Induktionsbevis

Induktionsaxiomet Låt M vara en mängd av heltal.
Om
$$\begin{array}{ll} 1) & n_0 \in M \\ 2) & n \in M \Longrightarrow n+1 \in M \end{array}$$
så innehåller M *alla* heltal som är $\geq n_0$.

Induktionsprincipen Låt P_n beteckna
en öppen utsaga (se högerspalten)
med heltalsvariabeln n.
Om
$$\begin{array}{ll} 1) & P_{n_0} \text{ är sann} \\ 2) & P_n \text{ är sann} \Longrightarrow P_{n+1} \text{ är sann} \end{array}$$
så är P_n sann för alla $n \geq n_0$.

Fås ur induktionsaxiomet
genom att låta $M = \{n : P_n \text{ är sann}\}$

Induktionsprincipen, "starkare" form :
Som föregående, men med 2) utbytt mot
$$\begin{array}{ll} 2') & P_m \text{ är sann då } n_0 \leq m \leq n \\ & \Longrightarrow P_{n+1} \text{ är sann} \end{array}$$
Är ekvivalent med den första varianten.
Se Exempel ...

Induktionsbevis för att
en öppen utsaga P_n är sann för alla heltal $n \geq n_0$
består av två delar:

1) "basfallet": bevis för att P_{n_0} är sann

2) "induktionssteget" : bevis för att
$(P_n \Longrightarrow P_{n+1})$ är sann för alla $n \geq n_0$,
eller motsvarande för den "starkare" formen.

Induktionsantagande kallas
antagandet att P_n skulle vara sant,
som man gör när man bevisar
implikationen $(P_n \Longrightarrow P_{n+1})$

Välordningsprincipen Varje icke-tom
nedåt begränsad mängd av heltal
har ett minsta element.

Kan visas vara ekvivalent med induktionsaxiomet.

Påstående / (logisk) utsaga är en bildning som
$$2+2=5$$
för vilket man kan fråga "Sant eller falskt?".

Öppen utsaga är en bildning som
$$x+2=5$$
som innehåller en variabel (eller flera)
och som blir ett påstående
så fort variabeln tilldelats värden.
Det kan vara sant för vissa värden,
men falskt för andra.
T.ex. är
$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
en öppen utsaga med heltalsvariabeln n.

Om implikationer OBS! Att $P \Longrightarrow Q$ är sant
innebär *inte* att P skulle vara sant:
$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 1 \\ & \Downarrow & \\ 0+1 & = & 1+1 \\ & \Downarrow & \\ 1 & = & 2 \end{array}$$
är ett bevis för att $(0=1) \Longrightarrow (1=2)$,
men naturligtvis är $0 \neq 1$.

1. För summorna

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1+3 \\ s_3 &= 1+3+5 \\ &\quad ... \\ s_n &= 1+3+...+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2n-1) \end{aligned}$$

kan vi ställa upp en formel direkt (hur då?),
men vi låtsas nu att vi inte kan
och räknar ut summorna för små värden på n
i hopp om att se något mönster
som kan tänkas gälla för alla n :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1+3=4 \\ s_3 &= 1+3+5=9 \\ s_4 &= 1+3+5+7=16 \\ s_5 &= 1+3+5+7+9=25 \end{aligned}$$

Ett mönster är väl uppenbart ?

För $n = 1, 2, 3, 4, 5$ gäller

$$s_n = n^2$$

Men är detta riktigt även för alla heltal > 5 ?

Vi försöker göra ett induktionsbevis.

Basfallet är redan klart: $s_1 = 1 = 1^2$.

Induktionssteget: Vi skall visa att
om $s_n = n^2$ (induktionsantagandet),
så är $s_{n+1} = (n+1)^2$:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1+3+...+(2n-1)+(2n+1) = \\ &= s_n + (2n+1) = \\ &\quad \text{[induktionsantagandet tillämpas nu!]} \\ &= n^2+2n+1 = \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Klart.

