

Swinging Atwood's machine

Brognoli Roberto, Garbi Luca, Libardi Gabriele

7 Marzo 2019

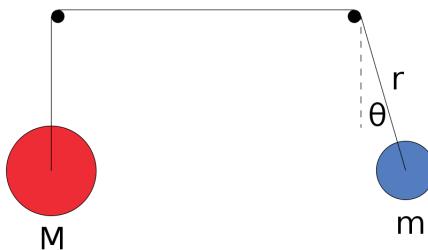


Figure 1: Pendolo di Atwood

1 Introduzione

La *Swinging Atwood's machine* è un sistema che ricorda la semplice macchina di Atwood eccetto che una delle due masse può oscillare in un piano bidimensionale producendo un sistema che, per alcuni valori dei parametri e condizioni iniziali, risulta essere caotico. Esso è infatti composto da due masse (m e M , con $M > m$) collegate da una fune inestensibile e priva di massa che può muoversi su due vincoli di raggio nullo e privi di massa, senza che le due masse possano scontrarsi tra di loro. Per studiare il moto di questo sistema non possiamo utilizzare le normali formule di Newton, perché si arriva ad un punto in cui esse non sono più sviluppabili per problemi di natura analitica in cui abbiamo un sistema con più variabili che incognite, quindi irrisolvibile. Fortunatamente la Meccanica Analitica ci permette di studiare il moto di questo sistema sfruttando la Fisica Lagrangiana e Hamiltoniana e la conservazione dell'energia meccanica.

2 Equazioni del moto

2.1 Sistema di coordinate

Innanzitutto è necessario fissare il sistema di riferimento \mathcal{I} che per semplicità assumeremo essere quello di un osservatore esterno al sistema così da poterlo considerare *inerziale*. Quindi costruiamo gli assi fissi del nostro sistema di riferimento cartesiano che chiameremo (X, Y) .

Come coordinate libere (o lagrangiane) risulta conveniente scegliere la coordinata r che rappresenta la distanza tra il perno e la massa m libera di oscillare e la coordinata θ che descrive l'angolo compreso tra r e una retta ipotetica perpendicolare al suolo. In realtà andrebbero considerate anche le altre due coordinate per la massa M , ma come si vedrà successivamente si potranno scrivere come relazioni delle coordinate per la massa m .

Scriviamo il passaggio di coordinate da cartesiane a lagrangiane:

$$\text{Per la massa } m: \begin{cases} x_m = r \sin \theta \\ y_m = -r \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{Per la massa } M: \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = +\mu = r + \text{cost} \end{cases}$$

dove per la massa M si è introdotta la coordinata ν che rappresenta lo spostamento in verticale. Tenendo conto che la corda è inestensibile si sa che la sua lunghezza è costante dunque vale $L = r + \nu + \text{cost}$ (cost è la distanza tra i due perni che rimane invariata sui moti del sistema); mentre per ipotesi del problema la coordinata x per la massa M deve essere nulla, perché si muove solo in verticale.

2.2 Posizione, velocità e energia meccanica

Quello che bisogna fare ora è esprimere i vettori posizione e velocità nelle coordinate libere per poter applicare la fisica di Lagrange. Indichiamo come (\hat{e}_x, \hat{e}_y) i versori del sistema di riferimento \mathcal{I} e chiamiamo O, P, O', P' rispettivamente i punti nello spazio occupati dal perno della massa m , dalla massa m , dal perno della massa M e dalla massa M . Possiamo scrivere

$$P - O = r \sin \theta \hat{e}_x - r \cos \theta \hat{e}_y$$

$$P - O = +\nu \hat{e}_y = +(r + \text{cost}) \hat{e}_y$$

Per calcolarsi la velocità nel sistema di riferimento \mathcal{I} bisogna derivare la relazione precedente rispetto al tempo tenendo presente che sia r che θ sono funzioni del tempo e che i versori (\hat{e}_x, \hat{e}_y) non dipendono dal tempo ma sono fissi (fissato il sistema di riferimento \mathcal{I}) e vanno dunque trattati come costanti nell'integrazione.

$$\vec{v}_m|_{\mathcal{I}} = (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_x + (-\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta) \hat{e}_y$$

$$\vec{v}_M|_{\mathcal{I}} = -\dot{r} \hat{e}_y$$

Da questa relazione si può ricavare $\vec{v}_m|_{\mathcal{I}}^2$ che servirà per il calcolo dell'energia cinetica.

$$\vec{v}_m|_{\mathcal{I}}^2 = <\vec{v}_m|_{\mathcal{I}}, \vec{v}_m|_{\mathcal{I}}> = (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta)^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2$$

$$\vec{v}_M|_{\mathcal{I}}^2 = <\vec{v}_M|_{\mathcal{I}}, \vec{v}_M|_{\mathcal{I}}> = \dot{r}^2$$

Una volta ottenute queste relazioni la cosa che resta da fare è calcolare le energie in gioco. Le forze presenti sono quella gravitazionale, le reazioni vincolari dei perni e la tensione esercitata dalla corda, ma queste ultime due non compiono lavoro quindi non verranno prese in considerazione nel calcolo dell'energia. In ultima analisi le energie che entrano in gioco nel sistema sono dunque quelle cinematiche dovute alle velocità possedute delle due masse e quelle potenziali gravitazionali sempre di entrambe le masse. Passiamo al calcolo dell'energia cinetica

$$\mathcal{T}_m|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2} m \vec{v}_m|_{\mathcal{I}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)$$

$$\mathcal{T}_M|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_M|_{\mathcal{I}}^2 = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2)$$

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}_m|_{\mathcal{I}} + \mathcal{T}_M|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) + \frac{1}{2} M (\dot{r}^2)$$

Ora il calcolo dell'energia potenziale gravitazionale

$$\mathcal{U}_m|_{\mathcal{I}} = mg y_m = -mgr \cos \theta$$

$$\mathcal{U}_M|_{\mathcal{I}} = Mg y_M = Mg(r + \text{cost})$$

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{U}_m|_{\mathcal{I}} + \mathcal{U}_M|_{\mathcal{I}} = -mgr \cos \theta + Mg(r + \text{cost})$$

2.3 Lagrangiana e equazioni del moto

Chiamando la variabile tempo t e le coordinate libere $q = (q^1, \dots, q^n)$ e le velocità di questi ultimi $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ la funzione lagrangiana è la seguente

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}(t, q, \dot{q}) = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}(t, q, \dot{q}) - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(t, q)$$

Da questa è possibile ricavarsi le equazioni del moto risolvendo il seguente sistema (equazioni di Eulero-Lagrange)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \\ \dot{q} = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

Questo sistema porta alle equazioni del moto solo se le forze coinvolte nel sistema sono conservative altrimenti va usata un'altra estensione della formula; questo perché non sarà più possibile definire i potenziali per le forze che non sono conservative. Tornando al nostro caso la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) + \frac{1}{2}M(\dot{r}^2) + mgr \cos \theta - Mg(r + cost)$$

Quello che resta da fare ora è derivare la lagrangiana per ottenere i due sistemi ognuno riferito alla coordinata libera considerata.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \\ \dot{r} = \frac{dr}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Eseguiamo prima la derivazione secondo le coordinate libere r, \dot{r} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} + M\dot{r} & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= (m+M)\ddot{r} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= m\dot{\theta}^2 r + mg \cos \theta - Mg \end{aligned}$$

Deriviamo secondo $\theta, \dot{\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= m\dot{\theta}r^2 & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= m\ddot{\theta}r^2 + 2m\dot{\theta}r\dot{r} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -mgr \sin \theta \end{aligned}$$

Ora basta sostituire i diversi pezzi all'interno dei sistemi.

