אלגברה לינארית לפיזיקאים 1 לתכנית האודיסאה

80565

הרצאות | ד"ר יוסי שמאי

כתיבה | נמרוד רק

משרד החינוך
Ministry of Education

MAIMONIDES FUND

אודיסיאה
תכנית ללימודים אקדמיים במדעים

הסיכום נכתב בלשון נקבה בלי שום סיבה, אך מכוון לגברים ונשים כאחד

אלגברה לינארית הינה קורס סאטירה ואין לייחס לנאמר בה שום משמעות אחרת או ניסיון לפגוע

תוכן עניינים

$\mathbb{I}$ | אחד... מי יודע?

1 מערכות לינאריות

הגדרה 1.1 יהי $\mathbb{F}$ שדה. יהיו $m,n\in\mathbb{N}$. מערכת משוואות לינאריות במשתנים $x_1,x_2,...,x_n$ של m משוואות זו מערכת מהצורה: $(*)\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$ כאשר $b_i\in\mathbb{F}$ $1\le\forall i\le m$ וכאשר $a_{ij}\in\mathbb{F}$ $1\le\forall i\le m$ ו־ $1\le\forall j\le n$.

הגדרה 1.2 פתרון פרטי למערכת $(*)$ הוא "וקטור" $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ כך ש־ $(*)$ מתקיימת עבור $x_1,x_2,...,x_n$ הנ"ל.

הערה 1.3 $\left\{\ \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\ \middle|\ x_1,\ x_2\in\mathbb{R}\ \right\}=\left\{\ \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right)\ \middle|\ x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{Z}_5\ \right\}=\mathbb{Z}_5^3$.

הגדרה 1.4 הפתרון הכללי למערכת $(*)$ מוגדר להיות קבוצות כל הפתרונות הפרטיים של $(*)$.

תרגילים

1. **Q** : נגדיר מערכת במשתנים x,y (← הערה: אם לא צוין אחרת, נניח תמיד כי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) של שתי משוואות: $\begin{cases}x+2y=1\\x-3y=0\end{cases}(*)$.

   $n=2,m=2$ $\begin{cases}a_{11}=1,\ a_{12}=2,\ b_1=1\\a_{21}=1,\ a_{22}=-3,\ b_2=0\end{cases}$. האם $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2$ הוא פתרון פרטי של $(*)$?

   A : לא! (המשוואה השניה לא מתקיימת).

2. **Q** : נגדיר מערכת במשתנים x,y מעל השדה $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_5$: $\begin{cases}x+3y=1\\2x+y=1\end{cases}(*)$, $n=2$, $m=2$. ... $a_{22}=1,\ b_2=1$. האם $\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{Z}_5^2$ הוא פתרון פרטי של $(*)$?

   A : $1+3\cdot4=1+2=3\neq1$ ← לא!

דוגמה נגדיר מערכת במשתנים x_1,x_2,x_3 מעל השדה $\mathbb{Q}$ ע"י $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2=1\end{cases}(*)$. $\begin{cases}b_1=0,\ a_{11}=1,\ a_{12}=0,\ a_{13}=-1\\b_2=1,\ a_{21}=0,\ a_{22}=1,\ a_{23}=0\end{cases}$. נשים לב כי $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון פרטי ל־ $(*)$. נשים לב שהפתרון הכללי הוא הקבוצה $\left\{\ \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{Q}^3\ \middle|\ \begin{matrix}x_1-x_3=0\\ \\x_2=1\end{matrix}\ \right\}=\left\{\ \left(\begin{smallmatrix}t\\1\\t\end{smallmatrix}\right)\ \middle|\ t\in\mathbb{Q}\ \right\}$.

הערה 1.5 למצוא את הפתרון הכללי למערכת לינארית זה לא דבר מאתגר במיוחד.

הגדרה 1.6 הגדרה שתי מערכות לינאריות מעל השדה $\mathbb{F}$ במשתנים $x_1,x_2,...,x_n$ יקראו שקולות זו לזו אם הפתרון הכללי שלהן זהה.

הגדרה 1.7 הגדרה מטריצת המקדמים המורחבת של המערכת $\begin{cases}a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1\\\vdots\\a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}(*)$ מוגדרת להיות המטריצה

$$A^+=\left(\begin{array}{ccc:c}a_{11}&\cdots&a_{1n}&b_1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{array}\right).$$

הגדרה 1.8 מטריצת המקדמים המצומצמת של המערכת $(*)$ מוגדרת להיות המטריצה $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

דוגמות

1.

$$(*)\begin{cases} x_1-x_3=1 \\ x_2+x_4=3 \end{cases} \quad ,A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},A^+=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

הפתרון הכללי הוא הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1-x_3=1 \\ x_2+x_4=3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ t+1 \\ 3-s \end{pmatrix} \;\middle|\; t,s\in\mathbb{R} \right\}$$

.

2. $(*)\begin{cases} x_1=3 \\ x_1=4 \\ x_2=0 \end{cases}$, $n=2$, $m=3$. $A^+=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\varnothing$.

3. $(*)\begin{cases} (i) & x_1-x_2+x_3=0 \\ (ii) & x_1-x_2+2x_3=1 \\ (iii) & x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$. נמצא את הפתרון הכללי של $(*)$, $(ii)-(i): x_3=1-0=1$. נציב ב־ (i) ו־ (iii) נקבל: $\begin{cases} (i) & x_1-x_2+1=0 \\ (iii) & x_1+x_2-1=0 \end{cases}$. נחבר $(i)+(iii): 2x_1=0\to x_1=0$. נציב ב־ (i) ונקבל $x_2=1$ לכן הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$$A^+=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

.

הערה 1.9 נוכל לבצע פעולות על שורות A^+ במקום על המשוואות של $(*)$ ולבסוף לקבל מטריצת מקדמים מורחבת המתאימה למערכת לינארית פשוטה יותר.

הגדרה 1.10 תהי A^+ מטריצה. פעולת שורה אלמנטרית על השורות של A^+ מוגדרת להיות אחת מהפעולות הבאות:

(i) כפל של שורה בסקלר: $0_F\neq c\in\mathbb{F}$: $R_i\to c\cdot R_i$ כאשר $1\leq i\leq m$.

(ii) החלפת שתי שורות שונות: $R_i\leftrightarrow R_j$ כאשר $1\leq i,j\leq m$ וגם $i\neq j$.

(iii) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת: $R_i\to R_i+cR_j$ כאשר $c\in\mathbb{F}$ ו־ $1\leq i,j\leq m$ וגם $i\neq j$.

טענה 1.11 תהיינה $(*)$, $(**)$ שתי מערכות לינאריות מעל $\mathbb{F}$ במשתנים $x_1,...,x_n$ ותהיינה A^+, A^{++} מטריצות המקדמים המורחבות שלהם. נניח כי A^{++} התקבלה מ־ A^+ ע"י פעולת שורה אלמנטריות. אזי $(*)$, $(**)$ שקולות.

