



Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare

- Appunti del corso -

Garbi Luca, Libardi Gabriele

Date: 23 agosto 2020

University of Trento
Department of Physics
Via Sommarive 14, 38123
Povo (TN), Italy

Indice

1	Unità di misura	1
2	Percorso storico	2
2.1	Radioattività	3
2.1.1	Decadimento α - Modello di Gamow	8
2.1.2	Decadimento β (Rutherford e Soddy - 1903)	10
2.2	Fissione	15
2.3	Fusione	19
3	Il potenziale nucleare	22
3.1	Il potenziale di Yukawa	22
3.2	L'isospin	25
3.3	Termini di spin-orbita e tensoriale	33
3.4	L'equazione di Schrödinger per potenziali centrali	35
3.5	L'equazione di Schrödinger per potenziali non centrali	36
3.6	Momento magnetico	38
4	Sezioni d'urto	45
4.1	Sezione d'urto totale	45
4.2	Sezione d'urto differenziale - <i>electron scattering</i>	47
4.3	Relatività	63
4.4	Fattori di forma	66
4.5	Invarianti relativistici	76
5	Antiparticelle	81
6	Risonanza	86
7	Quarks	97
8	Scattering	105

1 Unità di misura

Lezione 21 Febbraio 2020

Per le unità di misura durante il corso non verrà utilizzato il Sistema Internazionale. Viste le dimensioni che intendiamo studiare nell'ambito della fisica nucleare, come unità spaziale si useranno i femtometri (o fermi) fm ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$), mentre per l'energia verranno usati gli elettronvolt eV ($1 \text{ J} = 6.241 \times 10^{18} \text{ eV}$). Andiamo a considerare le principali costanti fisiche in questo contesto:

$$\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.582 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

$$c = 2.998 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.998 \times 10^{23} \frac{\text{fm}}{\text{s}}$$

$$\hbar c = 19.733 \times 10^7 \text{ eV} \cdot \text{fm} = 197.33 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

Per il sistema di unità di misura che si vuole utilizzare, andiamo ad impostare $\hbar c$ uguale ad uno, cioè stiamo sfruttando l'equivalenza massa energia, andando a normalizzare la costante che unisce queste due quantità e conferisce loro le unità di misura scelte.

$$\boxed{\hbar c = 1}$$

In questo modo valgono le seguenti uguaglianze

$$197.33 \text{ MeV} = 1 \text{ fm}^{-1} \quad 197.33 \text{ fm} = 1 \text{ MeV}^{-1}$$

Con questo sistema, nei calcoli si possono tralasciare tutti i c e \hbar , aggiustando solo alla fine le unità di misura aggiungendo queste costanti. Facciamo degli esempi per fissare le idee. Calcoliamo la massa del protone M_p .

$$M_p = 940 \text{ MeV} = mc^2 \quad \Leftrightarrow \quad m = 940 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$m = 940 \times 10^6 \frac{1}{6.241 \times 10^{18}} \frac{1}{(2.998 \times 10^8)^2} \frac{\text{J} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2} = 16.758 \times 10^{-28} \text{ Kg}$$

Ora consideriamo il momento di un protone espresso in questo sistema di misura e lo convertiamo nel conosciuto SI.

$$p = 10 \frac{\text{MeV}}{c} = \frac{10 \times 10^6}{6.241 \times 10^{18}} \frac{1}{2.998 \times 10^8} \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{m}} = 0.05 \times 10^{-19} \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{m}}.$$

In questo modo possiamo calcolare la velocità di un protone con quella quantità di moto, il tutto espresso nel SI:

$$v = \frac{0.05 \times 10^{-19}}{16.758 \times 10^{-28}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.03 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ora calcoliamo la velocità di un protone/elettrone con un'energia cinetica (non totale) di $E_k = 10 \text{ MeV}$. Bisogna ricordare le relazioni di energia nel caso di particelle relativistiche (massa invariante m).

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \quad \text{se } p = 0 \quad \Rightarrow \quad E = mc^2$$

$$\begin{aligned} T &= E - mc^2 = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{m^2c^4}} - mc^2 = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2c^2}{m^2c^4} + \dots \right) - mc^2 \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2} mc^2 \frac{p^2c^2}{m^2c^4} - mc^2 = \frac{p^2}{2m} \end{aligned}$$

Otteniamo così l'approssimazione classica del legame momento-energia.

2 Percorso storico

Percorreremo a grandi linee le tappe fondamentali del percorso storico che ha portato la conoscenza del mondo nucleare dal 1800 fino ai giorni nostri. Abbiamo seguito a lezione dei documenti di articoli ufficiali di alcuni importanti scienziati.

- 1811, Concetto atomico di Avogadro e moli;
- 1867/1868, Tavola di Mendeleev, organizza gli elementi conosciuti in base a sostanze che hanno caratteristiche simili;
- Ioni: particelle che possiedono una carica di un numero intero proporzionale ad un Faraday;
- Corpuscolarità di massa e carica;
- Esperimenti sui gas, normalmente un gas non conduce, ma a pressioni basse, questo conduce e si crea un filo luminoso e una fluorescenza agli estremi di un'ampolla;
- La fine dell'Ottocento vede un fiorire di esperimenti sui raggi catodici;
- 1895, Röntgen scopre i raggi X;
- Durante i seminari di Röntgen, Becquerel si chiede se, forse, i raggi X siano delle proprietà delle sostanze fosforescenti, visto che era dimostrato che non sono raggi catodici;
- Altre sostanze, oltre a quelle fosforescenti, davano risultati analoghi (ogni sostanza contenente uranio), Rutherford si chiedeva se fosse di fronte ad un'altro tipo di fosforescenza;
- Madame Curie classifica i raggi in tre classi:

- α , poco penetranti, poco dipendenti dai campi esterni, la maggior parte dei raggi;
 - β , meno assorbibili degli α , deviati come raggi catodici (oggi si sa essere elettroni);
 - γ , raggi non deviabili, che si comportano come raggi X;
- I raggi X erano prodotti da altri materiali oltre all'uranio (torio);
 - Si pensava che l'uranio puro fosse quello che creava più raggi X, ma esistevano composti più forti dell'uranio puro. Idea di M. Curie, forse esistono elementi più radioattivi dell'uranio, lei scoprì il radio;
 - Radioattività è una proprietà atomica della materia;
 - Da questo si è riuscito a riempire molti buchi della tavola di Mendeleev. Ipotesi fondamentale: ci devono essere nuovi elementi radioattivi, la maggior radioattività non è dovuta ad una combinazione, ma alla presenza di un nuovo elemento;
 - Oggi sappiamo che tutti gli atomi possiedono un'energia latente nel nucleo che può essere liberata;
 - Quando si libera una radiazione α, β, γ , il nucleo perde una particella, ma c'è anche una trasmutazione, quindi gli atomi cambiano elemento (scoperta che la radiazione α è il nucleo dell'elio). Per questo motivo non si trovavano facilmente elementi nuovi (questi si creavano per la radioattività).

2.1 Radioattività

Lezione 12 Marzo 2020

Lettura testi originali di M.Curie e E.Rutherford. La legge dei decadimenti. Interpretazione statistica. Vita media e tempo di dimezzamento. Definizione di attività e unità di misura. Il decadimento alpha.

I raggi α, β, γ hanno un'energia dell'ordine dei MeV. Inizialmente non si sa cosa genera una tale energia, si immagina che queste particelle siano già presenti nell'atomo (siamo nel 1905 e Rutherford ancora non conosce la forma dell'atomo grazie al suo esperimento). Si pensa improbabile che l'energia provenga dall'esterno.

Legge della trasformazione radioattiva

Osservazione: indipendentemente dal tipo di radiazione e sia dalla sua produzione, in tutti i casi in cui si è studiato un elemento radioattivo, l'attività decresce con il tempo in progressione geometrica.

$$\frac{I_t}{I_0} = e^{-\lambda t}$$

2.1 Radioattività

con λ costante e dove I_0, I_t sono rispettivamente la corrente costante di ionizzazione al tempo 0 ed al tempo t . La corrente I è proporzionale al numero di ioni, quindi al numero n di particelle ionizzanti, vale

$$\frac{n_t}{n_0} = e^{-\lambda t}$$

Il numero di sistemi (atomi radioattivi) N_t che rimangono inalterati (non hanno emesso alcun raggio ionizzante) al tempo t , si calcola

$$N_t = \int_t^\infty n_t dt = \frac{n_0}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

Qui N_0 lo ottengo ponendo $t = 0$,

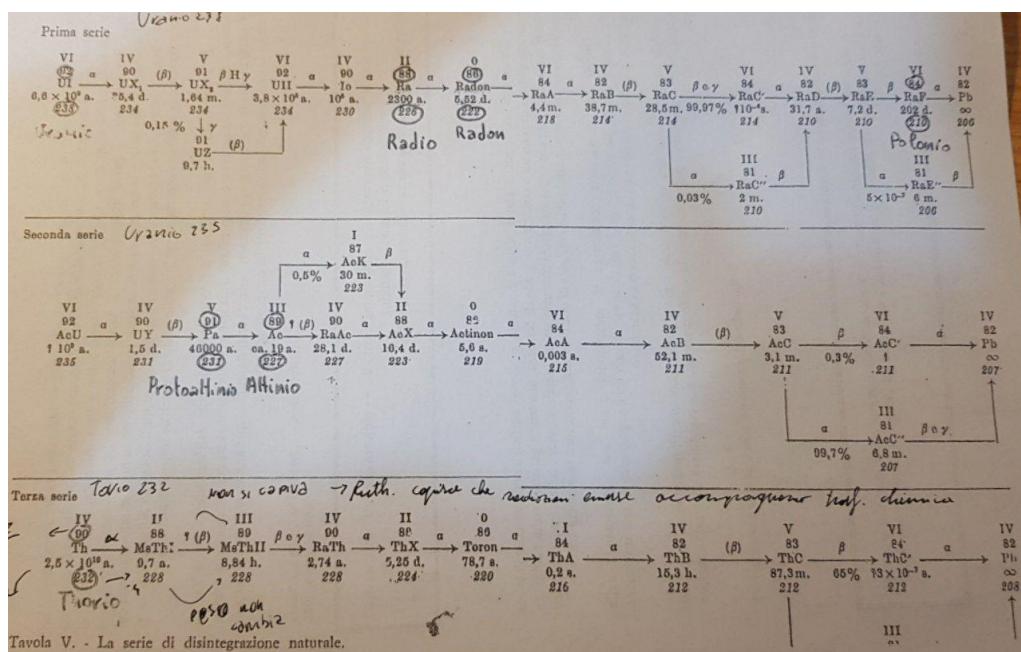
$$N_0 = \frac{n_0}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

cioè abbiamo trovato il numero di atomi inalterati che decresce esponenzialmente nel tempo. Possiamo esprimere la stessa relazione differenziando per il tempo ambo i termini:

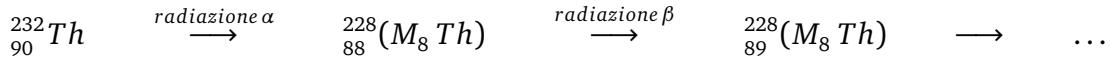
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_t$$

e questa relazione esprime che la velocità di trasformazione del sistema è proporzionale alla quantità che rimane da trasformare.

Tavola di disintegrazione naturale



Esempio Torio (Th):



Il torio emette una radiazione α , quindi perde un nucleo di elio, allora il suo numero atomico passa da 90 a 88, mantenendo la carica del torio, quindi il nuovo ione sarà carico $2e^-$. Successivamente lo ione emette una radiazione β , quindi rilascia un elettrone, lo ione così sarà carico $1e^-$. La massa deve restare la stessa, e affinché il nuovo ione possa restare neutro, un neutrone (neutro) deve convertirsi in un protone ($1e^+$), in questo modo l'atomo che si ottiene passerà ad un numero atomico di 89, e sarà neutro.

Questa è la conclusione che si trae ai giorni nostri, mentre in passato vigeva molta confusione e non si sapeva cosa accadesse. La conclusione di Rutherford fu che le radiazioni α, β accompagnano la reazione chimica; cioè se avviene la reazione di un elemento, questo si trasforma (cambia posto nella tavola di Mendeleev). Questo fenomeno è da sempre il sogno degli alchimisti, cioè si può trasformare un elemento chimico, una volta che viene emessa una radiazione. Negli elementi radioattivi questo avviene spontaneamente, ma in laboratorio si può fare su molti altri elementi.

Torniamo a considerare il numero N di particelle che rimangono inalterate al tempo t e la sua forma differenziale,

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$$dN = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = -\lambda N(t) dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{N_0} = -\lambda e^{-\lambda t} dt = -P(t) dt$$

dove $P(t)$ è la probabilità che hanno questi atomi di decadere, chiaramente non si sa precisamente quale atomo decadrà, ma si può conoscere e studiare la frequenza con la quale questo decadimento avviene. Andiamo ora a fare in modo che $P(t)$ si possa considerare come una probabilità, cioè ci assicuriamo che il suo integrale lungo il tempo risulti uno, quindi verifichiamo la sua normalizzazione,

$$\int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty dt \lambda e^{-\lambda t} = \lambda \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right)_0^\infty = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1$$

Calcoliamo ora il tempo medio in cui un elemento rimane tale (vita di tempo medio τ),

$$\tau = \frac{\int_0^\infty P(t)t dt}{\int_0^\infty P(t) dt} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} t dt = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

infatti ricordiamo che l'ultimo integrale si risolve così,

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = -\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Calcoliamo ora il numero di particelle $N(\tau)$ non decadute nel tempo di vita medio,

$$N(\tau) = N_0 e^{-\lambda \tau} = N_0 e^{-1} = \frac{N_0}{e}$$

Il numero di particelle in un tempo τ è diminuito di un fattore $1/e$. λ è un fattore che dipende dalla sostanza e dal tipo di radiazione (ora distinguiamo il λ per radiazioni α e β).

$$-dN = -dN_\alpha - dN_\beta = \lambda_\alpha N(t) dt + \lambda_\beta N(t) dt = (\lambda_\alpha + \lambda_\beta) N(t) dt \Rightarrow N(t) = -(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)t$$

Introduciamo ora il **rappporto di ramificazione** (*branching ratio*), definito così,

$$BR = \frac{\lambda^P}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \text{vale} \quad \lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i^P$$

che per un dato canale di decadimento, indica la frazione di particelle che decadono seguendo quel particolare canale di decadimento rispetto al numero totale di particelle che decade in qualsiasi canale. Qui λ^P indica la costante di decadimento parziale del canale di decadimento considerato, mentre λ al solito è costante di decadimento totale.

Introduciamo il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$, ovvero il tempo necessario per trasformare metà delle particelle di un elemento, vogliamo trovare il legame tra il tempo di vita medio τ e quello di dimezzamento $T_{1/2}$.

$$\frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-\lambda T_{1/2}} \Leftrightarrow e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda T_{1/2} \Leftrightarrow \lambda T_{1/2} = \ln 2$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

Il tempo di dimezzamento è più piccolo del tempo di vita medio.

Le unità di misura del decadimento (dell'attività di un radionuclide, erroneamente chiamata spesso radioattività) sono il Becquerel (Bq), il Curie (Ci) e il Rutherford (Rd):

$$1 Bq = 1 \frac{\text{decadimento}}{\text{secondo}} \quad 1 Ci = 3.7 \times 10^{10} Bq \quad 1 Rd = 1 \times 10^6 Bq$$

Facciamo ora un esercizio sulla dinamica degli urti di alcune particelle.

Esercizio: Un nucleo fermo ad un certo punto decade, liberando una radiazione α (nucleo elio ${}^4_2 He$), descrivere la dinamica.

Partiamo dalla relazione di Einstein $E = Mc^2$, e ricordando la notazione che il numero di massa (A) è uguale al numero di protoni (Z) più il numero di neutroni (N), cioè $A = Z + N$. Si tratta di un problema sulla conservazione dell'energia e dell'impulso. L'energia iniziale è data dalla massa a riposo della particella M_A (non si sta muovendo). L'energia finale invece è data da quattro termini, i due termini della massa delle nuove particelle (massa nuova particella M_{A-4} e massa radiazione α M_α) e i due termini dell'energia cinetica (della nuova particella T_{A-4} e della radiazione α T_α), quindi

scriviamo

$$E_i = M_A \quad E_f = M_{A-4} + M_\alpha + T_{A-4} + T_\alpha$$

Per l'impulso operiamo allo stesso modo, l'impulso iniziale è nullo $\vec{p}_i = \vec{p}_A = 0$, essendo la particella ferma nel sistema di riferimento considerato, mentre l'impulso finale è dato dalla somma vettoriale degli impulsi della nuova particella e della radiazione α $\vec{p}_f = \vec{p}_{A-4} + \vec{p}_\alpha$. Ipotizziamo ora, per semplicità, che la direzione delle due nuove particelle sia la stessa, ma con versi opposti, in questo modo vale $p_f = p_{A-4} - p_\alpha$. Quindi visto che l'energia e l'impulso si conservano, possiamo esplicitare il tutto con un sistema,

$$\begin{cases} M_A = M_{A-4} + M_\alpha + T_{A-4} + T_\alpha \\ \vec{p}_{A-4} + \vec{p}_\alpha = 0 \Rightarrow p = p_{A-4} = p_\alpha \end{cases}$$

Ricordando inoltre che vale la relazione tra energia e impulso della meccanica, vale

$$T_A = \frac{p_A^2}{2M_A} \quad T_{A-4} = \frac{p_{A-4}^2}{2M_{A-4}} \quad T_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha}$$

Ora che il problema è impostato, basta solamente risolvere il sistema, andando ad isolarsi la quantità che si vuole trovare in funzione di quelle che si conoscono già. Per l'energia della particella α si ottiene

$$T_\alpha = (M_A - M_{A-4} - M_\alpha) \frac{M_{A-4}}{M_{A-4} + M_\alpha} \quad (1)$$

Solitamente la differenza delle masse gioca un ruolo molto importante nei calcoli. Di solito le particelle α di un campione sono tutte meno energetiche, e la maggior energia viene dalla differenza di masse.

Lezione 13 Marzo 2020

Il modello di Gamow per il decadimento alpha. Il decadimento beta. Spettro continuo dell'energia del beta. Decadimenti beta più e beta meno. Il positrone. La questione dell'origine dell'energia. Rutherford e l'intuizione delle trasmutazioni.

Prima della scoperta del neutrone, per giustificare la massa atomica, veniva utilizzato il modello *proton-electron*. Ovvero un modello per il quale in un nucleo erano presenti Z protoni singoli, e altri $(A-Z) = N$ protoni accoppiati con $(A-Z)$ elettroni. Ben presto si vide però che questo modello non poteva essere corretto in quanto il nucleo di azoto ^{14}N presentava comportamenti bosonici, quando avrebbe dovuto avere 14 protoni e 7 elettroni, ovvero un totale di 21 particelle con spin 1/2.

Con l'esperimento di Chadwick il problema si risolve, infatti con 7 protoni e 7 neutroni nel nucleo il numero totale di particelle con spin 1/2 è pari.

Nella figura seguente vediamo come sia l'andamento degli isotopi stabili in funzione del numero di protoni ed neutroni.

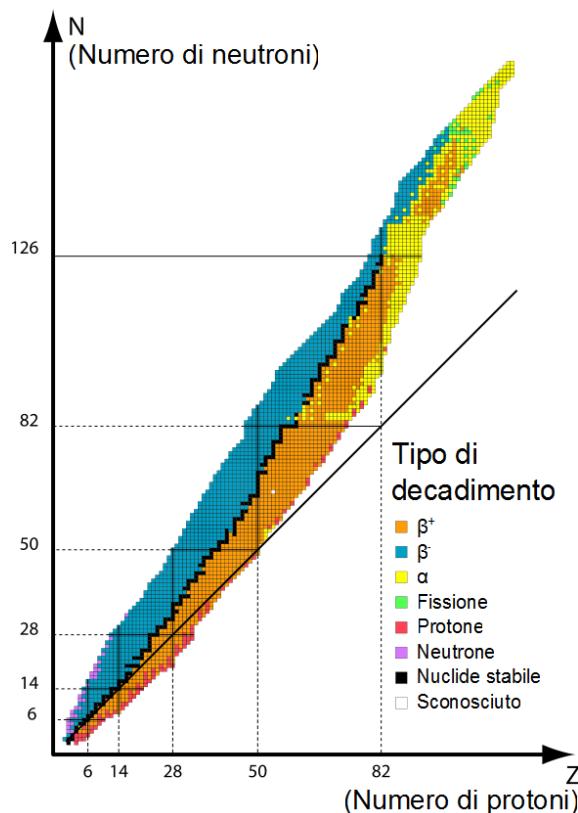


Figura 1: Nuclei stabili e instabili in funzione del numero di protoni e neutroni.

Anche solo intuitivamente diamo una giustificazione del fatto che per atomi più grandi il numero di neutroni sia sempre maggiore rispetto a quello di protoni: l’interazione Coulombiana di cariche positive all’interno del nucleo è più forte via via che il numero di protoni aumenta in uno spazio contenuto. Anche l’interazione forte (quindi i neutroni) allora deve crescere di conseguenza per stabilizzare il nucleo. Si ricorda infatti che l’energia necessaria per tenere vicini due protoni a distanza di 10^{-15} m è dell’ordine del MeV.

2.1.1 Decadimento α - Modello di Gamow

Secondo le osservazioni di Rutherford il decadimento radioattivo riscontrato in tutti nuclei padre esaminati aveva una natura esponenziale e statistica (il numero di particelle che decadevano nell’unità temporale era proporzionale a quante ce ne fossero). Con l’avvento della meccanica quantistica si può giustificare questa osservazione, un semplice modello è quello dovuto a Gamow.

Gamow suppone che nel nucleo, di raggio R , siano presenti degli agglomerati che si rivelano essere particelle α . Il profilo dell’energia potenziale della particella α quando è all’interno del nucleo si presuppone costante, mentre quando esce risponde ad un normale potenziale Coulombiano (come in figura).

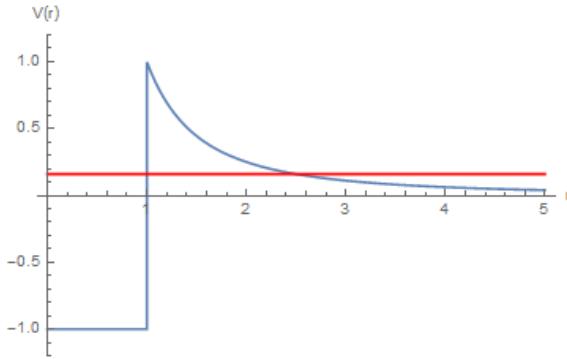


Figura 2: Potenziale modellizzato da Gamow.

Ora, se la particella nel nucleo ha energia negativa non uscirà dal nucleo né classicamente né quantisticamente. Ma se l'energia è positiva c'è una probabilità di trasmissione della particella fuori dal nucleo per effetto tunnel quantistico.

Per semplificare ulteriormente l'esercizio si schematizza il potenziale Coulombiano con un potenziale costante e di ampiezza spaziale L . Dopo una traslazione di ampiezza R si arriva al potenziale raffigurato in figura 3.

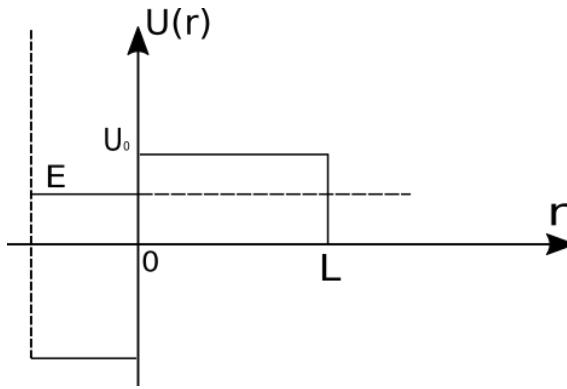


Figura 3: Potenziale semplificato di Gamow.

Se E è l'energia della particella α , per il coefficiente di trasmissione si ha dalla meccanica quantistica (ricordando $\hbar = 1$)

$$T = \frac{4E(U_0 - E)}{4E(U_0 - E) + U_0^2 \sinh^2(KL)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{K_0^2}{2kK}\right)^2 \sinh^2(KL)}$$

con le definizioni

$$K^2 \equiv 2m(U_0 - E), \quad K_0^2 \equiv 2mU_0, \quad k^2 = 2mE.$$

Ora, ricordando che per $x \rightarrow \infty$ vale $(\sinh x)^2 = (e^x/2)^2$, otteniamo che per $2KL \gg 1$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{K_0^2}{2kK}\right)^2 e^{2(KL)}} = \frac{4}{4 + \left(\frac{K_0^2}{2kK}\right)^2 e^{2(KL)}} \approx \frac{4}{\left(\frac{K_0^2}{2kK}\right)^2} e^{-2(KL)} = \frac{16k^2 K^2}{(k^2 + K^2)^2} e^{-2(KL)}$$

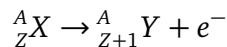
Quindi il coefficiente di trasmissione diminuisce esponenzialmente secondo un esponente $G = 2KL$.

È opportuno notare che nel modello meno semplificato il potenziale viene schematizzato come una serie di potenziali a gradino di ampiezza dl con energia progressivamente minore in modo da simulare meglio un potenziale inversamente proporzionale al quadrato del raggio. Il coefficiente di trasmissione complessivo sarebbe quindi proporzionale ad una produttoria del tipo

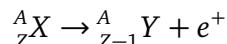
$$\prod_j e^{-2k_j dl} \longrightarrow \exp\left(-2 \int dr \sqrt{2m(V(r)-E)}\right)$$

2.1.2 Decadimento β (Rutherford e Soddy - 1903)

Rutherford e Soddy notano un decadimento del tipo



con emissione di una particella β^- di carica negativa. Più tardi, nel 1934, si ha invece l'evidenza di un decadimento del tipo



con emissione di una particella β^+ positiva. Questa particella rivela di avere le stesse caratteristiche dell'elettrone a meno della carica: è l'antiparticella corrispondente e viene chiamato *positrone*. Le energie uscenti da questo decadimento sono dell'ordine del MeV, quindi molto più alte di quelle di ionizzazione. Di nuovo questa energia deriva dalla differenza delle masse in gioco. Analogamente all'esercizio già fatto per il decadimento α partendo da

$$M_A^Z = M_A^{Z\pm 1} + M_e + T_A^{Z\pm 1} + T_e^\mp$$

si arriva a

$$T_\beta = (M_A^Z - M_A^{Z\pm 1} - M_e) \frac{M_A^{Z\pm 1}}{M_A^{Z\pm 1} + M_\beta} \quad (2)$$

La differenza con le particelle α però risulta evidente quando si osserva sperimentalmente il conteggio di particelle emesse con una determinata energia a seguito di un decadimento. Per i decadimenti α infatti si osserva un unico picco sperimentale in corrispondenza della T_α fissata dall'equazione (1). Per le particelle β invece il grafico è il seguente.

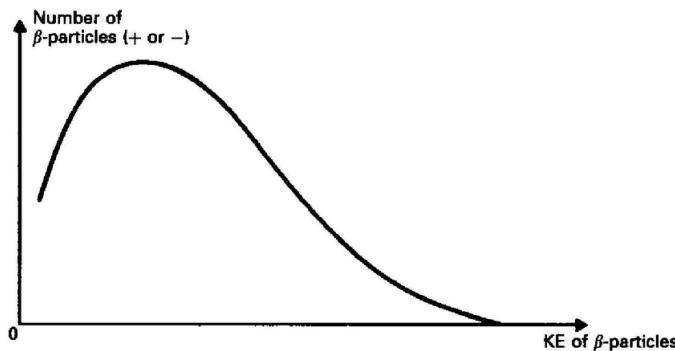


Figura 4: Numero di particelle beta in funzione della loro energia.

Si nota quindi che si trovano particelle β aventi valori di energia molto distanti tra loro. Inoltre il punto in cui la curva interseca l'asse delle ascisse corrisponde all'energia data dall'equazione (2).

Pauli negli anni '30 intuisce allora che deve esserci un'ulteriore particella nello stato finale, oltre a Y e β , e che non viene vista questa particella perché neutra. Da qui il nome della particella ν : neutrino. Più tardi è stato scoperto che nel caso del decadimento β^- la particella emessa risulta essere l'antineutrino $\bar{\nu}$ e viceversa. L'intuizione viene verificata sperimentalmente nel 1956, ma ancora oggi non è conosciuta la sua massa, sebbene si sappia essere molto piccola.

Il grafico 4 si spiega allora sapendo che una parte dell'energia totale viene data al neutrino e solo quando $T_\nu = 0$ vale la formula (2). L'ultima affermazione è vera se si trascura la massa del neutrino, motivo per il quale c'è uno studio approfondito sull'*endpoint* della curva in figura 4 per dare una stima di M_ν .

In generale la determinazione delle masse di particelle atomiche viene fatta con uno spettrometro di massa.

Quello che si rileva è che per un nucleo con $A = Z + N$ nucleoni vale sempre

$$M_A < Zm_p + Nm_n$$

il che non ci sorprende, dato il precedente per la massa atomica minore della somma dei componenti dell'atomo a causa dell'energia di ionizzazione.

Lezione 19 Marzo 2020

Le energie di legame dei nuclei. La formula semiempirica della massa e il modello a goccia nucleare. La saturazione e la forza nucleare a corto raggio. Le energie di separazione. I numeri magici. Enrico Fermi e la ricerca dei transuranici. La fissione nucleare ipotizzata da Ida Noddack e la scoperta di Hahn e Strassmann

Dall'equivalenza massa energia sappiamo che la massa di un atomo non è data dalla sola somma tra il suo numero di neutroni e protoni, ma c'è un contributo significativo dato dall'energia di legame di queste particelle (*Binding energy*). Chiamiamo BE l'energia di legame, Z il numero di protoni, N il numero di neutroni, m_p , m_n , M_N rispettivamente la massa del protone, del neutrone e la massa totale del nucleo, vale la relazione,

$$BE = Zm_p + Nm_n - M_N$$

2.1 Radioattività

Nella massa di un atomo vanno inoltre considerate le masse degli elettroni m_e (BEe è l'energia di legame tra elettroni e nucleo).

$$M_{atomo} = Zm_e + M_N - BEe$$

Nella successiva tabella riportiamo alcuni valori numerici delle BEe per alcuni elementi.

	<i>Ne</i>	<i>Ca</i>	<i>Zn</i>	<i>Sn</i>	<i>Yb</i>	<i>Th</i>
<i>Z</i>	10	20	30	50	70	90
<i>BEe (keV)</i>	3.4	17	44	145	315	570

Introduciamo una formula semiempirica per la massa nucleare proposta da Weizsäcker (SENMF). Questa è una formula usata per approssimare la massa ed alcune altre proprietà del nucleo atomico (es l'energia di legame). La formula semi empirica è la seguente,

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c A^{-1/3} Z^2 - a_{asym} \frac{(N-Z)^2}{4A} - \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

Andiamo ora in rassegna di ogni termine:

- a_v , coefficiente di volume, da stimare empiricamente perché $cost = \rho = \frac{M}{V} = \frac{mA}{V} \Rightarrow V = \frac{mA}{\rho}$, legame con la densità; A è il numero atomico;
- a_s , termine goccia (termine di superficie); $A^{2/3}$ perché se $\rho = cost$ allora $\rho = \frac{MA}{4/3\pi R^3}$; contributo ad energie di legame BE negativo, perché sente interazioni vicine, non lontane;
- a_c , termine di Coulomb; $A^{-1/3}$ perché se $R \sim A^{1/3}$, è l'energia immagazzinata in un cubo carica $Q E = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}$;
- $-a_{asym} \frac{(N-Z)^2}{4A} - \frac{\delta}{A^{1/2}}$, termini di origine quantistica;
- a_{asym} , termine di asimmetria tra numero di protoni e neutroni;
- $-\frac{\delta}{A^{1/2}}$, termine di accoppiamento ("Berinc") e descrive l'effetto dello spin dei nucleoni.

Si considera a tutti gli effetti una formula semi-empirica perché la forma principale è ricavata teoricamente, ma ha bisogno di 5 coefficienti che possono essere trovati sperimentalmente tramite fit dei dati sperimentali.

Andiamo ad analizzare meglio il temine di accoppiamento δ , e consideriamo la tabella sottostante che riporta dei dati sperimentali.

<i>A</i>	<i>Z</i>	<i>N</i>	# nuclei stabili
Dispari	Dispari	Pari	50
Dispari	Pari	Dispari	55
Pari	Dispari	Dispari	4
Pari	Pari	Pari	165

2.1 Radioattività

Dalle ultime due righe della tabella notiamo che nei nuclei protoni e neutroni amano stare in coppia, e non separati. Infatti la maggior parte di nuclei con un numero atomico pari, li troviamo all'interno un numero pari sia di protoni che neutroni. Gli unici 4 nuclei stabili che non appartengono alla precedente classificazione sono 2_1H , 6_3Li , $^{10}_5B$ e $^{14}_7N$.

Il termine di accoppiamento δ è stato introdotto proprio per tenere conto di questo fenomeno.

$$\delta \begin{cases} > 0, & \text{se Dispari-Dispari} \\ = 0, & \text{se Pari-Dispari o Dispari-Pari} \\ < 0, & \text{se Pari-Pari (BE deve aumentare)} \end{cases}$$

Di seguito riportiamo il grafico delle energie di legame in funzione del numero di nucleoni.

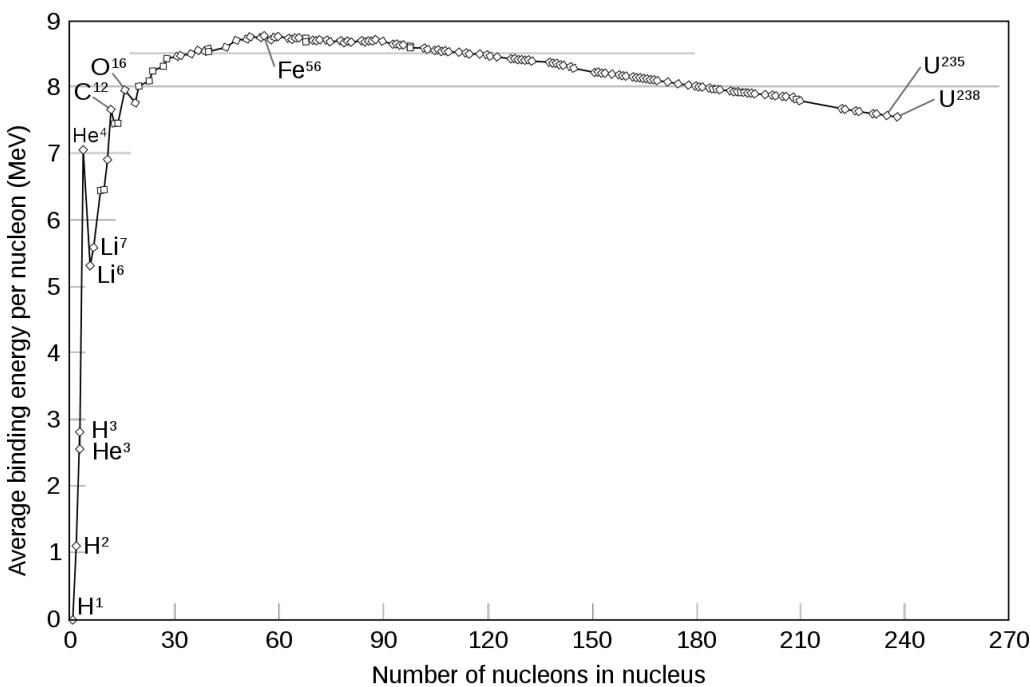


Figura 5: Curva delle energie medie di legame in funzione del numero di nucleoni.

Il massimo si ha tra il ferro e il cobalto ($A = 60$). Notiamo come questa energia abbia un range abbastanza limitato (infatti diminuisce dopo il massimo), se paragonato a quello dell'interazione coulombiana. In totale sono presenti $A(A-1)/2$ coppie, quindi se la forza fosse a lungo raggio ci aspetteremmo che l'energia BE per A elevati fosse proporzionale ad A^2 , ovvero $BE/A \sim A$. Questo però accade solo per valori di A piccoli, perché superata una certa distanza l'interazione forte è molto più attenuata. Di seguito le energie di legame dei nuclei più leggeri

	2_1H	3_1H	3_2He	4_2He	6_3Li	7_3Li
BE (MeV)	2.22	8.48	7.72	28.3	32.0	39.2
BE/A (MeV)	1.11	2.83	2.57	7.07	5.33	5.6

Da questa tabella si nota come le particelle α siano molto legate e come due atomi con lo stesso numero di nucleoni abbiano energie di legame differenti (è maggiore quella dell'atomo con più neutroni).

L'energia di separazione dei neutroni S_n o dei protoni S_p , è l'energia necessaria per estrarre un neutrone o protone, quindi

$$M_A + S_n = M_{A-1} + m_n \quad \text{separazione neutrone}$$

$$M_A + S_p = M_{A-1} + m_p \quad \text{separazione protone}$$

Prendiamo il caso particolare della separazione del neutrone, sviluppando le quantità si ottiene

$$S_n = -Zm_p - Nm_n + BE(A, Z) + Zm_p + (N - 1)m_n - BE(A - 1, Z) + m_n$$

allo stesso modo si fa per la separazione del protone e si ottengono le seguenti relazioni

$$S_n = BE(A, Z) - BE(A - 1, Z)$$

$$S_p = BE(A, Z) - BE(A - 1, Z - 1)$$

Nei grafici in cui viene raffigurata l'energia di separazione in funzione del numero di neutroni N , ci sono dei picchi in corrispondenza di alcuni N , dove evidentemente si avrà una maggior stabilità (S_n più alte). Si trova che gli N per cui si ha una maggior stabilità sono i così detti numeri magici, ovvero $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ (corrispondenti se vogliamo ai gas nobili). Un discorso analogo si fa per l'energia di separazione dei protoni in funzione del numero di protoni Z , infatti i numeri magici si riferiscono ai nucleoni in generale, dove si trova una particolare stabilità.

Dal grafico dell'energia sopra si osserva che da un certo numero di massa A in poi l'energia diminuisce sistematicamente, e questo mi dice che è possibile avere un guadagno di energia nel processo di fissione da un nucleo più grande (meno stabile entro certi limiti) a due più piccoli (più stabili entro certi limiti) e più energetici, sempre nell'ipotesi in cui si possa passare da un elemento ad un altro.

Facciamo un esempio di fissione simmetrica (un caso poco probabile in natura). Partiamo da un elemento (Z, A) per ottenere due elementi $(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2})$ e $(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2})$. Il guadagno di energia sarà dato da

$$Q = M(A, Z) - 2M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right)$$

Consideriamo la formula semi empirica per la massa nucleare nei due casi,

$$M(A, Z) = Zm_p + Nm_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c A^{-1/3} Z^2 + a_{asym} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

$$M(A, Z) = \frac{Z}{2}m_p + \frac{N}{2}m_n - a_v \frac{A}{2} + a_s \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} + a_c \left(\frac{A}{2}\right)^{-1/3} \left(\frac{Z}{2}\right)^2 + a_{asym} \frac{\left(\frac{A}{2} - 2\frac{Z}{2}\right)^2}{\frac{A}{2}}$$

A questo punto calcoliamo il guadagno di energia Q usando le forme appena trovate,

$$\begin{aligned} Q &= a_s \left[A^{2/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{2/3} \right] + a_c \left[\frac{Z^2}{A^{1/3}} - 2 \frac{\left(\frac{Z}{2} \right)^2}{\left(\frac{A}{2} \right)^{1/3}} \right] \\ &= a_s A^{2/3} \left[1 - 2^{1/3} \right] + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[1 - \frac{1}{2^{2/3}} \right] \\ &\approx -0.26 a_s A^{2/3} + 0.37 a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \end{aligned}$$

Nel caso dell'uranio-238 (^{238}U) $Q \approx -180 + 360 \text{ MeV} = +180 \text{ MeV}$.

Elemento trans-uranico è un elemento con un numero di protoni maggiore di quello dell'uranio. Vediamo una reazione dell'uranio quando gli viene fornito un neutrone,



ma l'uranio ha 92 protoni, non 93, quindi quello che abbiamo ottenuto è un nuovo elemento trans-uranico.

Lezione 20 Marzo 2020

La radioattività da fissione. I neutroni lenti. Il combustibile nucleare per produzione di energia. Uranio 235 e 238. Il plutonio. La fusione: il ciclo p-p e il ciclo CNO.

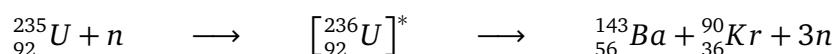
2.2 Fissione

Nel percorso storico che ha portato ai giorni nostri, la reazione di fissione nucleare portò oltre ad una nuova fonte di energia, anche alla corsa agli armamenti nucleari, che portarono distruzione alla fine della seconda guerra mondiale.

L'idea di Fermi, che gli portò il premio Nobel nel 1938, era quella di bombardare elementi, tipo Uranio, per trovare nuovi elementi e completare la tavola periodica. Chiaramente questa operazione portava ad un aumento significativo della radioattività. Ma questo aumento della radioattività da dove proveniva?

