Die Exponentialverteilung

Definition: Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda > 0$

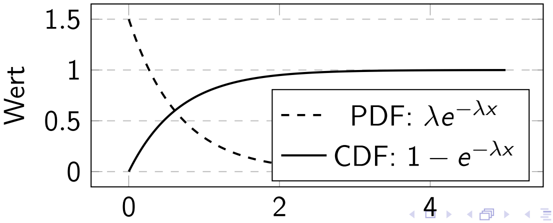
$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Normierung:

$$\int_0^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda\big[-\tfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\big]_0^\infty = 1.$$

Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$$



Erwartungswert der Exponentialverteilung

Für $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ gilt

$$E[X] = \int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\;\underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{dv}\,\mathrm{d}x.$$

Mit partieller Integration $(u = x,\ dv = \lambda e^{-\lambda x} dx)$ folgt

$$u = x, \quad dv = \lambda e^{-\lambda x}\,dx, \quad du = \ dx, \quad v = -e^{-\lambda x}.$$

Daher

$$\int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \Big[\underbrace{x}_{u}\,\underbrace{(-e^{-\lambda x})}_{v}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{1}_{du}\,\underbrace{(-e^{-\lambda x})}_{v}\,dx = 0 + \int_0^\infty e$$

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{\lambda}.}$$

Erwartungswert der Exponentialverteilung

Für $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ gilt

$$E[X] = \int_0^\infty x\, f_X(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x\, \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x.$$

Mit partieller Integration $(u = x,\ dv = \lambda e^{-\lambda x} dx)$ setzt man

$$u = x, \quad dv = \lambda e^{-\lambda x}\, dx, \qquad du = dx, \quad v = -e^{-\lambda x}.$$

Dann

$$\int_0^\infty x\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[x\left(-e^{-\lambda x}\right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot \left(-e^{-\lambda x}\right) dx = 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{\lambda}.}$$

Zentraler Grenzwertsatz für Summen und Mittelwert

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Longrightarrow \quad S_n \overset{\mathrm{d}}{\approx} \mathcal{N}\left(n\,\mu,\ \sqrt{n}\cdot\sigma\right)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} S_n \quad \Longrightarrow \quad \bar{X}_n \overset{\mathrm{d}}{\approx} \mathcal{N}\left(\mu,\ \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$