הוכחה: נניח כי $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ פתרון של $(*)$ אזי גם פתרון של $(**)$. בנוסף, אם $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ פתרון של $(**)$ אזי הוא פתרון של

$(*)$ שכן כל פעולת שורה אלמנטרית היא הפיכה והפעולה הפוכה שלה היא:

$$\begin{array}{lc|c} (i) & R_i \to cR_i, c \neq 0_F & R_i \to c^{-1}R_j \\ (ii) & R_i \leftrightarrow R_j, i \neq j & R_i \leftrightarrow R_j \\ (iii) & R_i \to R_i + cR_j, i \neq j & R_i \to R_i - cR_j \end{array}.$$

■

הערה 1.12 נשים לב שכל פעולת שורה הפוכה לפעולת שורה אלמנטרית היא בעצמה פעולת שורה אלמנטרית.

הגדרה 1.13 קבוצת כל המטריצות עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$ בעלות m שורות ו־ n עמודות מסומנת ב־

$$M_{m\times n}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} a_{ij} \in \mathbb{F} \\ 1 \leq \forall i \leq m \\ 1 \leq \forall j \leq n \end{array} \right\}$$

נאמר כי $m \times n$ (m על n) הוא סדר המטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

הגדרה 1.14 שתי מטריצות $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ יקראו <u>שקולות שורה</u>, אם ניתן להגיע מ־ A ל־ B ע"י מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות.

הערה 1.15 המושג שקולות שורה מוגדר היטב שכן הוא סימטרי (הפוכה של פעולת שורה היא בעצמה פעולת שורה אלמנטרית). תהיינה $A^+, A^{++} \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$ שתי מטריצות מקדמים של מערכות לינאריות $(*)$, $(**)$. נניח כי A^{++}, A^+ שקולות שורה אזי $(*)$, $(**)$ מערכות שקולות.

דוגמה נתונה מערכת ב־ 3 משתנים מעל $\mathbb{Z}_5$,

$$(*)\begin{cases} x_1 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

לכן $x_3 = 4 \leftarrow -x_3 = 4$. $x_2 = 1 \leftarrow x_2 + x_3 = 0$. $x_1 = 3 + x_3 = 3 + 4 = 2 \leftarrow x_1 - x_3 = 3$. לכן הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$.

$\mathbb{III}$ | כדור לזוג לא לשניים

דוגמות

1. $\begin{cases} x^2 + y = 3 \\ x \cdot y = 5 \end{cases}$, זו איננה מערכת משוואות לינאריות (במשוואה הראשונה משתנה ממעלה שנייה, ובמערכת השנייה מכפלת משתנים).

(א) נתונה מערכת במשתנים x_1, x_2, x_3

$$(*)\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3=1 \\ x_3=2 \end{cases} \qquad , A^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

מהמשוואה האחרונה נובע כי $x_3 = 2$ ונציב במשוואה השנייה ונקבל $x_2 - 2 = 1$ ← $x_2 = 3$. $x_1 + 3 + 2 = 0$ ← $x_1 = -5$. לכן הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

2. נתונה מערכת ב־ 3 נעלמים,

$$(*)\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_1+2x_2=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$$

.

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to \frac{2}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to R_1+R_3]{R_2\to R_2-\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

לכן הפתרון הכללי ל־ $(*)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right\}$.

3. נתונה מערכת ב־ 3 משתנים,

$$(*)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. נסמן $x_3 = t$, לכן $x_2 = -2t$, נציב ב־ (i) ונקבל $x_1 - 4t + 3t = 0$ ← $x_1 = t$. לכן הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$.

4. (נדלג על כתיבת המערכת)

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -12 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

נשים לב כי אין ל־ $(*)$ (המערכת המתאימה ל־ A^+) אף פתרון פרטי, לכן הפתרון הכללי הוא $\varnothing$.

2 מטריצות מדורגות

הגדרה 2.1 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. יהי $1 \le i \le m$ ויהי $1 \le j \le n$. נסמן ב־ $[A]_{ij} = a_{ij}$ את הרכיב המופיע ב־ A במקום ה־ ij, כלומר, נסמן $[A]_{ij} = a_{ij}$ כאשר $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. נסמן גם בקיצור $A = (a_{ij})_{i=1}^{m}\,{}_{j=1}^{n}$ או $A = (a_{ij})$ בקיצור נמרץ.

הגדרה 2.2 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. יהי $1 \le i \le m$ ויהי $1 \le j \le n$. ונסמן $A = (a_{ij})$. נאמר כי a_{ij} הוא איבר מוביל של A ($Pivot$) אם:

(i) $a_{ij} \neq 0_F$.

(ii) a_{ij} הוא האיבר הראשון שלא מתאפס בשורה ה־i־ית, כלומר, אם $1 \le \forall k \le j$ מתקיים $a_{ik} = 0_F$.

דוגמה $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, כאן, המספרים המודגשים הם האיברים המובילים.

הגדרה 2.3 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נאמר ש־ A היא מטריצה מדורגת (או בצורת מדרגות או באנגלית $Echlon\ Form$) אם:

(i) כל שורת האפסים ב־ A (אם קיימות) נמצאות בתחתית המטריצה.

(ii) כל איבר מוביל ב־ A נמצא מימין לאיברים המובילים בשורות שמעליו.

כלומר, אם:

(i) אם עבור $1 \le i \le m$ מתקיים $a_{ij} = 0$ $1 \le \forall j \le n$ אזי $i \le \forall k \le m$, מתקיים $a_{kj} = 0$, $1 \le \forall j \le n$.

(ii) אם עבור $1 \le i_1 < i_2 \le m$ ו־ $1 \le j_1, j_2 \le n$, מתקיים $a_{i_1 j_1}$ ו־ $a_{i_2 j_2}$ איברים מובילים, מתקיים $j_1 < j_2$.

תרגילים

האם המטריצות הבאות מדורגות?

1. Q : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ A : $\checkmark$.
2. Q : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A : $\times$.
3. Q : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ A : $\checkmark$.
4. Q : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ A : $\times$.
5. Q : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A : $\times$.
6. Q : $\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$ A : $\checkmark$.

$\mathbb{III}$ | שלושה חברים יצאו לדרך בים באם בום

3 מטריצות קנוניות

הגדרה 3.1 מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תקרא קנונית (מדורגת קנונית, מדורגת סטנדרטית) אם מתקיימים התנאים הבאים:

(i) A מדורגת.

(ii) כל איבר מוביל ב־ A שווה ל־ 1_F.

(iii) כל איבר מוביל נמצא בעמודה סטנדרטית, כלומר, עבור כל איבר מוביל $a_{ij} = 1_F$, $\forall k \neq i$ כך ש־ $1 \le k \le m$, מתקיים $a_{kj} = 0_F$.

דוגמות

1. Q : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ A : $\checkmark$.
2. Q : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A : $\times$.
3. Q : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A : $\checkmark$.
4. Q : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ A : $\checkmark$.
5. Q : $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$ A : $\checkmark$.

הערה 3.2 נשים לב שאם A^+ היא מטריצת מקדמים מורחבת של מערכת לינארית $(*)$, ואם בנוסף A^+ קנונית, אזי הפתרון ל־ $(*)$ מתקבל באופן מידי. לכן היינו רוצים לבצע פעולות שורה אלמנטריות על מטריצת מקדמים מורחבת (שאיננה קנונית) על מנת לקבל מטריצה שקולת שורות שהיא קנונית.