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r - mg \cos \theta + Mg = 0 \\ \dot{r} = \frac{dr}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} m\ddot{\theta}r^2 + 2m\dot{\theta}r\dot{r} + mgr \sin \theta = 0 \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Quello che abbiamo ottenuto è, come ci si aspettava, delle equazioni differenziali del secondo ordine (proprio come le equazioni di Newton). Questi sono due sistemi di equazioni differenziali accoppiate, che significa che non è possibile risolverli singolarmente. Unendo quindi i due sistemi troviamo un sistema a quattro equazioni differenziali accoppiate, che risulta impossibile da risolvere analiticamente, mentre è possibile farlo numericamente al computer. Per tirasi via un parametro facciamo la seguente sostituzione $\mu = \frac{M}{m}$.

$$\begin{cases} (1+\mu)\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r + g(\mu - \cos \theta) = 0 \\ \dot{r} = \frac{dr}{dt} \\ \ddot{\theta}r + 2\dot{\theta}\dot{r} + g \sin \theta = 0 \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Il sistema ottenuto è anche scrivibile in forma normale.

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{\dot{\theta}^2 r - g(\mu - \cos \theta)}{(1+\mu)} \\ \dot{r} = \frac{dr}{dt} \\ \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{\theta}\dot{r} + g \sin \theta}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Da notare che se in queste equazioni poniamo a zero l'accelerazione, la velocità angolare e l'angolo ($\ddot{r} = 0, \dot{\theta} = 0, \theta = 0$), quello che otteniamo è la macchina semplice di Atwood, che consiste in due masse, soggette alla forza peso, collegate assieme da una fune sorretta da due carrucole (in prima approssimazione due vincoli). L'equazione del moto della massa m infatti risulta

$$\ddot{r} = -g \frac{\mu - 1}{\mu + 1}$$

2.4 Hamiltoniana

Scriviamo ora la Hamiltoniana del sistema, che coincide con l'energia meccanica del sistema e in questo caso particolare risulta essere un integrale primo (si conserva) poiché \mathcal{L} non dipende esplicitamente dal tempo .

$$\mathcal{H}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 - mgr \cos \theta + Mg(r + cost)$$

A questo punto per continuare l'analisi di Hamilton dobbiamo cambiare coordinate tramite le trasformazioni di Legendre:

$$\begin{cases} t = t \\ q^k = q^k \\ p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \end{cases}$$

Nel nostro caso θ e r restano gli stessi; vanno invece introdotte le due nuove coordinate p_r e p_θ che sono definite utilizzando le trasformazioni definite sopra

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \dot{r}(m + M)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}r^2$$

Tornando alla Hamiltoniana, quello che si fa ora è cercare di ricondursi ad una funzione che dipende dalle nuove coordinate che vogliamo utilizzare, ovvero passare da una forma del tipo $\mathcal{H}|_{\mathcal{I}}(t, q, \dot{q})$ a una di questo genere $\mathcal{H}|_{\mathcal{I}}(t, q, p)$. Questo lo otteniamo semplicemente sostituendo le nuove coordinate p_r e p_θ a quelle \dot{r} e $\dot{\theta}$. Quello che otteniamo è

$$\mathcal{H}|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m+M} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mr^2} - mgr \cos \theta + Mg$$

Ora che abbiamo la relazione della hamiltoniana possiamo trovare le equazioni del moto applicando il seguente sistema che ci permette di trovare le equazioni differenziali che ci servono:

$$\begin{cases} \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \\ \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \end{cases}$$

Applicando questo sistema, quello che otteniamo è un sistema di equazioni differenziali accoppiate di primo ordine (le equazioni di Eulero-Lagrange sono di secondo ordine). Anche questo sistema non è risolvibile analiticamente, ma risulta più comodo da risolvere numericamente rispetto a quello trovato delle equazioni del moto di Eulero-Lagrange. Nella nostra analisi utilizziamo quindi queste ultime. Tornando al problema le equazioni differenziali che si ottengono sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m+M} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + mg \cos \theta - Mg \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta \end{cases}$$

2.5 Punti di stabilità

Cerchiamo ora di trovare eventuali punti stazionari del problema. Come stabilità qui si intende quella di Lyapunov. Questi li possiamo trovare lavorando con l'energia potenziale; nello specifico c'è da risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che l'energia potenziale del sistema è data solo da quella gravitazionale $\mathcal{U}|_{\mathcal{I}} = -mgr \cos \theta + Mg(r + cost)$, quindi

$$\begin{cases} -mg \cos \theta + Mg = 0 \\ mgr \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Dal sistema si ottiene l'espressione $m^2 g^2 r^2 (1 - \cos^2 \theta) = m^2 g^2 r^2 (1 - \mu^2) = 0$, e questa si annulla per $r = 0$ ed angolo qualsiasi oppure se $\cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow M = m$. La prima soluzione significa fisicamente che la massa m dista zero dal perno, quindi non ha nemmeno la possibilità di muoversi come un pendolo, invece la seconda soluzione dice che il sistema sarà in equilibrio per ogni lunghezza della corda purchè le masse M e m siano uguali ed in più l'angolo θ sia nullo.
Adesso c'è da verificare se questi due punti sono di equilibrio stabile o instabile. Possiamo quindi studiare la positività o la negatività dell'hessiana nelle due configurazioni.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial r} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & mg \sin \theta \\ mg \sin \theta & mgr \cos \theta \end{pmatrix}$$

Nel primo punto in cui pongo $r = 0$ ottengo dall'hessiana un determinante $\det H = -m^2 g^2 \sin^2 \theta$ che è negativo; siamo dunque in presenza di un punto di sella perciò abbiamo un punto di equilibrio instabile. Per il secondo punto abbiamo invece $\det H = 0$; la nostra matrice risulta indefinita e per questo non possiamo dire nulla matematicamente.

3 Configurazioni del sistema

Dalle equazioni del moto ricavate nel paragrafo precedente si può vedere che per risolvere questo sistema c'è bisogno di 4 condizioni iniziali, cioè $\rho(0)$, $\dot{\rho}(0)$, $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, se consideriamo il rapporto tra le masse un parametro noto e fisso mentre si sta svolgendo il problema. Quello che risulta dall'analisi al calcolatore sono delle traiettorie del sistema molto singolari. Ovviamente queste traiettorie cambiano al cambiare delle condizioni iniziali, ma l'analisi forse più interessante è quella che si ottiene mantenendo inalterate le condizioni iniziali e risolvendo le diverse traiettorie del sistema al variare del rapporto delle masse μ .

