Récupération d'énergie d'une plaque piézoélectrique dans un écoulement : Effets de longueur finie des capteurs piézoélectriques et optimisation*
- Guoqing Zhang (2e année, ENSTA, 2012), *Instabilité de flottement d'une plaque confinée dans un canal rectangulaire*

Publications

Articles dans des revues internationales avec comité de lecture

1. Michelin, S., **Doaré, O.**, Energy harvesting efficiency of piezoelectric plates in axial flows, accepté à *Journal of Fluid Mechanics*, 2012.
2. Ould Moussa, M., Moumni, Z., **Doaré, O.**, Touzé, C., Zaki, W., Non-linear dynamic thermomechanical behaviour of Shape Memory Alloys. *Journal of Intelligent Material systems and structures*, 23(14), 2012, 1593–1611.
3. **Doaré, O.**, Sbarra, A., Touzé, C., Ould Moussa, M. and Moumni, Z., Experimental analysis of the quasi-static and dynamic behavior of Shape Memory Alloys, *International Journal of Solids and Structures*,

39(1), 2012, 32-42.

4. **Doaré, O.**, Mano, D. and Bilbao Ludena, J.C., Effect of spanwise confinement on flag flutter : Experimental measurements, *Physics of Fluids*, 23, 2011, 111704.
5. **Doaré, O.**, Michelin, S., Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency, *Journal of Fluids and Structures*, 27(8), 2011, 1357-1375.
6. Divaret, L., Moussou, P., Cadot, O., Berland, J., **Doaré, O.**, U-RANS simulation of fluid forces exerted upon an oscillating tube array in axial flow at large Keulegan-Carpenter numbers, *Ergofitac Bulletin*, 86, 2011.
7. Šidlof, P., **Doaré, O.**, Cadot, O., Chaigne, A., Measurement of flow separation in a human vocal folds model, *Experiments in Fluids*, 51(1), 2011, 123-136.
8. **Doaré, O.**, Sauzade, M., Eloy, C., Flutter of an elastic plate in a channel flow : finite-size and blockage effects, *Journal of Fluids and Structures*, 2011, 27(1), 76-88.
9. Eloy, C., **Doaré, O.**, Duchemin, L. and Schouveiler, L., A Unified Introduction to Fluid Mechanics of Flying and Swimming at High Reynolds Number, *Experimental Mechanics*, 50(9), 2011, 1361-1366.
10. Šidlof, P., Lunéville, E., Chambeiron, C., **Doaré, O.**, Chaigne, A., Horáček, J., Finite Element Modeling of Airflow During Phonation, *Applied and Computational Mechanics*, 4, 121-132 , 2010.
11. **Doaré, O.**, Dissipation effect on local and global stability of fluid-conveying pipes, *Journal of Sound and Vibration*, 329(1), 2010, 72-83.
12. de Langre, E., Païdoussis, M.P., **Doaré, O.**, and Modarres-sadeghi, Y., Flutter of long flexible cylinders in axial flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 571, 2007, 371-389.
13. **Doaré, O.** and de Langre, E., Role of boundary conditions in the instability of one-dimensionnal systems, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 25(6), 2006, 948-959.
14. Moisy, F., **Doaré, O.**, Passuto, T., Daube, O. and Rabaud, M., Experimental and numerical study of the shear layer instability between two counter-rotating disks, *Journal of Fluid Mechanics*, 507, 2004, 175-202.
15. **Doaré, O.**, Mouila, B. and de Langre, E., Effect of plant interaction on wind-induced crop motion, *Transactions of the ASME : Journal of Biomechanical Engineering*, 126, 2004, 146-151.
16. **Doaré, O.** and de Langre, E., Flow induced instability of long hanging pipes, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21, 2002, 857-867.
17. **Doaré, O.** and de Langre, E., Local and global instability of fluid conveying pipes on elastic foundations, *Journal of Fluids and Structures*, 16(1), 2002, 1-14.
18. de Langre, E., **Doaré, O.** and Pellet, F., Follower force on a semi-infinite beam loaded by its own weight : Model and experiments, *Comptes rendus à l'Académie des Sciences Paris*, t. 329, Série Iib, p175-178, 2001.

Brevets

19. Kergourlay, G., **Doaré, O.**, Method and device for controlling the vibration modes of a vibrating support, n° de publication UK : GB1105681.9, date de dépôt : 04/04/2011.

Articles dans des conférences internationales avec comité de lecture

21. **Doaré, O.**, Eloy, C., The influence of channel walls on flag flutter, in *Flow-Induced Vibration*, 2012, Dublin.
22. Divaret, L., Cadot, O., **Doaré, O.**, Moussou, P., Berland, J., Normal forces exerted upon a long oscillating cylinder in an axial flow, in *Flow-Induced Vibration*, 2012, Dublin.
23. Michelin, S., **Doaré, O.**, Flow energy harvesting from piezoelectric flags, in *Flow-Induced Vibration*, 2012, Dublin.
24. **Doaré, O.**, Michelin, S., Piezoelectric energy harvesting from flag flutter instability, ENOC-2011, European Non-linear Dynamics conference, Roma, Italia, July 2011.

A. Curriculum vitae

25. Sbarra, A., **Doaré, O.**, Ould Moussa, M., Touzé, C., Moumni, Z. : Dynamical behaviour of a shape memory alloy torsional pendulum, ENOC-2011, European Non-linear Dynamics conference, Roma, Italia, July 2011.
26. Ould Moussa, M., Moumni, Z., **Doaré, O.**, Touzé, C., Zaki, W. : Nonlinear oscillations and chaotic response of Shape Memory Alloys, 4th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Agios Nikolaos, Crete, Greece, June 2011.
27. Šidlof, P., **Doaré, O.**, Cadot, O., Chaigne, A. and Horáček, J., Mathematical and physical model of flow-induced vibration of human vocal folds, in *Flow-induced Vibration* (Eds. Zolotarev & Horáček), July 2008, 141-146.
28. **Doaré, O.**, Effect of dissipation on local and global stability of fluid-conveying pipes, in *Flow-induced Vibration* (Eds. Zolotarev & Horáček), July 2008, 339-344.
29. de Langre, E., Païdoussis, M.P., Modarres-Sadeghi, Y., **Doaré, O.**, Flutter of long flexible cylinders in axial flow, , in *Proceedings of the 6th FSI, AE & FIV+N Symposium*, Vancouver, July 2006.
30. **Doaré, O.**, Paes, T.M. and Ferré, M., Feedback control of a cantilevered plate in an axial flow, in *Proceedings of the 6th FSI, AE & FIV+N Symposium*, Vancouver, July 2006.
31. Py, C., de Langre, E., Hémon, P., Moulia, B. and **Doaré, O.**, A new experimental technique for the measurement of the wind-induced motion of a crop canopy, in *Flow-induced Vibration* (Eds. de Langre & Axisa), July 2004.
32. **Doaré, O.** and de Langre, E., Role of boundary conditions in the flow-induced instability of unidimensional systems, in *Flow-induced Vibration* (Eds. de Langre & Axisa), July 2004.
33. **Doaré, O.** and de Langre, E., Effect of length on the instability of hanging pipes, in *Proceedings of the 5thFSI, AE & FIV+N Symposium*, New Orleans, 2002.
34. **Doaré, O.** and de Langre, E., Local and global instability of fluid-conveying cantilever pipes, in *Flow-induced Vibration* (Eds. Ziada & Staubli), July 2000.

Articles dans des conférences nationales avec comité de lecture

35. Ould Moussa, M., **Doaré, O.**, Touzé, C., Sbarra, A., Moumni, Z. : Dynamique non linéaire d'un oscillateur à mémoire de forme, XXe congrès français de mécanique, Besançon, Aout 2011.
36. **Doaré, O.**, Moisy, F. and Daube, O., Instabilités spirales entre disques tournants, XVIe congrès français de mécanique, Nice, 2003.
37. **Doaré, O.**, Moulia, B. and de Langre, E., Prediction de l'effet du vent sur les cultures : vibration et contact, XVIe congrès français de mécanique, Nice, 2003.
38. **Doaré, O.** and de Langre, E., Instabilités locales et globales en interaction fluide-structure, XVe congrès français de mécanique, Nancy, 2001.

Posters, communications orales dans des conférences nat & int.

39. **Doaré, O.**, Eloy, C., Sauzade, M., Mano, D., The effect of spanwise confinement on the flutter instability of an elastic plate, 8th Euromech Fluid Mechanics Conference, Bad Reichenhall, Germany, 2010.
40. **Doaré, O.**, Effect of dissipation on local and global stability of a fluid-conveying pipe, Fluid & Elasticity 2009, Carry-le-Rouet, France.
41. Šidlof, P., **Doaré, O.** and Chaigne, A., Flow separation in flow-induced vibration of human vocal folds, Fluid & Elasticity 2009, Carry-le-Rouet, France.
42. Šidlof, P., Chaigne, A., **Doaré, O.** and Cadot, O., Simulation of Acoustic Pressure and Flow Velocity in Human Glottis, Acoustics 08, Paris
43. Šidlof, P., **Doaré, O.**, Cadot, O., Chaigne, A., Horáček, J. : Finite element modeling of airflow in vibrating vocal folds, International Conference on Voice Physiology and Biomechanics - ICVPB 2008, Tampere, Finland, pp. 199-201

44. Šidllof, P., **Doaré, O.**, Cadot, O., Chaigne, A. and Horáček, J., PIV measurements of velocity fields in glottis on a physical vocal fold model. MAVEBA 2007 , 177-180. 2007. 12-12-2007.
45. **Doaré, O.** and de Langre, E., The role of boundary conditions in the instability of one dimensional fluid-structure interaction systems. In Euromech Colloquium 484, Delft, 2006.
46. de Langre, E., Païdoussis, M.P. and **Doaré, O.**, Flutter of cylinders in axial flow, CANCAM 2005.
47. Daube, O., le Quéré, P., **Doaré, O.** and Moisy, F., Stability of the 3D-flow between counter-rotating disks : A Numerical and Experimental investigation, Euromech 2003, Toulouse, 2003.
48. **Doaré, O.**, Py C., Moulia B. and de Langre E., Measuring dynamic mechanical properties of oscillating plant stems using video and image analysis, 4th Plant Biomechanics Conference, East Lansing, USA, paper 22, 20-25, july 2003.
49. **Doaré, O.**, Py C., Moulia B. and de Langre E., Modelling plant motion within a plant canopy using a continuous wave propagation model : a case study in alfalfa, 4th Plant Biomechanics Conference, East Lansing, USA, paper 21, 20-25, july 2003
50. **Doaré, O.** and de Langre, E., Local and global instability in fluid-structure interaction, APS Meeting, San Diego, 2001.
51. de Langre, E. and **Doaré, O.**, Flow-induced bending instabilities of long fluid-conveying risers, Euromech 398 Colloquium “ Fluid Structure Interaction in Offshore Engineering ”, Hamburg, 1999.

Rapports de recherche, papiers soumis etc.

Thèse

52. **Doaré, O.**, *Instabilités locales et globales en interaction fluide-structure*, soutenue le 29 Novembre 2001.

Rapport de recherche

53. **Doaré, O.**, *Reduced dynamical problem of a flat loudspeaker with a voice coil and piezoelectric patches*, 2010, Rapport de recherche pour la société CANON.

Articles de vulgarisation

54. **Doaré, O.**, Le son de la guitare, Découvertes, Revue du Palais de la Découverte, no 340, Juillet-août-septembre 2006.

Articles soumis

55. **Doaré, O.**, Kergourlay, G., Sambuc, C., Design and optimization of a circular clamped plate excited by a voice coil and piezoelectric patches used as a loudspeaker, soumis à *Journal of Vibration and Acoustics*.

Articles en préparation

57. **Doaré, O.**, *Spectral Analysis, Stability and Bifurcations in Modern Nonlinear Physical Systems*, chapter Influence of dissipation on local and global instabilities. Wiley, 2012. En préparation.

B. Sélection d'articles

- Doaré, Sauzade, & Eloy (2011b), Flutter of an elastic plate in a channel flow : Confinement and finite-size effects. *Journal of Fluids and Structures*, 27(1) :76–88.
- Doaré (2010), Dissipation effect on local and global stability of fluid-conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 329(1) :72–83.
- Šidlof, Doaré, Cadot, & Chaigne (2011), Measurement of flow separation in a human vocal folds model, Experiments in Fluids, 51(1), 123-136.
- Doaré & Michelin (2011), Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency. *Journal of Fluids and Structures*, 27(8) :1357–1375.
- Doaré, Sbarra, Touzé, Ould Moussa, & Moumni (2012), Experimental analysis of the quasi-static and dynamic torsional behaviour of shape memory alloys. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1) :32–42.



Flutter of an elastic plate in a channel flow: Confinement and finite-size effects

O. Doaré ^{a,*}, M. Sauzade ^a, C. Eloy ^b

^a ENSTA ParisTech, Unité de Mécanique, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau, France

^b IRPHE, CNRS & Aix-Marseille Université, 49 rue Joliot-Curie, 13013 Marseille, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 19 April 2010

Received in revised form

24 September 2010

Accepted 30 September 2010

Available online 20 November 2010

Keywords:

Flow-induced vibration

Cantilevered plate

Flutter instability

Channel flow

ABSTRACT

When a cantilevered plate lies in an axial flow, it is known to exhibit self-sustained oscillations once a critical flow velocity is reached. This flutter instability has been investigated theoretically, numerically and experimentally by different authors, showing that the critical velocity is always underestimated by two-dimensional models. However, it is generally admitted that, if the plate is confined in the spanwise direction by walls, three-dimensionality of the flow is reduced and the two-dimensional models can apply. The aim of this article is to quantify this phenomenon by analysing the effect of the clearance between the plate and the side walls on the flutter instability. To do so, the pressure distribution around an infinite-length plate is first solved in the Fourier space, which allows to develop an analytical model for the pressure jump. This model is then used in real space to compute instability thresholds as a function of the channel clearance, the plate aspect ratio and mass ratio. Our main result shows that, as the value of the clearance is reduced, the convergence towards the two-dimensional limit is so slow that this limit is unattainable experimentally.

© 2010 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Cantilevered plates in axial flow are known to exhibit self-sustained oscillations once a critical flow velocity is reached. This phenomenon has been the main focus of a large amount of studies, motivated by applications in biomechanics (Aurégan and Depollier, 1995; Huang, 1995), paper industry (Watanabe et al., 2002b), aerospace and nuclear engineering (Guo and Païdoussis, 2000) or aeronautics (Kornecki et al., 1976). Plates are usually differentiated from flags through the restoring force that maintains the structure in the flat equilibrium position. The restoring force is due to elastic bending rigidity for plates, while it is a tensile force induced by fluid friction and flag weight in the flag case.

A plate of infinite span and infinite length in a potential flow has been proven to be unstable at any non-zero flow velocity (Rayleigh, 1879). It was found since then that taking into account the finite size of the plate (its span and/or chord) tends to stabilize it, so that the critical velocity for flutter instability is no longer zero but has a finite value.

Many studies have considered finite-length and infinite-span plates, which involved a two-dimensional homogeneous flow around the structure, modelled as an Euler–Bernoulli beam. Here, since the flow is considered to be two-dimensional, independent of the spanwise coordinate, this approach is referred to as two-dimensional. In the literature, one can distinguish two methods when solving this problem. The first one, used by Kornecki et al. (1976), introduces circulation around the plate and wake vortices so that the Kutta condition is satisfied at the trailing edge, as done by Theodorsen (1935) in

* Corresponding author.

E-mail address: olivier.doare@ensta.fr (O. Doaré).

the context of airfoil flutter. Huang (1995) and Watanabe et al. (2002a) used the same modelling and provided complementary results on the linear stability of the plate. The second approach was introduced by Guo and Païdoussis (2000) and consists in imposing continuity of the pressure everywhere except across the plate. The pressure distribution is then solved in the Fourier space, assuming that no singularity exists at both leading and trailing edges of the plate. However, this model implies an incoming “wake” regularizing the flow at the leading edge, which does not happen in real situations. Yet, the two models give very similar results provided the plate is long and flexible enough (Eloy et al., 2008; Michelin and Llewellyn Smith, 2009).

Another asymptotic case can be considered when the plate span is small compared to its chord. This so-called slender-body approach was first introduced by Lighthill (1960) in his seminal paper on fish locomotion and recently applied by Lemaître et al. (2005) to address the flow-induced instability of slender plates tensioned by gravity.

The flutter of cantilevered plates has been investigated experimentally by Taneda (1968), Datta and Gottenberg (1975), Kornecki et al. (1976), Yamaguchi et al. (2000), Watanabe et al. (2002b) and Eloy et al. (2008). They showed that the deflection of the plate during the self-sustained oscillations is independent of the spanwise coordinate, validating the use of an Euler–Bernoulli beam model for the plate deflection. However, the experimental values of the critical velocity were always found to be higher than predicted by the theoretical two-dimensional models. In the case of plates of small aspect ratio, the experiments and slender-body theory have been compared by Lemaître et al. (2005). The experimental critical velocity has also been found to be higher than the theoretical one. In other words, plates in the experiments appear invariably more stable than predicted.

Numerical simulations have been carried out to address the instability threshold in the two-dimensional case. In these simulations the plate is modelled with an Euler–Bernoulli beam equation and the fluid is described either by the Navier–Stokes equations (Balint and Lucey, 2005) or using vortex methods (Watanabe et al., 2002a; Tang and Païdoussis, 2007; Michelin et al., 2008; Alben and Shelley, 2008; Howell et al., 2009). All these simulations recovered the instability threshold of the two-dimensional theoretical models. Additionally, these numerical studies provided a better insight into the instability mechanism and the energy exchange between the fluid and the flexible structure.

The discrepancy between theoretical and experimental values for the critical velocity motivated the development of a three-dimensional model for the fluid flow around the plate (Eloy et al., 2007, 2008). Here, the plate was still modelled by an Euler–Bernoulli beam equation, while the three-dimensional flow around the plate was modelled using the same assumptions as in Guo and Païdoussis (2000). This model was found to improve the prediction of critical velocities as well as providing a unified theory that fills the gap between two-dimensional models and slender-body models.

Most of the works cited above have considered the flutter of a flexible plate in an unbounded flow. Motivated by the study of snoring, some authors however examined the effect of confinement. The two-dimensional problem of a plate of infinite span in a channel flow has been modelled by Aurégan and Depollier (1995) and Guo and Païdoussis (2000) and the channel flow confinement was found to have a destabilizing effect. The limit of extremely low values of the channel width leads to the so-called leakage flow instability problem (Wu and Kaneko, 2005). Comparatively, the channel flow confinement in the spanwise direction was overlooked. In his experiments, Huang (1995) mentions a plate that spans over the entire 6 cm width of the channel with a small clearance of 2 mm on each side, in order to reduce the three-dimensionality of the flow. Aurégan and Depollier (1995) noticed a discrepancy between their two-dimensional theory and experiments, that they attributed to the clearance on the transverse sides of the plate. To overcome this difference, they introduced in their model an effective span 90% smaller than the real span. It is commonly admitted that confining the flow in the spanwise direction limits the three-dimensional effects. However, to the authors' knowledge, except for the empirical correction proposed by Aurégan and Depollier (1995), this effect has never been addressed quantitatively.

The main objective of this paper is hence to quantify the effect of the clearance between plate and channel walls on the instability thresholds. In Section 2, the problem of a finite span, finite chord plate in a finite height, infinite width channel flow will be presented. Equations and boundary conditions satisfied by the potential flow will be developed to obtain a Helmholtz problem for the pressure jump in the Fourier space. This problem will be solved numerically and theoretically in the third section and the data obtained will be used to formulate an analytical model that fits all the data. In Section 4, the instability thresholds will be computed as a function of the plate aspect ratio and the channel clearance using this empirical model. Finally, the effect of the gap on the critical velocity will be discussed in relation to experiments.

2. Formulation of the problem

2.1. Equation of motion

As sketched in Fig. 1, a cantilevered plate of length (or chord) L and height (or span) H is considered. The plate is surrounded by an airflow of constant velocity U in the X direction and bounded above and below by rigid walls at a distance $H+2C$, so that the gap between the plate and the walls is C (also called the clearance in the text). The lateral plate deflection is denoted by W , and is considered to be independent of the vertical coordinate Y , so that it is governed by the linearized Euler–Bernoulli beam equation with an additional forcing term due to the fluid pressure,

$$MW_{TT} + DW_{XXXX} = \langle [P] \rangle, \quad (1)$$

where D is the flexural rigidity of the plate, M its surface density and $\langle [P] \rangle$ the mean value along the span H of the pressure jump across the plate (the notation $[P]$ stands for $P(Z=0^+) - P(Z=0^-)$). The effects of gravity and internal tension are neglected

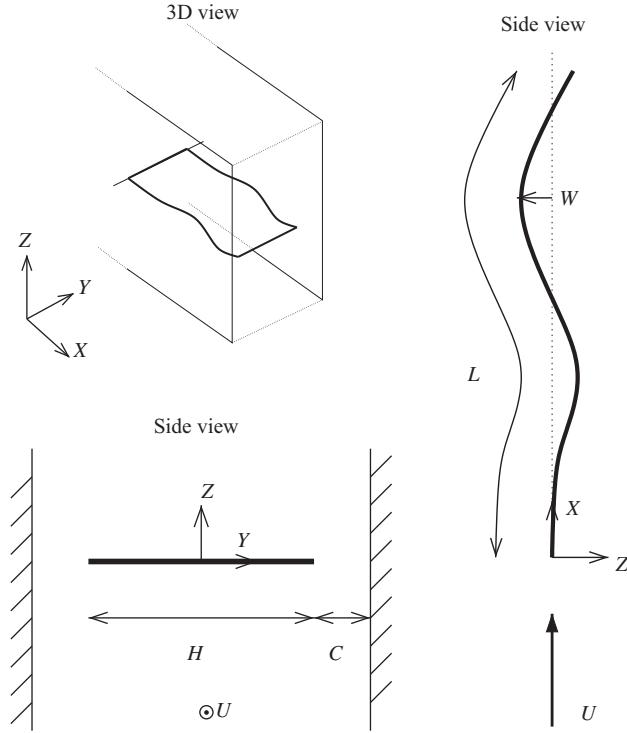


Fig. 1. Schematic view of a cantilevered plate in an axial potential flow bounded by two rigid walls.

in this modelling [see Moretti (2003) for a discussion of tensile forces]. Considering a finite length L , boundary conditions will be those of a clamped-free beam, $W = W_X = 0$ in $X=0$, and $W_{XX} = W_{XXX} = 0$ in $X=L$.

The following dimensionless quantities are introduced:

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad w = \frac{W}{L}, \quad t = \frac{UT}{L}, \quad p = \frac{P}{\rho U^2}, \quad (2)$$

where ρ is the fluid density, so that the dimensionless equation of motion (1) is

$$w_{tt} + \frac{1}{U^2} w_{xxxx} = M^* \langle [p] \rangle, \quad (3)$$

where U^* and M^* are the reduced velocity and mass ratio, defined as

$$U^* = \sqrt{\frac{\bar{M}}{D}} LU, \quad M^* = \frac{\rho L}{\bar{M}}. \quad (4)$$

With this choice of dimensionless parameters, the plate span is $h=H/L$, and the gap is $c=C/L$.

2.2. Potential flow

Assuming a large Reynolds number, the flow around the plate is considered to be potential. For the present linear model, this means that the vorticity is entirely concentrated in the surface $z=0$, both in the plate itself to model the viscous boundary layers and in its wake where the vorticity is shed with velocity U . Moreover, this vorticity is confined in a region of the same width as the plate span [see also Fig. 2 in Eloy et al. (in press) and Fig. 1 in Wu (in press)]. Under these hypotheses, the perturbation pressure $p(x,y,z,t)$ and the perturbation potential $\phi(x,y,z,t)$ are related by the unsteady linearized Bernoulli equation

$$p = -(\partial_t + \partial_x)\phi. \quad (5)$$

Boundary conditions are given by the impermeability condition on the walls and on the plate and yields a Neumann problem for the Laplace equation satisfied by the potential ϕ . Applying the operator $(\partial_t + \partial_x)$ on these boundary conditions gives another Neumann problem for the perturbation pressure:

$$\Delta p = 0, \quad (6)$$

$$[p_y]_{|y|=h/2+c} = 0, \quad (7)$$

$$[p_z]_{z=0} = -(\partial_t + \partial_x)^2 w \quad \text{for } (x,y) \in \mathbb{D}, \quad (8)$$

where \mathbb{D} is the plate area.

2.3. Problem in the Fourier space

To solve the set of Eqs. (6)–(8), the pressure field is expressed in the Fourier space such that

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k, y, z) e^{ikx} dk, \quad (9)$$

where ψ satisfy the following equations:

$$(\partial_y^2 + \partial_z^2)\psi = k^2\psi, \quad (10)$$

$$[\psi_y]_{|y|=h/2+c} = 0, \quad (11)$$

$$[\psi_z]_{z=0} = v(k) \quad \text{for } |y| < h/2, \quad (12)$$

and $v(k)$ is the Fourier transform of $-(\partial_t + \partial_x)^2 w$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(k) e^{ikx} dk = -(\partial_t + \partial_x)^2 w. \quad (13)$$

The set of Eqs. (10)–(12) defines the problem in the Fourier space. It is a two-dimensional problem where the field ψ is solution of the Helmholtz equation (10) with Neumann boundary conditions (11)–(12). The problem being linear, for a given wavenumber k , ψ is proportional to $v(k)$ such that the average along the span of the potential jump can always be written in the form

$$\langle [\psi] \rangle = -\frac{2}{k} g(k, h, c) v(k). \quad (14)$$

The linear problem given by Eqs. (10)–(12) will be solved in the next section numerically and theoretically with the aim of evaluating the function $g(k, h, c)$.

Taking the x -derivative of Eq. (9) and executing an inverse Fourier transform yields

$$\psi = \frac{1}{2\pi ik} \int_0^1 \partial_x p e^{-ikx} dx. \quad (15)$$

Taking the jump across the surface $z=0$ of the above equation and averaging along the span gives

$$\langle [\psi] \rangle = \frac{1}{2\pi ik} \int_0^1 p'(\xi) e^{-ik\xi} d\xi, \quad (16)$$

where $p'(x) = \langle [\partial_x p] \rangle$ is the x -derivative of averaged pressure jump. Inserting (14) and (16) into (13) and inverting the integral signs yields the following integral equation for p' :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 p'(\xi) G(x - \xi, h, c) d\xi = (\partial_t + \partial_x)^2 w, \quad (17)$$

where

$$G(x, h, c) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(kx)}{g(k, h, c)} dk, \quad (18)$$

and the bar on the integral sign denotes that the Cauchy principal value should be taken [see Mangler (1951)] as the kernel G has an inverse-power singularity in $x=0$. Solving the inverse problem (17) and integrating allows to find the averaged pressure distribution for a given motion of the plate $w(x, t)$.

It should be noted that the boundary condition in the Fourier space given by Eq. (12) is only an approximation. Indeed, the Neumann boundary condition given by Eq. (8) applies only on the plate area \mathbb{D} and not in the wake. Therefore, when expressed in the Fourier space, $v(k)$ can slightly depend on y in general. The approximation will be accurate however when the wake behind the fluttering plate has the same properties as the flow over the plate. This will be realized when the dimensionless frequency $\omega = \Omega L/U$ is of order unity (where Ω is the angular frequency) or in the asymptotic cases of large and small aspect ratios.

3. Pressure jump in the Fourier space

In the Fourier space, rescaling all lengths by $h/2$, the rescaled perturbation potential satisfies the following system:

$$\Delta\varphi = \kappa^2\varphi, \quad (19)$$

$$[\varphi_y]_{|y|=1+d} = 0, \quad (20)$$

$$[\varphi_z]_{z=0} = 1 \quad \text{for } |y| < 1, \quad (21)$$

where $\kappa = kh/2$, $d = 2c/h$ and $\varphi = 2\psi/h\nu(k)$. The first equation is the Helmholtz equation (the Δ is the Laplace operator in two-dimensions here), and the two others are the boundary conditions on the plate and on the walls. This problem is sketched in Fig. 2.

The goal of this section is to determine the function g now defined as

$$g(\kappa, d) = -\frac{\kappa}{2} \langle [\varphi] \rangle = -\kappa \langle \varphi^+ \rangle. \quad (22)$$

where φ^+ is a shortcut for $\varphi(z=0^+)$.

Before solving these equations in the general case, let us recall the results in the two-dimensional and slender-body limit cases when the clearance is infinite. The slender-body limit corresponds to $\kappa \ll 1$ and can be deduced from the results of Lighthill (1960)

$$\varphi^+ \simeq -\sqrt{1-y^2} \quad \text{for } |y| < 1 \text{ and } \kappa \ll 1. \quad (23)$$

The two-dimensional limit corresponds to $\kappa \gg 1$. In this situation, the pressure potential is independent of the spanwise coordinate and the resolution of Eqs. (19)–(21) yields

$$\varphi^+ \simeq -\frac{1}{\kappa} \quad \text{for } |y| < 1 \text{ and } \kappa \gg 1. \quad (24)$$

3.1. Numerical calculation

Numerical resolution of the Helmholtz problem defined by Eqs. (19)–(21) is now presented. First of all, the problem has to be of finite size to allow implementation of a finite element method in the two-dimensional fluid domain. A second gap e in the lateral direction z is hence introduced. The gap e has to be large enough to ensure that the problem solved numerically is equivalent to that of a plate in an infinite width channel. In practice, the value of $e=30$ was used in the numerical computations presented in the following. This assured that the pressure distribution converged to that of an infinite domain in the z direction at all the explored values of κ and d .

Next, two symmetry properties of the problem may be considered to simplify its numerical resolution. Indeed, the problem, through its boundary conditions, is symmetric with respect to the Oz -axis, and skew-symmetric with respect to the Oy -axis. Due to the inviscid nature of the fluid, the problem is reduced to $y \geq 0$ and $z \geq 0$ as sketched in Fig. 3. The relevant boundary conditions appear on the figure.

The numerical resolution of this classical Helmholtz problem has been done with the help of the COMSOL software. The explored values of d and κ were in the range $[10^{-4}, 5]$ and $[10^{-4}, 30]$ respectively.

Four typical results for the pressure potential φ are presented in Fig. 4. On this figure, colour levels of the quantity $-\kappa\varphi$ are plotted in the fluid domain (figures above), and its value at $z=0$ is plotted on the graphs below, as a function of y , so that the area below this curve corresponds to the function g defined in Eq. (22). The behaviour of $-\kappa\varphi^+$ predicted by the slender-body and two-dimensional models are also plotted. One can make some preliminary observations from these four typical cases. Indeed, comparing cases (a) and (b) shows that increasing κ has for consequence to approach the two-dimensional limit. Comparison of cases (b) and (c) shows that decreasing d towards zero has the same effect. It appears, however, that even for a value of d as small as 10^{-4} , the numerical result differs significantly from the two-dimensional limit, when $\kappa = 1$. Finally, difference between cases (b) and (d) illustrates the fact that decreasing κ has for consequence to approach the slender-body limit. These observations will be addressed more quantitatively in the following.

The value of g resulting from systematic numerical computations is now plotted in Fig. 5 as a function of the gap d for different values of the wavenumber κ between 10^{-3} and 1. Although accessible, higher values of κ have not been explored

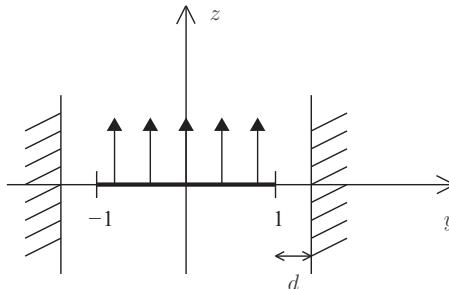


Fig. 2. Schematic representation of the problem in the Fourier space.

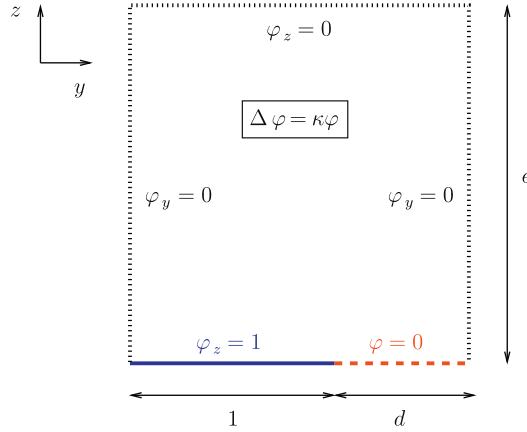


Fig. 3. Equations and boundary conditions of the equivalent numerical problem after considering symmetry properties of the original problem.

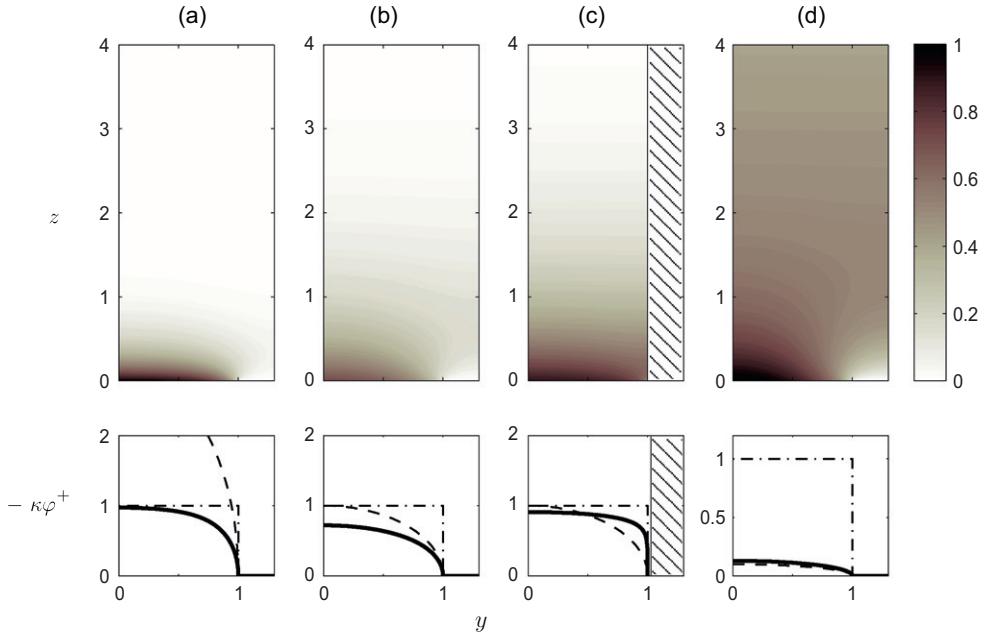


Fig. 4. Filled contours representing levels of $-\kappa\varphi$ in the (y,z) space (above) and corresponding values at $z=0^+$ plotted as a function of y (below, bold lines), for four typical sets of parameters κ and d ; (a), $\kappa = 5$ and $d = 0.3$; (b), $\kappa = 1$ and $d = 0.3$; (c), $\kappa = 1$ and $d = 10^{-4}$; (d), $\kappa = 0.1$ and $d = 0.3$. Dashed lines and dashed-dotted lines indicate value of $-\kappa\varphi^+$ predicted by the slender-body and two-dimensional theories, respectively [see Eqs. (23) and (24)]. The values have been multiplied by 8 in the colour plot of case (d) in order to improve the visibility.

numerically because it requires strong mesh refinements. This limit will be addressed in the next section with an analytical approach. The values predicted by the slender-body theory are also plotted in Fig. 5 for comparison. The asymptotic limit for large d is recovered by the slender-body theory when κ is small enough, say $\kappa < 0.3$.

We are now looking for an analytical function describing the value of g for small κ and any value of the clearance d . In Fig. 6, the value of $4g/\pi\kappa - 1$ is plotted against d and shows that all points gather on a single curve when κ is smaller than 0.1. This means that g is of the form

$$g_{SB}(\kappa, d) = \frac{\kappa\pi}{4f_{SB}(d)} \quad \text{for } \kappa \ll 1, \quad (25)$$

where f_{SB} can be determined by fitting the numerical results

$$f_{SB}(d) \approx \left[1 + 0.805 \ln\left(\frac{d+0.189}{d}\right) \right]^{-1}. \quad (26)$$

Eq. (25) describes the extension of the slender-body theory to account for the presence of the walls. It is valid for any value of the clearance d as long as κ is small enough ($\kappa < 0.1$), that is when the wavelength of the deflection is large compared to the plate span.

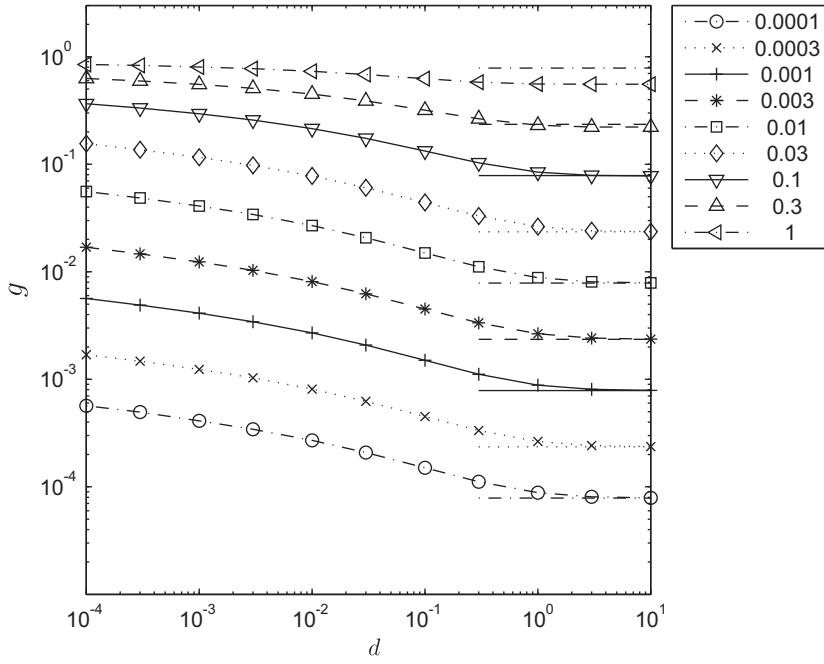


Fig. 5. Value of $g = -\kappa \langle \varphi^+ \rangle$ as a function of d for different values of the non-dimensional wavenumber κ . The values that have been effectively computed are given by marks. Horizontal segments indicate the value of g in the slender-body limit. This limit correctly approximates the behaviour of g for small values of κ ($\lesssim 0.1$).

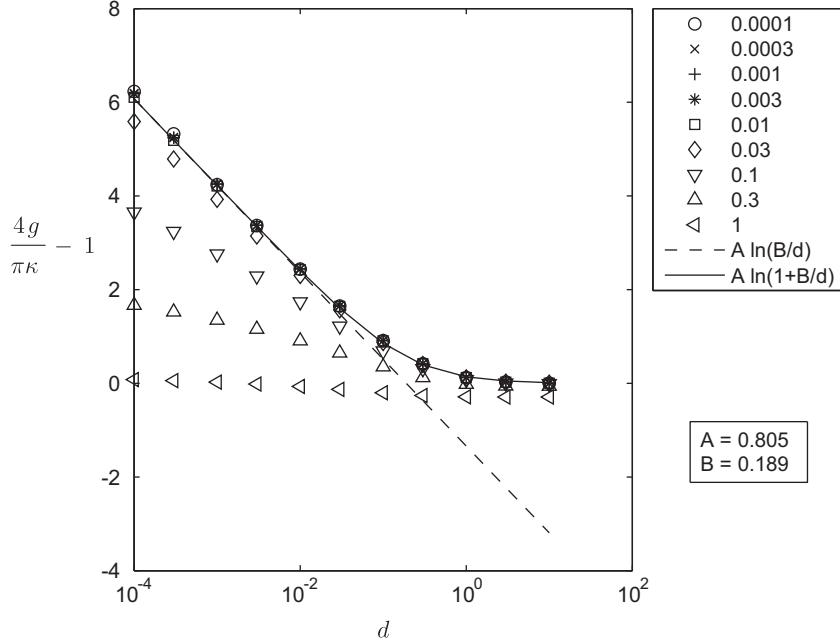


Fig. 6. Value of $4g/\pi\kappa - 1$ as a function of d with a log-linear scale, for different values of the non-dimensional wavenumber κ . Dashed line corresponds to the best linear fit of the dataset when $\kappa \leq 0.1$. Solid line is the approximation for g given by Eq. (25).

3.2. Theoretical calculation

As illustrated in Fig. 7, the Helmholtz problem of a plate moving at constant velocity between two boundaries given by Eqs. (19)–(21) can be transformed by replacing the walls by mirror symmetry planes. The equivalent problem is thus an infinite number of similar plates separated by a distance $2d$ all moving at the same constant velocity v .

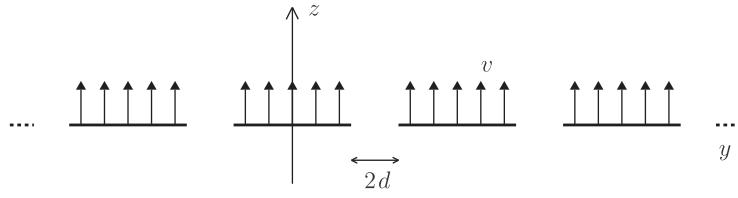


Fig. 7. Schematic representation of the equivalent problem in the Fourier space using the mirror symmetry.

Using Green's representation theorem, the perturbation potential satisfies

$$\varphi(y, z) = \int_{S_p} [\varphi](\eta) [\partial_\zeta H(y, z, \eta, \zeta)]_{\zeta=0} d\eta, \quad (27)$$

where S_p stands for the plate surfaces, $[\varphi]$ is the potential jump across the plate (i.e. $[\varphi](y) = \varphi(y, 0^+) - \varphi(y, 0^-)$) and H is the Green function of the Helmholtz equation in two dimensions,

$$H(y, z, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa \sqrt{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}), \quad (28)$$

with K_0 the modified Bessel function of the second kind.

Differentiating Eq. (27) with respect to z and taking the limit $z=0$ yields

$$[\varphi_z]_{z=0} = \oint_{S_p} [\varphi](\eta) F(|y-\eta|) d\eta = 1 \quad \text{for } |y| < 1, \quad (29)$$

where the cross on the integral sign stands for the integration in the finite part sense (Hadamard, 1932; Mangler, 1951) and the kernel is

$$F(y) = \frac{\kappa K_1(\kappa y)}{2\pi y}. \quad (30)$$

Here the integration is not defined in the usual sense because the kernel $F(y)$ behaves like $1/(2\pi y^2)$ in the limit of small y .

