QTA2025 暑期求职笔试训练营-week1 题目

作答区

2025 年 7 月 21 日

题目

问题 1. 单败淘汰赛

64 个人进行单败淘汰制竞赛 (每一轮随机分组两两 PK, 决出一位胜者进入下一轮)

1. 假如 64 个人实力有严格顺序, 实力强的人一定赢实力弱的人, 问最强的人甲、第二强的人乙在决赛相遇的概率是多少?
2. 假如 64 个人实力相当, 两两相遇胜率均为五五开, 问任意两人甲、乙在决赛相遇的概率是多少?

答: 对于一个 64 人的单败淘汰赛，其核心结构如下:

- 总共需要进行 $64 - 1 = 63$ 场比赛。
- 总共有 $\log_2(64) = 6$ 轮比赛。
- 一个选手要赢得冠军，需要连赢 6 场。要进入决赛，需要连赢 5 场。
- **随机分组**是关键。我们可以想象，在比赛开始前，64 个位置（签位）是固定的，而 64 个选手被随机地分配到这 64 个位置上。

为了让甲和乙在决赛相遇，一个**绝对必要的前提条件**是: **他们必须被分在整个赛区的不同半区**。整个赛区有 64 个位置，可以被分成两个各有 32 个位置的上半区和下半区。

如果甲和乙在同一个半区，他们必然会在决赛前相遇，其中一人会被淘汰，因此他们不可能在决赛相遇。只有当他们分处不同半区时，才**有可能**在决赛相遇。

我们可以先计算这个前提条件的概率:

1. 想象一下，先把甲随机放在 64 个位置中的任意一个。
2. 此时还剩下 63 个空位。
3. 甲所在的半区还剩下 $32 - 1 = 31$ 个位置。
4. 而另一个半区则有 32 个位置。
5. 因此，乙被分到另一个半区的概率是:

$$P(\text{甲乙在不同半区}) = \frac{\text{另一半区的位置数}}{\text{总剩余位置数}} = \frac{32}{63}$$

现在，我们基于这个共同的前提来分析两种不同情况。

1 情况一：实力有严格顺序

问题

最强的人甲、第二强的人乙在决赛相遇的概率是多少?

建模与计算

步骤 1：计算甲乙被分在不同半区的概率。 如上所述，这个概率是 $\frac{32}{63}$。

步骤 2：分析在该前提下，两人能否进入决赛。

- **甲的路径**：甲是所有 64 人中实力最强的。一旦他被分入一个半区，无论对手是谁，他都必然会赢。因此，只要甲乙不在同一个半区，甲就**一定**会赢得他所在半区的所有比赛，进入决赛。这个概率是 1。
- **乙的路径**：乙是第二强的选手。只要最强的甲不在他所在的半区（这正是我们的前提条件），那么乙就是他所在半区里实力最强的选手。因此，他也**一定**会赢得他所在半区的所有比赛，进入决赛。这个概率也是 1。

步骤 3：合并概率。 甲乙在决赛相遇的概率 = (甲乙在不同半区的概率) × (在该前提下甲进入决赛的概率) × (在该前提下乙进入决赛的概率)。

$$\begin{aligned} P(\text{甲乙决赛相遇}) &= P(\text{甲乙在不同半区}) \times P(\text{甲进决赛}|\text{不同半区}) \times P(\text{乙进决赛}|\text{不同半区}) \\ &= \frac{32}{63} \times 1 \times 1 = \frac{32}{63} \end{aligned}$$

结论

假如实力强的人一定赢，那么最强者甲和次强者乙在决赛相遇的概率是 $\mathbf{\frac{32}{63}}$，约等于 50.79%。

2 情况二：实力相当（胜率五五开）

问题

任意两人甲、乙在决赛相遇的概率是多少?