Per la risoluzione delle equazioni differenziali al computer è stato utilizzata una formula Runge-Kutta (4,5) implementata in MATLAB, mantenendo un errore relativo minore di 10^{-12} . Sotto sono riportati tre grafici rappresentanti rispettivamente lo sviluppo della variabile $r(t)$ e $\theta(t)$ in funzione del tempo (20 s) per $\mu = 2$ ed infine la traiettoria totale sul piano $x-y$.

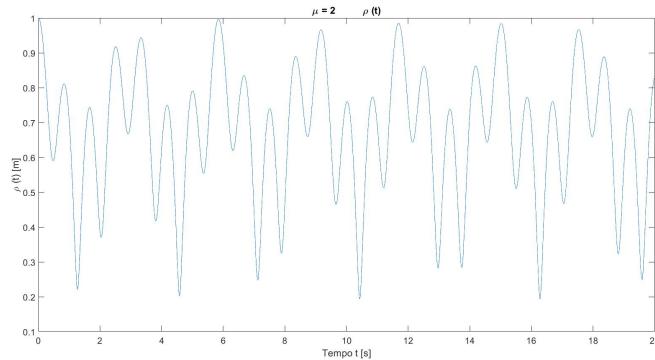


Figure 2: Grafico di r in funzione del tempo, per 20 s.

Di seguito invece sono riportati solo alcuni esempi in cui sono state fissate le condizioni iniziali: $\rho(0) = 1 \text{ (m)}$ $\dot{\rho}(0) = 0 \text{ (m/s)}$, $\theta(0) = \pi/2 \text{ (rad)}$ $\dot{\theta}(0) = 0 \text{ (rad/s)}$
e si è variato solo il rapporto delle masse μ .

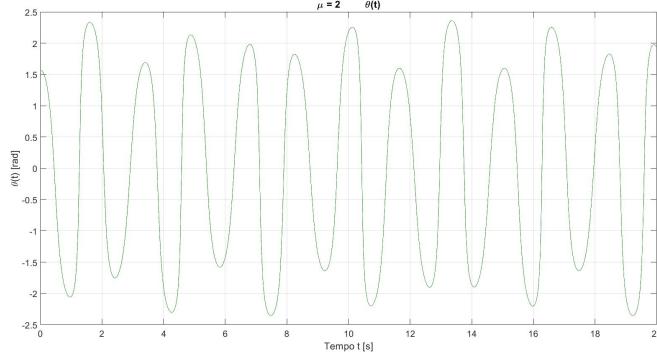


Figure 3: Grafico di θ in funzione del tempo, per 20 s.

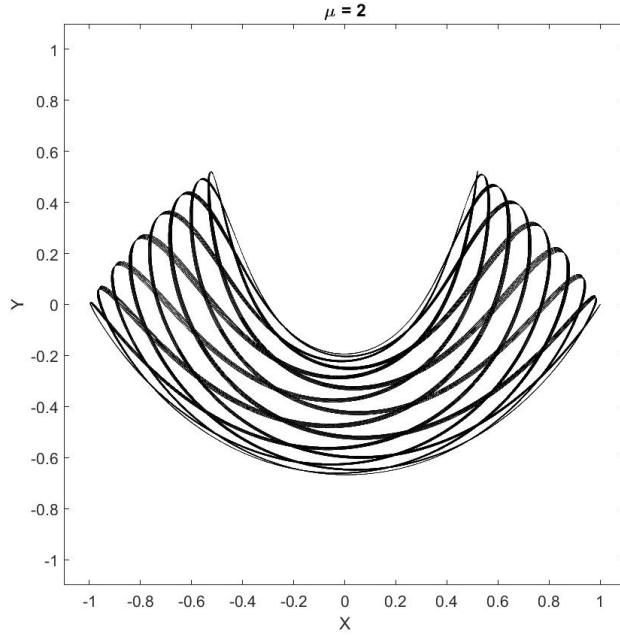


Figure 4: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 2$ in un tempo $t = 100s$

4 Limite

Si può dimostrare che per ogni r, θ iniziali le traiettorie della massa oscillante m posso essere racchiuse da delle sezioni coniche dipendenti dai parametri iniziali. Queste sezioni possono essere ricavate sfruttando la conservazione dell'energia, ricavata precedentemente.

$$E|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 - mgr \cos \theta + Mgr$$

Partiamo considerando le condizioni iniziali $r = r_0$ e $\theta = \theta_0$. Ci mettiamo nell'approssimazione in cui le velocità sono nulle (situazione di partenza), con $\dot{r} = 0$ e $\dot{\theta} = 0$. In questa situazione l'espressione dell'energia meccanica diventa:

$$E|_{\mathcal{I}} = -mgr_0 \cos \theta_0 + Mgr_0$$

Facendo delle sostituzioni appropriate ci possiamo ridurre alla seguente forma:

$$E|_{\mathcal{I}} = mgr_0(-\cos \theta + \mu) \Leftrightarrow \frac{E}{mg\mu} = r_0 \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{\mu}\right)$$

Giunti a questa forma ci si può ricondurre alle equazioni delle sezioni coniche in coordinate polari

$$\rho(1 + e \cos \varphi) = l$$

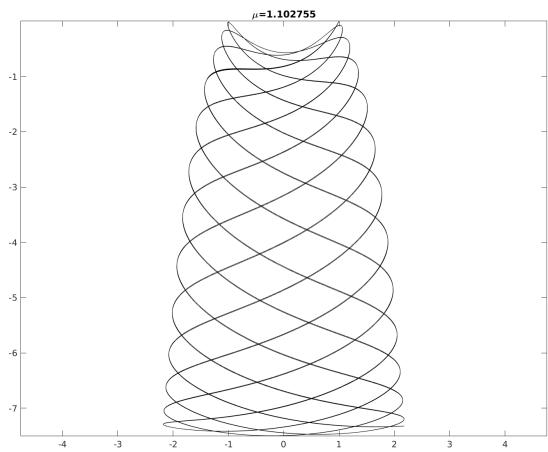


Figure 5: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 1.102755$ in un tempo $t = 100 s$

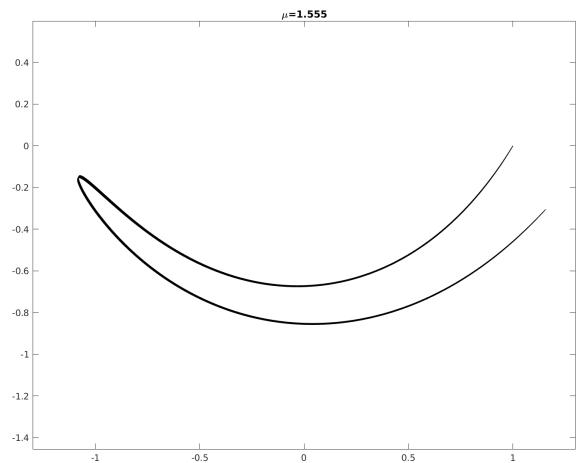


Figure 6: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 1.555$ in un tempo $t = 100 s$