משפט 3.3 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי A שקולת שורה למטריצה קנונית.

הערה 3.4 יתר על כן, המטריצה הקנונית השקולת שורה ל־ A היא יחידה, אך נוכיח את היחידות בהזדמנות אחרת כשייתחשק ליוסי, אם בכלל.

הוכחה: נבצע את פעולות השורה האלמנטריות הבאות על A לפי האלגוריתם הבא:

(i) אם העמודה הראשונה של A היא עמודת אפסים נדלג עליה ונחזור ל־ (i) עם המטריצה שנשארה.

(ii) אחרת, קיים $1 \le i \le m$ שעבורו $a_{i1} \neq 0_F$. אם $i = 1$ נדלג ל־ (iii). אחרת נבצע את הפעולה האלמנטרית $R_1 \leftrightarrow R_i$.

(iii) נבצע $R_1 \to a_{11}^{-1} \cdot R_1$.

(iv) $\forall i \neq 1$, נבצע את הפעולה $R_i \to R_i - a_{i1} \cdot R_1$.

(v) נדלג על השורה והעמודה הראשונה ונחזור ל־ (i). ■

הגדרה 3.5 הדרגה של מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מוגדרת להיות מספר האיברים המובילים בצורה הקנונית של A. נסמן את הדרגה של A ב־ $rank(A)$.

הגדרה 3.6 הצורה הקנונית של A קיימת ויחידה ולכן הדרגה מוגדרת היטב.

דוגמות

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -\frac{3}{2} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{4}{3} R_3]{R_1 \to R_1 + \frac{8}{3} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפעלנו את האלגוריתם, קוראת ספונטנית ־ נסי להבין בעצמך למה זה נכון, אני לא מתכוון לקריין כל מהלך אלגברי פה.

.2

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2} R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

שוב הפעלנו את האלגוריתם, הייתי נותן $5/5$ אם זה היה סרט בורקס קלאסי.

תרגיל יהי $k \in \mathbb{R}$, ונתבונן במערכת המשוואות הבאה:

$$(*) \begin{cases} -x-2y+z=0 \\ 2x+5y+kz=1 \\ 7x+(9-k)y-5z=-1 \end{cases}$$

(א) קבעו לאילו ערכי k (אם קיימים) יש למערכת פתרון יחיד, ומצאו את הפתרון במקרה זה.

(ב) קבעו לאילו ערכי k (אם קיימים) אין למערכת פתרון.

פתרון נתבונן במטריצת המקדמים המורחבת,

$$A^{+} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & k & 1 \\ 7 & 9-k & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & k & 1 \\ 7 & 9-k & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & -5-k & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + (5+k)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & (k+3)(k+4) & k+4 \end{array}\right) = A^{++}$$

נחלק לאפשרויות:

(i) $k=-3$. במקרה זה, $A^{++} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ אין פתרון.

(ii) $k=-4$. במקרה זה, $A^{++} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, נסמן $z=t$. לכן $y-2t=1$ ← $y=1+2t$, $x+2y-t=0$, $x=-3t-2$ לכן $\begin{pmatrix} -3t-2 \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix}$ פתרון $\forall t \in \mathbb{R}$ (כלומר יש אינסוף פתרונות).

(iii) $k \neq -3,-4$. במקרה זה, $z = \frac{1}{k+3}$, נציב במשוואה השנייה $y+(k+2)z=1$, $y = 1 - \frac{k+2}{k+3} = \frac{1}{k+3}$. נציב במשוואה ראשונה $x+2y-z=0$, $x+y=0$ ← $x = -\frac{1}{k+3}$. לכן קיים פתרון יחיד והוא $\begin{pmatrix} -\frac{1}{k+3} \\ \frac{1}{k+3} \\ \frac{1}{k+3} \end{pmatrix}$.

4 מרחבים וקטוריים

הגדרה 4.1 יהי $\mathbb{F}$ שדה. קבוצה V עם פעולות חיבור "$+$" וכפל בסקלר "$\cdot$" תקרא מרחב וקטורי (מ"ו) מעל $\mathbb{F}$, אם מתקיימות האקסיומות הבאות:

<u>א1</u>: <u>סגירות לחיבור</u>: $\forall v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2$ מוגדר ומתקיים $v_1 + v_2 \in V$.

<u>א2</u>: <u>קומוטטיביות החיבור</u>: $\forall v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

<u>א3</u>: <u>אסוציאטיביות החיבור</u>: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$, $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.

<u>א4</u>: <u>קיום וקטור האפס</u>: קיים וקטור $0_V \in V$ שעבורו $v + 0_V = v$, $\forall v \in V$.

<u>א5</u>: <u>קיום נגדי</u>: $\forall v \in V$ קיים $-v \in V$ שעבורו $v + (-v) = 0_V$.

ב1: סגירות לכפל בסקלר: $\forall v \in V$ ו־ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot v$ מוגדר ומתקיים $\alpha \cdot v \in V$.

ב2: אסוציאטיביות הכפל בסקלר: $\forall v \in V$ ו־ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$.

ב3: דיסטריביוטיביות: (i) $\forall v \in V$ ו־ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

(ii) $\forall v_1, v_2 \in V$ ו־ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$.

ב4: $\forall v \in V$, $1_F \cdot v = v$.

הערה 4.2 לעולם לא נרשום $v \cdot \alpha$, הסקלרים הם תמיד משמאל!

$\mathbb{IV}$ | ארבעת המוסקיטרים נכנסים לבר... בום סיקול

הגדרה 4.3 תהיינה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ו־ $B \in M_{k \times l}(\mathbb{F})$. נאמר כי $A = B$ אם:

(i) $m = k$ וגם $n = l$.

(ii) $1 \leq \forall i \leq m$ ו־ $1 \leq \forall j \leq n$, $[A]_{ij} = [B]_{ij}$.

דוגמות

1. מרחב המטריצות: $V = M_{m \times n}(\mathbb{F})$. נגדיר $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, את $A + B$ להיות המטריצה מסדר $m \times n$ שרכיביה מוגדרים להיות $[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$, $1 \leq \forall i \leq m$ ו־ $1 \leq \forall j \leq n$. נגדיר $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ו־ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, את $\alpha \cdot A$ להיות המטריצה מסדר $m \times n$ שרכיביה מוגדרים להיות $[\alpha \cdot A]_{ij} = \alpha \cdot [A]_{ij}$, $1 \leq \forall i \leq m$ ו־ $1 \leq \forall j \leq n$.
2. המרחב $\mathbb{F}^n = M_{n \times 1}(\mathbb{F})$, כלומר $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_1, ..., x_n \in \mathbb{F} \right\}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (כי הוא מקרה פרטי של $M_{m \times n}$).
3. כל שדה הוא מרחב וקטורי מעל עצמו. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^1$.
4. יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}$ תת שדה. אזי $\mathbb{F}$ מ"ו מעל $\mathbb{F}_1$ (כאשר הכפל בסקלר מוגדר להיות כפל רגיל).
5. בפרט $\mathbb{R}$ מ"ו מעל $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ מ"ו מעל $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ מ"ו מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ מ"ו מעל $\mathbb{Q}$.
6. תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר $\mathbb{R}^A = \left\{ f : A \to \mathbb{R} \right\}$. $\forall f, g \in \mathbb{R}^A$ נגדיר $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$ ונגדיר $\forall f \in \mathbb{R}^A$ ו־ $\forall a \in \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, $\forall x \in A$.
7.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \right\} = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| \; a_n \in \mathbb{R}, \forall n \right\} = \mathbb{R}^{\infty}$$

8.

$$\mathbb{R}^{\{1,2\}} = \left\{ f : \{1, 2\} \to \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} f(1) \\ f(2) \end{smallmatrix} \right) \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

9. $\mathbb{R}^2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$$\alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{smallmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{smallmatrix} \right)$$

משפט 4.4 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר שהגדרנו.