The inverse problem (29) can be solved numerically for a given value of the wavenumber κ . To do that, the potential jump $[\varphi]$ is expanded on even Chebyshev polynomials of the second kind such that

$$[\varphi](y) = \sqrt{1-y^2} \sum_{i=1}^{\infty} A_i U_{2i-2}(y), \quad (31)$$

where the factor $\sqrt{1-y^2}$ ensures the correct behaviour as $|y| \rightarrow 1$. Inserting the expansion (31) into Eq. (29) and evaluating the discrete scalar product with the Chebyshev polynomials of the first kind $T_j(y)$ leads to a linear system for the vector (A_i) which can be solved numerically. The averaged potential jump along the plate span is then given by $\langle [\varphi] \rangle_y = -\pi A_1/2$ and therefore the function g is

$$g(\kappa, d) = \frac{\pi \kappa}{4} A_1(\kappa, d). \quad (32)$$

The theoretical method described here to calculate the averaged potential jump $\langle [\varphi] \rangle$ is complementary to the numerical method described above. It allows to carry out the calculation in the limit of large wavenumber κ and small gap d with the product κd asymptotically small. When κ is small, however, the number of plate replicas needed to obtain an accurate calculation of the potential varies as $1/\kappa$. The present theoretical method is therefore not pertinent in this limit.

Examples of such calculations are given in Fig. 8 where the averaged potential jump is given as a function of the gap d for different wavenumbers κ . For large clearance d , the large span approximation obtained by Eloy et al. (2007) is recovered,

$$g(\kappa, d) \simeq 1 - \frac{1}{2\kappa} \quad \text{for } d \gg 1, \kappa \gg 1. \quad (33)$$

Let us now estimate the function of g in the limit large κ for any value of d . In Fig. 9, $(1-g/2\kappa)$ is plotted as a function of κd with a logarithmic scale. All the points gather on a single curve showing that, in the large-span limit, g is of the form

$$g_{LS}(\kappa, d) \simeq 1 - \frac{f(\kappa d)}{2\kappa} \quad \text{for } \kappa \gg 1. \quad (34)$$

where $f(\kappa d)$ behaves as a power law for small values of κd . An approximate evaluation of this function can be found by fitting the results and yields

$$f(x) \approx \left(1 + \frac{0.18}{x^2}\right)^{-0.075}. \quad (35)$$

Equation (34), where f is given by (35), will be referred to as the large span approximation for $g(\kappa, d)$, valid for any value of the clearance d and large value of the wavenumber κ , that is when the deflection wavelength is small compared to the plate span.

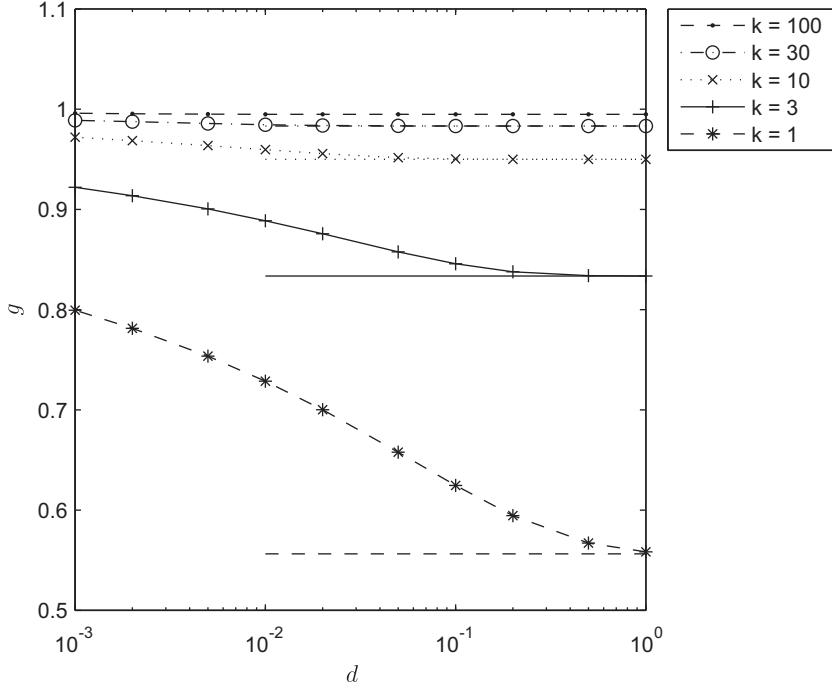


Fig. 8. Function g as a function of the gap d for different values of the wavenumber κ . The horizontal lines correspond to the limit $d \gg 1$ and the segments between symbols are just guides for the eye.

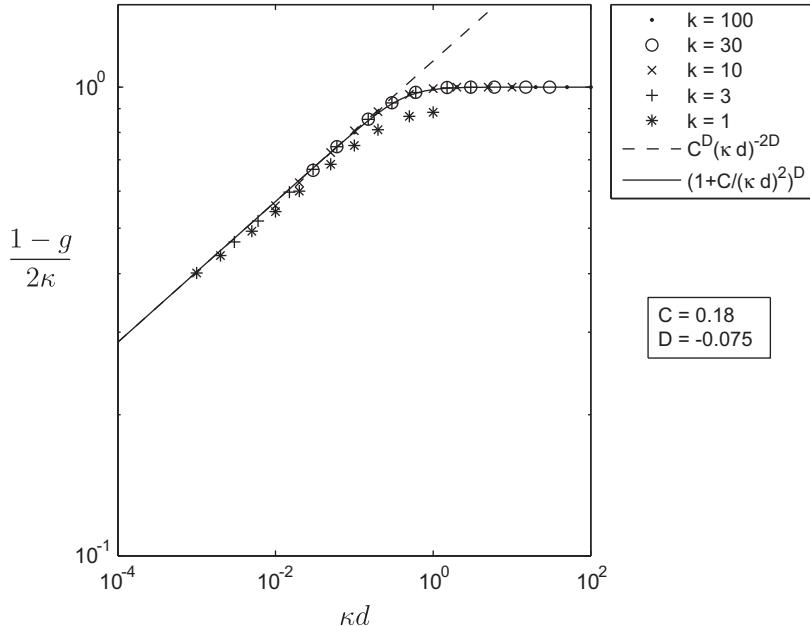


Fig. 9. Function $1-g/2\kappa$ as a function of κd for different values of the wavenumber κ . The dashed line shows the power law $1.14(\kappa d)^{0.15}$ and the solid line represents the approximation of g given by Eq. (34) where f is given by (35).

3.3. Composite model for the pressure jump

In Sections 3.1 and 3.2 we have derived approximate models for the function $g(\kappa, d)$, valid for small and large values of κ , respectively. A good approximation for all values of κ can be obtained from a composite expansion of these two

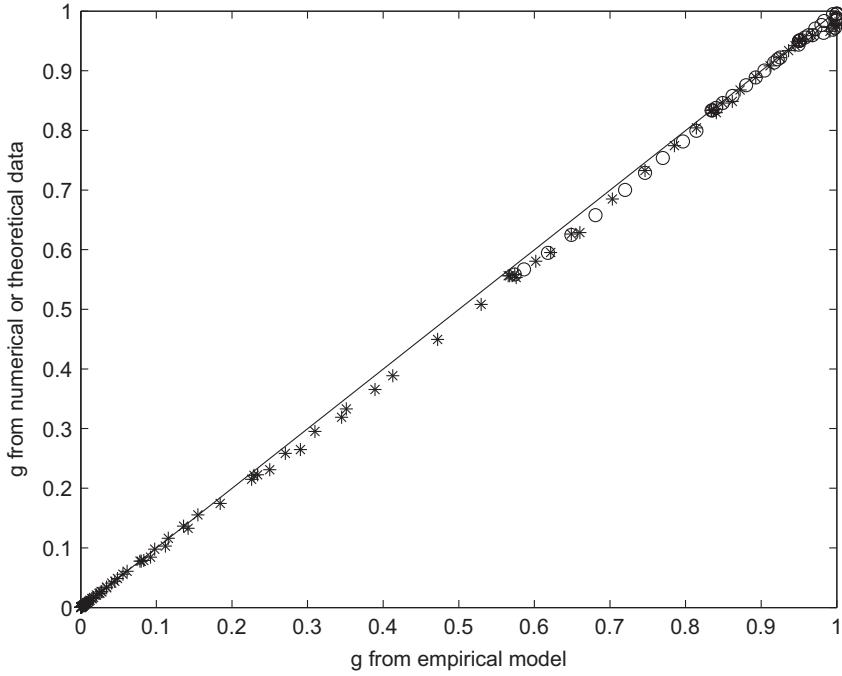


Fig. 10. Complete dataset of the numerical and theoretical values of the averaged pressure jump g , plotted as a function of the empirical model g_e given by Eq. (36); (*), numerical data; (o), theoretical data.

models,

$$g_e(\kappa, d) = 1 - \left[\frac{1}{1-g_{LS}} + \exp\left(g_{SB} - \frac{1}{1-g_{LS}}\right) \right]^{-1}, \quad (36)$$

where the functions g_{SB} and g_{LS} are given by Eqs. (25) and (34), respectively.

To assess the validity of the above approximation for g , the entire dataset of numerical and theoretical values of the pressure jump g is plotted as a function of g_e in Fig. 10. All symbols lie on the line $g=g_e$, indicating that the composite model given by Eq. (36) correctly predicts the pressure jump with a maximum error of 8% at any value of κ and d .

To solve the problem in the real space, the Fourier transform of $1/g_e$ is now evaluated to obtain the kernel G given by Eq. (18). It yields

$$G(x, h, c) \approx \frac{1}{x} + \text{sgn}(x) \left[\frac{\pi f_{LS}(|x|/c)}{2} + \left(\frac{4}{h} - \frac{4}{h+2|x|} \right) f_{SB}(2c/h) \right], \quad (37)$$

where the function f_{SB} is given by Eq. (26) and

$$f_{LS}(x) \approx (1+0.5x)^{-0.16}. \quad (38)$$

The functions f_{SB} and f_{LS} describe in the slender-body and large-span limit the effect of channel confinement. For an asymptotically large channel (i.e. $c \gg 1$), these functions are equal to one and the kernel $G(x, h, c)$ found in Eloy et al. (2007, 2008) is recovered. On the other hand, when the clearance c goes to zero, these two functions decrease and therefore the kernel G tends to $1/x$ which is the two-dimensional limit.

4. Stability analysis

4.1. Galerkin decomposition

Similarly to what was done by Eloy et al. (2007, 2008), the stability analysis is performed by assuming a complex frequency ω , and decomposing the plate deformation on Galerkin modes

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_i a_i w_i(x), \quad (39)$$

where the spatial Galerkin modes $w_i(x)$ are the eigenmodes of a clamped-free beam in vacuo in order to satisfy the boundary conditions in $x=0$ and 1 .

Inserting the decomposition (39) into equation of motion (3) and executing scalar products with the modes $w_i(x)$ yields a linear problem for the unknown amplitude vector $\{a_i\}$. This eigenvalue problem admits a non-trivial solution only if the determinant of

the linear operator is zero which is achieved for discrete values of the complex frequency $\{\omega_i\}$. The real part of this frequency gives the angular frequency of the oscillations and its imaginary part gives the mode growth rate $\sigma = -\Im(\omega)$. For a given eigenmode, the growth rate is a function of the dimensionless parameters of the problem: the reduced velocity U^* , the mass ratio M^* , the aspect ratio h and the dimensionless clearance c . The aim of the stability analysis is to find, for a given set of parameters (M^*, h, c) , the critical value of the reduced velocity $U_c^*(M^*, h, c)$ above which at least one mode is unstable (i.e. has a positive growth rate σ).

4.2. Solution for the pressure

The solution for the inverse problem (17) is sought for a given Galerkin mode w_i

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 p_i'(\xi) G(x-\xi, h, c) d\xi = (i\omega + d_x)^2 w_i, \quad (40)$$

where G is given by (37), by expanding p_i' on Chebyshev polynomials such that

$$p_i'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{T_j(2x-1)}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad (41)$$

thus assuming an inverse square-root singularity at the leading and trailing edge for p_i' . In this expansion, T_j are the Chebyshev polynomials of the first kind.

Inserting (41) into Eq. (40) and applying a scalar product with the Chebyshev polynomials of the second kind $U_k(2x-1)$ leads to a linear problem for A_{ij} which is solved numerically for given values of the geometrical parameters h and c . The averaged pressure jump $\langle [p_i] \rangle$ is then found by integrating p_i' given by Eq. (41). This leads to no singularity on the leading and trailing edges (as the averaged pressure jump goes as $x^{1/2}$). As has been discussed in Eloy et al. (2008), this is not physically correct, as one expects the pressure jump to have an inverse square-root singularity at the leading edge. However, it has been shown in the same paper that taking into account this leading-edge singularity does not greatly modify the stability characteristics, as the leading edge is clamped and the pressure forces do not work at this position.

In practice, 15 Galerkin modes and 20 Chebyshev polynomials have been used in the following computations.

4.3. Results

Now that the average pressure jump $\langle [p_i] \rangle$ for a given Galerkin mode w_i can be found by inverting the problem (40), we are able to compute the eigenmodes of the equation of motion (3) and their complex eigenfrequencies ω . Looking at the imaginary part of the eigenfrequencies, the critical velocity U_c^* can also be computed as a function of the dimensionless

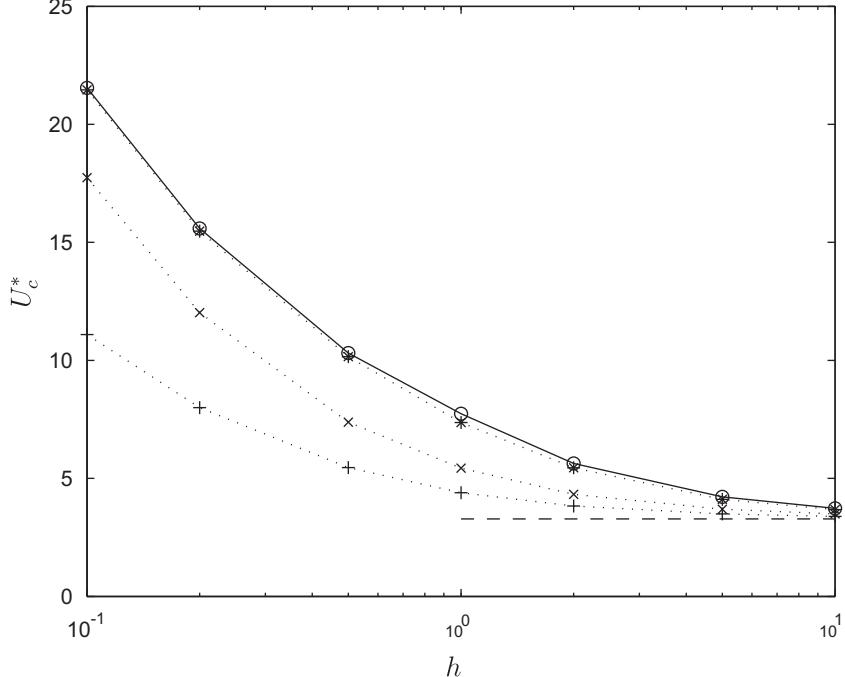


Fig. 11. Critical velocity as a function of the aspect ratio h for a mass ratio $M^*=0.5$. The different symbols correspond to different gaps: $c = \infty$ (circle), $c = 1$ (star), $c = 10^{-2}$ (crosses), $c = 10^{-4}$ (plus); and the dashed line corresponds to the two-dimensional limit $h = \infty$.

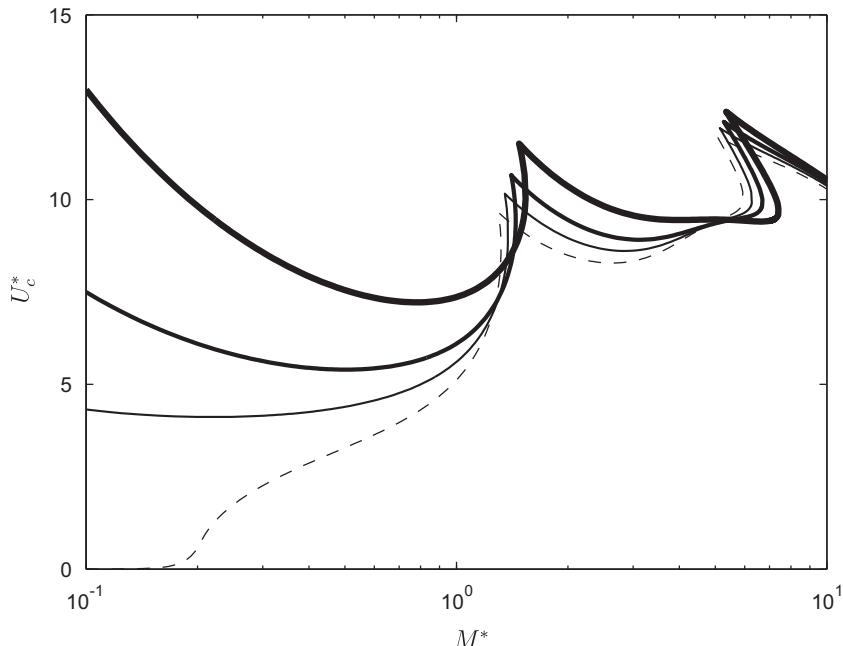


Fig. 12. Critical velocity as a function of the mass ratio M^* for an aspect ratio $h=1$. The different thicknesses correspond to different gaps: $c=\infty$ (thick), $c=10^{-2}$ (medium), $c=10^{-4}$ (thin); and the dashed line corresponds to the two-dimensional limit $h=\infty$.

parameters M^* , h and c . Examples of such calculations are showed in Figs. 11 and 12, where the critical velocity is first plotted as a function of the aspect ratio for a fixed mass ratio, and then as a function of the mass ratio for a given aspect ratio. Each time, the critical velocity is computed for different values of the clearance c .

Figs. 11 and 12 show the effect of confinement on the flutter instability. The first thing to notice is that the characteristics of the instability are not modified qualitatively by the presence of the walls. As expected, the threshold converges smoothly towards the two-dimensional limit as the clearance is reduced. It also appears that when the clearance c is larger than 1, the critical velocity is the same as in the case of an open flow ($c \gg 1$). When c is reduced, the critical velocity always lies between the open-flow and two-dimensional limits and converges very slowly towards the two-dimensional limit.

For a relatively small mass ratio ($M^*=0.5$), Fig. 11 shows the effect of the aspect ratio on the instability. As has already been discussed in Eloy et al. (2008) for an open flow ($c \gg 1$), if all the other parameters are kept constant, the smaller the span is, the more stable is the system. This assertion holds also when the plate is confined between two walls and the clearance c is kept constant.

For a square plate ($h=1$), Fig. 12 shows the influence of the mass ratio on the instability threshold. This stability diagram exhibits several lobes corresponding to different eigenmodes. For $M^* \lesssim 1.5$, the second mode is the most unstable (assuming that the modes are ordered with increasing frequency). Note that, classically, the first mode is always stable for these clamped-free boundary conditions [see Païdoussis (2004), for instance]. For $1.5 \lesssim M^* \lesssim 6$, the third eigenmode is the most unstable, and so on. The effect of confinement does not modify this picture significantly. Fig. 12 also shows that for large mass ratios, all the curves converge towards $U_c^* \approx 10$, for all values of the clearance. This is due to the fact that the number of mode wavelengths along the plate chord increases as M^* increases. The dimensionless wavenumber κ introduced in Section 3 thus increases and the pressure jump converges towards its two-dimensional limit.

5. Discussion

In this paper, the effect of channel clearance on the flow-induced instability of a cantilevered flat plate has been addressed. Numerical and theoretical calculations were performed to obtain the pressure distribution around the plate in the Fourier space as a function of the various parameters. Using these numerical and theoretical data, an approximate model for the pressure jump has been derived. This model allowed the computation of the eigenfrequencies of the coupled flow-structure problem. Critical velocities for the flutter instability as a function of the different parameters of the problem have then been computed. As expected, when the clearance is reduced to zero, the critical velocity was found to approach the limit predicted by a two-dimensional model. However, this limit was found to be reached only for very small values of the clearance. Indeed for a value as small as $c=10^{-4}$, a large discrepancy between the two-dimensional model and our empirical model persists. Note that the present model is inviscid and will not be valid if the clearance is of the same order of magnitude as the thickness of the channel-wall boundary layer. The mass ratio effect has also been investigated, and it has been observed that the influence of the rigid walls is more pronounced for relatively heavy and rigid plates (i.e. $M^* < 1$).

These results raise the following question: for heavy and rigid plates, is the comparison between two-dimensional models and experiments relevant? Indeed, the value of the clearance would have to be far smaller than 10^{-4} , which is unattainable experimentally. Among the works that investigated experimentally the flutter of plates in channel flow, the values of the clearance can be estimated to be $\mathcal{O}(1)$ (Yamaguchi et al., 2000) or $\mathcal{O}(10^{-2})$ (Huang, 1995). Our results indicate that the flow in these experimental studies cannot be considered two-dimensional to correctly predict critical velocities for such values of the clearance. In the work of Aurégan and Depollier (1995), the clearance has a value of approximately 10^{-2} (Aurégan, 2010), and the same recommendation should apply. But here, the channel confinement in the Y-direction is also important, which effect can be roughly estimated as an increase of the mass ratio M^* . The present article shows that this has for consequence to reduce the influence of the channel clearance. A two-dimensional model has hence more chances to give satisfactory results in this case. Regarding the experimental work of Watanabe et al. (2002b), our model is probably not applicable in this case because the authors observed three-dimensional deformations of the paper sheet when small clearance values of order 10^{-2} were attained. This is not compatible with our one-dimensional deformation hypothesis. In conclusion, the only cases where a two-dimensional approximation is pertinent are the very long and/or very flexible plates (i.e. $M^* \gg 1$) or the soap film experiments such as the experimental work of Zhang et al. (2000).

These observations indicate that an experimental study focusing on the effect of channel clearance would be necessary to complement the theoretical results of the present article. Also, extending our model to take into account the confinement in the transverse direction would bring some insight into the instability phenomenon, and would fill the gap between the flag-type problem and the snoring or leakage flow problems.

References

- Alben, S., Shelley, M.J., 2008. Flapping states of a flag in an inviscid fluid: bistability and the transition to chaos. *Physical Review Letters* 100, 074301.
- Aurégan, Y., 2010. Private Communication.
- Aurégan, Y., Depollier, C., 1995. Snoring: linear stability and in-vitro experiments. *Journal of Sound and Vibration* 188, 39–53.
- Balint, T.S., Lucey, A.D., 2005. Instability of a cantilevered flexible plate in viscous channel flow. *Journal of Fluids and Structures* 20, 893–912.
- Datta, S., Göttingen, W., 1975. Instability of an elastic strip hanging in an airstream. *Journal of Applied Mechanics* 42, 195–198.
- Eloy, C., Doaré, O., Duchemin, L., Schouveiler, L., 2010. A unified introduction to fluid mechanics of flying and swimming at high Reynolds number. *Experimental Mechanics*, in press, doi:10.1007/s11340-009-9289-7.
- Eloy, C., Lagrange, R., Souilliez, C., Schouveiler, L., 2008. Aeroelastic instability of cantilevered flexible plates in uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics* 611, 97–106.
- Eloy, C., Souilliez, C., Schouveiler, L., 2007. Flutter of a rectangular plate. *Journal of Fluids and Structures* 23, 904–919.
- Guo, C.Q., Pădoussis, M.P., 2000. Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow. *Journal of Applied Mechanics* 67, 171–176.
- Hadamar, J., 1932. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations. Dover, New York.
- Howell, R.M., Lucey, A.D., Carpenter, P.W., Pitman, M.W., 2009. Interaction between a cantilevered-free flexible plate and ideal flow. *Journal of Fluids and Structures* 25, 544–566.
- Huang, L., 1995. Flutter of cantilevered plates in axial flow. *Journal of Fluids and Structures* 9, 127–147.
- Kornecki, A., Dowell, E.H., O'Brien, J., 1976. On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration* 47, 163–178.
- Lemaitre, C., Hénon, P., de Langre, E., 2005. Instability of a long ribbon hanging in axial air flow. *Journal of Fluids and Structures* 20, 913–925.
- Lighthill, M., 1960. Note on the swimming of slender fish. *Journal of Fluid Mechanics* 9, 305–317.
- Mangler, K.W., 1951. Improper integrals in theoretical aerodynamics. Technical Report Aero 2424, British Aeronautical Research Council.
- Michelin, S., Llewellyn Smith, S.G., 2009. Linear stability analysis of coupled parallel flexible plates in an axial flow. *Journal of Fluids and Structures* 25, 1136–1157.
- Michelin, S., Llewellyn Smith, S.G., Glover, B.J., 2008. Vortex shedding model of a flapping flag. *Journal of Fluid Mechanics* 607, 109–118.
- Moretti, P.M., 2003. Tension in fluttering flags. In: Proceedings of the 10th International Conference on Sound and Vibration, Stockholm, Sweden.
- Pădoussis, M.P., 2004. Fluid–structure Interactions Slender Structures and Axial Flow, vol. 2. Elsevier, Academic Press, London.
- Rayleigh, L., 1879. On the instability of jets. In: Proceedings London Mathematical Society X, 4–13.
- Taneda, S., 1968. Waving motions of flags. *Journal of the Physical Society of Japan* 24, 392–401.
- Tang, L., Pădoussis, M.P., 2007. On the instability and the post-critical behaviour of two-dimensional cantilevered flexible plates in axial flow. *Journal of Sound and Vibration* 305, 97–115.
- Theodorsen, T., 1935. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Report 496.
- Watanabe, Y., Isogai, K., Suzuki, S., Sugihara, M., 2002a. A theoretical study of paper flutter. *Journal of Fluids and Structures* 16, 543–560.
- Watanabe, Y., Suzuki, S., Sugihara, M., Sueoka, Y., 2002b. An experimental study of paper flutter. *Journal of Fluids and Structures* 16, 529–542.
- Wu, T.Y., 2005. Fish swimming and bird/insect flight. *Annual Review of Fluid Mechanics*, in press, doi:10.1146/annurev-fluid-122109-160648.
- Wu, X., Kaneko, S., 2005. Linear and nonlinear analyses of sheet flutter induced by leakage flow. *Journal of Fluids and Structures* 20, 927–948.
- Yamaguchi, N., Sekiguchi, T., Yokota, K., Tsujimoto, Y., 2000. Flutter limits and behavior of a flexible thin sheet in high-speed flow—II: experimental results and predicted behaviors for low mass ratios. *ASME Journal of Fluids Engineering* 122, 74–83.
- Zhang, J., Childress, S., Libchaber, A., Shelley, M., 2000. Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind. *Nature* 408, 835–839.



Dissipation effect on local and global stability of fluid-conveying pipes

Olivier Doaré *

ENSTA, Unité de Mécanique, Groupe MS, 91761 Palaiseau Cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 4 September 2008

Received in revised form

24 August 2009

Accepted 26 August 2009

Handling Editor: C.L. Morfey

Available online 24 September 2009

ABSTRACT

In this article, the effect of dissipation on local and global stability of fluid conveying pipes is analyzed. The local approach refers to an infinite medium and uses wave propagation analyses without taking boundary conditions into account. The global approach refers to the same medium, but with finite length and associated with a given set of boundary conditions. The finite length system is generally studied by calculating its eigenmodes and eigenfrequencies. Criteria for local instability are derived in the first part of this paper, and dissipation is found to significantly affect local stability. Moreover, dissipation is found to have a stabilizing or destabilizing effect, depending on the other parameters. Next, numerical computations are presented for finite-length systems and results are analyzed and compared with local stability properties of the corresponding media. When the system is sufficiently long, it is found that critical velocity for global instability tends to a local criterion which can be that of local stability of the damped medium or a local transition criterion of the undamped medium, which is not necessarily the local instability criterion. Finally, a reasoning based on lengthscale ratios is developed. It allows to know which criterion is able to predict the global stability for long systems.

© 2008 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

As emphasized in a recent review [1], the fluid-conveying pipe is now considered as a model problem for numerous physical systems where the dynamics of a slender structure is coupled to an axial flow. Indeed, it contains most of the physical ingredients found in many other systems, such as shells, plates or cylinders immersed in axial flow, shells conveying fluids or leakage flow problems. The fluid-conveying pipe is known to become unstable at a critical velocity [2], by flutter or buckling, depending on various mechanical parameters and boundary conditions. Two different approaches are commonly used to describe the properties of such systems. The first approach considers the medium to be of infinite length. In this case the waves propagating in the medium are considered through the analysis of the *local* wave equation. If temporally amplified waves are identified the medium is said to be *locally* unstable. Depending on the long time impulse response of the locally unstable medium, two types of instabilities may be distinguished: convective or absolute. The concepts of convective and absolute instabilities were first introduced in plasma physics [3], and fruitfully applied to various research fields such as hydrodynamics [4] and fluid–structure interaction [5–7]. The second approach considers the same medium, but of finite length. The modes are studied, through the analysis of the same local wave equation, associated with boundary conditions. If a temporally amplified mode is found, the system is said to be *globally* unstable.

* Tel.: +33 1 69 31 97 39; fax: +33 1 69 31 99 06.

E-mail address: olivier.doare@ensta.fr

The comparison of local and global stability properties has been done on various systems by several authors. One main result that can be drawn from prior studies is that when the length of the system is increased, the critical velocity for global instability tends to a limit that corresponds to a local criterion. However, no unique local criterion can predict the global instability of these long systems. Depending on the medium and the boundary condition characteristics, various authors found that it can be that of absolute instability [8], local instability [9] or that of existence of static or dynamic neutral waves [10,11]. The last criterion may lead to a system that is locally stable but globally unstable. Different theoretical approaches [10,12] explained this unusual result by the existence of an energy gain induced by wave reflexion at boundaries. This phenomenon, called *over reflexion*, has been observed in other research fields, such as fluid mechanics [13] or astrophysics [14].

In this paper, particular attention will be paid to the influence of dissipation on local and global stability. Regarding wave propagation, some authors have identified that dissipation can have a stabilizing or—more surprisingly—a destabilizing effect. Indeed, it is known after Landahl [15] that neutral waves can be destabilized or stabilized by the addition of damping, depending on the sign of their energy. Regarding fluid–structure interaction systems, it has been found that elastic plates loaded with mean flow also display negative energy waves [5,16,17]. Although the model problem of fluid conveying pipe would probably exhibit similar phenomena, no information is available at present. Conversely, regarding pipes of finite length, dissipation and its effect on global stability has been addressed and destabilization by dissipation has been observed [18,19], but no connection to local wave properties was sought for.

We will focus on the fluid-conveying pipe from now on, with three main objectives: (1) Complete the local and global stability maps of this system. (2) Analyze the particular effect of dissipation on local and global stability. (3) Develop simple criteria for global stability of long pipes based on wave properties analyzes. The motion equations used through the entire paper will be described in Section 2. The third section of the article will be devoted to the wave propagation properties with and without dissipation. The part disregarding dissipation will essentially consist of recalling previous results. Differences between damped and undamped media will be emphasized and analyzed through the calculus of the neutral waves' energy. In Section 4, a numerical Galerkin method will be used to compute the global critical velocities for instability. For long systems, global instability criteria based on lengthscale ratios will be developed. Finally, conclusions will be drawn.

2. Equations

The simplest model describing the fluid conveying pipe takes the form of an Euler–Bernoulli beam with an internal plug flow. A schematic view of the system is given in Fig. 1. The linearized equation of motion governing the lateral in-plane deflection $Y(X, T)$ of the pipe is hence [20]

$$E^* I \frac{\partial^5 Y}{\partial X^4 \partial T} + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + (MU^2 - N) \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + 2MU \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial T} + c \frac{\partial Y}{\partial T} + (m + M) \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + SY = F(X, T), \quad (1)$$

where E is the Young's modulus, I inertial momentum, M the fluid mass per unit length, m the pipe mass per unit length, U the plug flow velocity, S the elastic foundation modulus, N the external tension applied, c and E^* the viscous and structural dissipations respectively and $F(X, T)$ the external force per unit length. We only consider here the onset of instabilities and nonlinear effects are therefore neglected in the dynamics of the pipe.

In the following, elastic foundation and external tension will be studied separately. Similarly, when damping will be considered, viscous and structural dissipations will be added one at a time. Two different sets of non-dimensional numbers, based on two different sets of characteristic length and time will be used. The first set will be used to study the pipe resting on an elastic foundation, without tension ($N = 0$). Introducing the timescale

$$\tau = \sqrt{\frac{M+m}{S}} \quad (2)$$

and the associated characteristic length,

$$\eta = \left(\frac{EI\tau^2}{M+m} \right)^{1/4}, \quad (3)$$

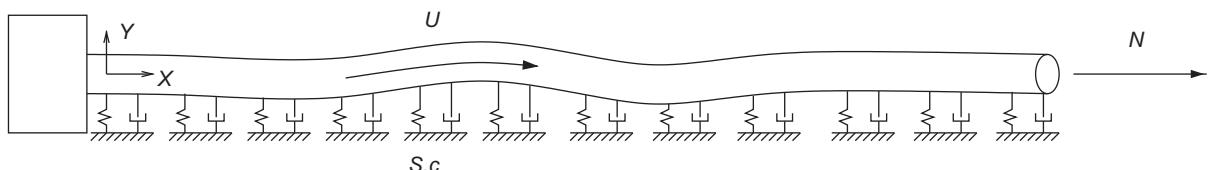


Fig. 1. Schematic view of a cantilevered pipe on an elastic foundation with additional dampers, subjected to an external tension.

non-dimensional variables and parameters read

$$x = X/\eta, \quad y = Y/\eta, \quad t = T/\tau, \quad \beta = \frac{M}{M+m}, \quad v = U\sqrt{\beta}\frac{\tau}{\eta}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{I}{E(M+m)}\frac{E^*}{\eta^2}}, \quad \sigma = \frac{c\eta^2}{\sqrt{EI(M+m)}}. \quad (4)$$

The second set of parameters concern the tensionned pipe. Here, the following characteristic time is used,

$$\tau = \sqrt{EI(M+m)/N^2}. \quad (5)$$

The lengthscale η based on this new characteristic time, is the same as in Eq. (3), and the non-dimensional variables and parameters are the same as in Eq. (4). For both media, the local wave equation reads

$$\alpha \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (v^2 - a) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \sigma \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + by = f(x, t), \quad (6)$$

with $(a, b) = (0, 1)$ for the pipe on elastic foundation, and $(a, b) = (1, 0)$ for the tensionned pipe. For both systems, the length is L and therefore $x \in [0, l]$, with $l = L/\eta$. The particular case of a cantilevered fluid-conveying pipe will be considered through the whole paper. The boundary conditions are consequently those of a clamped-free beam,

$$y(x=0) = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

The physical meaning of different characteristic times and lengths presented will be discussed in Section 5.

3. Local stability

3.1. Pipe on elastic foundation

Looking for solutions in the form of normal modes, $y(x, t) = e^{i(kx-\omega t)}$, the local wave equation (6) takes the form of a linear dispersion relation,

$$D(k, \omega) = (1 - i\alpha\omega)k^4 - v^2k^2 + 2\sqrt{\beta}vk\omega - i\sigma\omega - \omega^2 + 1 = \phi(k, \omega), \quad (8)$$

where $\phi(x, t)$ is the Fourier transform in space and time of the forcing function $f(x, t)$. Local stability is ensured if for any real wavenumber k , the corresponding frequencies ω , given by Eq. (8) with $\phi = 0$, are such that $\text{Im}(\omega) \leq 0$, so that the displacement remains finite in time. When dissipation is absent, the medium is found to be stable if [21]

$$v < v_i = \sqrt{\frac{2}{1-\beta}}. \quad (9)$$

In the local instability domain of the parameters, convective and absolute instabilities may be distinguished. It has been shown [7] that for fluid–structure interaction systems without dissipation, the transition between absolute and convective instabilities arises when the dispersion relation has a triple root. By looking for such triple roots in the instability domain of the parameters, it was found that the medium is absolutely unstable if

$$v > v_d = \left(\frac{12\beta}{8/9 - \beta} \right)^{1/4}. \quad (10)$$

In the local stability domain of the parameters, one may distinguish between situations where evanescent waves exist at any real frequency to situations where there are some real frequency ranges for which waves are all neutral [10]. These ranges of real frequencies are referred to as *neutral*, and also arise when the dispersion relation has a triple-root. There are two values of the velocity for which a triple-root exists, v_d and $v_s = \sqrt{2}$. At the velocity $v = v_s$ the neutral range appears at $\omega = 0$ and grows symmetrically when v is further increased. It is referred to as *static*. The frequency range appearing when $v = v_d$ does not include $\omega = 0$. It is referred to as *dynamic*. In Fig. 2a, the three velocities v_i , v_s and v_d are plotted as functions of β . Six domains of wave properties may be then distinguished: absolute instability (AI), when $v > v_i$ and $v > v_d$, convective instability (CI), when $v_i < v < v_d$, stability with dynamic range (DN), when $v_d < v < v_i$, stability with static range (SN), when $v_s < v < v_i$, stability with both neutral ranges (SN+DN), when $v_d < v < v_i$ and $v_s < v$, stability with evanescent waves (E), when $v < v_s$.

Now that local properties of waves in the infinite medium without damping have been recalled, the same is done with damping. When the damping is of viscous type, $\alpha = 0$ and $\sigma > 0$, the local instability criterion has been calculated by Roth [21],

$$v > \sqrt{2}. \quad (11)$$

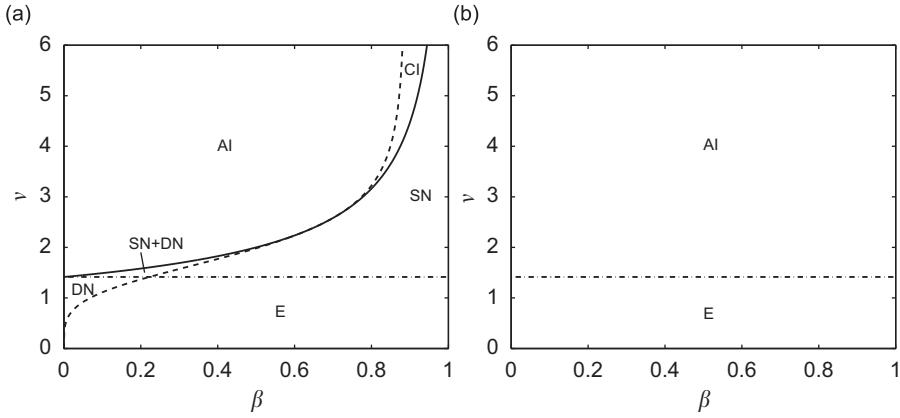


Fig. 2. Pipe on elastic foundation, schematic view of the different domains of wave properties in the (β, ν) space; (—), $\nu = \nu_i$; (---), $\nu = \nu_d$; (···), $\nu = \nu_s$; AI, absolute instability; CI, convective instability; SN, stability with existence of the static range of neutral waves; DN, stability with existence of the dynamic range of neutral waves; E, no neutral wave range exists, there are evanescent waves at any real frequency; (a) without dissipation [10]; (b) with dissipation.

The same calculation is now carried out when structural damping is considered, $\alpha > 0$ and $\sigma = 0$. Being a second-order polynomial with respect to ω , Eq. (8) has two solutions, ω_+ and ω_- , with the following imaginary parts,

$$\text{Im}(\omega_{\pm}) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{(-\gamma - A^2)^2 + 16\beta k^2 \nu^2 A^2} + \gamma + A^2)^{1/2} - \frac{A}{2}, \quad (12)$$

where $\gamma = -(4\beta - 4)k^2 \nu^2 - 4k^4 - 4$ and $A = \alpha k^4$. After some trivial algebraic manipulation, it is found that $\text{Im}(\omega_+) > 0$ if,

$$\nu^2 > g(k) = \frac{k^4 + 1}{k^2}. \quad (13)$$

The minimum of $g(k)$ is $g(1) = 2$. Hence, as soon as $\nu > \sqrt{2}$, $\text{Im}[\omega(k)]$ can be positive. The local instability criterion of the pipe with structural damping is thus the same as with viscous damping, given by Eq. (11).

Determination of the nature of the instability, convective or absolute, is less straightforward when dissipation is added. The existence of a third-order root cannot be used anymore to predict convective/absolute instability transition and a numerical analysis of the dispersion relation is necessary in this case. A general procedure is to then carry out a numerical branch analysis of the dispersion relation [3,4]. The nature of the instability is determined by the imaginary part of ω_0 , the frequency at which there is a pinching between k^+ and k^- branches. Using a systematic branch analysis on the present problem, it is found that $\text{Im}(\omega_0)$ is positive for all values of the velocity parameter $\nu > \sqrt{2}$, indicating that the instability is absolute.

The domains of local stability and instability in the (β, ν) plane are plotted in Fig. 2b. Comparison with Fig. 2a leads to the conclusion that dissipation strongly changes the local stability properties of the medium. A remarkable result is that the criterion of stability in the damped case is the same as for the existence of the static range in the undamped case, $\nu < \nu_s$. Moreover, $\nu_i > \nu_s$, the velocity for instability is consequently lower with dissipation than without dissipation. Analysis of destabilization by dissipation will be more deeply addressed in Section 3.3.

3.2. Tensionned pipe

In this section, the same analysis as in the previous section is done on the tensionned pipe, hence the main results will be given with less details. The dispersion relation is here

$$D(k, \omega) = (1 - i\alpha\omega)k^4 + (1 - \nu^2)k^2 + 2\sqrt{\beta}\nu k\omega - i\sigma\omega - \omega^2 = 0. \quad (14)$$

When dissipation is absent, $\alpha = 0$ and $\sigma = 0$, following de Langre and Ouvrard [7], the medium is found to be stable if

$$\nu < \nu_i = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta}}, \quad (15)$$

the instability being absolute if

$$\nu > \nu_d = \sqrt{\frac{8}{8 - 9\beta}} \quad (16)$$

and convective otherwise. This last critical velocity ν_d is also a criterion for the existence of a third-order root of the dispersion relation. But here, unlike the previous case of pipe on elastic foundation, ν_d is always greater than ν_i , and thereby no neutral range appears. However, another criterion for the existence of a third-order root exists, which leads to the

following criterion for existence of a range of neutral waves,

$$\nu > \nu_s = 1 \quad \text{and} \quad \nu < \nu_i. \quad (17)$$

This range arises at $\omega = 0$, hence it is a *static* range. In Fig. 3a, the three velocities ν_i , ν_s and ν_d are plotted as functions of β . Four domains of wave properties appear in this figure, absolute instability (AI), when $\nu > \nu_i$ and $\nu > \nu_d$, convective instability (CI), when $\nu_i < \nu < \nu_d$, stability with static range (SN), when $\nu_s < \nu < \nu_i$, stability with evanescent waves (E), when $\nu < \nu_s$. This wave properties map closely resembles the corresponding figure for the pipe on elastic foundation. The main difference being that there is no dynamic range of neutral waves in the case with the tensionned pipe.

The stability analysis done in the previous section, involving Eqs. (12) and (13) shows that as soon as $\sigma > 0$ or $\alpha > 0$, the medium is unstable if

$$\nu > 1. \quad (18)$$

Again, the criterion of instability in the damped case is the same as for the existence of the static range in the undamped case. This criterion is plotted in Fig. 3b. As in the case of the pipe on elastic foundation, damping has a destabilizing effect, here for any value of the mass ratio β .