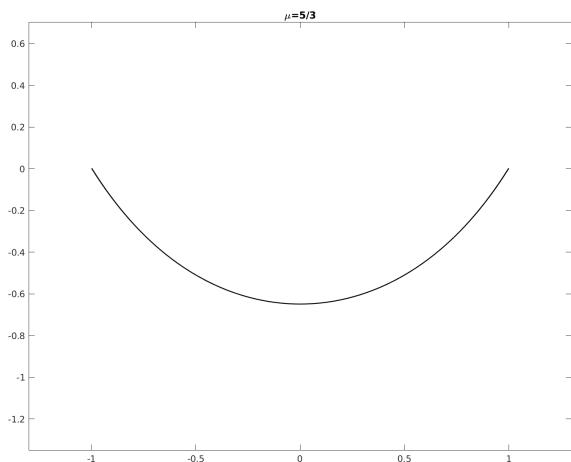


Figure 7: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 5/3$ in un tempo $t = 100 s$, traiettoria del sorriso

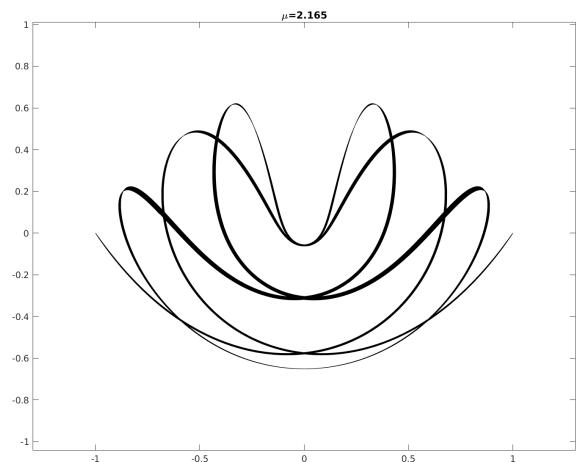


Figure 8: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 2.165$ in un tempo $t = 100 s$

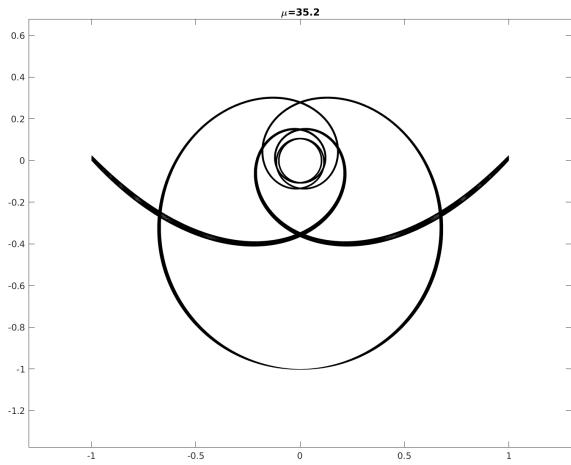


Figure 9: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 35.2$ in un tempo $t = 100 s$

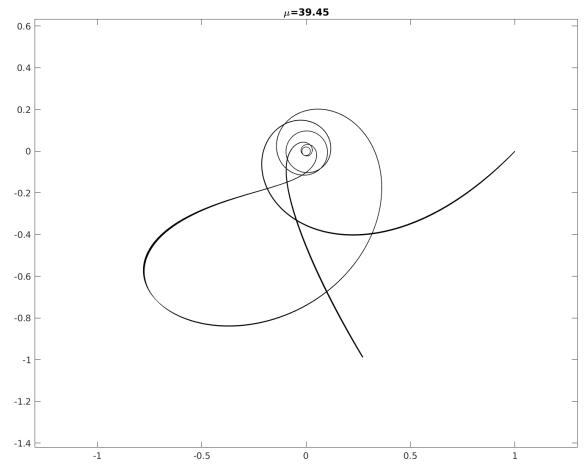


Figure 10: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 39.45$ in un tempo $t = 100 s$

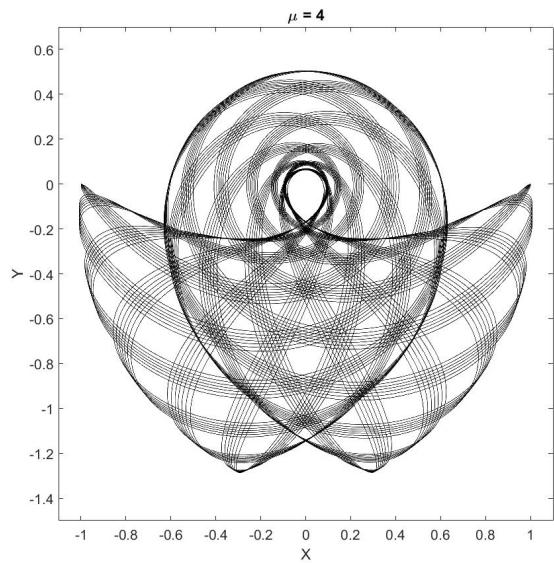


Figure 11: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 4$ in un tempo $t = 100 s$

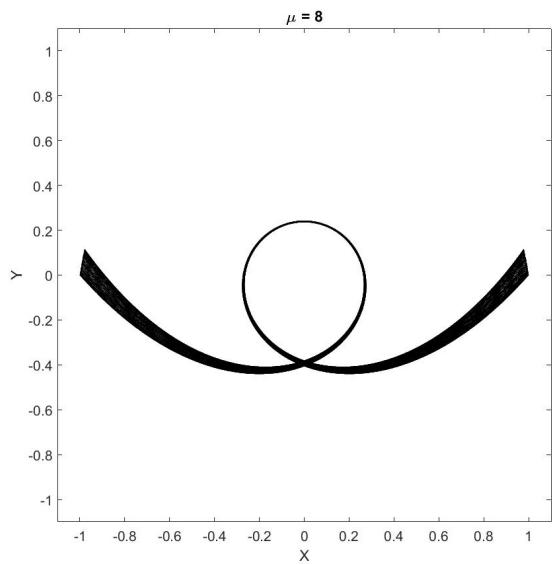


Figure 12: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 8$ in un tempo $t = 100 s$