建模与计算

步骤 1：计算甲乙被分在不同半区的概率。 这与第一种情况完全相同。为了让两人能在决赛相遇，他们必须从不同的半区开始。这个概率依然是 $\frac{32}{63}$。

步骤 2：分析在该前提下，两人各自进入决赛的概率。

- **甲的路径**: 要进入决赛，甲需要在他所在的半区（32 人）中连续赢得 5 场比赛（$2^5 = 32$）。由于所有人的实力都相当，每一场比赛的胜率都是 $\frac{1}{2}$。甲连赢 5 场的概率是：

$$P(\text{甲进决赛}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

- **乙的路径**：同样地，乙要进入决赛，也必须在他所在的半区（另外 32 人）中连续赢得 5 场比赛。乙连赢 5 场的概率是：

$$P(\text{乙进决赛}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

由于甲和乙在不同半区，他们各自的晋级之路是相互独立的事件。

步骤 3：合并概率。 甲乙在决赛相遇的概率 = (甲乙在不同半区的概率) × (甲在他所在半区获胜的概率) × (乙在他所在半区获胜的概率)。

$$\begin{aligned} P(\text{甲乙决赛相遇}) &= P(\text{甲乙在不同半区}) \times P(\text{甲连赢 5 场}) \times P(\text{乙连赢 5 场}) \\ &= \frac{32}{63} \times \frac{1}{32} \times \frac{1}{32} = \frac{1}{63 \times 32} = \frac{1}{2016} \end{aligned}$$

另一种建模思路（结果相同）

1. **甲进入决赛的概率是多少?**
   甲需要连赢 5 场比赛，概率是 $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$。

2. **在甲已经进入决赛的前提下，乙成为另一名决赛选手的概率是多少?**
   甲已经锁定了决赛的一个席位。剩下 63 名选手将争夺另一个席位。因为所有人的实力都一样，所以这 63 人中任何一人进入决赛的概率是均等的。因此，乙成为另一名决赛选手的概率是 $\frac{1}{63}$。

3. **合并概率。**

$$\begin{aligned} P(\text{甲乙决赛相遇}) &= P(\text{甲进决赛}) \times P(\text{乙是另一位决赛选手}|\text{甲已进决赛}) \\ &= \frac{1}{32} \times \frac{1}{63} = \frac{1}{2016} \end{aligned}$$

结论

假如所有人实力相当，任意两人甲、乙在决赛相遇的概率是 $\mathbf{\frac{1}{2016}}$，约等于 0.0496%。

问题 2．离散停问题

一直生成 $(0,1)$ 上独立同分布的随机数, 直到新的数比上一个小就停止生成, 问生成随机数个数的期望?

依据问题, 我们考虑一个离散时间随机过程 $\{X_n\}_{n\geq 1}$, 其中 X_n 是一系列独立同分布 (i.i.d.) 的随机变量，服从于状态空间 $S=(0,1)$ 上的均匀分布，即 $X_n \sim U(0,1)$。定义 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为该过程的自然信息流。$\mathcal{F}_n$ 代表了截至时间 n 的所有历史信息。

我们感兴趣的随机变量 N（生成的数的个数）是一个关于信息流 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的停止时。其定义为:

$$N := \inf\{n \geq 2 : X_n < X_{n-1}\}$$

我们需要求解期望停止时生成数的个数的期望 $\mathbb{E}[N]$，当生成数为正整数时，其期望可以表示为:

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k)$$

这里的 $P(N \geq k)$ 是过程在时间 $k-1$ 时的存活概率。

过程存活至时间 k（即 $N \geq k$）的条件是，在所有 $j = 2, \ldots, k-1$ 时刻均未停止。这等价于前 $k-1$ 个随机变量构成了一个严格递增的序列。

$$\{N \geq k\} \iff \{X_1 < X_2 < \cdots < X_{k-1}\}$$

该事件是关于过程样本路径 $(X_1,...,X_{k-1})$ 的一个性质。由于 $\{X_n\}$ 是独立同分布的，其联合分布具有排列对称性，任意一种特定排序的概率均为 $\frac{1}{(k-1)!}$。

$$P(N \geq k) = P(X_1 < X_2 < \cdots < X_{k-1}) = \frac{1}{(k-1)!}$$

这个公式对所有 $k \geq 1$ 均成立，严格的数学计算见附录

因此，停止时的期望为:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\end{aligned}$$

令 $j = k - 1$，上式变为:

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

这个级数是自然常数 e 的泰勒展开式。

问题 3. 次品称重问题

你有 12 个铁球, 其中包含一个次品球是比其它轻或者比其它重的, 给你一个天平, 最少称重几次可以保证找出这个球?