הוכחה: א1: (סגירות לחיבור) ברור.

א2: (קומוניזם החיבור) תהיינה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נוכיח כי $A+B=B+A$. ברור כי $A+B, B+A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. יהיו $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. $[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \underset{\mathbb{F}\text{ קומו'}}{=} [B]_{ij} + [A]_{ij} = [B+A]_{ij}$.

א3: (אסוצ' החיבור) כמו א2.

א4: (קיום 0_V) נגדיר $0_{m\times n}$ ע"י $[0_{m\times n}]_{ij} = 0_F$ $\forall ij$. $\begin{pmatrix} 0_F & \cdots & 0_F \\ \vdots & & \vdots \\ 0_F & \cdots & 0_F \end{pmatrix}$. נשים לב ש־ $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A + 0_{m\times n} = A$.

א5: (קיום נגדי) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נביט במטריצה $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ המוגדרת על ידי $[-A]_{ij} = -[A]_{ij}$, ברור כי $A + (-A) = 0_{m\times n}$.

ב1: (סגירות לכפל בסקלר) ברור שכן $\alpha \cdot A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

ב2: (אסוצ' לכפל בסלקר) יהיו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו־ $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. נוכיח כי $(\alpha\cdot\beta)A = \alpha\cdot(\beta\cdot A)$. נשים לב כי

$$\alpha\cdot(\beta\cdot A), (\alpha\cdot\beta)\cdot A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

נוכיח ש־ $\forall ij$, $[(\alpha\cdot\beta)\cdot A]_{ij} = [\alpha\cdot(\beta\cdot A)]_{ij}$ ונסיים.

$$[(\alpha\cdot\beta)A]_{ij} = (\alpha\cdot\beta)[A]_{ij} \underset{\mathbb{F}\text{ אסוצ'}}{=} \alpha(\beta[A]_{ij}) = \alpha[\beta A]_{ij} = [\alpha\cdot(\beta A)]_{ij}$$

ב3: (דיסטרי') כמו ב2.

ב4: תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. $[1_F \cdot A]_{ij} = 1_F[A]_{ij} = [A]_{ij}$ ולכן $1_F \cdot A = A$. ■

דוגמה $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3)$, נחשב

$$2\cdot\begin{pmatrix} 1&0&2\\0&0&1\\2&2&1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1&2&2\\0&1&1\\1&2&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&0&1\\0&0&2\\1&2&2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2&1&1\\0&2&2\\2&1&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&2\\0&2&1\\0&2&0 \end{pmatrix}$$

.

טענה 4.5 $\mathbb{R}^A$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

הוכחה: כמו $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. ■

טענה 4.6 (יחידות 0_V) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ונניח כי $0_V, \widetilde{0}_V \in V$ ניטרליים לחיבור אזי $0_V = \widetilde{0}_V$.

הוכחה: $0_V = 0_V + \widetilde{0}_V = \widetilde{0}_V + 0_V = \widetilde{0}_V$. ■

טענה 4.7 (חוק הצמצום לחיבור) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $v \in V$ ונניח שעבור $u_1, u_2 \in V$ מתקיים $v + u_1 = v + u_2$ אזי $u_1 = u_2$.

הוכחה: קיים נגדי ל־ v ונסמנו ב־ $u \in V$. מתקיים $u + v = v + u = 0_V$. לכן $v + u_1 = v + u_2$ לכן

$$u_1 = (u+v) + u_1 = u + (v + u_1) = u + (v + u_2) = (u+v) + u_2 = 0_V + u_2 = u_2$$

■

טענה 4.8 (יחידות הנגדי) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $v \in V$ ונניח שעבור $u_1, u_2 \in V$ מתקיים $v + u_1 = v + u_2 = 0_V$ אזי $u_1 = u_2$.

הוכחה: ברור מחוק הצמצום לחיבור. ■

הערה נסמן את הנגדי של $u \in V$ ב־ $-u$. מיחידות הנגדי, הסימון מוגדר היטב.

טענה $\forall v \in V$, $0_F \cdot v = 0_V$.

הוכחה יהי $v \in V$. $0_F + \cancel{0_F \cdot v} = 0_F \cdot v = (0_F + 0_F) \cdot v = 0_F \cdot v + \cancel{0_F \cdot v}$.

הגדרה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $W \subseteq V$. נאמר כי W תת־מרחב של V, אם W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ביחס לאותן הפעולות של החיבור והכפל בסקלר שהוגדרו על V.

$\mathbb{V}$ | מעשה בחמישה בלונים

טענה 4.9 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $W \subseteq V$. אזי W ת"מ של V אם"ם מתקיימים התנאים הבאים:

(i) W סגור לחיבור כלומר, $\forall w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$.

(ii) W סגור לכפל בסקלר, כלומר $\forall w \in W$ ו־ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot w \in W$.

(iii) $0_V \in W$.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: נניח ש־ W ת"מ של V. אזי (i) ו־ (ii) מתקיימים ב־ W כי W מ"ו. לכן מספיק להוכיח כי $0_V \in W$. מהיות W מ"ו מעל $\mathbb{F}$, קיים W וקטור ניטרלי לחיבור, ונסמנו 0_W. לכן מסגירות לכפל בסקלר $0_W = 0_F \cdot 0_W \in W$ אבל גם $0_F \cdot 0_W = 0_V$. לכן $0_W = 0_V$, ולכן $0_V \in W$.

$\underline{\Rightarrow}$: נניח כי (i), (ii), (iii) מתקיימים ב־ W ונוכיח ש־ W מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

א1. סגירות לחיבור: ✓.

א2. <u>קומוטטיביות לחיבור</u>: $\forall w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$ (ברור כי $w_1, w_2 \in V$).

א3. <u>אסוציאטיביות לחיבור</u>: $\forall w_1, w_2, w_3 \in W$, $w_1, w_2, w_3 \in V$ ולכן $w_1 + (w_2 + w_3) = (w_1 + w_2) + w_3$.

א4. <u>קיום וקטור האפס</u>: $\forall w \in W$, $w + 0_V = w$ ומהיות $0_V \in W$ הרי שב־ W קיים נייטרלי לחיבור.

א5. <u>קיום נגדי</u>: $\forall w \in W$, $-1_F \cdot w \in W \underset{\text{(נוכיח בהמשך)}}{=} -w$ ולכן $w + (-w) = 0_V$.

ב1. <u>סגירות כפל בסקלר</u>: $\checkmark$.