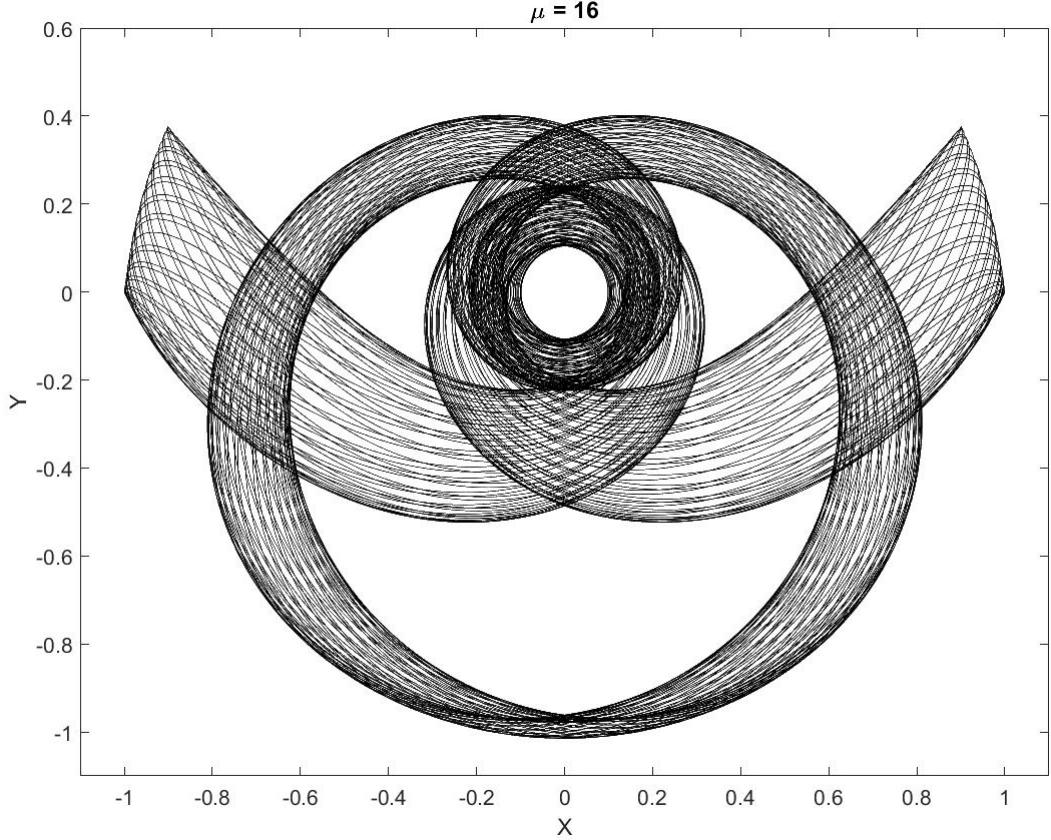


Figure 13: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 16$ in un tempo $t = 100 s$

dove abbiamo fatto le seguenti sostituzioni per ricondurci al nostro caso:

$$\rho \equiv r_0, \varphi \equiv \theta_0, e \equiv -\frac{1}{\mu} \text{ e } l \equiv \frac{E}{mg\mu}.$$

La e rappresenta l'eccentricità, ed è questo parametro che determina se la sezione conica è una circonferenza ($e = 0$), un'ellisse ($0 < e < 1$), una parabola ($e = 1$) o un'iperbole ($e > 1$). Da notare che il caso $e = 0$ (cioè una circonferenza) lo otteniamo solo se $\mu \rightarrow \infty$, quindi o se M è una massa finita e $m \rightarrow 0$ (circonferenza degenere) oppure se m è una massa finita e $M \rightarrow \infty$; questo fisicamente rappresenta un pendolo con r fissata e costante (caso pendolo semplice).

Esempi di traiettorie del sistema in diverse configurazioni, rappresentate con la sezione conica limite.

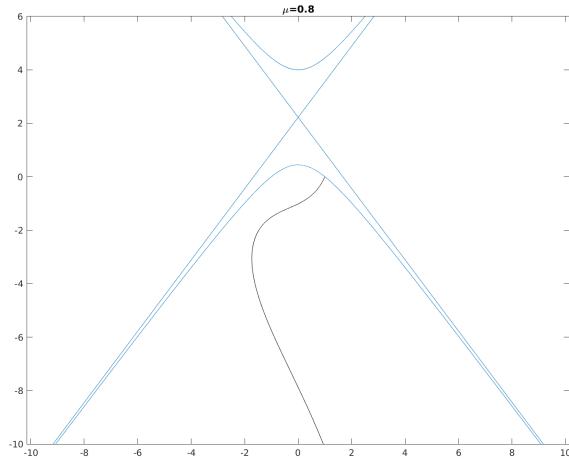


Figure 14: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 0.8$ in un tempo $t = 100 s$, iperbole

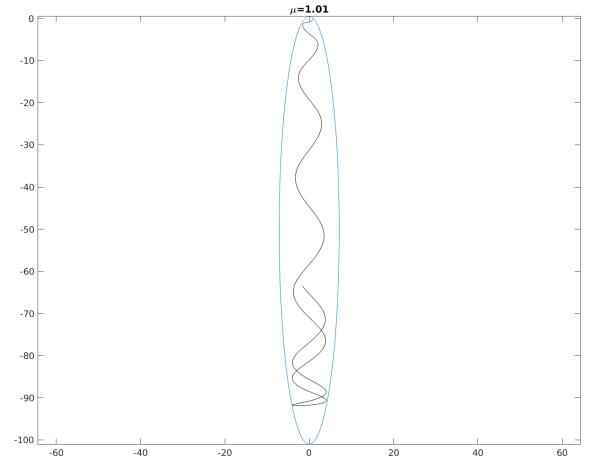


Figure 15: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 1.01$ in un tempo $t = 100 s$, ellisse

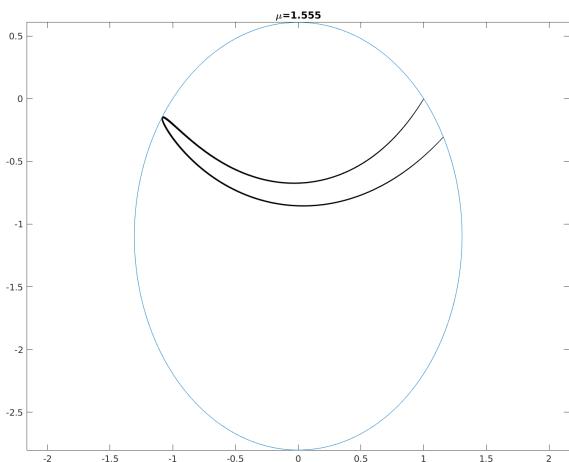


Figure 16: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 1.555$ in un tempo $t = 100 s$

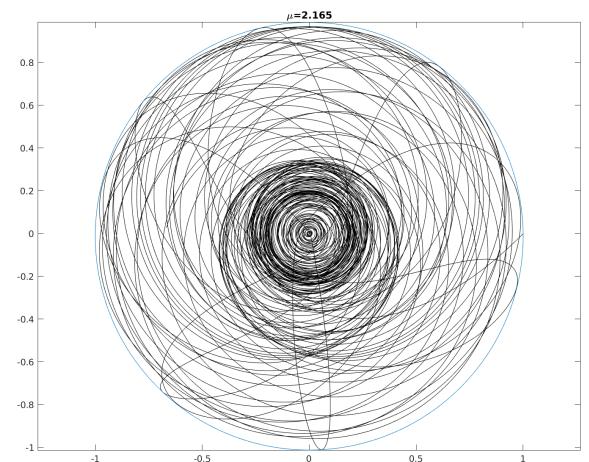


Figure 17: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 2.165$ in un tempo $t = 100 s$

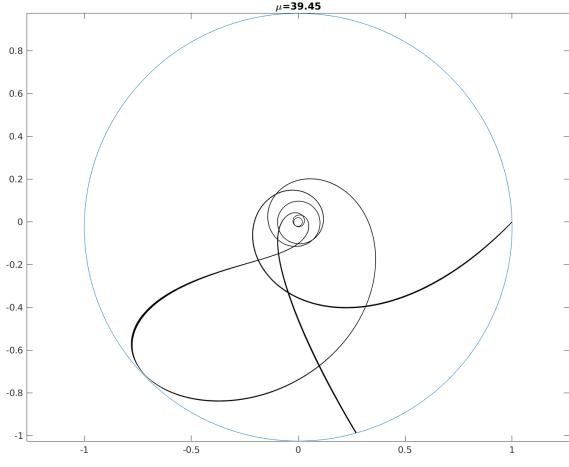


Figure 18: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 39.45$ in un tempo $t = 100 s$