Consideriamo l'Uranio (${}_{92}U$), un minerale che è ricavato nelle miniere, e si presenta in natura sotto forma di due isotopi: Uranio-235 (${}_{92}^{235}U$), presente il 0.7% nei minerali e Uranio-238 (${}_{92}^{238}U$), presente per il restante 99.3%.

Prendiamo in considerazione la reazione di fissione che avviene se viene sparato un neutrone contro un nucleo di Uranio-235 (il simbolo * sta ad indicare nucleo eccitato).

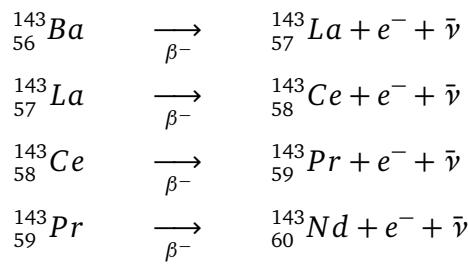


Da notare che in tutte le reazioni nucleari succede che il numero totale di protoni e neutroni si conserva, non è mai stato osservato il contrario. Questo fenomeno cade sotto la legge di conservazione del numero totale barionico (questo si applica anche ad altre particelle elementari), in altre parole il numero di massa A è conservato.

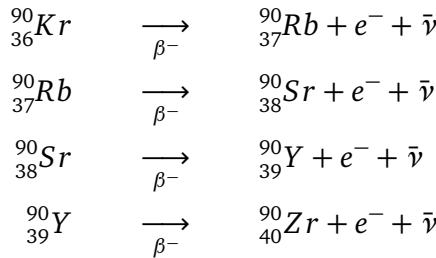
Osservando il grafico sulla stabilità degli isotopi tra numero di protoni e di neutroni

(1), si vede che gli isotopi del Bario (*Ba*) e del Kripton (*Kr*) risultanti dalla fissione dell'Uranio-235, non stanno sulla linea di stabilità, in altre parole non sono stabili e quindi decadono immediatamente a loro volta, attraverso diversi decadimenti beta β^- .

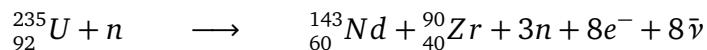
Partiamo dal Bario-143 (non stabile), decaderà attraverso il Lantanio-143 (*La*) (non stabile), il Cerio-143 (*Ce*) (non stabile) e il Praseodimio-143 (*Pr*) (non stabile), fino a giungere al Neodimio-143 (*Nd*), un isotopo stabile.



Scriviamo una procedura analoga per l'isotopo instabile del Kripton-90, il quale decade attraverso il Rubidio-90 (*Rb*) (non stabile), lo Stronzio-90 (*Sr*) (non stabile) e l'Ittrio-90 (*Y*) (non stabile), fino a giungere al Zirconio-90 (*Zr*), un isotopo stabile.



Quindi alla fine del decadimento dell'Uranio-235, otterò,



Da una massa maggiore abbiamo ottenuto masse minori, ma in compenso, per la conservazione massa-energia, abbiamo guadagnato nell'energia cinetica dei frammenti risultanti.

Nel 1939, Bohr e Wheeler applicarono il modello a goccia (fatto per la formula semi-empirica della massa), per spiegare la fissione. Loro ipotizzarono il processo composto da due fasi: nella prima si crea un nucleo composto (nucleo più neutrone), e l'energia portata dal neutrone viene immagazzinata tra i gradi di libertà del nucleo; nella seconda l'energia si trasforma in energia di separazione.

Riportiamo un grafico (6) che rappresenta questo modello.

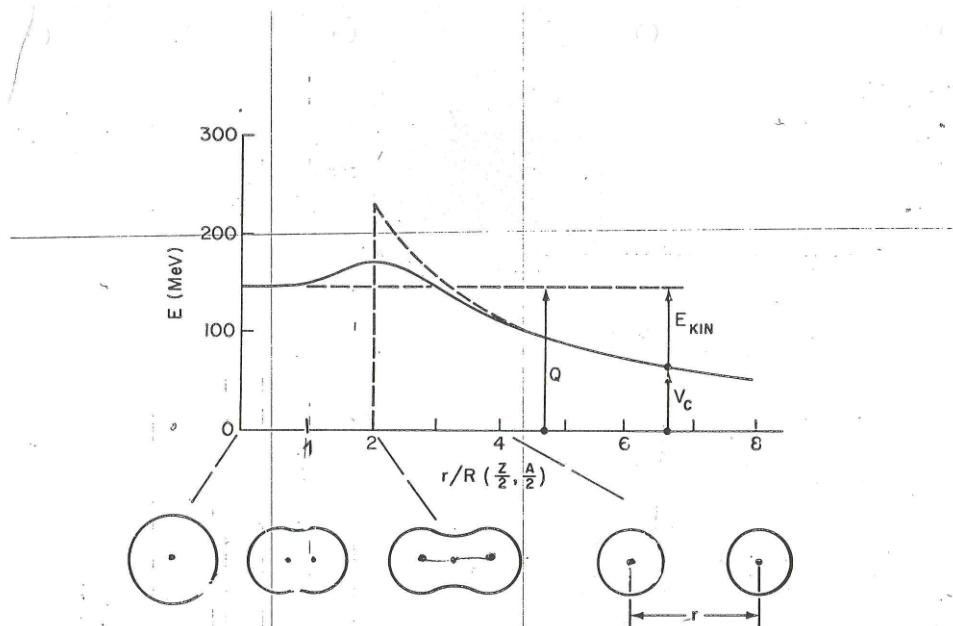


FIG. 3.20. A schematic representation of the energy considerations in the symmetric spontaneous fission of ^{238}U . The separation of the centers of the fragments is in units of the fragment radius $R(Z/2, A/2)$. For interesting and more realistic diagrammatic energy-distance representations of the fission process, refer to Swiatecki and Bjørnholm (1972).

Figura 6: Curva energia in funzione della distanza dei frammenti di una reazione, modello a goccia.

Il grafico rappresenta l'energia in funzione della distanza tra i frammenti. Dalla curva si vede che affinché la fissione avvenga è necessario che venga superato uno scalino di energia, oltre il quale la curva sarà monotona decrescente (avviene la fissione). Solitamente questa energia è data dall'energia cinetica del neutrone che colpisce il nucleo (chiamiamo ΔE_h la differenza di energia tra l'energia al punto zero del grafico e quella al punto di massimo). Ovviamente c'è anche una probabilità quantistica non nulla che la fissione avvenga per effetto tunnel (linea tratteggiata orizzontale), chiaramente a meno che non ci sia quella salita iniziale di energia (*fissione spontanea*). La fissione da assorbimento di neutroni causa la produzione di altri neutroni liberi, che, se possiedono energia sufficiente e se la densità dell'Uranio è alta a sufficienza, provocano un effetto a catena in cui la fissione avviene su gli altri nuclei presenti nel composto sotto esame. Nel caso del minerale dell'Uranio, in cui è solo presente un 0.7% di Uranio-235, che non basta ad alimentare l'effetto a catena, quindi solitamente si passa prima ad un processo di arricchimento dell'Uranio, per aumentare così questa percentuale; per le reazioni di fissione controllata nelle centrali nucleari si arricchisce al 3%, mentre per le reazioni esplosive, tipiche delle bombe nucleari, si carica oltre il 90% (esistono centrifughe, in ogni caso processi chimico-fisici, per separare gli isotopi).

Curiosità: Il congresso di Vienna sull'energia nucleare serve per tenere sotto controllo il commercio e l'arricchimento dell'Uranio.

La tabella mostra alcuni valori riferiti al grafico precedente (6), per alcuni isotopi, per la precisione l'energia critica è l'energia necessaria al superamento della barriera, quello che abbiamo chiamato ΔE_h , mentre l'energia di separazione è l'energia necessaria

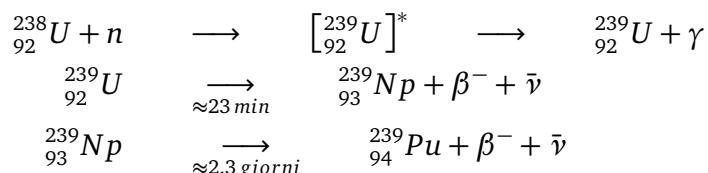
per estrarre un neutrone (vista nella sezione precedente).

Nuclei Bombardati	Nuclei Composti	Energia Critica \mathcal{E}_c (MeV)	Energia di Separazione W_s (MeV)	$\mathcal{E}_c - W_s$ (MeV)
$^{234}_{92}U$	$^{235}_{92}U$	5.0	5.4	-0.4
$^{235}_{92}U$	$^{236}_{92}U$	5.3	6.4	-1.1
$^{238}_{92}U$	$^{239}_{92}U$	5.9	5.2	0.7
$^{231}_{91}Pa$	$^{232}_{91}Pa$	5.5	5.4	0.1
$^{232}_{90}Th$	$^{233}_{90}Th$	6.9	5.2	1.7
$^{230}_{90}Th$	$^{231}_{90}Th$	6.5	5.3	1.2

Quando la differenza tra energia critica e di separazione è negativa significa che il neutrone porta energia sufficiente per il superamento della barriera. I neutroni non sono carichi, quindi possono benissimo sfuggire alla reazione e non colpire un nucleo, per questo è importante che ci sia una densità alta del materiale da bombardare con i neutroni. Energia di separazione è l'energia per estrarre un neutrone (o protone o elettrone) e può essere maggiore o minore dipendentemente a quale neutrone (o protone o elettrone) vogliamo estrarre; mentre l'energia di legame è data dalla somma di tutte queste energie di separazione.

Abbiamo prima trattato la fissione dell'Uranio-235, e ora facciamo alcune considerazioni sull'Uranio-238. Dalla tabella si conclude che per l'Uranio-238 non può avvenire una fissione spontanea.

Vediamo ora che succede ad un nucleo di Uranio-238 bombardato da un neutrone (sotto le frecce è riportato il tempo di vita medio).



Quindi bombardando un Uranio-238 con un neutrone, tramite decadimento beta β^- si ottiene prima un nucleo di Nettunio (Np) ed infine uno di Plutonio (Pu), questo nucleo decade con un decadimento α , ma ha un tempo di vita molto lungo ed in più è fissionabile, e queste particolarità lo rendono un materiale molto usato sia nelle centrali nucleari e per le bombe atomiche.

La sezione d'urto di assorbimento del neutrone varia con l'energia del neutrone, in altre parole, la probabilità di assorbimento del neutrone varia con l'energia del neutrone.

Dopo la fissione, i neutroni che escono hanno velocità molto alte, dell'ordine di milioni di metri al secondo, ma Fermi notò che, nel caso dell'Uranio, se i neutroni vengono rallentati (lui usò la paraffina), allora si aumenta la probabilità di assorbimento dei neutroni (neutroni lenti contro-intuitivamente sono più efficaci). Invece nel Plutonio non serve rallentare i neutroni, quelli veloci infatti sono ugualmente efficaci a quelli lenti, e ciò ancora una volta rende il Plutonio un materiale estremamente sfruttabile.

Plutonio è perciò un materiale efficace per le reazioni a catena.

Introduciamo alcuni parametri utili per questo tipo di reazioni: ν è il numero di neutroni emessi dalla fissione, va da se che alcuni servono alla reazione stessa per continuare ad avvenire (reazione a catena), mentre altri vengono utilizzati per altri scopi, come esperimenti di scattering, o per fare isotopi. k è un fattore moltiplicativo efficace, ci dice se la reazione continua in uno stato stazionario, diverge o muore. Se P è la probabilità di fissionare, A è la probabilità di assorbimento del neutrone e L è la probabilità che il neutrone sfugga dalla superficie, si esprime k come

$$k = \frac{P}{A + L}$$

Esaminiamo i casi possibili di k :

$$k \begin{cases} < 1 & \text{reazione muore (subcritica)} \\ = 1 & \text{reazione stazionaria (critica)} \\ > 1 & \text{reazione diverge (supercritica), pericolo} \end{cases}$$

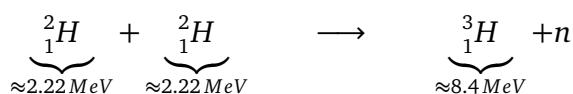
Quando si fa fissilare l'Uranio, nel materiale bruciato si trova anche del Plutonio, che verrà a sua volta bruciato. Solitamente nei reattori nucleari, vengono costruiti degli *impianti di riprocessamento del combustibile*, per estrarre dal combustibile bruciato del Plutonio (nuovo combustibile).

Curiosità storica: Per la bomba atomica di Hiroshima (Little Boy) il combustibile era Uranio-235, mentre per quella di Nagasaki (Fat Man) era Plutonio-239.

2.3 Fusione

Consideriamo ora l'analogo complementare della fissione, ovvero la fusione.

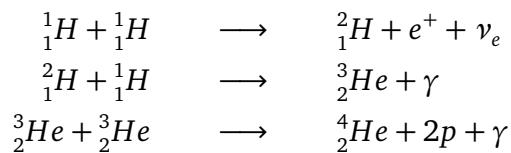
Partiamo dalla reazione di fusione di due deuteri per ottenere un trizio:



Da questa reazione di fusione si ha un guadagno approssimativo di $\approx 4 \text{ MeV}$, che proviene dalle energie di legame dei nuclei. Da qui si conclude che c'è la possibilità di guadagnare energia sia dalle reazioni a fissione che da quelle a fusione, ovviamente utilizzando nuclei appropriati che si prestano ad una reazione o ad un'altra (osservare grafico (5)).

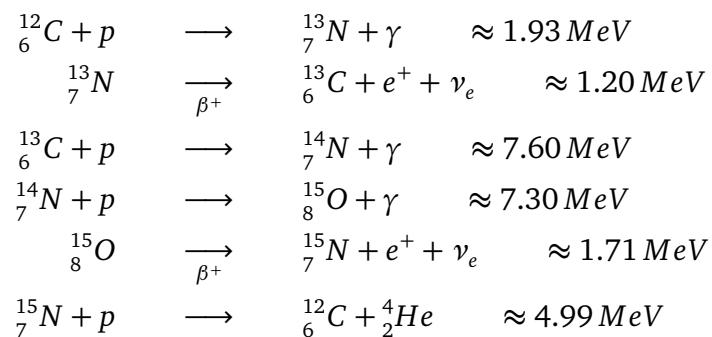
Il problema maggiore che rappresentano le reazioni di fusione, è trovare il modo di far avvicinare gli atomi in modo tale da far partire la fusione, infatti questo è fattibile in laboratorio tramite l'ausilio di acceleratori di particelle che permettono il superamento della barriera di potenziale (grafico (6), ma studiato al contrario). Mentre, oggi giorno, non è fattibile in industria con il fine di avere un guadagno sostanzioso di energia, infatti i costi in gioco nell'ottenimento della fusione non permettono di guadagnare energia sufficiente né per uguagliarli, né tanto meno per superarli (e se questo avvenisse comunque non ci sarebbe un guadagno sufficiente paragonato al guadagno che

le centrali a fissione di uranio riescono a provvedere). Quindi nel caso della fusione il problema tecnologico sembra insuperabile anche dal punto di vista dei materiali utilizzati. Un esempio in natura di processo a fusione che genera un'enorme quantità di energia sono le stelle e nello specifico il Sole. Ci rendiamo conto quindi l'impossibilità tecnologica nel raggiungere tali temperature e nel trovare materiali che le sopportino. Un altro ciclo di fusione è rappresentato dal ciclo p-p, quello che permette la produzione di Elio-4 partendo da Idrogeno:



Questo processo porta ad un guadagno energetico di circa $\approx 28 \text{ MeV}$, Una quantità molto alta di energia.

Un altro ciclo è quello del carbonio (avviene nelle stelle), ciclo CMO, riportiamo il guadagno di energia per ogni mini-reazione a lato:



Questo ciclo è partito dal Carbonio-12 ed è arrivato di nuovo alla produzione di un Carbonio-12 con un guadagno energetico totale di circa $\approx 24.82 \text{ MeV}$. Il ciclo giunto alla fine può ricominciare.

Come anticipato sopra, la tecnologia non è ancora arrivata a sfruttare il fenomeno della fusione per la creazione di grandi quantità di energie. Tanto per capire quali sono le energie in gioco, consideriamo l'energia necessaria per portare due elettroni alla distanza di un fermi, nelle unità di misura qui utilizzate risulta $e^2/2 = 1.44 \text{ MeV}$, e perché la reazione avvenga, deve essere superata questa soglia energetica. Ora se pensiamo che per la temperatura ambiente parliamo di energie dell'ordine di $T \approx 0.025 \text{ eV}$, ci rendiamo subito conto le temperature in gioco per far avvenire reazioni di fusione sono inimmaginabilmente enormi.

Lezione 26 Marzo 2020

Le parbole dei decadimenti beta. Discorso generale sul potenziale nucleare. Il modello di Yukawa.

Vogliamo vedere meglio da dove deriva il termine di pairing $-\delta/A^{1/2}$ che si trova nel

formula di Von Weizsäcker. Vediamo allora l'espressione della massa in funzione di Z ad A fissato:

$$M(Z, \bar{A}) = Zm_p + (A-Z)m_n - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c A^{-1/3} Z^2 + a_{asym} \frac{(A-2Z)^2}{A} - \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

ovvero

$$\begin{aligned} M(Z, \bar{A}) &= Z(m_p - m_n) + A(m_n - a_v) + a_s A^{2/3} + a_c A^{-1/3} Z^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} a_{asym} A + a_{asym} \frac{Z^2}{A} - Z a_{asym} - \frac{\delta}{A^{1/2}} \\ &= Z^2 \left(a_c A^{-1/3} + \frac{a_{asym}}{A} \right) + Z (m_p - m_n - a_{asym}) \\ &\quad + A \left(m_n - a_v + \frac{1}{4} a_{asym} + a_s A^{-1/3} \right) - \frac{\delta}{A^{1/2}} \end{aligned}$$

Nella coppia di figure seguenti (da tagliare) è rappresentata la funzione precedente per A fissato, nel caso pari e dispari.

Nuclear Energy Surface Diagram For a constant A

Binding energy per nucleon along const A due to asymmetry term in mass formula

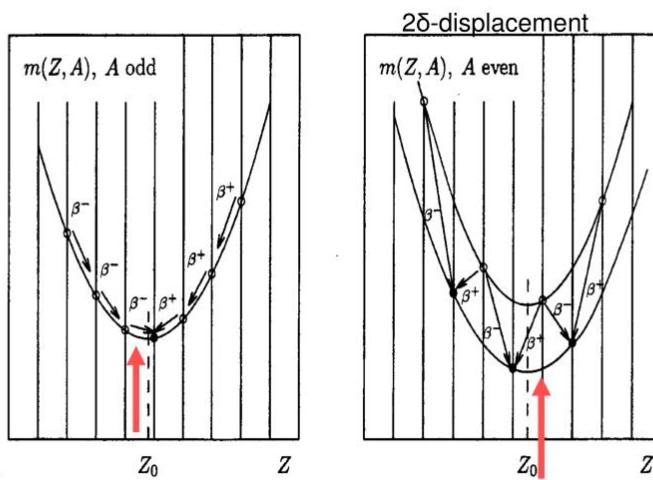


Fig. 4.2 - Mass of nuclei with a fixed A . The stable nuclei are represented by full circles.

(Bertulani & Schechter)

valley of stability

In entrambi casi l'atomo cercherà di arrivare a Z_0 , ovvero il valore corrispondente al minimo della funzione, attraverso decadimenti β^\pm . Nel caso di A pari però il termine δ non è nullo, quindi a seconda che N e Z siano pari-pari o dispari-dispari si hanno due curve (con differenza di energia 2δ).

Tenendo in mente che attraverso decadimenti β si può variare Z solamente di 1, dalla figura risulta chiaro perché si vengano a creare due atomi stabili, entrambi pari-pari.

Si nota che esiste la possibilità di un doppio decadimento β simultaneo, ma ha una vita media molto lunga.

3 Il potenziale nucleare

Data l'Hamiltoniana del nucleo

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m_N} + \sum_{i < j} V_{ij}$$

Si vuole trovare la forma del potenziale nucleare V che governa l'interazione tra nucleoni. La ricerca ancora oggi non è giunta al termine data la difficoltà del problema che deve contemplare ulteriori gradi di libertà dovuti ai *quark* che compongono gli oggetti qui approssimati come elementari. Una teoria sofisticata e che funziona bene per alte energie è la *Quantum Chromodynamics* (QCD).

Una forma per il potenziale derivante dalle osservazioni è quella trovata euristicamente da Yukawa.

3.1 Il potenziale di Yukawa

Viene fatta un'analogia con il caso elettromagnetico: si suppone che l'interazione coulombiana tra due elettroni E_1 ed E_2 sia veicolata da un 'proiettile' di momento \vec{p} . Se gli elettroni hanno un momento iniziale nullo, quando il primo 'spara' riceve un momento $-\vec{p}$ e quando il proiettile raggiunge il secondo elettrone gli trasmette tutta la sua energia cinetica dandogli un momento \vec{p} . Per conservare la carica il proiettile dovrebbe avere carica nulla e la sua energia è data da pc , come un fotone. Accettiamo il fatto che l'elettrone 1 possa 'sparare', quando sembra ci sia una violazione della conservazione energetica, poiché sappiamo che abbiamo un'indeterminazione sulla misura di energia

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Quindi il proiettile può viaggiare una distanza $r = c\Delta t = c\hbar/\Delta E$, ma sapendo che la sua energia è cp risulta

$$r = \frac{\hbar}{p} \iff \frac{p^2}{\hbar} = \frac{\hbar}{r^2}$$

Ora sappiamo che la forza è $\Delta p/\Delta t$ ovvero

$$F = \frac{p}{\Delta t} = \frac{p}{\hbar/pc} = \frac{\hbar c}{r^2} = \frac{\hbar c}{e^2} \left(\frac{e^2}{r^2} \right)$$

dove il termine tra parentesi risulta essere proprio la forza di Coulomb. Quindi possiamo vedere l'interazione elettromagnetica come l'espulsione di oggetti da particelle cariche. Il coefficiente davanti alla parentesi viene dell'ordine di 137, una sua interpretazione è quella probabilistica: assegno all'evento di espulsione una probabilità $e^2/\hbar c \sim 1/137$.

Questo meccanismo, con gli opportuni aggiustamenti, è alla base della spiegazione delle interazioni. La differenza principale tra il caso coulombiano e l'interazione forte è il coefficiente, chiamato *costante di accoppiamento*, che risulta essere più piccolo per la forza nucleare, aumentando così la probabilità che avvenga l'interazione (rendendola forte).

Nel caso dell'interazione forte inoltre il proiettile viene assunto con massa, a differenza di prima ora quindi c'è una limitazione del ΔE minimo:

$$r = \frac{c\hbar}{\Delta E} = \frac{c\hbar}{m_\pi c^2} = \frac{\hbar}{m_\pi c}$$

dove m_π è la massa del proiettile chiamato *mesone di Yukawa* o *pione*. La massa di questa particella è stata misurata essere circa 140 MeV, da qui si può allora calcolare r in questo caso, che risulta essere $r \sim 1.4 fm$.

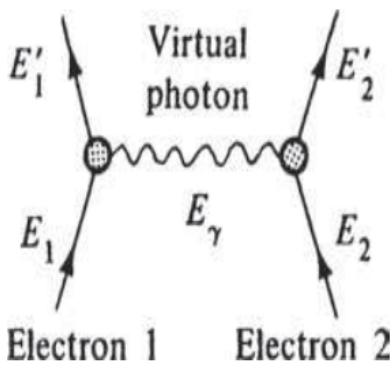


Figura 7: Diagramma di Feynman per schematizzare l'interazione coulombiana.

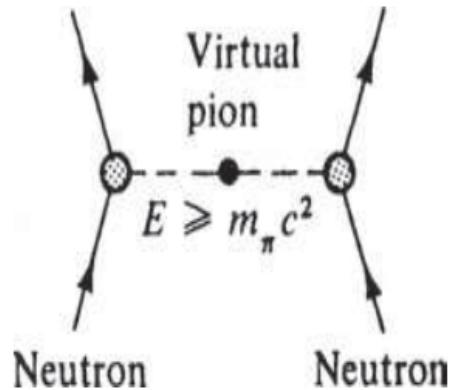


Figura 8: Diagramma di Feynman per schematizzare l'interazione forte.

Cercando, al contrario, di inferire la massa del pione fissando r Yukawa diede una stima di m_π tra i 100 MeV e i 200 MeV. Quando venne scoperto il muone μ con una massa di 105 MeV si pensava pertanto che esso fosse il responsabile dell'interazione forte, cosa più tardi rivelatasi non vera. Anche il muone, come l'elettrone, si trova con carica positiva e negativa, non interagisce fortemente e non sembra (ad oggi) avere una sottostruttura: fanno parte della famiglia dei *leptoni*. Notiamo, en passant, che osservazioni sperimentali rivelano che i pioni sono costituiti da quark.

Aggiungendo un termine all'equazione di Poisson, Yukawa trovò risolvendo l'equazione di Klein-Gordon¹, la seguente forma per il potenziale nucleare:

$$V(r) = -g \frac{e^{-m_\pi r}}{r} \quad (3)$$

con g costante di accoppiamento.

A questo punto il parametro g può essere trovato fissando i dati sperimentali. Per fare

¹Per la dimostrazione di veda ad esempio M.Henley, A.García, *Subatomic Physics*, Third Edition, World Scientific, 2007, pagg. 432-434.

ciò ci basiamo su sistemi semplici, se possibile con due particelle: un sistema legato di 2 protoni o 2 neutroni non esiste, quindi utilizziamo l'atomo di deuterio. Osserviamo che comunque anche due protoni possono interagire, e si possono trovare in uno stato (non legato, ma con energia positiva) dell'Hamiltoniano del sistema. Quindi posso avere informazioni sulla forma del potenziale anche attraverso stati di scattering. Attraverso osservazioni sperimentali si vede che per l'atomo di deuterio:

- per un gas di deuterio in un campo magnetico si osserva uno splitting energetico in tre linee, quindi $J = 1$,
- l'energia di legame risulta essere $E_B = 2.22 \text{ MeV}$,
- il momento magnetico è $\mu_D = 0.857 \mu_N$, con μ_N magnetone nucleare,
- il momento di quadrupolo è $Q = 0.278 \text{ fm}^2$.

Lezione 27 Marzo 2020

I momenti magnetici anomali del protone e neutrone. Il potenziale nucleare dalle proprietà del Deuterio.

Per il deuterio l'energia di legame si vede essere abbastanza piccola (1.1 MeV per nucleone) rispetto all'Elio ad esempio. Infatti il raggio medio di quest'ultimo è 1.4 fm, mentre quello del deuterio è 2.4 fm (meno compatto).

Per quanto riguarda il momento magnetico sappiamo dalla meccanica quantistica che $\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}\vec{L}$. Per il momento magnetico intrinseco \vec{S} dell'elettrone risulta $\mu_e = g\frac{e\hbar}{2m_e c}S$ con $g = 2$ fattore giromagnetico e $\frac{e\hbar}{2m_e c}$ magnetone di Bohr. Analogamente per protone e neutrone $\mu_{p/n} = g_{p/n}\frac{e\hbar}{2m_{p/n}c}S$ con i fattori giromagnetici che valgono rispettivamente $g_p = 5.6$ e $g_n = -3.826$. Inoltre chiamiamo $\frac{e\hbar}{2m_p c} \equiv \mu_N$ magnetone nucleare.

Ricordando che $S = 1/2$ troviamo quindi che $\mu_p = 2.79 \mu_N$ e $\mu_n = -1.913 \mu_N$, questi momenti magnetici vengono detti *anomali* perché con fattori giromagnetici diversi, rispettivamente, da quello dell'elettrone e da 0 (poiché il neutrone ha carica nulla). La causa viene attribuita al fatto che questi nucleoni non si possano considerare puntiformi come l'elettrone. L'anomalia fornisce una stima di g differente da quella aspettata di circa ± 3.7 in entrambi i casi, ciò ci suggerisce che sia data da una configurazione di quarks simili all'interno dei nucleoni.

Ricapitolando, secondo Yukawa, l'Hamiltoniana nucleare è

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ij}, \quad \text{con } V_{ij}(r) = -g \frac{e^{-m_\pi r_{ij}}}{r_{ij}}$$

e $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Per l'atomo di deuterio quindi

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V_{12}$$

che deve risultare invariante per trasformazioni di Galileo: dividiamo il moto del centro di massa da quello relativo. Definendo $\vec{p} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$, $\vec{r} = \vec{r}_{ij}$, $\vec{p}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$,

$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ sappiamo valere $[p_\alpha, r_\beta] = -i\hbar\delta_\beta^\alpha$ con α e β che individuano le tre coordinate spaziali. Effettuando il cambio di variabile riscriviamo l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_{CM}^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + V_{12}(|\vec{r}|)$$

della quale a noi interessa essenzialmente solo parte della dinamica relativa:

$$H_{int} = \frac{p^2}{2\mu} + V_{12}(|\vec{r}|)$$

con $\mu = m/2$ massa ridotta.

Il momento magnetico totale del deuterio è dato però da

$$\vec{\mu}_D = \vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n + \frac{e}{2mc} \vec{L}$$

quindi è presente anche il contributo non intrinseco dato dal momento angolare relativo $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Misurando μ_D , μ_p , μ_n , però, dalla relazione precedente si trova che $\vec{L} = 0$ (entro circa il 2%). Quindi capiamo che non c'è momento angolare relativo e che l , che è un buon numero quantico essendo l'Hamiltoniana centrale, risulta uguale a 0 per lo stato fondamentale. Infine, dalle osservazioni precedenti sappiamo che $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = 1$, ma $\vec{L} = 0$, quindi $\vec{S} = \vec{S}_p + \vec{S}_n = 1$.

3.2 L'isospin

Lezione 2 Aprile 2020

Il concetto di isospin e relativi esercizi. L'operatore di carica nel formalismo di isospin. Gli stati di singoletto e tripletto di isospin.

Poiché abbiamo osservato che le interazioni protone-protone e neutrone-neutrone non mostrano stati legati allora il potenziale nucleare deve tenere conto di una differenza in base al tipo di nucleoni che interagiscono. Introduciamo allora l'*isospin*, un numero quantico aggiuntivo, per tenere conto di questa distinzione.

Lo indichiamo con la lettera $\vec{\tau}$, in analogia con \vec{S} per lo spin. Proseguendo l'analogia indichiamo con $\vec{\tau}$ l'operatore che nel caso dello spin definivamo con $\vec{\sigma}$, ovvero per le varie componenti abbiamo le matrici di Pauli

$$\tau^x = \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^y = \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^z = \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi $\vec{\tau} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$. Lo stato di un protone e di un neutrone saranno rappresentati, rispettivamente, dagli spinori

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

in questo modo $t^z|p\rangle = 1/2\tau^z|p\rangle = +1/2|p\rangle$ e $t^z|n\rangle = -1/2|n\rangle$. Continuando l'analogia definiamo $t^\pm = t^x \pm t^y$ in modo che

$$t^+|p\rangle = t^-|n\rangle = 0, \quad t^+|n\rangle = |p\rangle, \quad t^-|p\rangle = |n\rangle.$$

Vale anche

$$|\vec{t}|^2 = (t^z)^2 + \frac{1}{2}(t^+t^-) + \frac{1}{2}(t^-t^+) \implies \begin{cases} |\vec{t}|^2|p\rangle = t(t+1)|p\rangle \\ |\vec{t}|^2|n\rangle = t(t+1)|n\rangle \end{cases}$$

con $t = 1/2$. Si vede che il quadrato delle componenti di \vec{t} sono l'identità, pertanto $|\vec{t}|^2 = \frac{3}{4}\mathbb{1}$. Ora introduciamo l'operatore di carica

$$\hat{Q} = e\left(\frac{\mathbb{1} + \tau^z}{2}\right) = e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ci fornisce i risultati $\hat{Q}|p\rangle = e|p\rangle$ e $\hat{Q}|n\rangle = 0|n\rangle$. Chiaramente su un nucleo con A nucleoni, di cui Z protoni si ottiene $\hat{Q}|A\rangle = \sum_{i=1}^Z \hat{Q}_i|A\rangle = eZ|A\rangle$.

L'operatore che conta la differenza tra N e Z invece è $-2T^z$ con $T^z \equiv \sum_i t_i^z$, infatti

$$-2T^z|A\rangle = (N - Z)|A\rangle$$

Ricordiamo, en passant, che valgono le regole di commutazione

$$[\tau^\alpha, \tau^\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\tau^\gamma$$

Nel caso di due nucleoni di isospin \vec{t}_1 e \vec{t}_2 abbiamo $\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$.

Vale la tabella seguente

T^z	$T = 1$	$T = 0$	Q
1	pp	\times	$2e$
0	$\frac{1}{2}(pn\rangle + np\rangle)$	$\frac{1}{2}(pn\rangle - np\rangle)$	e
-1	nn	\times	0

infatti

$$T^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)\mathbb{1} + t_1^z t_2^z + t_2^z t_1^z + t_1^+ t_2^- + t_1^- t_2^+$$

e

$$\begin{cases} T^2|pp\rangle = 2|pp\rangle = 1(1+1)|pp\rangle \Rightarrow T = 1 \\ T^2|nn\rangle = 2|nn\rangle = 1(1+1)|nn\rangle \Rightarrow T = 1 \\ T^2|pn\rangle = |pn\rangle + |np\rangle \Rightarrow T^2\left[\frac{|pn\rangle + |np\rangle}{\sqrt{2}}\right] = 2\frac{|pn\rangle + |np\rangle}{\sqrt{2}} = 1(1+1)\frac{|pn\rangle + |np\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow T = 1 \\ T^2|np\rangle = |pn\rangle - |np\rangle \Rightarrow T^2\left[\frac{|pn\rangle - |np\rangle}{\sqrt{2}}\right] = 0\frac{|pn\rangle - |np\rangle}{\sqrt{2}} = 0(0+1)\frac{|pn\rangle - |np\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow T = 0 \end{cases}$$

dove per $T = 0$ si ha lo stato di singoletto con combinazione asimmetrica, analogamente al caso dello spin. Notiamo che quanto trovato risulta in accordo con il fatto

che per qualche momento angolare somma di altri due $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ deve valere

$$|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2.$$

Lezione 3 Aprile 2020

I termini di spin e isospin nel potenziale nucleare. Informazioni dallo scattering nucleone-nucleone. Il potenziale di scambio.

Continuiamo il discorso sulla forma del potenziale nucleare. Nella lezione precedente si è introdotto il grado di libertà di isospin, per trattare le interazioni di particelle indistinguibili. Nel caso del deuterio, la forza forte crea uno stato legato tra il protone ed il neutrone. Nel caso che già conosciamo (no isospin) vale

$$J = 1 \quad L = 0 \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad \Rightarrow S = 1$$

Si sa quindi che uno sto legato predilige $S = 1$, questo ci fa pensare che la forza forte dipende in qualche modo anche dallo spin.

Nel corso di questa lezione si andrà a valutare il potenziale nucleare, in particolare tramite argomenti teorici e sperimentali, andremo ad affinare sempre di più questo potenziale, per tenere conto diversi aspetti della materia.

Nel caso in cui consideriamo due particelle con spin relativamente $S_1 = 1/2$ e $S_2 = 1/2$ e visto che $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, si può avere $S = 0$ (stato di singoletto) o $S = 1$ (stato di tripletto). Secondo il modello di Yukawa il potenziale nucleare, come già visto è dato dalla forma

$$V(r) = -g \frac{e^{-m_\pi r}}{r}$$

ma come abbiamo ipotizzato sopra, questa informazione non basta, vanno infatti implementati altri termini che tengono conto dello spin.

Quello che conosco sono \vec{S}_1 e \vec{S}_2 , o analogamente, solo per un fattore moltiplicativo davanti, conosco $\vec{\sigma}_1 = 2\vec{S}_1$ e $\vec{\sigma}_2 = 2\vec{S}_2$. Ora devo costruire un operatore a partire da questi vettori, che mi permetta di costruire una hamiltoniana che mi tiene conto dello spin. Per introdurre dunque un termine che tiene conto di $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ nel potenziale di Yukawa, posso introdurre l'operatore $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$ (giungerei alle stesse conclusioni se scegliessi il quadrato di questo). Sempre per ragioni puramente discorsive non possiamo scegliere l'operatore $(\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2)$ perché questo restituirebbe un vettore che non posso inserire nella hamiltoniana (energia è uno scalare). Quindi introduciamo anche questo nuovo pezzo nel potenziale nucleare, in modo da ottenere:

$$V(r) = -g \frac{e^{-m_\pi r}}{r} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

Abbiamo fino ad ora trattato, nel deuterio, il protone ed il neutrone come particelle indistinguibili, però con un grado di libertà ulteriore, ovvero il numero quantico di isospin.

Abbiamo visto che il protone ha isospin $t_1 = 1/2$ ed anche il neutrone ha $t_2 = 1/2$, quello che cambia è la terza componente $t_1^z = 1/2$ in un caso e $t_2^z = -1/2$ nell'altro.

A questo punto ci chiediamo quanto vale l'isospin totale $\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$?

A quanto già accennato sopra, sappiamo che l'isospin totale del deuterio può assumere i valori $T = 0$ (stato singoletto) o $T = 1$ (stato tripletto). Non può nemmeno essere una combinazione lineare tra $T = 0$ e $T = 1$, questo infatti è vietato dal principio di esclusione di Pauli. Ora da quel che si ricorda, il principio di Pauli è riferito agli elettroni, e in quel caso veniva richiesto che la funzione d'onda dovesse essere antisimmetrica.

Introduciamo ora il **principio di Pauli generalizzato** alle particelle con numeri quantici additivi.

Nel caso di due elettroni valeva che il momento angolare relativo tra i due determinasse la parità per scambio $L \Rightarrow \Psi_L(1 \leftrightarrow 2) \sim (-)^L$, quindi L pari bosoni, L dispari fermioni. Esempio sono le armoniche sferiche, che hanno parità per scambio $PY_{lm} = (-)^P Y_{lm}$. Ma sappiamo che anche lo spin porta informazione, quindi la parità in questo caso si traduce come $(-)^{L+S+1} = (-)$ (combinazione deve darmi una funzione d'onda antisimmetrica). Introducendo allo stesso modo anche il numero quantico di isospin, ottengo il principio di esclusione di Pauli generalizzato, della forma:

$$(-)^{L+S+T} = (-)$$

in altre parole combino come voglio i tre numeri quantici, ma devo ottenere alla fine un'antisimmetria. La validità di questo principio è un'informazione in più al problema che mi permette di studiare diversi casi possibili nel caso di interazione protone-neutrone.

Nell'esempio sopra del deuterio, se ho $L = 0$ ed $S = 1$, in conformità di questo principio, dovrò avere $T = 0$.

Il canale $T = 1$ non genera stato legato, nessuna interazione forte (deuterio ha $T = 0$). Vediamo nello specifico come si comporta questo canale, no stato legato:

$$t_1^z + t_2^z = +1 \Rightarrow \text{stato } T = 1 \begin{cases} T_z = +1 & \Rightarrow +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = +1 & \text{protone-protone} \\ T_z = 0 & \Rightarrow +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 & \text{protone-neutrone} \\ T_z = -1 & \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 & \text{neutrone-neutrone} \end{cases}$$

Per un ragionamento analogo al precedente il potenziale nucleare di Yukawa deve dipendere in qualche misura anche dall'isospin, quindi introduciamo un termine che tiene traccia di questo grado di libertà:

$$V(r) = -g \frac{e^{-m_\pi r}}{r} (\mathbb{1} + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)$$

Sto costruendo un potenziale che mi tenga conto delle evidenze sperimentali. Visto che il $T = 1$ non costituisce stati legati, il caso con $T_z = 0$ non è il caso del deuterio, visto che porta ad una funzione d'onda simmetrica.

Lavoriamo ora con la notazione spettroscopica per il deuterio $L = 0$ (protone-neutrone), cioè troviamo tutte le possibili combinazioni di numeri quantici, ricordiamo la nota-

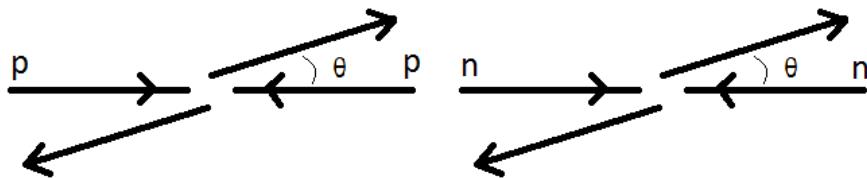
zione (J momento angolare totale):

$$^{2T+1} \text{ } ^{2S+1} s_J$$

Per le varie possibili combinazioni teniamo ovviamente presente il principio di esclusione di Pauli.

$$^1 \text{ } ^3 s_1 \quad ^3 \text{ } ^1 s_0 \quad ^3 \text{ } ^1 d_2$$

Delle possibili soluzioni, la prima rappresenta lo stato legato, la seconda è uno stato di scattering tra protone e neutrone, mentre la terza è uno stato di tripletto e può essere stato protone-protone.