ב2. <u>אסוציאטיביות לכפל בסקלר</u>: $\forall w \in W$ ו־ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\alpha(\beta \cdot w) = (\alpha \cdot \beta)w$ ברור כי מתקיים ב־ V.

ב3. <u>דיסטריביוטיביות</u>: (ברור כי V מ"ו)

ב4. <u>קיום ניטרלי לכפל בסקלר</u>: $1_F \cdot w = w$ (ברור כי V מ"ו). ■

טענה 4.10 יהי V מ"ו מעל השדה $\mathbb{F}$ ויהי $v \in V$. אזי $-v = -1_F \cdot v$.

הוכחה:

$$v + (-1_F) \cdot v = 1_F \cdot v - (1_F) \cdot v = (1_F + (-1_F)) \cdot v = 0_F \cdot v = 0_V$$

ולכן $v + (-1_F)v = 0_V$ ולכן מיחידות הנגדי $(-1_F) \cdot v = -v$. ■

דוגמות

1. נגדיר $W \subseteq \mathbb{R}^2$ ע"י $W = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ 3x \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$. אזי W ת"מ של $\mathbb{R}^2$:
   - (i) <u>סגור לחיבור</u> יהיו $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 3x \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} y \\ 3y \end{smallmatrix} \right) \in W$. אזי $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 3x \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} y \\ 3y \end{smallmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 3(x+y) \end{pmatrix}$.
   - (ii) <u>סגור לכפל בסקלר</u> יהי $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 3x \end{smallmatrix} \right) \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \left(\begin{smallmatrix} x \\ 3x \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha x \\ 3\alpha x \end{smallmatrix} \right) \in W$.
   - (iii) $0_{\mathbb{R}^2} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \in W$.
2. נגדיר $W = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ x^2 \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$. W לא ת"מ של $\mathbb{R}^2$ כי $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \in W$ אבל $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \notin W$ ולכן ב־ W אין נגדי.
3. נגדיר $W = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ רציפה} \right\}$. אזי W ת"מ של $\mathbb{R}^{[a.b]}$.
   - (i) אם $f, g \in W$, $f + g \in W$ (אש"ר).
   - (ii) אם $f \in W$ ו־ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot f \in W$ (אש"ר).
   - (iii) פונקצית האפס, כלומר $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = 0$ היא רציפה ולכן $0_{\mathbb{R}^{[a,b]}} \in W$.

הגדרה 4.11 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, v_2 \in V$, ויהי $v \in V$. נאמר כי v הוא <u>צירוף לינארי</u> (קומבינציה לינארית) של v_1, v_2, אם קיימים $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ כך ש־ $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$.

טענה 4.12 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $W \subseteq V$. אזי W ת"מ של V אס"ם:

$(i)^{(*)}$ W סגור לצירופים לינאריים, כלומר אם $\forall w_1, w_2 \in W$ ו־ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 \in W$.

$(ii)^{(*)}$ $0_V \in W$.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: W ת"מ ולכן $\forall\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{F}$ ו- $\forall w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1 \cdot w_1, \alpha_2 \cdot w_2 \in W$ ולכן $\alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 \in W$.

$\underline{\Rightarrow}$: יהי $w \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$. $\alpha \cdot w = \alpha \cdot w + 0_W = \alpha \cdot w + 1_F \cdot 0_W \in W$ לכן W סגור לכפל בסקלר. יהיו $w_1, w_2 \in W$.

$w_1 + w_2 = 1_F \cdot w_1 + 1_F \cdot w_2 \in W$ ולכן W סגור לחיבור. ■

דוגמות

1. מרחב הפולינומים: יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $\mathbb{F}[x] = \left\{ a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \;\middle|\; a_0, ..., a_n \in \mathbb{F}, \mathbb{Z} \ni n \geq 0 \right\}$. אזי $\mathbb{F}[x]$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$. מספיק שנוכיח כי $\mathbb{F}[x]$ ת"מ של $\mathbb{F}^{\mathbb{F}}$ ונסיים.

   $(i)^{(*)}$ יהיו $p_1, p_2 \in \mathbb{F}[x]$ ויהיו $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. נוכיח כי $\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 \in \mathbb{F}[x]$: מהיות $p_1, p_2 \in \mathbb{F}[x]$ קיימים $n, m \geq 0$ שלמים וכן $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_m \in \mathbb{F}$ כך ש- $p_1 = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $p_2 = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$. בה"כ $n \geq m$ (אחרת נחליף שמות) ולכן

   $$(\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2)(x) = \alpha_1p_1(x) + \alpha_2p_2(x) = \alpha_1(a_0 + ... + a_nx^n) + \alpha_2(b_0 + ... + b_mx^m + 0_F \cdot x^{m+1} + ... + 0_Fx^n)$$

   $$= (\alpha_1a_0 + \alpha_2b_0) + (\alpha_1a_1 + \alpha_2b_1)x + ... + (\alpha_1a_m + \alpha_2b_m)x^m + \alpha_1a_{m+1}x^{m+1} + ... + \alpha_1a_nx^n \in \mathbb{F}[x]$$

   $(ii)^{(*)}$ ברור כי פוקנצית האפס היא פולינום (פולינום האפס). ■

2. נגדיר $\forall n \geq 0$ שלם, $\mathbb{F}_n[x] = \left\{ p \in \mathbb{F}[x] \;\middle|\; \deg p \leq n \right\}$. $\mathbb{F}_n[x]$ מ"ו (תת־מרחב של $\mathbb{F}[x]$).

3. נגדיר עבור $n \geq 0$ שלם, $W = \left\{ p \in \mathbb{F}[x] \;\middle|\; \deg p = n \right\}$. W לא מ"ו ($0_{\mathbb{F}[x]} \notin W$ כי $\deg 0_{\mathbb{F}[x]} = -\infty$).

4. $W = \left\{ p \in \mathbb{F}[x] \;\middle|\; \deg p = 3 \right\} \cup \left\{ 0_{\mathbb{F}[x]} \right\}$. W לא מ"ו כי $x^3 + 1 \in W$, $-x^3 \in W$ אבל $x^3 + 1 + (-x^3) = 1 \notin W$.

5. $W = \left\{ f : [0,a] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f'(1) \text{ קיים ושווה ל- } 0 \right\}$.

   (i) יהיו $f, g \in W$. $f + g \in W \Leftarrow (f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 0 + 0 = 0$.

   (ii) יהי $f \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha \cdot f \in W \Leftarrow (\alpha \cdot f)'(1) = \alpha f'(1) = \alpha \cdot 0 = 0$.

   (iii) $0 \in W$ ברור. ■

6. $W = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ מתכנסת} \right\}$. W מ"ו (ת"מ של $\mathbb{R}^{\infty} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

7. $W = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ מתכנסת במובן הרחב} \right\}$. נתבונן בסדרות $a_n = n$, $b_n = (-1)^n - n$. מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ אבל $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ לא קיים במובן הרחב לכן W לא סגור לחיבור.

8. $W = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ חסומה מלעל} \right\}$. $a_n = -n$, $\forall n$ היא חסומה מלעל ע"י -1, אבל לא קיים לה נגדי $\Leftarrow$ W לא מ"ו.