Första gången
man kommer i kontakt med induktionsbevis
brukar man tänka "Va?"
Ens nästa reaktion brukar bli:
"Får man göra så här?"
Slutreaktionen är:
"Ja, så klart att man får. Vad fiffigt!"
Hur lång tid som förflyter mellan dessa reaktioner
är idividuellt,
och varierar mellan 10 sekunder och ett par år.
Kimmo Eriksson & Hillevi Gavel
i boken *Diskret matematik och diskreta modeller*

2. Beräkna summorna

$$s_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$$

för några små värden på n.
Sök efter mönster i resultaten,
gissa en formel för summan
och försök att med induktion bevisa
att den gäller för alla positiva heltal n.

(Kom ihåg formeln från nästa övning!)

3. För formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

för alla positiva heltal n

har vi redan ett fullgott åskådligt bevis,
men skriv nu som övning ett induktionsbevis.

4. Bevisa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

för alla positiva heltal n

5. Med tanke på hur föregående två formler ser ut,
så är det väl inte helt otänkbart att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

för alla positiva heltal n

Skriv ner ett induktionsbevis!

6. Titta på de tre formlerna närmast ovan,
gissa och bevisa med induktion en formel för

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$$

7. För två godtyckliga komplexa tal har vi triangelolikheten:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Kan den generaliseras till fler än två tal?
Är för alla komplexa tal $z_1, z_2, ..., z_n$

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n| \ ?$$

8. Visa att ur de två deriveringsreglerna (D står för "derivatan av")

$$\begin{aligned} Dx &= 1 \\ D(fg) &= (Df)\,g + f\,(Dg) \end{aligned}$$

följer att

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

för alla positiva heltal n.

9. *Utan räkning* kan du inse att för alla $x > 0$ och alla heltal $n > 1$

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

(Hur så?)

Visa nu, förslagsvis med induktion, att olikheten är sann även då $-1 < x < 0$.

10. Visa att om $0 < a_k < 1$ för $k = 1, 2, 3, ..., n$, så

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(Det s.k. produkttecknet $\prod$ fungerar precis som summatecken men genererar en produkt i stället:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) = (1 - a_1)(1 - a_2) ... (1 - a_n)$$

Rekursion

Rekursiv definition För en följd som t.ex.
$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32, ...$
är det lätt att ge en formel
som visar hur talen fås ur sitt ordningsnummer:

$$a_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

För talen i följden (kallas Fibonaccis följd efter en italienare Fibonacci från 1200-talet)

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$$

är det inte alls lika lätt. Men det finns ett enkelt samband mellan ett tal och närmast föregående:

$$\begin{aligned} 89 &= 55 + 34 \\ 55 &= 34 + 21 \\ 34 &= 21 + 13, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Vi skulle kunna definiera (beskriva)
talföljden på följande sätt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + a_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

Det första eller några av talen i början får vi ange explicit, sedan ger vi en regel som tillåter oss att successivt räkna fram efterföljande tal ur närmast föregående. En sådan definition kallas rekursiv.

Rekursionsformel kallas en formel av typen

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

ovan,
som anger hur ett tal i en följd
skall beräknas ur föregående tal.

Iteration sägs föreligga när man upprepade gånger tillämpar samma beräkningsprocedur,
t.ex. att beräkna tal i Fibonaccis talföljd genom upprepad insättning i $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

11. Beskriv med ord vad p_n är, om

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \text{ och} \\ p_1 &= np_{n-1} \text{ för } n = 1, 2, 3, 4, ... \end{aligned}$$

(Bortse från p_0, som är litet speciellt.)
Talen p_n brukar normalt betecknas

$$\begin{aligned} \text{betecknas} &: n! \\ \text{uttalas} &: \text{"}n\textbf{-fakultet}\text{"} \end{aligned}$$

12. Skriv ner en rekursiv definition av följden

$$a_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

13. Talföljden C_n, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ definieras genom

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$

Skriv ut de sex första talen samt
ge en ekvivalent rekursiv definition.