Abbiamo riportato il disegno di un urto tra protone-protone e neutrone-neutrone. Questi rappresentano degli esperimenti che si possono fare per studiare l'interazione forte di Yukawa. Nel caso di far scontrare due protoni, è facile in quanto controllare le cariche è fattibile, più difficile diventa controllare i neutroni, in quel caso negli esperimenti si lavora con il deuterio e poi nel momento dell'analisi viene tolto il contributo del protone, che si conosce. Da questi esperimenti si riesce a studiare la probabilità che si trovino i frammenti ad un certo angolo di deflessione θ dopo l'urto, in modo tale da studiare il comportamento della forza forte. Dagli esperimenti si osserva che nel caso dei protoni e neutroni il comportamento è circa il medesimo (ovviamente nel caso dei protoni va sottratto il contributo dato da lo scattering Rutherford dovuto alla carica). Si conclude che la forza forte non distingue il caso $T_z = +1$ o $T_z = -1$. Dagli esperimenti inoltre si osserva che anche nel caso $T_z = 0$, i dati si comportano analogamente, purché il protone e neutrone in considerazione siano nello stato di isospin $T = 1$ ($T_z = 0$). Ritornando al caso protone-protone e neutrone-neutrone si osserva in più, una volta sottratta l'interazione di Coulomb, è la simmetria delle forze nucleari, e questo è dovuto ancora una volta al fatto che la forza forte è uguale sia che si instauri tra neutroni che protoni. Da queste evidenze sperimentali, si evince un principio, che cade sotto il nome di **indipendenza di carica**, ovvero quando gli stati selezionati sono in un caso di tripletto, la forza nucleare è la stessa. Quindi T è un buon numero quantico, il potenziale nucleare non fa distinzione in quale caso ci si trova ($T_z = +1, 0, -1$) nel caso del tripletto ($T = 1$), mentre fa distinzione tra il caso $T = 1$ e $T = 0$ (stato legato, deuterio), come deve essere. **L'indipendenza di carica** non significa che posso mischiare qualsiasi cosa tra protoni e neutroni, e aspettarmi che la forza forte sia sempre la stessa, ciò dipende fortemente da T . Per ricapitolare i concetti fondamentali sono **l'indipendenza di carica** e **la simmetria di carica** (che è tecnicamente compresa nel principio precedente). Il potenziale nucleare distingue il caso $T = 0, 1$ ed in più soddisfa **l'indipendenza di carica**. Si dimostra infatti il

seguente asserto, che torna molto utile per la distinzione dei vari casi nell'approccio sperimentale,

$$\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 |T = 0 \ T_z = 0\rangle = -3 |T = 0 \ T_z = 0\rangle \quad \text{autovalore } (-3) \text{ stato singoletto}$$

$$\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 |T = 1 \ T_z = 0, \pm 1\rangle = +1 |T = 1 \ T_z = 0, \pm 1\rangle \quad \text{autovalore } (+1) \text{ stato tripletto}$$

Nella figura (9) seguente sono rappresentati dei dati sperimentali degli angoli formati dai frammenti dopo l'urto neutrone-protone, per diverse energie.

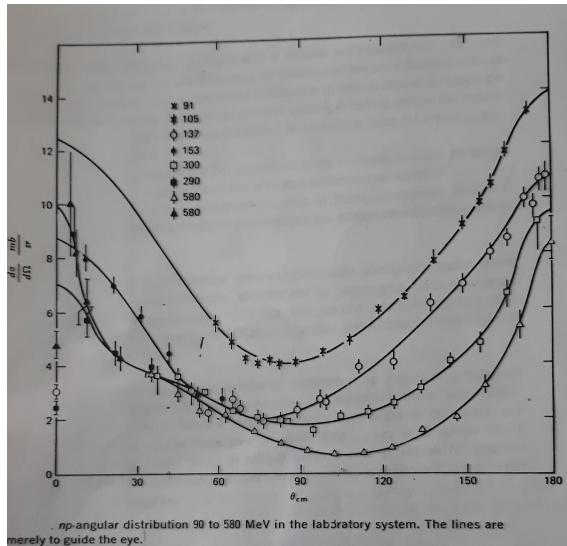


Figura 9: Distribuzione angolare urto neutrone-protone per diverse energie.

Mentre in un'altra immagine (10), è rappresentato il grafico della forza nucleare in funzione dell'angolo dei frammenti dopo l'urto protone-protone.

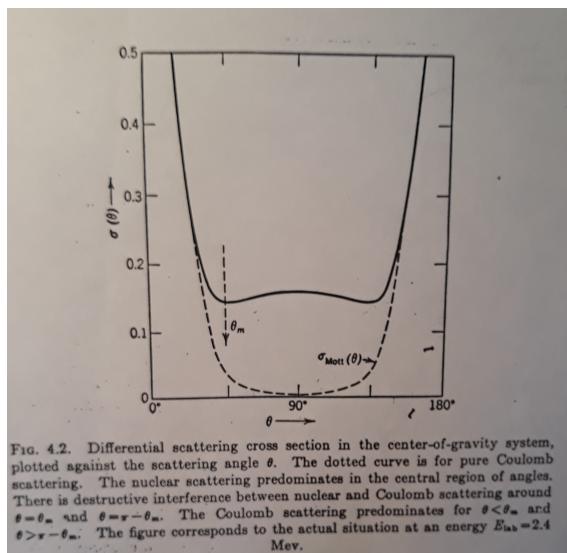


Figura 10: Distribuzione angolare urto protone-protone.

In questo grafico, la curva tratteggiata rappresenta la σ di Rutherford corretta relativisticamente (dovuta alla sola interazione coulombiana), perciò $\sigma \propto 1/\sin^2(\theta/2)$.

Qui si osserva naturalmente una simmetria in riferimento all'angolo di $\pi/2$, tra angoli "in avanti" e quelli "in indietro" (disegno (11)). Nel risultato finale (curva non tratteggiata) si tiene conto dell'interazione forte, non solo la parte coulombiana (tratteggiata). Per piccoli angoli ci sono poche deviazioni, significa che le particelle passano abbastanza distante tra di loro da non sentire molto l'interazione forte, quindi sentiranno maggiormente l'interazione coulombiana.

In un'altra immagine (11) rappresentiamo ancora queste curve sia nel caso urto protone-protone che neutrone-protone, per diverse energie.

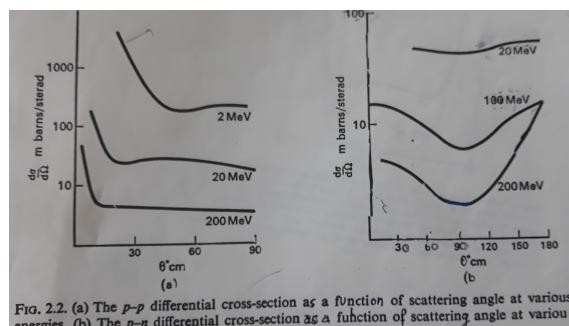
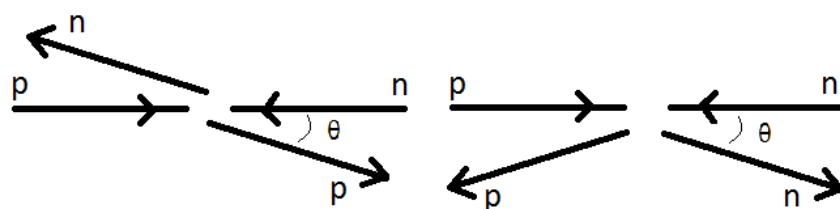


FIG. 2.2. (a) The $p-p$ differential cross-section as a function of scattering angle at various energies. (b) The $p-n$ differential cross-section as a function of scattering angle at various energies.

Figura 11: Distribuzione angolare urto protone-protone (a) e neutrone-protone (b), per diverse energie.

In questo caso non vale più l'indistinguibilità tra protoni e neutroni, quindi perdo la simmetria. Man mano che aumenta l'energia, mi aspetto privilegiati gli angoli "in avanti", non "in indietro". Nel caso reale, per ciò che riguarda l'urto protoni-neutroni, quasi analogamente a protoni-protoni, contro intuitivamente, più l'energia aumenta, più vengono contate le particelle che tornano indietro (angoli "in indietro"), e si ha una sorta di simmetria, ma come si interpreta? Per farlo consideriamo il disegno sottostante e lo schema (8), proposto nelle lezioni precedenti quando si è parato dei pioni, che riproponiamo sotto (12) il caso particolare che ci interessa.



Teoricamente quando neutrone e protone si avvicinano, questi iniziano a scambiarsi qualcosa (ragionamento di Yukawa), si scambiano delle particelle chiamate pioni. Esistono tre tipi di pioni, che si indicano con π , alcuni dei quali possono avere carica (π^+ e π^-), altri no (π^0). Si può assegnare un isospin anche ai pioni, se li considero indistinguibili ($t = 1$ con $t_z = +1, 0, -1$). Quando neutrone e protone sono vicini a sufficienza, questi possono scambiarsi un pione carico positivo π^+ , così facendo, il protone diventa neutrone e il neutrone diventa protone come nello schema sotto (12). Quindi in realtà il disegno sopra lo interpreto in questo modo, sfruttando questa idea di

trasformazione con il pione, perciò l'idea di "avanti" e "indietro" si spiega con una trasformazione, in questo modo il concetto prima contro-intuitivo diventa ora più chiaro.

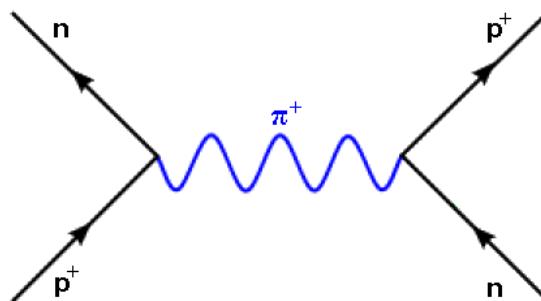


Figura 12: Pione π^+ , neutrone, protone.

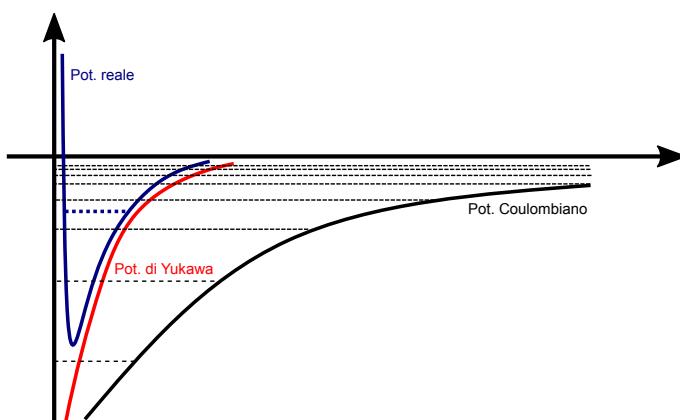
Questo particolare fenomeno porta alla formalizzazione di un operatore che scambia protoni e neutroni. Si dimostra che un operatore che fa questo può essere espresso nella forma:

$$\frac{1}{2} (1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) |pn\rangle = |np\rangle$$

vengono scambiati così protoni e neutroni (autostati). Tenendo conto di questi effetti, il potenziale nucleare si scrive come:

$$V(r) = -g \frac{e^{-m_\pi r}}{r} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + 1)$$

Il primo termine moltiplicativo è il potenziale di Yukawa già studiato, e tiene conto delle distanze in gioco, la prima parentesi tiene conto dello spin, mentre la seconda parentesi tiene conto dell'isospin. Abbiamo trovato una forma di potenziale che non dipende solo dalla distanza, ma anche dallo spin e dall'isospin. Nel grafico sono mostrati tre potenziali, quello di Coulomb, quello di Yukawa e infine uno che meglio si applica al caso reale (disegnato secondo considerazioni fisiche).



Nelle prime due curve, la "divergenza" veloce del grafico è dovuta a particelle che arrivano molto vicine, quindi interagiscono. Ma nella realtà le particelle vanno considerate come degli oggetti solidi che hanno un volume seppur piccolo. Quindi quel-

che si fa è considerare una sorta di potenziale a barriera negli intorni di distanza zero (l'andamento del potenziale è simile a quello di Lennard-Jones per capirsi). Infatti basti a pensare a due particelle che si scontrano come due biglie solide che si scontrano oppure un proiettile che sbatte contro un muro, quindi alto sarà il numero di particelle che torna indietro. Quindi un'altra proprietà fondamentale del potenziale nucleare, che la formula sopra non tiene conto, è *hard-core*, ovvero questa proprietà di rigidità che hanno i nuclei (non considerati corpi puntiformi). Considerando questo potenziale "reale" appena introdotto, si può spiegare come il deuterio ha un solo stato legato; considerando invece il potenziale di Yukawa, sarebbe concesso più di uno stato legato (si capisce dalla forma del grafico). Per concludere la forma trovata del potenziale nucleare è più precisa rispetto a quella di partenza, ma tuttavia non è sufficiente, necessita infatti di ulteriori miglioramenti e precisazioni per poter essere confrontata con il modello "reale".

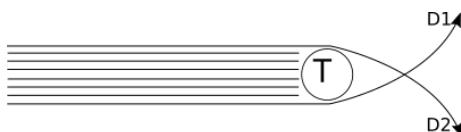
3.3 Termini di spin-orbita e tensoriale

Lezione 9 Aprile 2020

I termini di spin-orbita e tensoriale nel potenziale nucleare. Potenziali fenomenologici, a scambio di bosoni e basati su teorie di campo efficaci.

Da osservazioni sperimentali emerge la necessità di aggiungere altri termini al potenziale fino ad ora utilizzato.

Il primo proviene dal seguente esperimento: un fascio di protoni con spin allineati grazie ad un campo magnetico viene fatto incidere su una targhetta T , con un'interazione di tipo attrattivo. Posizioniamo poi due rivelatori $D1$ e $D2$ per misurare in che direzione viene subita una deflessione delle particelle.



Ci si aspetterebbe di ottenere un numero di conteggio circa uguale per i due detector: non è così. La causa è attribuita al fatto che i protoni incidenti e quelli presenti nella targhetta agiscano in maniera differente in base al momento angolare e allo spin di ogni protone, infatti, se così non fosse ci si ritroverebbe con lo stesso numero di conteggi su $D1$ e $D2$. Allora si introduce nel potenziale nucleare un termine dovuto alle grandezze sopracitate: un termine di *spin-orbita* $\vec{L} \cdot \vec{S}$.

Come visto in precedenza il nucleo di deuterio presenta un momento di quadrupolo, il che significa che la densità di probabilità del protone non presenta una distribuzione sferica, ma ellissoidale. Di conseguenza V non può dipendere solo da $|\vec{r}|$, ma anche da \hat{r} . Per tenere conto questo termine, introduciamo l'operatore

$$(\vec{\sigma}_1 \times \hat{e})(\vec{\sigma}_2 \times \hat{e}) = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - (\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{e})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{e}),$$

che viene inserito nel potenziale come

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{e})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{e}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

chiamato *operatore tensoriale* non centrale. Chiaramente ora bisogna fare una valutazione sui numeri quantici dell'Hamiltoniana. Sappiamo che il momento angolare totale $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ si conserva e dobbiamo chiederci se L^2, L^z, S^2, S^z sono ancora costanti del moto in questo caso. Quello che si vede è che, tra le precedenti, l'unica quantità conservata è S^2 .

L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V_{12}(|\vec{r}|) = \frac{p^2}{2\mu} + \left(\mathbb{1}V_c(r) + V_s(r)\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_{so}(r)\vec{L} \cdot \vec{S} + V_T(r)S_{12} \right) \left(\mathbb{1} + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right)$$

con V_c, V_{so}, V_s, V_T coefficienti che sono da determinare a posteriori con approccio fenomenologico. Ad oggi il potenziale più accurato tiene conto di un numero di parametri da determinare che si aggira fra 30 e 40. Per fare un fit di tutte si devono avere almeno 4000 osservabili, che vengono raccolte facendo esperimenti di scattering protone-neutrone a diversi angoli ed energie ed osservando la sezione d'urto (con distribuzioni angolari).

Per atomi con più nucleoni quello che si fa è andare ad utilizzare il potenziale trovato con questo approccio fenomenologico su tutte le coppie di nucleoni, ad esempio per il trizio $V = V_{12} + V_{13} + V_{23}$. Facendo così però si vede che la forza di legame risulta 7.8 Mev, anziché gli 8.48 MeV misurati sperimentalmente. Il problema è che bisogna aggiungere un ulteriore termine nel potenziale V_{123} che tenga conto dell'interazione a 3. Nel caso generale

$$H = T + \sum_{i < j} V_{ij} + \sum_{i < j < k} V_{ijk} + \dots + \sum_{i < j < k < \dots < n} V_{ij\dots n}$$

dove il contributo dei potenziali che tengono conto di più nucleoni sono sempre più piccoli di quelli che tengono conto di meno nucleoni. Sintetizzando quindi sono presenti principalmente due frontiere per questa branca della fisica. La prima è quella della QCD che vuole studiare la dinamica nucleare a livello di quarks od oggetti elementari. La seconda è quella che tenta di trovare soluzioni per l'equazione di Schrödinger a molti corpi e quindi essere predittivi anche per atomi più grandi. Le strade percorribili in questa seconda frontiera sono diverse. Una è quella dell'approccio fenomenologico già esposto; un'altra è quella che, sempre attraverso le osservazioni e fit, migliora sempre più le forme dei potenziali $V_{ij\dots n}$ (chiamata *Effective Field Theory*); oppure c'è quella dell'OBEP (*One Boson Exchange Potential*) ovvero un adattamento di Yukawa che, tenendo conto anche di spin ed isospin dei nucleoni, porta ad un potenziale del tipo

$$V = \left[\frac{e^{-m_\pi r}}{r} \left(\mathbb{1} + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right) + V_T S_{12} \right] \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

che assomiglia molto a quello trovato con approccio fenomenologico.

Al momento l'EFT sembra la strada più percorribile, o quantomeno la meno trafficata, sebbene il risultato dei fit sui 20 parametri circa del potenziale presenti un *chi-quadrato* superiore a quello dell' approccio fenomenologico.

Come nota storica si riporta che l'approccio di Yukawa si è rivelato valido anche quando, al posto del piona, si è supposto ci fosse uno scambio di altri mesoni tra i nucleoni. I mesoni sono particelle con spin intero, composti da 2 quarks, che hanno massa compresa tra quella del protone e quella dell'elettrone. Quello che è emerso è che dallo scambio del mesone ρ il potenziale prendeva un termine di spin-orbita, mentre dal mesone ω si ottiene un termine proporzionale a L^2 , e via così per altri termini.

3.4 L'equazione di Schrödinger per potenziali centrali

Lezione 10 Aprile 2020

L'equazione di Schrödinger per potenziali non centrali. Il sistema di equazioni differenziali accoppiate. Il caso del deuterio.

Abbiamo già visto che per il moto relativo nel nucleo di deuterio, con potenziale centrale, abbiamo

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V(r),$$

e dalla meccanica quantistica $\vec{p}^2 \rightarrow -\hbar^2 \vec{\Delta}^2$ con il laplaciano che, in coordinate sferiche, si scrive

$$\vec{\Delta}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

e si vede che

$$\vec{L}^2 \rightarrow -\hbar^2 \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

che sostituito nell'equazione di Schrödinger dà

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi_{rel}(r, \theta, \phi) = E_{rel} \psi_{rel}(r, \theta, \phi).$$

Sappiamo risolvere questa equazione separando le variabili

$$\psi_{rel}(r, \theta, \phi) \equiv R(r)Y(\theta, \phi)$$

e, moltiplicando l'equazione precedente per $2\mu r^2/\hbar^2 \psi$ e mettendo $\hbar = c = 1$, otteniamo

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d^2}{dr^2} (rR(r)) + 2\mu r^2 (E_{rel} - V(r)) = \frac{1}{Y(\theta, \phi)} L^2 Y(\theta, \phi).$$

Poiché il membro di sinistra dipende solamente da r e quello di destra solamente da \hat{r} , per essere verificata l'uguaglianza entrambi i membri devono essere costanti

$$L^2 Y(\theta, \phi) = \alpha(\theta, \phi)$$

dove scriviamo $\alpha \equiv l(l+1)$ con $l = 0, 1, 2, \dots$ e $Y(\theta, \phi) \equiv Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$ con $m_l = -l, \dots, l$.

Ricordiamo che si trova che le $Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$ sono dette *armoniche sferiche* e sono tra loro ortogonali per numeri quantici differenti, ed inoltre hanno una parità data da $(-1)^l$. Un autostato dell'Hamiltoniana si scrive

$$|\psi\rangle = |E\ l\ m_l\rangle \rightarrow \psi_{rel}(\vec{r}) = R_l(r)Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$$

e $\langle E\ l\ m_l | E\ l\ m_l \rangle = 1$ Per quanto riguarda $R(r)$ invece bisogna risolvere

$$\frac{r^2}{rR_l(r)} \frac{d^2}{dr^2}(rR_l(r)) + 2\mu r^2(E_{rel} - V(r)) = l(l+1)$$

ovvero l'equazione radiale

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR_l(r)) = -2\mu \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] rR_l(r)$$

che si risolve più comodamente definendo $u_l(r) \equiv rR_l(r)$ con $u_l(0) = 0$ condizione all'origine. Per potenziali che soddisfano $|V(r \rightarrow 0)| \leq r^{-\beta}$, $\beta < 2$ abbiamo che nel limite $r \rightarrow 0$ l'equazione radiale è

$$\frac{d^2}{dr^2}u_l(r) = \frac{l(l+1)}{r^2}u_l(r)$$

con soluzioni r^{-l} e r^{l+1} , ma dobbiamo scartare la prima per la condizione all'origine. Per $r \rightarrow \infty$ invece, con un potenziale che si annulla all'infinito, vale

$$\frac{d^2}{dr^2}u_l(r) = 2\mu E u_l(r) \longrightarrow u_l(r \rightarrow \infty) \rightarrow e^{-\sqrt{2\mu|E|r}}$$

Arrivati a questo punto ricordiamo che è molto difficile risolvere analiticamente l'equazione radiale, se non in casi relativamente semplice come l'oscillatore armonico o l'atomo di idrogeno. Per un potenziale più complicato, come quello di Yukawa ad esempio, si fa uso di soluzioni numeriche.

3.5 L'equazione di Schrödinger per potenziali non centrali

Nel caso in cui il potenziale non sia centrale l'equazione di Schrödinger assume la forma

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(\vec{r}) \right] \psi_{rel}(r, \theta, \phi) = E_{rel} \psi_{rel}(r, \theta, \phi). \quad (4)$$

che si risolve esprimendo

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l'} \sum_{m_{l'}=-l'}^{+l'} \psi_{l'm_{l'}}(\vec{r}) Y_{l'm_{l'}}(\hat{r}) \quad (5)$$

poiché $|\psi\rangle = \sum_{l'm'} |l'm'\rangle \langle l'm'| \psi$.

Ora definiamo $\psi_{lm} \equiv u_{lm}/r$, inseriamo l'ultima espressione per $\psi(\vec{r})$ nell'equazione (4), la moltiplichiamo a sinistra per $Y_{lm}^*(\hat{r})$ e integriamo sull'angolo solido per ottenere

$$\frac{d^2 u_{lm_l}(r)}{dr^2} = -2\mu \left[E - \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u_{lm_l}(r) + 2\mu \sum_{l'm'_l} \left[\int d\Omega Y_{lm_l}^*(\hat{r}) V(\vec{r}) Y_{l'm'_l}(\hat{r}) \right] u_{l'm'_l}(r)$$

Chiamiamo per comodità

$$V_{lm_l l'm'_l}(r) \equiv \left[\int d\Omega Y_{lm_l}^*(\hat{r}) V(\vec{r}) Y_{l'm'_l}(\hat{r}) \right]$$

in modo da scrivere

$$\frac{d^2 u_{lm_l}(r)}{dr^2} = -2\mu \left[E - \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u_{lm_l}(r) + 2\mu \sum_{l'm'_l} V_{lm_l l'm'_l}(r) u_{l'm'_l}(r) \quad (6)$$

Ricapitolando per trovare la soluzione $\psi(\vec{r})$ devo risolvere le equazioni per tutte le $\psi_{lm}(r)$ (in quanto ψ ne è una combinazione lineare) e queste ultime sono date dall'equazione differenziale (6). La difficoltà ulteriore sta nel fatto che queste equazioni differenziali sono tutte accoppiate tra loro.

Quando è presente anche lo spin la funzione d'onda prende un termine χ riferito ad esso. Vediamo ancora l'esempio del deuterio: si ricorda che $J = 1$ e $L = 0$, ma presentando il nucleo un momento di quadrupolo siamo portati ad escludere L come buon numero quantico poiché L^2 non è una costante del moto. Sapendo che $S = 1$ e $J = 1$ allora L può assumere solamente i valori 0, 1 e 2, ma 1 è da escludere perché se nella funzione d'onda del deuterio ci fosse un termine con $L = 1$ allora ci sarebbe un'armonica sferica con parità negativa, essendo la parità data da $(-1)^l$. Ciò non è però possibile perché nel caso di interazione forte la parità viene conservata: la parità della funzione deve essere ben definita. Per questi motivi la somma su l' nell'equazione (5) è solo una somma di un termine con $l' = 0$ e di uno con $l' = 2$.

Tenendo anche conto dello spin la funzione d'onda del deuterio è

$$\psi_D \equiv \psi_{J=1 M} = \sum_{L=0,2} \psi_{1M}^{L S=1}(r) \mathcal{Y}_{1M}^{L1}(\hat{r})$$

avendo definito

$$\mathcal{Y}_{1M}^{L1}(\hat{r}) \equiv \sum_{M_L m_S} C_{1M}^{LM_L S m_S} Y_{LM_L}(\hat{r}) \chi_{S=1}^{m_S}$$

con $C_{1M}^{LM_L S m_S}$ coefficienti di Clebsch-Gordan. Semplifichiamo ricordando che $m_S = M - M_L$

$$\mathcal{Y}_{1M}^{L1}(\hat{r}) \equiv \sum_{M_L} C_{1M}^{LM_L S(M-M_L)} Y_{LM_L}(\hat{r}) \chi_{S=1}^{M-M_L}$$

In definitiva per il deuterio devo risolvere solo due equazioni accoppiate, cosa che tipicamente viene fatta a livello numerico. Per un potenziale della forma

$$V(\vec{r}) = V_c(r) + V_T(r)S_{12}$$

le equazioni accoppiate sono

$$\begin{cases} \frac{d^2u(r)}{dr^2} = -2\mu \left[E - V_c(r) \right] u(r) + 2\mu\sqrt{8}V_T(r)w(r) \\ \frac{d^2w(r)}{dr^2} = 2\mu\sqrt{8}V_T(r)u(r) - 2\mu \left[E - \frac{6}{2\mu r^2} + V_T(r) \right] w(r) \end{cases} \quad (7)$$

definite

$$u(r) \equiv r\psi_{1M}^{01}, \quad w(r) \equiv r\psi_{1M}^{21}. \quad (8)$$

3.6 Momento magnetico

Lezione 16 Aprile 2020

I momenti magnetici nucleari . La risonanza magnetica nucleare. L'operatore momento magnetico nel formalismo dell'isospin. Esercizio sul calcolo del momento magnetico del deuterio.

Ricordiamo che il contributo al momento magnetico di un atomo da parte degli elettroni è dato da,

$$\vec{\mu}_e = \mu_B g \vec{s} \quad \text{con } \mu_B = -\frac{e}{2m_e}$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr e g è il fattore giromagnetico per l'elettrone ($g \simeq 2$). Una cosa analoga viene fatta per il momento magnetico del protone e neutrone, cioè si ha,

$$\vec{\mu}_{p,n} = \mu_N g_{p,n} \vec{s} \quad \text{con } \mu_N = \frac{e}{2M_N}$$

dove μ_N è il magnetone di Nucleare e $g_{p,n}$ è il fattore giromagnetico per il protone e neutrone rispettivamente. Lo studio del momento magnetico del nucleo ha permesso lo sviluppo di molte applicazioni mediche. Per un nucleo posso inoltre definire un fattore giromagnetico per il nucleo, quindi,

$$\hat{\vec{\mu}}_{NUCLEO} \equiv \mu_N g_N \hat{\vec{J}}$$

dove g_N è il fattore giromagnetico del nucleo (si dimostrerà poi che NON corrisponde alla banale somma dei fattori giromagnetici dei protoni e neutroni).

A livello quanto-mecanico, per fare delle misure di questo momento magnetico, devo fare il valor medio di μ_N con la funzione d'onda considerata,

$$\vec{\mu}_{NUCLEO}^{J M} = \langle \Psi_M^J | \hat{\vec{\mu}}_{NUCLEO} | \Psi_M^J \rangle \quad \text{con } -J \leq M \leq +J$$

dove abbiamo specificato i due buoni numeri quantici J, M . Per misurare sperimentalmente questo valore devo innanzitutto inserire il mio nucleo all'interno di un campo magnetico, in questo modo il sistema si polarizza. Scelgo la direzione \hat{z} di polarizzazione, in modo che questa direzione ed il campo \vec{B} siano paralleli. Per la precisione noi misuriamo la componente \hat{z} del momento magnetico (lo polarizziamo). Scelgo i numeri quantici J e $M = J$, così,

$$\mu_z^{J,J} = \langle \Psi_J^J | \hat{\mu}_{NUCLEO}^z | \Psi_J^J \rangle = \mu_N g_N J$$

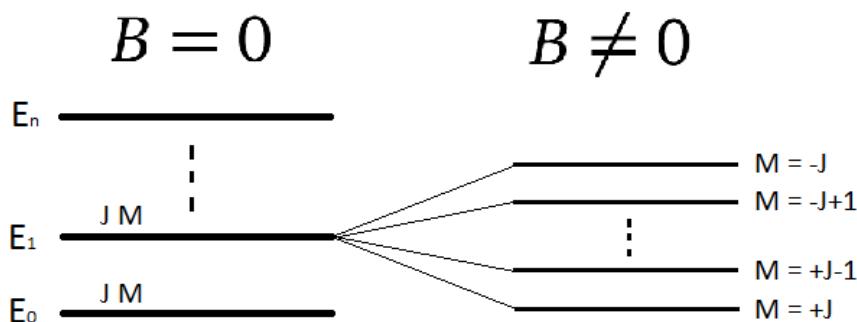
espresso in unità di magnetoni.

Come si trova il fattore giromagnetico del nucleo g_N ? Prima verrà esposto il metodo sperimentale per calcolarlo, poi in maniera teorica.

La Hamiltoniana di un nucleo \hat{H}'_N all'interno di un campo magnetico viene espressa da due termini, la hamiltoniana nucleare imperturbata \hat{H}_N ed il termine perturbativo \hat{W} introdotto dal campo.

$$\hat{H}' = \hat{H}_N + \hat{W} = \hat{H}_N - \hat{\mu} \cdot \vec{B} = \hat{H}_N - \hat{\mu}^z B$$

Quando $B = 0$, il sistema si trova negli autostati della hamiltoniana imperturbata, ma una volta che viene acceso il campo $B \neq 0$, si genera lo splitting energetico dei livelli energetici, come in figura.



Una volta acceso il campo, si calcola facilmente quanto vale lo splitting energetico,

$$\Delta E' = E'_1 - E'_0 = -B \left(\langle \Psi_{J-1}^J | \hat{\mu}_{NUCLEO}^z | \Psi_{J-1}^J \rangle - \langle \Psi_J^J | \hat{\mu}_{NUCLEO}^z | \Psi_J^J \rangle \right) = -B \mu_N g_N [J-1-J] = -B \mu_N g_N$$

Siamo giunti alla conclusione che è lo stesso procedimento fatto per gli elettroni. Maneggiando la formula si arriva a:

$$g_N = \frac{\Delta E'}{B \mu_N}$$

che ci dice che, misurando lo splitting energetico e conoscendo il campo B , si può misurare g_N empiricamente. Nello specifico viene mandato un fotone di energia conosciuta, se questo viene assorbito dal nucleo significa che la frequenza del fotone era precisamente quella necessaria perché il nucleo facesse un salto di livello energetico

nello splitting ($\Delta E' = h\nu$); una volta che conosco la frequenza di assorbimento, ho immediatamente il valore di g .

$$E_\nu = \Delta E' = \hbar\omega = 2\pi\hbar\nu \quad \Rightarrow \quad g_N = \frac{2\pi\hbar\nu}{B\mu_N}$$

Questo è il principio che sta alla base della risonanza nucleare. Vengono emesse delle radiofrequenze e da alcune tabelle (dove sono stati tabulati i vari dati per ogni materiale) vengono riconosciuti gli elementi presenti nei tessuti.

Nella realtà non è possibile, se non in casi specifici, separare il contributo del nucleo da quello degli elettroni, quindi ora consideriamo la hamiltoniana atomica \hat{H}'_A in presenza di un campo magnetico; come prima consideriamo il termine imperturbato \hat{H}_A^0 più i due termini perturbati, uno riferito agli elettroni e uno al nucleo:

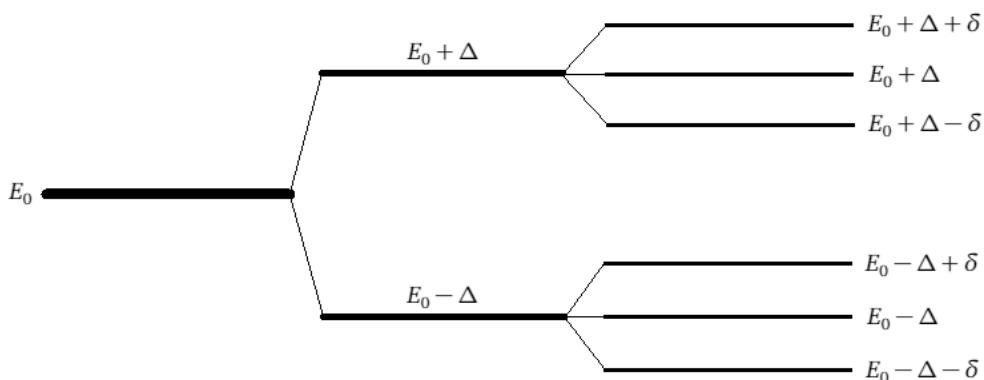
$$\hat{H}'_A = \hat{H}_A^0 - \hat{\mu}_e \cdot \vec{B} - \hat{\mu}_{NUCLEO} \cdot \vec{B}$$

In questo caso più specifico, ci saranno splitting più complicati, lo splitting dovuto al contributo degli elettroni sarà dipendente dal numero quantico J_e (degenerazione $2J_e + 1$), mentre quello dato dal contributo dei nuclei dipenderà da J_N (degenerazione $2J_N + 1$). La degenerazione totale dei livelli energetici splittati sarà data dal prodotto $(2J_e + 1)(2J_N + 1)$.

Esaminiamo l'atomo di deuterio, che ha $J_N = 1$ per il nucleo e $J_e = 1/2$ per l'elettrone, il momento angolare totale sarà dato da $\vec{F} = \vec{J}_N + \vec{J}_e$, con F numero quantico momento angolare totale, con degenerazione $2F + 1$. F può assumere solo due valori: o $F = 1/2$ che ha 2 stati o $F = 3/2$ che ha 4 stati, in tutto il deuterio sottoposto ad un campo magnetico presenta 6 stati energetici (infatti dalla degenerazione $2 \cdot 3 = 6$). Scriviamo ora gli autovalori della hamiltoniana, considerando tutte le possibili combinazioni,

$$E'_A = E_0 - \mu_B g_e \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} B - \mu_N g_N \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} B$$

Ora, chiamando $\Delta = \frac{1}{2}\mu_B g_e B$ e $\delta = \mu_N g_N B$, i casi sono rappresentati in figura.



Osserviamo che siamo in presenza di due splitting, quello maggiore (2) è dovuto al contributo del momento magnetico degli elettroni, mentre gli splitting minori (3) sono dovuti al momento magnetico del nucleo, da ricordare infatti che $\mu_B > \mu_N$. Per studiare sperimentalmente il g_N , ovviamente vanno studiati i salti energetici tra gli splitting minori. Per essere ancora più precisi, quando si studia un atomo, andrebbe considerata anche la sua struttura iperfine, in cui si tiene conto anche dell'interazione tra il momento magnetico degli elettroni e quello del nucleo (si aggiunge questo termine alla hamiltoniana $\vec{J}_e \cdot \vec{J}_N$).

Ora ricaviamo il valore di g_N teoricamente. Ricordiamo che non è semplicemente la somma dei $g_{p,n}$, infatti il momento magnetico non è una proprietà solo intrinseca, ma ci si ricorda che è anche proporzionale al momento angolare.

Il momento magnetico generato da un elettrone lo possiamo modellizzare come una corrente che circuita il nucleo,

$$\mu = is \quad T = \frac{\nu}{2\pi r} \quad i = \frac{-e}{T} = -\frac{ev}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = -\frac{evr}{2}$$

Si dimostra che quest'ultimo è proporzionale al momento angolare, facendo attenzione al segno del prodotto vettoriale con l'elettrone ($\vec{r} \perp \vec{v}$),

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr\vec{v} \quad \Rightarrow \quad vr = \frac{L}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{L}$$

Quando un oggetto carico ha momento angolare \vec{L} , allora possiede anche un momento magnetico $\vec{\mu}$. Illustriamo il calcolo teorico di g_N . Vale l'espressione generale,

$$\hat{\vec{\mu}}_{NUCLEO} = \mu_N \left(\sum_{i=1}^Z (\vec{l}_i + g_p \vec{s}_i) + \sum_{i=Z+1}^A g_n \vec{s}_i \right)$$

la prima sommatoria sono i contributi dei protoni, quindi troviamo il contributo del momento angolare e la parte intrinseca, mentre la seconda sommatoria tiene conto dei neutroni, da notare che qui non c'è un contributo del momento angolare visto che i neutroni non hanno carica e, come abbiamo visto prima, il momento angolare è proporzionale a quello magnetico tramite la carica. In questa espressione distinguiamo tra protoni e neutroni, quindi introduciamo il formalismo di isospin (τ^3 indica la componente z), in modo da maneggiare meglio questi operatori all'interno dei braket.

$$\hat{\vec{\mu}}_{NUCLEO} = \mu_N \left[\sum_{i=1}^A \frac{1 + \tau_i^3}{2} \vec{l}_i + \frac{1 + \tau_i^3}{2} g_p \vec{s}_i + \frac{1 - \tau_i^3}{2} g_n \vec{s}_i \right]$$

Abbiamo introdotto gli operatori di proiezione per descrivere i protoni e neutroni (isospin), in questo modo posso considerare protoni e neutroni come la stessa particella, ma allo stesso tempo i protoni e neutroni si distinguono, perché gli operatori di proiezione sono diversi nei due casi. L'isospin è utile per masse quasi uguali, come protoni e neutroni, oppure come i pioni ($\pi^{\pm 1}$ e π^0). Sviluppando l'ultima espressione, facendo

3.6 Momento magnetico

le sostituzioni $\mu_n = g_n/2$, $\mu_p = g_p/2$ e $\vec{\sigma}_i = 2\vec{s}_i$, diventa,

$$\hat{\vec{\mu}}_{NUCLEO} = \mu_N \left[\sum_{i=1}^A \frac{1+\tau_i^3}{2} \vec{l}_i + \frac{1+\tau_i^3}{2} \mu_p \vec{\sigma}_i + \frac{1-\tau_i^3}{2} \mu_n \vec{\sigma}_i \right]$$

Chiamiamo *isoscalari* i pezzi che non contengono il τ , *isovettori* quelli che contengono il τ . Sviluppiamo queste sommatorie per il deuterio ($A = 2$), così risulta in unità di magnetoni,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\vec{\mu}}_{NUCLEO}}{\mu_N} &= \frac{1}{2} \mu_p (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) + \frac{1}{2} \mu_n (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) + \frac{1}{2} \mu_p \vec{\sigma}_1 \tau_1^3 - \frac{1}{2} \mu_n \vec{\sigma}_1 \tau_1^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu_p \vec{\sigma}_2 \tau_2^3 - \frac{1}{2} \mu_n \vec{\sigma}_2 \tau_2^3 + \frac{1}{2} (\vec{l}_1 + \vec{l}_2) + \frac{1}{2} (\vec{l}_1 \tau_1^3 + \vec{l}_2 \tau_2^3) \end{aligned}$$

Applico l'utile costrutto per separare alcuni termini,

$$(\vec{l}_1 \tau_1^3 + \vec{l}_2 \tau_2^3) = \frac{1}{2} [(\vec{l}_1 + \vec{l}_2)(\tau_1^3 + \tau_2^3) + (\vec{l}_1 - \vec{l}_2)(\tau_1^3 - \tau_2^3)]$$

Cambio sistema di coordinate (centro di massa) in modo da semplificare i conti e per rendere evidente alcune uguaglianze che ne deriveranno (da ricordare che \vec{L} è sempre relativo e vale l'invarianza galileiana),

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{p} = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \\ \vec{p}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \frac{\vec{r}}{2} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} - \frac{\vec{r}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{p}_1 = \vec{p} + \frac{\vec{p}_{CM}}{2} \\ \vec{p}_2 = -\vec{p} + \frac{\vec{p}_{CM}}{2} \end{cases}$$

Ricordando $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\begin{cases} \vec{l}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \frac{\vec{r}}{2} \times \vec{p} \\ \vec{l}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = -\frac{\vec{r}}{2} \times (-\vec{p}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{l}_1 = \frac{1}{2} \vec{L} \\ \vec{l}_2 = \frac{1}{2} \vec{L} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{L} \\ \vec{l}_1 - \vec{l}_2 = 0 \end{cases}$$

Le ultime relazioni trovate sono un risultato molto utile che ci permette di risolvere l'ultimo pezzo dell'espressione del momento magnetico, il pezzo che avevamo scomposto (ora risulta chiaro quel ri-arrangiamento). Possiamo continuare a risolvere,

$$\frac{\hat{\vec{\mu}}_{NUCLEO}}{\mu_N} = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) (\mu_p + \mu_n) + \frac{1}{2} \mu_p (\sigma_1 \tau_1^3 + \sigma_2 \tau_2^3) - \frac{1}{2} \mu_n (\sigma_1 \tau_1^3 + \sigma_2 \tau_2^3) + \frac{1}{2} \vec{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \vec{L} (\tau_1^3 + \tau_2^3)$$

Quello che si sta facendo è separare il più possibile gli operatori che agiscono diversamente sulla funzione d'onda. Continuando,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\vec{\mu}}_{NUCLEO}}{\mu_N} &= \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) (\mu_p + \mu_n) + \frac{1}{4} (\mu_p - \mu_n) (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) (\tau_1^3 + \tau_2^3) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\mu_p - \mu_n) (\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) (\tau_1^3 - \tau_2^3) + \frac{1}{2} \vec{L} + \frac{1}{4} \vec{L} (\tau_1^3 + \tau_2^3) \end{aligned}$$

Ora che abbiamo trovato una forma di questo operatore più consona ai calcoli, ne

sviluppiamo il valore medio per il deuterio. Quindi la funzione d'onda che ci interessa è $(J = 1 M = J)|1 J\rangle$. Dall'espressione precedente sappiamo che il termine $(\vec{\sigma}_1^z - \vec{\sigma}_2^z) = 0$, basti pensare alle possibili disposizioni o polarizzazioni ($\uparrow_1\downarrow_2 + \downarrow_1\uparrow_2$ o $\uparrow_1\uparrow_2$ o $\downarrow_1\downarrow_2$). Valgono i risultati

$$(\sigma_1^z - \sigma_2^z)|S = 1 S_z = \pm 1, 0\rangle = 0$$

$$(\tau_1^3 + \tau_2^3)|T = 0 T_z = 0\rangle = \frac{1}{2}(t_1^z + t_2^z)|T = 0 T_z = 0\rangle = \frac{1}{2}T_z|T = 0 T_z = 0\rangle = 0$$

dove abbiamo usato $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ e $\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$. Ora per finire consideriamo $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ e $\vec{S} = \vec{J} - \vec{L}$ e calcoliamo il valore medio per l'autostato $|1 1\rangle$.

$$\begin{aligned} \left\langle 11 \left| \frac{\hat{\mu}_{NUCLEO}^z}{\mu_N} \right| 11 \right\rangle &= \left\langle 11 \left| (J^z - L^z)(\mu_p + \mu_n) + \frac{1}{2}L^z \right| 11 \right\rangle \\ &= \left\langle 11 \left| (\mu_p + \mu_n)J^z - \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\right)L^z \right| 11 \right\rangle \\ &= \left(\mu_p + \mu_n\right) - \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2}\right)\langle 11 | L^z | 11 \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

Si vede che quindi il momento magnetico del deuterio, in unità di magnetoni nucleari, è la somma dei momenti magnetici singoli di neutrone e protone meno un termine dipendente dalla terza componente del momento angolare calcolato sullo stato del deuterio. Ricordiamo che sperimentalmente si otteneva che il momento magnetico del deuterio fosse $0.857 \mu_N$; facendo la somma di quello di protone e neutrone si ottiene $2.793 \mu_N - 1.913 \mu_N = 0.88 \mu_N$. Si vede che la differenza di $0.023 \mu_N$ è proprio data dall'ultimo termine trovato. Questo ci porta a pensare di una presenza di un'onda D.

