Week 4 QTA 笔试题标准题解

欧岱松

2025 年 12 月 20 日

1. 必胜策略 I (博弈论)

解答

结论：先手必胜。

答案：先手玩家首先取走最中间的 **1** 个积木，将 31 个积木分解为左右两段完全独立的部分。

每段各 15 个，此时局面处于完全对称状态。此后，无论后手玩家在左边的一堆进行什么操作（取走 x 个，或将堆切分），先手玩家只需在右边的一堆执行完全相同的镜像操作。由于局面对称，只要后手玩家能进行合法移动，先手玩家必然能在另一侧进行对应的合法移动，因此最后一个积木一定会被先手玩家拿走。

2. 切割木棍 (几何概率)

解答

答案：$1/4$ **(25%)**。

设木棍总长为 1，两个切点位置分别为 x, y，且 $x, y \sim U(0,1)$。不失一般性，设 $x < y$，则三段长度为 x，$y - x$，$1 - y$。

构成三角形的充要条件是任意两边之和大于第三边，等价于**任意一边长度** $< \frac{1}{2}$，即：

$$x < \frac{1}{2}, \quad y - x < \frac{1}{2}, \quad 1 - y < \frac{1}{2}$$

化简得：$x < \frac{1}{2}$，$y < x + \frac{1}{2}$，$y > \frac{1}{2}$。

由对称性，在 (x, y) 平面上，可行域由两个对称的三角形组成。

在单位正方形面积中，满足条件的区域由两个底和高均为 0.5 的小三角形组成：

$$S = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 0.5 \times 0.5\right) = 0.25$$

3. 球的放法 (排列组合)

解答

答案：256 种。

分步计数：

设绿盒中放入 g 个球，其中 $0 \le g \le 30$，则剩余 $r = 30 - g$ 个球需要放入两个**相同**的红盒。设两红盒球数为 a, b，满足 $a + b = r$ 且 $a \le b$。对于给定的 r，方案数为 $N_r = \lfloor r/2 \rfloor + 1$：当 r 为偶数时，可分配方案为 $(0, r), (1, r-1), \dots, (r/2, r/2)$，共 $r/2+1$ 种；当 r 为奇数时，可分配方案为 $(0, r), (1, r-1), \dots, (\lfloor r/2 \rfloor, \lceil r/2 \rceil)$，共 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ 种。因此总方案数为 $\mathrm{Sum} = \sum_{r=0}^{30} (\lfloor r/2 \rfloor + 1)$。

计算过程：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sum} &= \underbrace{(1+1)}_{r=0,1} + \underbrace{(2+2)}_{r=2,3} + \underbrace{(3+3)}_{r=4,5} + \cdots + \underbrace{(15+15)}_{r=28,29} + \underbrace{16}_{r=30} \\
&= 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 15) + 16 \\
&= 2 \times \frac{15 \times 16}{2} + 16 \\
&= 2 \times 120 + 16 = 256
\end{aligned}
$$

4. 必胜策略 II

解答

结论：蝙蝠侠存在必胜策略。

核心逻辑：超人的轨迹完全由初始位置 x_0 和速度 v 决定，位置函数为 $x(t) = x_0 + vt$。因为 $x_0, v \in \mathbb{Z}$，所有可能的参数对集合 $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 是**可数集**。

必胜策略构造：

首先将所有可能的整数对 (x_0, v) 按对角线法排列成序列 $P_1, P_2, P_3, \dots$。在第 t 时刻，蝙蝠侠假设超人参数为序列中第 t 个参数对 $P_t = (x_0^{(t)}, v^{(t)})$，并计算射击位置 $\mathrm{Pos}_t = x_0^{(t)} + v^{(t)} \times t$。因为超人的真实参数对 (x_0^*, v^*) 必然在序列的某一位 k 出现（即 $P_k = (x_0^*, v^*)$），所以蝙蝠侠最晚在第 k 回合击中目标。

5. Brownian Motion

解答

根据 q 与 a 的大小关系分两种情况讨论：

情形 1：$0 < q < a$

已知起点 $B(0) = 0$ 和终点 $B(a) = b$，求中间时刻 $B(q)$ 的条件分布。

根据布朗桥性质，在给定两端点的条件下，中间点的值呈线性插值，并有额外的随机波动：

$$E[B(q) \mid B(a) = b] = \frac{q}{a} \cdot b$$

$$\mathrm{Var}(B(q) \mid B(a) = b) = \frac{q(a-q)}{a}$$

情形 2：$q > a$

已知 $B(a) = b$，求未来时刻 $B(q)$ 的条件分布。

利用布朗运动的独立增量性质：$B(q) = B(a) + \underbrace{(B(q) - B(a))}_{\text{独立于}B(a)}$

因为 $B(q) - B(a) \sim \mathcal{N}(0, q-a)$ 且独立于 $B(a)$，所以：

$$E[B(q) \mid B(a) = b] = b + E[B(q) - B(a)] = b + 0 = b$$

$$\mathrm{Var}(B(q) \mid B(a) = b) = \mathrm{Var}(B(q) - B(a)) = q - a$$

6. 广播机制

解答

答案：(2, 3, 3) 选 B

7. 接雨水 (算法)

解答

算法步骤：

1. 使用动态规划预处理每个位置的**左侧最高点**和**右侧最高点**。
2. 对每个位置，计算能蓄水的高度（木桶短板原理）。
3. 将蓄水高度乘以对应宽度，累加得到总体积。

Python 参考实现：

```python
def trap_rain_weighted(heights, widths):
    """
    计算加权接雨水问题的总体积

    参数:
        heights: 高度数组
        widths: 宽度数组
    返回:
        总蓄水体积
    """
    n = len(heights)
    if n == 0:
        return 0

    # 计算每个位置左侧的最大高度
    left_max = [0] * n
    left_max[0] = heights[0]
    for i in range(1, n):
        left_max[i] = max(left_max[i-1], heights[i])

    # 计算每个位置右侧的最大高度
    right_max = [0] * n
    right_max[n-1] = heights[n-1]
```

```
    for i in range(n-2, -1, -1):
        right_max[i] = max(right_max[i+1], heights[i])

    # 计算总蓄水量
    total_water = 0
    for i in range(n):

        water_level = min(left_max[i], right_max[i])
        # 当前位置的蓄水深度
        depth = max(0, water_level - heights[i])
        # 累加体积: 深度 × 宽度
        total_water += depth * widths[i]

    return total_water
```