3.3. Wave energy and the effect of dissipation on neutral waves ranges

The concept of wave energy has been introduced by Landahl [15]. The wave energy of neutral waves is calculated, i.e. $k \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$ and corresponds to the work done in slowly building up the wave starting from rest at time $t = -\infty$. On the particular problem of flow over compliant surfaces, which exhibits similar equations, such neutral waves and their energy have been extensively studied [5,16]. In particular it is predicted that a *negative energy wave* (NEW), also referred to as *class A* disturbance, is destabilized by the addition of damping, while positive energy waves (*class B* disturbances) are stabilized. Carrying out a study of the Kelvin–Helmholtz instability, Cairns [22] showed that the wave energy E of a neutral wave $y = A e^{i(kx-\omega t)}$ is given by

$$E = e|A|^2 = -\frac{\omega}{4} \frac{\partial D}{\partial \omega} |A|^2. \quad (19)$$

As this result is independent of the dispersion relation, it can be readily reused in the present case of the fluid-conveying pipe. For both pipes—tensionned and resting on an elastic foundation—the wave energy reads then

$$e = \frac{\omega}{2} (\omega - \sqrt{\beta} k \nu). \quad (20)$$

Since $e(\omega = 0) = 0$, there are NEW in the static range if

$$\left. \frac{\partial e}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = -\frac{1}{2} \sqrt{\beta} k \nu < 0. \quad (21)$$

The parameters β and ν are both positive, Eq. (21) is thus satisfied when $k > 0$. For $\alpha = 0$, $\sigma = 0$ and $\omega = 0$, the wavenumbers given by the dispersion relation of the pipe on elastic foundation, Eq. (8), are

$$k = \pm \sqrt{\frac{\nu^2 \pm \sqrt{\nu^4 - 4}}{2}}. \quad (22)$$

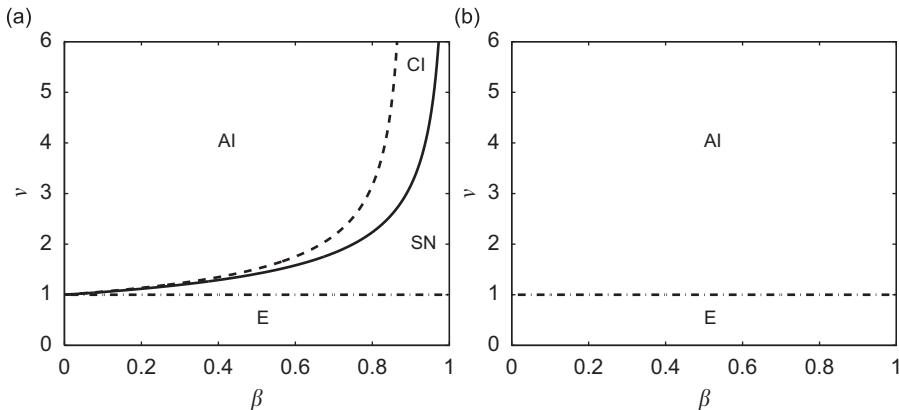


Fig. 3. Tensionned pipe, schematic view of the different domains of wave properties in the (β, ν) space; (—), $\nu = \nu_i$; (---), $\nu = \nu_d$; (- - -), $\nu = \nu_s$; AI, absolute instability; CI, convective instability; SN, stability with existence of the static range of neutral waves; E, no neutral waves range exists, there are evanescent waves at any real frequency; (a) without dissipation; (b) with dissipation.

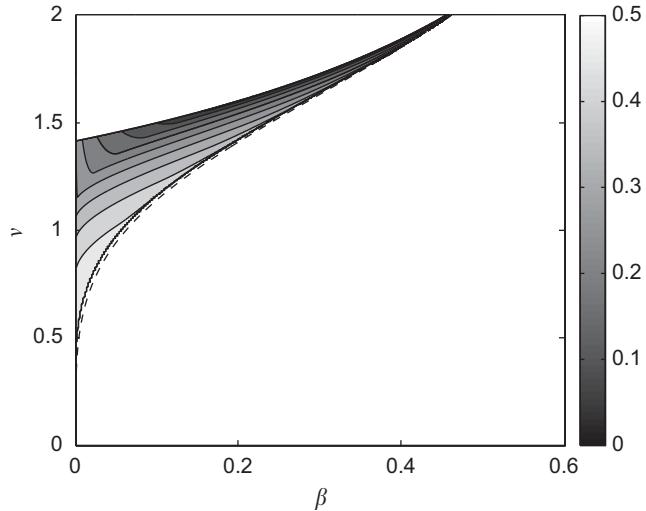


Fig. 4. Pipe on elastic foundation without dissipation, contour plot of the minimum of the wave energy in the domain of the parameters (β, ν) where the dynamic neutral range exists; (—), v_d , critical velocity for existence of the dynamic neutral range; (---), v_i , critical velocity for local instability.

When $\nu > \sqrt{2}$, i.e. when the static range exists, two of these wavenumbers are positive. Corresponding waves are hence NEW, which are destabilized by damping.

In the tensionned pipe case, dispersion relation (14) is used with $\alpha = 0$, $\sigma = 0$ and $\omega = 0$. The wavenumbers are here given by

$$k = \pm \sqrt{\nu^2 - 1}. \quad (23)$$

When the static range exists ($\nu^2 > 1$), two of these wavenumbers are positive. Again, corresponding waves are NEW and are destabilized by damping.

As the sign of wave energy in the dynamic range is less straightforward to characterize, a systematic numerical computation has been carried out on the whole domain of existence of the dynamic range. This last domain is defined by Eqs. (9) and (10). In Fig. 4, a contour plot of the minimum value of the wave energy among the four waves in the whole dynamic range is displayed. It appears in this figure that the minimum energy is always positive, so no NEW exists in the dynamic range, which is hence stabilized by the addition of damping.

The wave energy analysis developed in this section shed some light on the effect of dissipation on wave propagation. The first result is that when dissipation is added, some neutral waves in the static range become unstable waves, while the waves in the dynamic range become evanescent waves. Hence, neutral ranges do not exist anymore when dissipation is added. This explains why the local stability maps of Figs. 2b and 3b are much simpler than those of Figs. 2a and 3a. The second result is that the instability due to damping originates from the destabilization of negative energy waves in the static range, which has for consequence that the criterion for local instability with damping is the same as that of existence of the static range when damping is absent, $\nu > \nu_s$.

4. Global stability

Stability of finite length cantilevered pipes is now analyzed. The same media will be considered, with a new physical parameter introduced, the length L , and its associated non-dimensional parameter $l = L/\eta$. Boundary conditions are given by Eq. (7). A Galerkin numerical method [23], based on the beam modes, is used to compute the eigenmodes ϕ_n and eigenfrequencies ω_n of the system, so that the deflection of the pipe, expressed in the base of its eigenmodes, takes the form $y(x, t) = \text{Re}[\sum_n^\infty \phi_n(x) e^{-i\omega_n t}]$. The eigenfrequencies ω_n are referred to as *global*. Instability is predicted when one of them has a positive imaginary part. Up to 150 modes have been used to compute the eigenfrequencies of the longest pipes.

4.1. Pipe on elastic foundation

The marginal global stability curves of the pipe on elastic foundation without dissipation are plotted in Fig. 5a for different values of the non-dimensional length l . This plot presents similar results as in a previous paper [10], except that higher values of the mass ratio have been explored. As it was highlighted in this previous article, when $l \gg 1$, the global criterion of stability can be well approximated by the local criterion of existence of the dynamic neutral range, $\nu = v_d$. But for $l = 16$, one can observe that the global stability curve has an unusual shape when the mass ratio β is greater than 0.6. Some bubbles appear. The transition between global stability and instability is not a single line in the parameters space.

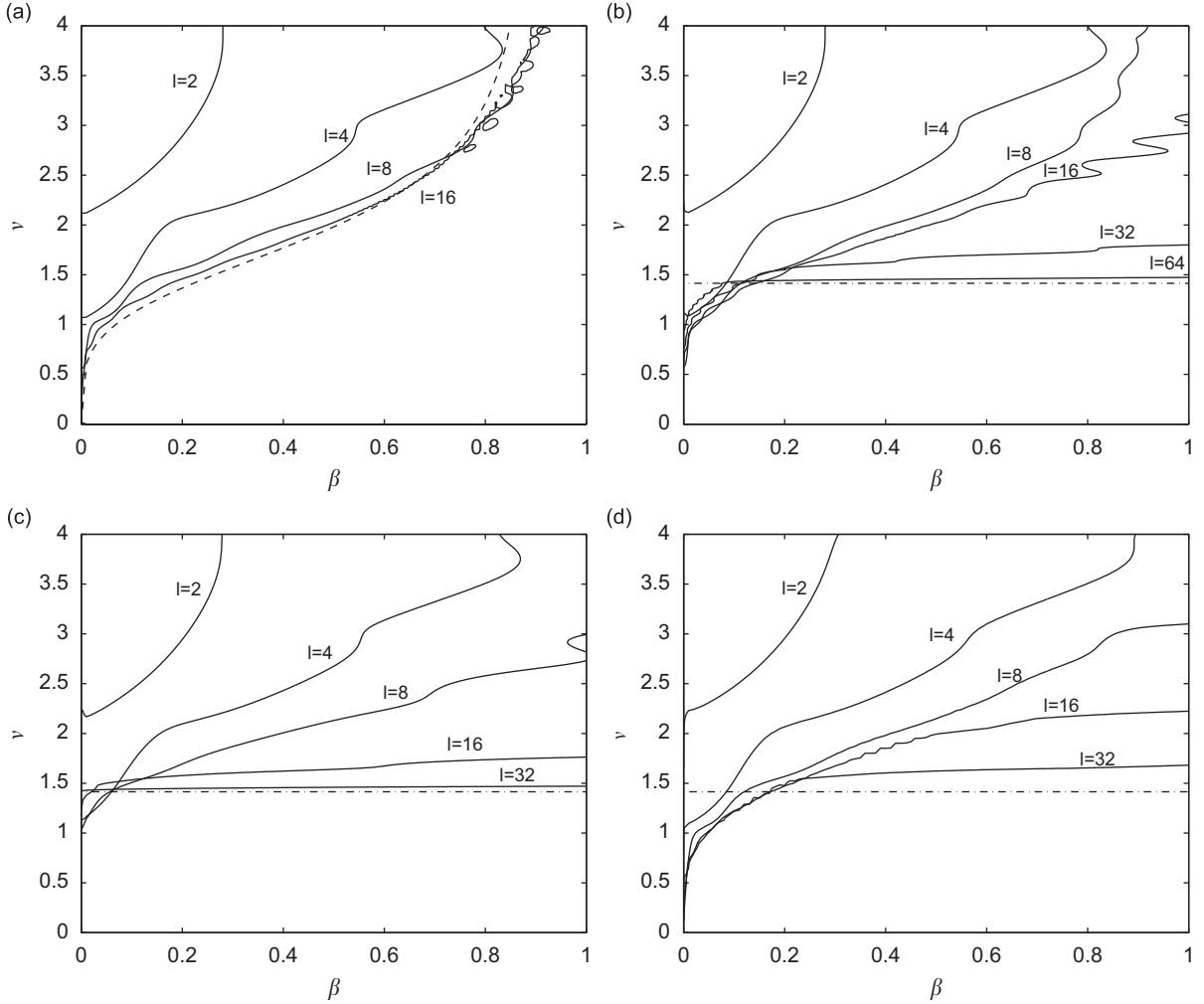


Fig. 5. Fluid-conveying pipe on elastic foundation, global stability curves for different values of the non-dimensional length l and of damping parameters σ and α . Above these curves, the system is unstable. (—), $\nu = \nu_d$; (---), $\nu = \nu_s$; (a) $\sigma = 0$ and $\alpha = 0$; (b) $\sigma = 0.01$ and $\alpha = 0$; (c) $\sigma = 0.1$ and $\alpha = 0$; (d) $\alpha = 0.01$ and $\sigma = 0$.

Inside the bubbles, one eigenfrequency has a positive imaginary part, indicating that the system is unstable for these values of the parameters. Computations with a very high number of modes have been done to ensure that it is not a numerical artefact. This phenomenon is the same as the one that induces the apparition of loops in global stability curves, first described by Gregory and Païdoussis [23], and is a consequence of successive changes of the number of beam-mode contributions to the eigenmodes of the system.

As dissipation has been found to strongly modify the local properties of stability, it is expected that it will also influence the global stability properties. Local absolute instability will now occur when $\nu > \nu_s = \sqrt{2}$, due to the destabilization of neutral waves in the static range. Hence it can be predicted that global stability for the long pipe will be determined by this criterion. In Fig. 5b and c, global stability curves are plotted for different lengths and different values of the damping parameters σ and α . As expected, when the length of the system is increased, the global instability transition approaches the local instability transition $\nu = \nu_s$.

When $\nu_s > \nu_d$, the addition of dissipation has hence a stabilizing effect, while for $\nu_s < \nu_d$, the addition of dissipation has a destabilizing effect. Transitions between the two regimes, stabilizing or destabilizing, occurs when $\nu_s = \nu_d$, at $\beta = \frac{2}{9}$.

4.2. Tensionned pipe

Fig. 6a shows the evolution of the marginal stability curve as the length is increased for the tensionned pipe without dissipation. Again, for the long system, the global stability is well predicted by a local criterion. As no dynamic range exists in this medium, the limit for the long system is the local instability transition criterion, $\nu = \nu_i$.

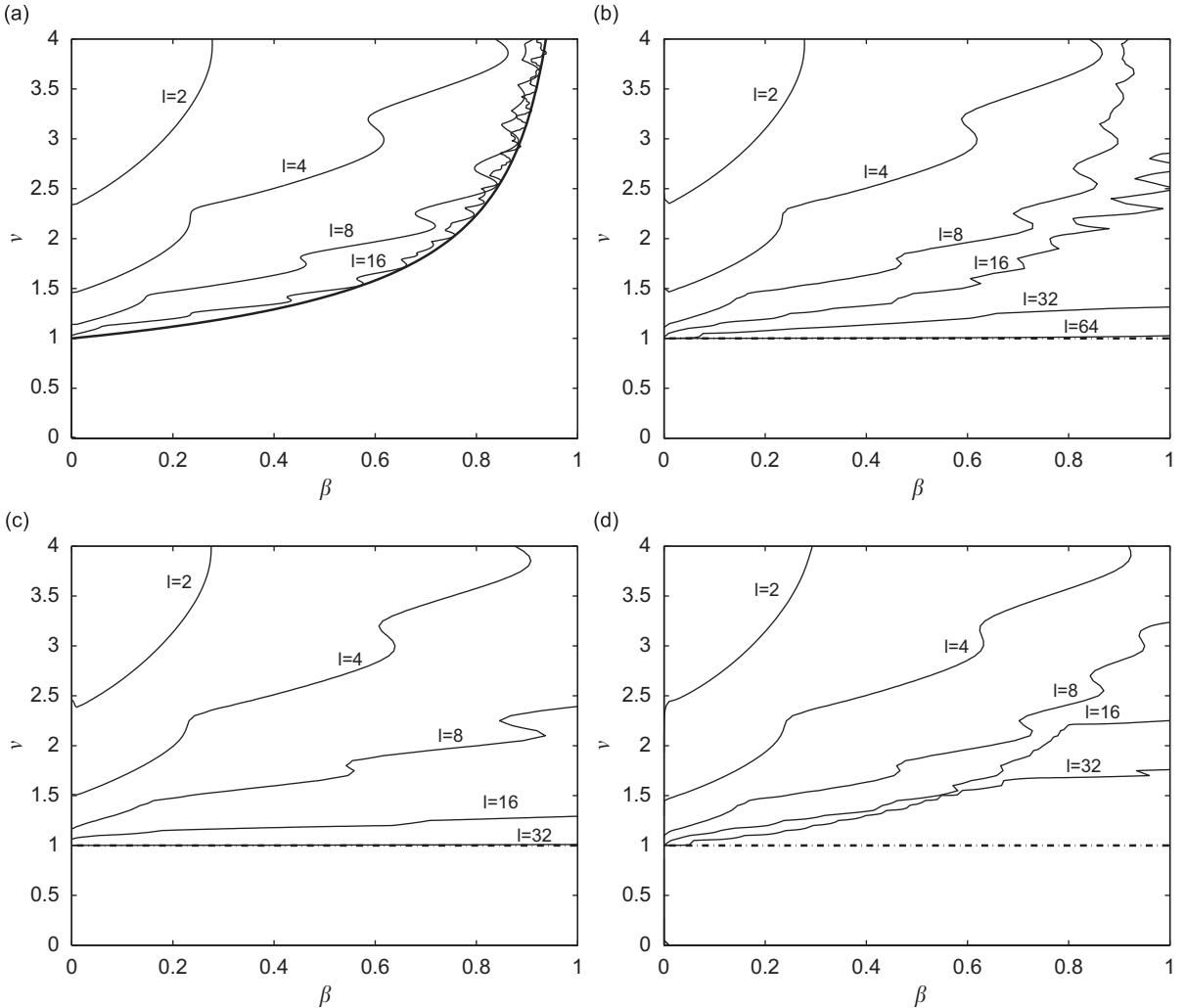


Fig. 6. Tensionned fluid-conveying pipe, global stability curves for different values of the non-dimensional length l and of damping parameters σ and α . Above these curves the system is unstable. (—), $v = v_i$; (---), $v = v_s$; (a) $\sigma = 0$ and $\alpha = 0$; (b) $\sigma = 0.01$ and $\alpha = 0$; (c) $\sigma = 0.1$ and $\alpha = 0$; (d) $\alpha = 0.01$ and $\sigma = 0$.

Like in the previous case of the pipe on elastic foundation, the static neutral range is destabilized by dissipation, so when dissipation is added to the medium, local instability occurs for $v > 1$. As it appears in Figs. 6b and c, the global marginal stability curve tends to a different limit, which is again the local stability criterion of the damped medium, $v = 1$. Here, destabilization by dissipation is observed for any value of the mass ratio β .

5. Prediction of global instability using a lengthscale criterion

It can be observed in Fig. 5b that before merging the local criterion of stability with dissipation, the curve approaches the local criterion without dissipation. This indicates that there exists an intermediate length where the local properties of stability of the undamped medium still dominate the global behavior of the system. To analyze and quantify this phenomenon, the characteristic length and time of each force present in Eq. (1) are now defined. A simple model, based on lengthscale comparisons will be next proposed. We will focus on the pipe on elastic foundation problem. Results obtained here will be directly applicable in the tensionned pipe problem.

The timescale τ , defined in Eq. (2), is the characteristic time associated with the spring foundation and corresponds to the period of oscillation of an unitary-length mass-spring oscillator of mass $M + m$ and rigidity S . The lengthscale η , defined in Eq. (2), is the length appearing in the response of the pipe on elastic foundation without flow, when subjected to the

transverse unitary forcing $F = \delta(X)$ [10],

$$Y(X) = e^{-X/\eta} \sin\left(2\pi \frac{X}{\eta}\right). \quad (24)$$

In the same manner, two other characteristic times τ_σ and τ_α , associated to the dissipation forces, may be defined. The first mentioned is the relaxation time of waves due to viscous damping

$$\tau_\sigma = \frac{M+m}{c}, \quad (25)$$

while the second is the relaxation time due to structural damping,

$$\tau_\alpha = \frac{M+m}{E^* I} \eta^4. \quad (26)$$

Noticeable difference between these two quantities is their dependence on the length η . Dependence on the wavelength is a well known characteristic of the structural dissipation, and induces a faster attenuation of higher frequency modes in structural vibrations. Conversely, the attenuation by viscous damping is not dependent on the wavelength. Characteristic lengths η_σ and η_α may now be associated with each dissipation time using the same relation as in Eq. (3),

$$\eta_\sigma = \left(\frac{EI\tau_\sigma^2}{M+m} \right)^{1/4} \quad (27)$$

and τ_α ,

$$\eta_\alpha = \left(\frac{EI\tau_\alpha^2}{M+m} \right)^{1/4}. \quad (28)$$

Finally, two non-dimensional lengths may also be defined for the system,

$$l_\sigma = \frac{L}{\eta_\sigma} = l\sigma^{1/2}, \quad l_\alpha = \frac{L}{\eta_\alpha} = l\alpha^{1/2}. \quad (29)$$

As pointed out by Carpenter and Garrad [5] in a similar problem of a fluid loaded elastic plate, the merging of the global stability criterion with a local criterion occurs when the most unstable wavelength is small compared to length L of the system. This limit is referred to as *the long system limit*. In the present problem of fluid-conveying pipe on elastic foundation, the global instability may be driven, in absence of dissipation, by the local instability, for $\beta > \frac{2}{3}$ or over-reflecting boundaries, for $\beta < \frac{2}{3}$. In the first case, using Eq. (8) with $\sigma = 0$, $\alpha = 0$ and $\phi = 0$, one finds that the first wave which is destabilized as v is increased above the critical value v_i has a corresponding wavenumber $k = 1$. The corresponding dimensional wavelength is hence $O(\eta)$. In the second case, when global instability is due to wave reflexions at boundary conditions, $\beta < \frac{2}{3}$, the wavelength to consider is that of neutral waves in the dynamic range. Looking for third-order roots of the dispersion relation (8) with $\sigma = 0$, $\alpha = 0$ and $\phi = 0$, one finds that the wavelength of neutral waves at the apparition of the dynamic neutral range is $\lambda = (1/4\pi)\sqrt{24 - 27\beta}$, which is also $O(1)$. The corresponding dimensional wavelength is thus $O(\eta)$. Finally, in both cases, $\beta > \frac{2}{3}$ or $< \frac{2}{3}$, the long system limit of the pipe without damping occurs when $L \gg \eta$, that is $l \gg 1$.

In the same manner, the global instability of the system with damping is predicted by a local criterion of the damped medium if $L \gg \eta_\sigma$ or $L \gg \eta_\alpha$, that is $l_\sigma \gg 1$ or $l_\alpha \gg 1$, respectively. Hence, when $l \gg 1$ but l_σ and $l_\alpha \ll 1$, it is possible to observe that global instability is predicted by a local criterion of the undamped system, despite the presence of damping. This behavior is expected to arise when $1 \ll l \ll \eta_\sigma/\eta$ and $1 \ll l \ll \eta_\alpha/\eta$. In order to simplify the discussion, both length ratios, η_σ/η and η_α/η , will be referred to as ρ in the following. Note that $\rho = \alpha^{-1/2}$ or $\sigma^{-1/2}$, depending on the type of dissipation in presence.

The critical velocity of global instability is plotted in Fig. 7 as a function of the length parameter l for representative values of the other parameters. In each of these plots, the role of dissipation is emphasized by comparing the critical velocity curves for different values of ρ . In all of these plots, the global instability criterion for $l \rightarrow \infty$ is given by the local criterion of the damped medium, except when $\rho = \infty$, i.e. in absence of dissipation. At intermediate lengths, $l \gg 1$ but $l < \rho$, the criterion of instability is that of the undamped system. The results are in agreement with the predictions made above.

In Fig. 8, the length l_c at which the critical velocity curve for global instability of the damped system deviates from the curve of the undamped system is plotted as a function of ρ . The line $l_c = \rho$ is plotted on the same figure for comparison. It appears on this figure that the transition between both local criteria, with and without damping, starts around $l = \rho$. The dispersion between the curves indicates that there exists a slight dependency on β . Indeed, for values lower than 0.5, l_c is below the line $l = \rho$, while for higher values, l_c is above. This phenomenon remains unpredicted by the simple model presented in this section.

Let us now summarize the methodology developed in this section. One has first to consider a slender structure modelized as an Euler–Bernoulli beam interacting with an axial flow, on which are acting an additional conservative restoring force (elastic foundation or tension) and a dissipative force (structural or viscous). Defining η the characteristic length associated with the conservative force, and η_d the lengthscale associated with the dissipative force, three cases may appear,

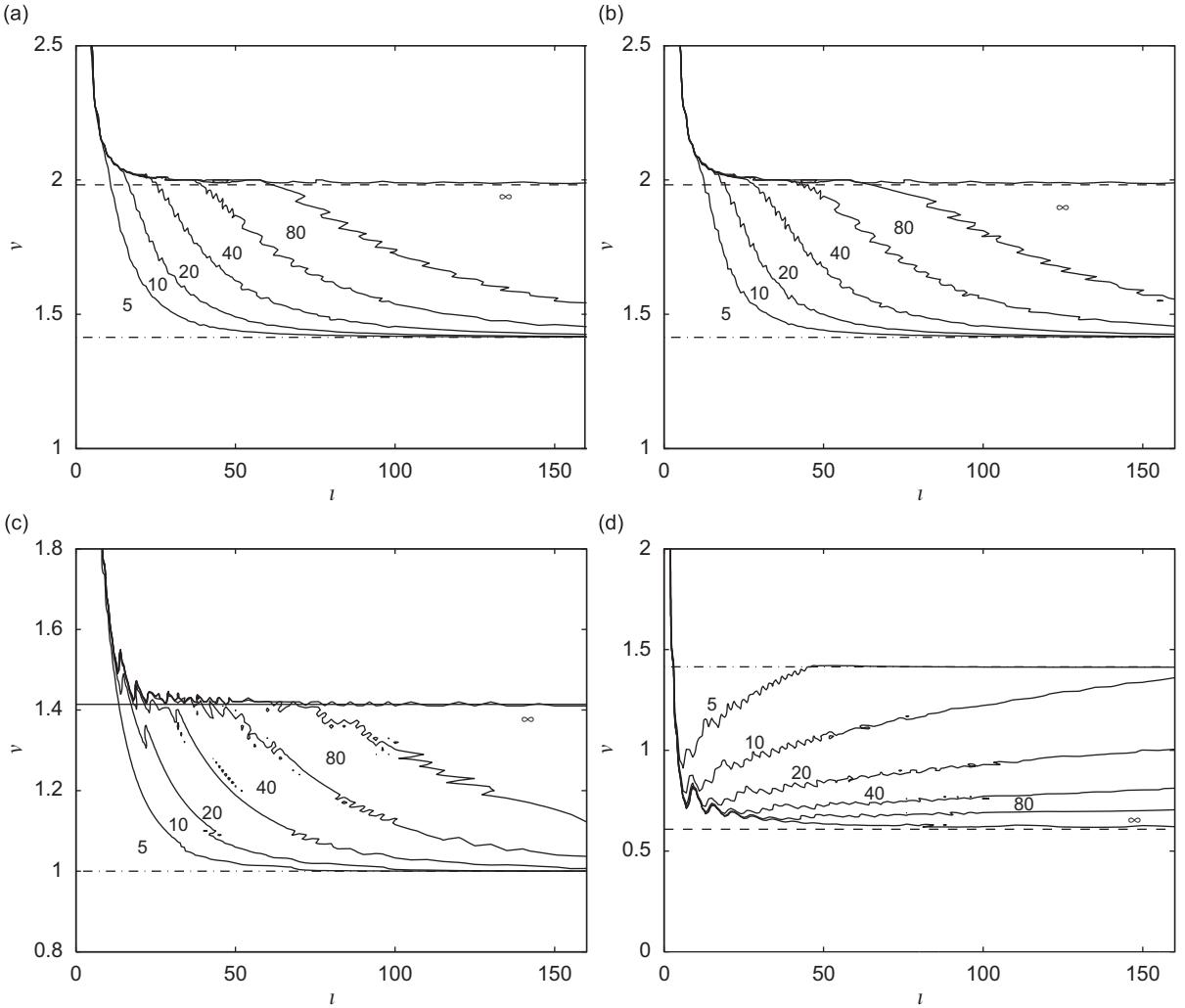


Fig. 7. Non-dimensional critical velocity for global instability as function of the non-dimensional length l for different values of the ratio η_σ/η or η_x/η ; (a) pipe on elastic foundation with viscous damping for $\beta = 0.5$; (b) pipe on elastic foundation with structural damping for $\beta = 0.5$; (c) tensionned pipe with viscous damping for $\beta = 0.5$; (d) pipe on elastic foundation with viscous damping for $\beta = 0.01$; (—), $\nu = \nu_i$; (---), $\nu = \nu_d$; (---), $\nu = \nu_s$.

- If $L \leq \eta$ and $L \leq \eta_d$, the system can be considered short, and the global instability can not be predicted by a local criterion.
- If $L \gg \eta$ but $L \leq \eta_d$, the local criterion without dissipation predicts global instability:

$$\text{Instability if } \nu > \nu_i \text{ or } \nu > \nu_d. \quad (30)$$

- If $L \gg \eta_d$, the local criterion with dissipation applies:

$$\text{Instability if } \nu > \nu_s. \quad (31)$$

6. Conclusion

Analysis of the effect of damping on the dynamic stability of fluid-conveying pipes has been carried out. Two types of systems have been considered, the fluid-conveying pipe on elastic foundation and the tensionned fluid-conveying pipe. After a complete investigation of the local stability properties in the parameters space, including the recall of previous results, it has been found that the critical velocity for instability of damped media can be much lower than the critical velocity of undamped media. This phenomenon becomes important at high values of the mass ratio. It has then been shown that it is due to the destabilization by dissipation of negative energy waves in a frequency range that was referred to as static in a previous paper [10]. Next, global stability properties have been investigated using numerical Galerkin computations. As the length is increased, the criterion for global instability becomes closely related to the local properties

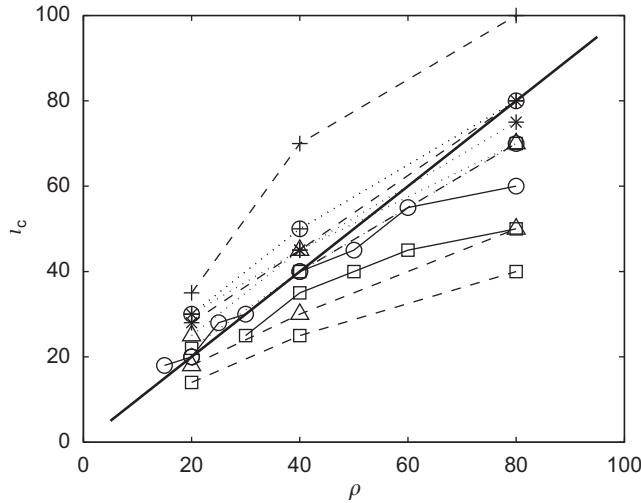


Fig. 8. Non-dimensional length l_c at which the critical velocity curve for global instability of the damped system deviates from the curve of the undamped system, as function of ρ ; (+), $\beta = 0.3$; (*), $\beta = 0.4$; (o), $\beta = 0.5$; (Δ), $\beta = 0.6$; (\square), $\beta = 0.7$; (—), pipe on elastic foundation with viscous damping; (---), pipe on elastic foundation with structural damping; (· · ·), tensionned pipe with viscous damping; bold line, $l_c = \rho$.

of the waves in the medium, and it is here found that with damping the critical velocity tends asymptotically to the criterion of local stability. In real situations, damping is always present, giving rise to the question if analyses carried out without damping are at all relevant. But it has been observed in the last section of the present paper that for sufficiently low damping coefficients, the critical velocity for global instability is still predicted by a local criterion of the undamped medium, which is the existence of the dynamic neutral range in the elastic foundation case, and the local instability in the tension case. A reasoning based on lengthscale ratios has been carried out to determine which criterion, with or without damping, predicts global instability.

These results may be applicable in other systems where a slender structure interacts with an axial flow, such as flags, compliant surfaces in presence of a boundary layer, or leakage flow problems. In many of these media, negative energy waves have been identified. Hence, local properties of stability change in the same manner as the present problem of the pipe. It is thus expected that the same will happen to global stability. For these systems, global instability predictions often imply more onerous numerical computations, because of the fact that the characterization of fluid loading due to external flow is a more complicated task than with an internal plug flow—see for instance Ref. [24] for the investigation of a three-dimensional potential flow around a flag, or [25], where a new numerical method is proposed to predict instability of a flexible plate in an axial flow. In these problems, local stability analyses associated with lengthscale comparisons could provide simple but sufficient stability criteria.

On the other hand, gravity-related tension has not been considered in the paper. The tension induced by gravity in a hanging slender structure varies linearly, from zero at the downstream end to the weight of the structure at the upstream end. Results presented here would be applicable to the spatially varying media only if the characteristic unstable wavelengths were small compared to the typical length of variation of local properties. It has been shown that it is not the case for the hanging fluid-conveying pipe [26], or the hanging ribbon [27], but some other systems might fall into this category, like slender structures or membranes tensionned by friction [28], or a fluid-conveying pipe where both elastic foundation and gravity-related tension are present.

Destabilization by dissipation has been observed also in the case of finite length fluid-conveying pipe with neither elastic foundation nor tension. But in this case, local instability is observed at any value of the parameters. It is hence not possible to explain a change in the global stability criterion by a change of the local stability criterion. This is currently under investigation.

Acknowledgment

This work has been funded by the Agence Nationale de la Recherche, under the project “DRAPEAU”, number ANR-06-JCJC-0087.

References

- [1] M.P. Paidoussis, The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics, *Journal of Sound and Vibration* 310 (2008) 462–492.
- [2] M.P. Paidoussis, *Fluid-structure Interactions, Slender Structures and Axial Flow*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1998.

- [3] A. Bers, Space-time evolution of plasma instabilities—absolute and convective, M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev (Eds.), *Handbook of Plasmas Physics*, Vol. 1, North-Holland, New York, 1983, pp. 451–517.
- [4] P. Huerre, M. Rossi, Hydrodynamic instabilities in open flows, *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [5] P.W. Carpenter, A.D. Garrad, The hydrodynamic stability over Kramer-type compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities, *Journal of Fluid Mechanics* 170 (1986) 199–232.
- [6] A.G. Kulikovskii, I.S. Shikina, On the bending oscillation of a long tube filled with moving fluid, *Izvestia Akademii Nauk Arminskoï SSR* 41 (1) (1988) 31–39.
- [7] E. de Langre, A.E. Ouverard, Absolute and convective bending instabilities in fluid-conveying pipes, *Journal of Fluids and Structures* 13 (6) (1999) 663–680.
- [8] A.G. Kulikovskii, in: L.D. Landau, E.M. Lifshitz (Eds.), *Course of Theoretical Physics, Physical Kinetics*, Vol. 10, 1966, p. 281.
- [9] O. Doaré, E. de Langre, The role of boundary conditions in the instability of one-dimensional systems, *European Journal of Mechanics B—Fluids* 25 (6) (2006) 948–959.
- [10] O. Doaré, E. de Langre, Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations, *Journal of Fluids and Structures* 16 (2002) 1–14.
- [11] F. Gallaire, J.M. Chomaz, The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown, *Physics of Fluids* 16 (2) (2004) 274–286.
- [12] N. Peake, On the unsteady motion of a long fluid-loaded elastic plate with mean flow, *Journal of Fluid Mechanics* 507 (2004) 335–366.
- [13] D.J. Acheson, On over-reflexion, *Journal of Fluid Mechanics* 77 (3) (1976) 433–472.
- [14] J. Andries, M. Goosens, The influence of resonant mhd wave coupling in the boundary layer on the reflection and transmission process, *Astronomy and Astrophysics* 375 (2001) 1100–1110.
- [15] M.T. Landahl, On the stability of laminar a compressible boundary layer over a flexible surface, *Journal of Fluid Mechanics* 13 (1962) 609–632.
- [16] T.B. Benjamin, The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows, *Journal of Fluid Mechanics* 16 (1963) 436–450.
- [17] N. Peake, Nonlinear stability of a fluid-loaded elastic plate with mean flow, *Journal of Fluid Mechanics* 434 (2001) 101–118.
- [18] I. Lottati, A. Kornecki, The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes, *Journal of Sound and Vibration* 2 (109) (1986) 327–338.
- [19] V.M. Vassilev, P.A. Djondjorov, Dynamic stability of viscoelastic pipes on elastic foundations of variable modulus, *Journal of Sound and Vibration* 297 (1–2) (2006) 414–419.
- [20] F.J. Bourrières, Sur un phénomène d'oscillation auto-entretenue en mécanique des fluides réels (On a phenomenon of self-sustained oscillations in the mechanics of real fluids), *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air* 147 (1939).
- [21] W. Roth, Instabilität durchströmter Rohre (Instability of flow in pipes), *Ingenieur Archiv* 33 (1964) 236–263.
- [22] R.A. Cairns, The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows, *Journal of Fluid Mechanics* 92 (1979) 1–14.
- [23] R.W. Gregory, M.P. Païdoussis, Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluids, I. Theory, *Proceedings of the Royal Society of London, A* 293 (1966) 512–527.
- [24] C. Eloy, C. Souilliez, L. Schouveiler, Flutter of a rectangular plate, *Journal of Fluids and Structures* 23 (6) (2007) 904–919.
- [25] R.M. Howell, A.D. Lucey, P.W. Carpenter, M.W. Pitman, Interaction between a cantilevered-free flexible plate and ideal flow, *Journal of Fluids and Structures* 25 (3) (2009) 544–566.
- [26] O. Doaré, E. de Langre, The flow-induced instability of long hanging pipes, *European Journal of Mechanics A—Solids* 21 (2002) 857–867.
- [27] C. Lemaitre, P. Hémon, E. de Langre, Instability of a long ribbon hanging in axial air flow, *Journal of Fluids and Structures* 7 (2005) 913–925.
- [28] M.P. Païdoussis, *Fluid-structure Interactions, Slender Structures and Axial Flow*, Vol. 2, Academic Press, New York, 2004.

Measurement of flow separation in a human vocal folds model

Petr Šidllof · Olivier Doaré · Olivier Cadot ·
 Antoine Chaigne

Received: 10 February 2010 / Revised: 18 November 2010 / Accepted: 14 December 2010 / Published online: 7 January 2011
 © Springer-Verlag 2011

Abstract The paper provides experimental data on flow separation from a model of the human vocal folds. Data were measured on a four times scaled physical model, where one vocal fold was fixed and the other oscillated due to fluid–structure interaction. The vocal folds were fabricated from silicone rubber and placed on elastic support in the wall of a transparent wind tunnel. A PIV system was used to visualize the flow fields immediately downstream of the glottis and to measure the velocity fields. From the visualizations, the position of the flow separation point was evaluated using a semiautomatic procedure and plotted for different airflow velocities. The separation point position was quantified relative to the orifice width separately for the left and right vocal folds to account for flow asymmetry. The results indicate that the flow separation point remains close to the narrowest cross-section during most of the vocal fold vibration cycle, but moves significantly further downstream shortly prior to and after glottal closure.

1 Introduction

Human voice is created by expiring air from the lungs through a narrow constriction called *the glottis*. This constriction is formed by the vocal folds, located in the larynx.

P. Šidllof (✉)
 Institute of Thermomechanics,
 Academy of Sciences of the Czech Republic,
 Dolejškova 5, 182 00 Prague 8, Czech Republic
 e-mail: sidlof@it.cas.cz

O. Doaré · O. Cadot · A. Chaigne
 Unité de Mécanique (UME), ENSTA Paris Tech,
 Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau cedex, France

The vocal folds (also called the vocal cords) are two symmetric soft tissue structures fixed between the thyroid cartilage and arytenoid cartilages. Basically they are composed of the thyroarytenoid muscle and ligament covered by mucosa. Under certain conditions (subglottal pressure, glottal width, longitudinal tissue tension), the vocal folds can start to oscillate and in regular phonation close the channel periodically, thus creating disturbances of the pressure field. These pressure disturbances are further filtered by the vocal tract, radiated from the mouth, and perceived as voice.

The concept of fluid–structure–acoustic interaction between the airflow, elastic vocal folds, and sub- and supraglottal acoustic spaces relies on knowledge of aerodynamics in the larynx. However, due to periodic closure of the glottal channel during vocal fold vibration and inherent unsteadiness of the airflow, the aerodynamic effects in the larynx are very complex. In spite of the progress in fundamental research of human voice production during recent years, some features of the glottal flow are not yet fully understood, one of them being flow separation from the vocal fold surfaces.

From the fluid-mechanical point of view, the human larynx can be seen as a nearly planar nozzle with time-varying clearance. In the convergent part, the airflow accelerates. Near the narrowest cross-section, airflow separates due to adverse pressure gradient and forms a jet (see Fig. 1). Although flow separation in divergent ducts has been intensively studied, usable criteria predicting flow separation are known only for simple cases. Fox and Kline (1962) published performance maps for straight and conical diffusers: in these cases, the most important factors are the area ratio, divergence angle, and inlet boundary layer blockage. Generally, the authors show that the boundary layer does not separate and the flow remains attached to

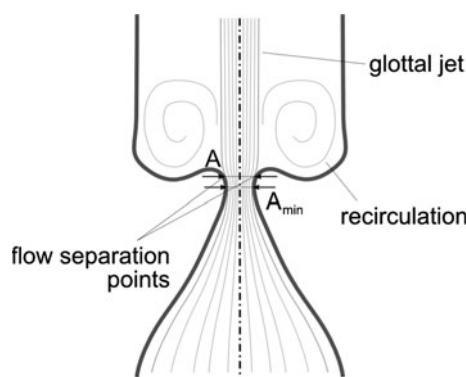


Fig. 1 Symmetric airflow in the glottis (idealization). Physiological orientation—flow in the inferior-to-superior direction

both walls only for low divergence half-angles (less than 10° for short diffusers, less than 1° for long ones). As the divergence angle increases, the flow shifts to transitory stall and further to bistable stall, when the flow separates from one wall only. For even higher divergence angles and diffuser lengths, there is jet flow, where the mainstream almost ignores the walls and passes at nearly constant area.

For the much more complex case of flow past human vocal folds, however, there are no general criteria predicting where exactly the flow separation takes place, as this can be influenced by many factors: interaction of the jet with supraglottal turbulent and vortical structures; flow interruption during glottal closure and formation of the new jet when the glottis reopens; whether the boundary layer has enough time to develop, etc. Yet, the information on the flow separation position is essential, e.g., in simplified computational models of phonation, where the airflow is usually modeled by Bernoulli or Euler equations. These models, still widely used due to their computational efficiency, require prior knowledge of the separation point position to obtain realistic pressure distributions along the vocal folds.

In the field of voice production research, the importance of the flow separation point movement was assessed theoretically in the paper of Krane and Wei (2006). Zhang (2008) showed in his sensitivity study that the flow separation location has significant impact on the eigenmode-coupling effect of the flow-induced stiffness, which he regards as a primary mechanism of phonation onset. He concludes that the high sensitivity to the flow separation location indicates to the need for phonation models to be capable of accurate prediction of flow separation.

In the simplified computational models of phonation, the position of the separation point is either fixed to the superior margin of the vocal folds (Story and Titze 1995; Horáček et al. 2005; Zanartu et al. 2007; Zhang et al. 2007) or supposed to move along the divergent part of the glottis. In this case, its position is usually specified using a

semiempirical criterion, which states that the jet separates at the position where the channel cross-section A reaches $A/A_{\min} = FSC$, (1)

where A_{\min} is the minimum glottal cross-section (see Fig. 1) and FSC is a constant which can be called “flow separation coefficient”. In different published papers, various values of FSC are used: Deverge et al. (2003) sets $FSC = 1.2$ (based on the pioneer work of Pelorson et al. 1994) and private communication with Liljencrants), the model of Lucero (1998) assumes $FSC = 1.1$. In their comparative study, Decker and Thomson (2007) tested different values of the flow separation coefficient: $FSC = 1.2$ and $FSC = 1.47$ (according to finite volume computations of Alipour et al. (1996) and Alipour and Scherer (2004)). Recently, Cisonni et al. (2008) published data on the flow separation point coefficient computed by inverse simplified flow models. According to their results, the coefficient remains almost constant with a value $FSC = 1.08$ when a Poiseuille model is employed, or oscillates in the range $FSC = 1.02–1.07$ when a Bernoulli model is used.