Riportiamo una tabella con le proprietà e i parametri principali del deuterio.

Massa (MeV)	1880.03 ± 0.01
Energia di Legame (MeV)	2.22452 ± 0.00010
Carica Elettrica (e.s.u.)	4.80298×10^{-10}
Momento magnetico (μ_N)	0.85741 ± 0.00001
Momento di quadrupolo (F^z)	0.278 ± 0.008
Momento angolare (\hbar)	1
Magnetone nucleare (MeV/gauss)	3.1524×10^{18}
Momento magnetico protone (μ_p)	$2.793 \mu_N$
Momento magnetico neutrone (μ_n)	$-1.913 \mu_N$

Lezione 17 Aprile 2020

Il momento magnetico del deuterio e la probabilità di onda D nella sua funzione d'onda. Il concetto di sezione d'urto totale.

3.6 Momento magnetico

Per calcolare il contributo dell'ultimo termine dell'equazione (9) ricordiamo che

$$|J = 1 \ M = 1\rangle = |11\rangle \equiv \sum_{l=0,2} \psi_{1 \ M=1}^L(r) \mathcal{Y}_{1M=1}^{L1}(\hat{r}, S) \xi_{T=0}^{T_z=0}$$

con

$$\mathcal{Y}_{1M}^{L1}(\hat{r}, S) \equiv \sum_{M_L m_S} (L11|M_L m_S M) Y_{LM_L}(\hat{r}) \chi_{S=1}^{m_S}$$

Si vede che nell'addendo con $L = 0$ si avrebbe un fattore $L^z Y_{0M_L}$, con M_L che può assumere solo il valore 0, di conseguenza il contributo di questo termine è nullo. Per il calcolo di L^z su questo stato si utilizza soltanto $L = 2$:

$$\langle 11 | L^z | 11 \rangle = \sum_{M_L m_S} \sum_{M'_L m'_S} \left[(211|M_L m_S 1)(211|M'_L m'_S 1) \int d\Omega Y_{2M_L}^* L^z Y_{2M_L} \chi_1^{m_S*} \chi_1^{m'_S} \times \int r^2 dr \psi_{11}^{21*}(r) \psi_{11}^{21}(r) \right]$$

e ricordando le definizioni (8)

$$= \sum_{M_L m_S} \sum_{M'_L m'_S} \left[(211|M_L m_S 1)(211|M'_L m'_S 1) M'_L \int \sin\theta \ d\theta \ d\phi \ Y_{2M_L}^* Y_{2M_L} \delta_{m_S}^{m'_S} \times \int r^2 dr [w(r)]^2 \right]$$

ovvero

$$\begin{aligned} \langle 11 | L^z | 11 \rangle &= \sum_{M_L m_S} \sum_{M'_L m'_S} \left[(211|M_L m_S 1)(211|M'_L m'_S 1) M'_L \delta_{m_L}^{M'_L} \delta_{m_S}^{m'_S} \int dr [w(r)]^2 \right] \\ &= \sum_{M_L m_S} \left[M_L (211|M_L m_S 1)^2 \right] \int dr [w(r)]^2 = \frac{3}{2} \int dr [w(r)]^2, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio non viene esplicitato per chiarezza (è necessario fare la somma su 5 valori di M_L e 3 di m_S). Sostituiamo ora all'interno della (9)

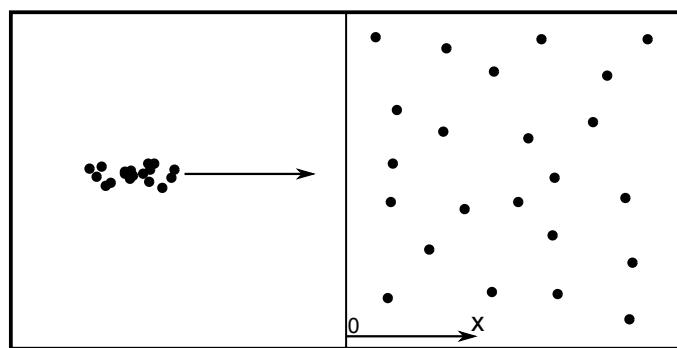
$$\left\langle 11 \left| \frac{\hat{\mu}_N^z}{\mu_N} \right| 11 \right\rangle = \left(\mu_p + \mu_n \right) - \left(\mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) \frac{3}{2} \int_0^\infty dr [w(r)]^2 \quad (10)$$

dove $w(r)$ si trova risolvendo le equazioni (7). Notiamo che il termine $\int_0^\infty dr [w(r)]^2$ dà sostanzialmente la probabilità che il deuterio si trovi nello stato con onda d , anziché in quello con onda s , sintomo della non centralità del potenziale. Si vede che basta una probabilità del $3 \div 4\%$ per tenere conto della differenza di $0.023 \mu_N$.

4 Sezioni d'urto

4.1 Sezione d'urto totale

A livello microscopico per conoscere le proprietà e la dinamica degli oggetti è necessario farli interagire con qualcosa. In particolare studieremo i fenomeni di *scattering*, o diffusione, in cui si analizza come vengono deviate le particelle a seguito di urti. Si suppone che le collisioni siano un fenomeno di tipo casuale. Nella situazione rappresentata nella figura seguente, a sinistra abbiamo un fascio di oggetti in movimento che incidono su quelli nella zona destra, possibilmente creando delle collisioni.



Definiamo con $\bar{P}(x)$ la probabilità che una particella del fascio non abbia colpito quando arrivata al punto x all'interno della zona di destra. Analogamente $P(x)$ è la probabilità che una particella del fascio abbia colpito quando arrivata al punto x . Risulta ovvio che $\bar{P}(0) = 1$ e $P(0) = 0$, pertanto espandiamo vicino all'origine $P(x)$:

$$P(x) = P(0) + \underbrace{\frac{dP}{dx} \Big|_{x=0}}_a x + \dots$$

quindi $dP = adx$ e $d\bar{P} = 1 - adx$. Inoltre

$$\bar{P}(x + dx) = \bar{P}(x)(1 - adx) = \bar{P}(x) + \frac{\bar{P}(x)}{dx} dx + \dots \implies \frac{d\bar{P}(x)}{\bar{P}(x)} = -adx$$

ovvero, integrando

$$\int_1^{\bar{P}} \frac{d\bar{P}'(x)}{\bar{P}'(x)} = - \int_0^x adx' = \log \bar{P}(x) = -ax \implies \bar{P}(x) = e^{-ax}$$

quindi da processi casuali danno distribuzioni esponenziali. Ora a ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza ed è essenzialmente l'inverso del libero cammino medio λ . Chiamiamo n la densità di particelle per unità di volume e supponiamo che esse non siano puntiformi, ma abbiano un'area di 'influenza' σ (assunta circolare) entro la quale interagiscono attraverso la collisione con le particelle incidenti (dette *sonde*). Allora $n \cdot \sigma$ è la sezione totale efficace per unità di volume, che ha le stesse dimensioni di a e posso dire che $n\sigma = \lambda$.

La grandezza media dell'area σ può essere trovata attraverso osservazioni con vari esperimenti. Supponiamo che il numero di particelle sparate in un'unità di tempo per unità di superficie, ovvero la *densità di flusso del fascio*, sia costante e pari a $J_i = 1$ e che $n = 1$. Ciò significa che, ad esempio, in un millimetro quadrato del fascio passi una sola sonda in un secondo e che in un volume di 1 millimetro cubo nella zona di destra sia presente solo un centro scatteratore $N_C = 1$. Risulta allora evidente che la probabilità P che ci sia un urto tra le due particelle sia data da quanto è grande l'area di influenza σ della particella bersaglio rispetto al millimetro quadrato in cui potrebbe trovarsi la sonda: $P = \sigma / 1 \text{ mm}^2$. Nel caso ci siano N_i particelle incidenti di cui ne vengono diffuse N_d , allora la probabilità media di diffusione è N_d/N_i . Uguagliando queste due probabilità

$$\sigma = \frac{N_d \times 1 \text{ mm}^2}{N_i} \frac{1 \text{ sec}}{1 \text{ sec}} = \frac{N_d}{1 \text{ sec}} \frac{1}{\frac{N_i}{1 \text{ mm}^2 1 \text{ sec}}} = \frac{N_d}{1 \text{ sec}} \frac{1}{J_i}.$$

Ecco quindi che posso misurare la sezione efficace (o *sezione d'urto* o *cross section* o *sezione trasversa*) misurando il numero di particelle diffuse per unità di tempo, rispetto al flusso incidente.

Nel caso in cui si abbia più di una particella in un volumetto elementare, come supposto, la sezione misurata è quella totale delle particelle nel volumetto: per ottenere quella singola devo dividere per il numero di centri scatteratori all'interno (che ho se conosco la densità della targhetta usata come bersaglio).

$$\sigma = \frac{N_d}{1 \text{ sec}} \frac{1}{J_i N_C}.$$

Notare che a livello sperimentale si utilizzano targhette molto sottili, di modo che in un volumetto non ci siano due sezioni trasverse di due particelle che si posizionino una davanti all'altra rispetto al fascio incidente.

Come nota finale si sottolinea che la sezione efficace non è effettivamente una sfera 'dura', interpretata in modo classico. Infatti facendo un esperimento di diffusione con elettroni ad esempio, anche se il target fosse composto da un solo elettrone, la cross section totale è infinita poiché a causa dell'interazione coulombiana tutti gli elettroni incidenti vengono deflessi. Risulta utile allora, per individuare alcune proprietà degli oggetti indagati, introdurre le sezioni d'urto differenziali che misurano la deflessione ad un preciso angolo.

Lezione 23 Aprile 2020

Scattering di elettroni. La cinematica. Scattering elastico ed inelastico. La sezione d'urto di Rutherford come funzione del momento trasferito.

La sezione d'urto si può scrivere come

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta N_d}{\Delta t}}{\frac{\Delta N_i}{\Delta t \Delta s} N_C}$$

dove ΔS è l'unità di superficie. Chiamiamo ρ la densità del materiale della targhetta, A il peso atomico e Δx lo spessore della targhetta allora

$$\rho \Delta x = \frac{\Delta m}{\Delta S} \rightarrow \frac{\rho \Delta x}{A} = \frac{\Delta m}{A \Delta S} I = \frac{\Delta N_i}{\Delta t} \equiv \text{intensità del fascio}$$

ma $\Delta m/A$ è il numero delle moli quindi

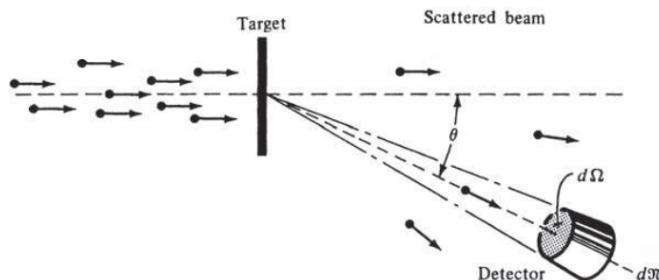
$$\frac{\rho \Delta x}{A} N_{av} = \frac{\# \text{ moli } N_{av}}{\Delta S} = \frac{N_C}{\Delta S}$$

e la sezione d'urto elementare scritta con grandezze misurabili in laboratorio risulta

$$\sigma_{el} = \frac{\frac{\Delta N_d}{\Delta t}}{\frac{\Delta N_i}{\Delta t \Delta s} \frac{\rho \Delta x}{A} N_{av}} \frac{1}{d\Omega}$$

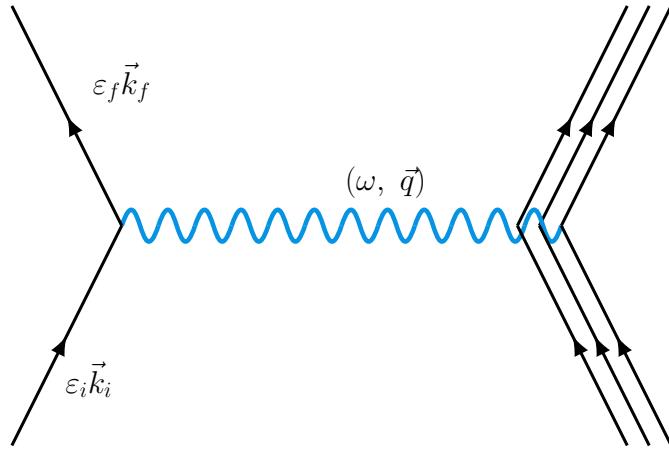
4.2 Sezione d'urto differenziale - electron scattering

Come già accennato è utile introdurre un tipo di sezione d'urto che misuri solo le particelle diffuse ad un certo angolo solido $d\Omega$. La chiamiamo *sezione d'urto differenziale* e la definiamo $d\sigma/d\Omega$, in modo che l'integrale di essa sull'angolo solido dia come risultato la sezione d'urto totale.



Per studiare i nuclei queste sezioni d'urto sono molto utili, un esempio sono quelle di *electron-scattering*: qui il fascio incidente è composto di elettroni. Per sondare un nucleo gli elettroni devono avere energie almeno delle decine di MeV a salire, quindi raggiungono velocità relativistiche. La cinematica utilizzata è detta *ultra-relativistica* poiché le velocità sono sufficientemente elevate da poter trascurare le masse e utilizzare $E \sim p$. Sostanzialmente è il contrario della trattazione classica per cui $K = E - m \sim p^2/2m$.

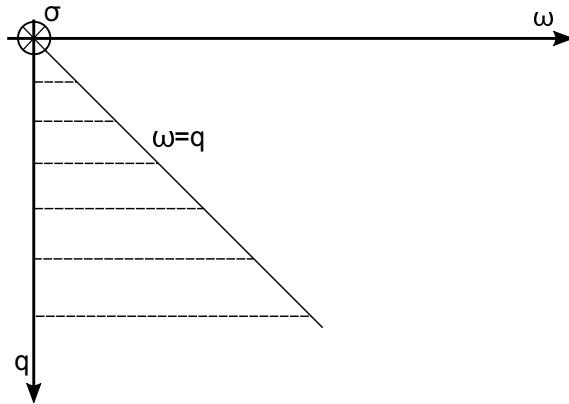
Per rappresentare l'esperimento si usa il seguente diagramma, dove $\varepsilon_{i/f}$ sono l'energia dell'elettrone prima e dopo l'urto, mentre $\vec{k}_{i/f}$ è il momento iniziale e finale dello stesso. Si ricorda che $\vec{p}_{i/f} = \hbar \vec{k}_{i/f} = 1 \cdot \vec{k}_{i/f}$ e che il modulo di $\vec{k}_{i/f}$ è uguale a $\varepsilon_{i/f}$ per quanto appena detto.



Sono stati utilizzati $\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f$ e $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ per caratterizzare l'interazione tra l'elettrone e la targhetta (a destra con energia iniziale e finale $E_{i/f}^T$ e momento $\vec{K}_{i/f}^T$). Per come è stato definito $\vec{q} = \vec{K}_f^T - \vec{K}_i^T$ l'interazione avviene, analogamente a quanto già osservato, con lo 'sparo' di un *fotone virtuale*. Viene chiamato così perché non vale $\omega = q$ come sarebbe per un fotone reale, ma

$$\varepsilon_i \sim k_i, \quad \varepsilon_f \sim k_f, \quad \omega^2 = \varepsilon_i^2 + \varepsilon_f^2 - 2\varepsilon_i \varepsilon_f = k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f, \quad q^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2\vec{k}_i \cdot \vec{k}_f$$

quindi risulta evidente che $\omega = q$ solo se \vec{k}_i e \vec{k}_f sono paralleli, ma in generale $q^2 > \omega^2$ (se il proiettile avesse una massa varrebbe $\omega^2 > q^2$). Si effettua allora lo studio di σ per un q fissato e con ω variabile. Il piano $\omega - q$ è rappresentato nell'immagine seguente.



La linea $\omega = q$ corrisponde al fotone reale: se il fascio incidente fosse composto da fotoni anziché elettroni avrei punti solo su questa linea. Usando elettroni invece esploro le sezioni d'urto lungo le linee tratteggiate.

Tipicamente la targhetta è inizialmente ferma quindi $\vec{q} = \vec{K}_f^T$, per la conservazione dell'energia vale

$$\varepsilon_i - \varepsilon_f = \frac{q^2}{2M_T} + E_f^T - E_i^T$$

dove $q^2/2M_T$ tiene conto del momento (o rinculo) trasferito alla targhetta, ovvero è energia che non va ad eccitare la targhetta (o i nuclei che la compongono).

Ora, definiamo *scattering elastico* il fenomeno di diffusione in cui $E_f^T - E_i^T = 0$, cioè non c'è energia spesa per eccitare la targhetta, ma tutta l'energia è trasferita sotto forma di momento. A seconda della trattazione, le opzioni sono le seguenti.

- Nella maggior parte dei casi in laboratorio $\frac{q^2}{2M_T} \sim 0$, allora $\varepsilon_i - \varepsilon_f = E_f^T - E_i^T$. Di conseguenza $\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f = k_i - k_f = 0$ e si ottiene la condizione sui momenti $k_i = k_f$.
- Non consideriamo $\frac{q^2}{2M_T}$ nullo. In questo caso $\omega = q^2/2M_T$ e quindi $k_i > k_f$

Si parla invece di *scattering inelastico* quando $\varepsilon_i - \varepsilon_f > 0$, ovvero l'energia della particella incidente non viene conservata.

Se si misura la sezione d'urto differenziale a q costante in funzione di ω , allora si otterranno molti conteggi per $\omega = q^2/2M_T$, ma anche altri dati dallo scattering inelastico

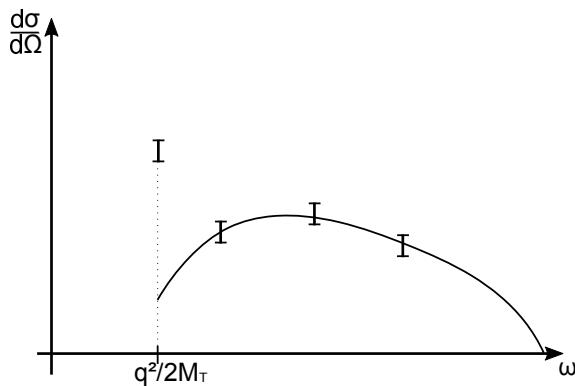


Figura 13: Sezione d'urto differenziale vs. ω per un q fissato

Essenzialmente lo scattering elastico è definito per $k_i = k_f = k$, ovvero $\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f + q^2/2M_T = q^2/2M_T$; mentre quello inelastico per $\omega > q^2/2M_T$. Ci concentriamo solo su quello elastico.

Nell'esperimento di Rutherford veniva calcolata la cross section differenziale data dall'interazione Coulombiana tra le particelle α e il nucleo positivo. Egli aveva trovato, usando $z = 2$ per la particella α , Z per il numero atomico dell'oro ed E per l'energia iniziale della particella α :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{zZe^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

e l'esperimento effettivamente era in accordo con questa sezione d'urto. Non potendo sospettare la possibilità che il nucleo potesse eccitarsi anche Rutherford suppose uno scattering elastico. Un fatto curioso è che si trova che svolgendo questo esercizio in maniera quantistica anziché classica il risultato finale è lo stesso, a meno di alcune correzioni molto piccole. Infatti i risultati combaciano quando l'esercizio quantistico viene risolto in teoria perturbativa al primo ordine, che risulta già molto accurata in quanto, come già visto, le correzioni al secondo ordine sono proporzionali alla costante di accoppiamento $e^2/\hbar c = 1/137$ al quadrato. Interpretando l'interazione come fece Yukawa, possiamo considerare le correzioni date da ordini superiori al primo come la

probabilità non nulla che ci sia un'interazione tra le particelle non solo in un istante ed a una certa distanza, ma anche in istanti immediatamente successivi o precedenti (quindi nel diagramma di Feynman dovrebbero essere presenti un maggior numero di onde orizzontali). Riscriviamo

$$q = \sqrt{k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos \theta} = 2k \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = 2k \sin(\theta/2) \Rightarrow \sin^4(\theta/2) = \frac{q^4}{16k^2}$$

quindi nel nostro caso, per lo scattering di elettroni

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{2\frac{k^2}{2m}} \right)^2 \frac{16k^2}{q^4} = \frac{4(Ze^2)^2 m^2}{q^4}.$$

Ci aspettiamo allora che, per Rutherford, la sezione d'urto differenziale diminuisca come l'inverso di q^4 una volta che sia stato fissato $\omega = q^2/2M_T \sim 0$. Dal principio di indeterminazione si vede che se si studia la sezione d'urto ad un q sempre maggiore, allora vedo il mio sistema con una risoluzione crescente.

Ora si verifica che anche una trattazione quantistica (nota: non relativistica!) porta agli stessi risultati ottenuti da Rutherford.

Prima si anticipa che considerando sia effetti relativistici che di spin nella trattazione quantistica si arriva ad un risultato, di poco differente da quello di Rutherford, detto *sezione d'urto di Mott*:

$$\frac{d\sigma_{Mott}}{d\Omega} = 4(Ze^2)^2 m^2 \frac{\varepsilon_i^2}{q^4} (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))$$

dove $\beta = v/c$. Questo risultato risulta coerente con quello di Rutherford nel limite in cui $\beta \rightarrow 0$ e $\varepsilon_i \rightarrow m$, come ci aspettiamo. Negli altri casi la sezione d'urto recupera un'ulteriore dipendenza dall'angolo di scattering invece (oltre a q).

Per sviluppare la trattazione quantistica nel calcolo della cross section di Rutherford si ricorda la regola aurea di Fermi, una volta definita con W_{if} la probabilità di transizione da uno stato finale a uno iniziale e V la perturbazione tale che $H = H_0 + V$ (in questo caso il potenziale è quello di interazione tra elettroni e nucleo, con \vec{r} la loro distanza):

$$\frac{dW_{if}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | V | i \rangle|^2 \rho(E)$$

dove $\rho(E)$ è la densità di stati per unità di energia. Vale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dW_{if}}{dt}}{J_I}$$

e

$$|\langle f | V | i \rangle| = \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \equiv V(q)$$

quindi sostanzialmente $V(q)$ è la trasformata di Fourier del potenziale.

$$\begin{aligned}\langle f | V | i \rangle &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) V(\vec{r}) e^{iqr \cos \theta} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 dx V(\vec{r}) e^{iqrx} = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) V(r)\end{aligned}$$

Sostituendo il potenziale di Coulomb $V(r) = Ze^2/r$ nell'espressione precedente si ottiene che $V(q) = \infty$, il che non sorprende, come accennato nella scorsa lezione. La 'sfera di influenza' di una carica che interagisce con un'altra carica è infinita quindi, ma nel caso degli atomi interviene il fatto che la carica globale è neutra, ovvero è presente uno schermaggio dato dagli elettroni.

Lezione 24 Aprile 2020

Derivazione della sezione d'urto di Rutherford con la formula aurea di Fermi ed il potenziale di Coulomb con lo schermaggio elettronico. La sezione d'urto di Mott. Il ruolo dei fattori di forma di carica e magnetico. La separazione di Rosenbluth.

Per sistemare la divergenza dell'integrale precedente, si usa un potenziale che tiene conto dello schermaggio

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r} e^{-r/a},$$

in modo che per $r \ll a$ il potenziale è quello coulombiano, ma fuori dall'atomo per $r \gg a$ il potenziale tende a 0. Il risultato dell'integrale è

$$\int_0^\infty dr \sin(qr) e^{-r/a} = \frac{q}{q^2 + (\frac{1}{a})^2} \quad (11)$$

per utilizzare questo risultato ora ci rimettiamo nel caso sperimentale in cui vale $r \ll a$, ovvero possiamo scrivere il risultato dell'integrale precedente come $\sim 1/q$. Allora

$$\langle f | V | i \rangle = \frac{4\pi Ze^2}{q^2} \implies \frac{dW_{if}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi Ze^2}{q^2} \right)^2 \rho(E)$$

La densità $\rho(E)$ è data da il numero di stati con energia compresa tra E ed $E + dE$ che vengono rilevati dal detector per un preciso angolo solido. Allora $\rho(E)dEd\Omega = \rho(E)d(k^2/2m)d\Omega = d\vec{p}$, l'ultima uguaglianza deriva dal fatto
(da integrare per poca chiarezza)

Si arriva a

$$\rho(E) = \frac{mk}{(2\pi)^3}$$

. Ricordando che il flusso iniziale è $J_i = \rho v = 1 \frac{p}{m} = k/m$, la sezione d'urto differen-

ziale risulta allora

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi Ze^2}{q^2} \right)^2 \rho(E)}{k/m} = \frac{4(Ze^2)^2 m^2}{q^4}$$

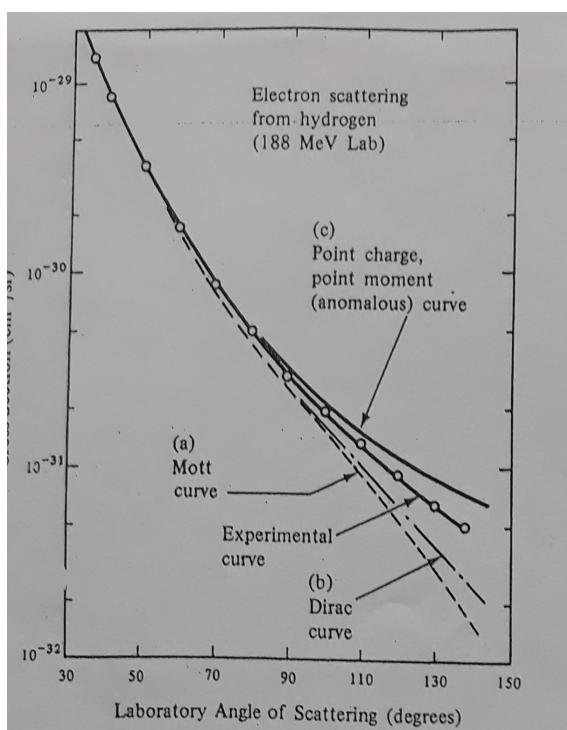
ovvero la stessa trovata da Rutherford. Si sottolinea che l'apparente divergenza del risultato trovato per $\theta = 0$ (infatti $q \propto \sin \theta/2$), si risolve ricordando che il q a denominatore dovrebbe essere sommato ad un termine $(1/a)^2$ che, seppur piccolo, evita di far divergere la sezione d'urto.

Riprendiamo la sezione d'urto di Mott

$$\frac{d\sigma_{Mott}}{d\Omega} = 4(Ze^2)^2 m^2 \frac{\varepsilon_i^2}{q^4} (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2))$$

con $\varepsilon_i = \sqrt{m^2 + p^2}$ è l'energia totale dell'elettrone.

Per un confronto tra il modello e i dati sperimentali si veda la figura seguente.



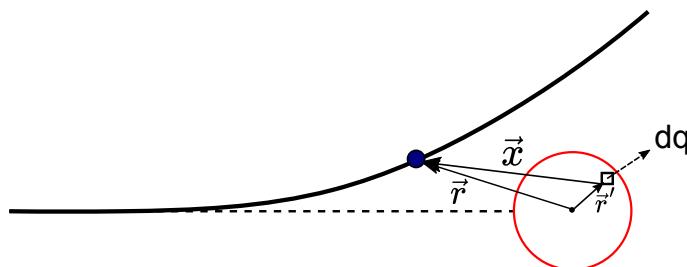
3. Electron-proton scattering with 188 MeV electrons. [R. W. ter and R. Hofstadter, *Phys. Rev.* 102, 851 (1956).] The theoretical correspond to the following values of G_E and G_M : Mott (1; 0), Dirac anomalous (1; 2.79).

L'espressione appena trovata fornisce la linea tratteggiata, che si vede essere una buon modello per angoli piccoli, ma peggiorare quando essi aumentano.

La ragione di questa discrepanza potrebbe essere imputabile al fatto che il nucleo è stato approssimato come puntiforme, trascurando la sua estensione e la sua distribuzione di carica $\rho(r)$.

Vediamo allora come, anche solo a livello non relativistico, nella sezione d'urto compaia un termine ulteriore dipendente da q collegato alla trasformata di Fourier della densità di carica. Ragionando al contrario si può trovare quindi una forma per la distribuzione di carica all'interno del nucleo.

Si riparte allora dalla seguente situazione.



Dovrò quindi integrare su

$$dV(r) = \frac{dq(-e)}{x} e^{-x/a}, \quad dq = \rho(\vec{r}') d\vec{r}'$$

arrivando a

$$V(r) = \int -\frac{e}{x} e^{-x/a} \rho(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Adesso il $V(q)$ sarà ancora la trasformata di Fourier del potenziale:

$$\langle f | V | i \rangle = -e \int d\vec{x} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}}}{x} e^{-x/a} \int d\vec{r}' e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \rho(\vec{r}')$$

dove è stato usato che $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{x}$. Il primo integrale è uguale a quello in (11), mentre il secondo è la trasformata di Fourier della densità di carica e lo chiamiamo $F(\vec{q})$, o *fattore di forma*. Ricapitolando la sezione d'urto così trovata è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi Ze^2}{q^2} \right)^2 \rho(E)}{k/m} = \frac{4(Ze^2)^2 m^2}{q^4} F^2(\vec{q})$$

Con la sezione d'urto di Mott succede una cosa analoga, però con il quadrimpulso anziché il momento $q_\mu^2 = q^2 - \omega^2$, ma nel caso dello scattering elastico, come già detto, la differenza è poca.

Ebbene, anche con questa correzione non c'è un completo accordo con i dati sperimentali: la ragione è che si sta trascurando il momento magnetico del nucleo.

Infatti il modello di Mott sì tiene conto dello spin dell'elettrone e della sua interazione con il nucleo carico che si muove (nel suo sistema di riferimento), generando quindi un campo magnetico, ma non considera la possibilità di un momento magnetico proprio del nucleo. Facendo anche questa correzione la forma finale, detta **sezione**

d'urto elastica di Rosenbluth, ottenuta è

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{Mott}} \left[|F(\vec{q})|^2 + \chi(q, \theta) |M(\vec{q})|^2 \right]} \quad (12)$$

dove $M(\vec{q})$ è definito, in analogia ad $F(\vec{q})$, come la trasformata di Fourier della densità magnetica $\rho_{mag}(\vec{r})$ e χ è un coefficiente dipendente da angolo e modulo di \vec{q} . Si ricorda che

$$\begin{cases} \int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = Ze \\ \int \rho_{mag}(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_{Nucleo} \end{cases}$$

in modo da sottolineare che c'è la possibilità che un nucleo abbia momento magnetico totale μ_{Nucleo} nullo (come ad esempio ^4He), ma questo non implica necessariamente che lo sia anche $M(\vec{q})$, infatti se l'integrale di ρ_{mag} su tutto lo spazio non è nullo ciò non significa che essa sia nulla in ogni punto dello spazio. Discorso analogo può essere fatto riguardo alla carica: un neutrone ha carica totale nulla ma $F(\vec{r}) \neq 0$.

Fatte queste correzioni la teoria sembra finalmente in accordo con i dati sperimentali.

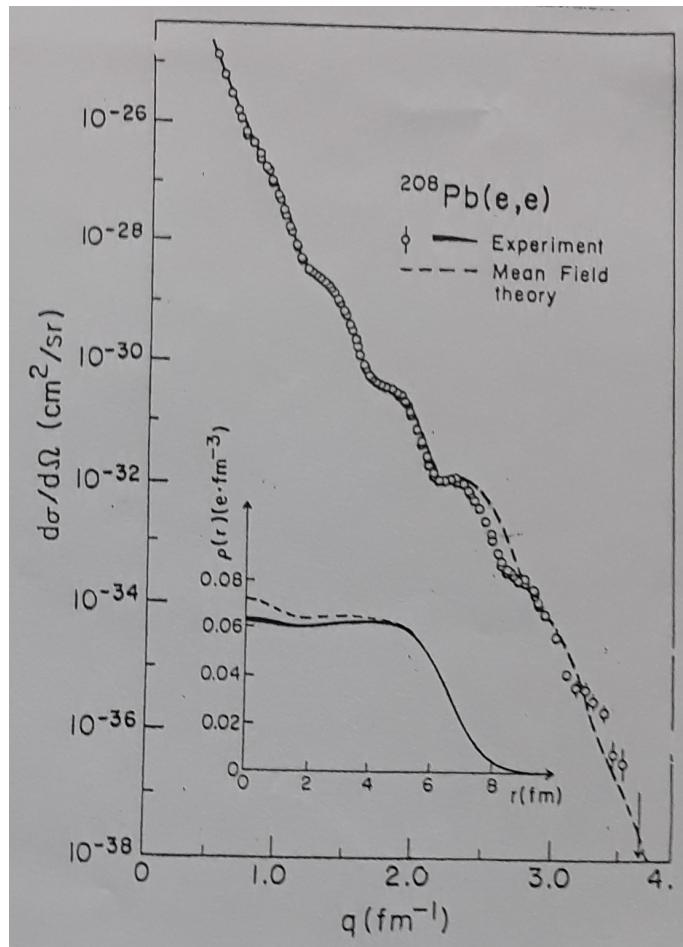
Ora attraverso inferenze sperimentali sui dati delle sezioni d'urto si possono ottenere informazioni sulla forma di F ed M , quindi sulle densità di carica e magnetica. Si fa così, ad esempio, a verificare che un protone non è puntiforme: la sua ρ , trovata una volta fatta la trasformata inversa di F , non risulta una *delta function*.

L'unico problema rimasto è capire come ottenere informazioni separate per la distribuzione di carica e magnetica, a partire dalla (12). Il metodo, pensato inizialmente da Rosenbluth, è il seguente: chiamiamo

$$\underbrace{\frac{d\sigma/d\Omega}{d\sigma/d\Omega_{Mott}}}_y = \underbrace{|F(\vec{q})|^2}_a + \underbrace{\chi(q, \theta)}_x \underbrace{|M(\vec{q})|^2}_b$$

e facciamo due misure, entrambe a q costante, ma variando l'angolo θ . Allora facendo un plot (detto di Rosenbluth) di $y(x)$ si trova a come intercetta della retta e b come coefficiente angolare.

Ebbene, a livello sperimentale il risultato per lo scattering elastico di elettroni sul piombo 208 è il seguente



La figura piccola rappresenta la densità di carica. In entrambi i grafici la linea tratteggiata è una stima data dalla teoria per la quale ogni nucleone dovrebbe sentire un campo medio dato da tutti gli altri. Si vede che questa teoria è corretta solo per q sufficientemente piccoli nel caso della sezione d'urto. Questa condizione si trasforma in una r sufficientemente grande per la stima di ρ . Quando si usa un certo q , si 'illumina' l'oggetto studiato con una lunghezza d'onda proporzionale al suo inverso. Allora quando q è piccolo la risoluzione con cui viene osservato il nucleo è scarsa e ciò implica che difficilmente si notano differenze tra il modello *Mean Field* e i valori misurati. Al contrario 'si vede' il nucleo con maggiore precisione per q grande, quindi la descrizione sommaria di un modello come quello di *Mean Field* non risulta più in accordo con le osservazioni.

In aggiunta dalla figura vediamo che il raggio del piombo risulta poco più 6 fm come già previsto in precedenza.

Come nota finale aggiungiamo che nel caso dello scattering inelastico la sezione d'urto non dipende più solamente da q , ma anche da ω . Pertanto non siamo più vincolati ad utilizzare $\omega = q^2/2M_T \sim 0$ (Fig.13), ma possiamo sfruttare i dati sperimentali anche per avere informazioni sugli stati eccitati della targhetta. Ad esempio posso vedere che la sezione d'urto è maggiore per alcuni ω , che corrispondono al valore dell'energia degli stati eccitati del nucleo, ritrovo così gli autovalori dell'Hamiltoniana nucleare.

Lezione 30 Aprile 2020

Alcuni esempi di misure di fattori di forma dei nuclei, di protone e neutrone. Misure dei raggi dei nuclei tramite fattore di forma a basso momento trasferito. Definizione delle variabili di Mandelstam.

Continuiamo il discorso sulla sezione d'urto differenziale, nel contesto dell'electron scattering elastico. Riprendiamo la formula trovata nella sezione precedente,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{MOTT} \left[|F(\vec{q})|^2 + \chi(q, \theta) |M(\vec{q})|^2 \right]$$

dove il primo termine è la sezione differenziale di Mott, in cui come spiegato rappresenta la correzione relativistica e di spin alla vecchia teoria di Rutherford, che teneva conto solo dell'interazione coulombiana. I termini all'interno della parentesi quadra invece tengono conto dell'interazione tra la particella proiettile e la targhetta, quindi vengono presi in considerazione i momenti magnetici e la distribuzione di carica della targhetta. Il primo termine tra le parentesi è il *fattore di forma* e tiene conto delle distribuzioni di carica nella targhetta in esame, si prende la trasformata di Fourier della distribuzione di carica,

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) d\vec{r}$$

Va tenuto conto anche della interazione tra i momenti magnetici, la distribuzione dei momenti magnetici della targhetta, dunque si introduce il secondo termine tra la parentesi (χ contiene dati dell'interazione con la particella incidente), che ancora una volta lo definiamo con la trasformata di Fourier della densità di momento magnetico,

$$M(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \mu(\vec{r}) d\vec{r}$$

La formula completa scritta sopra è la **formula di Rosenblut**. Sperimentalmente, durante l'esperimento, quello che si fa è fissare q e variare l'angolo θ , in modo che dai dati si possano estrarre informazioni su F e M . Lo scopo infatti è quello di trovare un modo di separare i contributi di F e M sperimentalmente per poi tracciarne dei grafici una volta estratti dai grafici le informazioni necessarie.

