

QTA2025暑期求职笔试训练营-week2

1. 随机数

小U有一个质地不均匀的硬币，已知这枚硬币正面朝上的概率 p 不是0或0.5，但不知道确切的概率，可以用只用这枚硬币帮小U生成100个0~15之间均匀分布的随机整数吗？小U是个追求严谨的小朋友，如果可以，需要聪明的你证明这种策略下生成的随机数的分布严格服从上述要求；如果不可以，也请给出证明。

2. 剪纸转圈圈

(1) 小U在做剪纸小游戏，他先剪了一大一小两个圆，如图1所示，其中圆A的半径为1，圆B的半径为5。现在让小圆A绕着大圆B滚动旋转，请问小圆A旋转多少圈后其圆心将再次到达起点？

(2) 小U又剪了一个边长为1的小正方形C，现在让小正方形C在大圆B的圆周上移动一周（保持正方形始终直立，如图2），请聪明的你帮小U算一算：小正方形C平移一周所覆盖区域的面积是多少？

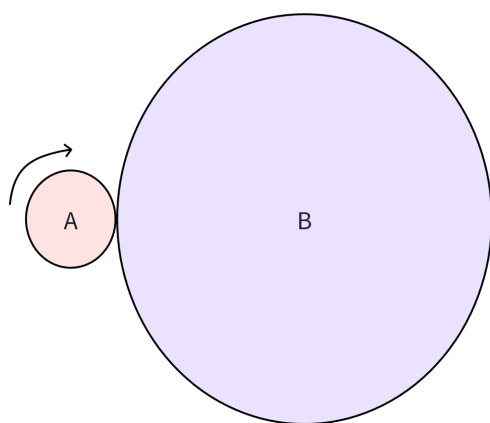


图1

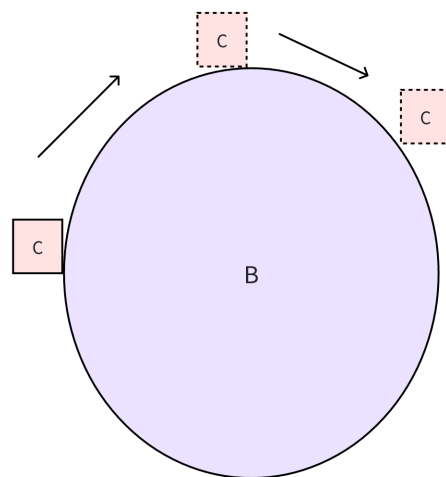


图2

3. 正态分布

概率论和微积分是一个quant需要熟练掌握的基础知识，小U正在温习正态分布的相关内容。设 $\varphi(y)$ 和 $\Phi(y)$ 分别为标准正态分布的密度和分布函数，求：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(y + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 (1 - \Phi(y)) \varphi(y) dy$$

4. 打家劫舍

小U在复习完数学后觉得coding也不能落下，请聪明的你帮他设计一个时间复杂度尽可能小的算法，求一个整数数组 S 中不含相邻元素的子序列的最大和。

5. Linear Regression Model

Xiao U is learning English and regression analysis. Please help him solve the following problem:

Suppose we have a simple linear regression model,

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \epsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

But the x_j are independently $N(\mu_x, \sigma_x^2)$. We assume further that $\epsilon_j \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$, independently of the x 's. Suppose further that x_j is in fact measured with error, so the observations are (y_j, w_j) , where

$$w_j = x_j + u_j, \quad u_j \sim N(0, \sigma_u^2),$$

and u is independent of both x and ϵ .

Now, please show that $E(y_j | w_j) = \alpha_0 + \alpha_1 w_j$, and give expressions for α_0 and α_1 as functions of known constants.

6. 共半球问题

- (1) 小U发现了一道经典的量化题：圆上随机取 N 个点，它们在同一个半圆内的概率有多大？
- (2) 求知欲很强的小U继续探索，假如问题变成3维球体呢？即在球面上随机取 N 个点，它们在同一个半球内的概率有多大？
- (3) 【拓展思考题】在 n 维空间的球面上随机取 N 个点，它们在同一个半球内的概率有多大？

7. Pattern Problem

小U在学习stochastic process，他手里有一个不均匀的硬币，每次掷到正面（H）的概率为 p ，掷到反面（T）的概率为 q ， $p + q = 1$ ，请问首次掷到以下pattern的期望投掷次数为多少？

- (1) HHHHHHTTTTTT (2) HHHHHHHHHHHH (3) HTHHTTHTHTHT