It appears that a criterion for flow separation position expressed by Eq. (1) approximately holds for steady or quasi-steady flow, but its validity for intrinsically unsteady pulsating flow past vibrating vocal folds is questionable. Vilain et al. (2004) discusses this issue and proposes to solve the glottal flow alternatively by Thwaites' method within the boundary layer. This is done by Hirtum et al. (2005), whose simplified Navier–Stokes solver predicts $FSC = 1.2–1.75$.

The next controversial issue is that the criterion (1) implicitly assumes that the glottal flow is symmetric with regard to glottal mid-plane and that it separates at the same location on the right and left vocal folds. However, many of the recent works on glottal airflow dynamics, both computational and experimental, show that in reality the behavior of the glottal jet is more complex and strongly asymmetric. During vocal fold vibration, the location where the airflow separates might move down- and upstream considerably.

Hofmans et al. (2003), solving the Navier–Stokes equations by the “viscous vortex blob” method, obtained $FSC = 1.2$ for a narrow glottis and $FSC = 1.4–1.6$ for widely abducted vocal folds. The finite volume computations of Alipour and Scherer (2004) yielded $FSC = 1.1–1.9$. Thomson et al. (2005) were among the first to include fluid–structure interaction in a FEM model and compared the computational results with experiments on a true-scale rubber physical model, but did not investigate flow separation. The paper of Suh and Frankel (2007), who solved the Favre-filtered compressible Navier–Stokes equations in 3D by finite element method, was focused on flow–acoustic

interaction. Tao et al. (2007), using the Flotran solver coupled to a 2-mass model programmed in ANSYS APDL, pointed out that the asymmetry of the driving force on the vocal folds and their displacement asymmetry can reach 11%. Recently, Sciamarella and Quéré (2008) analyzed the flow past vibrating rigid vocal folds using a multigrid finite difference method and showed that the mobility of the flow separation point is nontrivial and only rarely quasi-static. The flow separation coefficient, which was evaluated, ranged between $FSC = 1.0\text{--}1.3$.

Before the laser flow measurement methods were available, the experimental papers on glottal aerodynamics, e.g., Barney et al. (1999) and Alipour and Scherer (2006), used hot-wire anemometry to measure flow velocity, or discrete pressure taps to obtain pressure distributions (Scherer et al. 2001). Neither of these methods provides sufficient spatial resolution to evaluate the position of the flow separation point. Shinwari et al. (2003), using a 7.5 times scaled plexiglass static model with vocal folds in different configurations, measured pressure distributions and obtained, among others, some quantitative data on flow separation in terms of distance from the minimal cross-section. For various transglottal pressures, the separation point was at 0.23 cm on the vocal fold, where the flow was attached, and at 0.02 cm on the opposite one.

With the development of laser flow visualization techniques and PIV, the possibilities of flow field measurements extended considerably. First, glottal flow visualizations and PIV measurements were published by Triep et al. (2005), who used a three times scaled hydrodynamic setup, and Erath and Plesniak (2006a, b) on a static 7.5 times life-size vocal fold model. Kucinschi et al. (2006) confronted his Fluent computations with pressure and flow rate measurements on a mechanically driven physical model, but did not assess velocity fields. Li et al. (2006) used a similar technique (with a static physical model) and tried to evaluate the flow separation points, although only qualitatively. Like Triep et al. (2005), Krane et al. (2007) made measurements on an externally driven model of the human glottis in a water channel, which operated at lower frequencies.

An extensive PIV data set on glottal flow was published by Neubauer et al. (2007), who used a life-sized model of Thomson et al. (2005) and quasi-phase-locked PIV to measure near-field flow structures. The paper provides detailed data on jet core velocity, jet inclination angle, and also on the flow separation point, however only qualitatively. The paper of Becker et al. (2009) is focused on elucidation of the mechanisms of sound production in the larynx. The authors used a synthetic life-sized self-oscillating vocal fold model. Their results demonstrate the existence of the Coanda effect in phonation. Erath and

Plesniak (2010) published a study on asymmetric flow features in the glottis. Using an externally driven 7.5 times life-sized model precisely mimicking vocal fold oscillation, they quantify jet skewing in the divergent part of the glottis and deduce implications of flow asymmetries on sound production. In a recent paper, Triep and Brücker (2010) used an improved experimental setup equipped with time-resolved PIV to show that the supraglottal flow field is highly 3D. Their results also show that the presence of the ventricular folds decreases the pressure loss and stabilizes the jet during the divergent phase.

In spite of the considerable amount of data published on supraglottal velocity fields, there seems to be a lack of measurements with sufficient resolution to draw systematic conclusions regarding airflow separation in human phonation. This paper presents an experimental study providing quantitative data on the position of the flow separation point during vocal fold vibration. The glottal airflow in a physical self-oscillating vocal fold model was visualized using a phase-locked PIV system. The location of the flow separation point was evaluated from the visualizations by a semiautomatic procedure.

2 Methods

2.1 Vocal fold model

A new physical model of human vocal folds was designed for the current study. The model was proposed as a vocal-fold-shaped element vibrating in a rectangular channel. Unlike most of the physical models reported in previous works, in this case, the vocal fold vibration was flow-induced, not externally forced. The shape of the vocal folds that has been most widely used in mathematical and physical modeling of human voice seems to be model “M5”, proposed by Scherer et al. (2001, 2002) and used, among others, in theoretical and experimental studies by him, Thomson et al. (2005), or Erath and Plesniak (2006a). The geometry of the “M5” model is piecewise linear with rounded corners. It is based on data from X-ray databases and provides an easily parametrizable approximation of the vocal fold shape during oscillation. In this work, the authors decided to specify the shape of the model vocal folds according to their own measurements of excised female human larynges in prephonatory position. The description of the methods used and a detailed quantitative specification of the vocal fold shape measured can be found in Šidllof et al. (2008). The shape was described by a piecewise cubic spline. Unlike the “M5” model, the shape is not composed of straight segments, but changes the curvature continuously. In the region where flow separation takes place (in the divergent part, downstream of the

narrowest cross-section), the radius of curvature is approximately 5.4 mm (which scales to 1.35 mm lifesize).

The model vocal folds were cast using RTV-II type 69199 two-compound silicone rubber. In the configuration presented here, the upper vocal fold was fixed to the channel wall in order to avoid asymmetric modes of vibration and situations where the vocal folds vibrate with significantly different amplitudes or even dissimilar frequencies. The second silicone vocal fold, glued on a light rigid support, was mounted on four flat springs into the wall of the channel. The prephonatory adduction of the vocal folds can be set precisely by two adjusting screws.

The physical dimensions of the real human larynx are very small, making the design of a life-sized physical model a very difficult issue. In order to perform high-resolution measurements on a mechanical model with well-defined properties, the physical model was scaled up by a factor of four. Table 1 summarizes the important dimensional and dimensionless parameters of the real larynx and the physical model, particularly the Reynolds and Strouhal numbers

$$Re = \frac{U_0 L}{v}, \quad St = \frac{f L}{U_0} \quad (2)$$

based on the mean subglottal velocity U_0 , kinematic viscosity v , fundamental frequency of vibration f and vocal fold thickness L (see Fig. 2).

The elasticity of the vocal folds is modeled mainly by the stiffness of the flat springs. As shown in Fig. 4, each spring was clamped to a rigid beam on one side and screwed to the rigid support of the vocal fold on the other. The dimensions ($85 \times 10 \times 0.5$ mm) and material (brass alloy, Young modulus 100 GPa) of the springs were designed so that the first natural frequency of the system matched the desired scaled frequency. After fabrication, the force-deflection curve of the springs was measured. Within the operational limits, the response was roughly linear (slightly hardening under heavier loads), with stiffness about 200 N/m per one spring. The stiffness of the

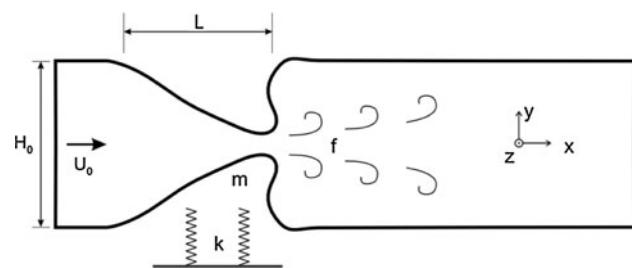


Fig. 2 Overview of the important dimensional parameters: channel height H_0 , inlet flow velocity U_0 , characteristic length (vocal fold thickness) L and frequency f , mass m and stiffness k

silicone rubber itself would be too large to allow self-sustained oscillation with the desired frequency and plays important role during vocal fold collisions only.

The elastic support gives the vocal fold three degrees of freedom. The first is the “heaving” (10) mode of vibration, where the vocal fold translates along the y -axis (see Fig. 2 for orientation of the coordinate system). In the second, “rocking” (11) mode, the mass rotates about the z -axis. The elastic support itself does not block the third, undesired, “torsional” (20) mode, where the vocal fold rotates about the x -axis. Frequency analysis of the impulse response shows that the natural frequency of the largely dominant heaving mode is 11.0 Hz. The second highest peak in the spectrum (about 20 dB lower than the first one) at 21.9 Hz belongs to the torsional mode. The high-speed camera recordings of flow-induced vibration revealed, however, that the torsional mode is suppressed by collisions against the opposite vocal fold and most likely also by the aerodynamic damping, since this mode did not occur even for vibration without collisions at low flow rates. The rocking mode manifests as an indistinct peak at 38 Hz. As a result, the flow-induced vibration occurs slightly above the first natural frequency and has mostly the character of the first (10) mode.

2.2 Experimental setup

The vocal fold model was mounted in a plexiglass wind tunnel. A centrifugal fan regulated by a frequency inverter drives the flow through a honeycomb screen into a long circular channel intended to suppress the inlet turbulence (see Figs. 3, 4). Further, the channel cross-section contracts smoothly by factor $f \approx 6$ into a rectangular 100 × 40 mm inlet of the measuring section with the vocal folds. Downstream of the vocal folds, the channel continues 40 cm to simulate the vocal tract and terminates freely into ambient air.

To allow free motion of the vocal fold, there has to be a small gap between the vocal fold and the channel walls. The leakage flow at the inferior margin (left edge in Fig. 3)

Table 1 Comparison of the relevant dimensional and dimensionless parameters: mean subglottal velocity U_0 , channel height H_0 , vocal fold thickness L , oscillation/vortex shedding frequency f , transglottal pressure Δp , Reynolds and Strouhal number Re and St

	Real larynx	Physical model
U_0 (m/s)	1–10	1.4–2.5
H_0 (mm)	10–20	40
L (mm)	10	40
f (Hz)	100–400	10–14
Δp (Pa)	200–2,000	50–250
Re	600–6,000	3,000–6,000
St	0.1–1	0.2–0.3

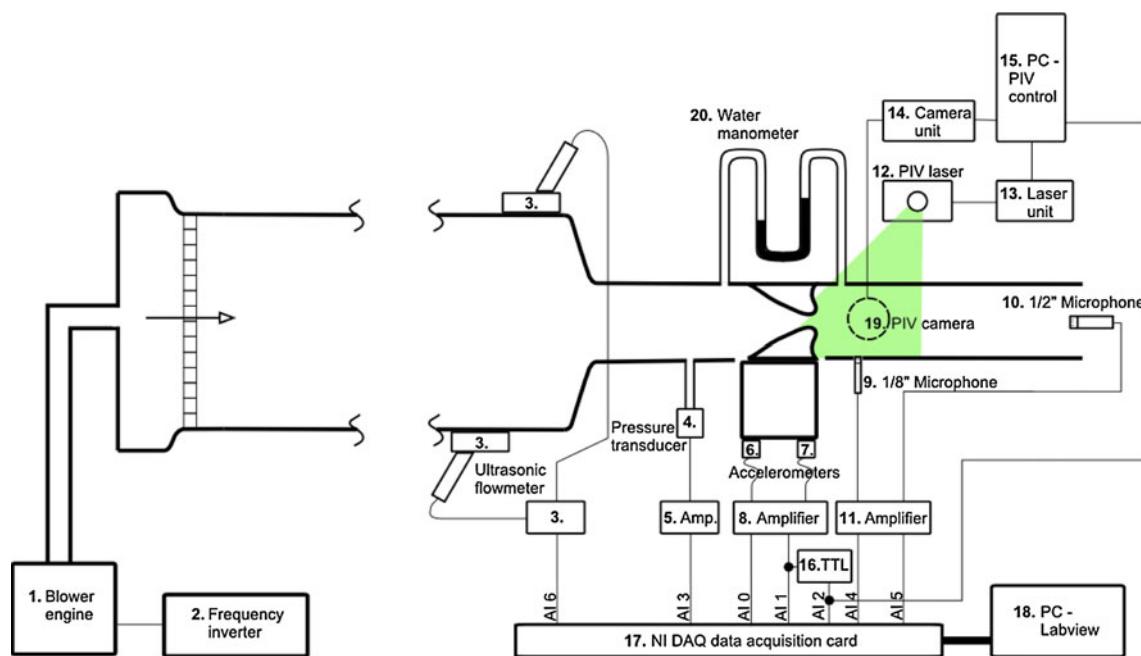


Fig. 3 Diagram of the experimental setup used for the measurements of vocal fold vibration and for visualization of the supraglottal flow. 1 Rietschle Thomas centrifugal fan (2,200 W, $\Delta p_{max} = 29$ mbar, $Q_{max} = 2,770 \text{ m}^3/\text{h}$). 2 Omron Sysdrive 3G3MV frequency inverter (380 V, 0–60 Hz). 3 GE Panametric GC 868 ultrasonic gas flowmeter. 4 Validyne DP15TL dynamic pressure transducer (steel membrane 0.125 PSI FS). 5 Validyne CD23 amplifier. 6, 7 Brüel&Kjær 4507C accelerometers. 8 Brüel&Kjær Nexus conditioning amplifier type 2692 (frequency bandpass 1 Hz–1 kHz). 9 G.R.A.S. 1/8" condenser microphone type 4138, G.R.A.S. preamplifier type 26AJ. 10 G.R.A.S.

1/2" prepolarized free field microphone type 40BE, G.R.A.S. preamplifier type 26AJ. 11 Brüel&Kjær Nexus conditioning amplifier type 2690. 12 New Wave Research PIV laser SOLO 3–15. 13 New Wave Research SOLO III laser unit. 14 LaVision Imager PRO camera unit. 15 PC-2proc Intel Xeon, software Davis v7. 16 Philips PM5715 TTL/pulse generator. 17 National Instruments NI DAQPad-6015 data acquisition card. 18 PC-software NI LabView v7.1. 19 LaVision Imager PRO camera (1,600 × 1,200 pixel, Canon macro TV zoom lens). 20 Kimo water manometer (precision 0.5 mm H₂O (5 Pa))

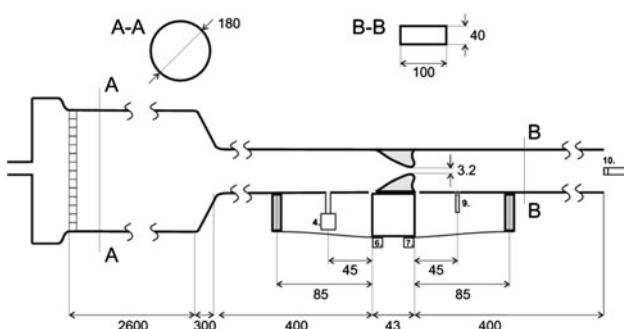


Fig. 4 Schematic of the vocal fold model and important dimensions of the wind tunnel (in millimeters)

was blocked by a thin membrane. Since the mean supraglottal pressure in the model was close to atmospheric pressure, the leakage at the superior margin was not important. The airflow along the side walls, which could not be completely avoided, did not significantly influence the supraglottal velocity fields measured in the channel mid-plane.

The setup was equipped with accelerometers (Brüel&Kjær 4507C), mounted below the apex and leading edge of

the vocal fold to record vocal fold vibration. The frequency spectra of the acceleration signal were used to detect the frequency of vibration of the vocal fold. To capture the subglottal pressure including the DC part of the signal, dynamic pressure transducers (Validyne DP15TL, steel membrane 0.125 PSI FS) were used. Two microphones (G.R.A.S. 1/8" condenser microphone type 4138 mounted flush with the wall, G.R.A.S. 1/2" prepolarized free field microphone type 40BE located at the channel exit) recorded the supraglottal dynamic pressure and the radiated acoustic pressure. To measure the mean flow in the channel, an ultrasonic gas flowmeter (GE Panametric GC 868) was fixed near the downstream end of the circular channel. The diagram in Fig. 3 shows the locations and wiring of transducers used. The important dimensions are summarized in Fig. 4.

The PIV system consisted of a Nd:YAG laser (New Wave Research Solo III, maximum repetition rate 15 Hz, 120 mJ), laser unit, and the PIV camera and unit (La Vision Imager PRO, 1,600 × 1,200 pix, max. 15 frames/s). The flow was seeded from an olive oil atomizer upstream of the honeycomb screen. The camera lens (Canon macro TV zoom), fixed 1.5 cm from the plexiglass wall, had a field of view of about 60 × 45 mm, providing spatial

resolution of the raw camera frames of 0.037 mm/pix. The PIV settings were as follows: delay between pulses 20 μ s, interrogation area 32×32 pix, 50% overlap. In order to remove the laser sheet reflections on the vocal fold surface, the raw images were preprocessed using sliding background image subtraction. The postprocessing options consisted of multi-pass correlation, peak validation, median filtering and smoothing.

The laser and camera were triggered by a rectified signal from one of the accelerometers. Hence, the system was phase-locked with the vocal fold vibration to measure the velocity fields at precisely defined phases of the oscillation cycle. Due to the low repetition frequency of the laser system (15 Hz), only one pulse could be generated per one oscillation cycle. The phase difference between the laser and vocal fold oscillation was set in such a way that during 40 subsequent periods of vibration, 40 camera frames were recorded, covering the whole oscillation cycle. The setup of the optics allowed recording the 2D flow field immediately downstream of the glottis. Due to oil particle deposition on the walls, frequent cleaning was necessary between experimental runs to preserve sufficient image sharpness.

2.3 Determination of the flow separation point from the recorded camera frames

Traditionally, the term “flow separation point” used in simplified models of glottal flow assumes that the glottal flow is symmetric with regard to the glottis midline, as depicted in Fig. 1. In this case, it is sufficient to quantify the separation point position by the glottal area at the critical place. However, flow visualizations and PIV measurements on physical models, as well as computational flow simulations based on finite element or finite volume codes, show that this is rarely the case: the glottal jet tends to attach to one of the vocal fold surfaces and significantly skews from the glottis midline position (see Fig. 5 for a schematic representation of the flow pattern).

Such asymmetric flow was observed in measurements presented in this paper, too. Therefore, it was necessary to introduce a suitable coordinate system to describe the position of the “left” and “right” separation point independently, still allowing to correlate the new results to previously used criteria for flow separation.

First, the narrowest cross-section was located (defined by the left and right VF apex in Fig. 6). The line is not necessarily perpendicular to the channel, because during vibration the apex of the vocal fold moves slightly in the horizontal direction (that is, in the inferior–superior direction in physiological orientation). Then, the “left” and “right” flow separation coefficients FSC_L and FSC_R can be defined simply as the distance of the respective flow

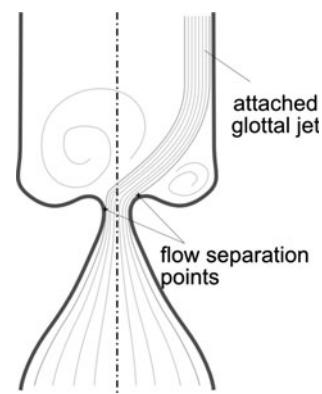


Fig. 5 Asymmetric flow in the glottis. Physiological orientation—flow in the inferior-to-superior direction

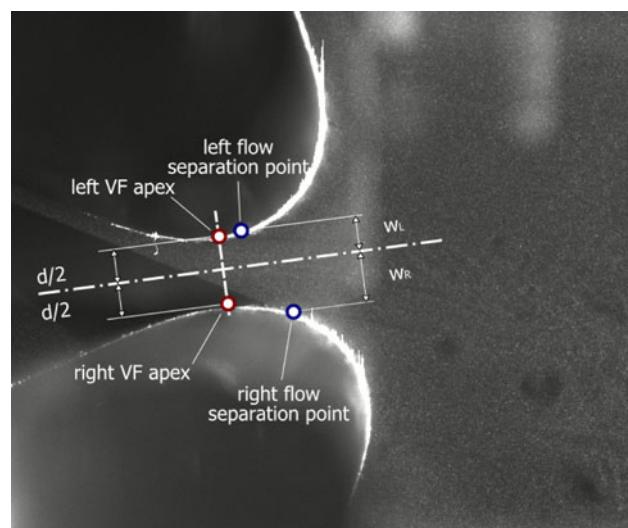


Fig. 6 Definition of the flow separation coefficient. Experimental configuration—flow direction from the *left* to the *right*

separation point from the axis divided by half of the orifice width:

$$FSC_L = \frac{w_L}{d/2}, \quad FSC_R = \frac{w_R}{d/2}. \quad (3)$$

Such a description is a generalization of the symmetrical definition (1). If the vocal fold vibration and supraglottal velocity field were perfectly symmetrical with regard to the glottis axis, the definitions would be equivalent.

In principle, the position of the flow separation point may be evaluated from the vector fields calculated by the PIV method. However, in the PIV velocity field, a single vector is computed typically from a 32×32 pixel “interrogation” area, which means that the resolution of the vector field is much lower than the resolution of the original image. Moreover, the vector represents a statistical mean of particle velocities within the interrogation area.

Consequently, the vector fields tend to smooth out small-scale turbulent effects and large velocity gradients.

However, when the optical setup is properly focused and the glottal area well illuminated by the laser sheet, it is possible to exploit directly the raw camera double-frames, which provide more detailed information on the small-scale flow features, although not quantitative. When the two camera frames are played consecutively in image analysis software, the boundary between the fast moving particles within the glottal jet and almost immobile particles in the supraglottal area becomes clearly evident. Figure 7 shows the raw camera frame and the computed PIV velocity field. The still figure cannot display the motion of the particles used to locate the separation points, but provides a basic insight into what flow scales are lost in the PIV field. Using this technique, it is possible to discern the glottal jet contour and the position of the flow separation point with an accuracy on the order of 0.1 mm. Even when taking into account the possible error introduced by the partly subjective character of the method, the uncertainty of the position of the flow separation point is well below 0.5 mm (0.12 mm lifesize). In the rare cases where the glottal jet was not clearly recognizable, the position of the separation point was not recorded and the value was rejected.

Technically, the evaluation procedure of the flow separation point was as follows (performed using high-speed camera image analysis software Olympus i-SPEED 2):

- the images were calibrated using the known height of the channel
- for each phase of the vocal fold oscillation, the position of the “left” and “right” flow separation point and of the vocal fold apex was located manually,
- the coordinates of the four points were recorded by the software and the left and right flow separation coefficients were calculated automatically according to Eq. (3).

3 Results

3.1 Dynamic and acoustic measurements

Although it was not the primary objective of this study to measure the dynamic response of the structure to flow excitation and the sound signal, these results help understand the dynamic and acoustic properties of the system. The vibration of the vocal fold is shown in Fig. 8. The figure depicts nine phases of an oscillation cycle from measurement 012, a case of regular vocal fold vibration with a collision in each cycle. The third phase (top right) is in the maximum glottis opening. The eighth phase (bottom, in the middle) was taken in the middle of the contact period, where the vocal folds approached most. This phase also reveals the maximum deformation of the vocal folds.

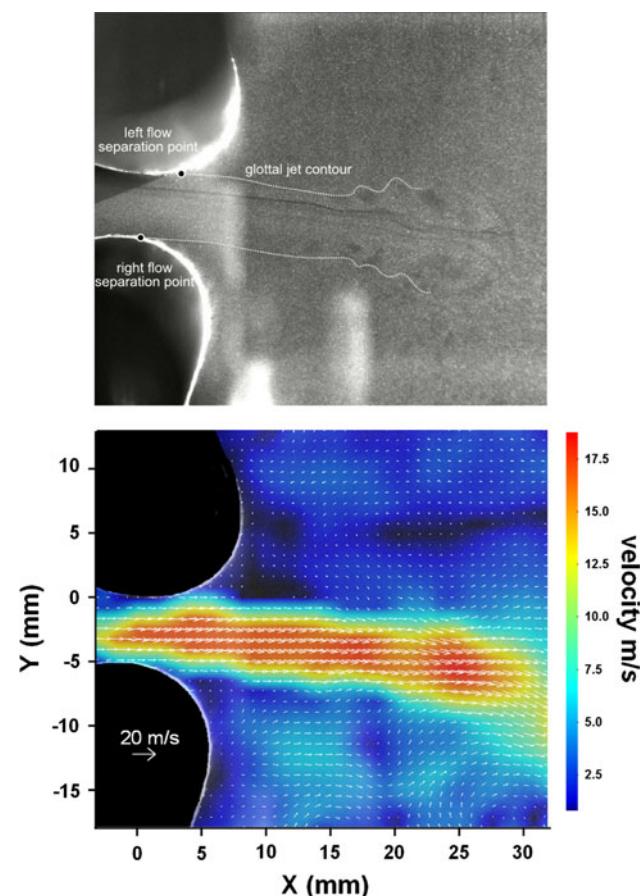


Fig. 7 Raw image recorded by the PIV camera (first frame of the double-frame) showing the positions of seeding particles (*top*). When played consecutively with the second frame, the glottal jet contours and the position where the jet separates from the vocal fold surface are clearly visible. Instantaneous vector velocity field computed by PIV (*bottom*). Measurement 012 ($Re = 5,400$), regular vocal fold vibration with a collision in each cycle. Frequency of vibration 13.2 Hz

in the middle) was taken in the middle of the contact period, where the vocal folds approached most. This phase also reveals the maximum deformation of the vocal folds.

Figures 9 and 10 show the waveforms and spectra of the vocal fold acceleration, subglottal pressure, supraglottal pressure, and radiated acoustic pressure. The mechanical vibration for the lower flow rate (Fig. 9) is nearly sinusoidal. The non-harmonic spectral frequency of 78.5 Hz, significant also in the spectrum of the subglottal pressure, corresponds probably to subglottal acoustic resonance. In the waveforms of the microphone signals, strong broadband noise is present, caused by turbulence in the supraglottal region.

The accelerometer waveform for $Re = 5,400$ (Fig. 10) clearly shows the vocal fold collisions, which are visible as peaks on the positive half-waves. The acoustic signals are well correlated with the vocal fold motion and have a

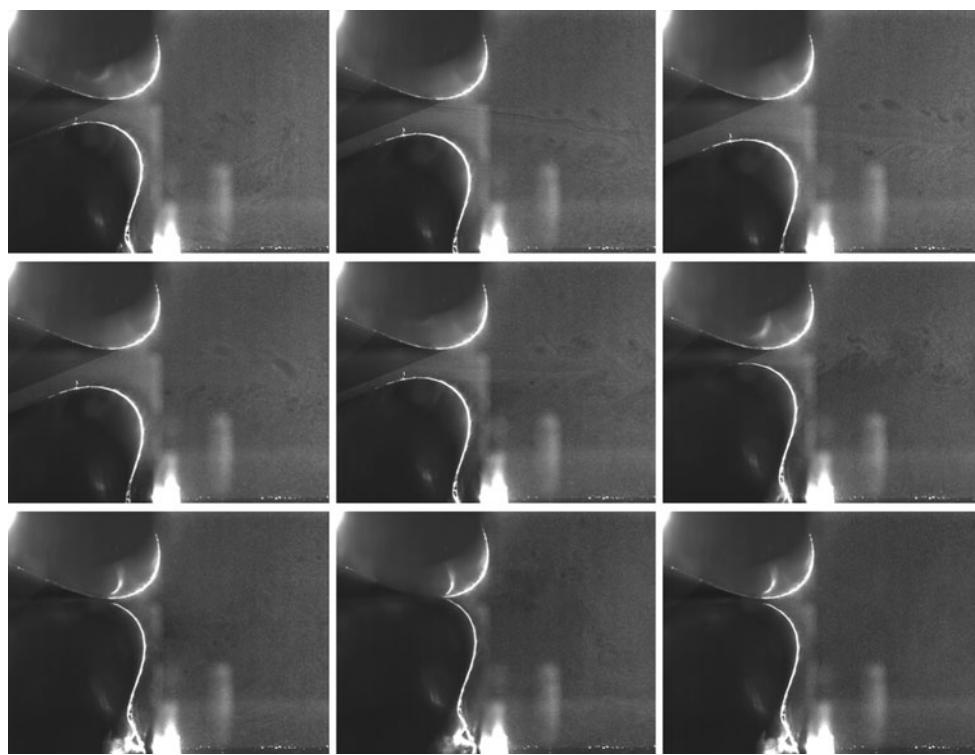


Fig. 8 Flow-induced vibration of the vocal fold—nine phases of an oscillation cycle. Measurement 012 ($Re = 5,400$), regular vocal fold vibration with a collision in each cycle. Frequency of vibration 13.2 Hz

periodic structure with harmonic frequencies in their spectra. The subglottal pressure appears to include less noise, but this is probably caused by the fact that unlike measuring microphones, the dynamic pressure transducer used was unable to capture high-frequency components. It is apparent that in the configuration used, the best signal to trigger the PIV system is the acceleration, which has best periodicity and signal-to-noise ratio.

3.2 Flow visualizations and PIV measurements

Figure 11 shows a typical velocity field downstream of the glottis evaluated by the PIV method. The vocal folds in the left part of the figure were masked out to show better their contours and to remove meaningless vectors. The vector plot reveals the glottal jet, which separates from the vocal fold surfaces and enters into the supraglottal domain. The jet is skewed to the right in this particular case. This tendency was observed throughout all the measurement sets, supporting the assumption that the Coanda effect is present in human phonation. In some of the measurements, the direction of the jet axis switched occasionally. However, the jet skewed preferentially to the right as in this case, probably due to slight asymmetry in the geometry of the left and right vocal folds, and possibly also due to the fact that the left (upper) vocal fold was fixed, while the right

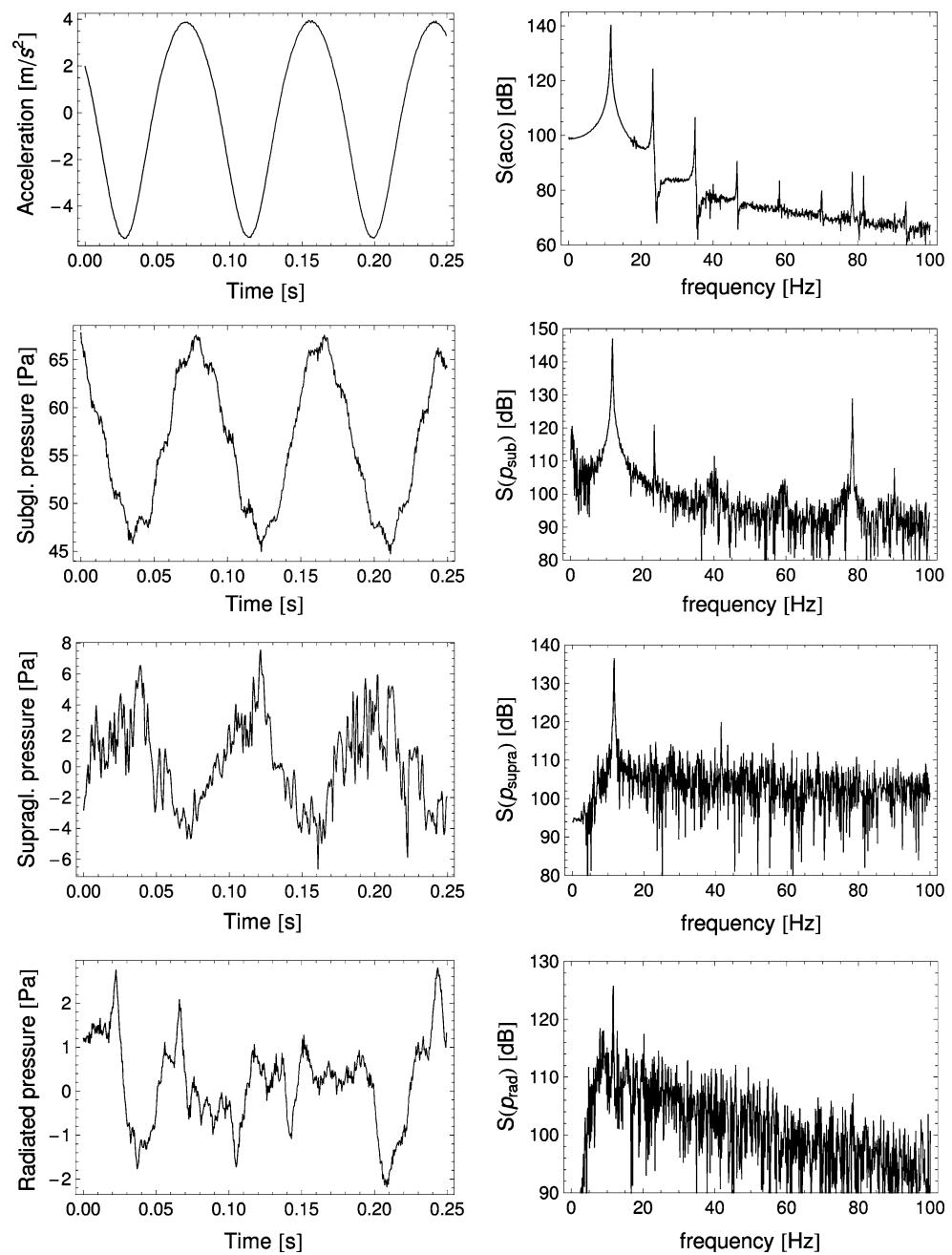
(bottom) one vibrated. In the region between the right vocal fold surface and the jet, a large recirculation vortex can be seen.

The flow visualizations (accompanied by acoustic and dynamic measurements) were performed systematically for increasing flow rates. These ranged from the lowest possible airflow able to induce self-sustained vocal fold oscillations up to the highest values realistic in human phonation.

3.3 Position of the flow separation point

The essence of this work is quantification of the flow separation point locations during vocal fold vibration, as explained in Sect. 2.3. During phonation, the glottal velocity field is not perfectly periodic and the location of the flow separation point in a specific phase can vary over subsequent cycles of vibration. Due to the highly arduous procedure of evaluation of the separation point, it is impossible to provide proper statistical information. However, it is important to assess the fluctuation of the flow separation point position at least in one case. For this purpose, four measurements recorded at identical conditions (Reynolds number $Re = 5,400$, vocal fold vibrations with collisions) were analyzed. In order to superimpose the results of these measurements, where the frequency of

Fig. 9 Waveforms (left) and frequency spectra (right) of the acceleration, subglottal pressure, supraglottal pressure and pressure radiated at the channel exit. Measurement 002 ($Re = 3,500$), vocal fold vibration without a collisions. Frequency of vibration 11.7 Hz



vibration varied slightly (<0.1 Hz) and the double-frames were not taken in exactly identical phases, it was necessary to extract in each case precisely one period, align the four measurements, interpolate and resample the data.

The results in Fig. 12 show that during most of the vibration cycle, the flow separation coefficients have low variation. Near glottal closure, the data are much more scattered. This is caused by the fact that when the vocal folds collide and the jet is interrupted, the flow is highly nonstationary and the decaying or evolving jet is more susceptible to interactions with turbulent structures. In certain measurements, it was even observed that the jet

changes direction over subsequent cycles and attaches to the left or right vocal fold in a random way.

In the following, the results of flow separation point measurements for three flow rates are presented. Figure 13 summarizes the results for $Re = 3,500$, flow rate $Q = 5.5$ L/s, transglottal pressure difference $\Delta p = 45$ Pa, frequency of vibration $f = 10.9$ Hz (corresponding to $Q = 1.4$ L/s, $\Delta p = 720$ Pa and $f = 173$ Hz lifesize). As can be seen from the orifice width plot in the right, in this case, the vocal folds did not collide throughout the oscillation cycle. Such vocal fold vibration can be observed in certain types of breathy phonation.

Fig. 10 Waveforms (left) and frequency spectra (right) of the acceleration, subglottal pressure and pressure radiated at the channel exit. Measurement 012 ($Re = 5,400$), regular vocal fold vibration with a collision in each cycle. Frequency of vibration 13.2 Hz

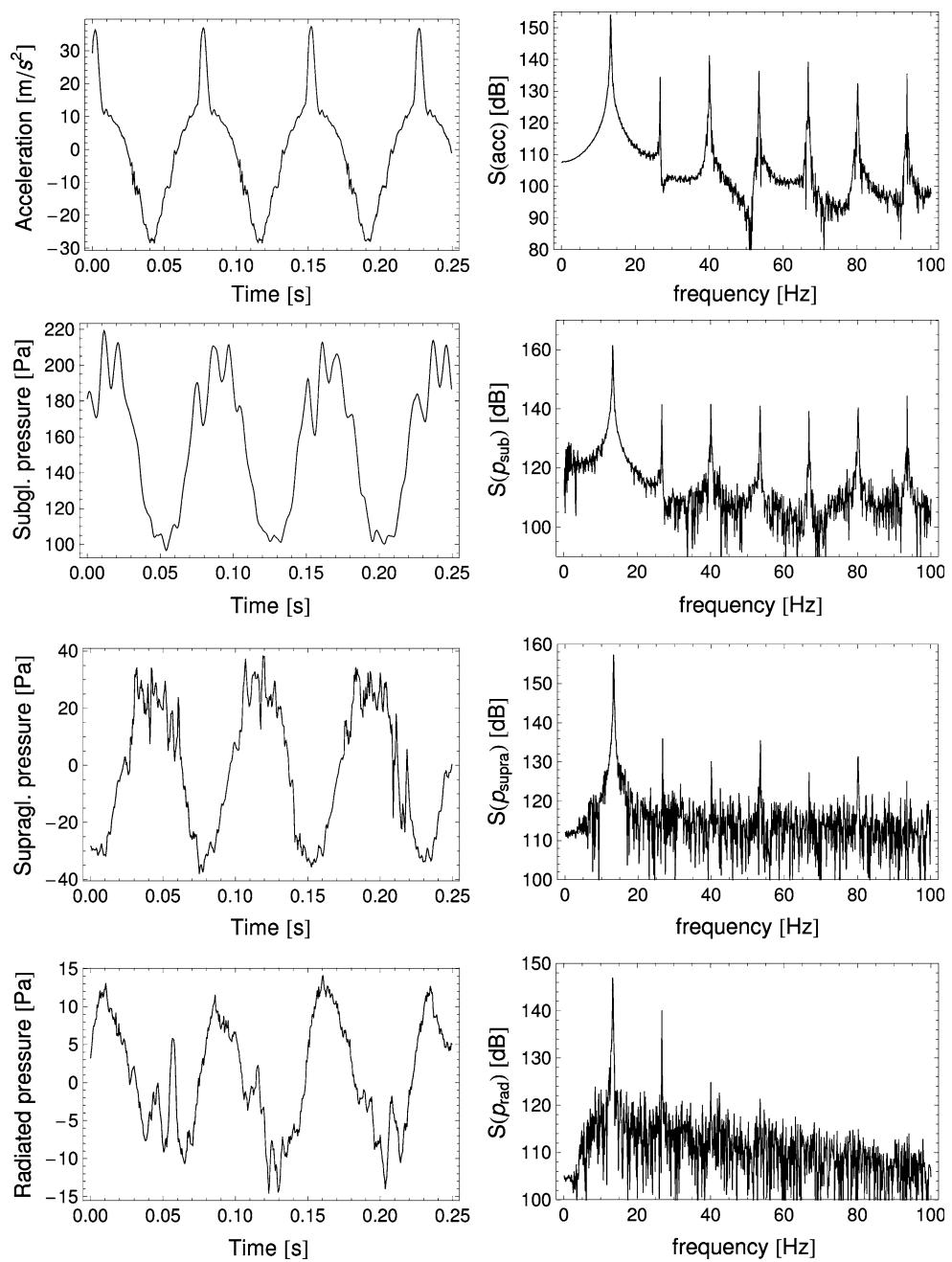


Figure 13 also shows the development of the left and right flow separation coefficients during 40 phases of the vocal fold oscillation cycle. The opening and closing phases are separated by dashed lines. The vocal folds approximate the most between frames #5–7, where the opening phase begins (see the orifice width plot in Fig. 13). In a large part of the oscillation period, both left and right flow separation coefficients stay between 1.0 and 1.5. Near glottal closure and reopening, however, the FSC_R sharply increases up to about 5.5. This is a quantification of an effect, which can be seen almost universally in all measurements—when the glottal gap gets very narrow, the jet

weakens and tends to attach to one of the vocal fold surfaces (in this case, the right one). Since the airflow separates very far from the narrowest cross-section, the separation coefficients reach much higher values than usually assumed.

The effect is even more prominent in cases where the vocal folds collide and the glottal gap closes. Figure 14 shows the flow separation coefficients and orifice width for $Re = 5,400$, $Q = 8.58 \text{ L/s}$, $\Delta p = 150 \text{ Pa}$ and $f = 13.4 \text{ Hz}$ (which correspond to $Q = 2.1 \text{ L/s}$, $\Delta p = 2,400 \text{ Pa}$ and $f = 214 \text{ Hz}$ lifesize). Again, when the glottis is wide open, the flow separation coefficient is close to 1.1, increases to

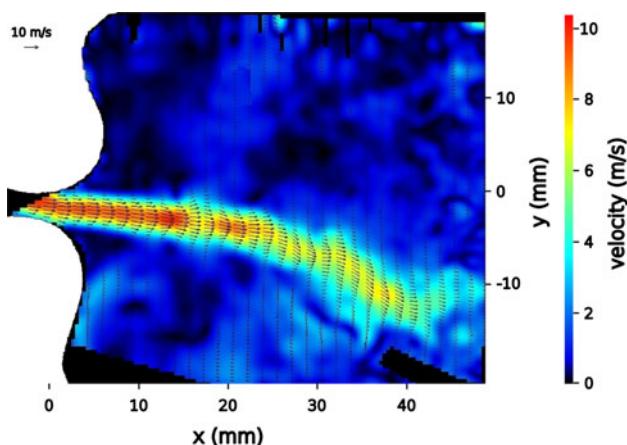


Fig. 11 Typical instantaneous flow velocity field downstream of the glottis. Measurement 002d ($Re = 3,500$, without glottal closure), middle of the closing phase

about 1.5 in the middle of the opening/closing phases, and sharply rises up to 20 near vocal fold contact. The jet was attached mostly to the right vocal fold, but the left separation coefficient near the glottis opening increased up to values around 5, as in previous cases. Figure 15 proves that the increase in the FSC near glottal closure is not caused by the fact, that the glottal gap d (denominator in equation 3) is small: the distance of the flow separation point from the vocal fold apex itself increases, too. This shows that the airflow separates further downstream, than when the glottis is wide open.