14. Talföljden $a_0 = a, a_1, a_2, ...$
uppfyller rekursionsekvationen

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$$

(a) Uttryck a_1, a_2, a_3 och a_4 i a.
(b) Uttryck a_n i a.

15. För talföljden $a_1 = a, a_2, a_3, ...$ gäller

$$(k+1)\,a_{k+1} - ka_k = 1$$

Uttryck a_2, a_3, a_4 i a. Ange en formel för alla a_n.

16. Givet ett $x_0 \neq -1, 0, 1$, bildar vi successivt

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$$

Vad måste x_0 ha varit, om $x_{2001} = 3$?

Tips: Visa att $x_{n+1} = x_{n-3}$.

17. Låt

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{6a_n + 5}{a_n + 2} \end{aligned}$$

Visa att $0 < a_n < 5$ för alla n.

18. Antag att ett träds grenverk växer på följande sätt. Under en grens två första år växer det inte ut några nya grenar. Fr.o.m. det tredje levnadsåret växer det emellertid varje år ut två nya grenar. Hur många grenar har trädet efter n år om vi antar att trädet från början bestod av tre grenar?

Problemlösning m.h.a. rekursion

Hanois torn

19. Se den första figuren nedan.
Givna är tre vertikalt uppsatta pinnar.
På den första pinnen är ett antal ringformiga plattor av olika diametrar trädda.
Uppgiften är att flytta dessa till den tredje pinnen under iakttagande av följande regler:

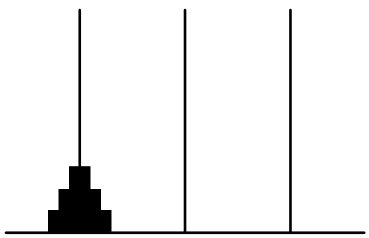
    (a) Endast en platta i taget får flyttas.

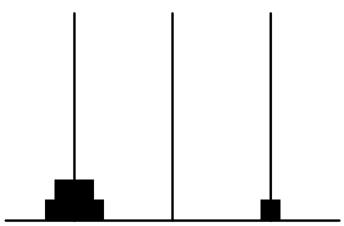
    (b) Man får aldrig ha någon platta ovanpå en med mindre diameter.

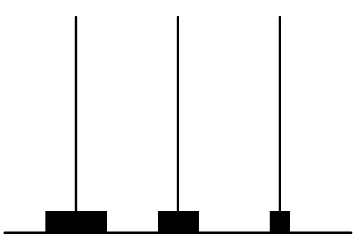
    (c) Den andra pinnen får användas som "mellanstation".

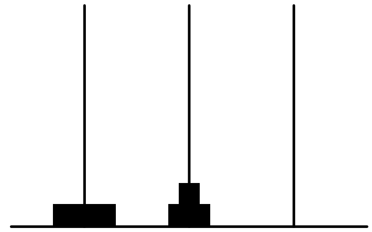
(Ett sällskapsspel från 1800-talet, som påstods ha verklighetsbakgrund: När Gud skapade Jorden, gav han ovannämnda uppgift till prästerna i Brahmas tempel (var det nu ligger någonstans) - med 3 diamantnålar till pinnar och 64 guldplattor att flytta. De skulle flytta en platta om dagen och lär hålla på fortfarande...