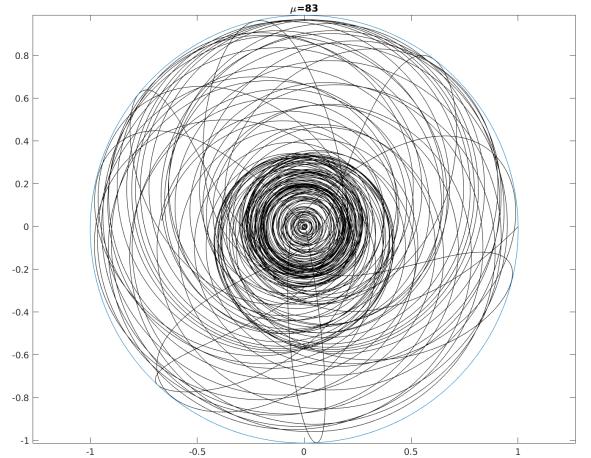


Figure 19: Traiettoria tracciata dalla massa m nella configurazione $\mu = 83$ in un tempo $t = 100 s$

5 Sistema caotico

La *Swinging-Atwood's machine* per alcune configurazioni risulta essere un sistema caotico. Infatti partendo da condizioni iniziali leggermente differenti, il sistema si sviluppa nel tempo in modo completamente diverso ed imprevedibile. Per determinare quanto un sistema sia caotico rispetto a dei parametri studiamo il coefficiente di Lyapunov.

Quello che abbiamo per determinare il grado di caoticità del sistema è la seguente analisi. Si studia l'andamento del sistema partendo da delle condizioni iniziali, poi lo si fa partendo da delle condizioni iniziali leggermente diverse. Successivamente grafichiamo la differenza tra lo sviluppo delle coordinate lagrangiane libere partendo dalle due condizioni iniziali in funzione del tempo. Vediamo che l'andamento di questa differenza $\delta(t)$ risulta esponenziale rispetto al tempo, seguendo una legge del tipo

$$\delta(t) \approx \delta(0)e^{\lambda t},$$

dove λ sarà proprio l'esponente di Lyapunov. Una volta che ci siamo calcolati il $\delta(t)$ confrontando gli sviluppi del sistema nei 2 casi diversi possiamo trovarci λ andando a fare una regressione lineare sull'equazione

$$\log\left(\frac{\delta(t)}{\delta(0)}\right) = \lambda t.$$

Per alcuni valori di rapporto tra masse riportiamo il grafico della traiettoria di m sul piano bidimensionale partendo dalle due configurazioni iniziali differenti di $\delta(0) = 2 \times 10^{-8}$. Il timespan di evoluzione è 35 secondi.

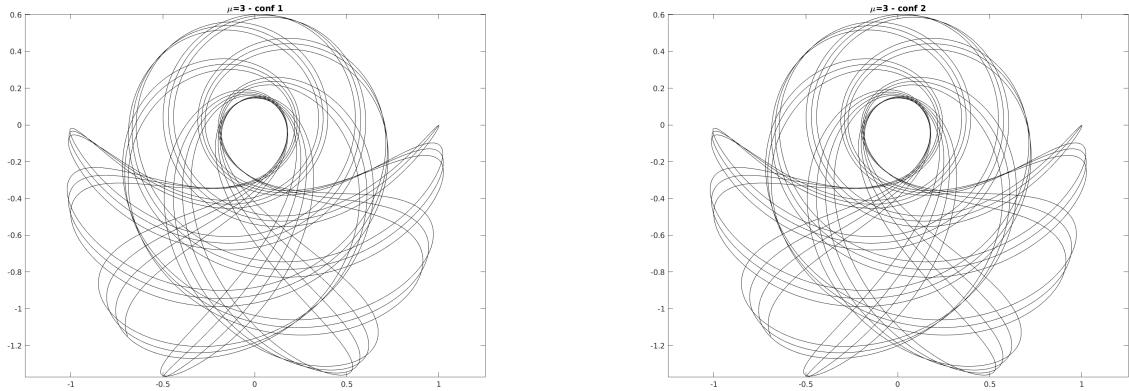


Figure 20: Confronto sistema nelle due configurazioni con $\mu = 3$ che differiscono nelle condizioni iniziali di un $\delta(0) = 2 \times 10^{-8} s$.

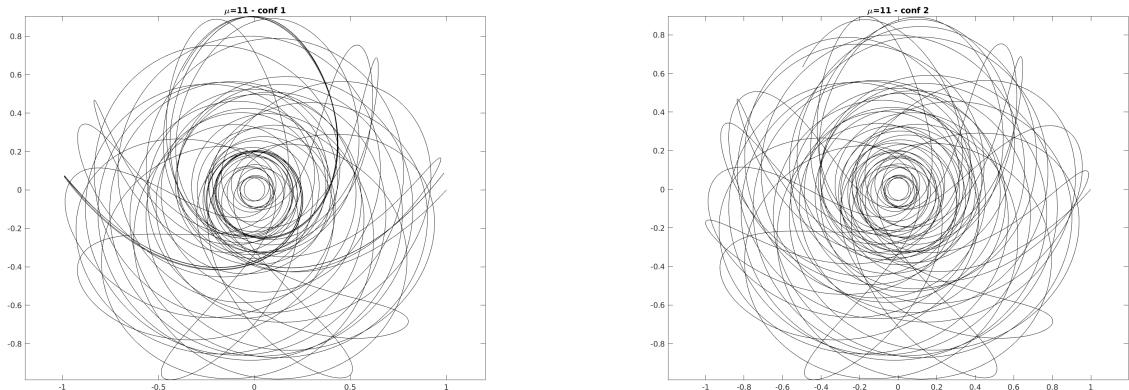


Figure 21: Confronto sistema nelle due configurazioni con $\mu = 11$ che differiscono nelle condizioni iniziali di un $\delta(0) = 2 \times 10^{-8} s$.

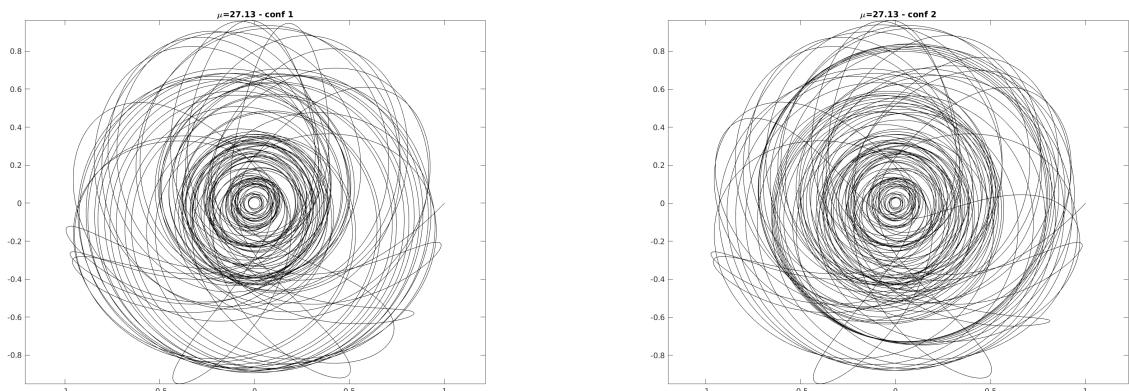


Figure 22: Confronto sistema nelle due configurazioni con $\mu = 27.13$ che differiscono nelle condizioni iniziali di un $\delta(0) = 2 \times 10^{-8} s$.