For the case shown in Fig. 16 ($Re = 6,600$, $Q = 10.4 \text{ L/s}$, $\Delta p = 230 \text{ Pa}$, $f = 13.8 \text{ Hz}$, corresponding to $Q = 2.6 \text{ L/s}$, $\Delta p = 3,600 \text{ Pa}$ and $f = 220 \text{ Hz}$ lifesize), FSC_R has a plateau at 1.12 and shortly before glottal closure sharply rises up to 20. The FSC_L data are more scattered, but show similar behavior.

The physical model vibrated well for a broad range of higher airflow velocities, also. The quantified data on flow separation showed very similar behavior even for these high velocities. Nevertheless, since these flow rates are beyond the physiologically relevant limits, the results are not shown here.

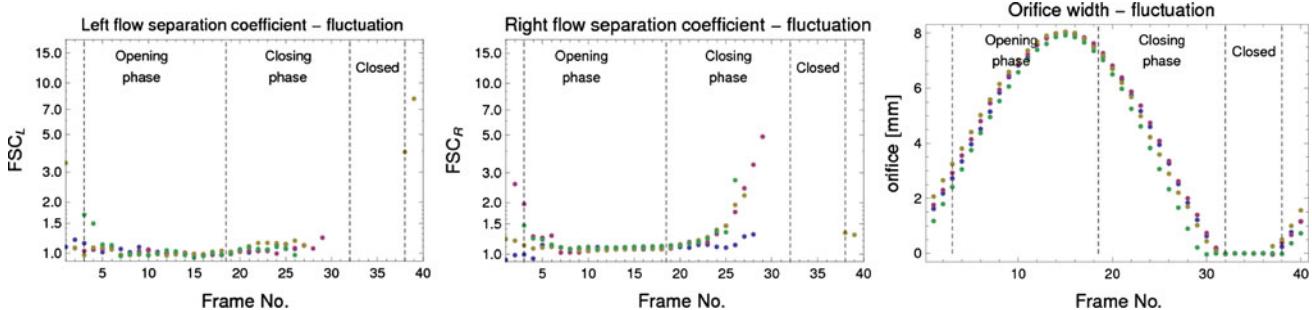


Fig. 12 Fluctuation of the *left* and *right* flow separation coefficients and of the orifice width. Measurements 012s-w ($Re = 5,400$, with glottal closure). Dashed lines delimit the boundaries of vocal fold vibration phases (opening phase, closing and closed phase)

4 Discussion and conclusions

The main objective of this paper was to provide experimental quantitative data on glottal aerodynamics and namely on the position of the flow separation point during phonation. A physical, four times scaled vocal fold model was designed to perform the measurements. The geometry of the vocal folds was based on measurement of excised human larynges in phonation position and is slightly different from the “M5” approximation commonly used in modeling studies.

The authors believe that in order to get representative experimental data on the aerodynamics of human phonation using physical models, it is desirable that the model be self-oscillating, rather than externally driven. However, the requirement of a self-excited system brings numerous complications and technical limitations. First of all, the physical model does not provide enough free parameters (e.g., the subglottal velocity U_0) to be set independently, and thus, it cannot be ensured that the dynamic similarity of the model and the real larynx is perfect. In current measurements, nevertheless, the pertinent Reynolds and Strouhal numbers lie within the bounds encountered in human phonation.

From the same reason, the flow-induced vibration of the vocal fold model is not precisely identical with that found in the real larynx. The convergent–divergent shaping of the glottis is not mimicked by the model to the extent that can be reached in externally driven models: the current model vibrates dominantly in the 10 mode and it mostly resembles the “convergent” M5 geometry. Therefore, the results are relevant e.g., for glottal opening or for situations close to breathy voice, where the subglottal pressure is not high, prephonatory glottal diameter nonzero and where there is strong reason to believe that the glottal shape changes from divergent to convergent shortly before closing. However, considering that the shape of the medial surface of the real vocal folds during vibrations can be more complex (not strictly straight convergent or straight divergent as in the M5 model), the authors assume that the results on flow

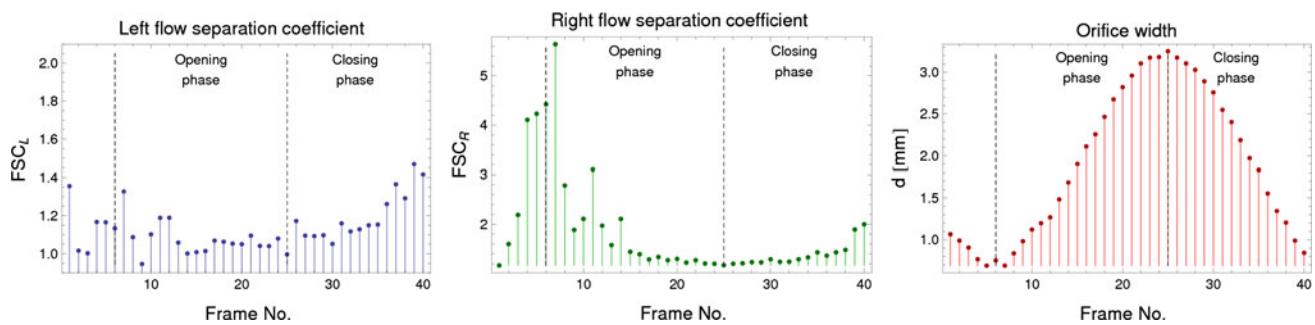


Fig. 13 Measurement 002c ($Re = 3,500$, without glottal closure), one oscillation cycle. *Left* and *right* flow separation coefficient, orifice width

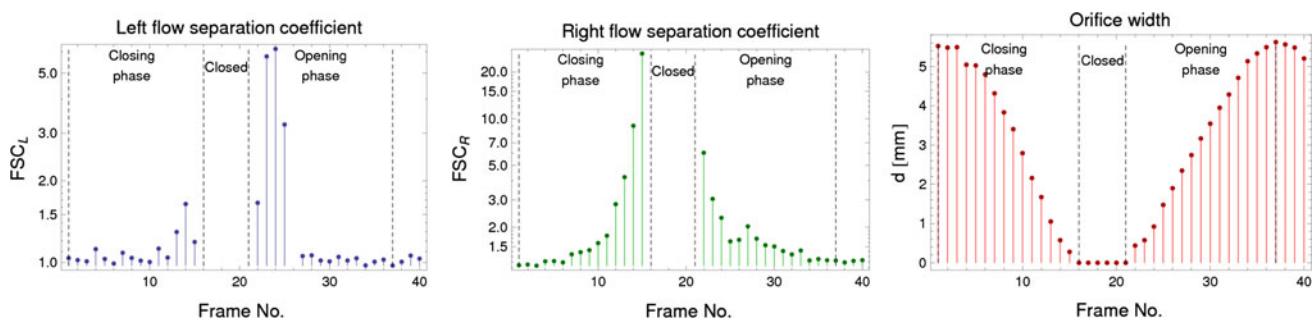


Fig. 14 Measurement 012v ($Re = 5,400$, with glottal closure), one oscillation cycle. *Left* and *right* flow separation coefficient, orifice width

Fig. 15 Measurement 012v ($Re = 5,400$, with glottal closure), one oscillation cycle. Distance of the *left* and *right* flow separation point from the vocal fold apex

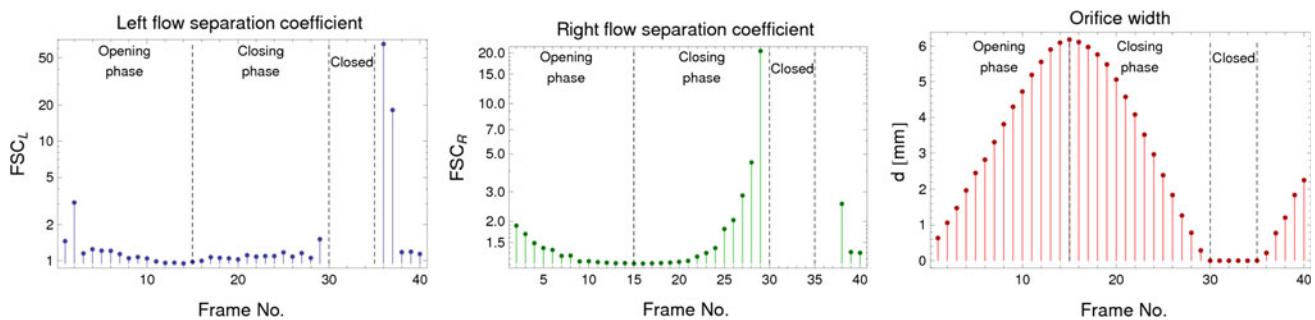
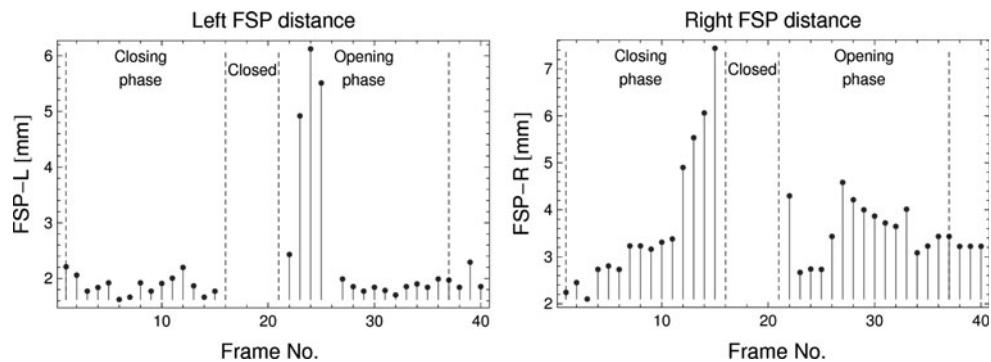


Fig. 16 Measurement 017c ($Re = 6,600$, with glottal closure), one oscillation cycle. *Left* and *right* flow separation coefficient, orifice width

separation locations measured using the model with a curved shape can have certain relevance to the other cases of phonation, too.

It should be also noted that the flow rates in the model are rather high relative to values known from human phonation and the duration of the phase when the vocal folds are closed (which is usually quantified by the *closed quotient*, CQ) lies in the lower bound of values encountered during loud speech. Nevertheless, the experience from other self-oscillating physical models (Pelorson et al. 1994; Thomson et al. 2005; Becker et al. 2009) shows that it is difficult to design a system behaving identically to the real vocal larynx, and even using approximate physical models, important and relevant results can be obtained.

The physical model was equipped with accelerometers monitoring vocal fold vibration. To measure the dynamic pressures and acoustic signals in the sub- and supraglottal spaces, pressure transducers and microphones were mounted in the setup. A PIV system synchronized with the vocal fold vibration was used to visualize the supraglottal airflow and to evaluate the position of the flow separation points along the vocal fold surfaces during their vibration. The airflow in the glottis can be to first approximation considered as two-dimensional: one may assume that the flow velocity does not change significantly along the length of the vocal folds (i.e., along the anterior–posterior axis z , see Fig. 2) in the very proximity of the glottis. This is not true further downstream, where turbulent structures dominate the flow field. The vorticity, aligned originally along the z -axis, interacts with the velocity field and creates inevitably a 3D velocity field. But when focused on the flow separation from the vocal fold surface, it is possible to draw meaningful data from PIV measurements in the coronal (x – y) plane.

In simplified glottal flow models based on Bernoulli or Euler equations where flow separation is taken into account, the position of the flow separation point is commonly considered as constant with respect to the narrowest cross-section. This implicitly assumes that the airflow is symmetric and separates at the same location from the left and right vocal fold. In current work, a modified criterion for flow separation (left and right flow separation coefficient—FSC), generalizing the classical criterion, was proposed. The results suggest that the usage of the classical flow separation criterion with constant values ranging between 1.1 and 1.5 is quite plausible, at least for the part of the oscillation cycle where the vocal folds are not too close together. Shortly before and after glottis closure, however, the aerodynamic effects are apparently much more complex and the criterion does not hold any more. The measured values of FSC demonstrate a general trend: shortly prior to and after glottal closure, either of the coefficients sharply increases, i.e., the glottal jet separates

much further downstream of the narrowest cross-section. This is consistent with the qualitative results of Neubauer et al. (2007), who observed that during glottis opening, the jet is attached to the VF wall and strongly curved.

In a perfectly symmetrical glottal channel, the supraglottal flow field is bistable: the glottal jet does not remain symmetric, but tends to attach to either side of the channel. In the experiments, one of the directions was always preferential, although not exclusively. It seems that this was caused by minor asymmetries of the geometry, rather than by the fact that one of the model vocal folds was static. The same behavior was observed in the study of Erath and Plesniak (2010), who showed that even minor geometric irregularities cause the jet to skew to one of the directions with a high probability.

The physiological analogy to the current experimental setup would be unilateral vocal fold paralysis. The fact that one of the vocal folds in the model does not vibrate limits to certain extent the applicability of the results to real phonation. The current study is focused primarily on glottal aerodynamics and specifically dynamics of the glottal jet, which should not be largely different from the situation in the real larynx. Moreover, there have been even more dissimilar arrangements successfully used in experimental studies with synthetic and excised larynges, e.g., the hemilarynx configuration (one vocal fold colliding against symmetry plane). As long as a physical model representing all the important qualities of the real human larynx at once is not available, it is worth using approximative models that inevitably differ from reality in certain aspects.

The techniques used in this study for determining the location of flow separation were relatively laborious and time-consuming and required perfect adjustment of the experimental setup, in particular clean and well-focused optics. As some of the measurements did not provide sufficient contrast and resolution, only three measurements were evaluated. Even though these do not represent a comprehensive statistical data set, the authors believe that the results provide important new quantitative information, which cannot be found in the current literature.

In subsequent studies, several construction details and measurement techniques could be further improved. The state-of-the-art of the current PIV laser and camera systems, for instance, would allow a time-resolved measurement.

The current experimental setup does not contain a model of ventricular folds. It can be speculated what the influence of the ventricular folds on the position of the flow separation point is: depending on their distance from the vocal folds, they might both straighten the glottal flow axially or make it skew laterally even more. The authors believe it is a good starting point to obtain experimental data not biased by the presence of the ventricular folds. However, in the

future, it would be appropriate to perform a parametric study with various ventricular fold shapes and locations and determine their effect on supraglottal aerodynamics. With these modifications, the experimental setup could provide even more systematic and precise data on airflow separation and help to enlighten some of the fundamental aspects of human phonation.

Acknowledgments The research has been financially supported by the Grant Agency of the Academy of Sciences of the Czech Republic, project KJB200760801 *Mathematical modeling and experimental investigation of fluid–structure interaction in human vocal folds*, research plan AV0Z20760514. The support of ENSTA ParisTech, who provided the experimental background, is also gratefully acknowledged.

References

- Alipour F, Scherer RC (2004) Flow separation in a computational oscillating vocal fold model. *J Acoust Soc Am* 116(3):1710–1719
- Alipour F, Scherer RC (2006) Characterizing glottal jet turbulence. *J Acoust Soc Am* 119(2):1063–1073
- Alipour F, Fan C, Scherer RC (1996) A numerical simulation of laryngeal flow in a forced-oscillation glottal model. *Comput Speech Lang* 10:75–93
- Barney A, Shadle C, Davies P (1999) Fluid flow in a dynamic mechanical model of the vocal folds and tract. i. measurements and theory. *J Acoust Soc Am* 105(1):444–455
- Becker S, Kniesburges S, Müller S, Delgado A, Link G, Kaltenbacher M, Döllinger M (2009) Flow-structure-acoustic interaction in a human voice model. *J Acoust Soc Am* 125(3):1351–1361
- Cisonni J, Hirtum AV, Pelorson X, Willems J (2008) Theoretical simulation and experimental validation of inverse quasi-one-dimensional steady and unsteady glottal flow models. *J Acoust Soc Am* 124(1):535–545
- Decker G, Thomson S (2007) Computational simulations of vocal fold vibration: Bernoulli versus Navier-Stokes. *J Voice* 21(3):273–284
- Deverge M, Pelorson X, Vilain C, Lagrée P, Chentouf F, Willems J, Hirschberg A (2003) Influence of collision on the flow through in-vitro rigid models of the vocal folds. *J Acoust Soc Am* 114 (6 Pt 1):3354–3362
- Erath B, Plesniak M (2006) The occurrence of the Coanda effect in pulsatile flow through static models of the human vocal folds. *Exp Fluids* 41:735–748
- Erath B, Plesniak M (2006) The occurrence of the Coanda effect in pulsatile flow through static models of the human vocal folds. *J Acoust Soc Am* 120(2):1000–1011
- Erath B, Plesniak M (2010) An investigation of asymmetric flow features in a scaled-up driven model of the human vocal folds. *Exp Fluids*. doi:10.1007/s00348-009-0809-0
- Fox R, Kline S (1962) Flow regime data and design methods for curved subsonic diffusers. *Trans ASME J Basic Eng* 84:303–312
- Hirtum AV, Pelorson X, Lagrée P (2005) In vitro validation of some flow assumptions for the prediction of the pressure distribution during obstructive sleep apnoea. *Med Biol Eng Comput* 43:162–171
- Hofmans G, Groot G, Ranucci M, Graziani G, Hirschberg A (2003) Unsteady flow through in-vitro models of the glottis. *J Acoust Soc Am* 113(3):1658–1675
- Horáček J, Šidlof P, Švec JG (2005) Numerical simulation of self-oscillations of human vocal folds with Hertz model of impact forces. *J Fluids Struct* 20(6):853–869
- Krane M, Wei T (2006) Theoretical assessment of unsteady aerodynamic effects in phonation. *J Acoust Soc Am* 120(3): 1578–1588
- Krane M, Barry M, Wei T (2007) Unsteady behavior of flow in a scaled-up vocal folds model. *J Acoust Soc Am* 122(6):3659–3670
- Kucinschi B, Scherer R, Dewitt K, Ng T (2006) An experimental analysis of the pressures and flows within a driven mechanical model of phonation. *J Acoust Soc Am* 119(5 Pt 1):3011–3021
- Li S, Scherer R, Wan M, Wang S, Wu H (2006) The effect of glottal angle on intraglottal pressure. *J Acoust Soc Am* 119(1):539–548
- Lucero J (1998) Optimal glottal configuration for ease of phonation. *J Voice* 12(2):151–158
- Neubauer J, Zhang Z, Miraghiae R, Berry D (2007) Coherent structures of the near field flow in a self-oscillating physical model of the vocal folds. *J Acoust Soc Am* 121(2):1102–1118
- Pelorson X, Hirschberg A, van Hassel R, Wijnands A, Auregan Y (1994) Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. Application to a modified two-mass model. *J Acoust Soc Am* 96(6):3416–3431
- Scherer R, Shinwari D, Witt KD, Zhang C, Kucinschi B, Afjeh A (2001) Intraglottal pressure profiles for a symmetric and oblique glottis with a divergence angle of 10 degrees. *J Acoust Soc Am* 109(4):1616–1630
- Scherer RC, Shinwari D, Witt KJD, Zhang C, Kucinschi BR, Afjeh AA (2002) Intraglottal pressure distributions for a symmetric and oblique glottis with a uniform duct. *J Acoust Soc Am* 112(4):1253–1256
- Sciamarella D, Quéré PL (2008) Solving for unsteady airflow in a glottal model with immersed moving boundaries. *Eur J Mech B Fluids* 27:42–53
- Shinwari D, Scherer R, Dewitt K, Afjeh A (2003) Flow visualization and pressure distributions in a model of the glottis with a symmetric and oblique divergent angle of 10 degrees. *J Acoust Soc Am* 113(1):487–497
- Šidlof P, Švec JG, Horáček J, Veselý J, Klepáček I, Havlík R (2008) Geometry of human vocal folds and glottal channel for mathematical and biomechanical modeling of voice production. *J Biomech* 41(5):985–995
- Story B, Titze I (1995) Voice simulation with a body-cover model of the vocal folds. *J Acoust Soc Am* 97(2):1249–1260
- Suh J, Frankel S (2007) Numerical simulation of turbulence transition and sound radiation for flow through a rigid glottal model. *J Acoust Soc Am* 121(6):3728–3739
- Tao C, Zhang Y, Hottinger D, Jiang J (2007) Asymmetric airflow and vibration induced by the Coanda effect in a symmetric model of the vocal folds. *J Acoust Soc Am* 122(4):2270–2278
- Thomson S, Mongeau L, Frankel S (2005) Aerodynamic transfer of energy to the vocal folds. *J Acoust Soc Am* 118(3 Pt 1): 1689–1700
- Triep M, Brücker C (2010) Three-dimensional nature of the glottal jet. *J Acoust Soc Am* 127(3):1537–1547. doi:10.1121/1.3299202
- Triep M, Brücker C, Schröder W (2005) High-speed PIV measurements of the flow downstream of a dynamic mechanical model of the human vocal folds. *Exp Fluids* 39:232–245
- Vilain C, Pelorson X, Fraysse C, Deverge M, Hirschberg A, Willems J (2004) Experimental validation of a quasi-steady theory for the flow through the glottis. *J Sound Vib* 276:475–490
- Zanartu M, Mongeau L, Wodicka G (2007) Influence of acoustic loading on an effective single mass model of the vocal folds. *J Acoust Soc Am* 121(2):1119–1129
- Zhang Z (2008) Influence of flow separation location on phonation onset. *J Acoust Soc Am* 124(3):1689–1694. doi:10.1121/1.2957938
- Zhang Z, Neubauer J, Berry D (2007) Physical mechanisms of phonation onset: a linear stability analysis of an aeroelastic continuum model of phonation. *J Acoust Soc Am* 122(4): 2279–2295



Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates: linear stability analysis and conversion efficiency

Olivier Doaré ^{a,*}, Sébastien Michelin ^b

^a ENSTA, ParisTech, Unité de Mécanique (UME), Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau, France

^b LadHyX – Département de Mécanique, École Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 11 December 2010

Accepted 27 April 2011

Available online 12 May 2011

Keywords:

Fluid–structure interaction

Plate

Axial flow

Flutter instability

Energy harvesting

Piezoelectricity

Negative energy waves

ABSTRACT

This paper investigates the energy harvested from the flutter of a plate in an axial flow by making use of piezoelectric materials. The equations for fully coupled linear dynamics of the fluid–solid and electrical systems are derived. The continuous limit is then considered, when the characteristic length of the plate's deformations is large compared to the piezoelectric patches' length. The linear stability analysis of the coupled system is addressed from both a local and global point of view. Piezoelectric energy harvesting adds rigidity and damping on the motion of the flexible plate, and destabilization by dissipation is observed for negative energy waves propagating in the medium. This result is confirmed in the global analysis of fluttering modes of a finite-length plate. It is finally observed that waves or modes destabilized by piezoelectric coupling maximize the energy conversion efficiency.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The environmental impact and limited resources of fossile fuel energies have motivated a significant research effort in the development of new and diverse techniques for the production of electrical energy. In parallel, a particular attention has also been given to systems able to produce limited amounts of energy at low cost to power remote or isolated devices, for which connection to the traditional electrical network is prohibitive in terms of cost or technical complexity (Sodano et al., 2004). These two elements have increased the attention on mechanisms able to produce self-sustained vibrations of a solid substrate on one hand and to convert the corresponding mechanical energy into electrical power on the other.

The conversion into electricity of kinetic energy from geophysical flows such as tidal currents, winds and river flows is particularly attractive because of the large availability worldwide and the low environmental impact of this energy source (Westwood, 2004). Research on fluid–solid interactions has identified several instability mechanisms that can lead to self-sustained vibrations of a solid placed in a steady uniform flow. Such fundamental instability mechanisms as coupled-mode flutter of a heaving and pitching airfoil (McKinney and DeLaurier, 1981), vortex-induced vibrations (Bernitsas et al., 2008) or transverse galloping of flexibly mounted structures (Barrero-Gil et al., 2010) are at the core of prototypes or concepts of flow energy harvesters.

The harvesting of flow energy through flapping of thin elastic plates has also been investigated, mainly using two fundamentally different configurations. In the first one, an unsteady flow, created by the oscillatory wake of an upstream obstacle applies an unsteady forcing on the plate to make it flap (Allen and Smits, 2001; Taylor et al., 2001). The second

* Corresponding author.

E-mail address: olivier.doare@ensta-paristech.fr (O. Doaré).

configuration uses the coupled-mode flutter instability of the flexible plate in a steady flow to generate self-sustained flapping (Tang et al., 2009). In that case, it is well-known that the flat equilibrium state of the plate becomes unstable above a critical flow velocity, beyond which dynamic vibrations of large amplitude can develop on the structure. The linear stability of this system has been extensively considered from both a local and global point of view. In the former, the instability of waves in the infinite medium was considered (Brazier-Smith and Scott, 1984; Crighton and Osswell, 1991), while the latter considered finite systems, including effects such as vortex shedding downstream of the plate (Alben, 2008; Kornecki et al., 1976), three-dimensional effects (Eloy et al., 2007), lateral confinement (Guo and Païdoussis, 2000), spanwise confinement (Doaré et al., in press) or coupling between multiple structures (Michelin and Llewellyn Smith, 2009a). The non-linear self-sustained flapping developing above the instability threshold has also been the focus of multiple experimental (Shelley et al., 2005; Zhang et al., 2000) and numerical studies (Alben and Shelley, 2008; Connell and Yue, 2007; Michelin et al., 2008).

In this work, we are interested in the ability to produce electrical power from the self-sustained oscillations of a flexible plate resulting from this fluttering instability. To assess the potential for electrical energy production, it is important to properly include in the dynamical equations of the fluid–solid system the loss of energy due to the conversion into electricity, as we seek here regimes where the extracted energy is a significant fraction of the total energy of the system. Two main approaches can be considered to produce electricity from the mechanical energy of a vibrating solid. Classical generators convert a displacement of a solid substrate into electrical energy through electromagnetic induction, and are commonly used in classical turbines as well as in recent prototypes of flow energy harvesters (Bernitsas et al., 2008). On the other hand, piezoelectric materials convert mechanical strain into electric potential, and have recently received increasing attention for applications involving low power production, typically of the order of the mW (Sodano et al., 2004; Anton and Sodano, 2010). Studies on piezoelectric materials for energy harvesting considered flow-induced vibrations (Pobering and Schwesinger, 2004; Taylor et al., 2001; Wang and Ko, 2010) but also vibrations from various other forcings such as human movements (Platt et al., 2005; Shenck and Paradiso, 2001).

The objective of the present work is to study from a theoretical point of view the stability properties and dynamics of a classical fluid–solid system (a flexible plate subject to coupled-mode flutter) coupled to an output electrical network with piezoelectric materials. In comparison to previous studies on flow energy harvesting (Tang et al., 2009) or piezoelectric energy conversion, the present approach is original by its full coupling of the fluid–solid and electrical systems. In this paper, the linear stability of the fluid–solid–electric system is investigated from both a local and global point of view to identify the impact of the coupling on the stability of the system and assess the efficiency of the mechanical-to-electrical energy conversion.

Coupling the vibrations with electrical circuits that dissipate energy intuitively results in damping from the point of view of the structure. In the context of fluid–structure interactions, the effect of viscous or viscoelastic damping has been addressed both on the infinite-length medium (local approach) and the finite-length systems (global approach). Crighton and Osswell (1991) investigated the effect of damping on the stability of flexural waves propagating in compliant panels interacting with an homogeneous flow and found that dissipation can destabilize some particular waves, which are referred to as negative energy waves after Landahl (1962). In the finite-length case, the most studied system with respect to the effect of damping is the fluid-conveying pipe, which shares many similarities with the plate in axial flow (Païdoussis, 1998, 2008). The effect of piezoelectric coupling on the instability threshold of a cantilevered fluid-conveying pipe has been addressed by Elvin and Elvin (2009). Destabilization or stabilization by dissipation has been observed, depending on the fluid–solid mass ratio. The comparison of local and global instability criteria with damping has been addressed by Doaré (2010). It was shown that global instability of the long system is always predicted by the local instability criterion of the dissipative medium.

The particular effect of damping induced by piezoelectric coupling has been widely investigated in the research field of structural damping and vibration control. Passive damping by the use of shunted piezoelectric patches, developed by Hagood and von Flotow (1991), has inspired studies involving piezoelectric materials and passive electrical components arranged in a network (Bisegna et al., 2006; Maurini et al., 2004). We will consider here the continuous limit addressed in these two studies, that is valid when the length of the piezoelectric material is small compared to the typical wavelength of the solid's deformations.

In Section 2, the linearized equations of motion for the coupled piezomechanical problem of a flexible plate covered with piezoelectric elements in a potential flow will be presented. In Sections 3 and 4, the linear stability analysis will be investigated from a local and global point of view, respectively. In both cases, the effect of piezoelectric coupling on stability will be investigated, as well as the efficiency of energy conversion between the solid mechanical energy and the energy dissipated in a simple resistive electrical network. Finally, in Section 5, the local and global stability results will be discussed as well as possible extensions of the present work.

2. Problem formulation

We consider here the motion of a flexible plate of thickness h_0 , Young's modulus E_0 , density ρ_0 and Poisson's coefficient ν_0 . The span of the flexible plate is assumed to be much greater than its typical streamwise lengthscale. We therefore focus on purely two-dimensional deformations, and the plate's vertical displacement is noted as $w(x,t)$. Piezoelectric patches of length l , thickness h_p , density ρ_p , electric permeability ε , Young's modulus E_p and Poisson's coefficient ν_p are attached

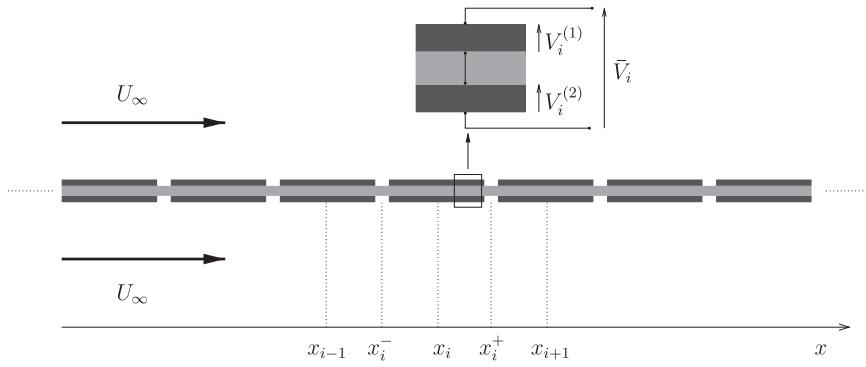


Fig. 1. Schematic view of a plate in a homogeneous axial flow, equipped with small length piezoelectric patches on both sides.

symmetrically on the plate. The plate is surrounded by a fluid of density ρ_f with upstream horizontal velocity U_∞ . The problem is sketched in Fig. 1. In this section, we present the linearized coupled equations of the fluid–solid and piezoelectric systems, first in the case of discrete piezoelectric patches, and then in the continuous limit when l is much smaller than the streamwise lengthscale of the solid deformation. In this limit, the equation of energy conservation will enable us to exhibit the different energy transfers in the system. In the following, for a function $a(x,t)$, \dot{a} and a' correspond to the temporal and streamwise derivatives of a , respectively.

2.1. Equilibrium equations of a beam with discrete pairs of piezoelectric patches

The left and right ends of the i th piezoelectric pair are positioned in x_i^- and x_i^+ , so that $l = x_i^+ - x_i^-$ and $x_i = (x_i^- + x_i^+)/2$ denotes the position of the center of the patch. We consider complete coverage of the plate by piezoelectric patches, therefore $x_i^+ = x_{i+1}^-$. The following equations can easily be adapted to the case of partial coverage (Bisegna et al., 2006). Quantities related to the piezoelectric patch located on the upper (respectively, lower) face are denoted by the exponent $^{(1)}$ (respectively, $^{(2)}$). The patches are attached to the plate so that their respective polarities are reversed, and the charge displacement across a piezoelectric patch is obtained as (Preumont, 2002; Thomas et al., 2009)

$$Q_i^{(k)} = \chi [W]_{x_i^-}^{x_i^+} + CV_i^{(k)}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

where $\chi = e_{31}(h_0 + h_p)/2$ is a mechanical/piezoelectrical conversion factor with e_{31} the coupling factor, and $C = \epsilon l/h_p$ is the capacity per unit length in the spanwise direction of the piezoelectric element. $V_i^{(k)}$ is the potential difference between the two electrodes of the corresponding piezoelectric (see Fig. 1). Negative electrodes of the patches are assumed to be shunted through the plate by a purely conductive material, therefore,

$$Q_i^{(1)} = Q_i^{(2)} = Q_i \quad (2)$$

and

$$V_i^{(1)} = V_i^{(2)} = V_i. \quad (3)$$

Each piezoelectric pair is therefore equivalent to a single piezoelectric patch of equivalent capacity \bar{C} and voltage \bar{V}_i of respective values,

$$\bar{C} = \frac{C}{2}, \quad \bar{V}_i = 2V_i, \quad (4)$$

and this representation is retained for simplicity in the remaining of the paper. Assuming an Euler–Bernoulli model for the plate, the bending moment at a given position x results from the internal rigidity of the material and the piezoelectric coupling:

$$\mathcal{M} = Bw'' - \sum_i \chi \bar{V}_i F_i, \quad (5)$$

where B is the flexural rigidity of the three-layer plate (Lee and Moon, 1989),

$$B = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-v_0^2)} + \frac{2E_p h_p}{1-v_p^2} \left(\frac{h_0^2}{4} + \frac{h_0 h_p}{2} + \frac{h_p^2}{3} \right), \quad (6)$$

and F_i is the characteristic function of the i th patch

$$F_i = H(x - x_i^-) - H(x - x_i^+) \quad (7)$$

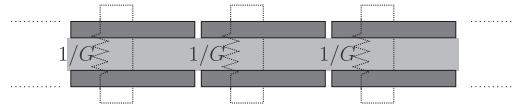


Fig. 2. All piezoelectric pairs are shunted with resistances, modeling the electrical energy absorption.

with H the Heavyside step function. In Eq. (5), the summation over all piezoelectric patches and the use of the characteristic functions F_i provides a compact expression for the local bending moment induced by the piezoelectric coupling. The linearized conservation of momentum for the plate then leads to

$$\mu\ddot{w} = -\mathcal{M}'' - [P], \quad (8)$$

where μ is the surface density of the plate with piezoelectric elements and $[P] = P^+ - P^-$ is the pressure forcing applied by the fluid on the plate. We consider here a purely inviscid model for the flow, and the exact expression of $[P]$ will be made explicit in the following sections for the infinite- and finite-length systems, respectively. In non-inviscid flow, the viscous boundary layers would tend to stabilize the plate by inducing a non-uniform tension, maximum upstream (see for example Connell and Yue, 2007). For large enough Reynolds numbers, this correction is however expected to be small.

An additional relation between \bar{V}_i and Q_i is needed to close the system of Eqs. (1), (5) and (8), and is obtained from the output electrical network connected to the free electrodes of the piezoelectric patches. Lesieutre et al. (2004) showed that energy removal from the piezoelectric system induces structural dissipation, whatever electric device is effectively used (resistor, storage in a battery or other energy harvesting circuitry). Consequently, the simplest electrical component, where each piezoelectric pair is shunted by a conductance G , is considered to investigate the potential harvesting power of the system and its effect on the flutter dynamics (Fig. 2). Applying Ohm's law,

$$\bar{V}_i + \frac{\dot{Q}_i}{G} = 0. \quad (9)$$

This simple electric network is a particular case of more general electric networks considered in Bisegna et al. (2006), in the context of the optimization of dynamical properties of pinned-pinned beams.

2.2. Continuous limit

If the typical lengthscale of the plate's streamwise deformations is large compared to the length l of the piezoelectric patches, one may consider the continuous limit of the discrete equations (1), (5), (8) and (9). We introduce the surface density of the charge, piezoelectric capacity and conductance of the resistive circuit as

$$q(x_i) = Q_i/l, \quad c = C/l, \quad g = G/l, \quad (10)$$

and the continuous voltage $v(x = x_i) = \bar{V}_i$. As $l \rightarrow 0$,

$$[w']_{x_i}^{x_i^+} \simeq w''(x_i)l, \quad (11)$$

$$\sum_i \bar{V}_i F_i(x) \simeq v(x). \quad (12)$$

The continuous equations are then obtained as

$$\mu\ddot{w} + Bw''' - \chi v'' = -[P], \quad (13)$$

$$q - cv - \chi w'' = 0, \quad (14)$$

$$F(q, v) = 0. \quad (15)$$

Here, $F(q, v)$ is a general expression that links charge and voltage, so that at this stage, the equations are valid for any circuit. In the particular case considered here, $F(q, v) = v + \dot{q}/g$ and v can be eliminated from the previous dynamical equations, thereby leading to a system for w and q only:

$$\left(B + \frac{\chi^2}{c}\right)w''' + \mu\ddot{w} - \frac{\chi}{c}q'' = -[P], \quad (16)$$

$$\frac{c}{g}(\dot{q}) + q - \chi w'' = 0. \quad (17)$$

These continuous equations are similar to those obtained in the Laplace space by Bisegna et al. (2006) where homogenization techniques were used.

2.3. Efficiency of the energy conversion

To assess the amount of electrical power that can effectively be extracted, non-linear effects are important to provide the saturation amplitude of the self-sustained oscillations. This question is not addressed here as we focus only on the linear analysis, and will be the subject of a subsequent contribution. However, important physical insight can be gained from the analysis of energy transfer by linearly unstable modes. In particular, the non-linear mode shape that determines the piezoelectric deformation rate and the energy transfers to the output circuit, has been observed to be similar to that of the most linearly unstable mode (Eloy et al., 2008; Michelin et al., 2008). From Eqs. (13) and (14), the equation for energy conservation can be obtained as

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \mathcal{P}_p - \mathcal{P}_{el} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \quad (18)$$

with

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho_s \dot{w}^2 + \frac{1}{2} B w''^2 + \frac{1}{2} c v^2, \quad (19)$$

$$\mathcal{F} = \dot{w}(\chi v' - B w''') + \dot{w}'(B w'' - \chi v), \quad (20)$$

$$\mathcal{P}_p = -p \dot{w}, \quad (21)$$

$$\mathcal{P}_{el} = -v \dot{q}. \quad (22)$$

The total energy density of the system \mathcal{E} is the sum of the solid kinetic and elastic energy as well as the electrical energy stored in the capacity of the piezoelectric material. \mathcal{F} is the flux of mechanical energy in the plate: the first and second terms are, respectively, the rate of work of the internal bending forces and moments, due both to the elastic response of the solid and the piezoelectric coupling. \mathcal{P}_p is the rate of work of the local pressure force and \mathcal{P}_{el} is the power readily available and dissipated in the output system. Note that this equation is valid regardless of the output electrical network chosen. In the case of the purely resistive system considered here, $\mathcal{P}_{el} = \dot{q}^2/g$.

We consider a measure of the harvested (i.e. dissipated) energy over one flapping period T relative to the mean energy density of the solid-piezoelectric system during that period. In that regard, this ratio is a normalization of the harvested energy, and it will be referred to as conversion efficiency in the following. This ratio is defined for an unstable mode (that can lead to self-sustained oscillations) as

$$r = \frac{\int_0^T \langle \mathcal{P}_{el} \rangle dt}{\frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathcal{E} \rangle dt}. \quad (23)$$

In this last expression $\langle \cdot \rangle$ stands for the spatial mean value for the considered mode, taken over either a wavelength in the local analysis or the entire plate in the global analysis. Note that since r is just a normalized energy output and not a thermodynamic efficiency, $r > 1$ is allowed. In the following, we will study the influence of the system's parameters on this ratio to find optimal conditions for the energy conversion.

3. Destabilization by damping and energy conversion in the infinite medium

3.1. Nondimensional equations

Using μ/ρ_f , $\mu/\rho_f U_\infty$, ρU_∞^2 and $U_\infty \sqrt{\mu c}$, respectively, as characteristic length, time, pressure and charge surface density, and noting all nondimensional variables with a tilde, Eqs. (16) and (17) take the following nondimensional form:

$$\frac{1}{V^*^2} (1 + \alpha^2) \ddot{\tilde{w}}''' + \ddot{\tilde{w}} - \frac{\alpha}{V^*} \tilde{q}'' = -[\tilde{p}], \quad (24)$$

$$\gamma \dot{\tilde{q}} + \tilde{q} - \frac{\alpha}{V^*} \tilde{w}'' = 0, \quad (25)$$

with

$$V^* = \sqrt{\frac{\mu^3 U_\infty^2}{B \rho_f^2}}, \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{\chi}{\sqrt{cB}}, \quad (27)$$

$$\gamma = \frac{\rho_f U_\infty c}{\mu g}. \quad (28)$$

V^* is the nondimensional flow velocity, α is the piezoelectric coupling coefficient, and γ is the ratio between the fluid–solid and electrical characteristic timescales.

In the present local analysis, mechanical and electrical displacements are sought in the form of harmonic waves of wavenumber \tilde{k} and frequency $\tilde{\omega}$,

$$\begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} w_0 \\ q_0 \end{pmatrix} e^{i(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t)} \right]. \quad (29)$$

3.2. Computation of the pressure forcing

The pressure forces are computed assuming a potential flow on both sides of the flexible solid. The potential Φ can be decomposed into $\Phi(x,y,t) = x + \phi(x,y,t)$ where ϕ is the perturbation potential to the uniform base flow. The flow is incompressible therefore ϕ must satisfy

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (30)$$

with boundary conditions,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y=0^+, t) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y=0^-, t) = \dot{w}(x, t) + w'(x, t), \quad (31)$$

$$\nabla \phi \rightarrow 0 \quad \text{for } |y| \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Note that ϕ is discontinuous on the plate but the normal velocity must be continuous. The pressure is obtained from the linearized unsteady Bernoulli equation as

$$\tilde{p} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (33)$$

The velocity potential is obtained solving Eq. (30) with boundary conditions (31)–(32). The pressure jump is then obtained by applying Eq. (33) on both sides of the plate. From Eq. (29), it can be written as

$$[\tilde{p}] = \tilde{p}(x, y=0^+, t) - \tilde{p}(x, y=0^-, t) = \text{Re} \left[2w_0 \frac{(\tilde{\omega} - \tilde{k})^2}{|\tilde{k}|} e^{i(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t)} \right]. \quad (34)$$

Using Eqs. (34) and (29), the system (24)–(25) becomes a linear system for w_0 and q_0 ,

$$\begin{bmatrix} D_0 + D_1^2 & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ q_0 \end{Bmatrix} = \mathcal{L}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) \begin{Bmatrix} w_0 \\ q_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (35)$$

with

$$D_0 = -\tilde{\omega}^2 \left(1 + \frac{2}{|\tilde{k}|} \right) - 2|\tilde{k}| + 4\tilde{\omega} \frac{\tilde{k}}{|\tilde{k}|} + \frac{\tilde{k}^4}{V^{*2}}, \quad (36)$$

$$D_1 = \alpha \frac{\tilde{k}^2}{V^*}, \quad (37)$$

$$D_2 = 1 - i\gamma\tilde{\omega}. \quad (38)$$

Eq. (35) admits non-trivial solutions if and only if the determinant of \mathcal{L} vanishes, which leads to the following dispersion relation:

$$D_0(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = D_1(\tilde{k}, \tilde{\omega})^2 \left(\frac{1}{D_2(\tilde{k}, \tilde{\omega})} - 1 \right). \quad (39)$$

For $(\tilde{k}, \tilde{\omega})$ solution of Eq. (39), Eq. (35) determines the relative amplitude of the mechanical displacement and electrical charge for the corresponding wave.