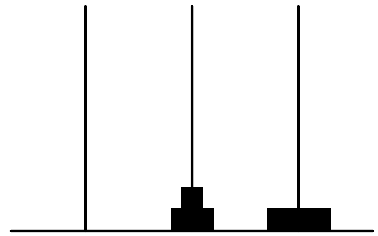
I fallet $n = 3$, t.ex., klarar man sig så här:

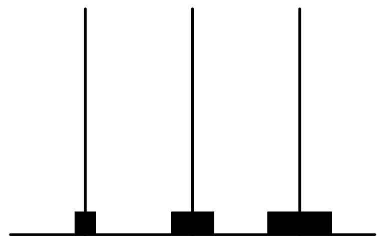


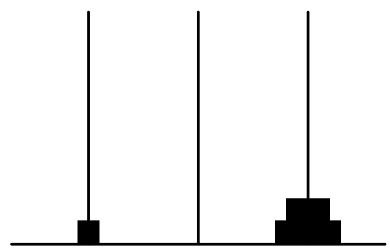


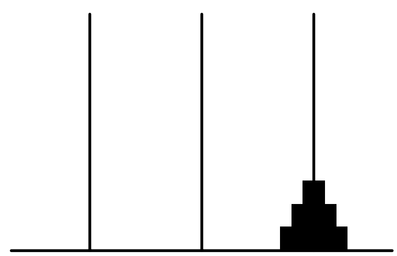












Men hur gör man när antalet plattor är stort?

Vilket är det minsta antalet flyttningar som behövs för en hög med n st. plattor?

Lösning:

Fallet $n = 1$ är klart: flytta direkt!

Antag att vi känner till en procedur som fungerar för n plattor. Då skulle vi kunna utnyttja den till att flytta $n + 1$ plattor i tre steg:

i) Flytta de n översta plattorna, fast till pinne 2 och med 3 som mellanstation.

ii) Flytta den största plattan från 1 till 3.

iii) Flytta de n plattorna från 2 till 3 med 1 som mellanstation. Klart!

Hur många flyttningar blev det?

Med a_n = antalet flyttn. för n plattor har vi

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + 1 + a_n \end{aligned}$$

och räknar snabbt ut att de första a_k:na är

$$1, 3, 7, 15, 31, ...$$

Det verkar som om $a_n = 2^n - 1$ för alla n.
Att kontrollera detta är en uppgift av precis den typ läroböckerna behandlar:

i) Det stämmer för $n = 1$
ii) Om det stämmer för ett visst n,
så stämmer det också för $n + 1$.
Det ser vi av följande uträkning:

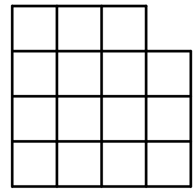
$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2\left(2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

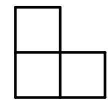
Att a_n också är det *minimala* antalet,
kan inses även det med induktion:

Klart att $a_1 = 1$ är det optimala för 1 platta.

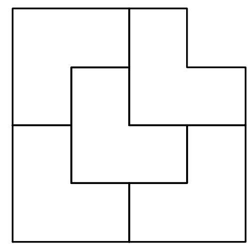
Anta att a_n är det optimala för n plattor.
Vi visar att det då inte går att klara sig med färre än $2a_n + 1$ flyttningar i fallet med $n + 1$ plattor: Innan vi kan flytta den största plattan till pinne 3, så måste vi ha flyttat alla de andra till pinne 2. För det behövs inte mindre än a_n flyttningar enligt induktionsantagandet. Efter att vi flyttat den största, så återstår det återigen att flytta n st. och det kunde inte göras snabbare än med a_n flyttningar, så totalt krävs minst $a_n + 1 + a_n$. Klart.

20. Ett 4×4-rutbräde med en hörnruta borttagen, se nedan till vänster, kan täckas exakt, utan överlappning, med ”triomino”-brickor (ordet släkt med ”domino”) av den typ som visas nedan till höger





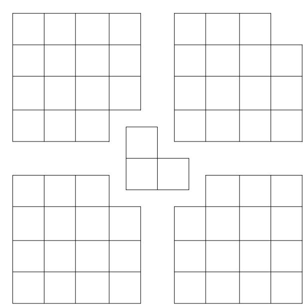
t.ex. på följande sätt:



Visa att även 8×8-, 16×16- och allmänt varje $2^n \times 2^n$-rutbräde med en hörnruta borttagen, kan täckas med ovanstående triominobrickor!