问题 4. 领导的红包

时近春节, 部门领导要给下属发年终奖。你的领导拿着三个红包 A、B、C, 其中只有一个红包是 200 元的, 其余两个都是 50 元, 让你从中挑选一个红包, 但是不能打开, 假设你选择了 A 红包, 然后领导当着你的面拆开了 B 红包, 发现里面有 50 元, 之后领导问你是否要用手中的 A 红包换剩下的 C 红包? 假设领导知道每个红包内的钱数且一定会打开 50 元的红包。请给出你的思路和理由。

问题 5. 幽灵宝藏

10 个房间排成一条直线, 只有一个房间有宝藏。每天宝藏都会移动到某个相邻房间。每天只能检查一个房间, 请问至少需要多少天可以确保找到宝藏? 给出你的策略。

问题 6. 归并排序的复杂度

侯哥在一台电脑上编写了一个程序对 256 个字符串进行排序 (采用 MergeSort 归并排序) 用时 2 秒钟, 那么用这个程序在给 512 个字符串进行排序的期望时间是多少秒?

问题 7. Python 小坑

python 语法中的一些细节规则是量化 OA 选择题中经常出现的考察点

1. python 的 copy 函数

   下述代码的输出结果是什么?

   ```
   import copy
   l=[1,2,3]
   x={'a':l}
   y= copy.copy (x)
   y['a'][0]=11
   print(x['a'][0])
   ```

   输出结果为: [11]

   原因: 这是因为 copy.copy 方法执行的是浅拷贝，其创建了一个新的字典，但字典内部的元素是直接复制原容器（x）的引用，故而，x，y 是两个不同的对象，但是其中的值是相同的，故而对 y 的值进行新的赋值，y 的值也会发生改变。如果要使得对 y 的赋值不改变 x 的值，应该使用深拷贝，y = copy.deepcopy(x)。

2. python 函数中的默认参数值

   下述代码会输出什么结果?

```
def fast(items=[]):
    items.append(1)
    return items

print(fast())
print(fast())
```

A. [1,1] [1,1] B. [1] [1] C. [1,1] [1] D. [1] [1,1]

输出结果为：D

原因：在 Python 中，函数也是对象，当第一次调用时，函数 fast 执行时，Python 会在内存中创建一个空的列表对象 []，并将这个唯一的列表对象的引用，在 Python 中，函数也是对象，当第一次调用时，函数 fast 执行时，Python 会在内存中创建一个空的列表对象 []，并将这个唯一的列表对象的引用，而在函数定义时创建后，就会一直存 D。直到程序结束。第一次调用时，item 首先创建一个空列表，函数 fast 执行时，items 添加了元素，再次调用时，items 列表对象的默认值变成 [1]，执行函数后，变成 [1,1]，故而选 D

3 附录

3.1 均匀分布推导

我们旨在计算概率 $P(N \geq k) = P(X_1 < X_2 < \cdots < X_{k-1})$，其中 $X_i \sim U(0,1)$ 且相互独立。该概率等价于计算下面这个 $(k-1)$ 维多重积分：

$$P(N \geq k) = \int_0^1 \int_0^{x_{k-1}} \int_0^{x_{k-2}} \cdots \int_0^{x_2} 1 \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_{k-2} \, dx_{k-1}$$

其具体的推导过程如下：

$$
\begin{aligned}
P(N \geq k) &= \int_0^1 \int_0^{x_{k-1}} \cdots \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} 1 \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_{k-1} \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_{k-1}} \cdots \int_0^{x_3} \left([x_1]_0^{x_2} \right) dx_2 \cdots dx_{k-1} && \text{第一步：对 } x_1 \text{ 积分} \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_{k-1}} \cdots \int_0^{x_3} x_2 \, dx_2 \cdots dx_{k-1} \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_{k-1}} \cdots \int_0^{x_4} \left(\left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^{x_3} \right) dx_3 \cdots dx_{k-1} && \text{第二步：对 } x_2 \text{ 积分} \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_{k-1}} \cdots \int_0^{x_4} \frac{x_3^2}{2!} \, dx_3 \cdots dx_{k-1} \\
&\vdots && \text{重复此过程} \\
&= \int_0^1 \frac{x_{k-1}^{k-2}}{(k-2)!} \, dx_{k-1} && \text{在对 } x_{k-2} \text{ 积分后，得到的结果} \\
&= \frac{1}{(k-2)!} \left[\frac{x_{k-1}^{k-1}}{k-1} \right]_0^1 && \text{最后一步：对 } x_{k-1} \text{ 积分} \\
&= \frac{1}{(k-2)!} \left(\frac{1^{k-1}}{k-1} - \frac{0^{k-1}}{k-1} \right) \\
&= \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{k-1} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}
\end{aligned}
$$