3.3. Local stability analysis

We will restrict the wave analysis to the temporal approach, which classically consists in looking for frequencies satisfying the dispersion relation associated to a real wavenumber \tilde{k} . Eq. (39) can be put in the form of a third-order polynomial in $\tilde{\omega}$. Hence, for any real wavenumber, there are three different waves. If there exists a real wavenumber for which one of these frequencies has a positive imaginary part, the corresponding wave grows exponentially in time, indicating a temporal instability. In the energy harvesting context, this temporal instability is necessary to create

self-sustained oscillations of the plate that are able to generate a net power to the electric networks via the piezoelectric coupling.

Let us first consider the case of no-piezoelectric coupling ($\alpha = 0$): the matrix \mathcal{L} is diagonal and the problem then consists of two distinct dispersion relations. The first describes the propagation of flexural waves in the medium,

$$D_0(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = 0. \quad (40)$$

This dispersion relation is very similar to that of a compliant panel interacting with a potential flow, which has been extensively studied (Brazier-Smith and Scott, 1984; Crighton and Osswell, 1991). The difference between the present dispersion relation and that of Brazier-Smith and Scott (1984) comes from the different choice for the nondimensional time and the presence of the flow on both sides of the plate. Hence, the same phenomena will be observed, but at different values of the nondimensional velocity, frequencies and wavenumbers. The main feature of this medium is that it is unstable for any non-zero value of the flow velocity. Analyses of the different branches in the complex \tilde{k} - and $\tilde{\omega}$ -planes have also been performed in the above-mentioned papers to investigate the convective-absolute instability transition, which will not be addressed here. The second uncoupled dispersion relation describes the behavior of the charge in the electric network,

$$D_2(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = 0. \quad (41)$$

Eq. (41) corresponds to the charge dynamics in an RC circuit and does not include the wavenumber \tilde{k} , as no propagation of charge can exist in a medium composed of electrical circuits disconnected from each other.

In Fig. 3, the frequencies $\tilde{\omega}_n(\tilde{k})$ ($n = 1..3$) are plotted. Here, $\tilde{\omega}_1$ and $\tilde{\omega}_2$ are solutions of Eq. (40) and correspond to flexural waves, while $\tilde{\omega}_3$ is the solution of Eq. (41) and corresponds to an electrical wave. For $\tilde{k} \in [0, \tilde{k}_b]$, the two frequencies $\tilde{\omega}_1$ and $\tilde{\omega}_2$ are complex conjugate, one of them having a positive imaginary part that indicates a temporal instability. For $\tilde{k} > \tilde{k}_b$, $\tilde{\omega}_1$ and $\tilde{\omega}_2$ are real and the waves are neutrally stable. Wave 1 has positive phase velocity for all k but two ranges of wavenumbers can be distinguished depending on the sign of the phase velocity of wave 2. For $\tilde{k}_b \leq \tilde{k} \leq \tilde{k}_c$, $\tilde{\omega}_2 > 0$ and wave 2 has a positive phase velocity, while for $\tilde{k} \geq \tilde{k}_c$, it has a negative phase velocity. As a consequence of the phase velocity sign change, the frequency $\tilde{\omega}$ vanishes for $\tilde{k} = \tilde{k}_c$. From Eq. (40), one can show that

$$\tilde{k}_b \sim V^*, \quad (42)$$

when $V^* \ll 1$. Looking for zeroes of $\tilde{\omega}_2$, we obtain

$$\tilde{k}_c = 2^{1/3} V^{*2/3}. \quad (43)$$

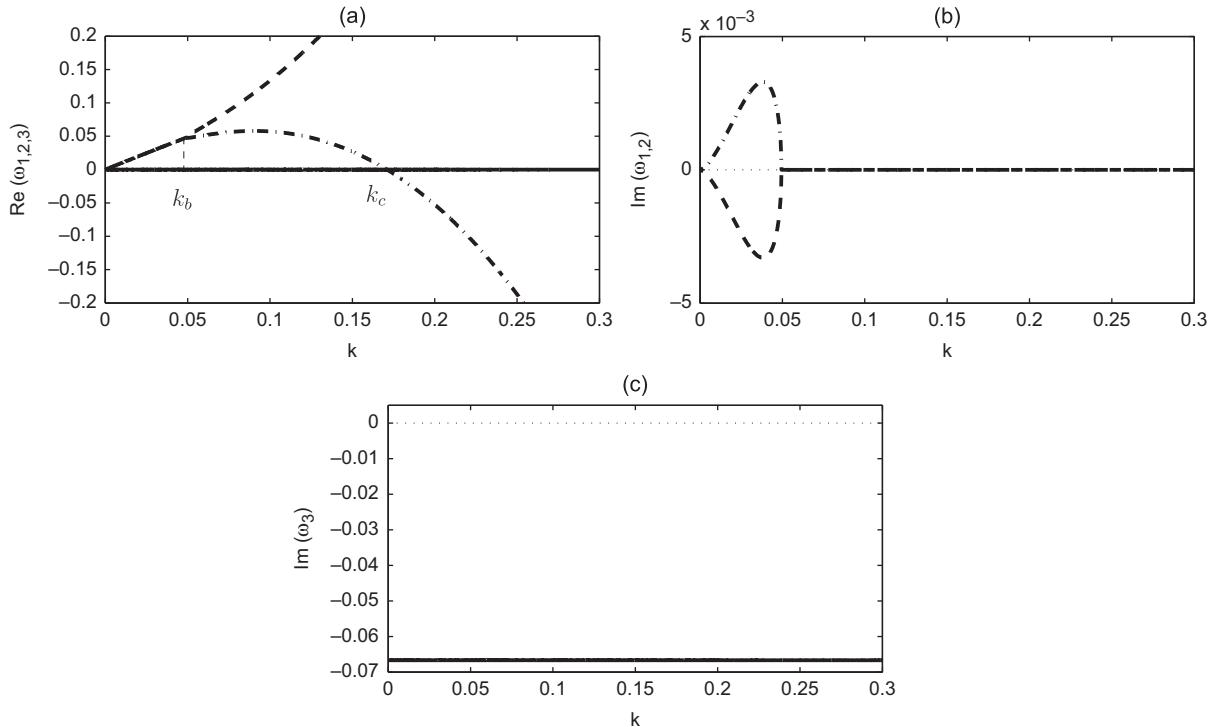


Fig. 3. Real part (a) and imaginary part (b, c) of frequencies associated to a real wavenumber k , for $V^* = 0.05$, $\gamma = 15$ and $\alpha = 0$. This corresponds to a situation where no coupling is present in the system.

Finally, the frequency $\tilde{\omega}_3$ is constant and purely imaginary with negative imaginary part: no energy propagates and the negative growth rate $\text{Im}(\tilde{\omega}_3)$ is the characteristic time of discharge of a capacity c in a resistance $1/g$.

Piezoelectric coupling is now considered ($\alpha \neq 0$). From a mechanical point of view, its effect is to pump energy from the system to produce heat in the resistances, thereby dissipating mechanical energy. It is thus expected that results regarding the effect of damping on stability of neutral waves will also apply here. In particular, as demonstrated by Landahl (1962), the sign of wave energy is expected to allow the prediction of the stabilizing or destabilizing effect of coupling on neutral waves. The wave's energy is defined as the work done in slowly building up the wave starting from rest at time $t = -\infty$ and has for expression (Cairns, 1979),

$$E = -\frac{\tilde{\omega}}{4} \frac{\partial D_0}{\partial \tilde{\omega}} |w_0|^2. \quad (44)$$

Let us consider a neutral wave propagating in the uncoupled system. The corresponding frequency is $\tilde{\omega}_0(\tilde{k})$, so that $D_0(\tilde{\omega}_0, \tilde{k}) = 0$ and $\tilde{\omega}_{0i} = 0$. The perturbed value of $\tilde{\omega}$ due to the addition of piezoelectric coupling is then written as

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \delta\tilde{\omega}, \quad (45)$$

where $\delta\tilde{\omega} \ll \tilde{\omega}$. The frequency $\tilde{\omega}$ satisfies the dispersion relation, thus,

$$\delta\tilde{\omega} \frac{\partial D_0}{\partial \tilde{\omega}} \Big|_{(\tilde{k}, \tilde{\omega}_0)} \simeq \left(\frac{D_1^2}{D_2} - D_1^2 \right)_{(\tilde{k}, \tilde{\omega}_0)}. \quad (46)$$

In this last expression, only the leading order terms have been kept. The stabilizing or destabilizing effect of piezoelectric coupling depends on the imaginary part of $\delta\tilde{\omega}$. After a straightforward calculation, this quantity reads

$$\delta\tilde{\omega}_i \simeq \frac{\tilde{\omega}_0 \alpha^2 \gamma \tilde{k}^4}{V^{*2} (1 + \tilde{\omega}_0^2 \gamma^2) \frac{\partial D_0}{\partial \tilde{\omega}}}. \quad (47)$$

It hence appears that the variation of the growth rate after the addition of piezoelectric coupling has the opposite sign of the neutral waves energy in the absence of coupling. It is positive for a negative energy wave (NEW), and negative for a positive energy wave (PEW). Following the classification of Benjamin (1963), NEW are also referred to as *class A* waves, while PEW are referred to as *class B* waves. In Fig. 4, energy of waves 1 and 2 are plotted as a function of the wavenumber. Energy of wave 2 is negative for $\tilde{k} \in [\tilde{k}_b, \tilde{k}_c]$ and the wave energy analysis shows that this range of wavenumbers will become unstable when piezoelectric coupling is added. To address the validity of the previous prediction, Fig. 5 represents the three frequencies associated with a real wavenumber in the case $V^* = 0.05$, $\alpha = 0.5$, so that it is the same case as in Figs. 3 and 4, but with added piezoelectric damping. Here, piezoelectricity couples mechanical displacement and electrical displacement. Consequently, no purely mechanical or electrical waves propagate in the system. The predictions of the above wave energy analysis are confirmed by the behavior of $\text{Im}(\tilde{\omega}_1)$ and $\text{Im}(\tilde{\omega}_2)$ in Fig. 5b: Wave 1 is stabilized by the addition of piezoelectric coupling while wave 2 is destabilized by the addition of piezoelectric coupling in the range of wavenumbers $[\tilde{k}_b, \tilde{k}_c]$ and stabilized for $\tilde{k} > \tilde{k}_c$. For the third wave, which is a purely electrical wave without coupling, the frequency has now a non-zero real part, indicating that it is now a propagating wave. Consequently, this wave also appears to be affected by coupling.

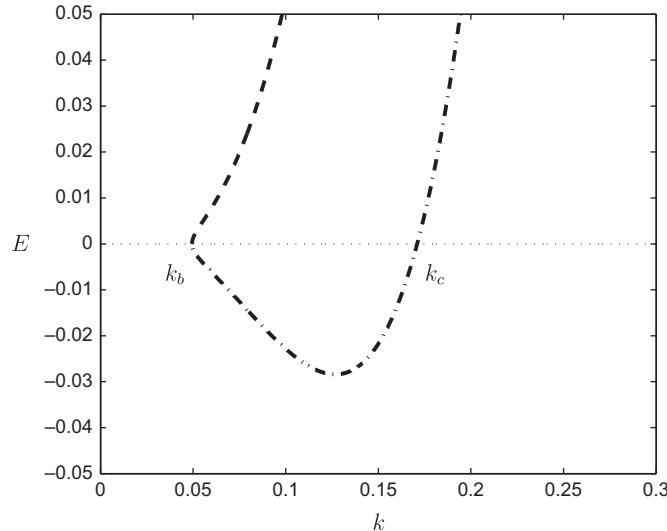


Fig. 4. Wave energy of the neutral waves propagating in the system without piezoelectric coupling for $V^* = 0.05$.

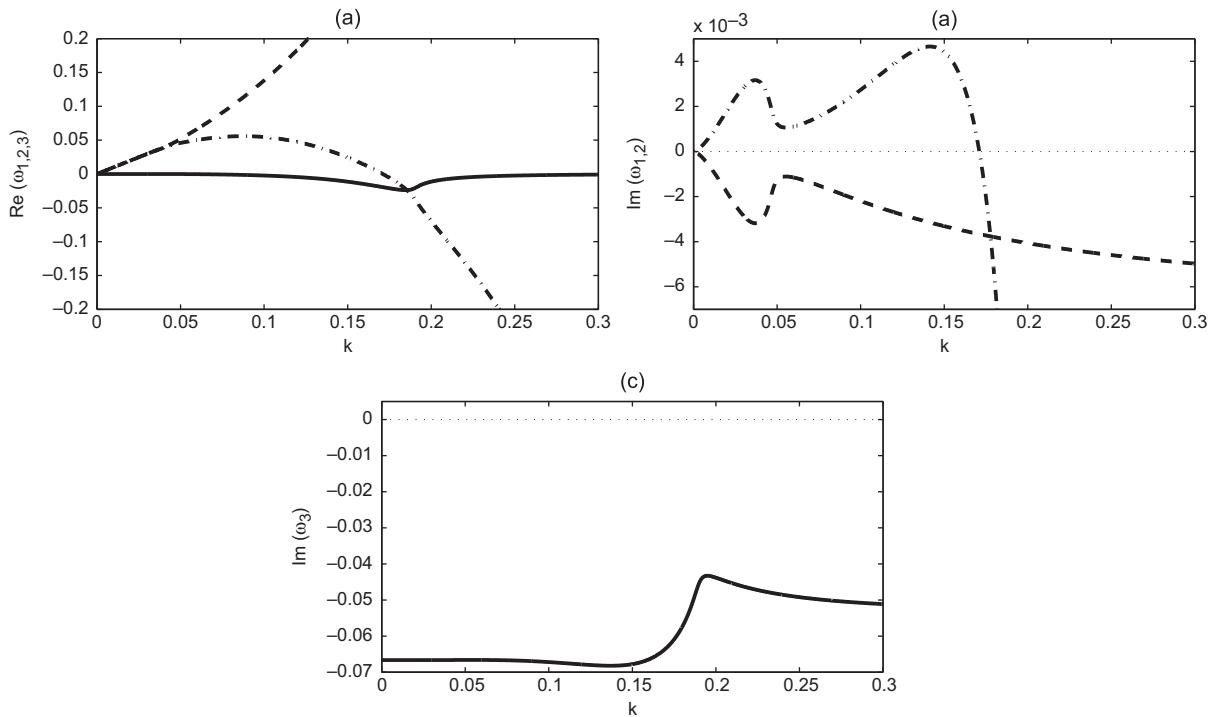


Fig. 5. Real part (a) and imaginary part (b, c) of frequencies associated to a real wavenumber k , for $V^* = 0.05$, $\gamma = 15$ and $\alpha = 0.5$. This corresponds to a situation where coupling is present in the system.

3.4. Energy conversion efficiency of unstable waves

Now that the effect of piezoelectric coupling on the propagation of waves and their stability has been addressed, the energy conversion efficiency of these waves is investigated. As defined in the previous section, energy conversion is modeled by resistances that shunts the piezoelectric patches, and is significant only if a wave is unstable, so that it grows exponentially in time and eventually saturates through a non-linear mechanism that is not addressed in the present analysis. The starting point is the ratio defined in Eq. (23), which takes the following form when nondimensional variables are used:

$$r = \frac{\frac{1}{\gamma} \int_0^{2\pi/\tilde{\omega}_r} \langle \tilde{v} \dot{q} \rangle dt}{\frac{\tilde{\omega}_r}{2\pi} \int_0^{2\pi/\tilde{\omega}_r} \frac{1}{2} \left\langle \dot{\tilde{w}}^2 + \frac{1}{V^*} \tilde{w}''^2 + \tilde{v}^2 \right\rangle dt}. \quad (48)$$

The spatial averaging appearing in this last expression corresponds to the mean value over one wavelength. When it is applied to the product of two quantities transported by a wave of wavenumber \tilde{k} and frequency $\tilde{\omega}$, namely $a = \text{Re}[a_0 e^{i(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t)}]$ and $b = \text{Re}[b_0 e^{i(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t)}]$, it reads

$$\langle ab \rangle = \frac{\tilde{k}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\tilde{k}} ab dx = 2e^{2\tilde{\omega}_it} \text{Re}(a_0 \bar{b}_0). \quad (49)$$

The numerator and denominator of Eq. (48) have the same time-dependence therefore r does not depend on time. With a displacement in the form of Eq. (29), it finally takes the following form:

$$r(\alpha, V^*, \gamma, \tilde{k}, \tilde{\omega}) = \frac{8\pi}{\tilde{\omega}_r} \left[\gamma^{-1} \left(1 + \frac{\tilde{k}^4}{V^* |\tilde{\omega}|^2} \right) \left| V^* \frac{i\gamma \tilde{\omega} - 1}{\alpha \tilde{k}^2} \right|^2 + \gamma \right]^{-1}, \quad (50)$$

where $\tilde{\omega}$ and \tilde{k} are linked through the relation dispersion equation (39). For a given set of parameters α , V^* and γ , let R be the maximum value of r among all unstable waves,

$$R(\alpha, V^*, \gamma) = \max_{\tilde{k}, \tilde{\omega}_i > 0} r(\alpha, V^*, \gamma, \tilde{k}, \tilde{\omega}). \quad (51)$$

The wavenumber and frequency of the corresponding wave are noted as K and Ω_r , respectively. The maximum efficiency R is plotted in Fig. 6 as a function of γ , for $\alpha = 0.5$ and $V^* = 0.05$. It presents a local maximum at $\gamma \sim 22$ and tends to infinity for high values of γ . The values of K and Ω_r are also plotted. The first observation that can be done is that for all γ , K is comprised

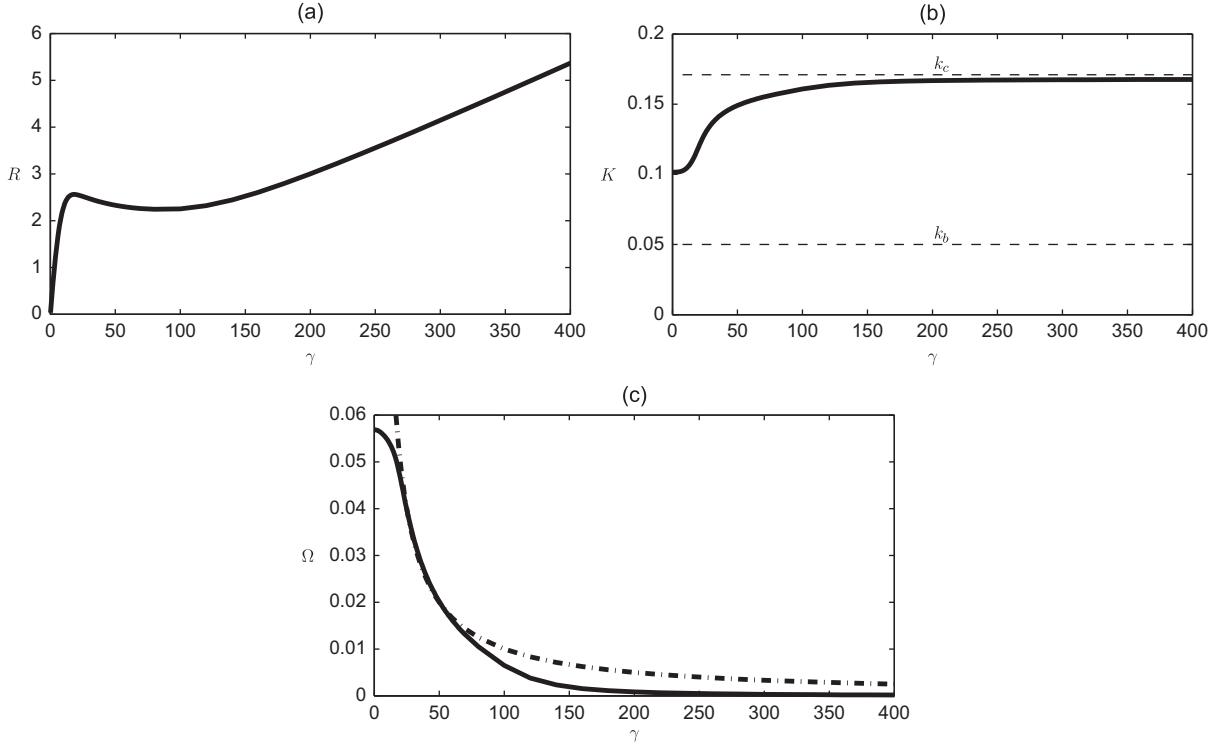


Fig. 6. (a) Maximal efficiency, R , as a function of γ for $\alpha=0.5$ and $V^*=0.05$. (b) Value of the wavenumber of the corresponding unstable wave. (c) Value of the corresponding frequency, compared with $1/\gamma$ (dashed line).

between \tilde{k}_b and \tilde{k}_c . Hence, the maximum of r always occurs for a wave that is stable without piezoelectric damping and is destabilized by the addition of piezoelectric damping.

Let us focus at first on the behavior of R for $\gamma \rightarrow \infty$. One is tempted to conclude that one has to choose a large value of γ to optimize the energy conversion. But it appears in Fig. 6(b), (c) that $K \rightarrow \tilde{k}_c$ and $\Omega_r \rightarrow \tilde{\omega}_2(\tilde{k}_c) = 0$. This means that although the energy dissipated in the electrical circuits grows with γ , the period of the oscillations diverges and the growth rate tends to zero. This situation is thus far from optimal. One can also note that $\gamma \rightarrow \infty$ corresponds to a resistance that tends to infinity, or equivalently, an open circuit. For this reason, we conclude that the optimal efficiency corresponds to the local maximum of Fig. 6(a) around $\gamma = 22$ instead of $\gamma \rightarrow \infty$. Moreover, Fig. 6(c) shows that in the vicinity of the maximum efficiency, the characteristic time of the electrical circuits and the characteristic time of the wave are equal, indicating that optimal efficiency also results from a synchronization between the fluid–solid and electrical systems.

For the particular values of the parameters α and V^* used in Fig. 6, negative energy waves are hence waves that optimize conversion efficiency. Let us now explore the whole (α, V^*) space. To do so, we introduce $\Gamma(V^*, \alpha)$, the value of γ that maximizes $R(\alpha, V^*, \gamma)$ and R_γ , K_γ and Ω_γ the respective values of the efficiency, the wavenumber and the frequency at this maximum. In Fig. 7, K_γ is plotted as a function V^* for several values of α between 0.01 and 0.7. The range of wavenumbers destabilized by damping $[\tilde{k}_b, \tilde{k}_c]$ appears grayed out on this plot, showing that for any values of α and V^* , optimal efficiency occurs for a wave destabilized by damping.

Finally, the optimal efficiency R_γ is plotted as a function of α for different values of V^* in Fig. 8. All curves gather on a single line, indicating that the optimal efficiency scales as α^2 and does not depend on the flow velocity. This enlightens the importance of maximizing the coupling coefficient for such application.

Before addressing the finite-length system, let us summarize the main point of the local analysis conducted in this section: The particular range $[\tilde{k}_b, \tilde{k}_c]$ of wavenumbers has been emphasized, in which piezoelectric damping has a destabilizing effect and analysis of the efficiency has shown that energy conversion efficiency is maximum for waves in this range.

4. Linear dynamics of a finite-length piezoelectric flexible plate

In the previous section, we focused on the local stability analysis of an infinitely long flexible plate coupled through piezoelectric patches to a purely dissipative electrical system. In this section, we are interested in the global stability analysis and conversion efficiency of a plate with finite length, coupled to the same piezoelectric dissipative system. The wave analysis approach of the local study is here replaced by a study of global modes that takes into account the boundary conditions on the finite plate and effects such as vortex shedding downstream from the solid.

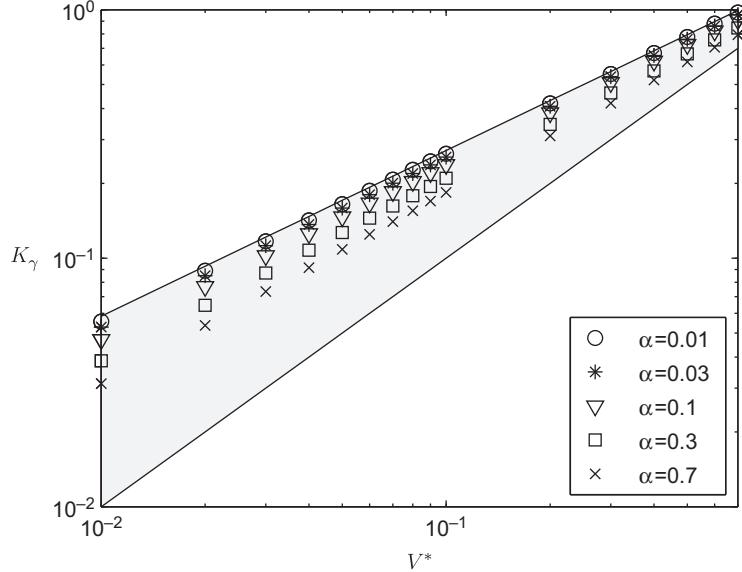


Fig. 7. Value of the wavenumber that maximize the efficiency, K_γ . Grayed region corresponds to the region of negative energy waves, $k \in [k_b, k_c]$, showing that these waves optimize the efficiency.

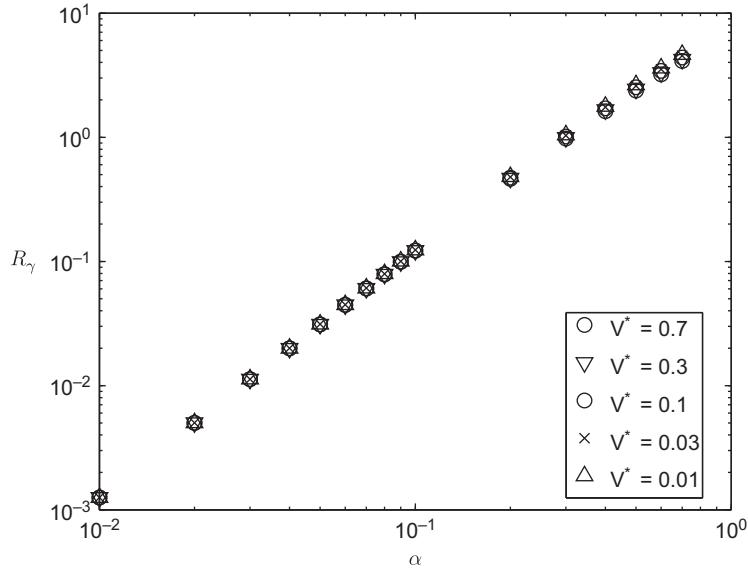


Fig. 8. Optimal energy conversion efficiency, R_γ , as a function of α for different values of the nondimensional velocity V^* .

4.1. Nondimensional equations and fluid model

The natural length scale of the problem is now L , the streamwise length of the plate. The nondimensionalization of the system's equations must be modified, and L and L/U_∞ are now used as characteristic length and time-scales, respectively. Pressure, charge densities and voltage remain nondimensionalized by ρU_∞^2 , $U_\infty \sqrt{\mu c}$ and $U_\infty \sqrt{\mu/c}$. The nondimensional form of a variable a is noted as \hat{a} to avoid confusion with the infinite system's notations, so that Eqs. (16) and (17) now become

$$\frac{1}{U^{*2}}(1+\alpha^2)\hat{w}'''' + \ddot{\hat{w}} - \frac{\alpha}{U^*}\hat{w}'' = -M^*\hat{p}, \quad (52)$$

$$\beta\dot{\hat{q}} + \hat{q} - \frac{\alpha}{U^*}\hat{w}'' = 0, \quad (53)$$

where the coupling parameter α was defined in Eq. (27) and

$$M^* = \frac{\rho_f L}{\mu}, \quad \beta = \frac{c U_\infty}{gL} = \frac{\gamma}{M^*}, \quad U^* = UL \sqrt{\frac{\mu}{B}} = V^* M^*. \quad (54)$$

The voltage induced on the piezoelectric system is in nondimensional form

$$\hat{v} = \hat{q} - \frac{\alpha}{U^*} \hat{w}''. \quad (55)$$

The parameters M^* and U^* are the classical mass ratio and nondimensional velocity used in previous studies of the flag instability (Eloy et al., 2007; Michelin and Llewellyn Smith, 2009a). β is the nondimensional characteristic time-scale of the output circuit, relative to the advective time-scale L/U_∞ chosen as a reference in this section.

M^* can also be interpreted as a length ratio L/η where $\eta = \mu/\rho_f$ is the characteristic length scale introduced in Section 3. The parameters U^* and β are the finite-system equivalent to the V^* and γ parameters of the local analysis [see Eqs. (26) and (28)]. In the limit of a long flexible plate, $M^* \gg 1$, the local dynamics studied in the previous section is expected to become dominant over finite-length effects such as the influence of the wake or boundary conditions.

Clamped-free boundary conditions are imposed on the finite-length flexible plate:

$$\text{for } \hat{x} = 0 \quad \begin{cases} \hat{w} = 0, \\ \hat{w}' = 0, \end{cases} \quad (56)$$

$$\text{for } \hat{x} = 1 \quad \begin{cases} (1 + \alpha^2) \hat{w}'' - \alpha U^* \hat{q} = 0, \\ (1 + \alpha^2) \hat{w}''' - \alpha U^* \hat{q}' = 0. \end{cases} \quad (57)$$

Note that, Eq. (57) expresses the vanishing at the free end of the total internal torque and normal stress.

The solution of the linearized equations (52) and (53) is sought in the form of global modes

$$\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{q} \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} W(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} e^{-i\hat{\omega}t} \right], \quad (58)$$

where $\hat{\omega}$ can be complex. Similarly, $V(x)$ can be defined from the potential \hat{v} and is easily obtained from Eq. (55).

4.2. Pressure forcing on the finite-length plate

The pressure forcing on the flexible plate is computed from a potential flow approximation. In the case of a finite-length solid, we must account for the shedding of a vortex wake from the trailing edge of the plate. We follow here the double-wake method (Eloy et al., 2007; Guo and Païdoussis, 2000; Michelin and Llewellyn Smith, 2009a): the flow around the plate is potential everywhere except on the horizontal axis. On the plate, a bound vorticity distribution is present to satisfy the no-normal flow boundary condition on the plate's upper and lower surfaces. The free wake vorticity is not solved for explicitly as in the Vortex Sheet approach (Kornecki et al., 1976; Michelin and Llewellyn Smith, 2009b) but it is instead imposed that the pressure discontinuity across the plate must vanish at both ends of the flexible plate ($[\hat{p}](0,t) = [\hat{p}](1,t) = 0$). At the trailing edge, this is consistent with the shedding of a free horizontal vortex sheet that cannot sustain any pressure force. At the leading edge, it introduces an “upstream wake” whose physical origin is debatable. However, this method has been shown to predict the instability threshold and growth-rates correctly, particularly for intermediate-to-large mass ratio M^* where the instability threshold and mode structures predicted by both methods are very similar (Michelin and Llewellyn Smith, 2009a).

Using Fourier decomposition in the axial direction, it can be shown that the longitudinal gradient of the pressure jump $\partial[\hat{p}]/\partial x$ satisfies the following singular integral equation (Eloy et al., 2007):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial[\hat{p}](\xi,t)}{\partial\xi} \frac{d\xi}{x-\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \hat{w}(x,t), \quad [\hat{p}](1,t) = [\hat{p}](0,t) = 0. \quad (59)$$

This singular equation can be formally solved for $\partial[\hat{p}]/\partial x$, and after integration of the pressure gradient from the leading edge, the pressure forcing on the plate is obtained as a function of the plate's displacement $\hat{w}(x,t)$. Using the normal mode decomposition in Eq. (58), for a given mode shape $W(x)$, the pressure jump $P(x)$ can be decomposed as

$$P(x) = -\hat{\omega}^2 P^M(x) - 2i\hat{\omega} P^G(x) + P^K(x) \quad (60)$$

with

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\xi} \begin{pmatrix} P^K[W] \\ P^G[W] \\ P^M[W] \end{pmatrix} \frac{d\xi}{x-\xi} = \begin{pmatrix} W''(x) \\ W'(x) \\ W(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P^K[W] \\ P^G[W] \\ P^M[W] \end{pmatrix}(x=0,1) = 0. \quad (61)$$

P^M , P^G and P^K represent added inertia, gyroscopic and added stiffness effects on the particular mode considered, and can be expressed as linear operators on the mode shape W by inverting Eq. (61). The system (52)–(53) can then be rewritten as

$$-\hat{\omega}^2(W + P^M[W]) - 2i\hat{\omega}P^G[W] + \frac{(1+\alpha^2)}{U^{*2}}(W''' + P^K[W]) - \frac{\alpha}{U^*}Q'' = 0, \quad (62)$$

$$(-i\hat{\omega}\beta + 1)Q - \frac{\alpha}{U^*}W'' = 0, \quad (63)$$

and boundary conditions are readily obtained from Eqs. (56) and (57).

For given values of the four nondimensional parameters α , β , U^* and M^* , discretizing $W(x)$ and $Q(x)$ on the first N Chebyshev Gauss–Lobatto points, the above system together with boundary conditions in Eqs. (56) and (57) can be written using a collocation method as an eigenvalue problem for the vector $[W, -i\hat{\omega}W, Q]^T$.

4.3. Stability analysis and impact of piezoelectric coupling

The flexible plate in axial flow classically becomes unstable to fluttering above a critical velocity ratio U_{crit}^* that depends on the fluid–solid mass ratio M^* (e.g. Eloy et al., 2007). We consider here the evolution of this stability threshold with the piezoelectric coupling α and the circuit's response time-scale β .

For a fixed β , increasing α enhances the coupling between the piezoelectric and mechanical systems: an additional rigidity is introduced and energy is dissipated in the resistive circuit. The overall effect of the piezoelectric coupling α is therefore expected to be a stabilization of the fluttering modes. Fig. 9 shows that this is generally the case except at large values of M^* where destabilization of some modes through the piezoelectric coupling is possible. For large enough α however, all modes are stabilized, in agreement with physical intuition on the stabilizing effect of a dissipative system.

Nonetheless, it is important to note that the effect of α is highly dependent on the tuning of the system's frequency to that of the output circuit and Fig. 9 corresponds to a configuration where both the fluid–solid system and the electrical circuit have similar fundamental frequencies.

The ratio β is also a measure of the resistance of the electric circuit, and the limit $\beta \ll 1$ corresponds to shunted piezoelectric elements. In that case, charge transfers are instantaneous and the electrostatic balance of the piezoelectric material is achieved at all times. The electric potential difference \hat{v} in the piezoelectric remains negligible, and so does the piezoelectric torque on the plate. Therefore, in the limit $\beta \ll 1$, the system behaves like the uncoupled system as observed in Fig. 10(a).

In the large- β limit, the output circuit behaves like an open loop: electric charge transfers in the circuit between the two faces of the piezoelectric material are negligible. Because of the piezoelectric coupling, the plate's bending induces an electrostatic potential difference in the piezoelectric patches that, in return, creates an additional rigidity on the plate [see Eqs. (16) and (17)]. The system is therefore equivalent to a flexible plate of modified dimensional bending rigidity $B' = B(1 + \alpha^2)$. This behavior is confirmed in Fig. 10(b) where the stability threshold is observed to converge at large β toward $U_0^* \sqrt{1 + \alpha^2}$, with $U_0^*(M^*)$ the uncoupled stability threshold.

Between these two limits $\beta \ll 1$ and $\beta \gg 1$, the minimum velocity required for flutter to develop is observed to be significantly increased for low values of M^* (heavy flags) while at large M^* (typically $M^* \geq 50$), a destabilization is observed

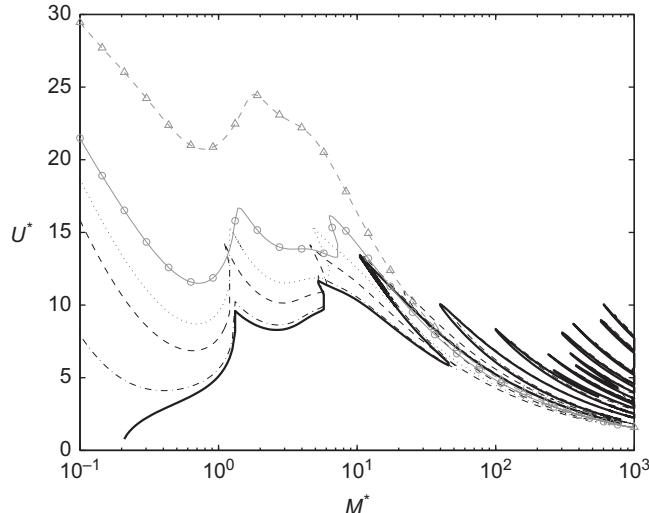


Fig. 9. Evolution of the stability threshold with M^* for $\beta = 1$ and $\alpha = 0$ (thick black), $\alpha = 0.2$ (dash-dotted), $\alpha = 0.5$ (dashed), $\alpha = 0.7$ (dotted), $\alpha = 1$ (solid-circle) and $\alpha = 2$ (solid-triangles). $\alpha = 0$ corresponds to the uncoupled flexible plate without the piezoelectric system.

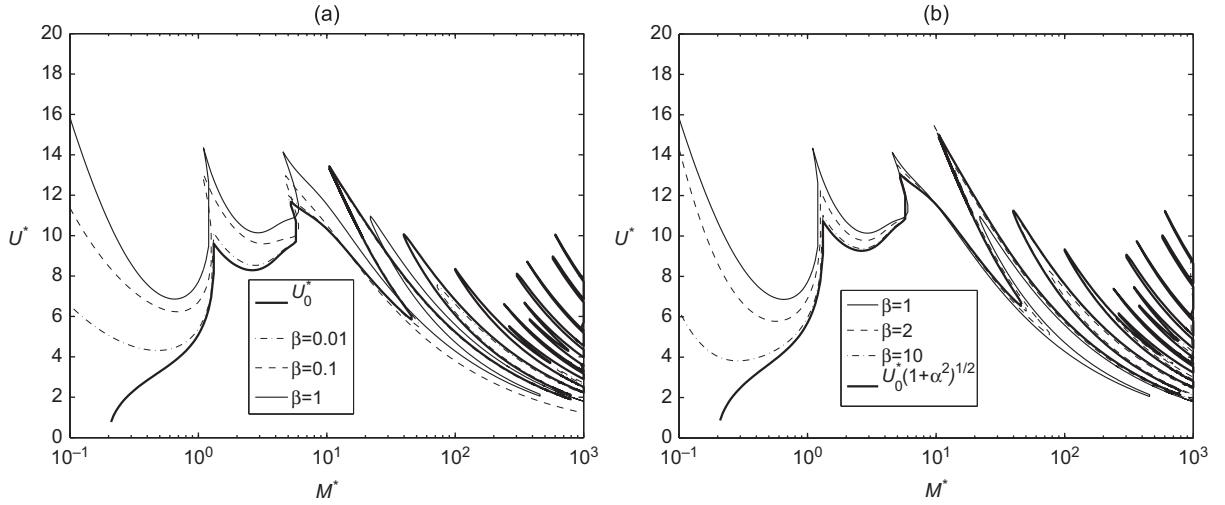


Fig. 10. Evolution of the stability threshold when β is varied for $\alpha = 0.5$. For clarity, only values of β lower (resp. greater) than 1 are represented in (a) [resp. (b)]. In (a), the solid black line corresponds to the threshold without any coupling (no piezoelectric). In (b), the solid grey line corresponds to an uncoupled system with modified rigidity $B' = B(1 + \alpha^2)$.

and is maximum for $\beta = O(1)$ when the dynamics of the fluid–solid system and the electrical circuit have time-scales of the same order. We also observe that for $\beta = O(1)$ the different branches observed on the stability threshold for large M^* and associated with the instability region of successive high-wavenumber modes, disappear. Beyond the conclusions on the evolution of the stability threshold, these results emphasize the existence of a maximum in the coupling effects for values of $\beta = O(1)$.

4.4. Conversion efficiency

4.4.1. Definition in the finite-length system

Total harvested energy estimates are not possible within a purely linear framework. However, the conversion efficiency (or normalized harvested energy) defined in Eq. (23) provides some important information about the energy transfers in the linearly unstable modes of the coupled systems and its ability to produce electrical power from the flapping of the flexible plate. The spatial average in Eq. (23) is now taken over the entire length of the plate and the conversion efficiency r becomes the nondimensional notations of this section

$$r = \frac{\frac{1}{\bar{\rho}} \int_t^{t+2\pi/\hat{\omega}_r} \int_0^1 \hat{v}^2 dt' dx}{\frac{\hat{\omega}_r}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\hat{\omega}_r} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{\hat{w}}^2 + \frac{1}{2U^2} \hat{w}''^2 + \frac{1}{2} \hat{v}^2 \right) dt' dx}. \quad (64)$$

For a function $f(x,t) = \text{Re}(F(x)e^{-i\hat{\omega}t})$ with $\hat{\omega} = \hat{\omega}_r + i\hat{\omega}_i$ (f being one of $\hat{v}, \hat{q}, \hat{w}, \dots$),

$$\int_t^{t+2\pi/\hat{\omega}_r} f(x,t')^2 dt' = \frac{(e^{4\pi\hat{\omega}_i/\hat{\omega}_r} - 1)e^{2\hat{\omega}_i t}}{4\hat{\omega}_i} \left(|F(x)|^2 + \text{Re} \left[\frac{i\hat{\omega}_i e^{-i\hat{\omega}_r t}}{\hat{\omega}} F(x)^2 \right] \right),$$

and Eq. (64) becomes

$$r(t) = \frac{G_1 + \text{Re} \left(\frac{iG_2 \hat{\omega}_i}{\hat{\omega}} e^{2i\hat{\omega}_r t} \right)}{H_1 + \text{Re} \left(\frac{iH_2 \hat{\omega}_i}{\hat{\omega}} e^{2i\hat{\omega}_r t} \right)}, \quad (65)$$

with $G_1 = \int_0^1 |G(x)|^2 dx$ and $G_2 = \int_0^1 G(x)^2 dx$, with

$$G(x) = \frac{V(x)^2}{\beta}, \quad (66)$$

and H_1 and H_2 are defined similarly from

$$H(x) = \frac{1}{2} \left([i\hat{\omega} W(x)]^2 + \frac{1}{U^2} W''(x)^2 + \frac{1}{2} V(x)^2 \right). \quad (67)$$

Unlike in the local analysis of Section 3, and because the different functions are not periodic on the averaging length anymore, r is still a function of time, except at the stability threshold where $\dot{\omega}_i = 0$. $r(t)$ is however periodic, and for unstable flutter modes, the fluctuations of r around its mean value are weak as the mode's growth rate is generally small compared to its frequency. In the following, most of the analysis will be performed at the stability threshold, where r is a constant. In all other cases, its time-average \bar{r} over a period will be taken as a measure of the conversion efficiency and is easily computed from $\dot{\omega}$ and the mode shape functions V and W .