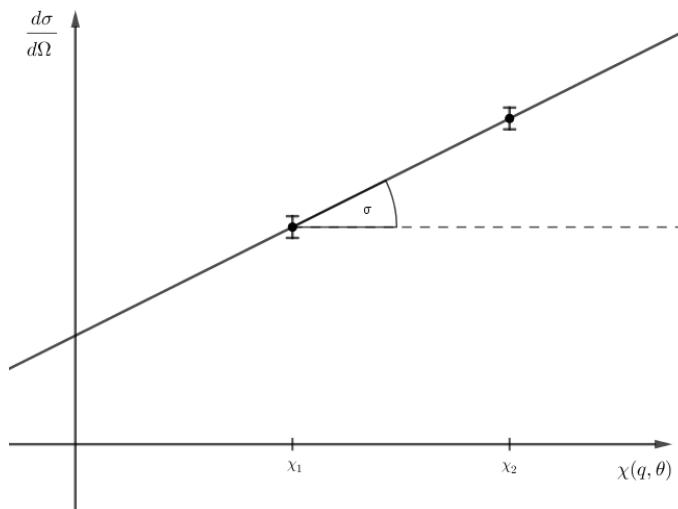
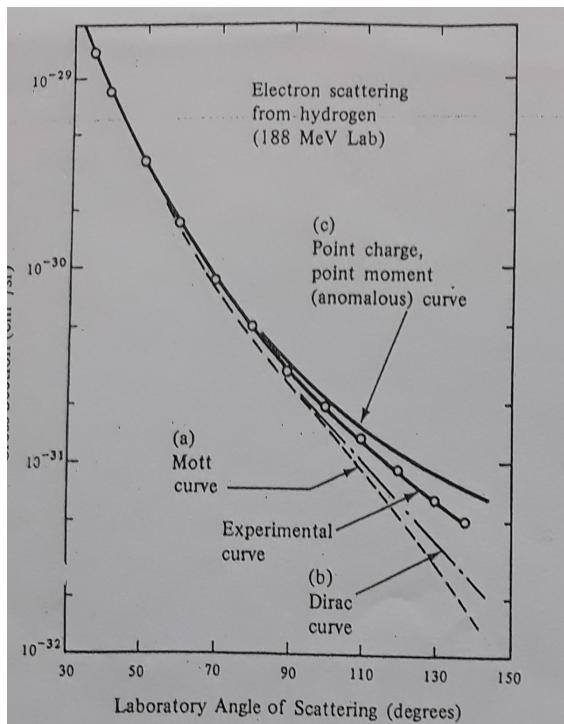


Figura 14: Sezione d'urto differenziale in funzione di $\chi(q, \theta)$, fit ai dati sperimentali.

Come si nota dal grafico sopra, fissando q e variando θ , dai dati sperimentali si estrae un modello, e da quello si riescono a ricavare dati, ad esempio dall'intercetta della retta trovo $|F(\hat{q})|^2$, mentre dalla tangente si trova $|M(\hat{q})|^2$ (poi si rifà la stessa procedura per angoli θ diversi).

Riprendiamo il grafico dei diversi modelli di sezione d'urto di electron scattering,



3. Electron-proton scattering with 188 MeV electrons. [R. W. ter and R. Hofstadter, *Phys. Rev.* 102, 851 (1956).] The theoretical correspond to the following values of G_E and G_M : Mott (1; 0), Dirac anomalous (1; 2.79).

Analizziamo le diverse curve:

- (a) è la curva di Mott, ovvero il modello appena esposto;
- (b) è la curva di Dirac, in cui sono state fatte le seguenti approssimazioni: nella formula di Rosenblut, in $F(q)$ non ci inserisco la distribuzione di carica, ma la carica stessa (si considera puntiforme), in più $M(q)$ è il momento magnetico concentrato (puntiforme);
- (c) è la *Point charge, point momentum (anomalous) curve*, è la curva dove è tutto considerato puntiforme, ma vengono differenziati i fattori giromagnetici tra elettroni e nucleoni; *Anomalous* si riferisce al fatto che è stato usato un fattore giromagnetico uguale tra protoni e neutroni, quando oggi sappiamo che i due differiscono di poco;
- la curva sperimentale; nonostante questi modelli si avvicinano molto, va notato che il grafico è in scala logaritmica, quindi le discordanze tra i modelli precedenti e i dati sperimentali sono alte. Le curve precedenti non tornano semplicemente perché i protoni e neutroni sono stati considerati come una carica puntiforme distribuita uniformemente. Invece vedremo che il modello torna se consideriamo i nuclei come cariche non puntiformi e non distribuite uniformemente (nel nucleo).

Una volta trovate sperimentalmente queste quantità, si procede con l'antitrasformata di Fourier, in modo tale da ricavare la densità di carica dei nuclei della targhetta. In alcuni grafici abbiamo riportato la densità di carica in funzione del raggio (in particolare caso Piombo).

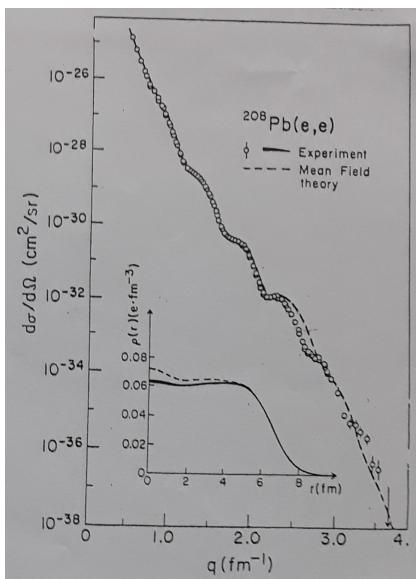


Figura 15: Sezione d'urto e distribuzione carica del Piombo(Pb).

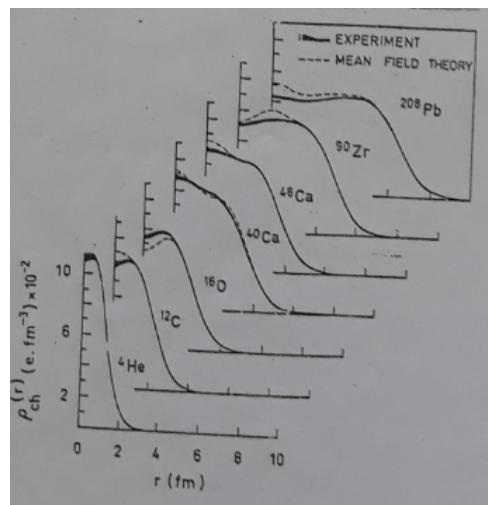


Figura 16: Distribuzione carica per diversi elementi.

Si osserva come verso il centro il modello teorico (linee tratteggiate) non combacia perfettamente con il modello sperimentale, infatti i modelli teorici rappresentati non tengono conto di tutta la teoria, ma sono semplificazioni, oggi si riescono ad

ottenere grafici più in linea con i dati sperimentali.

Degli esperimenti analoghi vengono fatti per trovare la distribuzione di carica del neutrone, che non risulterà una costante a zero (come si potrebbe pensare). Visto che non si possono ricreare delle targhette neutroniche, di solito quel che si fa è costruire delle targhette di deuterio, svolgere l'esperimento, e solo alla fine sottrarre tutti i contributi che provengono dalla presenza del protone, così si trova la densità di carica del neutrone $\rho(\vec{r})$; ancora una volta questi tipi di esperimenti mostrano la voluminosità dei nucleoni (non sono puntiformi). Di seguito un grafico dove è rappresentata la densità di carica per i neutroni.

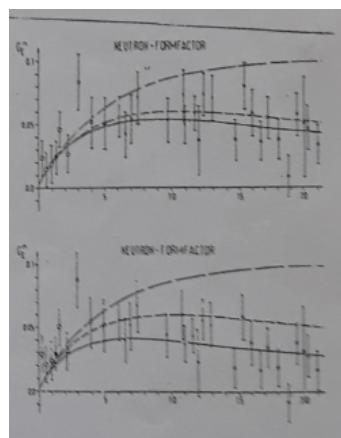


Figura 17: Densità carica di un neutrone, dati sperimentali e modello teorico.

Sotto riportiamo inoltre il modello di Fermi, ovvero un modello teorico generale per tutti gli elementi che rappresenta a grandi linee la distribuzione di carica dei nuclei (questo grafico ha più che altro un'importanza storica).

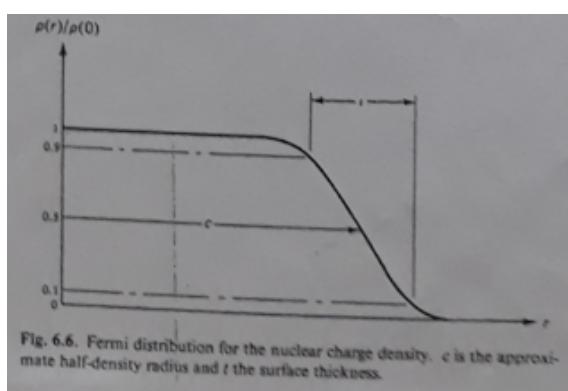


Figura 18: Distribuzione di Fermi.

Sempre nel fine di studiare la voluminosità del nucleo degli atomi, si può procedere sperimentalmente con lo *scattering di Rutherford* (non è electron scattering elastico). Riprendiamo le conclusioni di questo tipo di scattering. L'esperimento vuole studiare la sezione d'urto dell'oro usando una targhetta dello stesso materiale. Grazie a questo esperimento Rutherford concluse che le cariche positive sono confinate in un nucleo con un particolare volume. Riportiamo uno schema del esperimento.

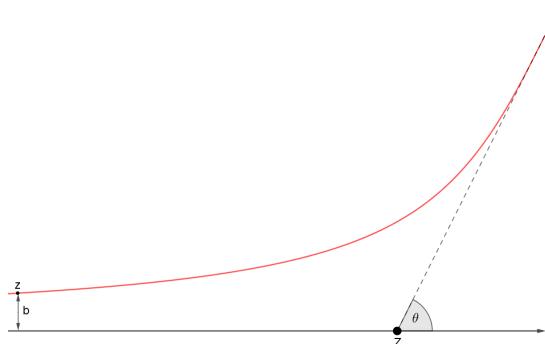


Figura 19: Schema esperimento di Rutherford carica puntiforme.

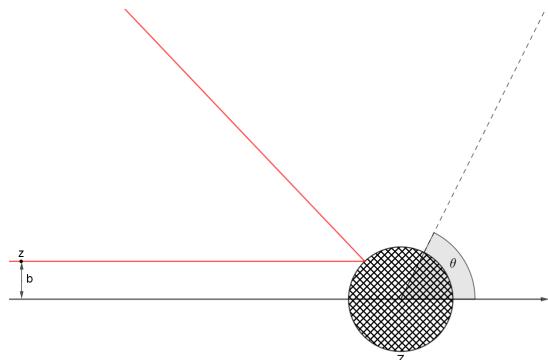


Figura 20: Schema esperimento di Rutherford carica corpo rigido e b minore del raggio r .

Dapprima si è fatto uno schema nel caso si considera il nucleo colpito e quello incidente (con energia cinetica E_k) come cariche puntiformi (Ze è la carica del nucleo target, ze è la carica del nucleo incidente), e si introduce il *parametro d'urto* b , ossia la distanza verticale tra la particella incidente e target. Considerando solamente l'interazione coulombiana delle due particelle, ci si aspetta che la particella incidente verrà deviata con un angolo θ , e le relazioni che legano tutti questi parametri sono,

$$b = \frac{zZe^2}{2E_k} \arctan \frac{\theta}{2}$$

Lo step successivo sta nel fare il medesimo calcolo, considerando la particella target come una sfera (con volume). In questo caso si complicano le cose, infatti la presenza di un volume fa sì che a b minori del raggio del nucleo, la particella incidente si comporti diversamente da come previsto nel modello precedente (el nucleo l'è staifo). Dalla formula precedente notiamo che, fissando un angolo θ , più si aumenta l'energia cinetica, più si riduce b . Quindi introduciamo l'*angolo massimo di avvicinamento* d , che mi dice quanto la particella incidente è distante verticalmente dal nucleo; le relazioni diventano,

$$b = \frac{d}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad d = \frac{Zze^2}{E_k}$$

Conoscendo d dagli esperimenti, si può stimare la dimensione del nucleo. Vediamo ora un grafico dei dati sperimentali delle sezioni d'urto nell'oro che variano con l'energia cinetica iniziale ad un angolo fissato, e li confrontiamo con la curva teorica.

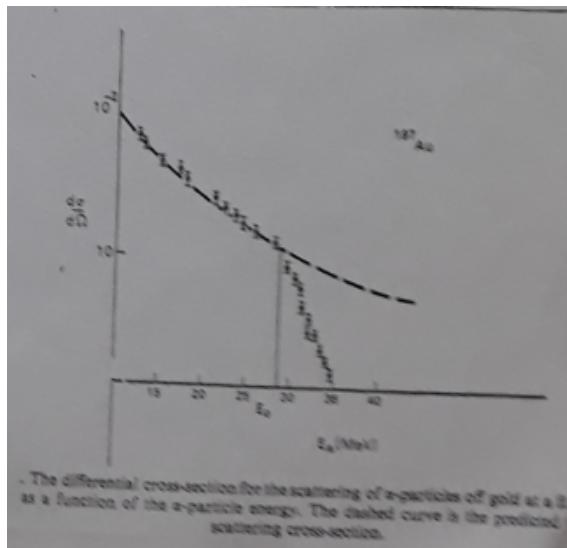


Figura 21: Dati sperimentali e modello teorico sezione d'urto oro ad un angolo fissato in funzione dell'energia cinetica della particella incidente.

I dati sperimentali seguono il modello fino ad un certo punto, poi si discostano fortemente da questo. Questo grafico rappresenta la presenza di una particella target non puntiforme. Quando b è ancora maggiore del raggio del nucleo, i dati sperimentali seguono bene il modello, infatti qui domina l'interazione elettromagnetica. Quando b diventa minore del raggio del nucleo, e intuitivamente la particella incidente va a sbattere contro di esso, non domina più l'interazione elettromagnetica (come dovrebbe essere nel modello di Thompson), ma domina l'interazione forte, e questo si manifesta con la deviazione dei dati dal modello.

Lo scattering elettronico resta più accurato rispetto a quello di Rutherford per misurare la forma dei nuclei. Ora sviluppiamo un altro metodo per trovare la densità di carica dei nuclei $\rho(\vec{r})$. Partiamo dal fattore di forma, e semplifichiamo il problema considerando il nucleo come una sfera, anziché una forma più esotica, in modo da sfruttare la simmetria radiale e levarsi la notazione dei vettori.

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad F(q) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(r) d\vec{r}$$

In questo modo posso integrare il fattore di forma sull'angolo solido di tutta la sfera,

$$F(q) = \int F(\vec{q}) d\Omega$$

Dal punto di vista sperimentale invece si calcola il fattore di forma puntualmente per diversi angoli (non si fa l'integrale), per diverse direzioni di \vec{r} , in modo da non limitarsi a considerare solo il caso sferico. Per l'appunto, con l'approccio sperimentale, si trovano forme particolari che non sono sfere perfette. Tornando al caso precedente, alla fine, per trovare la densità di carica dovreemo antitrasformare la $F(q)$ trovata.

$$\rho(\vec{r}) = \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} F(\vec{q}) d\vec{r}$$

Sperimentalmente possiamo procedere con le seguenti approssimazioni per trovare $F(q)$,

$$\begin{aligned} F(q) &= \int \rho(r) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \simeq \int \rho(r) \left(1 + i\vec{q} \cdot \vec{r} - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{r})^2}{2} + \dots \right) d\vec{r} \\ &= \int \rho(r) d\vec{r} + i \int \rho(r) qr \cos \theta r^2 dr d(\cos \theta) d\varphi - \int \frac{(\vec{q} \cdot \vec{r})^2}{2} \rho(r) d\vec{r} \end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio abbiamo espresso il vettore \vec{r} nelle coordinate sferiche, e sottinteso che si tratta di un integrazione a tre variabili ($r : 0 \rightarrow \infty$, $\cos \theta : -1 \rightarrow 1$ e $\varphi : 0 \rightarrow 2\pi$). Stiamo cercando un metodo per trovare il raggio senza dover fare tante trasformate. Il primo integrale non è altro che la carica totale del nucleo (Ze), il secondo integrale invece è nullo, infatti integrando una funzione dispari in un intervallo simmetrico ($\cos \theta d(\cos \theta)$), l'integrale si annulla, e infine il terzo integrale si risolve così (sostituiamo $x = \cos \theta$),

$$\begin{aligned} \int \frac{(\vec{q} \cdot \vec{r})^2}{2} \rho(r) d\vec{r} &= \frac{1}{2} \int \rho(r) q^2 r^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 x^2 dx \int_0^\infty \rho(r) q^2 r^4 dr = \frac{1}{2} 2\pi \frac{2}{3} \int_0^\infty \rho(r) q^2 r^4 dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \int_0^\infty \rho(r) q^2 r^2 r^2 dr = \frac{1}{6} \int_0^\infty \rho(r) q^2 r^2 d\vec{r} \end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio abbiamo ri-trasformato r in un vettore. Esprimiamo dunque il fattore di forma $F(q)$, che visto le dipendenze della funzione, possiamo scrivere che è funzione di $F(q^2)$,

$$F(q) = F(q^2) = Ze - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle + \dots$$

in questa forma sono presenti solo potenze pari di r . Guardando la pendenza del fattore q^2 , posso trovare sperimentalmente una stima di r (anche se qui è visto come una media $R = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$). Per riassumere, la misura di sezione d'urto differenziale di elettrone scattering, si ottiene sperimentalmente dividendo il numero di elettroni che entrano nel rivelatore ad un dato angolo nell'unità di tempo per il flusso incidente e per il numero di enti scatteratore. Si ottiene la sezione d'urto efficace ai fini delle deflessioni degli oggetti singoli che compongono la targhetta. Ora da confronto teorico sperimentale, si ha informazioni sulla distribuzione di carica e di momento magnetico. Come si studia la distribuzione di carica si studia anche la distribuzione di momento magnetico.

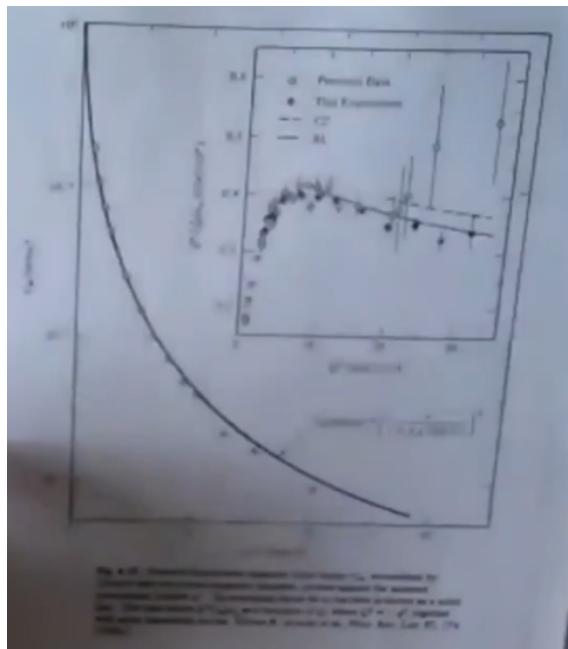


Figura 22: Dati sperimentali e relativo fit di distribuzione dei momenti magnetici.

Il grafico sopra mostra dati sperimentali della distribuzione di momento magnetico e il modello teorico (best fit). Un fatto curioso è che l'andamento della distribuzione di momento magnetico è lo stesso della distribuzione di carica, purché siano normalizzati a dovere. Infatti se si pensa ai protoni e neutroni come particelle formate a loro volta da tre quarks con carica e momento magnetico (sono fermioni con spin), dove si distribuisce la carica, si ha anche distribuzione di momento magnetico. Si conclude che entrambi gli oggetti seguono lo stesso andamento (a parte nel centro a q molto grandi e distanze piccole), in altri termini,

$$G_M \equiv \frac{M(q)}{\mu} \propto \frac{F(q)}{e}$$

L'elettrone scattering è una tecnica molto utile per studiare la struttura dei nuclei.

4.3 Relatività

Fino ad ora non è servito introdurre la relatività, infatti le energie che abbiamo trattato permettevano di poterla trascurare (esempio, nella descrizione dei nuclei o equazione di Schrödinger), tuttavia in altri contesti, come ad esempio negli acceleratori di particelle, dove oggetti vengono scagliati contro altri con energie molto elevate (oserei dire *gargantuesche*), la relatività gioca un ruolo essenziale.

Innanzitutto specifichiamo la notazione che useremo. Introduciamo il 4-impulso, dato dal 4-vettore (indicato senza il simbolo di vettore)

$$p^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad p_\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right)$$

e definiamo il 4-momento

$$p^2 \equiv \sum_{\mu} p_{\mu} p^{\mu} = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \quad c = 1$$

Le variabili di Mandelstam

Le variabili di Mandelstam sono grandezze fisiche che rappresentano energia, impulso e angoli delle particelle in processi di scattering in un sistema Lorentz-invariante. Vengono usate nel caso di urti elastici tra due particelle. Le variabili di Mandelstam sono oggetti utili quando si ha a che fare con delle reazioni, perché sono invarianti relativistiche per trasformazioni di Lorentz. Consideriamo la reazione che ha 2 reagenti e 2 prodotti, che nominiamo così,



Queste variabili sono 3, e sono rispettivamente:

- La prima variabile di Mandelstam è s :

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = \left(\sum_{i=1}^2 E_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^2 \vec{p}_i \right|^2 = M^2$$

chiaramente se la sommatoria andasse da $3 \rightarrow 4$ sarebbe lo stesso per il principio di conservazione dell'energia e dell'impulso. M è la massa invariante, e significa che la somma delle masse dei reagenti deve essere uguale alla somma delle masse dei prodotti.

- La seconda variabile di Mandelstam è t :

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = \underbrace{(E_1 - E_3)^2}_{\omega^2} - \underbrace{(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2}_{q^2} = \mu^2$$

quando si è trattato l'elettrone scatternig, si è usata implicitamente questa variabile, dove al posto di 1 e 3 c'era l'elettrone prima e dopo lo schettering e al posto di 2 e 4 c'era il nucleo e il nucleo eccitato. Usando la conservazione dell'energia ($E_4 = E_1 + E_2 - E_3$) e dell'impulso ($\vec{p}_4 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3$) verifichiamo l'uguaglianza di t usando 1, 3 o 2, 4.

$$(E_2 - E_4)^2 = (E_2 - E_1 - E_2 + E_3)^2 = [-(E_1 - E_3)]^2 = (E_1 - E_3)^2 = \omega^2$$

$$(\vec{p}_2 - \vec{p}_4)^2 = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2 = [-(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)]^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = q^2$$

Abbiamo concluso quindi

$$(E_1 - E_3)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = \mu^2 = (E_2 - E_4)^2 - (\vec{p}_2 - \vec{p}_4)^2$$

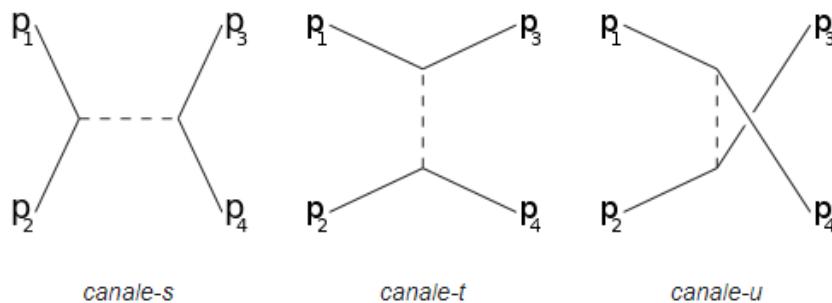
sempre per la conservazione dell'energia e dell'impulso.

- La terza variabile di Mandelstam è u :

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2$$

L'uguaglianza è sempre dovuta alla conservazione dell'energia e dell'impulso. Questo caso è analogo al secondo, cambiano tra loro solo per un ri-arrangiamento dei termini.

Le lettere s, t, u possono essere anche usate per individuare processi in canale- s , canale- t e canale- u . Questi canali rappresentano differenti tipi di *diagrammi di Feynman* o differenti processi di scattering quando l'interazione comporta lo scambio di una particella intermedia che possiede un momento $\sqrt{s}, \sqrt{t}, \sqrt{u}$,



Le variabili di Mandelstam non sono indipendenti, si dimostra infatti che vale,

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

Dimostrazione: per vederlo si usano queste proprietà,

$$p_i^2 = m_i^2 \quad \underbrace{p_1 = -p_2 + p_3 + p_4}_{\text{conservazione energia}} \quad \begin{cases} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 \end{cases}$$

Ora basta svolgere i conti,

$$\begin{aligned} s + t + u &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 + p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 \cdot p_4 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 + m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 + m_1^2 + m_4^2 - 2p_1 \cdot p_4 \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2p_1 \cdot (p_2 - p_3 - p_4) \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - 2p_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \end{aligned}$$

Grazie alla dipendenza di queste variabili, conoscendone due e sapendo le masse in gioco, posso ricavarmi la variabile incognita. Noi per semplicità di notazione abbiamo considerato una reazione semplice, ma ciò non toglie che le variabili di Mandelstam possano essere usate per reazioni a N reagenti e M prodotti ($N \rightarrow M$), senza che

cambi il loro significato.

$$\left(\sum_{i=1}^N E_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right|^2 = M^2 = \left(\sum_{i=1}^M E_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^M \vec{p}_i \right|^2$$

Queste tecniche e espedienti sono molto usati in fisica nucleare per trovare nuove particelle, infatti se si conoscono tutti gli oggetti iniziali, allora si conosce M^2 , e una volta fatta avvenire la reazione si calcolano le energie in gioco, e si sa che la relazione sopra deve sempre essere verificata. Quindi si programma un esperimento in modo da rilevare delle particelle, qualora risultasse mancante un apporto di energia alla somma di tutti gli altri prodotti della reazione noti. Usando questo ragionamento è stata possibile la scoperta del bosone di Higgs.

4.4 Fattori di forma

Lezione 6 Maggio 2020

Esercizio sul fattore di forma del protone e suo raggio. Commenti sui I fattori di forma di particelle puntiformi. La proporzionalità fra il fattore di forma di carica e magnetico.

Viene fatto un esercizio sui fattori di forma: si suppone uno scattering elettronico su protoni (target idrogeno ionizzato).

Facciamo tre ipotesi distinte: per la prima vale che la densità di carica del protone sia $\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r})$, per la seconda ipotesi $\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a}$ e come terza ipotesi si suppone $\rho(r) = \rho_0 e^{-r^2/a^2}$.

Ora, nel primo caso risulta chiaramente

$$F(\vec{q}) = e \int \delta(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = e$$

quindi in un plot sperimentale, una volta fatta la separazione di Rosenbluth, avrei che l'andamento di $F(q)$ in funzione di q risulta una funzione costante. Il grafico sperimentale però ha chiaramente delle limitazioni fisiche per quanto riguarda q (che non può essere grande all'infinito), ovvero il momento trasmesso.

Ecco che allora riusciamo a dare una definizione precisa quando si parla di particelle 'puntiformi' come elettroni o muoni: non c'è, ad oggi, alcun esperimento con energie così grandi da mostrare una forma non costante per il fattore di forma di queste particelle. Chiaramente il q massimo utilizzato per verificare questo fatto è inversamente proporzionale al raggio che costituisce un *upper bound* per il raggio delle particelle supposte puntiformi.

Per la seconda ipotesi scelgo assi per cui $z \parallel \vec{q}$ ottenendo

$$F(\vec{q}) = \rho_0 \int e^{-r/a} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \rho_0 \int e^{-r/a} e^{iqrz} r^2 d(\cos \theta) d\phi dr$$

quindi scrivendo $x = \cos \theta$

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= 2\pi\rho_0 \int_0^\infty r^2 e^{-r/a} dr \int_{-1}^1 e^{iqr x} dx = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty r^2 e^{-r/a} dr \left[\frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \right] \\ &= 2\pi\rho_0 (iq)^{-1} \left[\int_0^\infty e^{r(1/a - iq)} r dr - \int_0^\infty e^{r(1/a + iq)} r dr \right], \end{aligned}$$

Questi integrali si risolvono per parti (ad esempio ponendo $f = r$ e $g' = e^{-k_\pm r}$) e si vede che valgono rispettivamente $1/k_-^2$ e $1/k_+^2$, allora il fattore di forma è

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \frac{2\pi\rho_0}{iq} \left(\frac{1}{k_-^2} - \frac{1}{k_+^2} \right) = \frac{2\pi\rho_0}{iq} \left(\frac{1}{(\frac{1}{a} - iq)^2} - \frac{1}{(\frac{1}{a} + iq)^2} \right) \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{iq} \frac{(\frac{1}{a} + iq)^2 - (\frac{1}{a} - iq)^2}{((\frac{1}{a})^2 + q^2)^2} = \frac{2\pi\rho_0}{iq} \frac{4iq/a}{((\frac{1}{a})^2 + q^2)^2} = \frac{8\pi\rho_0}{a((\frac{1}{a})^2 + q^2)^2} \\ &= 8\pi\rho_0 \frac{a^3}{(1 + a^2q^2)^2} \end{aligned}$$

Come visto anche nella scorsa lezione $F(q^2) \equiv F(\vec{q})$, cioè gli unici termini dipendenti da q sono a potenze pari, poiché quelli con una potenza dispari di q si annullano. Adesso si può determinare ρ_0 sapendo che la densità di carica integrata su tutto lo spazio è e :

$$\rho_0 = \frac{e}{4\pi \int r^2 e^{-r/a} dr}$$

Un metodo comodo per risolvere l'integrale è quello di ricordare che

$$\begin{cases} \int_0^\infty e^{-br} dr = \frac{1}{b} \\ \int_0^\infty re^{-br} dr = -\frac{d}{db}(\frac{1}{b}) = \frac{1}{b^2} \\ \int_0^\infty r^2 e^{-br} dr = -\frac{d}{db}(\frac{1}{b^2}) = \frac{2}{b^3} \end{cases}$$

and so on and so forth. L'espressione precedente diventa $\rho_0 = \frac{e}{8\pi a^3}$ che, sostituita nell'espressione del fattore di forma, porta alla formula finale

$$F(\vec{q}) = 8\pi \frac{a^3}{(1 + a^2q^2)^2} \frac{e}{8\pi a^3} = \frac{e}{(1 + a^2q^2)^2}$$

Troviamo infine il fattore di forma nella terza ipotesi:

$$F(\vec{q}) = \rho_0 \int e^{-\frac{r^2}{a^2}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$

riarrangiando e completando il quadrato a esponente si può scrivere

$$F(\vec{q}) = \rho_0 \exp \left\{ -\frac{a^2 q^2}{4} \right\} \int \exp \left\{ -\left(\frac{\vec{r}}{a} - i \frac{a \vec{q}}{2} \right)^2 \right\} d\vec{r}$$

e facendo il cambio di variabile $\vec{x} = \left(\frac{\vec{r}}{a} - i \frac{a \vec{q}}{2} \right)$ il fattore di forma risulta

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \rho_0 \exp \left\{ -\frac{a^2 q^2}{4} \right\} a^3 \int e^{-x^2} d\vec{x} \\ &= 4\pi a^3 \rho_0 e^{-\frac{a^2 q^2}{4}} \int x^2 e^{-x^2} dx = 4\pi a^3 \rho_0 e^{-\frac{a^2 q^2}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \\ &= \pi^{3/2} a^3 e^{-\frac{a^2 q^2}{4}} \rho_0 \end{aligned}$$

Analogamente a prima si può trovare $\rho_0 = e/a^3 \pi^{3/2}$ attraverso la normalizzazione, così si arriva al risultato finale

$F(\vec{q}) = F(q^2) = e^{-\frac{a^2 q^2}{4}} e$

cioè il fattore di forma è dato dalla carica, volte una funzione gaussiana della q (d'altronde sapevamo che la trasformata si Fourier di una funzione gaussiana è ancora una gaussiana).

Prima di fare un confronto con i dati sperimentali, si noti che talvolta i fattori di forma nucleare e magnetico F e M sono indicati rispettivamente come G_E e G_M .

Già in figura 22 era stato riportato il fattore di forma magnetico (normalizzato al momento magnetico totale) del protone in funzione di q . Si noti che si può vedere la normalizzazione come l'utilizzo di una nuova densità magnetica normalizzata $\tilde{\rho}_{mag} = \rho_{mag}/\mu_p$ con $\mu_p = 2.79 \mu_N$, in modo che per il nuovo fattore di forma valga $\tilde{M}(0) = 1$. Qui di seguito (a sinistra) si riporta un'ulteriore figura per maggiore chiarezza.

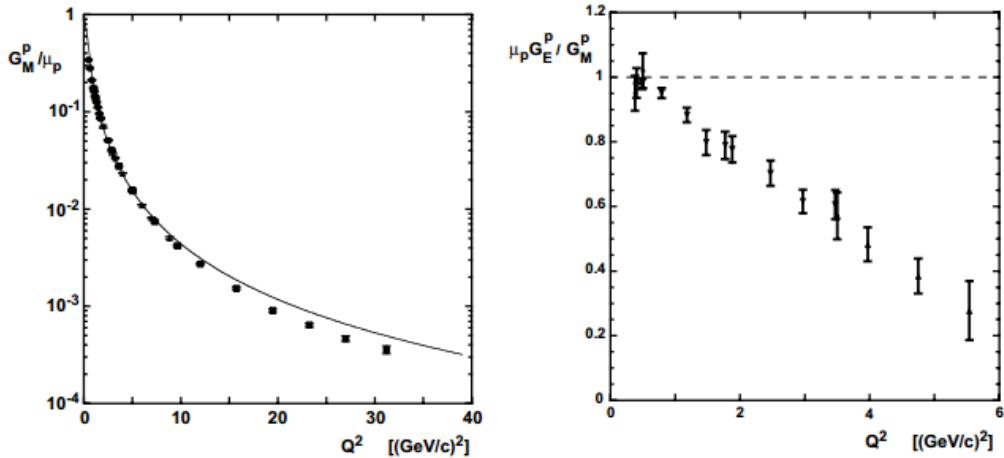


Figure 6.13: Left: Magnetic form factor for the proton plotted against the squared momentum transfer $|q|^2$. The different symbols correspond to different experiments. The ‘dipole’ function –described in the text and shown as a continuous line– describes the G_M data quite accurately below $|q|^2 \approx 10$ (GeV/c) 2 . Right: G_E/G_M . The distributions of charge and magnetism in the proton are quite different. [See C.Hyde-Wright and K. de Jager, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **54**, 217 (2004).]

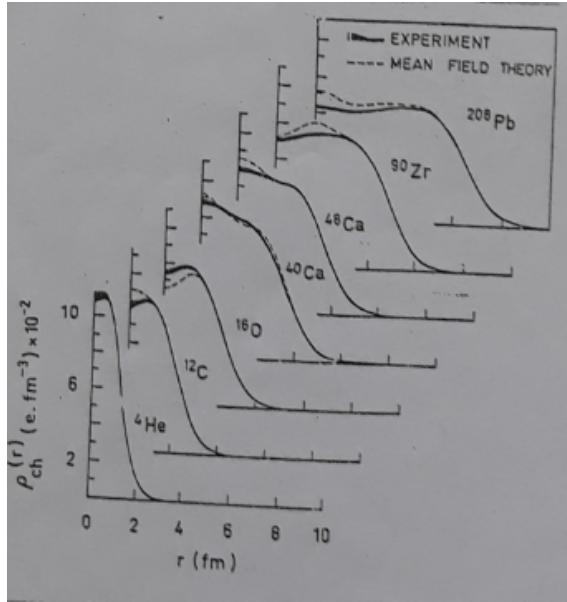
Figura 23: Fattore forma magnetico e relazione con il fattore di forma di carica.

Un fatto interessante è se viene fatta la stessa procedura di normalizzazione anche per la densità di carica ($\tilde{\rho} = \rho/e$), allora il grafico sperimentale che si ottiene per $\tilde{F}(q)$ risulta sovrapponibile a quello di $\tilde{M}(q)$.

Il modello, presente anche in figura 22, che dà un buon accordo con i dati sperimentali è dato da

$$\tilde{M}(q) = \left[\frac{1}{1 + \frac{q^2}{0.71 \text{ GeV}^2}} \right]^2$$

quindi si deduce che la prima e la terza ipotesi fatte per il fattore di forma non sono buone, ma la seconda sì e la distribuzione di carica del protone è del tipo $\rho_0 e^{-r/a}$. Quindi questo esponenziale decrescente si avvicina di più alla distribuzione di carica trovata per l’elio, rispetto a quella del piombo (si veda la figura seguente).



Per poter dare una stima del raggio del protone, come fatto in precedenza vogliamo allora il raggio quadratico medio $R_p = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$. Dalla relazione esposta prima sappiamo che $a^2 = 1/(0.71 \text{ GeV}^2)$ e

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= \frac{\int \rho(\vec{r}) r^2 d\vec{r}}{\int \rho(\vec{r}) d\vec{r}} = 4\pi\rho_0 \frac{\int e^{-r/a} r^4 dr}{e} \\ &= 4\pi \frac{e}{8\pi a^3} \frac{1}{e} \int e^{-r/a} r^4 dr = \frac{1}{2a^3} 24a^5 = 12a^2\end{aligned}$$

Per quanto detto prima

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= \frac{12}{0.71 \text{ GeV}^2} = 17 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2} \\ &= 17 \times 10^{-6} \text{ MeV}^{-2} \times (197.33 \text{ MeV fm})^2 = 0.658 \text{ fm}^2\end{aligned}$$

ovvero

$$R_p = \sqrt{0.658 \text{ fm}^2} \approx 0.8 \text{ fm}$$

che non risulta troppo piccolo se si pensa che ad esempio il raggio del piombo è di circa 6 fm, ciò significa che i nucleoni sono molto 'impacchettati'. Un metodo alternativo per il calcolo del raggio quadratico medio è quello visto nella lezione precedente, ovvero si parte da

$$F(q) = F(q^2) = e \left(1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle + \dots \right)$$

allora al primo ordine

$$-\frac{e}{6} \langle r^2 \rangle = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{d}{d(q^2)} F(q^2) = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{d}{d(q^2)} \left(\frac{e}{(1 + a^2 q^2)^2} \right) = -\lim_{q^2 \rightarrow 0} 2ea^2(1 + a^2 q^2)^{-3}$$

ovvero

$$\langle r^2 \rangle = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{2ea^2(1+a^2q^2)^{-3}}{e/6} = 12a^2$$

che è lo stesso risultato ottenuto prima.

Lezione 7 Maggio 2020

Il fattore di forma e le distribuzioni multipolari della densità di carica. La parità e la non esistenza del momento di dipolo. Momenti di quadrupolo e forme oblate e prolate. Alcune considerazione sulla massa invariante.

Riprendiamo il discorso sul fattore di forma di carica e quello magnetico, visto nelle scorse lezioni. Consideriamo di nuovo il grafico (23). Abbiamo visto che se grafico il fattore di forma di carica diviso per la carica e , il suo andamento è lo stesso per il fattore di forma magnetica diviso per il μ_p . Ma precisamente questo accade solo in una piccola zona (come si vede dal grafico), ovvero solo per piccoli q^2 ($q^2 \sim 1$). Nella regione con $q^2 : 0 \rightarrow 1 \text{ GeV}^2$ o ugualmente $q : 0 \rightarrow 1000 \text{ MeV}$ le cose funzionano. Vediamo quindi la risoluzione per vedere il protone corrispondente a questo intervallo di q .

$$\lambda = \frac{1}{q} = \frac{1}{1000} \text{ MeV}^{-1} \simeq 0.2 \text{ fm}$$

e come ci si aspettava l'ordine era dei fm , visto che la scorsa lezione abbiamo trovato che il protone ha raggio circa 0.8 fm . Quindi i due grafici (G_M, G_E) sono gli stessi solo quando la risoluzione, con cui guardo il protone, è maggiore di 0.2 fm , che corrisponde a circa $1/4$ del raggio del protone. Mentre guardando dal grafico uno degli ultimi punti dove la differenza tra i fattori di fase è evidente, ad esempio con $q^2 = 4 \text{ GeV}^2 \rightarrow q = 2 \text{ GeV}$ non giusto, la risoluzione risulta circa $\lambda \simeq 0.1 \text{ fm}$, e dunque con risoluzioni sempre più piccole la magnetizzazione non segue più la carica. Questo ci fa pensare che, guardando sempre più in fino, ci si accorge che ci sono strutture di cui non si pensava, ovvero adesso bisognerebbe immaginare il protone come un nucleo e i quarks come nucleoni, da qui l'importanza di aumentare la risoluzione sempre più. Il q corrisponde alla lunghezza d'onda della luce con cui andiamo ad osservare questi oggetti, in più in laboratorio q si può conoscere e controllare, da questi fatti segue la sua importanza. Ricordiamo l'espressione di q ,

$$q^2 = (\vec{k}_i - \vec{k}_f)^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos \theta$$

Osserviamo lo schema di elettro-scattering sotto, e quindi, sperimentalmente, k_i lo si può controllare ad esempio dall'acceleratore, mentre dai rivelatori possiamo scegliere le particelle che giungono al detector con un certo k_f ed ad un angolo θ , in modo da controllare il q . Il q massimo lo otteniamo con gli angoli "in indietro" ($\theta = \pi$). Riprendendo l'esperimento di Rosenbluth (grafico regressione lineare con χ sulle ascisse), dove dobbiamo mantenere costante q e variato θ , per procedere si gioca con k_i variandolo, in modo da tenere costante q .