Lösning:

Man kan utnyttja övertäckningen av 4×4-brädet till att få fram en övertäckning av ett 8×8-bräde:



Lägg en triominobricka i ”mitten” som figuren visar, så kan vi tänka oss resten uppdelad i 4 st. 4×4-bräden med en hörnruta borttagen. Sådana har vi övertäckningar för – alltså klarar vi 8×8-brädet också!

På samma sätt kan varje $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-bräde tänkas uppdelatt i ett ”triominofragment” i mitten, samt 4 st. $2^n \times 2^n$-bräden.
Induktionssteget fungerar!

Induktion och rekursion: lösningar

1. Att ställa upp en formel direkt:
   Känn igen en aritmetisk summa!

$$\begin{aligned} 1+3+...+(2n-1) &= n\cdot\frac{1+(2n-1)}{2} = \\ &= n\cdot\frac{2n}{2} = \\ &= n^2 \end{aligned}$$

2. Vi får

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 9 \\ s_3 &= 36 \\ s_4 &= 100 \\ s_5 &= 225 \\ s_6 &= 441 \end{aligned}$$

   Den första observationen är att alla dessa är kvadrater:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 9 &= 3^2 \\ 36 &= 6^2 \\ 100 &= 10^2 \\ 225 &= 15^2 \\ 441 &= 21^2 \end{aligned}$$

   Den andra observationen är att

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1+2 \\ 6 &= 1+2+3 \\ 10 &= 1+2+3+4 \\ 15 &= 1+2+3+4+5 \\ 21 &= 1+2+3+4+5+6 \end{aligned}$$

   Så vi leds till hypotesen att

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+...+n^3 &= (1+2+...+n)^2 \\ &\ \text{för alla } n \end{aligned}$$

   Till följd av formeln för aritmetisk summa är påståendet ekvivalent med

$$1^3+2^3+...+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

   Av ett induktionsbevis återstår induktionssteget: Vi skall då försöka visa att

$$\begin{aligned} \text{om } 1^3+2^3+...+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ \text{så } 1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3 &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

   Följande räkning visar att detta är sant:

$$\begin{aligned} & 1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3 \\ =\ & (1+2+...+n)^2+(n+1)^3 \\ =\ & \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3 = \\ =\ & \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{4}(n+1)^2\,4(n+1) = \\ =\ & \frac{1}{4}(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right) = \\ =\ & \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \\ =\ & \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

3. Likheten är sann för $n=1$, eftersom

$$1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$$

   Om den är sann för ett visst heltal n,
   så är den sann även för nästa heltal $n+1$,
   eftersom

$$\begin{aligned} & 1+2+...+n+(n+1) \\ =\ & \frac{1}{2}n(n+1)+(n+1) = \\ =\ & \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

4. Likheten är sann för $n=1$, eftersom

$$1\cdot 2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$$

   Om den är sann för ett visst heltal n,
   så är den sann även för nästa heltal $n+1$,
   eftersom

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \\ =\ & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)+(n+1)(n+2) = \\ =\ & \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2) = \\ =\ & \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

5. Likheten är sann för $n = 1$, eftersom

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Om den är sann för ett visst heltal n,
så är den sann även för nästa heltal $n+1$,
eftersom

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\
= \; & \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\
= \; & \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)
\end{aligned}$$

6. Hypotes:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) \\
= \; & \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)
\end{aligned}$$

Bevis med induktion:

Likheten är sann för $n = 1$, eftersom

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Om den är sann för ett visst heltal n,
så är den sann även för nästa heltal $n+1$,
eftersom

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2)(k+3) \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) + \\
& (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\
= \; & \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) + \\
& (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\
= \; & \frac{1}{5}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)
\end{aligned}$$

