

**1. Tentauppgift: Lite funktioner**

- (a) Hur många funktioner finns från  $\mathbb{Z}_6$  till  $\mathbb{Z}_{12}$ ?
- (b) Hur många av dessa funktioner är injektiva, surjektiva, respektive bijektiva?

**2. Tentauppgift: Lite träd**

- (a) Hur många kanter har ett träd med  $n$  noder?  
Visa med induktion!
- (b) Hur många noder finns det på lägsta nivå i ett komplett binärträd med  $n$  nivåer?  
Visa med induktion!
- (c) Hur många noder finns i ett komplett binärträd med  $n$  nivåer?  
Visa med induktion!

**3. Tentauppgift: Lite Fibonacci**

Fibonacci-följden är definierad av:

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \text{ för } n \geq 3.$$

- (a) Visa att två efterföljande Fibonaccital är relativt prima.
- (b) Vilka Fibonaccital är jämna? Vilka är delbara med 3? Vilka är delbara med 5?

**4. Tentauppgift: Lite Eulercykler**

- (a) Kan du rita den fullständiga grafen med 5 noder  $K_5$  utan att lyfta pennan och utan att gå på samma kant flera gånger? Förklara hur ni gör eller varför det inte går.
- (b) För vilka naturliga tal  $n$  har grafen  $K_n$  en Eulercykel?
- (c) Om en fullständig graf inte har någon Eulercykel, kan man ta bort några kanter och få en graf med en Eulercykel? Hur många kanter isåfall?

**5. Tentauppgift: Lite summor**

- (a) Beräkna följande summor:  
 $1^3 + 2^3 \pmod{3}$   
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \pmod{5}$   
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \pmod{7}$
- (b) Vad kan man säga om:  
 $1^3 + 2^3 + \dots + 100^3 \pmod{101}$ ?
- (c) Ställ upp en förmodan angående summan:  
 $1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 \pmod{n}$
- (d) Bevisa er förmodan!