Densità non sferiche, caso generale.

Nelle scorse lezioni, abbiamo considerato sempre la densità di carica come sferica, in

modo da sfruttare la simmetria medesima per semplificare il calcolo degli integrali, ma questo non significa che in natura si trovino solo distribuzioni sferiche, anzi non succede quasi mai (esempio il deuterio ha anche una distribuzione di quadripolo). Sappiamo che dai fattori di forma è possibile ricavarsi le distribuzioni di carica o di momento magnetico (considerando naturalmente $F(\vec{q})$ e non $F(q)$). Riprendiamo i calcoli fatti nelle scorse lezioni sul calcolo dell'integrale del fattore di forma (trasformata di Fourier),

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty r^2 dr dx d\varphi e^{iqrx} \rho(r, \theta, \varphi)$$

In più considerando la simmetria sferica di $\rho(r)$,

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1}{iqr} e^{iqrx} dx \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = \int_0^\infty \frac{2\pi}{iqr} 2i \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2i} \rho(r) r^2 dr \\ &= 2\pi 2 \int \frac{1}{qr} \sin(qr) \rho(r) r^2 dr = 4\pi \int \rho(r) r^2 dr J_0(q, r) \end{aligned}$$

dove J_α (J_0 con $\alpha = 0$), sono le *fuzioni di Bessel sferiche*. Quindi il caso sferica si riassume come (q è modulo),

$$F(\vec{q}) = 4\pi \int \rho(r) r^2 dr J_0(q, r)$$

Il caso in cui $\rho(\vec{r})$ non è sferica, le cose si complicano un poco, procediamo quanto segue,

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) d\vec{r} = \int e^{iqr \cos \theta} \rho(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int e^{iqr \cos \theta} \rho(r, \theta, \varphi) r^2 dr d\Omega$$

Nel contesto della meccanica quantistica si trovano spesso le *armoniche sferiche*, un insieme di autofunzioni simultanee degli operatori momento angolare totale L^2 , della sua componente lungo z e dell'operatore parità (insieme completo). Riportiamo la forma generale,

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \left\{ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right\}^{\frac{1}{2}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

dove $P_l(x)$ sono i *polinomi di Legendre*, ed hanno la forma,

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

Vogliamo risolvere l'integrale del fattore di forma, cerchiamo di usare le considerazioni sopra per trovare una soluzione. Dalla forma sopra delle armoniche sferiche, si osserva che il numero m è associato solo alla variabile φ , decidiamo di scegliere il caso $m = 0$, in modo da togliere la dipendenza di φ dalle armoniche sferiche, in questo modo

otteniamo $Y_l^0(\theta)$. Espandiamo allora l'esponenziale dell'integrale (funzione di θ) in questo modo,

$$e^{iqr \cos \theta} = \sum_l C_l(q, r) Y_l^0(\theta)$$

dove $C_l(q, r)$ è la proiezione dell'esponenziale su $Y_l^0(\theta)$, nello specifico,

$$C_l(q, r) = \int e^{iqr \cos \theta} Y_l^0(\theta) d\theta$$

Quindi nulla ci vieta di espandere l'esponenziale sopra come combinazioni di *armoniche sferiche e funzioni di Bessel*.

$$e^{iqr \cos \theta} = \sum_l \sqrt{4\pi} (i)^l J_l(q, r) Y_l^0(\theta)$$

L'espressione appena scritta non è altro che l'espansione di un'onda piana usando le *funzioni di Bessel*. Questa ritorna utile molte volte, e in modo particolare, noi andiamo ora a sostituirla nell'integrale di partenza.

$$F(\vec{q}) = \sum_l \sqrt{4\pi} (i)^l \int \rho(r, \theta, \varphi) J_l(q, r) Y_l^0(\theta) r^2 dr d\Omega$$

Esplicitiamo la sommatoria, andando a rappresentare i primi termini,

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \sqrt{4\pi} \int \rho(r, \theta, \varphi) J_0(q, r) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}_{Y_0^0(\theta)} r^2 dr d\Omega \\ &\quad + \sqrt{4\pi} i \int \rho(r, \theta, \varphi) J_1(q, r) Y_1^0(\theta) r^2 dr d\Omega \\ &\quad - \sqrt{4\pi} \int \rho(r, \theta, \varphi) J_2(q, r) Y_2^0(\theta) r^2 dr d\Omega + \dots \end{aligned}$$

Da qui si vede come il caso in cui $\rho(r)$ è sferico, tutti i termini della sommatoria, a parte il primo, si annullano, perché dalle proprietà delle armoniche sferiche vale,

$$\int_{-1}^1 Y_l^0(\theta, \varphi) d(\cos \theta) = \delta_l^0$$

mentre il fattore $l = 0$ della sommatoria, diventerebbe,

$$\sqrt{4\pi} \int \rho(r, \theta, \varphi) J_0(q, r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r^2 dr d\Omega \rightarrow 4\pi \int \rho(r) J_0(q, r) dr$$

come nel caso particolare in cui siamo partiti considerando $\rho(r)$ sferico. Quindi dallo sviluppo della sommatoria siamo andati ad esplicitare i termini *multipolari* del fattore di forma, il caso $l = 0$ si chiama termine di monopolio, il caso $l = 1$ si chiama termine

di dipolo, il caso $l = 2$ termine di quadrupolo, e così via. Tutti questi fattori danno informazioni sulla distribuzione di densità di carica.

Consideriamo ora un caso di elettro-scattering. immaginiamo che un elettrone passi nei pressi di un nucleo, se questo non è troppo vicino, verrà deviato di poco (scattering Rutherford), quindi avremo un q piccolo, di conseguenza varrà $k_i \approx k_f$. Ricordando che nelle formule sopra, solo le *funzioni di Bessel* dipendono da q , si trova che vale questo limite per q piccoli,

$$\lim_{q \rightarrow 0} J_l(q, r) \rightarrow \frac{q^l r^l}{(2l + 1)!!}$$

Studiando il significato di termine a termine della sommatoria sopra e mettendoci in questo caso di q piccoli, dove vale questo limite, otteniamo,

- Primo termine ($l = 0$)

$$\int \rho(r, \theta, \varphi) d\vec{r}$$

Questo corrisponde alla carica, quindi il termine di monopolio del fattore di forma è la carica, quando si guarda da lontano;

- Secondo termine ($l = 1$)

$$q \int \rho(r, \theta, \varphi) \underbrace{r \cos \theta}_{Z} d\vec{r}$$

Questo corrisponde al momento di dipolo, si sono tralasciati fattori moltiplicativi costanti;

- Terzo termine ($l = 2$)

$$q^2 \int \rho(r, \theta, \varphi) \underbrace{r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}_{(3Z^2 - r^2) = Q} d\vec{r}$$

Questo corrisponde al momento di quadrupolo;

- E così via ...

Il fattore di forma può essere espanso in *armoniche sferiche* e *funzioni di Bessel*, per ottenere i *momenti di multipoli*, in più con q sufficientemente piccoli, possiamo approssimare le *funzioni di Bessel* a delle funzioni più semplici, come abbiamo fatto sopra. Prendiamo il momento di dipolo, in fisica classica è ben definito, mentre in meccanica quantistica la situazione è diversa. la densità di carica $\rho(\vec{r})$, in meccanica quantistica, è data dalla probabilità che le particelle occupino un particolare posto nello spazio. Prendiamo la funzione d'onda $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$, in questo contesto ci chiediamo quale sia la probabilità di trovare una carica in \vec{r} , e questa è data da

$$\rho(\vec{r}) = \int \Psi^*(\vec{r}, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \Psi(\vec{r}, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N$$

nel momento in cui a noi interessa studiare la carica in \vec{r} , le altre possono stare in qualsiasi altra parte dello spazio. Sarebbe da usare questa espressione di ρ nei *termini di multipolo* sopra. Tornando al caso del momento di dipolo, ci si accorge del problema di questa espressione di ρ andando a studiare la *parità*. Nel caso del deuterio ci ricordiamo che il prodotto $\Psi^*\Psi$ deve essere pari, quindi o Ψ^* e Ψ sono entrambe pari, o sono entrambe dispari, non possono essere una pari e l'altra dispari, altrimenti è violata la *parità*. Quindi ρ è sempre pari, da questo fatto deriva quindi che il termine di dipolo si annulla (visto che è un integrale di una funzione pari per una dispari), di conseguenza possiamo concludere che la meccanica quantistica non permette l'esistenza di un dipolo permanente.

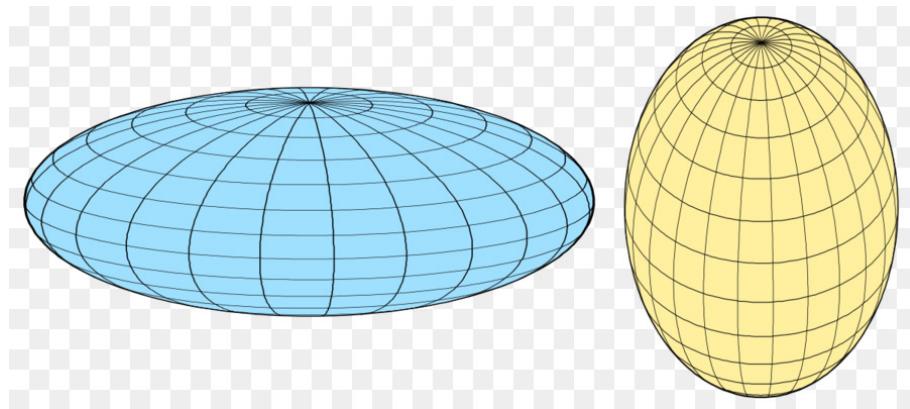
La questione è diversa nel caso del momento di quadrupolo (Q), infatti in questo caso l'integrale non si annulla, e possiamo dunque riscrivere come

$$Q = \langle 3z^2 \rangle - \langle r^2 \rangle = \langle 3z^2 \rangle - \langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle - \langle z^2 \rangle = \langle 2z^2 \rangle - \langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle$$

Considerando la simmetria sferica ($\langle z \rangle = \langle x \rangle = \langle y \rangle$), ancora una volta abbiamo la conferma che in questo caso il momento di quadrupolo si annulla. Se invece ora, ad esempio, consideriamo la simmetria assiale ($\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$), quindi

$$Q = 2\langle z^2 \rangle - 2\langle x^2 \rangle = 2(\langle z^2 \rangle - \langle x^2 \rangle)$$

Si possono presentare due casi, o forme, come in figura,



- la forma prolata $Q > 0$, seconda immagine;
- la forma oblata $Q < 0$, prima immagine;

dallo studio dei momenti di quadrupolo Q , troviamo informazioni sulla forma dei nuclei.

Consideriamo il caso del deuterio, nelle lezioni precedenti avevamo ricavato il valore numerico del momento di quadrupolo essere $Q \simeq 0.27 \text{ fm}^2$, ora possiamo concludere che la sua forma è prolata, seppur di poco, e ricordiamo inoltre che era il contributo dell'onda D che non permetteva al deuterio di essere sferico ($\mu_d = \mu_p + \mu_n$).

Notazione: Quando si parla di momenti di quadrupolo o di sezioni d'urto, vengono

usate altre unità di misura come il **barn** (**b**)

$$1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

Mostriamo solo qualche esempio: $Q(D) = 0.0027 \text{ b}$ per il Deuterio, $Q(^{17}\text{O}) = 0.02 \text{ b}$ per l'Ossigeno-17 e $Q(^{175}\text{Lu}) = 5.68 \text{ b}$ per il Lutezio-175.

4.5 Invarianti relativistici

Dopo questa digressione sui fattori di forma, torniamo al discorso degli invarianti relativistici. In una delle scorse lezioni avevamo introdotto le variabili di Mandelstan s, t, u e le loro rispettive rappresentazioni grafiche (diagrammi di Feynman), chiaramente tutto legato al discorso generale della conservazione dell'energia. Ricordiamo inoltre l'ultima conclusione che avevamo tratto,

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

Concentriamoci ora su s , ovvero alla massa invariante $M^2 (= W^2)$,

$$M^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right|^2$$

ricordiamoci in più che questa quantità si conserva sempre, per ogni reazione, indipendentemente dal numero di reagenti e di prodotti. Inoltre questa quantità è un invariante per ogni sistema di riferimento che scegliamo. Decidiamo dunque di metterci ad esempio nel sistema di riferimento del centro di massa (o CM-system),

$$\sum_i \vec{p}_i \equiv \vec{p}_{CM} = 0$$

quindi un sistema dove valga la relazione sopra. Calcoliamo la massa invariante nel CM-system

$$W^2 = M^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 = \left(\sum_i m_i + T_i \right)^2 \geq \left(\sum_i m_i \right)^2 > \sum_i m_i^2$$

dove abbiamo usato per le energie $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2 = (m_i + T_i)^2$, quindi abbiamo trovato l'importante relazione per le masse in gioco e la massa invariante relativisticamente,

$$M^2 \geq \left(\sum_i m_i \right)^2 > \sum_i m_i^2$$

Nel caso specifico in cui vale $\vec{p}_i = 0 \quad \forall i$, allora vale $M^2 = \left(\sum_i m_i \right)^2$, perché non c'è un contributo dell'energia cinetica.

Ci mettiamo ora nel sistema di riferimento del laboratorio, quindi scriviamo

$$\begin{aligned}
 M^2 &= \left(\sum_i \sqrt{m_i^2 + m_i v^2} \right)^2 - \left(\sum_i m_i \vec{v} \right)^2 \\
 &= \sum_{i,j} \sqrt{m_i^2 + m_i v^2} \sqrt{m_j^2 + m_j v^2} - \sum_{i,j} (m_i \vec{v}) \cdot (m_j \vec{v}) \\
 &= \sum_{i,j} m_i m_j \sqrt{1+v^2} \sqrt{1+v^2} - \sum_{i,j} (m_i m_j v^2) \\
 &= \sum_{i,j} m_i m_j (1+v^2) - \sum_{i,j} (m_i m_j v^2) \\
 &= \sum_{i,j} m_i m_j = \left(\sum_i m_i \right)^2
 \end{aligned}$$

abbiamo dunque ottenuto lo stesso risultato anche per il sistema di riferimento del laboratorio (invariante).

Ora studiamo il caso generale. Nel caso i cui $a+b \rightarrow 1, 2, \dots, N$, dove a e b possono essere due particelle (ad esempio particella proiettile e particella target), valgono le seguenti formule

$$M^2 = (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left| \sum_i \vec{p}_i \right|^2$$

Consideriamo ora

$$E_{a,b} = m_{a,b} + T_{a,b} \quad T_{a,b} = \sqrt{m_{a,b} + p_{a,b}^2} - m_{a,b}$$

Ora risolvendo l'espressione di $M^2 \geq \left(\sum_i m_i \right)^2$,

$$\begin{aligned}
 (M^2 =) \quad & (m_a + T_a + m_b + T_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 \geq \left(\sum_i m_i \right)^2 \\
 (m_a + m_b)^2 + (T_a + T_b)^2 + 2(m_a + m_b)(T_a + T_b)^2 - p_a^2 - p_b^2 - 2\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b & \geq \left(\sum_i m_i \right)^2 \\
 T_a^2 + T_b^2 + 2T_a T_b + 2m_a T_a + 2m_b T_b + 2m_a T_b + 2m_b T_a - 2\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b - p_a^2 - p_b^2 & \geq \left(\sum_i m_i \right)^2 - (m_a + m_b)^2
 \end{aligned}$$

In più osserviamo che vale

$$T_{a,b}^2 + 2m_{a,b} T_{a,b} - p_{a,b}^2 = p_{a,b}^2 + m_{a,b}^2 + m_{a,b}^2 - 2m_{a,b} \sqrt{m_{a,b}^2 + p_{a,b}^2} + 2m_{a,b} \sqrt{m_{a,b}^2 + p_{a,b}^2} - 2m_{a,b}^2 - p_{a,b}^2 = 0$$

Quindi possiamo semplificare la diseguaglianza sopra in modo da ottenere,

$$2T_a T_b + 2m_a T_b + 2m_b T_a - 2\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b \geq \left(\sum_i m_i \right)^2 - (m_a + m_b)^2$$

Nella prossima lezione verranno discussi i due casi di sistema di riferimento del laboratorio e quello del centro di massa. Ricordiamo che fino ad ora non abbiamo introdotto la relatività, perché nello studio dei nuclei il suo contributo è trascurabile per quel che compete a noi, e più in generale se consideriamo energie in gioco (masse dei nuclei molto più energetiche rispetto alle energie cinetiche, nel caso di nuclei non accelerati), il discorso non vale per gli elettroni, infatti, vista la loro massa, bastano energie cinetiche piccole per rendere evidenti gli effetti relativistici.

Lezione 8 Maggio 2020

La massa invariante e le energie cinetiche di soglia nel sistema di laboratorio a in quello del centro di massa. I collider. Esercizi sulla massa invariante.

Per riassumere la lezione scorsa, partendo dalla massa invariante quadrata

$$M^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right|^2 = (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2$$

si è giunti al risultato

$$M^2 \geq \left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2, \quad \left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2 \geq \sum_{i=1}^N m_i^2$$

dove nel primo caso l'uguaglianza vale se tutti i momenti iniziali sono nulli. Infine si era arrivati alla diseguaglianza

$$2T_a T_b + 2m_a T_b + 2m_b T_a - 2\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b \geq \left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2 - (m_a + m_b)^2$$

e ora si vuole vedere come sfruttare quanto ricavato per esercizi o esperimenti, 'giocondo' con il sistema di riferimento posto in laboratorio e quello posto sul centro di massa del problema.

Ci mettiamo inizialmente nel sistema di riferimento del laboratorio, la targhetta è ferma e pertanto $\vec{p}_b = T_b = 0$, la diseguaglianza precedente diventa

$$2m_b T_a \geq \left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2 - (m_a + m_b)^2 \equiv \Delta m_q$$

quindi $T_a \geq \Delta m_q / 2m_b$ e i casi sono 2:

- $\Delta m_q \geq 0$, allora poiché T_a è sempre maggiore di zero è evidente che $T_a \geq$

Δm_q è sempre verificato. Ciò significa che per qualunque T_a queste reazioni possono sempre avvenire: $(\sum_{i=1}^N m_i)^2 \leq (m_a + m_b)^2$. Effettivamente è il caso dei decadimenti, come già visto, dove il quadrato della massa iniziale è maggiore della somma dei quadrati di quella dei frammenti.

- $\Delta m_q \leq 0$, allora esiste un'energia $T_a^{soglia} = \Delta m_q / 2m_b$ minima da fornire in modo che $(\sum_{i=1}^N m_i)^2 \leq (m_a + m_b)^2$, ovvero in modo da creare particelle la cui massa al quadrato sia maggiore della somma dei quadrati delle masse iniziali. Ricordiamo che T_a^{soglia} , per come definita, è l'energia che si ha quando tutti i p_i sono nulli singolarmente.

Ci mettiamo ora nel sistema del centro di massa, ovvero dove $\sum_i \vec{p}_i = 0$. Allora $\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0$ e per la massa invariante

$$M^2 = (E_a + E_b)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2$$

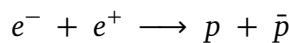
ovvero

$$E_a + E_b = m_a + T_a + m_b + T_b \geq \sum_i m_i \Rightarrow T_a + T_b \geq \sum_i m_i - (m_a + m_b) \equiv \Delta m \equiv Q.$$

Analogamente al caso precedente le opzioni sono due

- $\Delta m \geq 0$, allora per qualunque T_a e T_b queste reazioni in cui la massa iniziale è maggiore di quella dei frammenti possono sempre avvenire .
- $\Delta m \leq 0$, allora esiste un'energia $(T_a + T_b)^{soglia} = \Delta m$ minima da fornire in modo che avvenga la reazione in cui la massa delle particelle totali create sia maggiore della somma di quelle di partenza.

Facciamo ora un esercizio: supponiamo di avere un elettrone ed un positrone e farli collidere cercando di creare una coppia di particelle molto più massive come un protone ed un antiproton (la carica totale si deve conservare). Calcoliamo l'energia iniziale necessaria per fare avvenire la reazione



Nel sistema del laboratorio deve valere il requisito dell'energia di soglia sopracitato

$$T_{e^-} \geq \frac{(m_p + m_{\bar{p}})^2 - (m_{e^+} + m_{e^-})^2}{2m_{e^-}} = \frac{4(m_p^2 + m_e^2)}{2m_e}$$

che sostituendo con i valori delle masse porta a 4×10^3 GeV ovvero 4 TeV.
Nel sistema del centro di massa invece

$$T_{e^+} + T_{e^-} \geq 2m_p - 2m_e \sim 2m_p \sim 2 \text{ GeV}$$

Allora è evidente il vantaggio enorme in energia che si ha accelerando entrambi i leptoni di 2 GeV e farli scontrare l'uno con l'altro, anziché doverne accelerare uno 4 TeV e farlo collidere su una targhetta ferma.

Questo è il meccanismo con cui funzionano gli acceleratori di particelle oggigiorno. In particolare un famoso collider di elettroni e positroni è il LEP, *Large Electron-Positron collider*, che lavora ad un'energia di circa 50 GeV. Ad Amburgo è presente l'HERA che accelera elettroni contro protoni ad un'energia che va dai 30 GeV agli 800 GeV. Nel LHC possono circolare adroni di tutti i tipi (anche nuclei pesanti contro nuclei pesanti) che arrivano a $10 \div 15$ TeV.

Svolgiamo ora due esercizi sulla massa invariante.

- Calcolo la massa invariante in due casi: quello di due particelle di massa uguale e inizialmente ferme e quello in cui le due particelle identiche abbiano anche momento uguale.

Si ha $m_1 = m_2 = m$ e $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}$ ($= 0$ nel primo caso):

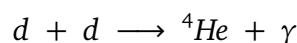
$$M^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right|^2 = (\sqrt{m^2 + p^2} + \sqrt{m^2 + p^2})^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$$

Nel primo caso la massa invariante di due particelle ferme risulta $4m^2$, nel secondo caso si ha

$$M^2 = m^2 + p^2 + m^2 + p^2 + 2(m^2 + p^2) - (2p)^2 = 4m^2$$

ovvero la stessa. Ma c'era da aspettarselo in quanto le due situazioni sono la stessa se viste da due sistemi di riferimento in moto costante tra loro, ovvero tra i quali sia presente una trasformazione di Lorentz. Chiaramente la massa *invariante* per definizione fornirà gli stessi risultati (qualora le masse sono uguali nei due casi).

- Data una reazione di fusione in cui due deuteri si uniscono a formare un atomo di elio e un raggio gamma calcoliamo la possibile energia del γ . La reazione è



Nel sistema di riferimento del centro di massa

$$M^2 = W^2 = (2E_d)^2 = (E_H + E_\gamma)^2 = 4E_d^2 = E_H^2 + E_\gamma^2 + 2E_H E_\gamma$$

che si riscrive

$$M^2 = 4(m_d^2 + p_d^2) = m_H^2 + p_H^2 + p_\gamma^2 + 2p_\gamma \sqrt{m_H^2 + p_h^2}$$

Essendo nel centro di massa $p_h = p_\gamma$, allora

$$4(m_d^2 + p_d^2) = m_H^2 + 2p_\gamma^2 + 2p_\gamma \sqrt{m_H^2 + p_\gamma^2}$$

Ricordiamo $m_p = 938.3 \text{ MeV}$, $m_n = 936.6 \text{ MeV}$, $BE(d) = 2.22 \text{ MeV}$, $BE(H) = 28.296 \text{ MeV}$ che implica

$$m_H = 2 \times m_p + 2 \times m_n - BE(H) = 3727.5 \text{ MeV}$$

$$m_d = 1 \times m_p + 1 \times m_n - BE(d) = 1875.68 \text{ MeV}$$

Supponiamo che il momento p_d invece sia circa nullo. Il motivo è che per mettere in atto queste reazioni è necessario superare la barriera coulombiana di repulsione tra i deuteri e ciò avviene tipicamente dando sufficiente energia, sotto forma di calore, agli atomi in modo da superare la barriera. Sono necessarie quindi temperature paragonabili a quelle presenti sulla superficie solare, ovvero circa $T = 14 \times 10^6 \text{ K}$. Questo valore corrisponde ad un'energia $k_b T \sim T_d \sim 1.2 \text{ KeV}$, allora il momento del deuterio è dato da

$$T_d \sim \frac{p_d^2}{2m_d} \Rightarrow p_d = \sqrt{2m_d T_d} = 16 \text{ MeV},$$

che in confronto alla massa di 1875.68 MeV si considera trascurabile. Ricapitolando l'equazione da risolvere in p_γ è

$$4m_d^2 = m_H^2 + 2p_\gamma^2 + 2p_\gamma \sqrt{m_H^2 + p_\gamma^2}$$

che, sostituendo con i valori delle masse, risulta $p_\gamma = 23.78 \text{ MeV}$. Quindi l'energia prodotta dalla differenza delle masse iniziali e finali si trasforma in energia sotto forma di radiazione. Però ciò non avviene per tutta l'energia disponibile che è

$$m_H - 2m_d = (2m_p + 2m_n - 28.296 \text{ MeV}) - 2(m_p + m_n - 2.22 \text{ MeV}) = 23.856 \text{ MeV}$$

L'energia data dalla differenza delle masse e che non contribuisce a p_γ è $23.856 \text{ MeV} - 23.780 \text{ MeV} = 0.0758 \text{ MeV}$ ed è l'energia cinetica di 'rinculo' dell'elio. Ciò si verifica facilmente² calcolando l'energia di rinculo dell'elio.

In definitiva attraverso questo processo si ottiene energia cinetica a spesa delle masse, quindi ho un ottimo guadagno di 23.856 MeV (di cui 23.78 MeV in energia del γ e 0.0758 MeV per il rinculo dell'elio) con una reazione di fusione.

5 Antiparticelle

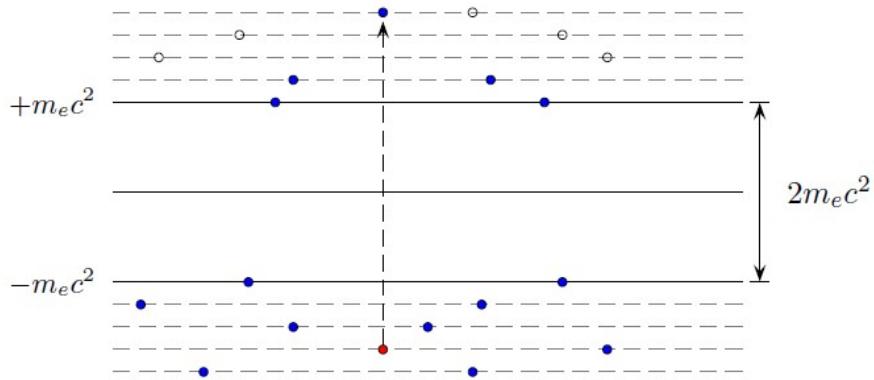
Lezione 14 Maggio 2020

Le anti particelle: l'interpretazione di Dirac e quella di Feynmann. Il neutrino e l'antineutrino. Il doppio decadimento beta con e senza neutrini e l'ipotesi di Majorana. Il numero barionico e la sua conservazione . Il numero leptonico e la sua conservazione.

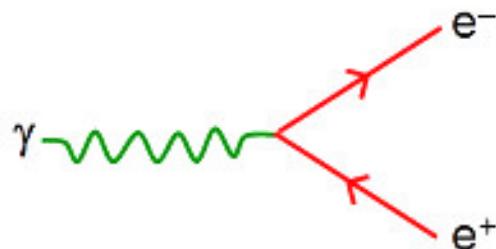
Già Dirac nel 1927 realizzò che valendo $E^2 = p^2 + M^2 \rightarrow E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$ allora un

²Esercizio per casa: Come già detto $p_\gamma = p_h = 23.780 \text{ MeV}$. Possiamo approssimare classicamente l'energia cinetica dell'elio come $p_h^2/2m_h$, infatti in questo caso $p_h \ll m_h$. Calcolando questa energia si ottiene proprio 0.07585 MeV.

elettrone potrebbe avere uno stato libero di energia negativa. Questi non sono stati ordinari oppure le particelle li occuperebbero essendo con energia minore a quelli con energia positiva. Dirac immagina allora che gli stati non ordinari siano già tutti riempiti e le particelle ordinarie non li possano occupare per il principio di esclusione. All'inizio di queste speculazioni si definivano gli elettroni occupanti gli stati negativi come *mare di Dirac*.



Se si riuscisse a dare circa 1 Mev di energia ($2m_e c^2$) ad un elettrone con energia $-m_e c^2$ ci potrebbe forse essere un processo di assorbimento per spostare un elettrone negli stati visibili. Per la conservazione della carica si creerebbe un 'buco' positivo nella posizione precedente a $E = -m_e c^2$, questo 'buco' si identifica con il positrone. Quindi un fotone effettua una creazione di coppia di particella e antiparticella.



Da notare che per i bosoni questa idea non sussiste in quanto non vale il principio di esclusione, quindi questo modello è solo rappresentativo di alcuni casi.
Sviluppiamo però il modello scrivendo la massa invariante:

$$E_\gamma^2 n - p_\gamma^2 = 0 = (E_+ E_-)^2 - (\vec{p}_+ \vec{p}_-)^2 = 2m_e^2 + 2E_+ E_- - 2p_+ p_- \cos \theta$$

ovvero

$$0 = 2m_e^2 + 2\sqrt{m^2 + p_+^2} \sqrt{m^2 + p_-^2} - p_+ p_- \cos \theta$$

quindi

$$\cos \theta = \frac{m^2}{p_+ p_-} + \sqrt{1 + \frac{m^2 + m^2(p_+^2 + p_-^2)}{p_+^2 p_-^2}}$$

che è maggiore di 1, quindi tramite la massa invariante si arriverebbe ad un assurdo. Ma già prima si vedeva che sul centro di massa per le particelle vale $p_+ = p_- = 0$, cosa non vera per p_γ , così non conservando il momento. In realtà però il processo descritto si vede, ipotizziamo quindi che la stessa reazione avvenga in presenza di un nucleo:

$$\gamma + N \longrightarrow e + \bar{e}$$

Qui vale

$$(E_\gamma + E_N)^2 - (p_\gamma + p_N)^2 = (E_+ E_- + E_N)^2 - (\vec{p}_+ \vec{p}_- + \vec{p}_N)^2$$

che nel CM diventa

$$(E_\gamma^2 + E_N^2 + 2E_\gamma E_N) = (E_+^2 E_-^2 + E_N^2 + 2E_+ E_- + 2E_+ E_N + 2E_- E_N)$$

che risolta dà

$$E_\gamma = -E_N \pm E_N \sqrt{1 + \frac{(E_+^2 E_-^2 + 2E_+ E_- + 2E_N(E_+ + E_-))}{E_N^2}}$$

dove si vede che la radice è maggiore di uno, quindi esiste la possibilità di trovare l'energia del raggio gamma sia positiva che negativa. Il minimo dell'energia si ha quando particella e antiparticella sono create ferme, allora anche p_N deve esser fermo dopo e

$$E_+ = E_- = m_e; \quad |\vec{p}_\gamma| = |\vec{p}_N|; \quad |p_\gamma| = E_\gamma = |p_N|$$

così la conservazione della massa risulta

$$E_\gamma^2 + 2E_\gamma \sqrt{m_N^2 + E_\gamma^2} - m_e^2 - m_e^2 - 2m_e^2 - 2m_N m_e = 0$$

le cui soluzioni sono

$$E_\gamma^{(2)} = 2m_e, \quad E_\gamma^{(1,3)} = \frac{2}{3} \left(m_e \pm \sqrt{4m_e^2 - 3m_n^2} \right)$$

e si vede subito che le soluzioni 1 e 3 non esistono poiché la radice risulta negativa. Risulta però $E_\gamma = 2m_e$ come pensato inizialmente.

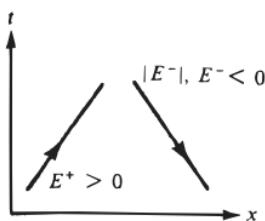


Figure 5.23: The particle with positive energy, E^+ , moves like any ordinary particle. The particle with negative energy, E^- , is represented as a particle with positive energy $|E^-|$, but moving backwards in time. Both travel to the right.

Figura 24: Interpretazione di Feynman per le antiparticelle.

Un'interpretazione più moderna per le antiparticelle è quella data da Feynman. Si parte dalla rappresentazione di una particella con un'onda piana $e^{\frac{i}{\hbar}(p_x-Et)}$ con $E > 0$. Ora, la traiettoria della particella è rappresentata dai punti a fase costante $(p_x-Et) = k$ cioè $x = k/p + Et/p$ (?). Si vede che questa fase è la stessa anche se E e t sono entrambi negativi. Ovvero la traiettoria è la stessa a patto che la particella si muova all'indietro. Per Feynman quindi un'antiparticella ha energia positiva ma si muove all'indietro nel tempo'. Per meglio capire il concetto si usa un esempio.

Per una particella in un campo magnetico

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = q \frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B} = -q \frac{d\vec{x}}{d(-t)} \times \vec{B}$$

quindi una particella che si muove indietro nel tempo è la stessa cosa di una particella che si muove avanti nel tempo ma ha carica opposta. Questo discorso si può riprodurre nel caso dell'elettrodinamica generale, portando così ad un'analogia con quanto fatto da Dirac. In un grafico che rappresentasse la traiettoria (lungo il verso \hat{x}) rispetto al tempo elettroni e positroni avrebbero direzioni (temporali!) opposte.

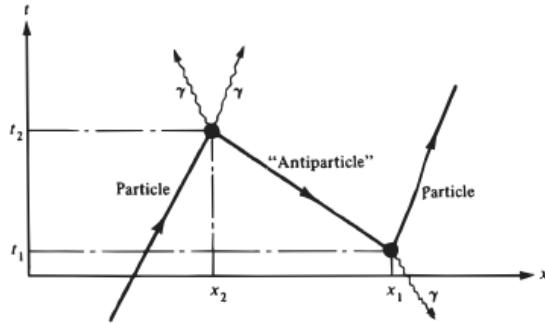


Figure 5.24: Pair production at (x_1, t_1) and particle-antiparticle annihilation at (x_2, t_2) . As noted in Chapter 3, pair production can occur only in the field of a nucleus that takes up momentum. A nucleus is implied near point (x_1, t_1) .

Figura 25: Produzione e annientamento di particelle e antiparticelle.

Come visto nelle reazioni in fisica nucleare avviene sempre la conservazione del numero barionico (il numero totale di nucleoni essenzialmente). Per essere coerenti con questo principio, se ci immaginiamo di produrre ad esempio protone P ed anti-protone \bar{P} attraverso una radiazione di energia $2m_p c^2$, allora dobbiamo assegnare a \bar{P} il numero quantico barionico -1 . Lo stesso discorso può essere fatto per la conservazione della carica.

Quindi a livello sperimentale le interpretazioni di antiparticella date in precedenza si riducono a utilizzare un numero quantico additivo (per la carica e barionico) al rovescio.

Quando si parlava di decadimenti era stato trovato

$$n = p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (13)$$

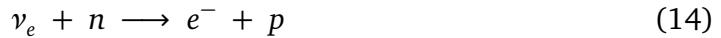
e si era parlato della conservazione del numero barionico. Contestualmente abbiamo osservato che gli oggetti cosiddetti elementari erano elettroni, positroni e muoni μ^- (questi ultimi erano stati scambiati per il mesone di Yukawa). A questi si aggiungono anche l'antiparticella del muone μ^+ e il più pesante (1.78 GeV) tauone τ^- (anch'esso con la sua antiparticella τ^+). Si osserva che anche queste particelle, chiamate *leptoni*, si conservano nella reazioni: le particelle ordinarie hanno numero leptonico positivo $L = (+1)$, le antiparticelle lo hanno negativo $L = (-1)$. Nella reazione precedente per conservare il numero leptonico è presente l'antineutrino elettronico. Anche il neutrino infatti sembra una particella elementare e si trova di tre tipi: elettronico (ν_e e $\bar{\nu}_e$), muonico (ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$) e tauonico (ν_τ e $\bar{\nu}_\tau$).

Ad un livello più profondo si osserva che in tutte le reazioni si conservano separatamente il numero elettronico L_e , quello muonico L_μ e quello tauonico L_τ .

Prendiamo ad esempio una reazione di decadimento del muone. Esso potrà decadere solamente in un oggetto di massa inferiore, quindi l'elettrone. Per la conservazione dei numeri leptonici separati allora ci dovrà essere un antineutrino elettronico e, poiché inizialmente $L_\mu = +1$, serve anche un neutrino muonico:

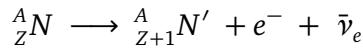


Si osserva anche la reazione

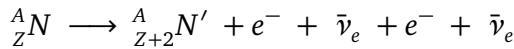


nella quale si conserva il numero barionico, leptonico e la carica. Ma notiamo che questa reazione è analoga alla (13), dove basta spostare l'antineutrino da prodotto a 'reagente' trasformandolo nella sua antiparticella.

Sui neutrini però rimane il dubbio che esista una effettiva differenza con la sua antiparticella, infatti è neutro e non si può usare la carica per distinguerli. L'*ipotesi di Majorana* sostiene che essi non siano diversi appunto, ma siano la stessa particella. L'esperimento che si può fare per scoprire la fondatezza dell'ipotesi è il seguente. Parlando di decadimenti beta



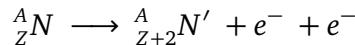
abbiamo già visto che esistono due isotopi stabili per nuclei pari e uno solo per nuclei dispari e ciò era dovuto al fatto che fosse impossibile (o meglio molto improbabile) per nuclei pari effettuare un doppio decadimento beta:



Queste reazioni sono rarissime, si intuisce ciò dal fatto che la probabilità che avvengano ($\sim 1/10^{30}$) è data dal prodotto delle due probabilità di osservare un decadimento beta singolo (che già sono basse).

Ma se l'ipotesi di Majorana è vera quello che potrebbe succedere è che dopo il primo decadimento beta, schematizzato dalla (13), l'antineutrino potrebbe unirsi ad un altro neutrone per effettuare un secondo decadimento attraverso la reazione (14). In

questo caso la reazione totale sarebbe



che si cerca di vedere negli esperimenti odierni. La differenza rispetto al caso precedente riguarda le energie degli elettroni che chiaramente nel secondo caso devono spartirsi anche quella che precedentemente era di neutrino ed antineutrino. In Italia questi esperimenti vengono effettuati al Laboratorio Nazionale del Gran Sasso (dove nell'esperimento OPERA sono stati scoperti i neutrini che viaggiano più veloce della luce, nel tunnel di 700 km che collega il Gran Sasso al CERN, per intendersi).

L'idea generale, soprattutto da quando si è scoperto che hanno una massa, è che neutrino e antineutrino siano particelle differenti. En passant, ricordiamo che non sono solamente leptoni e barioni che risultano avere antiparticelle, ma anche i mesoni. A titolo di esempio si osserva per il pione, come già detto, che ha la versione positiva e negativa.

6 Risonanza

Lezione 15 Maggio 2020

Richiami sulle risonanze in meccanica quantistica. Interpretazione in termini di energie complesse. I decadimenti e le risonanze. Misura delle risonanze con lo scattering di elettroni.

La risonanza è un concetto applicabile sia per i nuclei che per le particelle, dalle più elementari a quelle comunemente considerate tali (fisica statistica). Questo concetto è già stato incontrato nello studio della meccanica quantistica, con l'esempio della buca di potenziale quadrata, analizzando le funzioni d'onda, in particolare studiando le intensità di queste, la parte riflessa e trasmessa rispetto ad una barriera e quant'altro. In figura riportiamo lo schema della buca e il grafico del coefficiente di trasmissione.

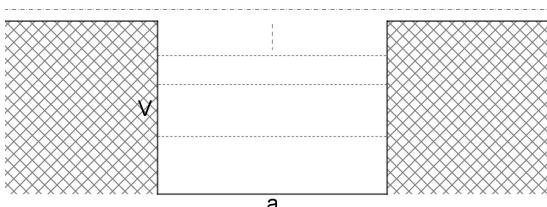


Figura 26: Schema buca di potenziale quadra quantistica.

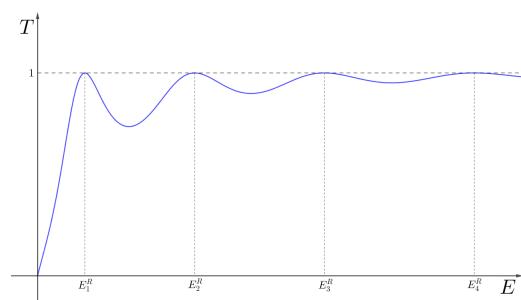


Figura 27: Grafico coefficiente di Trasmissione T , in funzione dell'energia.

