

Week4

1. 必胜策略 I

两人用积木对弈，将积木摆成一行，然后从中轮流拿积木，每个人拿的积木数要符合 2 的次方数，只能拿连着的积木，不能分散着拿，谁拿到最后一个积木就算赢。若一行有 31 个积木，是否有人有必胜策略？请给出你的思路 and 理由。

2. 切割木棍

一个木棍被随机的切割两次，切出的三段木棍中，能组成三角形的概率是多少？

提示：在木棍上选择每个位置的概率相同，为均匀分布。

3. 球的放法

有 30 个相同的球放到 2 个红盒子和 1 个绿盒子里。假设这 2 个红盒是相同的，且盒子可以空着，请问一共有多少种放法？

4. 必胜策略 II

超人在一条无限长的 x 轴上逃跑。他从某个整数点出发，沿 x 轴做匀速直线运动，其速度是一个固定的整数（可以为正、负，也可以为 0）。蝙蝠侠想要抓住超人。在每个正整数时刻 $t=1, 2, 3, \dots$ ，蝙蝠侠可以选择任意整数坐标“射击”，若该时刻超人位置等于所选坐标，则命中。

请问是否存在一种预先确定的射击策略，能够保证无论超人的初始整数位置和固定整数速度是什么，蝙蝠侠最终都一定会击中他？如果存在，请描述该策略；如果不存在，请解释原因。

5. Brownian motion

Let $B(t)$ be a standard Brownian motion with $B(0) = 0$. Given that $B(a) = b$ (where $a > 0, b \in \mathbb{R}$), find the expectation and variance of $B(q)$ for $q > 0$.

6. 广播机制

```
1 import numpy as np
2
3 a = np.ones((2, 1, 3))
4 b = np.ones((3, 1))
5 c = a + b
```

下列关于 `c.shape` 的说法，正确的是：

A. (2, 1, 3)

B. (2, 3, 3)

C. (2, 3, 1)

D. 会报错：形状不兼容无法广播

7. 接雨水

给定一个长度为 n 的数组 `height` 和 `width`，第 i 根柱子高度为 `height[i]`、宽度为 `width[i]` ($width[i] \geq 1$)，所有柱子按顺序紧密相连摆放。下雨后，雨水会积在凹陷处。请计算该结构能够接住的总雨水体积（体积按“蓄水高度 \times 宽度”累加）。

示例 1:

输入: `height = [2, 0, 2]`, `width = [3, 1, 2]`

输出: 2

解释: 左右两端高度均为 2，中间下标 1 的柱子高度为 0，可蓄水高度为 2；该位置宽度为 1，因此可接雨水体积为 $2 \times 1 = 2$ ，所以总共能接 2 单位雨水体积

示例 2:

输入: `height = [3, 0, 1, 3]`, `width = [1, 2, 1, 1]`

输出: 8

示例 3:

输入: `height = [5, 1, 2, 1, 5]`, `width = [1, 2, 3, 4, 5]`

输出: 33