9. $C^{(n)}[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ גזירה } n \text{ פעמים ברציפות} \right\}$. ברור ש- $C^{(n)}[a,b]$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^{[a,b]}$)

10. $W=\left\{ p\in\mathbb{R}[x] \,\middle|\, \deg p \text{ זוגי או } -\infty \right\}$. $x^2+x,-x^2\in W$ אבל $x^2+x+(-x^2)=x\notin W$ $\Leftarrow$ W לא סגור לחיבור.

$\mathbb{VI}$ | 66 סדרי... זה בכלל משנה?

דוגמות

1. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נשים לב ש־ V ת"מ של V מעל $\mathbb{F}$.
2. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נשים לב ש־ $\left\{0_V\right\}$ ת"מ של V.
3. $\left\{(0,0)\right\}$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

5 Span

הגדרה 5.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,...v_k\in V$. ה־ span (הפרוש) של $v_1,...,v_k$ (או של $\left\{v_1,...,v_k\right\}$) מוגדר להיות הקבוצה $W=span\left\{v_1,...,v_k\right\}=\left\{\alpha_1v_1+...+\alpha_kv_k \,\middle|\, \alpha_1,....\alpha_k\in\mathbb{F}\right\}$.

הגדרה 5.2 יהיו $v,v_1,...,v_k\in V$. נאמר כי v הוא צירוף לינארי (קומבינציה לינארית) של $v_1,...,v_k$ אם קיימים $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{F}$ שעבורם $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_kv_k$.

הערה 5.3 $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ היא קבוצת כל הצרופים הלינאריים האפשריים של $v_1,..,v_k$.

הערה 5.4 מהיות V מ"ו אז V סגור לחיבור ולכפל בסקלר, ולכן סגור לצירופים ליאנריים. לכן $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}\subseteq V$.

טענה 5.5 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,...,v_k\in V$. אזי $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ תת מרחב של V.

הוכחה: ראשית, מההערה הקודמת, $W=sp\{v_1,...,v_k\}\subseteq V$, ולכן מספיק להוכיח:

$(i)^{(*)}$ יהיו $w_1,w_2\in W$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. מהיות $w_1,w_2\in W$, קיימים $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{F}$ ו־ $\beta_1,...,\beta_k\in\mathbb{F}$. שעבורם $w_1=\alpha_1v_1+...+\alpha_kv_k$, $w_2=\beta_1v_1+...+\beta_kv_k$ לכן

$$\alpha w_1+\beta w_2=\alpha(\alpha_1v_1+...+\alpha_kv_k)+\beta(\beta_1v_1+...+\beta_kv_k)=(\alpha\cdot\alpha_1+\beta\cdot\beta_1)v_1+...+(\alpha\cdot\alpha_k+\beta\cdot\beta_k)v_k\in W$$

ולכן W סגור לצירופים לינארים:

$(ii)^{(*)}$ $0_V=0_F\cdot v_1+0_F\cdot v_2+...+0_F\cdot v_k\in W$. ■

דוגמות

.1

$$W=\left\{\ p\in\mathbb{R}_3[x]\ \middle|\ p(1)-2p(0)=0\ \right\}=\left\{\ a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ \middle|\ a_0+a_1+a_2+a_3-2a_0=0\ \right\}$$

$$=\left\{\ a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ \middle|\ a_0=a_1+a_2+a_3\ \right\}=\left\{\ a_1+a_2+a_3+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ \middle|\ a_{1,2,3}\in\mathbb{R}\ \right\}$$

$$=\left\{\ a_1(1+x)+a_2(1+x^2)+a_3(1+x^3)\ \middle|\ a_{1,2,3}\in\mathbb{R}\ \right\}=sp\left\{1+x,1+x^2,1+x^3\right\}$$

לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

2. ב־ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, האם $\cos x\in sp\{\sin 2x,\sin x,\cos 2x)$? לא, נניח בשלילה שקיימים $\alpha_{1,2,3}\in\mathbb{R}$ שעבורים

$$\forall x,\cos x=\alpha_1\sin 2x+\alpha_2\sin x+\alpha_3\cos 2x$$

נציב $x=0$ ונקבל $1=\alpha_3\cdot 1\to\alpha_3=1$. נציב $x=\frac{\pi}{2}$, ונקבל

$$0=\alpha_1\cdot\sin\pi+\alpha_2\sin\frac{\pi}{2}+1\cdot\cos\pi=\alpha_2-1\to\alpha_2=1$$

נציב $x=\frac{\pi}{4}$ ונקבל

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\alpha_1\cdot\sin\frac{\pi}{2}+1\cdot\cdot\sin\frac{\pi}{4}+1\cdot\cos\frac{\pi}{2}$$

לכן $\frac{\sqrt{2}}{2}=\alpha_1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ← $\alpha_1=0$. לכן $\cos x=\sin x+\cos 2x$, $\forall x$. נציב $x=\pi$ ונקבל $-1=0+1$ סתירה!

3. מתקיים: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ לכן $\cos 2x\in sp\left\{1,\sin^2 x\right\}$.

טענה 5.6 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,...,v_k,v\in V$. אזי $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}\subseteq sp\left\{v_1,...,v_k,v\right\}$.

הוכחה: נסמן $A=v_1,...,v_k$, $B=v_1,...,v_k,v$. נשים לב כי $v_1=1_F\cdot v_1+0_F\cdot v_2+...+0_F\cdot v_k+0_F\cdot v\in spB$. $v_2=0_F\cdot v_1+1_F\cdot v_2+...+0_F\cdot v_k+0_F\cdot v\in sp\left\{B\right\}$ ובאינדוקציה $v_k=0_F\cdot v_1+...+1_F\cdot v_k+0_F\cdot v\subseteq spB$ ולכן $v_1,...,v_k\in spB$ ולכן $spA\subseteq spB$ (תת מרחב של spB). ■

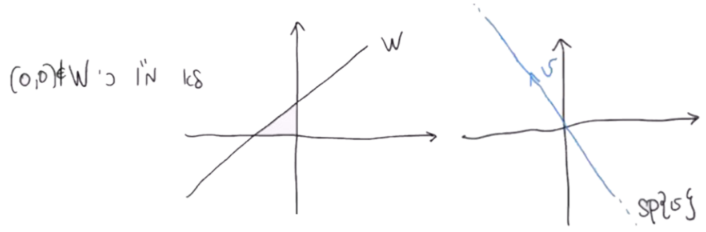
מסקנה 5.7 אם $A,B\subseteq V$ קבוצות סופיות כך ש־ $A\subseteq B$ אזי $spA\subseteq spB$.

הוכחה: ברור באינדוקציה ומטענה 2. ■

דוגמות

1. יהי V מ"ו. $sp\left\{0_V\right\} = \left\{ \alpha \cdot 0_V \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{F} \right\} = \left\{0_V\right\}$.

2. יהי $0_V \neq v \in V$. $sp\left\{v\right\} = \left\{ \alpha \cdot v \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{F} \right\}$ במקרה הספציפי שבו $V = \mathbb{R}^2$, $sp\left\{v\right\}$ = קו ישר העובר דרך ראשית הצירים. לכן כל קו ישר העובר דרך הראשית הוא ת"מ של $\mathbb{R}^2$.