Di seguito invece ci sono i grafici, rispettivi ai valori di massa mostrati sopra, dell'evoluzione di δ nel tempo, con la linea di regressione trovata (la scala verticale è infatti logaritmica). Notiamo che da un certo istante in poi, tipicamente dopo i 25-30 secondi il δ rimanga costante, questo è chiaramente dovuto al fatto che il nostro sistema è limitato quindi la differenza tra i sistemi non può divergere nel tempo.

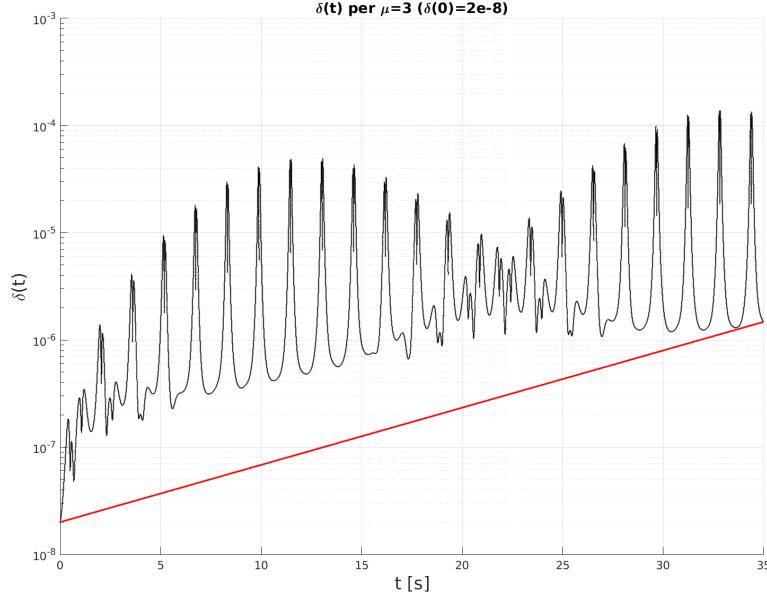


Figure 23: δ in funzione del tempo per $\mu = 3$ è presente inoltre anche la retta di regressione.

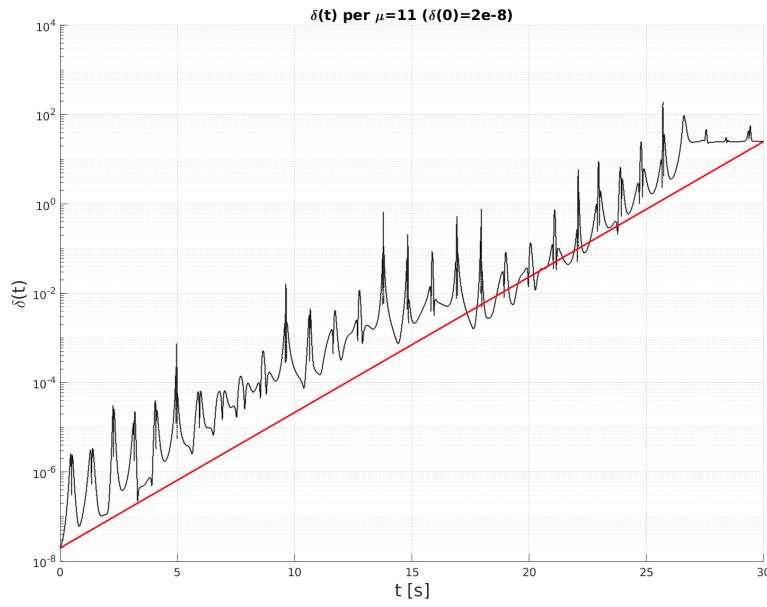


Figure 24: δ in funzione del tempo per $\mu = 11$ è presente inoltre anche la retta di regressione.

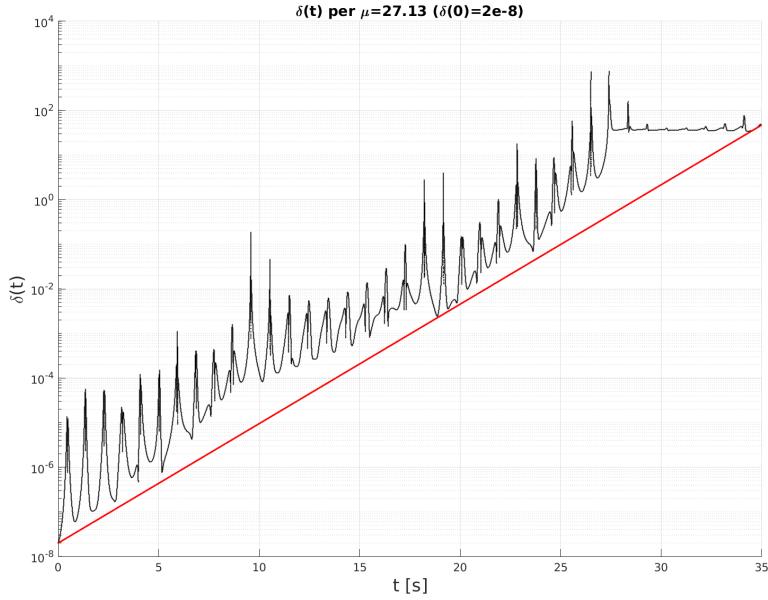


Figure 25: δ in funzione del tempo per $\mu = 27.13$ è presente inoltre anche la retta di regressione.

Notiamo come talvolta la discrepanza tra le due traiettorie sia molto visibile, anche solo ad occhio, mentre talaltra sia molto più debole, ciò dipende dal rapporto tra le masse, il quale influenza in modo apparentemente casuale la caoticità del nostro sistema dinamico. Possiamo vedere meglio questo fatto osservando i grafici seguenti che rappresentano l'esponente di Lyapunov del sistema in funzione del rapporto tra masse. Il timespan per il calcolo dell'esponente è stato fissato a 35 secondi per tutti i valori di μ , sono stati presi 1000 valori di rapporto fra masse: da 0.1 a 100, distribuiti uniformemente.

Nel primo caso abbiamo preso un $\delta(0) = 2 \times 10^{-8}$ uniforme per tutte le coordinate libere, nel secondo $\delta(0) = 2 \times 10^{-6}$, mentre per gli ultimi 2 grafici $\delta(0) = 10^{-8}$ mantenendo invariati angolo e velocità angolare iniziali, ma variando nel primo caso solo il raggio, nel secondo solo la velocità radiale.