7. Antag att olikheten är sann för ett visst n.
Då måste den vara sann även för $n+1$ tal:

$$\begin{aligned}
& |z_1 + z_2 + ... + z_n + z_{n+1}| \\
= \; & |(z_1 + z_2 + ... + z_n) + z_{n+1}| \\
& \text{enligt olikheten för två tal} \\
\leq \; & |(z_1 + z_2 + ... + z_n)| + |z_{n+1}| \\
& \text{enligt antagandet för } n \text{ st. tal} \\
\leq \; & |z_1| + |z_2| + ... + |z_n| + |z_{n+1}|
\end{aligned}$$

Därmed har vi ett induktionsbevis för att påståendet är sant för alla positiva heltal n och alla komplexa tal $a_1, a_2, ..., a_n$.

8. Gör ett induktionsbevis.
Induktionssteget (steget från n till $n+1$):

$$\begin{aligned}
D\left(x^{n+1}\right) &= D(x^n \cdot x) = \\
&= D(x^n) \cdot x + x^n D(x) = \\
&= n x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = \\
&= (n+1) x^n
\end{aligned}$$

9. Binomialsatsen säger att

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + ... + x^n$$

och, då $x > 0$, är här alla termer positiva, så

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Tillåt nu även $-1 < x < 0$.
Olikheten är sann för $n = 2$, eftersom

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\
&> 1 + 2x
\end{aligned}$$

Om olikheten är sann för ett visst n,
så är den också sann för $n+1$, eftersom

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) \\
& \quad [1 + x > 0] \\
&> (1+nx)(1+x) \\
&= 1 + nx + x + nx^2 \\
&> 1 + (n+1)x
\end{aligned}$$

10. Klart att olikheten är sann för $n = 1$, för då står det:

$$1 - a_1 \geq 1 - a_1$$

Anta att olikheten är sann för ett visst n,
d.v.s. att

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n) \geq 1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

och titta på fallert med $n + 1$ tal:
I högerledet har vi då

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)(1 - a_{n+1})$$

En sann olikhet förblir sann,
när båda leden multipliceras med ett positivt tal:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow ac > bc$$

(Däremot $ac < bc$, om $c < 0$.
Sätt in t.ex. $a = 3, b = 2, c = \pm 5$!)
Därför

$$\begin{cases} (1 - a_1) \ldots (1 - a_n) \geq 1 - (a_1 + \ldots + a_n) \\ (1 - a_{n+1}) > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)(1 - a_{n+1}) \\ > & (1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n))(1 - a_{n+1}) \end{array}$$

Det sista multiplicerar vi ihop:

$$\begin{array}{rl} = & 1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - a_{n+1} \\ & + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, a_{n+1} \end{array}$$

Den sista termen är > 0
(använder att a:na är > 0 nu),
så det hela är

$$\geq 1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - a_{n+1}$$

V.S.B.

11. p_n = produkten av alla heltal från 1 till n.

12.

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & 2a_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{rcl} C_0 & = & \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \\ C_1 & = & \frac{2}{1 \cdot 2} = 1 \\ C_2 & = & \frac{24}{2 \cdot 6} = 2 \\ C_3 & = & \frac{24 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 24} = 5 \\ C_4 & = & \frac{24 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{24 \cdot 120} = 14 \\ C_5 & = & \frac{24 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{120 \cdot 720} = 42 \end{array}$$

Hur kan du ur ett visst tal i följden

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$

få fram, nästa tal

$$\begin{array}{rcl} C_{n+1} & = & \frac{(2\,(n+1))!}{(n+1)!\,((n+1)+1)!} = \\ & = & \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+2)!} \ ? \end{array}$$

Utnyttja att

$$\begin{array}{rcl} (2n+2)! & = & (2n+2)(2n+1) \cdot (2n!) \\ (n+1)! & = & (n+1) \cdot n! \\ (n+2)! & = & (n+2) \cdot (n+1)! \end{array}$$

Vilket samband får du då mellan C_{n+1} och C_n ?