3. ב- $\mathbb{R}^3$,

$$sp\left\{(1,\overset{e_1}{0},0),(0,\overset{e_2}{1},0),(0,\overset{e_3}{0},1)\right\} = \left\{x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\right\} = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

.

4. יהיו $u,v \in \mathbb{R}^3$. אזי: המישור עובר דרך u,v = $sp\left\{u,v\right\} = \left\{ t\cdot u + s\cdot v \;\middle|\; t,s \in \mathbb{R} \right\}$.

6 פוספימו

משפט 6.1 (פופסימו) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,...,v_k,v \in V$. אזי $v \in sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ אם"ם $sp\left\{v_1,...,v_k,v\right\} = sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח כי $v \in sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$, ראינו כבר בטענה קודמת כי $sp\left\{v_1,...,v_k\right\} \subseteq sp\left\{v_1,...,v_k,v\right\}$. בנוסף נשים לב כי

$$v_1 = 1_F \cdot v_1 + 0_F \cdot v_2 + ... + 0_F \cdot v_k$$

$$v_2 = 0_F \cdot v_1 + 1_F \cdot v_2 + ... + 0_F \cdot v_k$$

$$v_k = 0_F \cdot v_1 + 0_F \cdot v_2 + ... + 1_F \cdot v_k$$

ולכן $v, v_1, ..., v_k \in sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ולכן $sp\left\{v_1,...,v_k,v\right\} \subseteq sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ (כי זה ת"מ) ולכן $sp\left\{v_1,...,v_k,v\right\} = sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$.

$\underline{\Rightarrow}$: נניח כי $sp\left\{v_1,...,v_k\right\} = sp\left\{v_1,...,v_k,v\right\}$. לכן

$$v \in sp\left\{v_1,...,v_k,v\right\} \underset{\text{מההנחה}}{=} sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$$

ולכן $v \in sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$. ■

הגדרה 6.2 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,...,v_m \in V$. נאמר כי $v_1,...,v_m$ הם פורשים את V (או הקבוצה $\left\{v_1,...,v_m\right\}$ פורשת) אם $V = sp\left\{v_1,...,v_m\right\}$.

הגדרה 6.3 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר כי V נוצר סופית אם קיימת ב־ V קבוצה פורשת סופית, כלומר אם קיימים $v_1,...,v_m \in V$ כך ש־ $V = sp\left\{v_1,...,v_m\right\}$.

דוגמות

1. $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ פורשים את $\mathbb{R}^3$ ולכן הוא נוצר סופית.

2. $V = \mathbb{R}[x]$ לא נוצר סופית. נניח בשלילה שקיימים פולינומים $p_1,...,p_m \in \mathbb{R}[x]$ שפורשים את $\mathbb{R}[x]$ נסמן $-\infty \neq n = \max\{\deg p_1,...,\deg p_m\}$. נביט ב־ $p(x) = x^{m+1}$. מהנחת השלילה, $p \in sp\left\{p_1,...,p_m\right\}$ ולכן קיימים $\alpha_1,...\alpha_m \in \mathbb{R}$ כך ש־ $p(x) = \alpha_1p_1(x)+...+\alpha_mp_m(x)$ ולכן $\deg p = \deg(\alpha_1p_1+...+\alpha_mp_m) \leq n$, סתירה!
   דרך נוספת: אם נגזור $n+1$ פעמים נקבל $(n+1)! = 0$.

$\mathbb{VII}$ | וואי! נשמטה לי השנה

טענה 6.4 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U,W \subseteq V$ שני תתי מרחבים של V אזי $U \cap W$ ת"מ של V.

הוכחה: $(i)^{(*)}$ יהיו $v_1,v_2 \in U \cap W$ ויהיו $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$. מהיות $v_1,v_2 \in U$ ו־ U ת"מ של V, הוא סגור לצירופים לינאריים ולכן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U$. באותו האופן $\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 \in W$ ולכן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U \cap W$.

$(ii)^{(*)}$ $0_V \in U,W$ כי הם תתי מרחבים ולכן $0_V \in U \cap W$. ■

הערה 6.5 באותו האופן אם $U_\alpha \subseteq V$ תתי מרחב של V, $\forall\alpha \in I$ (כאשר I קבוצת אינדקסים כלשהי), אזי $\bigcap\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ ת"מ של V.

מסקנה 6.6 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,...,v_k \in V$ אזי $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ הוא תת המרחב המינימלי המכיל את $\left\{v_1,...,v_k\right\}$, והוא גם שווה ל־ $\bigcap\limits_{\alpha} W_\alpha$ כך ש־ W_α תת מרחב המכיל את $\left\{v_1,...,v_k\right\}$.

הוכחה: ראינו כבר כי $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ת"מ של V. יהי $W \subseteq V$ כך ש- $v_1,...,v_k \in W$. ראינו כבר כי $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ת"מ של W. לכן $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ מינימלי. בנוסף ראינו כי $W = \bigcap\limits_{\alpha} W_\alpha$ ת"מ המכיל את $\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ולכן ממינימליות, $W \subseteq sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$. מהיות $sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ת"מ, קיים α שעבורו $W_\alpha = sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$. לכן $W = sp\left\{v_1,...,v_k\right\}$. ■

הגדרה 6.7 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$. נגדיר את spA להיות חיתוך כל תתי המרחבים W_α של V שעבורם $A \subseteq W_\alpha$ (ברור שקבוצה זו לא ריקה, שכן V נמצא בה ולכן spA מוגדר היטב).

הערה 6.8 spA מ"ו (ת"מ של V ולפי ההערה, חיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב).

הערה 6.9 מתקיים $sp\emptyset = \left\{0_V\right\}$.

הוכח/הפרך יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $W, U \subseteq V$ ת"מ של V. אזי $U \cup W$ ת"מ.

פתרון פריכה! דוגמה נגדית: נבחר $V = \mathbb{R}^2$,

$$W = sp\left\{(1,0)\right\} = \left\{\ (x,0)\ \middle|\ x \in \mathbb{R}\ \right\}$$

$$U = sp\left\{(0,1)\right\} = \left\{\ (0,y)\ \middle|\ y \in \mathbb{R}\ \right\}$$

. U,W ת"מ של $\mathbb{R}^2$ (כי sp הוא תמיד ת"מ) אבל $U \cup W = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ x = 0\ \ \vee y = 0\right\}$ לא ת"מ: $(1,0)+(0,1) = (1,1)$ ולכן $U \cup W$ לא סגור לחיבור.

דוגמה האם הוקטורים $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,5,6)$, $v_3 = (7,8,9)$ פורשים את $\mathbb{R}^3$? יהי $(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ ונחפש $x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 = (b_1,b_2,b_3)$$

$$x_1 \cdot (1,2,3) + x_2 \cdot (4,5,6) + x_3 \cdot (7,8,9) = (b_1,b_2,b_3)$$

$$(x_1+4x_2+7x_3, 2x_1+5x_2+8x_3, 3x_1+6x_2+9x_3) = (b_1,b_2,b_3)$$

$$(*)\begin{cases} x_1+4x_2+7x_3=b_1 \\ 2x_1+5x_2+8x_3=b_2 \\ 3x_1+6x_2+9x_3=b_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 2 & 5 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 9 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -6 & -12 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - 2b_1 + b_3 \end{array}\right)$$

נבחר $(b_1,b_2,b_3) = (0,0,1)$ ונקבל כי $1 = b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$ מהמטריצה ואין פתרון. לכן $\left\{v_1,v_2,v_3\right\}$ לא פורשים את $\mathbb{R}^3$.