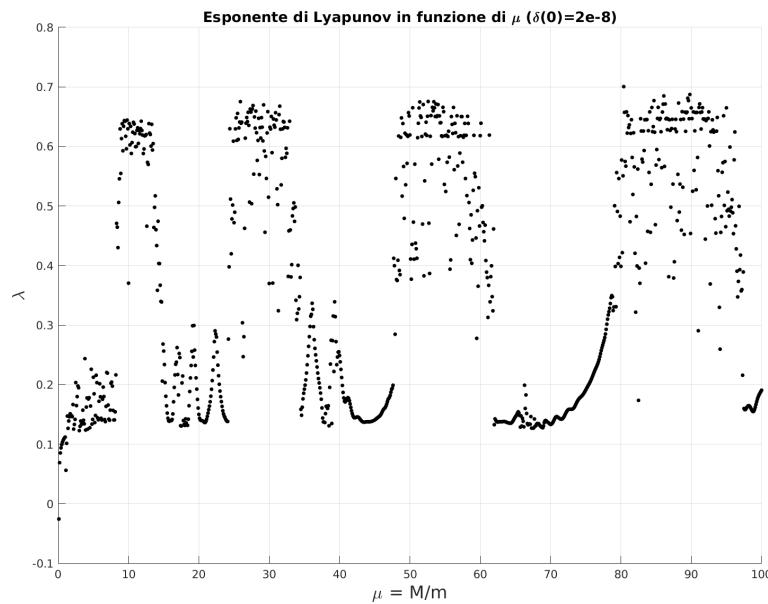


Figure 26: Esponente di Lyapunov in funzione della massa, condizioni iniziali differenti di 2×10^{-8} .

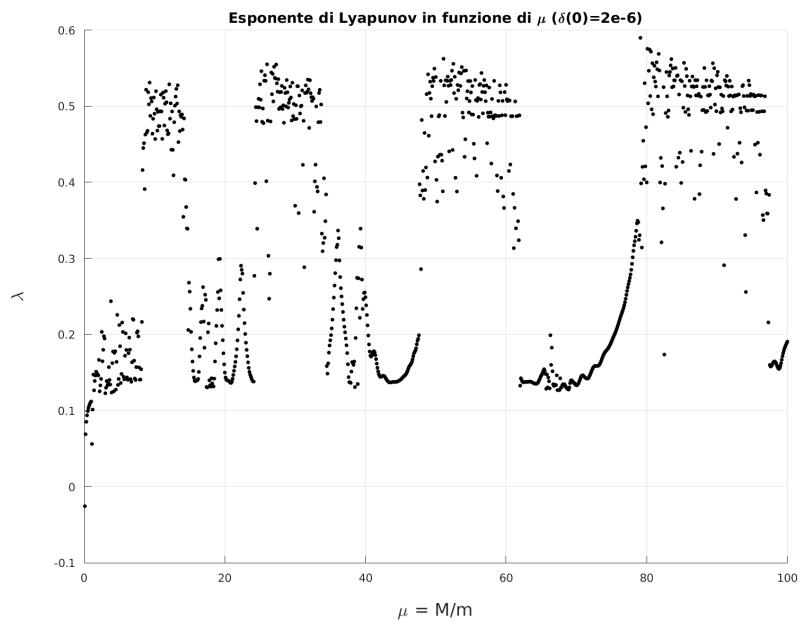


Figure 27: Esponente di Lyapunov in funzione della massa, condizioni iniziali differenti di 2×10^{-6} .

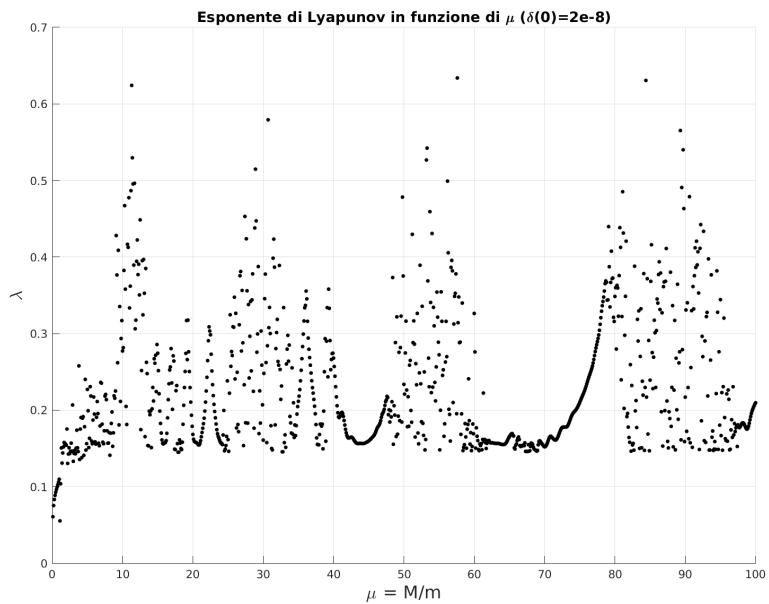


Figure 28: Esponente di Lyapunov in funzione della massa, raggio iniziale differente del 1×10^{-8} .

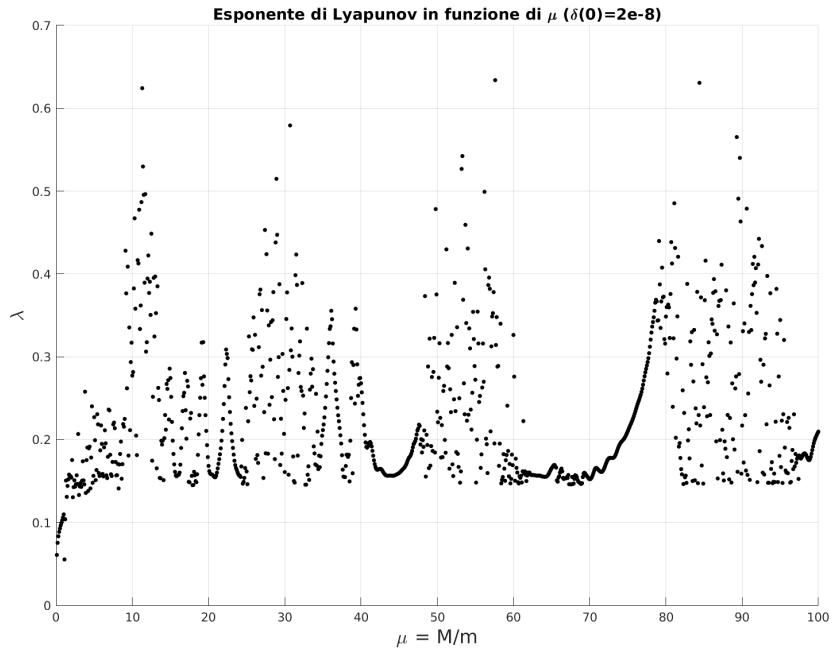


Figure 29: Esponente di Lyapunov in funzione della massa, velocità radiale iniziale differente del 1×10^{-8} .

Chiaramente notiamo che per valori di rapporto fra masse che sia inferiore a 1, quello che succede è che il sistema non è poi così imprevedibile (tanto che l'esponente è negativo), infatti se la massa m è maggiore di M (o di poco superiore) la tensione del filo generata dalla forza centripeta viene subito vinta da quella di gravità finendo il sistema in una delle configurazioni di equilibrio descritte prima.