La probabilità che una funzione d'onda venga trasmessa attraverso una barriera è data dal coefficiente di trasmissione, dato da (nel caso della buca, chiaramente stiamo

considerando i casi di scattering, stati legati non oltrepassano la buca),

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{V^2}{4E(E+|V|)} \sin^2 ka \quad k^2 = 2m(E+|V|)$$

con V la profondità della buca e a la larghezza della stessa. Dal grafico si possono osservare delle oscillazioni, i picchi e le energie corrispondenti (in cui $T = 1$) corrispondono alle risonanze, da osservare che le energie in gioco non sono stati legati, bensì di scattering, solo che in alcune zone in prossimità alla buca, risentono della presenza di quest'ultima ($T \neq 1$). Possiamo vedere la zona risonante dello spettro continuo come stati *quasi-legati*, in quanto sono in risonanza, anche se va sottolineato che non si tratta di stati *legati*. Osserviamo ora il comportamento per uno stato stazionario. Uno stato si definisce tale quando il modulo quadro della rispettiva funzione d'onda non dipende dal tempo, qualsiasi sia la posizione \vec{r} considerata. Infatti prendendo la $\psi(\vec{r}, t)$ come sotto, è subito dimostrato il seguente

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad \Rightarrow \quad |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$$

quindi la probabilità di trovare la particella in un punto dello spazio, non cambia nel tempo, è stazionario. Prendiamo ora la sua trasformata di Fourier, passiamo perciò nello spazio delle fasi,

$$\begin{aligned} F(\psi(\vec{r}, t))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\vec{r}) \int e^{i\omega t} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\vec{r}) \int e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega - E)t} dt = \psi(\vec{r}) \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi}} \delta(\hbar\omega - E) \end{aligned}$$

Vediamo dunque come si comporta la funzione d'onda alla risonanza, nel caso di energie fissate $E = \bar{E}$, come una δ -function, nello spazio delle frequenze (energie).

Possiamo legare lo stato risonante, per quel che riguarda il tempo (tempo di vita medio), ad una sorta di principio di indeterminazione. Per vedere questo proviamo ad ipotizzare la seguente ipotesi. Cosa succederebbe se considerassi l'energia come un numero complesso $E \rightarrow E - \frac{1}{2}i\Gamma$?

Sicuramente i moduli e le trasformate di Fourier ne uscirebbero cambiate, ed ora vediamo come (manteniamo $\hbar \neq 1$ per la conclusione),

$$\begin{aligned} |\psi(\vec{r}, t)|^2 &= |\psi(\vec{r})|^2 e^{-i\frac{(E-\frac{1}{2}i\Gamma)t}{\hbar}} e^{+i\frac{(E+\frac{1}{2}i\Gamma)t}{\hbar}} = |\psi(\vec{r})|^2 e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{(E-\frac{1}{2}i\Gamma-E-\frac{1}{2}i\Gamma)t}{\hbar}} \\ &= |\psi(\vec{r})|^2 e^{-\frac{i(-i\Gamma)t}{\hbar}} = |\psi(\vec{r})|^2 e^{\frac{\Gamma t}{\hbar}} \end{aligned}$$

Quindi ricordando quanto detto nelle scorse lezioni per le particelle che decadono, ovvero in numero di particelle nel tempo N e la probabilità che queste sopravvivano P , che sono

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad P(t) = P(0)e^{-\lambda t}$$

e sapendo che il modulo quadro della funzione d'onda è la probalità stessa, possiamo

riscrivere quello sopra così,

$$P(t) = P(0)e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}$$

e a questo punto, visto che le P devono essere le stesse, passiamo ad uguagliare gli esponenti, in modo da ottenere

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \Gamma\tau = \hbar$$

Questo è quel surrogato di principio di indeterminazione di cui si è parlato sopra. Si nota chiaramente a questo punto il legame tra la parte immaginaria dell'energia e il tempo di vita medio. Questo ci suggerisce l'esistenza di una qualche correlazione tra l'uso di energie complesse, riferite ad oggetti che decadono. Vale sia l'interpretazione che dato un oggetto che decade, questo può essere espresso con energia complessa, sia l'interpretazione che data un'energia complessa, allora si ha un oggetto che decade. Vediamo ora cosa accade alla trasformata di Fourier di questa funzione d'onda.

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\vec{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} e^{-\frac{iEt}{\hbar} - \frac{\Gamma t}{2\hbar}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\vec{r}) \int_0^{+\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega - E + \frac{1}{2}i\Gamma)t} \end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale corre da $0 \rightarrow \infty$, perché decidiamo di far partire il decadimento al tempo $t = 0$. Facendo le sostituzioni $x = t$, $\alpha = \frac{\Gamma}{2\hbar}$ e $\beta = \frac{\hbar\omega - E}{\hbar}$, la soluzione dell'integrale è

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} e^{i\beta x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha - i\beta)x} dx = \frac{1}{\alpha - i\beta} e^{-(\alpha - i\beta)x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha - i\beta}$$

Ri-sostituendo le quantità α e β , giungiamo al risultato,

$$\psi(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\vec{r}) \frac{1}{\frac{\Gamma}{2\hbar} - i\frac{(\hbar\omega - E)}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\vec{r}) \frac{i\hbar}{\frac{i\Gamma}{2} + \hbar\omega - E}$$

A noi interessa la probabilità di avere una particella in un punto dello spazio ad una certa energia (ω), quindi prendiamo il modulo quadro della relazione sopra ($\hbar = 1$),

$$P(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} |\psi(\vec{r})|^2 \frac{1}{(\omega - E)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Abbiamo ottenuto una **distribuzione Lorentziana**.

Nel caso complesso non abbiamo un'energia fissa, ma invece una distribuzione, dovuta al fatto che la particella può decadere. La larghezza sarà data dal fattore complesso Γ , reciproco della vita media τ . Nelle immagini sottostanti abbiamo riportato le distribuzioni di probabilità nello spazio delle frequenze nel caso di energia E reale e caso con E complesso.

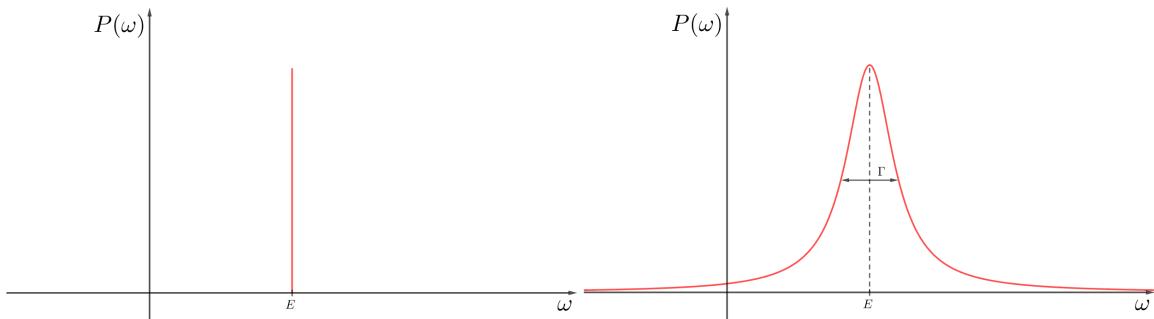


Figura 28: Distribuzione di probabilità nello spazio delle frequenze, con E reale.

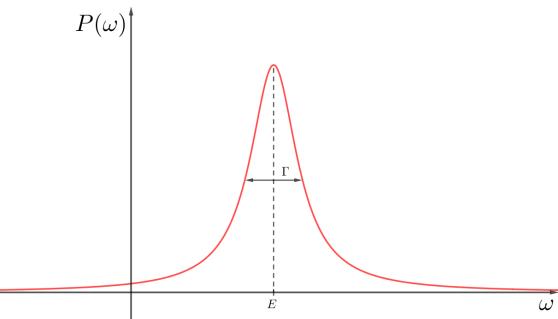


Figura 29: Distribuzione di probabilità nello spazio delle frequenze, con E complesso.

Il caso in cui E è complesso, cioè nel caso del decadimento, non è chiaramente uno stato stazionario. Quando si considera la probabilità ottenuta sopra, per essere tale bisogna porre attenzione alla normalizzazione, infatti solitamente solo la ψ è normalizzata, quindi

$$1 = \frac{N}{2\pi} \int \frac{1}{(\omega - E)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} d\omega \quad \Leftrightarrow \quad N = \frac{2\pi}{\int \frac{1}{(\omega - E)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}} = \frac{2\pi}{\frac{\Gamma}{\sqrt{2\pi}}}$$

Consideriamo ora la figura sottostante.

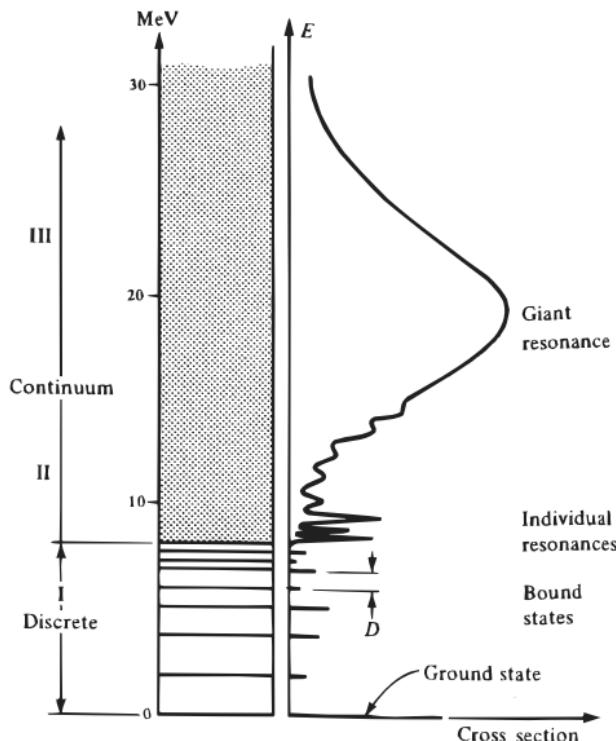


Figure 5.34: Typical features of the excited states of a nucleus. The cross-section curve is idealized; it can be investigated by inelastic electron scattering or by studying the absorption of gamma rays as a function of gamma-ray energy. Three regions are distinguished: I, bound (discrete) states; II, individual resonances; and III, statistical region (overlapping resonances).

Figura 30: Grafico sezione d'urto a q fissato e varia ω .

Questa rappresenta la distribuzione in energia della sezione d'urto, ad esempio vale nel caso dell'elettro-scattering, considerando fotoni reali e virtuali. Ricordiamo che nelle lezioni precedenti, il grafico della sezione d'urto era dato fissando ω e variando q , mentre in quello sopra si è fatto il contrario. Osservando questi tipi di grafico ci possiamo fare un'idea degli autostati del sistema, infatti lo stesso grafico può essere preso per molti q fissi, e dalla collezione di questi sketch si ricavano molte informazioni sulle particelle target, come si vedrà poi. Ritornando al grafico sopra proviamo a commentarlo. Partiamo dall'origine degli assi, che è data dallo stato fondamentale del sistema con energia E_0 ($\omega = \frac{q^2}{2M_T}$ con M_T massa target), poi man mano aumentiamo l'energia, e la particella target vuole eccitarsi, ma non ce la fa finché non gli viene data l'energia esatta perché possa fare il salto energetico, e questo si traduce nel fatto che non succede nulla nel grafico sono presenti valori discreti di sezioni d'urto non nulle. Ad un certo punto il sistema, quando gli viene fornita un'energia esatta, risponde con dei valori discreti di sezione d'urto. All'inizio si ha uno spettro discreto delle sezioni d'urto, man mano che si va avanti in ω , lo spettro si infittisce, fino a diventare un continuo. In particolare osserviamo che nella zona dello spettro discreto, siamo in presenza di δ -function, mentre nella zona dello spettro continuo si iniziano a vedere dei picchi con larghezze non nulle, in altre parole, si intravedono delle **Lorentziane**, e queste altro non sono che le risonanze di cui si è parlato poc'anzi. In più notiamo che queste distribuzioni in energia (Lorentziane, non δ -function) hanno larghezze via via sempre più grandi quando aumenta ω , e questo lo possiamo interpretare, prendendo sempre l'esempio della buca quadra, come che le risonanze vicine alla buca saranno strette (risentono fortemente a particolari energie), mentre quelle lontane da essa, saranno più larghe.

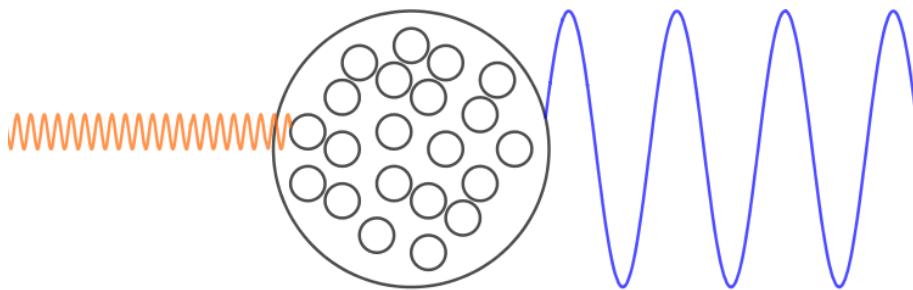
Come anticipato sopra, lo stesso grafico lo si ottiene solitamente per diversi \bar{q} fissati, ovviamente gli stati discreti saranno alla stessa energia per ogni \bar{q} , quello che cambierà, sarà l'altezza dei punti, quindi la risposta del sistema. Consideriamo ora i due casi estremi con \bar{q} alto e \bar{q} basso, riferito a cosa si sta guardando (target). Infatti \bar{q} è il momento trasferito (luce), quindi q è l'inverso della lunghezza d'onda $\lambda = 1/q$. Consideriamo l'atomo di piombo, che ricordiamo avere un nucleo di diametro di circa $\sim 10 fm$, decidiamo allora di considerare i seguenti q ,

$$\begin{aligned} q = 1 fm^{-1} &\Leftrightarrow \lambda = 1 fm \\ q = 10 fm^{-1} &\Leftrightarrow \lambda = 0.1 fm \quad \text{guardo nel dettaglio (}q\text{ basso)} \\ q = 0.1 fm^{-1} &\Leftrightarrow \lambda = 10 fm \quad \text{guardo il nucleo (}q\text{ alto)} \end{aligned}$$

Grafici \bar{q} basso e alto.

I valori discreti della sezione d'urto si vedono bene a \bar{q} basso, mentre a \bar{q} alto si vede di meno, basti pensare che la lunghezza d'onda grande vede come un tutt'uno il nucleo, è come se vedesse un oggetto che muta leggermente forma in continuazione, ma pur sempre indistinguibile. Si interpreta il \bar{q} basso, con una cosa che mi permette di vedere l'oggetto target con precisione, e le risonanze corrispondono a energie che fanno sì che l'atomo emetta altre particelle (si disintegra, scattering). Anche lo spettro del continuo, quindi le risonanze, si osserva meglio nel caso con \bar{q} basso, ma nonostante questo nel caso a \bar{q} alto, è presente, nella zona del continuo a ω alti, la così detta

risonanza gigante, che sarebbe l'overlap di molte risonanze, ormai indistinguibili, che si sommano dando luogo ad un grande e largo picco. Guarda caso che il picco della risonanza gigante è centrato nel valore $E = \frac{q^2}{2m_N}$, dove q è quello alto e m_N è la massa dell'oggetto costituente, cioè l'oggetto da cui è composta la targhetta. Da specificare inoltre che questo picco, che non è una vera e propria risonanza, non è dovuto ad uno scattering elastico, bensì ad uno *quasi-elastico*, ovvero un picco elastico corrispondente non al nucleo come un tutt'uno, ma come ad uno dei suoi costituenti. A grandi linee quello che capita è che una lunghezza d'onda molto piccola ha colpito un nucleone del nucleo che è stato poi emesso.



Con \bar{q} diversi possiamo ottenere informazioni, in particolare con \bar{q} avremo più precisione per le risonanze, per vedere cioè i costituenti singolarmente, mentre con \bar{q} alto si vede il picco *quasi-elastico*, che sta a significare che un fotone virtuale ha estratto un oggetto dal nucleo, lasciando gli altri costituenti inalterati.

Oggi la rappresentazione delle interazioni avvengono tutte nel modo descritto sopra, ovvero con diagrammi in cui ci sono particelle, o campi di particelle, che si scambiano portatori secondo la *costante di accoppiamento* già discussa.

Come linea generale il neutrino partecipa solo a interazioni di tipo debole, infatti non interagisce fortemente ed essendo neutro nemmeno elettromagneticamente.

Lezione 20 Maggio 2020

Particelle che decadono e risonanze. Classificazione delle interazioni in base alla vita media. L'esempio del barione Delta. Creazione della Delta tramite scattering pion-nucleone. Esercizio nel sistema del Laboratorio e del centro di massa.

Riprendiamo il concetto della scorsa lezione che ci ha portato ad aggiungere un termine immaginario all'energia di uno stato

$$E_0 \longrightarrow E_0 - \frac{1}{2}i\Gamma$$

che ci ha portato a scrivere $\tau = \hbar/\Gamma$. La probabilità di avere una particella in un punto

dello spazio ad una certa energia (ω) risulta

$$P(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} |\psi(\vec{r})|^2 \frac{1}{(\omega - E)^2 + \frac{r^2}{4}}$$

Consideriamo ora il decadimento di alcuni oggetti, non nucleari di cui abbiamo già parlato. Partiamo da

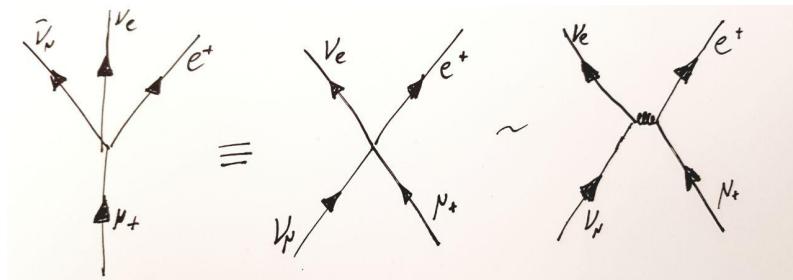
$$\begin{aligned} \pi^0 &\longrightarrow 2\gamma, & \pi^0 : 135 \text{ MeV}, \tau = 8.7 \times 10^{-17} \text{ s} \\ \pi^+ &\longrightarrow \mu^+ \nu_\mu, & \pi^\pm : 139.5 \text{ MeV}, \tau = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s} \\ \mu^+ &\longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, & \mu : 105 \text{ MeV}, \tau = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s} \\ \Delta^0 &\longrightarrow \pi^- + p, & \Delta^0 : \text{barione, } 1232 \text{ MeV}, \tau = 6 \times 10^{-24} \text{ s} \end{aligned}$$

Ciò che salta subito all'occhio è la grande differenza tra i τ : si vedono tempi molto corti, intermedi e molto lunghi. Ciò avviene in base all'interazione che provoca la reazione, ma è strano come si crei una reazione a partire dal muone che pensiamo essere elementare (lo è meno per quanto riguarda piane e Δ^0 in quanto potrebbe esserci una reazione tra i loro componenti).

In base ai tempi di decadimento introduciamo una prima distinzione tra interazioni: **forte** quella per tempi brevi, $\tau = 10^{-20} \div 10^{-24}$, come ad esempio il Δ^0 ; **elettromagnetica** (contiene un fotone) quella per tempi intermedi, $\tau = 10^{-15} \div 10^{-20}$, come ad esempio per il piane; **debole** quella per tempi lunghi, $\tau > 10^{-15} \div 10^{-20}$, come ad esempio per il muone.

Per spiegare le differenze riprendiamo l'interpretazione di Yukawa, con lo scambio di oggetti, per giustificare le interazioni. Anche se sappiamo che neutrone e protone sono oggetti composti l'interazione forte può essere vista come lo scambio di bosoni, si descrive un'interazione efficace. La descrizione che si utilizza oggigiorno però considera l'interazione tra singoli quarks, che si scambiano un portatore di energia senza massa (un po' come per il fotone dell'interazione elettromagnetica), il quale viene chiamato **gluone**. Come già accennato l'interazione elettromagnetica che coinvolge elettroni, considerati elementari, anche si descrive con portatori di interazione elementari.

Continuiamo l'analogia per questa nuova interazione debole di cui si conosce poco notando che la reazione precedente che coinvolge il muone può essere scritta come di seguito

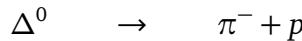


Ricordando che il portatore di interazione si era visto essere massivo per l'interazione forte in quanto l'interazione era a più corto raggio rispetto a quella coulombiana (a

causa della conservazione dell'energia per il principio di indeterminazione), ci aspettiamo che qui il portatore sia ancora più massivo per via del τ minore rispetto a quello delle altre forze.

Esercizio

Riprendiamo il decadimento del barione Δ^0 , di massa $m_{\Delta^0} = 1232 \text{ MeV}$, di vita media $\tau = 6 \times 10^{-24} \text{ sec}$ (molto corta) e di spin $J = \frac{3}{2}$.



Analizziamo prima il problema nel sistema del centro di massa e poi del laboratorio, ricordando la conservazione della massa invariante.

Ci mettiamo nel *centro di massa*, perciò la somma dei momenti dei reagenti e quella dei prodotti è nulla, $\vec{p}_\Delta = \vec{p}_{\pi^-} + \vec{p}_p = 0$, che chiamiamo con $|p| = |p_{\Delta^0}| = |\vec{p}_{\pi^-} + \vec{p}_p|$, consideriamo la massa invariante,

$$E_{\Delta^0}^2 \rightarrow (E_{\pi^-} + E_p)^2 \Rightarrow m_{\Delta^0} = \left(\sqrt{m_{\pi^-}^2 + p^2} + \sqrt{m_p^2 + p^2} \right)^2$$

Posso guardare la stessa reazione al contrario, ad esempio sparando i π^- contro p , e poi misurando le sezioni d'urto per tutti gli angoli. Dal grafico che se ne ricava, i dati sperimentali stanno su una lorentziana, il cui centro sta ad una massa invariante di $m_{\Delta^0} = 1232 \text{ MeV}$, come ci si aspettava, ed con una larghezza di distribuzione di $\sim 120 \text{ MeV}$. Da questa evidenza sperimentale ne deduciamo che Δ^0 non è una particella come il protone (non ha una distribuzione lorentziana, ma ha un valore ben preciso di massa), che non decade ed è stabile (se si vuole lorentziana con larghezza infinitesima). Quindi quando π^- interagisce con p , si crea una particella che vive un po', poi decade in π^- e p . Per vedere il legame tra la larghezza della distribuzione e la vita media, ricordiamo quanto detto sull'energia complessa (parte immaginaria, inverso tempo di vita).

$$\frac{\Gamma}{\hbar} = \frac{1}{6 \times 10^{-24}} \Rightarrow \Gamma = \frac{197.33}{6 \times 10^{-24} 3 \times 10^8 \times 10^{15}} \frac{\text{MeV fm}}{\text{sec fm/sec}} \sim 120 \text{ MeV}$$

Guardiamo ora la stessa reazione dal sistema di riferimento del laboratorio (il protone p fermo). Sempre considerando masse invarianti che deve corrispondere a m_{Δ^0} ($= 1232 \text{ MeV}$),

$$\begin{aligned} & \left(\underbrace{T_{\pi^-} + m_{\pi^-}}_{E_{\pi^-}} + m_p \right)^2 - p_\pi^2 = m_{\Delta^0}^2 \\ & \left(\sqrt{m_{\pi^-}^2 + p_{\pi^-}^2} + m_p \right)^2 - p_\pi^2 = m_{\Delta^0}^2 \\ & m_{\pi^-}^2 + p_{\pi^-}^2 + m_p^2 + 2m_p \sqrt{m_{\pi^-}^2 + p_{\pi^-}^2} - p_\pi^2 = m_{\Delta^0}^2 \\ & 2m_p \sqrt{m_{\pi^-}^2 + p_{\pi^-}^2} = m_{\Delta^0}^2 - m_p^2 - m_{\pi^-}^2 = a \end{aligned}$$

sostituendo i valori numerici che si conoscono: $m_{\pi^-} \sim 140 \text{ MeV}$, $m_p \sim 939 \text{ MeV}$ e

$a \sim 0.6165 \text{ GeV}^2$, otteniamo

$$\begin{aligned} 4m_p^2(m_{\pi^-}^2 + p_{\pi^-}^2) &= a^2 \\ 4m_p^2 m_{\pi^-}^2 + 4m_p^2 p_{\pi^-}^2 - a^2 &= 0 \\ p_{\pi^-}^2 &= \frac{(a^2 - 4m_p^2 m_{\pi^-}^2)}{4m_p^2} \end{aligned}$$

il risultato numerico è

$$p_{\pi^-}^2 = 88156 \text{ MeV}^2 \Rightarrow T_{\pi^-} = \sqrt{m_{\pi^-}^2 + p_{\pi^-}^2} - m_{\pi^-} = 188 \text{ MeV}$$

Il grafico della sezione d'urto in questo caso è sempre una lorentziana con la stessa larghezza, però centrata in $\sim 188 \text{ MeV}$. Nel grafico in più si vede la presenza di altri picchi con vite molto più corte (lorentziane larghe). Abbiamo trattato il caso di Δ^0 , eppure è bene sapere che esistono 4 di queste particelle con cariche diverse, ma stessa massa invariante, stesso tempo di vita, stesso spin $J = \frac{3}{2}$, saranno distinte inoltre dall'isospin.

$$\begin{array}{llll} \Delta^{++} & \rightarrow & \pi^+ + p & \Rightarrow \quad T_z = +\frac{3}{2} \\ \Delta^+ & \rightarrow & \pi^0 + p & \Rightarrow \quad T_z = +\frac{1}{2} \\ \Delta^0 & \rightarrow & \pi^- + p & \Rightarrow \quad T_z = -\frac{1}{2} \\ \Delta^- & \rightarrow & \pi^- + n & \Rightarrow \quad T_z = -\frac{3}{2} \end{array}$$

Sono barioni che decadono fortemente (partecipa interazione forte), infatti i pioni π , a differenza dei leptoni, sono considerati *quasi* portatori di interazione forte. Questa deduzione la abbiamo fatta in base alla classificazione su scala di vita temporale delle interazioni ($\tau \propto 10^{-24}$ quindi interazione forte).

Lezione 21 Maggio 2020

Le interazioni e loro classificazione. Costanti di accoppiamento e bosoni di gauge. L'interazione debole come interazione di contatto. Introduzione allo scattering profondamente inelastico.

Alla fine dell'ultima lezione si è visto come la costante di accoppiamento $e^2/\hbar c$ che vale circa 1/137 per l'interazione coulombiana, sia molto più grande per l'interazione forte e molto più piccola per l'interazione debole (sempre a parità di distanza di 1 fm).

Come si capisce che l'interazione debole esiste e che le vite medie corte segnalano effettivamente la presenza di un'interazione? Nella figura seguente son riportate le sezioni d'urto sperimentali in funzione delle energie per scattering neutrone-protone,

elettrone-protone e neutrino contro protone (o neutrone).

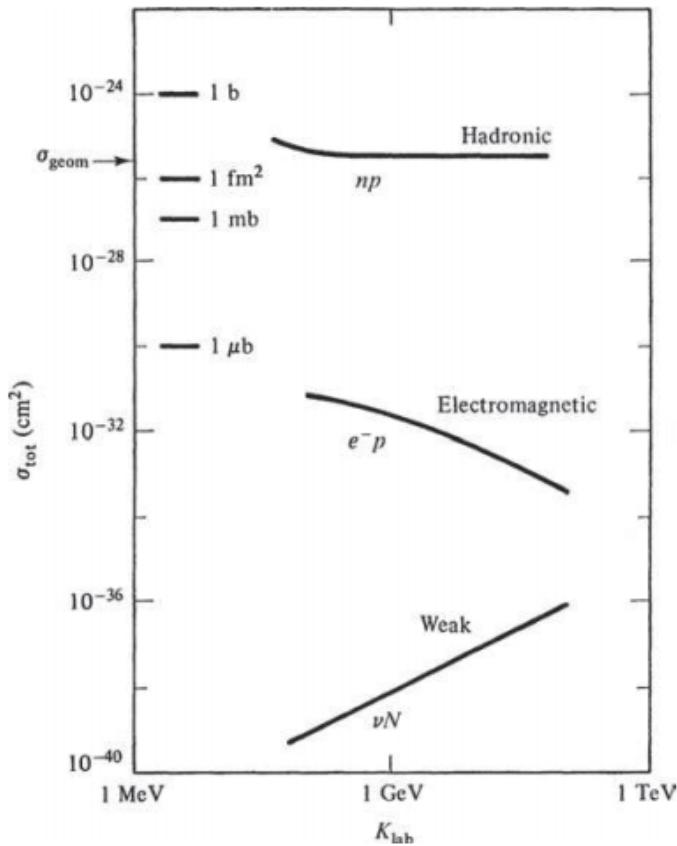


Figura 31: Comparison of the total cross sections for strong, electromagnetic, and weak processes on nucleons. σ_{geom} indicates the geometrical cross section of a nucleon, and K is the kinetic energy.

Si vede chiaramente (essendo un grafico log-log) l'enorme differenza tra sezioni d'urto nei casi delle diverse interazioni. Quindi si rimarca quanto debole sia effettivamente l'interazione neutrino-nucleone. Inoltre da questo grafico si nota come per l'interazione forte la sezione d'urto rimanga quasi costante, mentre per le altre due forze ci sia un andamento come una potenza dell'energia.

Purtroppo continuare questo grafico per energie più grandi si rivela complicato, soprattutto per quanto riguarda l'interazione debole: i neutrini non si possono accelerare. Si trovano nei raggi cosmici con energie sufficientemente elevate, ma il loro scattering è comunque più difficile di quello di adroni ad esempio. Alcune teorie dette GUT (*Grand Unification Theories*) affermano che per energie sufficientemente elevate le sezioni d'urto elettromagnetiche e debole convergano allo stesso valore. Secondo alcune versioni ciò dovrebbe valere anche per l'interazione forte.

Dal punto di vista teorico e da recenti prove sperimentali (il Bosone di Higgs) si osserva che interazione elettromagnetica e debole siano effettivamente 'due facce della stessa medaglia'. Dal punto di vista formale si può vedere nel seguente modo: l'Hamiltoniana di interazione elettromagnetica, ad esempio, tra due elettroni si può vedere

come la relazione tra le due correnti generate dagli stessi

$$H_{em} = -e^2 \int d^3x d^3x' \vec{j}(\vec{x}) \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

con $\vec{j}(\vec{x}), \vec{j}(\vec{x}')$ densità di corrente del primo e secondo elettrone. Qui $e^2 \equiv g_{em}$ sarebbe la costante di accoppiamento e $f_{em}(r) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ è essenzialmente il fattore coulombiano importante che tiene conto della distanza $1/r$. Ora, nel caso della forza debole sappiamo che la funzione della distanza è data dal termine di Yukawa, con un portatore m_w molto massivo:

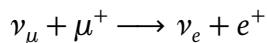
$$f_w(r) = \frac{e^{-m_w r}}{r}$$

Si fa inoltre l'assunzione (già fatta da Fermi) che le densità di correnti deboli $\vec{j}_w(\vec{x})$ e $\vec{j}_w(\vec{x}')$ siano uguali, in quanto l'interazione debole è a così corto raggio che non ci si aspettano grandi variazioni durante lo scambio di m_w . Risolvendo l'integrale si trova che

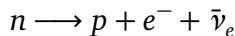
$$H_{ew} = -4\pi \frac{g_w}{m_w^2} \int d^3x \vec{j}_w(\vec{x}) \vec{j}_w(\vec{x}')$$

A causa della grande massa del portatore $\frac{g_w}{m_w^2}$ è molto piccolo, anche ipotizzando che $g_w = g_{em}$ (ipotesi che sembra confermata oggi, le costanti sono calcolate tutte a livello sperimentale). Ecco quindi che si trova che utilizzando le stesse leggi per le due interazioni si giustifica perché quella debole sia così piccola rispetto a quella coulombiana. Notiamo, di passaggio, che come attraverso considerazioni fatte si era arrivati ad assegnare spin 1 al fotone, anche per tutti i portatori di interazione si trova uno spin intero (le correnti invece sono tipicamente descritte da campi fermionici).

A proposito di questo non si può non notare che il portatore dell'interazione em (il fotone) non ha carica, mentre gli altri possono essere carichi. Nel caso della reazione



il portatore è neutro, la carica si conserva. Nel caso del decadimento del neutrone



ovvero



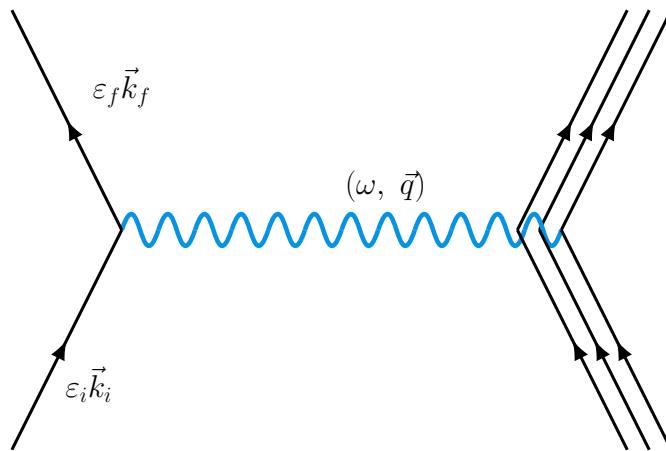
allora risulta chiaro che il neutrino deve avere emesso un portatore positivo, che ha dato la carica al neutrone. I portatori quindi nell'interazione debole possono essere di tre razze differenti Z^0, W^+, W^- , tutti con masse dell'ordine di 80 GeV. Questi bosoni (insieme a fotoni e gluoni) si dicono di Gauge in quanto le teorie di campo che ne spiegano l'esistenza sono dette teorie di Gauge.

7 Quarks

La presenza di particelle elementari, *partoni*, che costituiscono protoni e neutroni viene suggerita chiaramente da esperimenti di scattering elettronico o muonico. Si osserva che risultati completamente analoghi (a meno di correggere la massa) si ottengono nel caso di scattering tra elettroni e muoni.

La scoperta dei quarks era già stata ipotizzata prima di questi esperimenti, grazie a teorie di simmetria e risultati di esperimenti con acceleratori. Quando ci si è accorti che le particelle trovate erano troppe, si è iniziato a cercare degli elementi più fondamentali la cui combinazione potesse spiegare la presenza delle altre particelle.

Gli esperimenti a cui si accennava sopra sono quelli di **Deep inelastic scattering**. Fino ad ora si è visto lo scattering elastico e inelastico, dove in quest'ultimo una parte dell'energia trasferita dagli elettroni andava ad eccitare il target e non solo a rincularlo. In questo caso l'eccitazione è molto grande, inoltre utilizzeremo una trattazione completamente relativistica (anziché quella ultrarelativistica per gli elettroni e classica per il target). Siamo sempre nel caso della figura di seguito, solo che l'interazione del lepton (con energia e momento iniziali $E \equiv \varepsilon_i, \vec{p} \equiv \vec{k}_i$ e finali $E' \equiv \varepsilon_f, \vec{p}' \equiv \vec{k}_f$) avviene con un adrone qualsiasi (con energia e momento iniziali E_h, \vec{p}_h e finali E'_h, \vec{p}'_h).



Ora chiamiamo $\nu \equiv \omega = E - E'$ e $\vec{q} \equiv \vec{p} - \vec{p}'$. Utilizzeremo i quadri-impulsi (E, \vec{p}) , (E', \vec{p}') , (ν, \vec{q}) , (E_h, \vec{p}_h) e (E'_h, \vec{p}'_h) , i cui quadrati sono invarianti relativistici. Ad esempio $q_\mu^2 = \nu^2 - \vec{q}^2 \leq 0$, il quale avrà una massa immaginaria, oppure, per lo scattering elettronico

$$m_e^2 = E^2 - \vec{p}^2 = E'^2 - \vec{p}'^2$$

Per l'adrone vale certamente $m_h^2 = E_h^2 - \vec{p}_h^2$, ma non è detto che $m_h^2 = E'_h^2 - \vec{p}'_h^2$, sappiamo solo che è un invariante relativistico. Nel sistema di riferimento del laboratorio

$$\begin{aligned} \vec{p}_h &= 0, & E_h^2 &= m_h^2 \\ E'h &= \nu + E_h = \nu + m_h, & \vec{p}'_h &= \vec{q} + \vec{p}_h = \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \end{aligned} \tag{15}$$

Ora introduciamo la massa invariante

$$M^2 = \left(\sum_{i=1}^M E_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^M \vec{p}_i \right|^2$$

tenendo in mente che l'adrone potrebbe essersi frammentato in tante parti, ognuna con energia e momento differente, in modo che $\sum_{i=1}^M \vec{p}'_i = \vec{p}'_h$ e $\sum_{i=1}^M E_i = E'_h$. Allora la massa invariante (NB: dell'adrone, non del sistema!) risulta

$$M_h^2 = (E'_h)^2 - |\vec{p}'_h|^2 = \nu^2 + m_h^2 + 2m_h \nu - q^2 = q_\mu^2 + m_h^2 + 2m_h \nu$$

ma essendo tutte le grandezze, a meno di ν , nell'ultima espressione invarianti relativistici (M_h^2 compreso), allora anche ν è invariante. A questo punto se mi sposto in un altro sistema di riferimento diverso da quello del laboratorio, in cui (E_h, \vec{p}_h) è il quadrimpulso dell'adrone e (ε, \vec{Q}) quello del portatore, posso porre uguali i prodotti scalari dei due quadrimpulsi nei due sistemi di riferimento:

$$(E_h, \vec{p}_h) \cdot (\varepsilon, \vec{Q}) = (m_h, \vec{0}) \cdot (\nu, \vec{q})$$

quindi

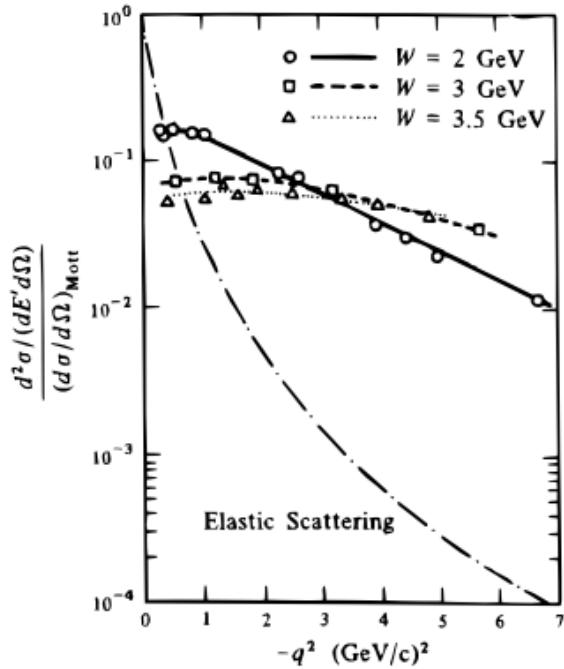
$$m_h \nu = E_h \varepsilon - \vec{p}_h \cdot \vec{Q} \Rightarrow \nu = \frac{1}{m_h} (\varepsilon E_h - \vec{p}_h \cdot \vec{Q})$$

Ora per distinguere scattering elastico da inelastico osserviamo nel sistema a riposo dell'adrone la sua massa invariante: se rimane costante si tratta di scattering elastico. Allora la condizione precisata prima per cui $m_h^2 = E'^2_h - \vec{p}'^2_h$ vale solo nel caso di scattering elastico, quando invece

$$W_h^2 = E'^2_h - |\vec{p}'_h|^2 > m_h^2$$

si ha scattering inelastico. Se volessi scattering inelastico basta scegliere opportunamente ν e \vec{q} (sistemando l'energia dell'acceleratore e l'angolo del detector), in modo da prendere W_h^2 grande. Queste nuove definizioni di scattering elastico e inelastico coincidono con quelle già fatte in precedenza nel limite non relativistico.

Nella figura seguente si vede la sezione d'urto differenziale doppia (ovvero derivata anche per E' , che indica quanto è eccitato il target) in funzione del momento trasferito (il quadrimpulso al quadrato in verità) per diversi valori di massa invariante



In tutti i casi sperimentali lo scattering è anelastico, infatti $W_h = 2, 3, 3.5$ volte la massa dell'adrone. Si vede come esso sia molto differente dalla linea di scattering elastico. Una caratteristica importante è che per W_h sempre più grande si vede che la sezione d'urto è vie più costante.

Le energie del fascio per questi esperimenti arrivano fino a $E = 300$ GeV, q^2 e ν arrivano a 200 GeV. Per lo scattering inelastico, in cui $W_h^2 = m_h^2 + q_\mu^2 + 2m_h\nu$ è più grande di m_h , deve valere che $q_\mu^2 + 2m_h\nu$ è molto grande. Ricordando che $q_\mu^2 < 0$ si deve avere un ν molto grande, e di conseguenza un \vec{q} ancora maggiore. La conseguenza è che la lunghezza d'onda di sonda dello scattering è molto piccola (alta risoluzione).

