称球问题

欧岱松

2025 年 7 月 26 日

1　核心基础

我们构建单次称重物理结果的数学关系式，来描述每一次的称重结果。我们定义：

- s_j: 第 j 号球的真实状态。$s_j = 1$ 表示该球**偏重**，$s_j = -1$ 表示该球**偏轻**。
- W_j: 在某一次称重中，对第 j 号球的放置方式。$W_j = -1$ 表示放**左盘**，$W_j = 1$ 表示放**右盘**，$W_j = 0$ 表示**不放**。
- r: 本次称重的结果。$r = -1$ 表示**左盘重**，$r = 1$ 表示**右盘重**，$r = 0$ 表示**平衡**。

通过简单的分析，我们可以得到以下恒成立的公式：

$$r = W_j \times s_j \tag{1}$$

具体来说，

- 若球 j **偏重** ($s_j = 1$)，放在**左盘** ($W_j = -1$)，则左盘会下沉，结果 $r = -1$。公式：$-1 \times 1 = -1$。**吻合**。
- 若球 j **偏轻** ($s_j = -1$)，放在**左盘** ($W_j = -1$)，则左盘会上升（右盘下沉），结果 $r = 1$。公式：$-1 \times -1 = 1$。**吻合**。
- 若球 j 放在**右盘** ($W_j = 1$) 且**偏重** ($s_j = 1$)，则右盘下沉，结果 $r = 1$。公式：$1 \times 1 = 1$。**吻合**。
- 若球 j **不放**在天平上 ($W_j = 0$)，则天平平衡，结果 $r = 0$。公式：$0 \times s_j = 0$。**吻合**。

2 问题描述

根据信息论，我们可以通过三次称重来确定次品球。如果第 j 号球是次品，那么上述的核心公式必须对每一次称重都成立。设第 i 次称重的结果为 r_i，对球 j 的放置为 W_{ij}，则有:

$$\text{第 1 次称重: } r_1 = W_{1j} \times s_j$$
$$\text{第 2 次称重: } r_2 = W_{2j} \times s_j$$
$$\text{第 3 次称重: } r_3 = W_{3j} \times s_j$$

更进一步，

- 我们将三次称重的实际结果组合成一个**结果向量** $R = (r_1, r_2, r_3)^T$。
- 我们将对第 j 号球的三次称重方案组合成一个**方案向量** $W_j = (W_{1j}, W_{2j}, W_{3j})^T$。这个向量就是我们预先设计的称重矩阵 W 的第 j 列。

于是，上面三个的方程可以被合并成一个方程:

$$\mathbf{R} = s_j \cdot \mathbf{W_j} \tag{2}$$

故而原问题被我们转化成如何设计一个方案矩阵，并根据结果来反推出球的状态向量，又因为状态向量为一个全一向量或者 0 向量，故而最终的次品的方案向量一定是满足 $R = k \times W_j$（并且 $k \in \{-1, 1\}$）。

3 问题求解

问题求解的本质就是在 ** 求解方程 (2)**。在这个方程中:

- 向量 $\mathbf{R}$ 是我们通过实际称重得到的。
- 球的编号 j 和它的状态 s_j 是我们想要找出的。

由于球的状态 s_j 只有三种可能（1 ，-1 或 0 ），故而当方案向量和结果向量不满足 $R = k \times W_j$（并且 $k \in \{-1, 1\}$）时，其必然不是次品球。接下来我们需要说明，选定特定的方案矩阵，找出与结果向量共线性的向量，这个解存在且唯一。

4 一个可行的最优策略矩阵

一个经典 3×12 称重矩阵 W 如下。

称重方案描述

- **第 1 次称重**: {1, 2, 3, 4} vs {5, 6, 7, 8}
- **第 2 次称重**: {1, 2, 5, 9} vs {3, 6, 7, 10}
- **第 3 次称重**: {1, 3, 5, 11} vs {4, 6, 9, 12}

对应的称重矩阵 W

下面的矩阵精确地描述了上述方案，其中行代表称重次数，列代表球的编号。由于

表 1: 称重方案设计（12 球问题）

称重次数	球编号											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
第一次称重	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	0	0	0	0
第二次称重	−1	−1	1	0	−1	1	1	0	−1	1	0	0
第三次称重	−1	0	−1	1	−1	1	0	0	1	0	−1	1

我们设计的称重矩阵 W 时满秩，因此这个求解过程得到的结果必然是唯一的，并且从直观上来讲，因为只有一个次品球，所以结果向量只与次品球的方案向量相关，所以结果向量至多有 18 种可能小于列向量的 24 种可能, 故而这个解的存在是可能的。比如当我的结果向量是 $(1, -1, -1)'$ 那么我可以知道球 5 是次品，且偏重。

5 矩阵设计的原则

为了能唯一地找出次品球和它的状态，我们的称重矩阵 $\mathbf{W}$ 必须满足以下设计原则:

- 矩阵的每一列向量必须是唯一的。如果两列相同（$\mathbf{W_j} = \mathbf{W_k}$），我们就无法区分 j 号球和 k 号球。
- 任何一列向量都不能是另一列向量的负向量 ($\mathbf{W_j} \neq -\mathbf{W_k}$)。否则，如果我们的结果是 $\mathbf{R} = \mathbf{W_j}$，我们将无法判断是“$j$ 号球偏重”还是“k 号球偏轻”(因为 $\mathbf{R} = -\mathbf{W_k}$ 也成立)。
- 每一列都不能是零向量 $(0, 0, 0)^T$。否则那个球就从未上过天平，我们无法判断它是否有问题。