4.4.2. Energy conversion and resonance

We are interested here in the coupled behavior of the fluid–solid and electric systems for a given piezoelectric material (fixed α). Fig. 11 shows the variations with M^* and U^* of the conversion efficiency associated with the dominant mode for $\alpha = 0.5$ and $\beta = 0.25$, above the stability threshold. We observe that this conversion efficiency is increased significantly for large M^* , corresponding to high fluid-to-solid mass ratios (in water for example) or long systems. The conversion efficiency is also observed to be maximum in the regions destabilized by the piezoelectric coupling. This is consistent with the conclusions of the local analysis, where a maximum of the conversion efficiency was observed for the negative energy wave destabilized by the introduction of piezoelectric damping.

Such destabilized regions are located in the vicinity of the instability threshold and we will from now on focus on this parameter region, as it is also most relevant given the linear character of this study. The map of the conversion efficiency for the dominant (and neutrally stable) mode at the threshold is shown in Fig. 12. It confirms the existence of a maximum of conversion efficiency at high M^* for $\beta \sim 0.1–1$. We also observe that the maximum efficiency and the corresponding value of β are independent of M^* for $M^* \geq 20–50$. This suggests that the dynamics leading to the maximum energy

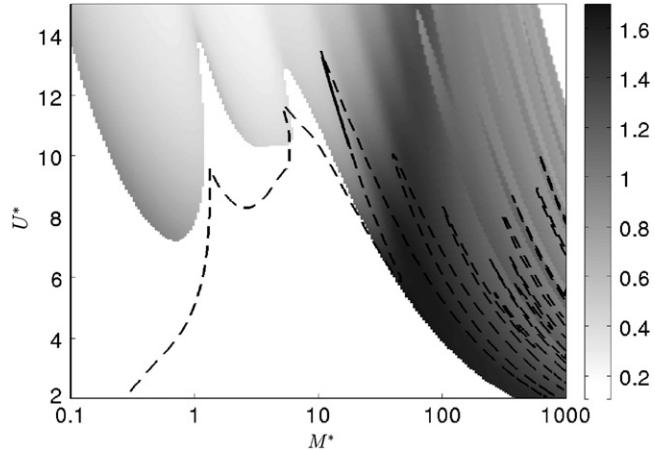


Fig. 11. Conversion efficiency of the dominant unstable mode for $\alpha = 0.5$ and $\beta = 0.25$. In the white regions, all the modes are stable. The stability threshold obtained for the uncoupled system ($\alpha = 0$) is shown as a dashed line.

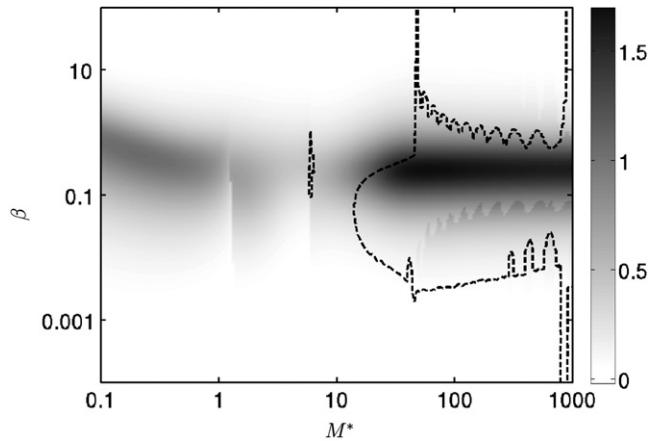


Fig. 12. Conversion efficiency \bar{r} of the dominant mode (neutral) at the stability threshold for $\alpha = 0.5$. The thick black line shows the limits of the regions destabilized in comparison with the uncoupled problem $\alpha = 0$.

conversion are dominated by local effects as will be discussed further in Section 5. Fig. 12 also confirms that the maximum conversion efficiency is reached when the flexible plate is destabilized by the piezoelectric coupling.

In that region of the parameter space, the frequency of the dominant mode varies between 3 and 5 (Fig. 13), which is of the same order of magnitude as the value of $1/\beta$ near the maximum efficiency, therefore suggesting a resonance-type phenomenon between the frequency of the neutrally stable mode and the characteristic frequency of the output electric system. The existence of a maximum for the conversion efficiency for $\beta\omega_r \approx 1$ is confirmed in Fig. 13. Note that the agreement is excellent for $M^* = 100$ while it is not as good for $M^* = 1$ which lies outside of the maximum efficiency region.

The evolution of the maximum efficiency with β in Fig. 13 is highly reminiscent of the variations of the dissipated energy in the resistive part of a RC -electrical circuit forced by a generator at a given frequency ω . The role of the forcing generator is played here by the fluid–solid system that imposes charge transfers and non-zero potential in the piezoelectric material through the deformation of the flexible plate [Eq. (17)]. The forcing frequency is however not independent from the output circuit, as shown in Fig. 13 where we observe a significant variation with β of the frequency

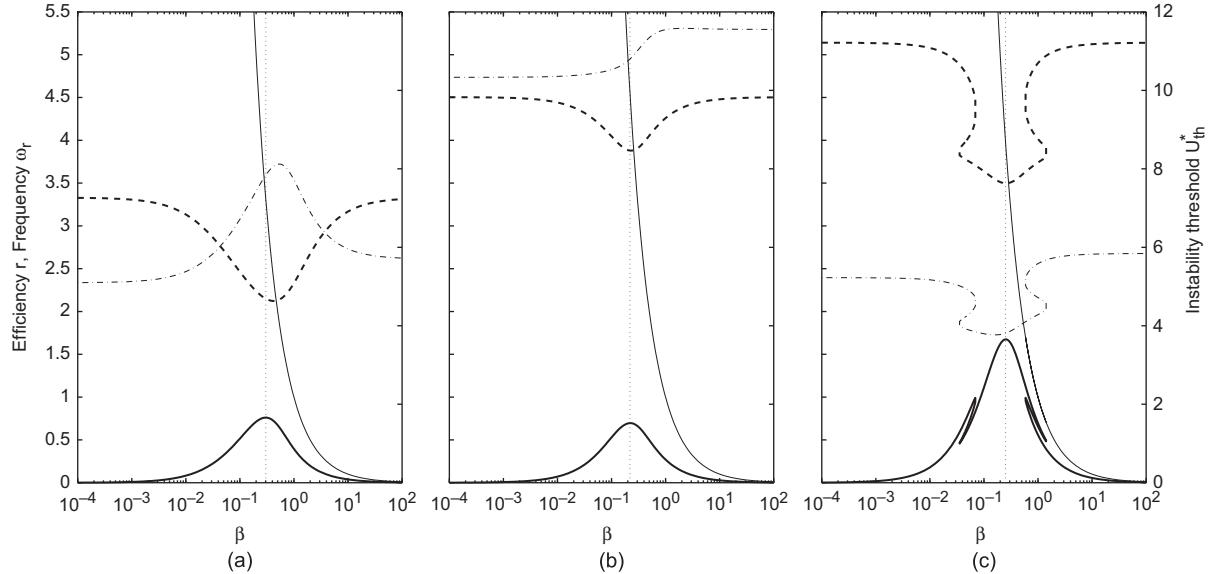


Fig. 13. Evolution with β at the stability threshold of the conversion efficiency (thick solid) and frequency (thick dashed) for $\alpha = 0.5$ and $M^* = 1$ (a), $M^* = 10$ (b) and $M^* = 100$ (c). The evolution of the critical velocity U^* at the threshold is also shown on each plot (thin dash-dotted) and the thin solid line represents $1/\beta$ for reference. The vertical dotted line indicates the value of β for which the conversion efficiency is maximum.

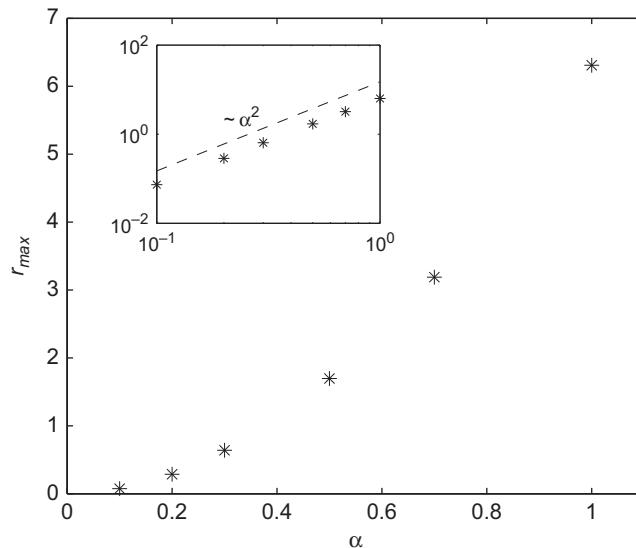


Fig. 14. Evolution of the maximum conversion efficiency r_{max} with the coupling coefficient α . r_{max} is defined as the maximum of r evaluated at the stability threshold for all values of β and M^* . The insert plot represents the same quantities in log–log format, showing that $r_{max} \sim \alpha^2$.

of the dominant mode. This modification of the forcing frequency is a result of the piezoelectric feedback of the electrical system on the fluttering dynamics. In that regard, the observed efficiency peak differs from a traditional resonance and corresponds to a tuning of the fluid–solid frequency to the output system's when the two time-scales are of the same order.

The comparison of the three cases $M^* = 1, 10$ and 100 also confirms that the maximum conversion efficiency is significantly larger when destabilization by damping occurs (lower value of the threshold when $\beta\omega_r \simeq 1$).

4.4.3. Influence of the piezoelectric coupling

In Fig. 12, we observed that the conversion efficiency reaches a maximum value of 1.7 for large M^* and $\beta\omega_r \simeq 1$. Fig. 14 shows that the maximum conversion efficiency at the stability threshold is strongly influenced by the coupling coefficient α , with a clear scaling $r_{\max} \sim \alpha^2$, and this confirms the discussion of Section 3. It is not surprising to obtain values of r_{\max} greater than one as it is not a thermodynamic efficiency but a measure of the harvested energy over a period relative to the average stored energy over the same period in the solid and capacitative systems. Note also that unlike β , U^* and M^* , which are determined by the tuning of the output system properties, of the plate's length, inertia and of the flow conditions, α depends only on the characteristics of the piezoelectric material and the plate's rigidity. For a given piezoelectric system α is fixed and Fig. 14 provides an upper bound of the achievable conversion efficiency.

5. Discussion

The fluttering of a flexible plate in an axial flow is an attractive candidate for flow energy harvesting as it can produce self-sustained periodic vibrations of the solid body. Understanding the impact of the harvesting-induced damping on the fluid–solid dynamics is an essential element to assess the potential performance of such systems. Thus the present paper investigated the linear dynamics of the fluttering flexible plate fully coupled to a simple dissipative electrical circuit through piezoelectric layers, by studying the coupling effect on the local and global instabilities as well as on the energy conversion efficiency.

The ability to quantify the total harvested energy is intrinsically limited by the linear framework considered, as saturated flapping amplitudes are not computed. However, the linear analysis is an important step to obtain some insight on the modification of the system properties, in particular its stability threshold, by the introduction of a realistic coupling to an output electrical network. Hence, it was shown that destabilization by damping can occur in such systems. The local analysis showed that the destabilized modes correspond to the so-called negative energy waves of the un-damped system. This was confirmed in the global analysis by the destabilization of plates with high mass ratio where local effects are expected to dominate. In particular, we observed in Fig. 12 that above a certain value of M^* of the order of 100, the dependence with M^* of the system properties at the stability threshold becomes negligible.

The parameter M^* can be seen as a relative measure of the length of the system to the local characteristic lengthscale. For $M^* \gg 1$, one expects the stability and properties of the dominant modes to be driven by local phenomena rather than global ones. For given α and β , the critical velocity threshold remains finite which is consistent with the observation that the system is unstable locally for all $V^* = U^*M^*$. The presence of a maximum in conversion efficiency for $\beta\hat{\omega}_r \simeq 1$ can be identified to the maximum efficiency observed in local analysis for $\gamma\tilde{\omega}_r \simeq 1$ as $\beta = \gamma/M^*$ and $\hat{\omega}_r = \tilde{\omega}_r M^*$.

From a practical point of view, the present results suggest that the energy conversion is more efficient when the mass ratio M^* is large. This is achieved when the plate's length is long, but also when the fluid inertia is large compared to the solid's, as in water flows for example. These results also emphasize the importance of the output circuit in the energy transfers: a careful tuning of the circuit characteristic time-scale to that of the fluid–solid oscillations significantly increases the conversion efficiency from the solid to the electric system.

Using both local and global analyses, the maximum energy conversion efficiency r_{\max} was found to scale as α^2 . This scaling is expected in the limit of weak coupling: if one neglects the piezoelectric coupling term in Eq. (24) or (52), the fluid–system can be considered as only weakly modified and act as a constant forcing on the electric system. The forcing in Eqs. (25) and (53) scales linearly with α and so is expected to scale the charge density. The harvested energy, a quadratic function of the charge density, is therefore expected to scale as α^2 . It is however surprising to observe that this scaling remains valid in a greater range of coupling. This result enlightens the essential role of the coupling coefficient α in energy harvesting applications. This coupling coefficient can be obtained from Eqs. (6) and (27) by separating the properties of the piezoelectric materials from the geometric effects of the relative thickness of the plate and piezoelectric patches:

$$\alpha = e_{31} \sqrt{\frac{1-v_p^2}{\varepsilon E_p}} \mathcal{G}\left(\frac{h_0}{h_p}, \frac{E_0(1-v_p^2)}{E_p(1-v_0^2)}\right), \quad (68)$$

where \mathcal{G} is a nondimensional function of the thickness and bending stiffness ratios. To increase the piezoelectric coupling it is therefore important to maximize e_{31} or minimize the permittivity ε . It must be noted that changing ε also impacts the capacity of the piezoelectric material, which in turn modifies the choice of the optimal energy harvesting electrical circuit through the optimization of the parameter β . Finally, once the materials are chosen, an optimal thickness ratio h_0/h_p can also be obtained. To get an idea of the value of α in practical applications, two cases may be considered that are representative of typical values found in the literature: the former consists of a mylar plate ($h_0 = 100 \mu\text{m}$, $E_0 = 4 \text{ GPa}$) with

two PVDF piezoelectric layers ($h_p = 40 \mu\text{m}$, $E_p = 2.5 \text{ GPa}$, $e_{31} = 0.023 \text{ C/m}^2$, $\varepsilon_r = 11.5$), leading to an approximate value of $\alpha \sim 0.03$. The latter consists of a steel plate ($h_0 = 300 \mu\text{m}$, $E_0 = 200 \text{ GPa}$) with two PZT piezoelectric layers ($h_p = 300 \mu\text{m}$, $E_p = 60 \text{ GPa}$, $e_{31} = 10 \text{ C/m}^2$, $\varepsilon_r = 2000$) and in that case, the coupling coefficient is $\alpha \sim 0.3$. Careful design of the system is expected to further increase α , therefore the typical value of $\alpha = 0.5$ chosen in the present paper is realistic but corresponds to an upper bound estimate of the system's performance.

Natural extensions of this work include the study of passive resonant (Hagood and von Flotow, 1991) or active circuits (Chen et al., 2010) to determine potential improvements in the energy transfer from the electrical design. In this paper, a continuous distribution of piezoelectrics has been considered and studying the impact of the finite-length of piezoelectric patches would provide important information on the actual design of energy harvesters. Finally, as emphasized throughout the present paper, further investigation of the energy harvesting potential must include the representation of non-linear effects in the fluid and solid dynamics, to obtain the amplitude of the self-sustained oscillations of the system. Both local (Peake, 2001) and global (Michelin et al., 2008) analyses of the non-linear regime have been performed for compliant panels or plates placed in an axial flow. The non-linear behavior of piezoelectric materials in the energy harvesting context has been investigated by Triplett and Quinn (2009). The study of the saturated regime in the fluttering dynamics of the fluid–structure–electrical fully coupled system will provide a quantitative assessment of the actual harvested power and is the focus of subsequent work to this linear analysis.

References

- Alben, S., 2008. The flapping-flag instability as a non-linear eigenvalue problem. *Physics of Fluids* 20, 104106.
- Alben, S., Shelley, M.J., 2008. Flapping states of a flag in an inviscid fluid: bistability and the transition to chaos. *Physical Review Letters* 100, 074301.
- Allen, J.J., Smits, A.J., 2001. Energy harvesting eel. *Journal of Fluids and Structures* 15, 629–640.
- Anton, S.R., Sodano, H.A., 2010. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006). *Smart Materials and Structures* 16, 1–21.
- Barrera-Gil, A., Alonso, G., Sanz-Andres, A., 2010. Energy harvesting from transverse galloping. *Journal of Sound and Vibration* 329, 2873–2883.
- Benjamin, T.B., 1963. The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows. *Journal of Fluid Mechanics* 16, 436–450.
- Bernitsas, M.M., Raghavan, K., Ben-Simon, Y., Garcia, E.M.H., 2008. VIVACE (vortex induced vibration aquatic clean energy: a new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow). *ASME Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering* 130, 041101.
- Bisegna, P., Caruso, G., Maceri, F., 2006. Optimized electric networks for vibration damping of piezoactuated beams. *Journal of Sound and Vibration* 289, 908–937.
- Brazier-Smith, P.R., Scott, J.F., 1984. Stability of fluid flow in the presence of a compliant surface. *Wave Motion* 6, 547–560.
- Cairns, R.A., 1979. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *Journal of Fluid Mechanics* 92, 1–14.
- Chen, Y.Y., Vasic, D., Costa, F., Wu, W.J., 2010. Nonlinear magnetic coupling of a piezoelectric energy harvesting cantilever combined with velocity-controlled synchronized switching technique, in: *Power MEMS 2010*, Leuven, Belgium.
- Connell, B.S.H., Yue, D.K.P., 2007. Flapping dynamics of a flag in uniform stream. *Journal of Fluid Mechanics* 581, 33–67.
- Crighton, D., Oswell, J.E., 1991. Fluid loading with mean flow. 1. Response of an elastic plate to localized excitation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 335, 557–592.
- Doaré, O., 2010. Dissipation effect on local and global stability of fluid-conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration* 329, 72–83.
- Doaré, O., Sauzade, M., Eloy, C., 2011. Flutter of an elastic plate in a channel flow: confinement and finite-size effects. *Journal of Fluids and Structures* 27 (1), 76–88.
- Eloy, C., Lagrange, R., Souilliez, C., Schouveiler, L., 2008. Aeroelastic instability of a flexible plate in a uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics* 611, 97–106.
- Eloy, C., Souilliez, C., Schouveiler, L., 2007. Flutter of a rectangular plate. *Journal of Fluids and Structures* 23, 904–919.
- Elvin, N., Elvin, A., 2009. The flutter response of a piezoelectrically damped cantilever pipe. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 20, 2017–2026.
- Guo, C.Q., Païdoussis, M.P., 2000. Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow. *Journal of Applied Mechanics* 67, 171–176.
- Hagood, N., von Flotow, A., 1991. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration* 146, 243–268.
- Kornecki, A., Dowell, E.H., O'Brien, J., 1976. On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration* 47, 163–178.
- Landahl, M., 1962. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface. *Journal of Fluid Mechanics* 13, 609–632.
- Lee, C.K., Moon, F.C., 1989. Laminated piezopolymer plates for torsion and bending sensors and actuators. *Journal of the Acoustical Society of America* 85, 2432–2439.
- Leslieutre, G.A., Ottman, G.K., Hofmann, H.F., 2004. Damping as a result of piezoelectric energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration* 269, 991–1001.
- Maurini, C., dell'Isola, F., Vescovo, D.D., 2004. Comparison of piezoelectric networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing* 18, 1243–1271.
- McKinney, W., DeLaurier, J.D., 1981. The wingmill: an oscillating-wing windmill. *Journal of Energy* 5, 109–115.
- Michelin, S., Llewellyn Smith, S.G., 2009a. Linear stability analysis of coupled parallel flexible plates in an axial flow. *Journal of Fluids and Structures* 25, 1136–1157.
- Michelin, S., Llewellyn Smith, S.G., 2009b. Resonance and propulsion performance of a heaving flexible wing. *Physics of Fluids* 21, 071902.
- Michelin, S., Llewellyn Smith, S.G., Glover, B.J., 2008. Vortex shedding model of a flapping flag. *Journal of Fluid Mechanics* 617, 1–10.
- Païdoussis, M.P., 1998. *Fluid–Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 1. Academic Press, London.
- Païdoussis, M.P., 2008. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics. *Journal of Sound and Vibration* 310, 462–492.
- Peake, N., 2001. Nonlinear stability of a fluid-loaded elastic plate with mean flow. *Journal of Fluid Mechanics* 434, 101–118.
- Platt, S.R., Farritor, S., Haider, H., 2005. On low-frequency electric power generation with PZT ceramics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 10, 455–461.
- Pobering, S., Schwesinger, N., 2004. A novel hydropower harvesting device, in: *Proceedings of the 2004 International Conference on MEMS, NANO and Smart Systems*, pp. 480–485.
- Preumont, A., 2002. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*, second ed. Kluwer Academic Publishers.
- Shelley, M., Vandenberghe, N., Zhang, J., 2005. Heavy flags undergo spontaneous oscillations in flowing water. *Physical Review Letters* 94, 094302.

- Shenck, N.S., Paradiso, J.A., 2001. Energy scavenging with shoe-mounted piezoelectrics. *IEEE Micro* 21, 30–42.
- Sodano, H.A., Inman, D.J., Park, G., 2004. A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials. *The Shock and Vibration Digest* 36, 197–205.
- Tang, L., Païdoussis, M.P., Jiang, J., 2009. Cantilevered flexible plates in axial flow: energy transfer and the concept of flutter-mill. *Journal of Sound and Vibration* 326, 263–276.
- Taylor, G.W., Burns, J.R., Kammann, S.M., Powers, W.B., Welsh, T.R., 2001. The energy harvesting eel: a small subsurface ocean/river power generator. *IEEE Journal of Oceanic Engineering* 26, 539–547.
- Thomas, O., Deue, J.F., Ducarne, J., 2009. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 80, 235–268.
- Triplett, A., Quinn, D., 2009. The effect of non-linear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 20, 1959–1967.
- Wang, D.A., Ko, H.H., 2010. Piezoelectric energy harvesting from flow-induced vibration. *Journal of Micromechanics and Microengineering* 20, 025019.
- Westwood, A., 2004. Ocean power wave and tidal energy review. *ReFocus* 5, 50–55.
- Zhang, J., Childress, S., Libchaber, A., Shelley, M., 2000. Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind. *Nature* 408, 835–839.



Experimental analysis of the quasi-static and dynamic torsional behaviour of shape memory alloys

Olivier Doaré ^{*}, Alessandro Sbarra, Cyril Touzé, Mohamed Ould Moussa, Ziad Moumni

ENSTA-Paristech, Unité de Mécanique, 91761 Palaiseau Cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 16 June 2011

Received in revised form 9 September 2011

Available online 29 September 2011

Keywords:

Shape memory alloys

Pseudo-elastic behaviour

Frequency response function

Dynamical

Quasi-static

ABSTRACT

This paper investigates experimentally the quasi-static and dynamic torsional behaviour of shape memory alloys wires under cyclic loading. A specifically designed torsional pendulum made of a Ni-Ti wire is described. Results on the quasi-static behaviour of the wire obtained using this setup are presented, giving an overall view of the damping capacity of the material as function of the amplitude of the loading (imposed torsional angle), the frequency and the temperature. The dynamical behaviour is then presented through measured frequency response function between forcing angle at the top of the pendulum and the difference between top and bottom rotation angles in the vicinity of the first eigenfrequency of the wire, *i.e.* in the range [0.3 Hz, 1 Hz]. The softening-type non-linearity and its subsequent jump phenomenon, predicted theoretically by the decrease of the effective stiffness when martensite transformation starts is clearly evidenced and analysed.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Shape memory alloys (SMA) can exhibit an unusual effect: they can recover their initial shape by simple heating after being deformed up to 8–15% (Delaey et al., 1974). This property, called shape memory effect, is used in various applications in the aerospace industry (Hartl et al., 2010a,b), and also in modern medical devices (Duerig et al., 1999; Auricchio et al., 2003). Besides, at high temperatures SMA also possess the property of pseudo-elasticity, which is the ability of a SMA to accommodate large strains due to stress-induced phase change at a constant, sufficiently high temperature and to recover its undeformed shape upon unloading. This effect is associated with stress induced austenite–martensite transformation. This behaviour occurs at a temperature above a characteristic temperature of the material, referred to as A_f (austenite finish temperature). The loading and unloading paths during this cycle do not coincide, which induces an hysteresis loop in the stress–strain relationship that is responsible of energy-dissipation. SMA are then good candidates for the design of vibration dampers, and applications in civil engineering for the mitigation of seismic-induced vibrations are already proposed (Saadat et al., 2002; Auricchio et al., 2008; Ozbulut and Hurlebaus, 2011; Carreras et al., 2011).

The potential use of such materials in vibrations damping motivated fundamental works addressing the effect of time dependence of the external solicitations. A significant amount of research

works focused on the effect of coupling between phase changes and thermal exchanges (Sun and Hwang, 1993; Leo and Shield, 1993; Shaw and Kyriakides, 1995; Bruno et al., 1995; Piedboeuf et al., 1998; Bernardini and Vestroni, 2003; Bernardini and Pence, 2005; Zhang et al., 2010; Morin et al., 2011). It follows that correct modeling of the mechanical behaviour of a material must include the heat exchanges with its external environment. Models neglecting this effect are referred to as *isothermal* while models considering this effect are referred to as *non-isothermal*. Energy dissipated by these materials then depends on both characteristic times of external mechanical loading and heat dissipation (Sun and Hwang, 1993).

In addition to thermal effects, inertia effects can play an important role in the overall dynamics of the system. In that case, one has also to take into account that SMA are now part of a structure with a distributed mass, hence possessing eigenmodes and eigenfrequencies. The most simple case of such systems is an oscillator whose rigidity term shows a pseudo-elastic behaviour. In this context, some theoretical works investigated the nonlinear frequency response function of such materials. Using a simplified constitutive SMA model, Masuda and Noori (2002) studied the effect of the hysteresis loop shape on the non-linear resonant response of the oscillator. With the help of isothermal and non-isothermal models based on dissipation functions, Bernardini et al. investigated the nonlinear frequency response function of such oscillators (Bernardini and Vestroni, 2003; Lacarbonara et al., 2004; Bernardini and Rega, 2005, 2010). The main features observed are (1) a softening behaviour when forcing amplitudes are such that austenite–martensite phase transformation occurs in the material, (2) a hardening behaviour for greater amplitudes, such that complete

* Corresponding author.

E-mail address: olivier.doare@ensta-paristech.fr (O. Doaré).

martensite transformation is realized in the material, (3) jump effects in the frequency response function due to these softening and hardening effects, (4) chaotic behaviour in some narrow frequency/amplitude ranges. Temporal simulations of free and forced vibrations of a shape memory alloy torsional pendulum have also been presented (Seelecke, 2002) and the effect of coupling two oscillators on the occurrence of chaos has been studied (Machado et al., 2003).

On the experimental side, fewer results can be found on the dynamic behaviour of pseudo-elastic SMA oscillators. Li and Feng have measured frequency response functions of bars under traction-compression (Feng and Li, 1996; Li and Feng, 1997). The investigated frequency range, 700–1500 Hz, was very high, so that the time for the martensitic transformation to occur in a manner similar to that observed in quasi-static tests is questionable. A slight frequency shift to lower frequencies as well as a decreasing value of peak amplitude response for increasing values of the forcing, was clearly evidenced, showing the increase of damping capacity when exciting nonlinear behaviours. However, jump phenomena have not been observed. Another experimental study has been performed by Collet et al. (2001) on flexural beams, in a frequency range around 40 Hz. Once again, a shift of the resonance frequency was observed, but jump phenomena were not found. Finally, Lammering and Schmidt (2001) investigated the frequency-response curves of a pre-strained NiTi string harmonically excited in the vicinity of its first eigenfrequency, in the range 17–19 Hz, as well as a spring-mass system composed of a stiff beam with additional masses supported by SMA springs, excited at resonance around 6 Hz. In both cases, a shift of the frequency to lower values (softening behaviour) was measured but without jump phenomena. All these experimental works suggest that the damping capacity is predominant over the nonlinearity, so that the decreasing value of the maximum vibration amplitude for increasing forcing values hides the possible occurrence of jumps. However, these experimental investigations do not consider the behaviour of the system in the frequency range that is dynamically tested, precluding from a complete view of the involved phenomena.

The aim of this work is to investigate experimentally the dynamic behaviour of SMA wires under cyclic loading at a lower frequency range, as well as giving simultaneous measurements of frequency-response curves and structural material behaviour in the frequency range of dynamical testing. More specifically, the tested frequency range is here 0.3–1 Hz, in order to better understand the link between quasi-static and dynamic measurements. For that purpose, a specifically designed torsional pendulum made of a Ni-Ti wire is considered. It is clamped upstream to a motor and downstream to an inertial load. The set-up allows for measurements of both quasi-static and dynamic responses, as the inertial load can be either blocked or left free to rotate on behalf of the user. Hence, for the same frequency range, quasi-static measurements of the behaviour as well as dynamical frequency-response curves will be measured. One of the main objective is to obtain experimental evidence of the jump effect in the frequency response function of a pseudo-elastic device, as predicted by the theoretical studies. In this paper, *dynamic* properties will always refer to a case where inertia is taken into account. One then has to deal with an oscillator (or a structure). On the other hand, *quasi-static* will refer to a case without inertia terms. This distinction is worth to mention given a general confusion around the words *quasi-static* and *dynamic*: in some litterature where inertia is not considered, these terms are employed to mark the difference between models with respect to thermo-mechanical coupling (see e.g. He and Sun, 2011; Morin et al., 2011).

The paper is organized as follows: In Section 2, the experimental setup is presented. The method used to obtain quasi-static and dynamic behaviours is then described. In Section 3, experimental

results on quasi-static behaviour of the NiTi wires under test are presented and discussed. In Section 4, dynamic behaviour are addressed, as well as a linear theoretical model used to estimate some mechanical constants. In Section 5, preliminary results on the effect of room temperature are presented and briefly discussed. A conclusion finally close the article.

2. Experimental setup

A specific setup has been designed in order to perform both quasi-static and dynamic tests on SMA wires, as shown in Fig. 1. It consists of a wire of length L made of the material under test. The upper part of the wire is clamped to a torque sensor, which is attached to a brush-less servomotor. The lower part of the wire is clamped to an inertial load, which consists of a rigid bar with two added masses at its extremities. A black plate with a white point is fixed above the bar. The position of the point is tracked in real-time with the help of a firewire camera and an appropriate image processing system detailed below. This allows to record the position of the bottom end as a function of time. Finally, a ball bearing is placed at the bottom of the system to prevent undesirable out-of-plane oscillations of the wire when subjected to very large rotations.

Two types of measurements can be performed with this experimental setup. For quasi-static tests, the bottom end of the wire is maintained in a fixed position, while a rotation angle path $\alpha_c(t)$ is imposed at the top of the wire. Both torque given by the sensor and real angle of rotation given by the servomotor are then recorded to obtain the curve torque versus angle of the wire. These experiments will be discussed in Section 3.

Dynamic measurements are made possible by letting the mass free to rotate. The image of a moving white dot on a black plate is recorded with a firewire camera. Images are processed as illustrated in Fig. 2: (1) Identify a coordinate system on the plane of the black plate by associating four pixels on the image to real coordinates in the plane of the plate, (2) deform each image using a transformation defined from the reference system points of the previous step, (3) filter the image so that the white dot can be easily tracked, (4) convert the position in pixels of the white dot to a real angle position, (5) output an analog signal which voltage is proportional to the computed angle. Steps (2) to (5) are done in real time at the digital image acquisition rate (60 images/s). Finally, frequency response functions between the imposed angle of rotation $\alpha_c(t)$ (at the upper part) and the relative angle between the upper part and the lower part of the wire can then be computed. The resulting data will be discussed in Section 4.

The test specimen are 2 mm diameter polycrystalline NiTi wires with a chemical composition of 56.1% Ni, obtained from AMF-France. The density of the material is $\rho \approx 6600 \text{ kg/m}^3$ and it has the following experimentally determined characteristic temperatures: $A_f \sim 24^\circ\text{C}$, $A_s \sim 9^\circ\text{C}$, $M_f \sim 13^\circ\text{C}$ and $M_s \sim 23^\circ\text{C}$. Two samples of 150 mm length, with a test length of 85 mm, referred to as "Specimen 1" and "Specimen 2" were used to perform both quasi-static and dynamic tests. The wires are prone to behaviour change and breaking due to fatigue during the cycling tests so that it was impossible to perform both exhaustive quasi-static tests and dynamic tests using the same wire. For that reason, a third wire was used to perform more systematic quasi-static tests. This wire is referred to as "Specimen 3" (S3) in the following. It has a test length of 110 mm. Except for the experiments presented in Section 5, the tests were done at room temperature of 24°C . It has to be noted that this temperature is the minimum temperature to observe a full pseudo-elastic cycle, as it is the minimum temperature to have only the austenitic phase in absence of external stress.

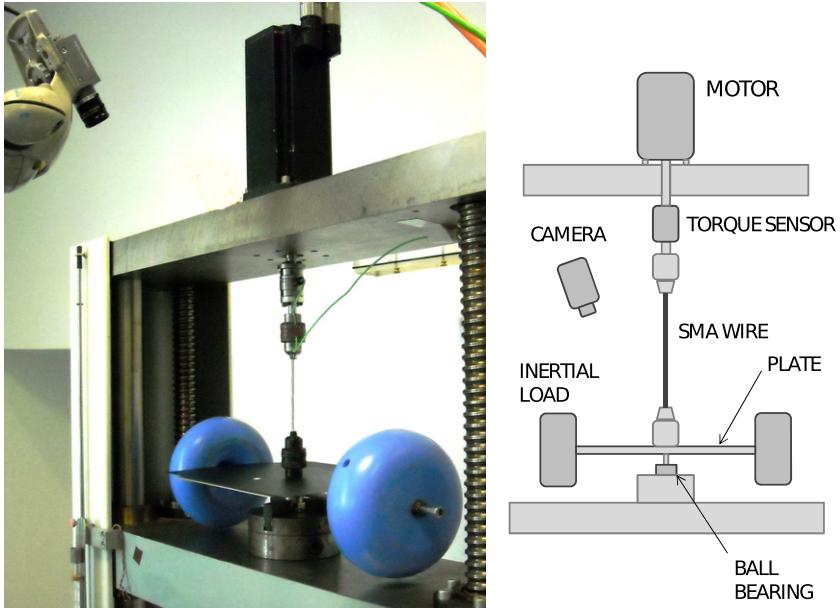


Fig. 1. (a) Photograph of the experimental setup. (b) Schematic view showing the main components.

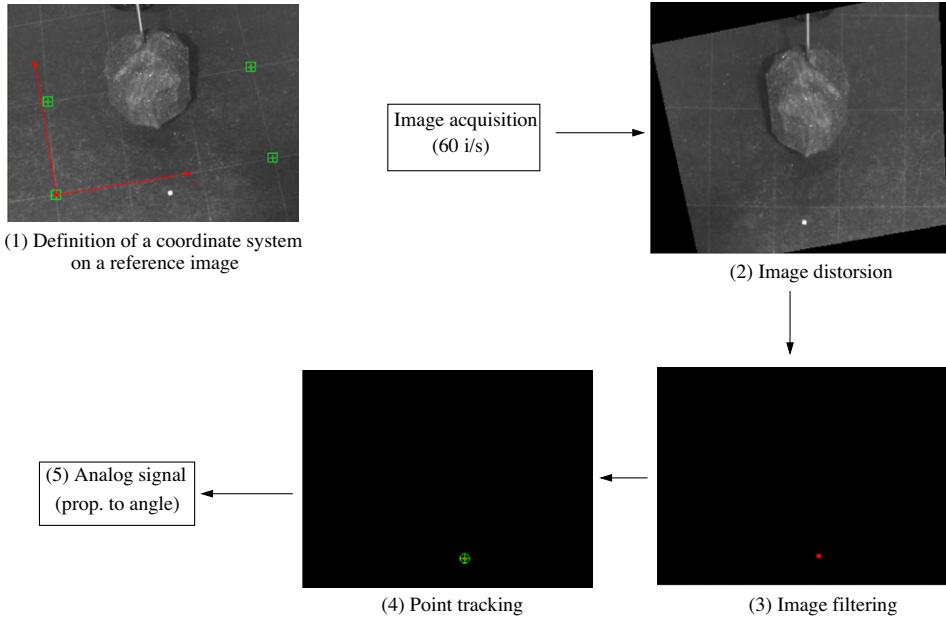


Fig. 2. Illustration of the main image processing steps to convert a image of the torsional pendulum to an analog signal proportional to the angle of rotation of the bottom end.

Finally, the rotational inertia of the system composed by the spindle, the rigid bar, the additional masses and the rotating part of the roll bearing is estimated to be

$$I_M \sim 0.02 \text{ kg m}^2. \quad (1)$$

3. Quasi-static behaviour

The objective of this section is to characterise the mechanical behaviour of the wires in torsional loading. In a first part, specimen 1 and 2 will be characterized at a fixed frequency with an evolution of the imposed angle following a triangular function. By doing this, two phenomena are neglected: the dependence on frequency,

induced by the thermo-mechanical coupling (He and Sun, 2011), and the fatigue of the material that modifies its properties after a many cycles (Predki et al., 2006). However, it will be considered that this characterisation is sufficient to predict general features of the damping capacity of specimens 1 and 2. Moreover, as the dynamic tests presented in Section 4 involved many cycles, the above mentioned fatigue effects prevented us from doing both exhaustive quasi-static tests (multiple frequencies, forcing paths, forcing amplitudes) and exhaustive dynamic tests. In order to keep the properties of one same specimen almost constant for all measurements, it was then chosen to perform only basic quasi-static tests with S1 and S2, before using them in dynamic tests, and perform exhaustive quasi-static test with S3.

Let us first describe the experiments conducted on S1 and S2. It consists in quasi-static tests in which the forcing angle is a triangular function of time, at 0.01 Hz. The typical evolution of the angle and torque versus time is plotted in Fig. 3 for specimen 1 and three amplitudes of forcing: 100° (Fig. 3a), 350° (Fig. 3c) and 450° (Fig. 3e). The non-linear nature of the torque as function of the angle clearly appears on these plots. The corresponding torque versus angle relations are plotted in Fig. 3b, d and f. It has to be noted that

the torque versus angle relationship is related not only to the material properties of the wire but also to the geometry, which induces a non-uniform distribution of stress and strain. As a consequence of this, one can observe that up to the maximum imposed angle at the top of the wire (450°) the completed martensitic transformation accompanied by the return to an elastic behaviour is not found. This can be easily explained by the kinematics of the torsion on a given section, where the shear strain tends to zero with the

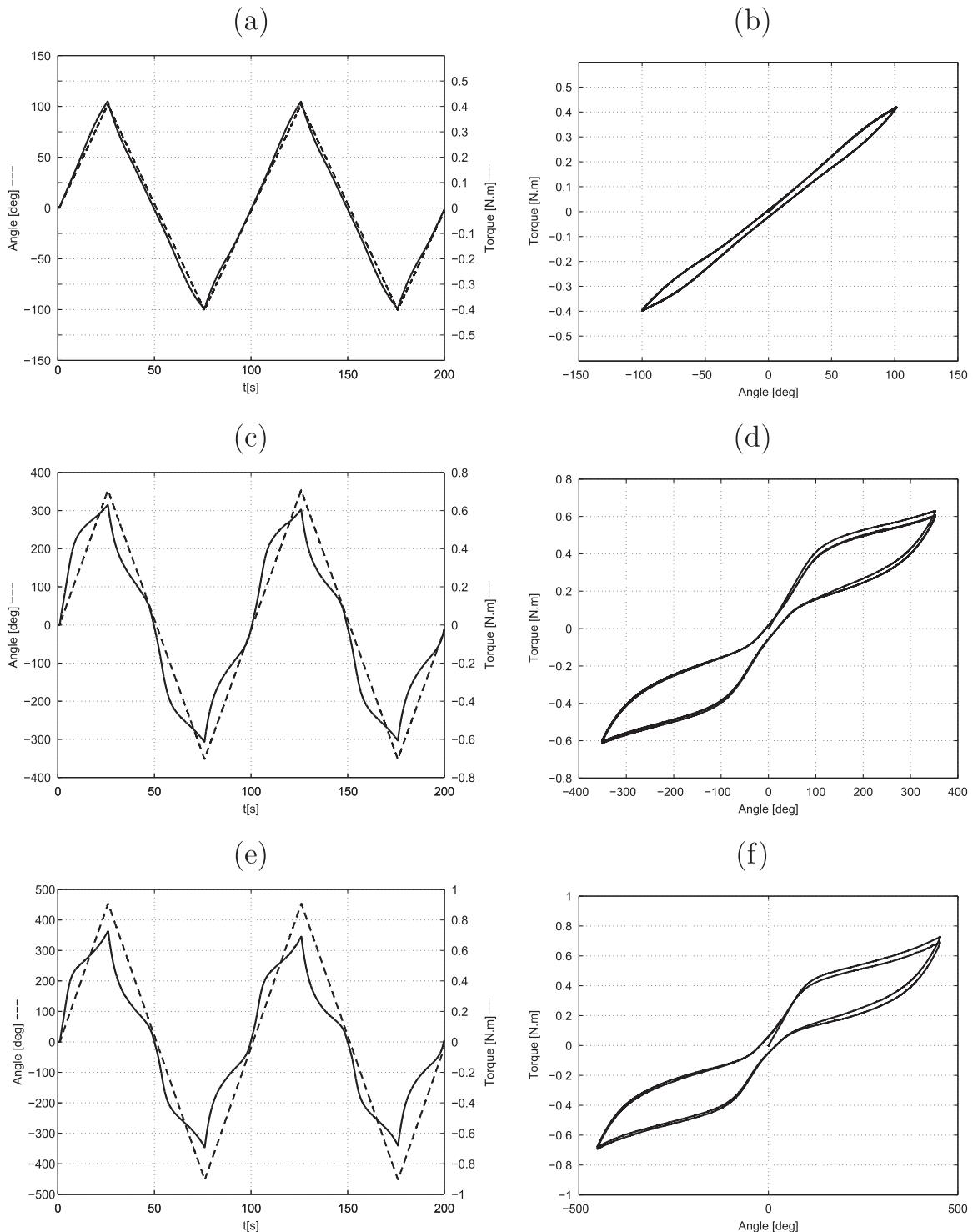


Fig. 3. Specimen 1 at room temperature (24 °C): Angle imposed at the upper clamp (--) and torque (—) versus time for three amplitudes of forcing: (a) 100°; (c) 350°; (e) 450°. Corresponding torque versus angle plots are presented in (b), (d), (f).

inner radius r . Hence, in the vicinity of the centre, austenite phase persists so that the obtention of a fully volumic martensitic wire can be observed only asymptotically for an imposed angle going to infinity. Conversely, in the case of a tensile test, or if a thin-walled tube was used in the torsion experiment, transformation end could be observed easily.