Si può integrare in dE' il valore della sezione d'urto differenziale doppia

$$\int dE' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial E' \partial \Omega}$$

per risolvere questo integrale, sfruttiamo il fatto che a W_h alto e costante la funzione integranda sia costante, allora grazie a $W_h^2 = m_h^2 + q_\mu^2 + 2m_h\nu$ si vede anche che non varia variando ν . Ma essendo $\nu = E - E'$ e ricordando che E energia del fascio è costante, la funzione non varia per variazioni di E' . L'integrale quindi risolve semplicemente moltiplicando la sezione d'urto differenziale per le energie dell'intervallo di integrazione: nel nostro caso usiamo le energie del range dell'esperimento. Il risultato finale è

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{Mott}}{d\Omega}} = \frac{\int dE' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial E' \partial \Omega}}{\frac{d\sigma_{Mott}}{d\Omega}} \approx \frac{1}{3}$$

Il fattore 3 porta a interpretare questo scattering inelastico come 3 scattering elastici fatti con i quarks all'interno dell'adrone.

Lo scattering profondamente inelastico e la costanza della sezione d'urto. L'ipotesi dei partoni. Il numero quantico di Stranezza. Multipletti barionici e mesonici e loro composizione in termini di quarks.

Ricordiamo quanto visto nella lezione precedente che affinché lo scattering sia elastico deve valere la definizione di uguaglianza $W_h^2 = E_h'^2 - |\vec{p}_h'|^2 = m_h^2$, mentre nel caso in cui vale la diseguaglianza $W_h^2 = E_h'^2 - |\vec{p}_h'|^2 > m_h^2$ allora siamo in presenza di scattering inelastico. Queste scritte sono le definizioni nel caso relativistico, mentre nel caso classico lo scattering elastico è dato da $\nu = |q|^2/2m_h$. Calcoliamo ora il caso in cui l'approssimazione classica è approssimativamente uguale a considerare il caso relativistico.

$$\begin{aligned} W_h^2 &= m_h^2 + \nu^2 - |\vec{q}|^2 + 2m_h \nu \\ &= m_h^2 + \left(\frac{|q|^2}{2m_h} \right)^2 - |q|^2 + 2m_h \frac{|q|^2}{2m_h} \\ &= m_h^2 + \frac{|q|^4}{4m_h^2} \end{aligned}$$

Le due definizioni coincidono quando $\frac{|q|^4}{4m_h^2} \ll m_h^2 \Rightarrow \frac{|q|^4}{4m_h^4} \ll 1$, quindi quando i valori dei momenti trasferiti sono più piccoli dei valori della massa m_h della targhetta. Ad esempio il piombo (^{208}Pb) la cui massa è $m_h = 200\text{ GeV}$, il q deve essere più piccolo, dell'ordine di $\sim 1\text{ GeV}$; chiaramente anche nel caso di un protone $m_h \sim 1\text{ GeV}$ vanno prese energie molto più piccole.

Ipotesi di Gell-Mann

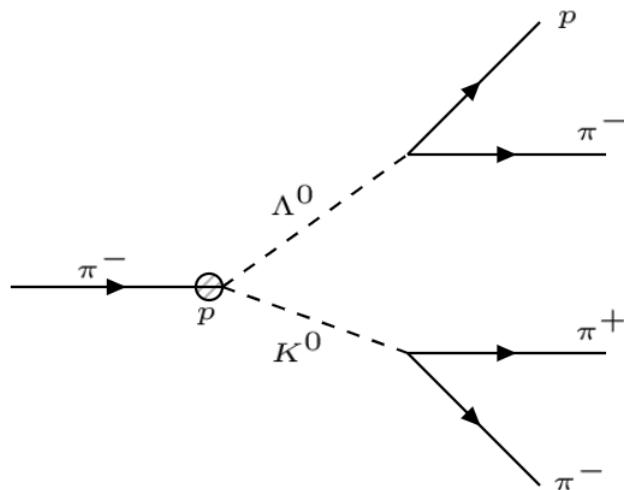
Questo fisico (premio Nobel), ha ipotizzato l'esistenza di una certa regolarità dei fondamentali costituenti delle particelle protone e neutrone p, n . Infatti queste ultime hanno un particolare fattore di forma, si era già intuito allora che non fossero particelle elementari, quindi serviva una idea di che cosa fossero formati. Lo stesso Gell-Mann pensava che i costituenti elementari dei *barioni* dovessero essere anche i costituenti base dei *mesoni*, magari in una combinazione diversa e particolare per ogni particella. Lui ipotizzò che alla base ci fossero delle particelle elementari con spin semi-intero, quindi, osservando che i *barioni* hanno spin semi-intero e che i *mesoni* hanno spin intero, immaginò che queste particelle fossero formate da rispettivamente tre e due costituenti fondamentali (in modo che la loro somma di spin fosse semi-intera nel primo caso e intera nel secondo). Visto in più che le stesse particelle devono formare particelle cariche (p) e neutre (n), lui assunse che queste avessero carica frazionaria, in modo da poter combinarle e ottenere i *barioni* e *mesoni* che conosciamo. In particolare introdusse il *quark-up* u di carica $+\frac{2}{3}$ e il *quark-down* d di carica $-\frac{1}{3}$. In questo modo il protone che ha carica +1 sarà formato da due *up* e un *down* ($p \rightarrow uud$) e il neutrone che ha carica nulla da due *down* e un *up* ($n \rightarrow ddu$).

Riprendiamo l'ultimo risultato della scorsa lezione. Dal grafico si era giunto a dire che il rapporto tra sezione d'urto profondamente inelastica e tra la sezione d'urto di Mott era all'incirca costante e corrispondeva a $\sim 1/3$. In qualche modo possiamo collegare questo valore all'ipotesi di Gell-Mann ed al fatto che i *barioni* sono costituiti

da tre *quark*. Basti semplicemente pensare che nel caso di Mott la particella colpita era un elettrone di carica -1 , mentre possiamo immaginare il processo di scattering profondamente inelastico come se venisse colpito elasticamente un solo *quark* del protone, e venisse estratto solo questo, lasciando gli altri due fuori dal processo (adrone si eccita in uno stato che non è quello fondamentale), quindi già qui si può intuire la presenza di $1/3$. Lo scattering è profondamente inelastico, ma tuttavia lo possiamo vedere come costante, quindi se integro su tutte le energie lo posso vedere come la media dello scattering elastico su ciascun *quark*. Sezione d'urto di Mott protone come media delle cariche medie dei costituenti,

$$\frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \frac{1}{3}$$

I primi rilevatori di particelle erano le camere a bolle (bubble chamber), ovvero delle camere riempite di vapore super-saturo, in modo che appena questo viene perturbato con delle particelle cariche, si formano delle scie di goccioline, e dalla forma, dalla lunghezza di queste si capisce la particella in questione (le particelle neutre non vengono rilevate da questo metodo). All'interno di queste camere si sono osservate e studiate molte reazioni, e da alcune delle quali si sono ricavate fondamentali considerazioni, ad esempio ora ne tratteremo una nel particolare. Quello che una volta ci si aspettava è che tra lo scontro di due cariche in entrata, si potevano osservare particelle cariche all'uscita (purché la massa invariante fosse sufficiente), tuttavia in alcuni casi si vedevano comportamenti strani, come nel caso dello scontro tra un *mesone* π^- e un protone p .



Situazione di asimmetria, nella camera a bolle si creavano scie a "V", ma in mezzo non succedeva nulla (apparentemente). Questo si poteva spiegare come il fatto che lo scontro tra il pion e il protone produce due particelle neutre (non si vedono nella camera a bolle) che poi decadono in due particelle cariche. A livello sperimentale si può conoscere la massa invariante del sistema, l'energia cinetica di π^- e di p , si ottengono poi computazionalmente tutte le possibili soluzioni del sistema, in modo

da ottenere delle distribuzioni. In questo caso si ottiene un grafico delle distribuzioni formato dalla sovrapposizione di due lorentziane, che si riferiscono, già studiato, al decadimento di due particelle, la cui massa corrisponde alla massa dei picchi e la cui vita media è data dalla larghezza dei due picchi. Nella prima separazione (linea tratteggiata) si crea una particella neutra chiamata *barione Lambda* Λ^0 (*Iperione*), il cui picco nel grafico corrisponde ad una massa di circa $\sim 1116 \text{ GeV}$, mentre la seconda particella neutra creata si chiama *mesone Kaone* K^0 , e la lorentziana che lo individua ha il picco in corrispondenza della massa $\sim 506 \text{ GeV}$. Queste due particelle Λ^0 e K^0 sono considerate particelle "*strane*", perché la loro sezione d'urto è molto grande, il che implica che le energie in gioco sono altrettanto grandi e questo ci fa ipotizzare che le forze in questione sono del tipo interazione forte. Tuttavia queste decadono debolmente, pur avendo vite medie molto lunghe (linea tratteggiata visibile), e tutti questi comportamenti ci portano a pensare che ci sia un altro numero quantistico additivo che si conserva nelle interazioni forti ma non in quelle deboli. Introduciamo il numero quantico S (*stranezza*), ad esempio $S = 0$ per adroni tipo π^- e p , mentre $S = -1$ per Λ^0 e $S = +1$ per K^0 . Come si vede dalla reazione sopra, nell'interazione S totale si conserva tra i reagenti ed i prodotti, mentre durante il decadimento questo non si conserva più. Esiste anche un *mesone* ϕ la cui reazione genera K^+ e K^- , oppure un'altra reazione tale che $p + p \rightarrow p + K^+ + \Sigma^0$, dove l'ultima è un'altra particella *strana* molto massiva. L'idea è quella di assegnare un numero di stranezza che si conservi in interazioni elettromagnetiche e forti, ma non in quelle deboli. Questo sistema oggigiorno è utilizzato e si è visto che funziona bene (si è partiti ipotizzando una cosa e visto che funziona si continua ad usare). Classifichiamo tutte le particelle rispetto alla *stranezza* S e *isospin* T .

Classifichiamo tutti i *barioni* con spin $\frac{1}{2}$ nel *ottetto barionico*.

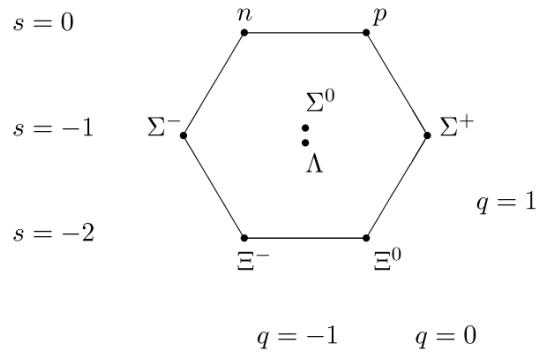


Figura 32: Ottetto barionico.

Classifichiamo tutti i *mesoni* nel *ottetto mesonico*.

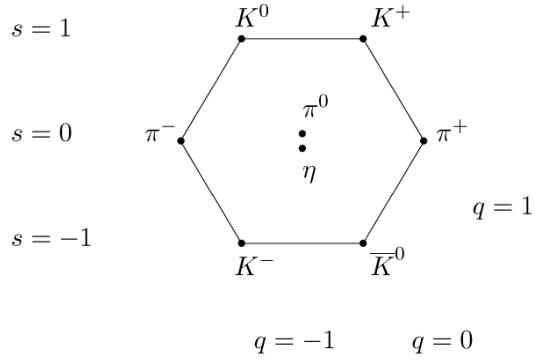


Figura 33: Ottetto mesonico.

Classifichiamo tutti i *barioni* con spin $\frac{3}{2}$ nel *decupletto barionico*.

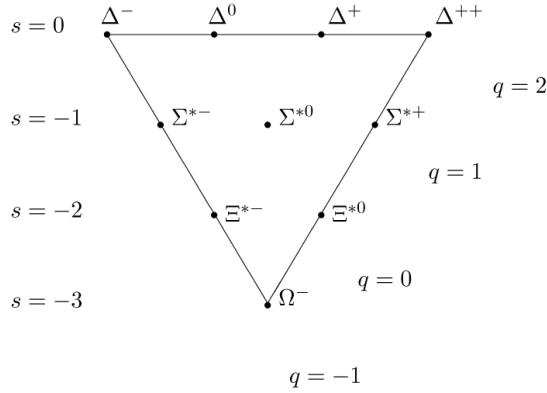


Figura 34: Decupletto barionico.

Si osservano regolarità e geometria interessante, si osservano quantità conservative, si assegnano numeri quantici, quindi si crea una teoria che torna. Quark necessari per questa teoria sono 3, non basta più giocare con combinazioni di *up-down*, bisogna introdurre anche il *quark strange* s . Oggigiorno per questo modello, che comprende tutte le particelle sono stati introdotti sei quark: *up u*, *down d*, *strange s*, *charm c*, *bottom b*, *top t*. Consideriamo meglio il *decupletto barionico*, con la figura,

S	I_3	sss	Ω^-	1672 MeV
		$uss \quad dss$	$\Xi^{*0} \quad \Xi^{*-}$	1530 MeV
		$uus \quad uds \quad dds$	$\Sigma^{*+} \quad \Sigma^{*0} \quad \Sigma^{*-}$	1385 MeV
		$uuu \quad uuud \quad udd \quad ddd$	$\Delta^{++} \quad \Delta^+ \quad \Delta^0 \quad \Delta^-$	1232 MeV

Figura 35: Decupletto barionico e valori masse

Mettendo insieme i *Quark* ed i *Leptoni*, entrambi *fermioni* di spin $\frac{1}{2}$ otteniamo le particelle base di tutta la materia nell'universo, a cui vanno aggiunte tutte le *anti-*

particelle relative (mesoni: *quark* e *anti-quark*, barioni: 3 *quark*, *anti-barioni*: 3 *anti-quark*), il portatore elettromagnetico γ (fotone), il portatore forte g (gluone), i portatori deboli $W^\pm Z_0$ (bosoni di Gauge) e il bosone di Higgs (fondamentale per l'unificazione teoria elettro-debole). L'insieme di tutte queste particelle costituisce il Modello Standard.

Modello Standard delle Particelle Elementari

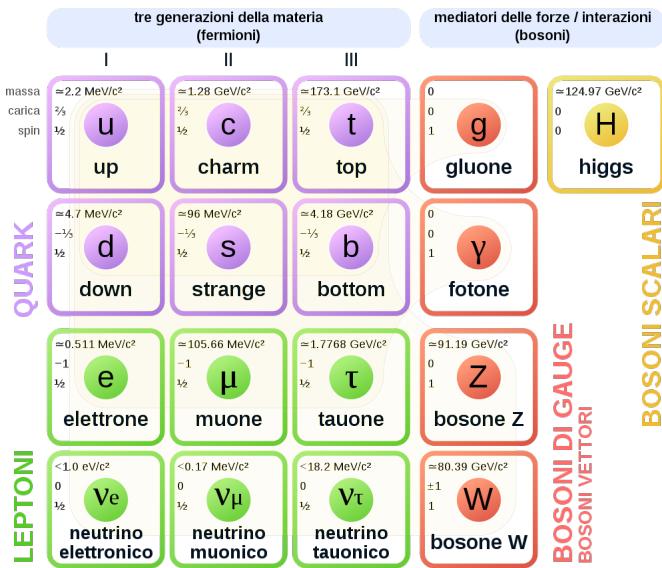


Figura 36: Modello Standard.

Non sono mai stati osservati *quark* separati (non si è mai misurata una carica frazionaria), ma sono sempre confinati a formare gli adroni. I Leptoni interagiscono elettricamente e debolmente (ew), mentre i *quark*, sia elettricamente, sia debolmente e sia fortemente (ews). Si può vedere infatti che anche i *quark* possono decadere. L'esempio principale è dato dal neutrone isolato, che, dopo un tempo di vita medio di $\sim 12m$, decade (molto debolmente) in un protone. Se noi consideriamo la reazione $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ e ci ricordiamo che il neutrone e il protone sono rispettivamente $n = udd$ e $p = uud$, possiamo vedere la reazione stessa come se partendo da un *quark-down* del neutrone, questo decadesse in un *quark-up* del protone.

Se prendiamo la piramide di sopra (decupletto barionico), in particolare gli apici, possiamo riportarli come sequenze di 3 *quark* uguali tra loro, uuu ddd sss , e tutti hanno spin totale di $+\frac{3}{2}$. Questa situazione rappresenta un evidente caso di apparente simmetria, che va a violare il principio di Paoli. Per ovviare al problema, si è introdotto il numero quantico additivo, il "colore", che permette di aggiustare la anti-simmetria e fare in modo che il principio di esclusione di Paoli sia verificato anche per i *quark* (fermioni). Questo numero quantico può assumere tre valori (colori), il giallo, il rosso ed il blu. Affinché la anti-simmetria sia salva, tutte le particelle esistenti si dice debbano avere il colore "bianco", che riassume il fatto che tutti i *quark* presenti in una particella devono essere tutti di colori diversi, a meno che non si parli di particelle con anti-particelle, in quel caso il colore può essere lo stesso tanto ci sono altri numeri quantici in campo da salvare la anti-simmetria. Il colore è una proprietà ag-

giuntiva dell'interazione forte, ed a differenza dell'interazione elettromagnetica dove i portatori non interagiscono con i legami, nell'interazione forte anche i portatori partecipano, infatti anch'essi sono colorati, il gluone ad esempio consta di 8 colori (teoria dei campi). L'interazione elettromagnetica e quella debole sono state unite con l'introduzione del bosone di Higgs ed apre la branca della fisica *elettroweak-theory*, mentre non si è ancora riusciti ad unificarla con l'interazione forte, la quale viene studiata nella *quantum-cromo-dynamics*.

8 Scattering

Lezione 27 Maggio 2020

Lo scattering elastico non perturbativo. Soluzione asintotica e ampiezza di scattering. Legame fra la sezione d'urto differenziale e l'ampiezza di scattering.

Fino ad ora si è trattato di teorie di scattering basate su teorie perturbative al primo ordine (fattore di forme, si è partiti dalla regola aurea di Fermi). Si vole perciò trovare una teoria generale per lo scattering che prescinda da quella perturbativa. Ricordiamo che l'approccio perturbativo era valido in quanto se prendiamo ad esempio il caso dell'elettrone contro il nucleo, l'elettrone agisce elettromagneticamente, mentre nel nucleo prevale l'interazione forte tra i suoi costituenti, quindi l'interazione dell'elettrone si tratta di fatto come una perturbazione (che può essere sempre migliorata aumentando gli ordini). Lo scema da seguire è il seguente: si vuole trovare una relazione per l'interazione forte, una volta che se ne ha un possibile modello, si avranno dei parametri da fissare con dei dati sperimentali; come dato sperimentale si usa lo scattering. A questo punto ci si chiede se agire perturbativamente o no per trovare un modello teorico che soddisfi gli esperimenti, la risposta è che all'inizio si agisce perturbativamente, poi da qui si cerca di costruire una teoria non perturbativa che valga in generale. Adesso proveremo ad esprimere una regola generale e poi verificheremo se nei limiti opportuni corrisponde alla regola di Born.

Ipotizziamo di fare uno scattering $A \rightarrow B$ (può essere elettrone-nucleo, protone-nucleo, elettrone-elettrone, neutrone-nucleo...), ci mettiamo nel sistema relativo del centro di massa (relazioni relativisticamente invarianti), con $\vec{r} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Esprimiamo la hamiltoniana relativa,

$$H = T + V = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} = H_0 + V$$

dove abbiamo chiamato l'energia cinetica $T = H_0$. A questo punto vogliamo risolvere l'equazione di Schrödinger, e visto che siamo nel caso di scattering, avremo l'energia relativa $E > 0$,

$$H\Psi = E\Psi \quad \text{con } E = \frac{k^2}{2\mu}$$

sviluppando i conti otteniamo

$$(H_0 - E)\Psi = -V\Psi$$

$$\Psi = -\frac{1}{H_0 - E}V\Psi$$

Quest'ultima relazione è nota come *equazione di Lippmann-Schwinger*. Allo stesso modo possiamo riscrivere l'equazione iniziale sostituendo le espressioni con k dell'energia,

$$\left(-\frac{\Delta^2}{2\mu} - \frac{k^2}{2\mu}\right)\Psi(\vec{r}) = -V\Psi(\vec{r})$$

$$(\Delta^2 + k^2)\Psi(\vec{r}) = 2\mu V\Psi(\vec{r})$$

che è l'*equazione di Schrödinger*. Notiamo che l'equazione di Lippmann-Schwinger e quella di Schrödinger sono la stessa equazione, ma scritta in forma diversa.

Supponiamo che $\varphi(\vec{r})$ sia soluzione di H_0 , quindi $H_0\varphi(\vec{r}) = \frac{k^2}{2\mu}\varphi(\vec{r})$, perciò $\varphi(\vec{r})$ è un'onda piana che possiamo esprimere così $\varphi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. A questo punto si dimostra che le due soluzioni dell'equazione di Schrödinger scritte sopra sono,

$$\Psi^\pm(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - 2\mu \int \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

che altro non è che la rappresentazione in \vec{r} dell'equazione di Lippmann-Schwinger in rappresentazione di Dirac (si lavora con le completezze e con $\langle r|\Psi\rangle$).

Prendiamo il caso in cui il potenziale V sia un potenziale centrale, quindi $V(\vec{r}') = V(r)$. La Ψ sarà data da una parte di soluzione data da onde piane (libera), e parte influenzata dal potenziale. A noi, per lo scattering, interessa solo il caso asintotico in cui \vec{r}' è molto distante dallo scontro (punto dove misuro lo scattering). Trovare le sezioni d'urto ha più importanza che trovare le forme funzionali di $\varphi(\vec{r})$, infatti le sezioni d'urto sono densità di probabilità di funzioni d'onda, che sono facili da misurare sperimentalmente (e si possono confrontare con la teoria). L'integrale sopra contribuisce tanto quando $V(r)$ è grande, dunque quando r è vicino al punto di scattering.

Scriviamo le relazioni asintotiche per $r \gg r'$,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2} \quad \text{se } \vec{r} = r\hat{e}_r$$

$$= r\sqrt{1 - \frac{2}{r}\hat{e}_r \cdot \vec{r}' + \frac{r'^2}{r^2}} \underset{r \gg r'}{\simeq} r\left[1 - \frac{1}{r}\hat{e}_r \cdot \vec{r}' + \dots\right]$$

$$= r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}'$$

dove nel penultimo passaggio si è usato lo sviluppo in serie di Taylor di $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$. L'argomento all'interno dell'integrale di Ψ diventa,

$$\frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \underset{r \gg r'}{\simeq} \frac{e^{\pm ik(r-\hat{e}_r \cdot \vec{r}')}}{r} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'}$$

Scriviamo infine la Ψ nel caso asintotico in cui $r \gg r'$,

$$\Psi^+(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \frac{2\mu e^{ikr}}{4\pi r} \int e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} V(r') \Psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Quindi la Ψ è data dal contributo di un'onda piana più un'onda sferica modulata dall'integrale che chiamiamo $f(r, \theta)$. Si dimostra che f in campo centrale dipende solo da θ , nel caso generale da r e θ (f è una funzione di Green). f è l'ampiezza di scattering, l'onda sferica è modulata in dipendenza dell'angolo $f(\theta)$. Per vedere il legame con l'approssimazione di Born, iteriamo il procedimento seguente, sostituendo la Ψ^+ all'interno la Ψ nell'integrale,

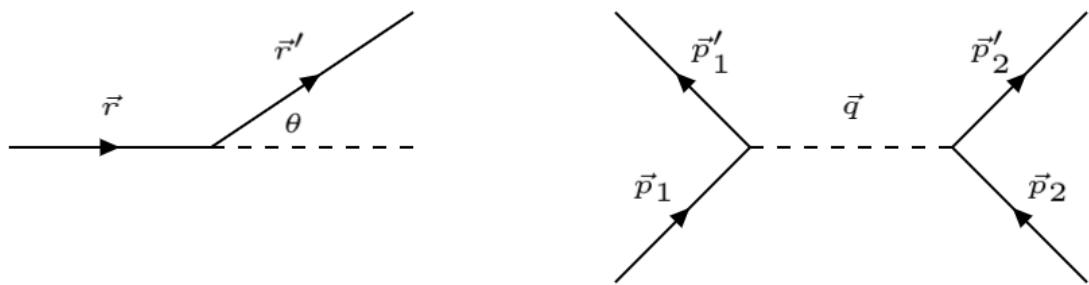
$$\Psi^+(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \frac{2\mu e^{ikr}}{4\pi r} \int d\vec{r}' e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} V(r') \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \frac{2\mu}{4\pi} \dots \right)$$

Immagino teoria perturbativa per lunghe distanze $V(r) \equiv \lambda W(r)$ con $\lambda < 1$, quindi mi fermo al primo ordine (prendo solo il termine $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ dentro la parentesi dell'integrale), in più scelgo $z \parallel \vec{r}$,

$$\Psi^+(\vec{r}) = e^{ik\hat{e}_z \cdot \vec{r}} - \frac{2\mu}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\vec{r}' e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} V(r') e^{ik\hat{e}_z \cdot \vec{r}'}$$

$$\begin{aligned} \Psi^+(\vec{r}) &= e^{ikr} - \frac{2\mu}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{ik(\hat{e}_z - \hat{e}_r) \cdot \vec{r}'} V(r') d\vec{r}' \\ &= e^{ikr} - \frac{2\mu}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} V(r') d\vec{r}' \end{aligned}$$

L'integrale è la trasformata di Fourier del potenziale (torna nel caso della perturbazione nel primo ordine), dove abbiamo espresso il momento trasposto \vec{q} come $\vec{q} = k(\hat{e}_z - \hat{e}_r) = \vec{k}_{\text{prima}} - \vec{k}'_{\text{dopo}}$.



Per vederlo ci mettiamo ancora una volta nel centro di massa, e sfruttiamo l'invarianza relativistica, chiamiamo $\vec{p}_{1,2}$ e $\vec{p}'_{1,2}$ rispettivamente il momento delle particelle 1, 2 prima e dopo lo scattering. Vale

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad \vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$$

da cui si trova

$$\vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2$$

il momento trasferito vale $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}'_1$. Nello scattering elastico, le particelle non si eccitano internamente, vale $E_1 = E'_1$ e $E_2 = E'_2$, la reazione rilascia momento \vec{q} e non energia E . nel sistema del centro di massa vale,

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}'_1| \underset{CM}{=} |\vec{p}_2| = |\vec{p}'_2| \equiv p \underset{\hbar=1}{\equiv} k$$

diventa

$$\begin{aligned} q^2 &= |\vec{p}'_2 - \vec{p}_2|^2 = |\vec{p}_1 - \vec{p}'_1|^2 \\ &= p_1^2 + p'^2_1 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}'_1 \underset{\hbar=1}{=} k^2 + k^2 - 2k^2 \cos \theta \\ &= 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

abbiamo quindi appurato che la funzione f è una funzione di θ .

Si trova e si dimostra che vale la *formula fondamentale dello scattering*

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}$$

per calcolare la sezione d'urto serve conoscere $f(\theta)$, ma per farlo bisogna risolvere l'equazione integrale con Ψ , una volta risolta si ha la Ψ , poi si calcola $f(\theta)$ dall'integrale (indipendente dalla teoria perturbativa).

Ricordiamo la formula usata per la sezione d'urto differenziale sull'angolo solido, con $N_{d,i}$ numero di particelle diffuse/incidenti, $\vec{J}_{d,i}$ flusso di particelle diffuse/incidenti, \vec{F} vettore superficie,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dN_d}{dt d\Omega}}{\frac{dN_i}{dt d\Omega}} = \frac{\vec{J}_d}{\vec{J}_i} \cdot d\vec{F}$$

dove interpretiamo la scrittura sopra come la densità di probabilità di corrente diffusa fratto la probabilità di corrente incidente. Esprimiamo meglio le quantità sopra,

$$d\vec{F} = r^2 d\Omega \hat{r}$$

$$\vec{J}_d = \frac{1}{2\mu} [\Psi_d^* \vec{\nabla} \Psi_d - \Psi_d \vec{\nabla} \Psi_d^*] \quad \text{dove} \quad \Psi \underset{r \rightarrow \infty}{\rightarrow} e^{ikr} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Facciamo un po' di calcoli esplicativi,

$$\vec{\nabla}_r f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{\partial}{\partial r} f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \vec{r} = f(\theta) \left[\frac{1}{r} k e^{ikr} + e^{ikr} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{r} = f(\theta) \left[\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right] e^{ikr}$$

$$\begin{aligned}\vec{J}_d &= \frac{1}{2\mu} \left[f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} f(\theta) e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{r} - f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} f^*(\theta) e^{-ikr} \left(-\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{r} \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r} \frac{2ik}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{k}{r^2} |f(\theta)|^2 \hat{r}\end{aligned}$$

quindi

$$\vec{J}_d \cdot d\vec{F} = \frac{1}{\mu} \frac{k}{r^2} |f(\theta)|^2 \hat{r} \cdot r^2 d\Omega \hat{r} = \frac{1}{\mu} k |f(\theta)|^2 d\Omega$$

Il flusso incidente \vec{J}_i è un'onda piana,

$$\vec{J}_i = \rho v = \frac{p}{\mu} = \frac{k}{\mu}$$

mettendo insieme i pezzi si ottiene e si dimostra dunque la *formula fondamentale dello scattering*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

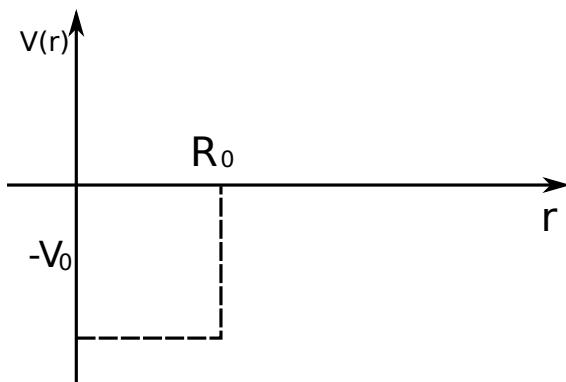
Per misurare la sezione d'urto va calcolata la $f(\theta)$, si deve risolvere equazione di Schrödinger per energie positive di scattering. Questa formula è generale, si applica anche quando la teoria delle perturbazioni non può essere applicata.

Lezione 28 Maggio 2020

Esercizio sul calcolo della sezione d'urto differenziale di scattering neutrone-piombo in approssimazione di Born. Confronto con dati sperimentali. La sezione d'urto fra adroni ed il concetto di shift di fase.

Nella trattazione della scorsa lezione non è stato evidenziato che l'utilizzo di $\psi^+(\vec{r})$ e $\psi^-(\vec{r})$ è equivalente, infatti sono due rappresentazioni della stessa funzione d'onda, in un caso uscente e nell'altro entrante. Inoltre si ricorda che la trattazione perturbativa del potenziale $V(r')$ ha senso fintanto che viene garantita la convergenza dell'integrale nel caso di correzioni, in teoria perturbativa, sempre migliori.

Si vede il seguente esercizio, nel quale si calcola la sezione d'urto differenziale per scattering di neutroni e ${}^{208}Pb$. Supponiamo che il potenziale, in funzione della distanza tra neutrone e piombo, sia una buca fino a distanza R_0 e poi si annulli:



Utilizziamo la massa ridotta di protone e piombo μ , che risulta comunque quasi uguale a quella del neutrone. Vogliamo inizialmente calcolare $f_I(\theta)$ al primo ordine. La sua espressione, trovata in precedenza, è

$$f_I(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^R e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} (-V_0) r^2 dr d\Omega$$

Ora prendiamo l'asse z parallelo a \vec{q} e utilizziamo la rappresentazione dell'esponenziale in armoniche sferiche

$$e^{iqr} = \sum_l \sqrt{4\pi} (2l+1) j_l(qr) Y_{l0}(\theta, \phi)$$

dove $j_l(qr)$ sono le funzioni di Bessel. Allora, ricordando che $\int Y_{l0} d\Omega = \delta_{0l}$, si ha

$$\begin{aligned} f_I(\theta) &= \frac{\mu V_0}{2\pi} \int_0^R \sum_l \sqrt{4\pi} (2l+1) j_l(qr) Y_{l0}(\theta, \phi) r^2 dr d\Omega \\ &= \frac{\mu V_0}{2\pi} \int_0^{R_0} \sqrt{4\pi} j_l(qr) Y_{00}(\theta, \phi) r^2 dr d\Omega \\ &= \frac{\mu V_0}{2\pi} \int_0^{R_0} \sqrt{4\pi} \frac{\sin qr}{qr} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\theta, \phi) r^2 dr = \frac{\mu V_0}{2\pi} \int_0^{R_0} \sin(qr) r dr \end{aligned}$$

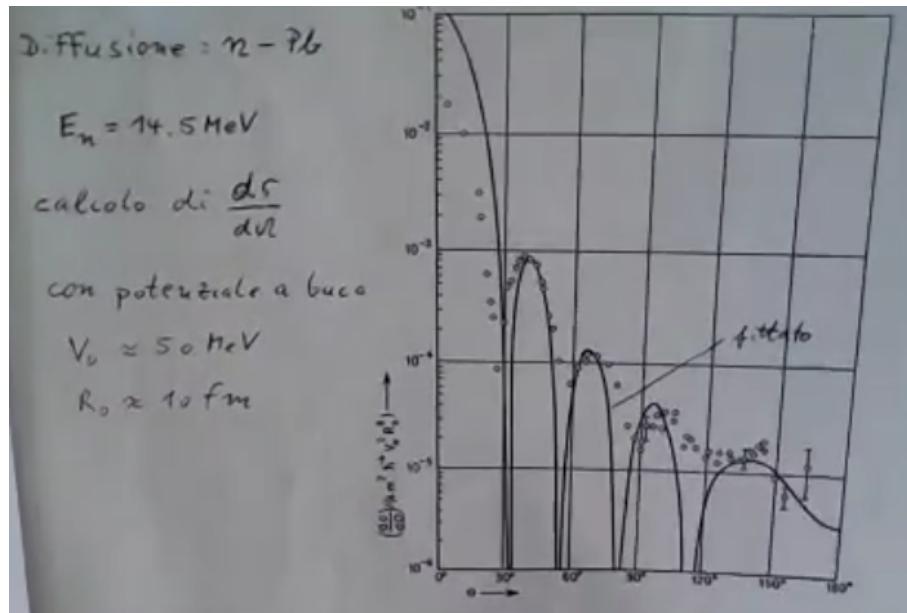
L'ultimo integrale si può fare per parti e risulta

$$\int_0^{R_0} \sin(qr) r dr = \frac{1}{q^2} [\sin qR_0 - qr \cos qR_0]$$

La sezione d'urto differenziale risulta (è giusta?)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_I(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2 V_0^2}{q^2} \frac{1}{q^2} [\sin qR_0 - qr \cos qR_0]$$

dove la dipendenza dall'angolo sta in $q = 2k \sin(\theta/2)$, con $k^2/2\mu$ energia del fascio. Si ricorda che il θ non è quello del laboratorio, ma si sta lavorando nel sistema del centro di massa, quindi il θ è l'angolo tra \vec{p} e \vec{p}' . Nella figura seguente si vedono i dati sperimentali e il potenziale teorico con i parametri indicati sulla sinistra.



Si vede come, nonostante la trattazione sia stata fatta con un potenziale semplice e la teoria perturbativa sviluppata solamente al primo ordine, ci sia un buon accordo tra parte teorica e sperimentale. Per ogni oscillazione della sezione d'urto il fit è fatto solamente sul punto più alto.

Vediamo ora una trattazione, diversa da quella ricorsiva, del problema dello scattering, alla luce dello shift di fase. Si ricomincia dall'equazione di Schrödinger

$$(\Delta^2 + h^2)\psi(\vec{r}) = 2\mu V(r)\psi(r), \quad E \frac{k^2}{2\mu} > 0$$

e vogliamo scrivere la funzione d'onda come

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u_l(r)}{r} Y_{l0}(\theta)$$

al contrario del deuterio però non ho un limite alla sommatoria per $l = 2$. A noi interessa la parte radiale in quanto si va a vedere il comportamento asintotico per il rivelatore a distanza dalla zona di influenza, dove il potenziale è noto. L'equazione radiale è

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] u_l(r) = 0$$

che si vede avere due soluzioni

$$u_l^{(1)}(kr) \equiv \frac{F_l(kr)}{k}, \quad u_l^{(2)}(kr) \equiv \frac{G_l(kr)}{k}$$

con $F_l(kr) = kr j_l(kr)$ (dove j sono funzioni di Bessel **sferiche**) e $G_l(kr) = -kr n_l(kr)$ (le n sono funzioni di Neumann). Di passaggio notiamo che entrambi i gruppi di

funzioni vengono dalle funzioni di Bessel normali J_l :

$$j_l(kr) \equiv \sqrt{\pi kr} J_{l+1/2}(kr)$$

$$n_l(kr) \equiv \sqrt{\pi kr} (-1)^l J_{-l-1/2}(kr)$$

La u_l sarà una combinazione lineare di F_l , funzioni regolari, e G_l , funzioni irregolari (in quanto divergono per $r = 0$, ma ricordiamo di essere nel limite asintotico di r grande). Valgono, per $r \rightarrow \infty$, le seguenti

$$F_l(kr) \longrightarrow \sin(kr - l\pi/2); \quad G_l(kr) \longrightarrow \cos(kr - l\pi/2)$$

allora la soluzione generale che soddisfa l'equazione di Schrödinger è

$$ku_l(r) = A \sin(kr - l\pi/2) + B \cos(kr - l\pi/2) = A \left(\sin(kr - l\pi/2) + \frac{B}{A} \cos(kr - l\pi/2) \right)$$

e definiamo $B/A \equiv \tan \delta_l$ allora

$$ku_l(r) = \frac{A}{\cos \delta_l} \left(\cos \delta_l \sin(kr - l\pi/2) + \sin \delta_l \cos(kr - l\pi/2) \right)$$

Chiamando $\frac{A}{\cos \delta_l} \equiv A_l$ otteniamo

$$ku_l(r) = A_l \sin(kr - lp/2 + \delta_l)$$

che è una semplice funzione d'onda che oscilla, ma shiftata di una fase δ_l . Se la fase è positiva, lo shift del seno è di verso opposto a r e corrisponde ad un potenziale attrattivo; viceversa se è negativa. Questi shift di fase sono quindi utili per determinare il potenziale attraverso la sezione d'urto, in quanto sono misurabili.

Si è visto che

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left[\cos \delta_l \sin(kr - l\pi/2) + \sin \delta_l \cos(kr - l\pi/2) \right] Y_{l0}(\theta) \\ &= \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left[\cos \delta_l \sin(kr - l\pi/2) + \sin \delta_l \cos(kr - l\pi/2) \right. \\ &\quad \left. + i \sin \delta_l \sin(kr - l\pi/2) - i \sin \delta_l \cos(kr - l\pi/2) \right] Y_{l0} \\ &= \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left[(\cos \delta_l - i \sin \delta_l) \sin(kr - l\pi/2) + \sin \delta_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right] Y_{l0} \end{aligned}$$

e si può riscrivere $e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} = e^{ikr}(-1)^l$. Nella lezione precedente invece si era visto

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{1}{r}e^{ikr}f(\theta) \\ &= \sqrt{4\pi} \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} j_l(kr) Y_{l0}(\theta, \phi) + \frac{1}{r}e^{ikr}f(\theta) \\ &\longrightarrow \sqrt{4\pi} \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} \sin(kr - l\pi/2) Y_{l0}(\theta, \phi) + \frac{1}{r}e^{ikr}f(\theta)\end{aligned}$$

Confrontando le due formule si vede che

$$\frac{1}{r}e^{ikr}f(\theta) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left[\sin \delta_l e^{i(kr)} (-i)^l \right] Y_{l0}$$

ovvero, ricordando che $Y_{l0} \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} P_l(\cos \theta)$ (con P_l polinomi ortogonali di Legendre), si arriva a

$$\begin{aligned}|f(\theta)|^2 &= \frac{1}{k^2} \left| \sum_l A_l \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} P_l(\cos \theta) \sin \delta_l (-i)^l \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi k^2} \sum_{l'l} A_l A_{l'} \sqrt{2l'+1} \sqrt{2l+1} P_{l'}(\cos \theta') P_l(\cos \theta) \sin \delta_{l'} \sin \delta_l (-i)^{l'} (-i)^l\end{aligned}$$

La sezione d'urto totale risulta ($\int P_l P_{l'} = (2/(2l+1)) \delta_{l'}$)

$$\begin{aligned}\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_l |A_l|^2 \frac{2(2l+1)}{(2l+1)} \sin^2 \delta_l \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l |A_l|^2 \sin^2 \delta_l\end{aligned}$$

Il valore di A_l si ricava facilmente per giungere a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

(16)

Questa formula ha una grande importanza, anche storica, come ponte tra fisici teorici e sperimentali. Questi ultimi calcolando le sezioni d'urto hanno informazioni sullo shift di fase, la quale forma i fisici teorici cercano di descrivere. Questa quindi è una seconda possibilità rispetto al calcolo della $f(\theta)$ come visto la scorsa lezione.

Lezione 29 Maggio 2020

Riassunto del corso, risposta domande...