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2\,(2n+1)}{n+2}$$

$$C_{n+1} = \frac{2\,(2n+1)}{n+2} C_n$$

14.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a}{1+a} \\ a_2 &= \frac{\frac{a}{1+a}}{1+\frac{a}{1+a}} = \frac{a}{1+2a} \\ a_3 &= \frac{\frac{a}{1+2a}}{1+\frac{a}{1+2a}} = \frac{a}{1+3a} \\ a_4 &= \frac{\frac{a}{1+3a}}{1+\frac{a}{1+3a}} = \frac{a}{1+4a} \end{aligned}$$

Förmodan:

$$a_n = \frac{a}{1+na}$$

Induktionsbevis, "induktionssteget"
("steget" från n till $n+1$,
för $n = 0, 1, 2, 3, 4$ redan klart.):

$$\begin{aligned} \text{Om } a_n &= \frac{a}{1+na}, \\ \text{så } a_{n+1} &= \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{\frac{a}{1+na}}{1+\frac{a}{1+na}} = \\ &= \frac{a}{1+(n+1)\,a} \end{aligned}$$

15.

$$a_{k+1} = \frac{1+ka_k}{k+1}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1+a}{2} \\ a_3 &= \frac{1+2\frac{1+a}{2}}{3} = \frac{2+a}{3} \\ a_4 &= \frac{1+3\frac{2+a}{3}}{4} = \frac{3+a}{4} \end{aligned}$$

Förmodan:

$$a_n = \frac{n-1+a}{n}$$

Induktionsbevis, induktionssteget:

$$\begin{aligned} \text{Om } a_n &= \frac{n-1+a}{n}, \\ \text{så } a_{n+1} &= \frac{1+na_n}{n+1} = \frac{1+n\frac{n-1+a}{n}}{n+1} = \\ &= \frac{1+n-1+a}{n+1} = \\ &= \frac{(n+1)-1+a}{n+1} \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}+1}-1}{\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}+1}+1} = \\ &= \frac{x_{n-1}-1-x_{n-1}-1}{x_{n-1}-1+x_{n-1}+1} = \\ &= -\frac{2}{2x_{n-1}} = -\frac{x_{n-2}+1}{x_{n-2}-1} = \\ &= -\frac{\frac{x_{n-3}-1}{x_{n-3}+1}+1}{\frac{x_{n-3}-1}{x_{n-3}+1}-1} = x_{n-3} \end{aligned}$$

Alltså

$$x_1 = x_{2001} = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{x_0-1}{x_0+1} &= 3 \\ x_0 - 1 &= 3x_0 + 3 \\ x_0 &= -2 \end{aligned}$$

17. Bevis med induktion:
Basfallet klart: $a_1 < 5$.
Induktionssteget:

$$\begin{aligned} \frac{6a_n+5}{a_n+2} &< 5 \\ 6a_n + 5 &< 5a_n + 10 \\ a_n &< 5 \end{aligned}$$

Så, om $a_n < 5$, måste även $a_{n+1} < 5$.

18. Om a_n är antalet grenar år n,
så gäller

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Vi får

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 3 + 2 \cdot 3 = 9 \\ a_4 &= 9 + 2 \cdot 3 = 15 \\ a_5 &= 15 + 2 \cdot 9 = 33 \\ a_6 &= 33 + 2 \cdot 15 = 63 \\ a_7 &= 63 + 2 \cdot 33 = 129 \\ a_8 &= 129 + 2 \cdot 63 = 255 \end{aligned}$$

Hypotes:

$$a_n = 2^n + (-1)^{n-1}$$

Induktionsbevis, induktionssteget:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2a_{n-1} = \\ &= 2^n + (-1)^{n-1} + 2\left(2^{n-1} + (-1)^{n-2}\right) = \\ &= 2^n + 2^n + (-1)^{n-1}(1-2) = \\ &= 2^{n+1} + (-1)^n \end{aligned}$$