One can observe that the starting point of the torque angle curves deviates upon cycling. This could be the consequence of a cooling phenomenon due to latent heat absorption in reverse phase transformation, as proposed by He and Sun (2011) or due to the accumulation of slip deformations as well as residual martensite which induce residual angle (Morin et al., 2011).

The cycle shapes of specimens 1 and 2 are now compared in Fig. 4. It appears that phase transformation occurs slightly below 100° for S1, while it occurs slightly above for S2. Secondly, the area of the hysteresis loop for S1 is more important than that of S2. The angle-torque relationships of specimen 1 and 2 at 450° of forcing are plotted in Fig. 5(a) for a qualitative comparison. More quantitatively, in Fig. 5(b) the area of the loops is plotted against the amplitude angle for these two specimens. This quantity has the dimension of an energy and readily gives the energy dissipated

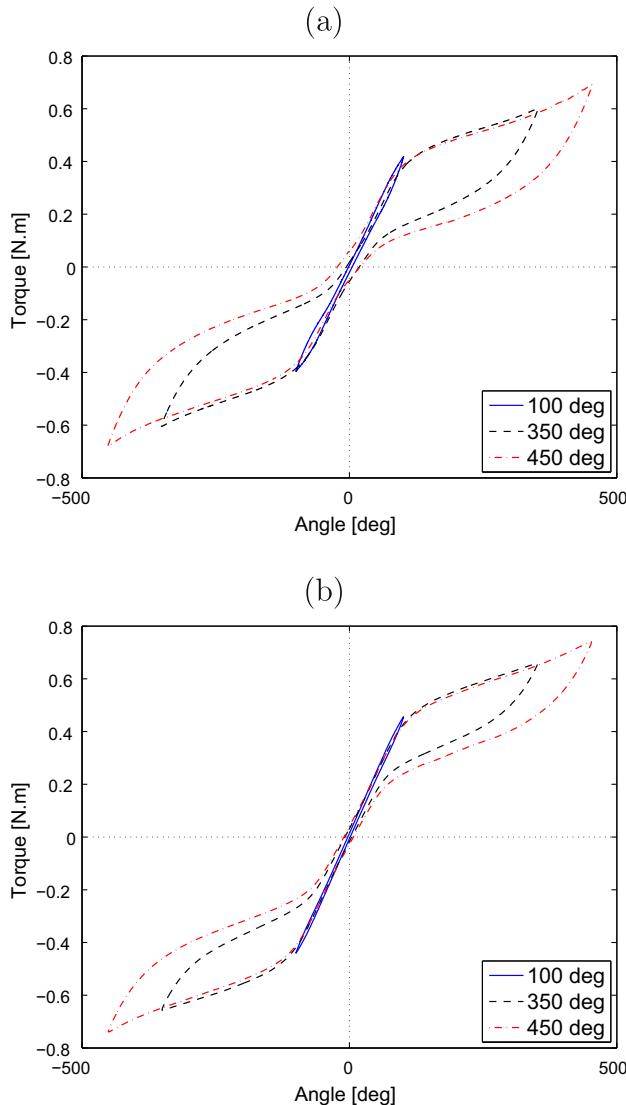


Fig. 4. Quasi-static tests: Torque versus angle of torsion for specimen 1(a) and 2(b) at three different amplitudes (100°, 350° and 450°), at room temperature (24 °C).

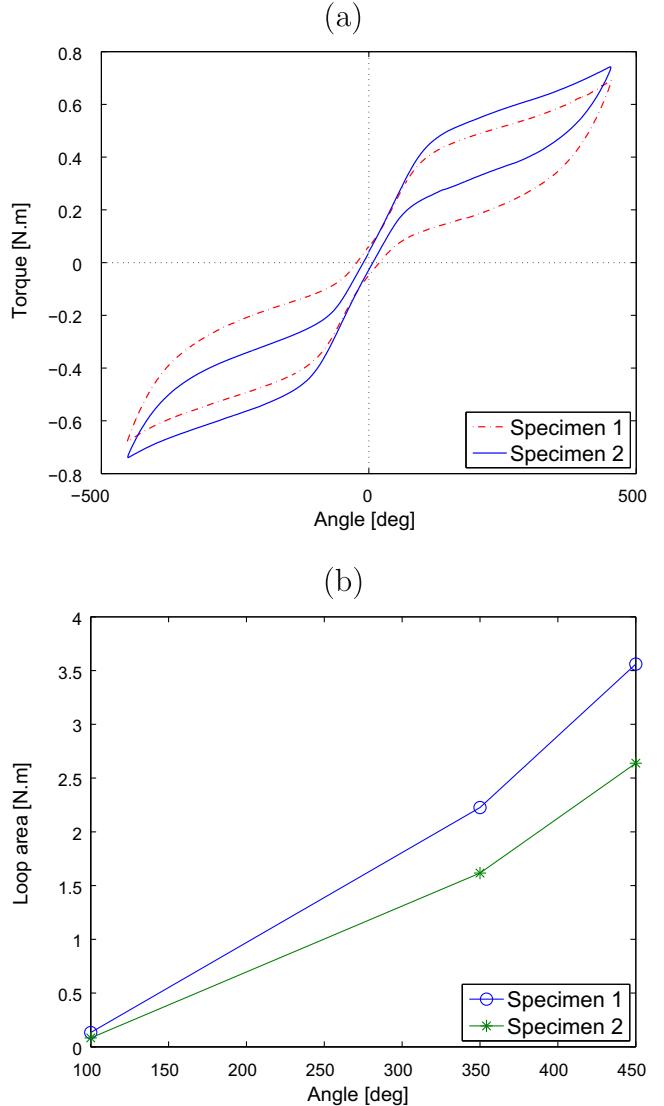


Fig. 5. (a) Comparison of the shape of hysteresis loops of S1 and S2, at an amplitude of 450° and a frequency of 0.01 Hz and (b) loop area as function of the forcing amplitude.

by the material during one cycle. It then appears that the damping capacity of S1 is superior to that of S2.

To address the dependence of the mechanical behaviour of the NiTi wires as function of the forcing characteristic time, a third specimen has been specifically used. In order to get more realistic excitations with respect to the dynamic approach, we now consider sinusoidal forcing. The wire has then been systematically stressed at frequencies between 10⁻⁵ Hz and 1 Hz for four different amplitudes, 175°, 250°, 350° and 450°. The hysteresis loops are compared in Fig. 6 for 175° and 450°. It appears that the increase of the cycling frequency has for effect to increase the slope of the path in the phase-transformation regime and to modify the area of the hysteresis loop. This is clearly visible on the plot at 450°, Fig. 6(b).

In order to get a more quantitative description of the damping capacity as function of the forcing frequency, the area of the hysteresis loop is plotted as function of the frequency in Fig. 7(a). The energy dissipated presents a maximum at a value of $\sim 10^{-3}$ Hz, it seems to attain a constant value at low frequencies, and it decreases monotonically at high frequencies. This particular non-monotonic evolution of the loop area as function of the frequency was already

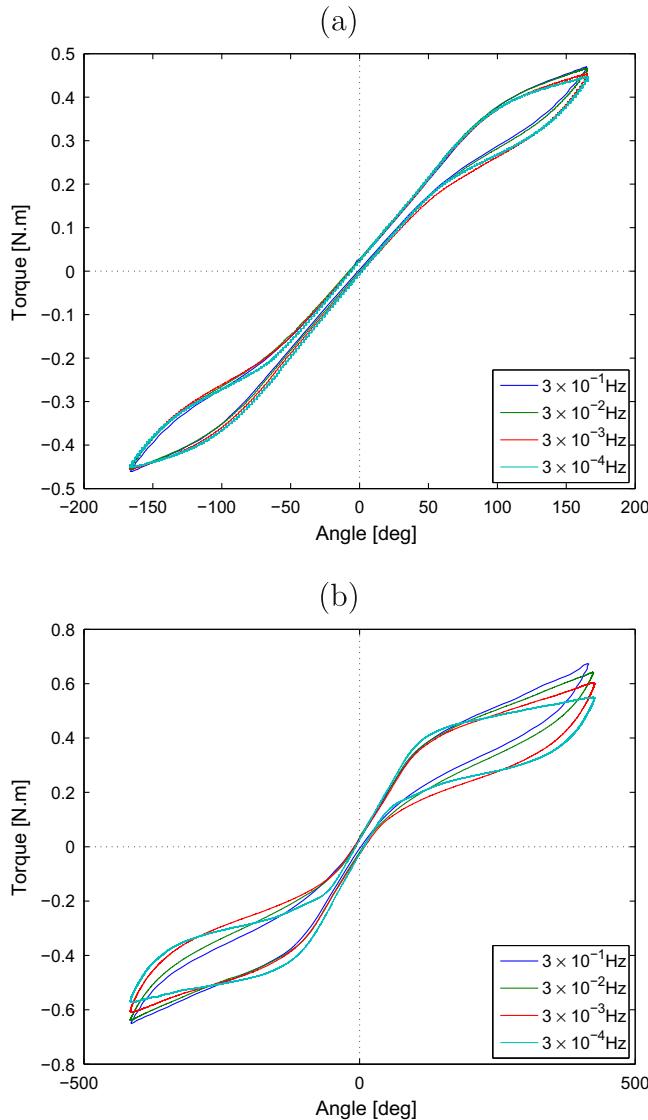


Fig. 6. Characterisation of the effect of cycling frequency, comparison of hysteresis loops at different frequencies for an amplitude of forcing of 175° and 450°.

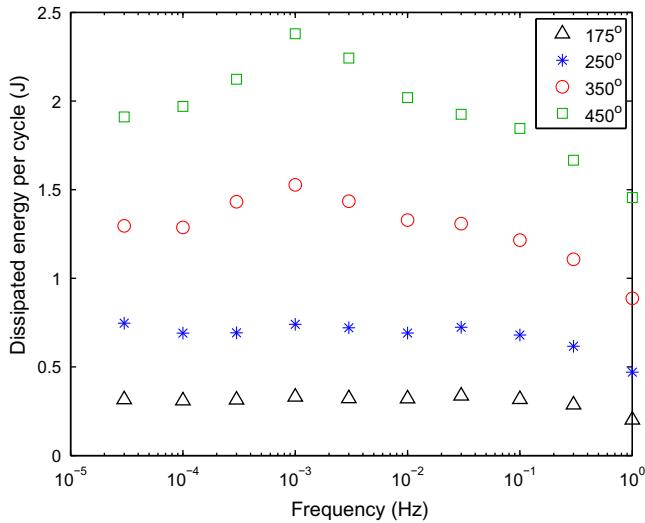


Fig. 7. Area of the hysteresis loop as function of the cycling frequency for different amplitudes of forcing.

observed experimentally in NiTi SMA under traction (Piedboeuf et al., 1998; He and Sun, 2011; Morin et al., 2011). It can be interpreted as the consequence of three different thermal effects (He and Sun, 2010). The first one is an accumulated heat due to mechanical dissipation. The second one is a latent heat effect during forward and backward phase transformations, which induces oscillations of the temperature. The last one is the heat exchange between the material and the surrounding fluid. Each of these effects occurs on different characteristic timescales and consequently, the time dependence of the material's temperature strongly depend on the forcing frequency. Finally, as the critical values of phase transformation stresses strongly depend on the temperature, the hysteresis loop shape and area also depend on the frequency. Hence, it appears that the damping effect of the material significantly depends on the frequency of forcing. This effect has to be taken into account in the context of damping of vibrations when using such materials. In our particular system, the ratio between maximum hysteresis loop area at 10^{-3} Hz and the minimum at 1 Hz is approximately equal to 1.5 at any of the four forcing amplitudes. In other words the maximum damping capacity around 10^{-3} Hz, is 50% higher than that at 1 Hz. However, if we restrict the frequency range to that explored in the dynamic analysis of the next section ($[0.3\text{ Hz}, 0.8\text{ Hz}]$), the maximum area is only 10–15% higher than the minimum area.

From the experimental linear behaviour at low forcing amplitudes described above, it is possible to estimate the value of the torsional spring constant of the wires, noted K . The slope of the linear path at the beginning of the first cycle before the beginning of the martensitic phase transformation is used (see Fig. 3). The shear elastic modulus G of the material in the austenitic phase is readily obtained using,

$$G = \frac{KL}{J_w}, \quad (2)$$

where J_w is the polar moment of inertia of the cross section, defined as $J_w = \frac{\pi}{2} r_w^4$, and L is the length of the wire. The resulting values of the shear modulus of the wire are reported in Table 1. These values are similar to those found in another work on the torsional behaviour of NiTi (Predki et al., 2006).

4. Dynamic behaviour of a SMA torsional pendulum

This section is devoted to the experimental study of the dynamical response of the torsional pendulum. The focus is on measuring linear and non-linear frequency response functions of the pendulum. Before addressing the experimental part, a linear model of the system is derived. It allows for the estimation of various quantities of the system, such as the moment of inertia of the inertial load and the damping induced by the ball bearing.

4.1. Single degree of freedom model of an elastic wire with a heavy lumped mass at the bottom end

A wire of length L , made of a linear elastic material of density ρ and shear modulus G , clamped at its top end denoted by $x = 0$, and having a lumped mass at its bottom $x = L$, is considered (see Fig. 8).

Table 1
Values of the shear moduli of the three specimen, estimated from experimental data.

Specimen	G (GPa)
S1	14.6
S2	15.2
S3	15.6

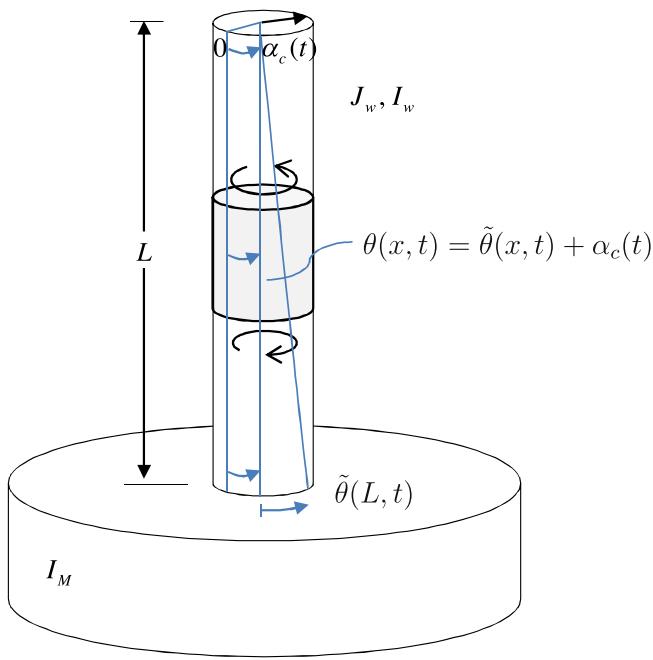


Fig. 8. Schematic view of the torsional pendulum under consideration, indicating all the notations used in the paper.

The angle of rotation of a section at a given location x is noted $\theta(x, t)$. The moment of inertia of the section is noted J_w , while its inertia is noted I_w . The rotation inertia of the lumped mass is denoted by I_M . The equation of motion for the rotation angle $\theta(x, t)$ for this system without damping and external forcing, reads (Meirovitch, 2001):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

where c is the propagation speed of torsional waves in the wire, $c = \sqrt{G/\rho}$. The boundary conditions of the present problem are,

$$\theta(0, t) = 0, \quad (4)$$

$$GJ_w \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{(L,t)} + I_M \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{(L,t)} = 0. \quad (5)$$

The second equation expresses the equilibrium of the momentum at $x = L$. Looking for solutions in the form $\theta(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t}$, eigenmodes and eigenfrequencies of the problem are found after a straightforward calculation and read,

$$\phi_n(x) = B_n \sin(k_n x), \quad (6)$$

$$\omega_n = k_n c, \quad (7)$$

where k_n satisfies the following characteristic equation,

$$k_n L \tan(k_n L) = \frac{I_w}{I_M}. \quad (8)$$

Finally, B_n is chosen according to the following normalisation rule,

$$\int_0^L \phi_n^2 dx = 1. \quad (9)$$

Eigenmodes are plotted in Fig. 9 for two different values of the ratio I_w/I_M : 0.1 and 100. The second case corresponds to a very small value of the added inertia at the bottom, so that the eigenmodes are very close to the sine functions obtained in the case of a free end: $I_M = 0$.

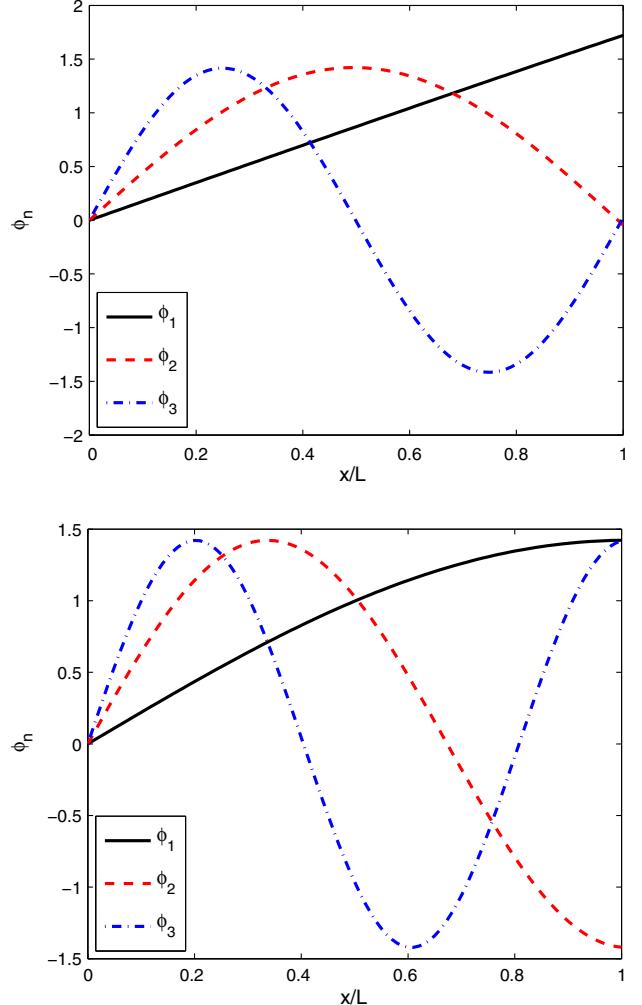


Fig. 9. First three eigenmodes of the torsional pendulum system for: (a) $I_w/I_M = 0.1$ and (b) $I_w/I_M = 100$. In the first case, the first eigenmode is almost linear, and the internal stresses and strains can be considered homogeneous along the wire.

On the other hand, for large values of I_M , the first eigenmode can be approximated by a linear function, so that torsional strain $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ can be considered constant in each section of the wire. Moreover as I_w/I_M is small, the eigenfrequencies obey the following rule,

$$\omega_1 \approx \frac{c}{L} \sqrt{\frac{I_w}{I_M}}, \quad \omega_n \approx \frac{cn\pi}{L} \quad \text{for } n > 1. \quad (10)$$

This has for consequence that $\omega_1 \ll \omega_{n,n>1}$: the first eigenfrequency is set well apart from the other ones, so that the assumption of a single-mode vibration when the system vibrates in the vicinity of ω_1 is fulfilled. Another consequence of the high mass ratio value is that phase transformations occurs homogeneously along the length of the wire, due to the fact that the eigenmode is approximately a linear function.

Let us now consider the forced problem where the upper part of the wire is now assumed to rotate. The boundary condition at $x = 0$ is now,

$$\theta(0, t) = \alpha_c(t), \quad (11)$$

where $\alpha_c(t)$ represents the angle imposed by the motor (external command). Introducing the relative angle $\tilde{\theta}(x, t) = \theta(x, t) - \alpha_c(t)$, the equation of motion and its boundary conditions read,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \alpha_c}{\partial t^2}, \quad (12)$$

$$\tilde{\theta}(0, t) = 0, \quad (13)$$

$$GJ_w \frac{\partial \tilde{\theta}(L, t)}{\partial x} = -I_M \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(L, t)}{\partial t^2} - I_M \frac{\partial^2 \alpha_c}{\partial t^2}. \quad (14)$$

A modal projection is assumed by expanding the unknown as $\tilde{\theta} = \sum_n q_n(t) \phi_n(x)$. The orthogonality of eigenmodes along with the peculiar treatment for problem with a lumped mass at the boundary (Meirovitch, 2001), allows derivation of the forced mass-spring oscillator equation for each modal amplitude q_n . Assuming also modal damping, it reads,

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{1}{m_n} F_n \frac{\partial^2 \alpha_c}{\partial t^2}, \quad (15)$$

where

$$F_n = - \int_0^L \rho \phi_n(x) dx - \frac{I_M}{J_w} \phi_n(L), \quad (16)$$

$$m_n = \int_0^L \rho \phi_n(x)^2 dx + \phi_n^2(L) \frac{I_M}{J_w}, \quad (17)$$

$$k_n = \int_0^L G \phi'_n(x)^2 dx, \quad (18)$$

and $\omega_n^2 = k_n/m_n$. In the experiment, we will assume that only the first mode is excited so that $q_n=0$ for $n > 1$. The non-dimensional damping parameter $\zeta = \zeta_1$ is evaluated empirically from experiments at low amplitudes of forcing so that this parameter is supposed to model all damping effects except that brought by the non-linear behaviour of the SMA and the occurrence of the hysteresis loop.

4.2. Experimental linear dynamic behaviour of SMA wires

A first set of dynamic experiments has been performed at low values of forcing amplitude in order to ensure a linear response. It allows for measurements of the first eigenfrequency, as well as to estimate the only parameter that is left unknown in the linear model derived above: the non-dimensional modal damping parameter. Measurements are realized by letting the added mass free to oscillate. The imposed angle at the top of the wire corresponds now to a harmonic excitation of amplitude α_c and frequency f_c : $\alpha_c(t) = \alpha_c \cos 2\pi f_c t$. The frequency response function of $\tilde{\theta}$ is plotted in Fig. 10(a) for three forcing angles $\alpha_c = 0.2^\circ, 0.3^\circ, 0.5^\circ$. The theoretical frequency response function is also plotted, with a modal damping adjusted so that the amplitude of the resonance peak is the same as the experimental one. The resulting value of the modal damping is plotted in Fig. 10(b).

Two main observations are drawn from these linear measurements. Firstly, one can notice a very slight decrease of the measured resonant frequency with increasing α . This behaviour is not attributed to the material since for such amplitudes of oscillations, the quasi-static response is measured to be linear. It is assumed that it comes from the rolling bearing placed at the bottom end of the experimental set-up. The lubricated part of the ball bearing effectively ensures non-linear behaviour for small amplitude values. As observed in Fig. 10b, the fitted linear value tends to a constant value, which shows that the non linear effects of the ball bearing only plays a role at small amplitudes.

4.3. Non-linear oscillations of SMA wires

In this section, frequency-response functions (FRFs) for the two tested specimens S1 and S2 are presented. A step-by-step procedure for increasing and decreasing values of the excitation

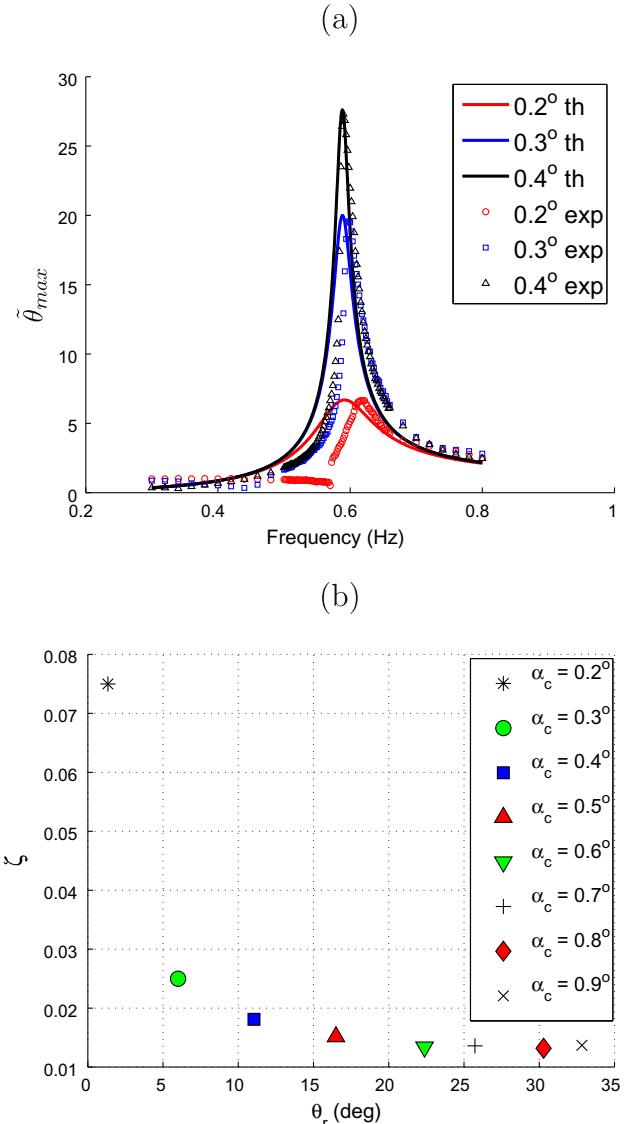


Fig. 10. (a) Experimental normalised frequency response function for three values of α_c compared with the theoretical response function where the damping parameter is adjusted and (b) damping parameter as function of response amplitude.

frequency f_c is necessary in order to obtain all the solution branches in the non-linear regime. For each frequency f_c , a settle time of 30 s is awaited so that the transient dies away, then a measurement time of 20 s is recorded during the steady-state regime, from which the maximum value of the relative rotation $\tilde{\theta}$ is extracted. Hence 50 s are necessary for each measured points. The frequency spacing is fixed to 0.02 Hz away from resonance, and is decreased to 0.001 Hz in the vicinity of critical points in order to avoid loss of the stable branches too quickly, as it is well known that their basin of attraction severely shrinks when approaching the jump points. These settings result in a measurement time of approximately four hours for obtaining a complete frequency-response curve for a given amplitude α_c (two hours for increasing values of f_c , 2 h for decreasing values).

Fig. 11 shows the measurements obtained for specimen S1, and for $\alpha_c = 0.5^\circ, 2^\circ, 8^\circ$ and 15° . For $\alpha_c = 0.5^\circ$, a linear response is obtained, as already shown in the precedent section. For $\alpha_c = 2^\circ$, the amplitude of the response attains 60° , and for that value a very small loop begins to form in the measured behaviour, resulting in a nonlinear response in the FRF. The softening behaviour is

already noticeable with a slight decrease of the resonant frequency, while a small jump phenomenon at the end of stable branches is seen. These observations are strengthened for $\alpha_c = 8^\circ$ and 15° . For these values, amplitude responses go above 100° so that the martensitic transformation more clearly sets in, resulting in a very clear softening measured behaviour accompanied by a jump phenomenon at the end of stable branches. It has also been observed that the transients were significantly longer when jumping from the main branch obtained for decreasing frequencies and giving rise to the larger amplitude responses, resulting in the points observed around 0.55 Hz for $\alpha_c = 2^\circ$, 0.48 Hz for $\alpha_c = 8^\circ$, and 0.44 Hz for $\alpha_c = 15^\circ$.

Fig. 12 shows the FRFs obtained for specimen S2, and for the same amplitudes of forcing. The most salient features are comparable to those found for S1. A slight nonlinear behaviour is found for $\alpha_c = 2^\circ$, whereas it is enhanced for $\alpha_c = 8^\circ$ and 15° with a clear appearance of jump phenomena. The main difference with S1 resides in the fact that, for the same levels of forcing amplitudes, measured responses show larger magnitudes. This is a direct consequence of the damping capacity of the two specimens already noticed in Fig. 5. The area of the hysteresis loop of S2 being smaller than that of S1, its capacity to damp vibrations is less important, so that the peak amplitudes obtained at resonances in FRFs are more important for S2.

5. Temperature effect

A preliminary study of the effect of temperature is now presented. Quasi-static and dynamic measurements at 65°C have been performed. The temperature is imposed by blowing hot air on the wire. The main objective is to address the effect of a change in the quasi-static behaviour of the material on the FRFs of the oscillator. Results of quasi-static measurements at 24°C and 65°C performed on specimen S2 with a triangular forcing at a frequency of 0.01 Hz are plotted in Fig. 13. Firstly, a significant increase of the slope of the torque during the first part of the first cycle is observed. This indicates that the shear elastic modulus G of the austenitic phase increases with increasing temperature.

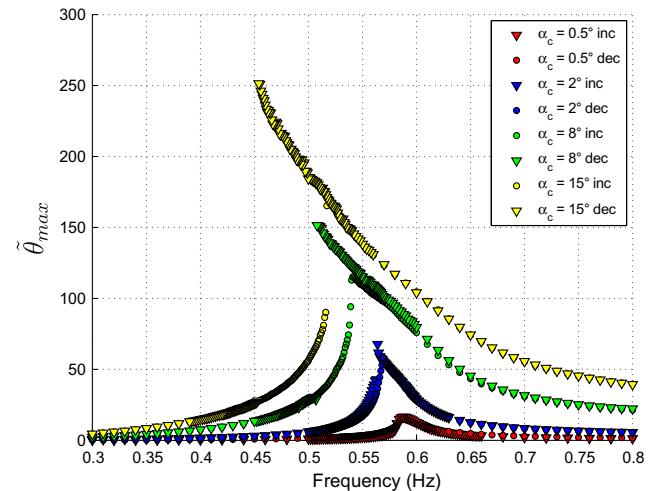


Fig. 12. Frequency–response functions (FRFs) for specimen S2, for increasing values of the forcing amplitude: $\alpha_c = 0.5^\circ, 2^\circ, 8^\circ$ and 15° . Measured responses for increasing values of f_c are marked by circles, and by triangles for decreasing values.

The estimated value from these data is $G \sim 20.3$ GPa, a higher value than the one referenced in Table 1. Secondly, the area of the hysteresis loop is much larger at high temperatures than at room temperature. Measured shape areas for these two experiments are 2.5 J and 5 J at 24°C and 65°C respectively. The wire has hence an increased damping capacity at 65°C . Thirdly, the shape of the loop clearly indicates that cooling due to latent heat absorption and residual strain occurs during the cycle, as already discussed in Section 3.

It is expected that the change in the quasi-static behaviour will influence the dynamic behaviour in two ways: (1) the linear eigenfrequency will increase, due to the increased shear elastic modulus of the material and (2) the amplitude of the response at nonlinear resonance will decrease, due to the increase of the energy dissipated per cycle of oscillation. These predictions are indeed verified on the frequency response functions at 65°C , plotted in Fig. 14: At

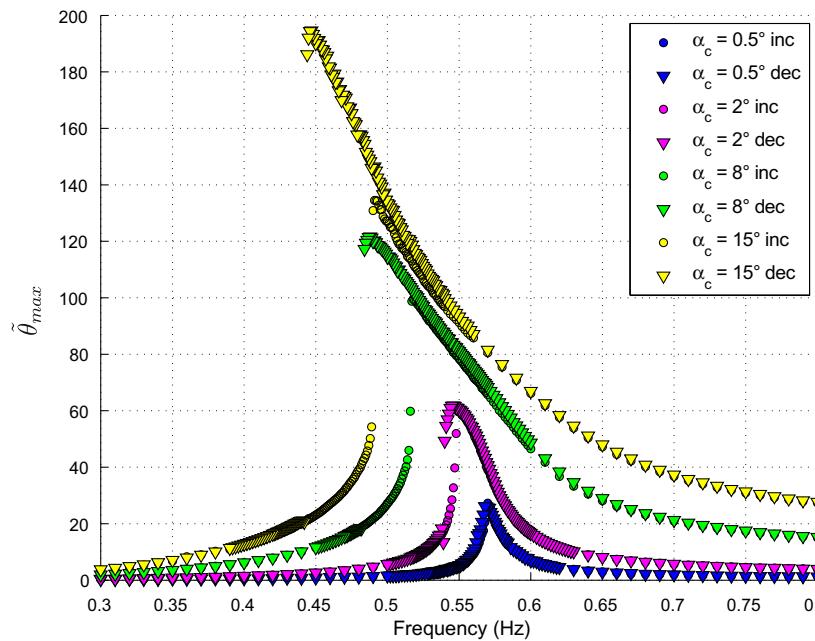


Fig. 11. Frequency–response functions (FRFs) for specimen S1, for increasing values of the forcing amplitude: $\alpha_c = 0.5^\circ, 2^\circ, 8^\circ$ and 15° . Measured responses for increasing values of f_c are marked by circles, and by triangles for decreasing values.

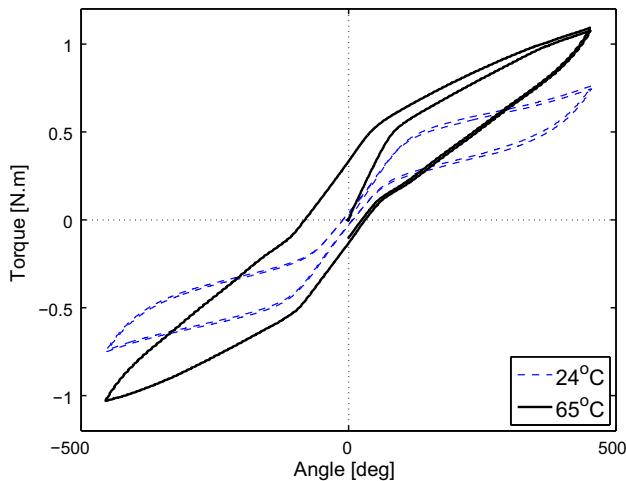


Fig. 13. Torque versus angle of torsion for specimen 2 forced at 450 degrees amplitude, 0.01 Hz frequency at 65 °C (bold line) compared with the same data at 24 °C (dashed line).

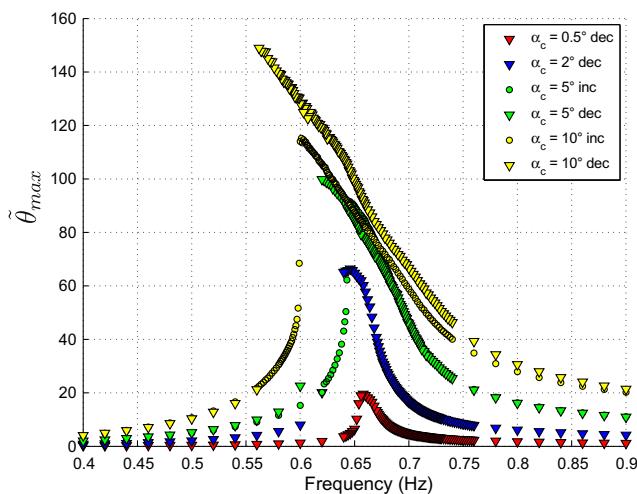


Fig. 14. Frequency response function of specimen 2 at a temperature of 65 °C.

65 °C, the linear resonance frequency attained at a low forcing amplitude of 0.5°, is approximately 0.67 Hz, a larger value than 0.58 Hz, obtained at 24 °C. When increasing the forcing amplitude, the softening behaviour described in the previous section, as well as the associated jump effect are again observed. The amplitudes attained for an equivalent value the forcing amplitude are lower at high temperature, due to the increased damping capacity of the material.

6. Discussion

Shape-memory alloys featuring pseudo-elastic behaviour are attractive candidates to damp undesirable vibrations as they efficiently convert mechanical energy into thermal energy. Understanding the impact of the hysteretic behaviour of the devices on the response of the forced oscillators is an essential element to assess the potential performance of such systems. Hence, the present article investigated experimentally the quasi-static and dynamic torsional behaviour of a NiTi wire.

Quasi-static mechanical behaviour has been characterized through the measurement of the non-linear torsional angle/torque relationship at different frequencies, amplitudes and temperatures.

As in many other studies an hysteresis loop has been clearly observed and its area, which quantify its damping capacity, has been observed to depend on all these parameters. A maximum damping capacity has been observed around 10⁻³ Hz, which is in the line of previous studies on shape memory alloys (He and Sun, 2011; Morin et al., 2011). However, these works were mainly focused on traction-compression behaviour while our work dealt with torsional behaviour.

The dynamic behaviour has then been addressed by measuring the frequency response function of a torsional pendulum which torsion spring element is the NiTi wire previously characterized. Most of the features predicted by theoretical studies have been observed in the present work: softening effect of the non-linearity, jumps in the amplitude of the response associated to this softening effect and non-linear damping effect of the SMA.

On the experimental side, natural extensions to this work include a more precise characterisation of the temperature dependence, the characterisation of internal loops in the quasi-static behaviour and the study of the fatigue of the dynamically loaded material. Additionally, experiments with different thermal conductivities for the surrounding fluid may be considered. For instance, putting the wire in water increases the heat transfer and increases the damping capacity of the material. On the numerical side, it is worth investigating the non-linear extension of the linear model presented in this paper is worth investigating. Subsequent work will be focused on these extensions to this experimental analysis.

References

- Auricchio, F., Fugazza, D., Desroches, R., 2008. Rate-dependent thermo-mechanical modelling of superelastic shape-memory alloys for seismic applications. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 19 (1), 47–61.
- Auricchio, F., Petrini, L., Pietrabissa, R., Sacco, E., 2003. Numerical modeling of shape-memory alloys in orthodontics. *CMES – Computer Modeling in Engineering and Sciences* 4 (3–4), 365–380.
- Bernardini, D., Pence, T., 2005. Uniaxial modeling of multivariant shape-memory materials with internal sublooping using dissipation functions. *Meccanica* 40 (4), 339–364.
- Bernardini, D., Rega, G., 2005. Thermomechanical modelling, nonlinear dynamics and chaos in shape memory oscillators. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences* 11 (3), 291–314.
- Bernardini, D., Rega, G., 2010. The influence of model parameters and of the thermomechanical coupling on the behaviour of shape memory devices. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 45 (10), 933–946.
- Bernardini, D., Vestroni, F., 2003. Non-isothermal oscillations of pseudoelastic devices. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38 (9), 1297–1313.
- Bruno, O.P., Leo, P.H., Reitich, F., 1995. Free boundary conditions at austenite-martensite interfaces. *Physical Review Letters* 74 (5), 746–749.
- Carreras, G., Casciati, F., Casciati, S., Isalgue, A., Marzi, A., Torra, V., 2011. Fatigue laboratory tests toward the design of SMA portico-braces. *Smart Structures and Systems* 7 (1), 41–57.
- Collet, M., Foltête, E., L'Excellent, C., 2001. Analysis of the behaviour of a Shape Memory Alloy beam under dynamical loading. *European Journal of Mechanics – A/Solids* 20 (4), 615–630.
- Delaey, L., Krishnan, R.V., Tas, H., Warlimon, H., 1974. Thermoelasticity, pseudoelasticity and memory effects associated with martensitic transformations. 1. Structural and microstructural changes associated with transformations. *Journal of Materials Science* 9 (9), 1521–1535.
- Duerig, T., Pelton, A., Stöckel, D., 1999. An overview of nitinol medical applications. *Materials Science and Engineering A*, 149–160.
- Feng, Z.C., Li, D.Z., 1996. Dynamics of a mechanical system with a shape memory alloy bar. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 7 (4), 399–410.
- Hartl, D.J., Lagoudas, D.C., Calkins, F.T., Mabe, J.H., 2010a. Use of a Ni60Ti shape memory alloy for active jet engine chevron application: I. Thermomechanical characterization. *Smart Materials and Structures* 19 (1), 015020.
- Hartl, D.J., Mooney, J.T., Lagoudas, D.C., Calkins, F.T., Mabe, J.H., 2010b. Use of a Ni60Ti shape memory alloy for active jet engine chevron application: II. Experimentally validated numerical analysis. *Smart Materials and Structures* 19 (1), 015021.
- He, Y.J., Sun, Q.P., 2010. Frequency-dependent temperature evolution in NiTi shape memory alloy under cyclic loading. *Smart Materials and Structures* 19 (11).
- He, Y.J., Sun, Q.P., 2011. On non-monotonic rate dependence of stress hysteresis of superelastic shape memory alloy bars. *International Journal of Solids and Structures* 48 (11–12), 1688–1695.

- Lacarbonara, W., Bernardini, D., Vestroni, F., 2004. Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices. *International Journal of Solids and Structures* 41 (5–6), 1209–1234.
- Lammering, R., Schmidt, I., 2001. Experimental investigations on the damping capacity of NiTi components. *Smart Materials and Structures* 10 (5), 853–859.
- Leo, P.H., Shield, T.W., 1993. Transient heat transfer effects on the pseudoelastic behaviour of shape-memory wires. *Acta metallurgica* 41 (8), 2477–2485.
- Li, D., Feng, Z., 1997. Dynamic properties of pseudoelastic shape memory alloys. In: International conference on Structural Dynamics: Recent Advances, No. 6, Southampton, UK.
- Machado, L.G., Savi, M.A., Pacheco, P.M.C.L., 2003. Nonlinear dynamics and chaos in coupled shape memory oscillators. *International Journal of Solids and Structures* 40 (19), 5139–5156 (PACAM VII Special issue).
- Masuda, A., Noori, M., 2002. Optimization of hysteretic characteristics of damping devices based on pseudoelastic shape memory alloys. *International Journal of Non-linear Mechanics* 37 (8), 1375–1386.
- Meirovitch, L., 2001. Fundamentals of Vibrations.
- Morin, C., Mourmi, Z., Zaki, W., 2011. A constitutive model for shape memory alloys accounting for thermomechanical coupling. *International Journal of Plasticity* 27 (5), 748–767.
- Ozbulut, O.E., Hurlebaus, S., 2011. Optimal design of superelastic-friction base isolators for seismic protection of highway bridges against near-field earthquakes. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 40 (3), 273–291.
- Piedboeuf, M.C., Gauvin, R., Thomas, M., 1998. Damping behaviour of shape memory alloys: strain amplitude, frequency and temperature effects. *Journal of Sound and Vibration* 214 (5), 885–901.
- Predki, W., Klönen, M., Knopik, A., 2006. Cyclic torsional loading of pseudoelastic NiTi shape memory alloys: damping and fatigue failure. *Materials Science and Engineering: A* 417 (1–2), 182–189.
- Saadat, S., Salichs, J., Noori, M., Hou, Z., Davoodi, H., Bar-On, I., Suzuki, Y., Masuda, A., 2002. An overview of vibration and seismic applications of NiTi shape memory alloy. *Smart Materials and Structures* 11 (2), 218–229.
- Seelecke, S., 2002. Modeling the dynamic behaviour of shape memory alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37 (8), 1363–1374.
- Shaw, J.A., Kyriakides, S., 1995. Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43 (8), 1243–1281.
- Sun, Q.P., Hwang, K.C., 1993. Micromechanics modelling for the constitutive behaviour of polycrystalline shape memory alloys – I. Derivation of general relations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41 (1), 1–17.
- Zhang, X., Feng, P., He, Y.J., Yu, T., Sun, Q.P., 2010. Experimental study on rate dependence of macroscopic domain and stress hysteresis in NiTi shape memory alloy strips. *International Journal of Mechanical Sciences* 52 (12), 1660–1670.