מסקנה 6.10 יהי V מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$ קבוצה פורשת (כלומר $spA = V$). תהי $A \subseteq B \subseteq V$ אזי B פורשת.

הוכחה: ראינו כי $V = spA \subseteq spB \subseteq V$ ולכן $spB = V$ ולכן B פורשת. ■

דוגמות

1. $\left\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$. (כי היא מכילה קבוצה פורשת)
2. יהיו $p_1 = 1, p_2 = x^2 + x, p_3 = (x+1)^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

הוכח/הפרך יהיו $p_1 = 1, p_2 = x^2 + x, p_3 = (x+1)^2 \in \mathbb{R}_2[x]$. p_1, p_2, p_3 פורשים את $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון הוכחה! נשים לב כי

$$2p_2(x) + p_1(x) - p_3(x) = x^2$$

$$p_2(x) - 2p_2(x) + p_1(x) - p_3(x) = x$$

$$1 = p_1$$

לכן

$$x^2, x, 1 \in sp\left\{p_1, p_2, p_3\right\}$$

ולכן

$$\mathbb{R}_2[x] = sp\left\{1, x, x^2\right\} \subseteq sp\left\{p_1, p_2, p_3\right\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$$

ולכן $\mathbb{R}_2[x] = sp\left\{p_1, p_2, p_3\right\}$, כלומר הקבוצה פורשת.

7 תלות לינארית

הגדרה 7.1 יהי V מ"ו מעל השדה $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, ..., v_k \in V$. נאמר כי $\left\{v_1, ..., v_k\right\}$ בלתי תלויה לינארית (או וקטורים $v_1, ..., v_k$ בת"ל) אם $\forall \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ שעבורם $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V$ מתקיים $\alpha_i = 0_F$, $\forall 1 \leq i \leq k$.

הערה 7.2 $v_1, ..., v_k$ הם ת"ל אם קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V$ וכך שקיים $1 \leq j \leq k$ כך ש- $a_j \neq 0_F$.

תרגיל ב- $\mathbb{R}^2$, האם $V_1 = (2,3)$ ו- $v_2 = (3,2)$ ת"ל?

פתרון לא! נניח שעבור $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2) = \alpha_1(2,3) + \alpha_2(3,2) = (0,0)$$

לכן

$$\begin{cases} 2\alpha_1+3\alpha_2=0 \\ 3\alpha_1+2\alpha_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to 2R_2]{R_1\to 3R_2} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$-5\alpha_2 = 0 \to \alpha_2 = 0$, $6\alpha_1 = 0 \to \alpha_1 = 0$ ולכן v_1, v_2 בת"ל.

דוגמה $(1,0,3), (0,3,1), (1,3,4)$ תלויים לינארית כי $(1,3,4) = (0,3,1) + (1,0,3)$.

$\mathbb{VIII}$ | רגע, זה אינסוף? *מיישר הראש ומבין שגיאתו*

תרגילים

1. Q : האם $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ בת"ל ב- $\mathbb{R}^3$?

   A : לא! נשים לב כי $1\cdot(1,2,3) - 2\cdot(4,5,6) + 1\cdot(7,8,9) = (0,0,0)$.

2. Q : האם $\binom{1}{i}, \binom{-i}{1}$ ת"ל ב- $\mathbb{C}^2$?

   A : כן! נשים לב כי $1\cdot\binom{1}{i} - i\cdot\binom{-i}{1} = \binom{0}{0}$.

3. Q : האם $\binom{1}{i}, \binom{-i}{1}$ ת"ל ב- $\mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$?

   A : נניח כי עבור $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha=\beta=0 \Leftarrow (*)\begin{cases}\alpha-\beta i=0\\ \alpha i+\beta=0\end{cases} \Leftarrow \begin{pmatrix}\alpha-\beta i=0\\ \alpha i+\beta=0\end{pmatrix} = \alpha\binom{1}{i} + \beta\binom{-i}{1} = \binom{0}{0}$ (אם מספר מרוכב הוא אפס אז הרכיב הממשי והמדומה הם שניהם 0).

4. Q : האם $1+x+x^2, 1, x-1, (x-1)^2$ ת"ל ב- $\mathbb{R}[x]$?

   A : כן! $1\cdot(x-1)^2 - 1\cdot(1+x+x^2) + 3\cdot(x-1) + 3\cdot 1 = 0$.

8 טענות בסיסיות לבת"ל

טענה 8.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. אזי $\left\{0_V\right\}$ תלוי לינארית.

הוכחה: $1_F \cdot 0_V = 0_V$. ■

טענה 8.2 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $v \neq 0_V$. אזי $\left\{v\right\}$ בת"ל.

הוכחה: נניח שעבור $\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha\cdot v=0_V$. נניח בשלילה ש- $\alpha\neq 0_F$ לכן

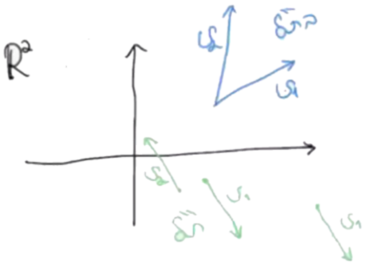
$$v=1\cdot v=(\alpha^{-1}\cdot\alpha)\cdot v=\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot v)=\alpha^{-1}\cdot 0_V=0_V$$

■

טענה 8.3 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,v_2\in V$. אזי v_1,v_2 ת"ל אס"ם קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש- $v_1=\alpha\cdot v_2$ או אם קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש- $v_2=\alpha\cdot v_1$.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: נניח כי v_1,v_2 ת"ל. אז קיימים $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$ כך ש- $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}\neq\binom{0_F}{0_F}$ וכך ש- $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2=0_V$. אם $\alpha_1\neq 0_F$ אזי $v_1=-\alpha_2\cdot\alpha_1^{-1}v_2$. אחרת $\alpha_2\neq 0_F$ ולכן $v_2=-\alpha_1\cdot\alpha_2^{-1}v_1$.

$\underline{\Rightarrow}$: נניח שעבור $\alpha\in\mathbb{F}$, $v_1=\alpha v_2$ לכן $v_1,v_2\leftarrow 1\cdot v_1-\alpha\cdot v_2=0_V$ ת"ל ($1_F\neq 0_F$). עתה נניח כי $v_2=\alpha\cdot v_1$. לכן $v_1,v_2\leftarrow\alpha\cdot v_1-1_F\cdot v_2=0_V$ ת"ל. ■



דוגמה $(1,2,3),(4,8,9)$ בת"ל ב- $\mathbb{R}^3$ (ברור).

טענה 8.4 יהי V מ"ו ויהיו $v_1,...,v_n\in V$ בת"ל. יהי $k\leq n$. אזי $v_1,...,v_k$ בת"ל.

הוכחה: נניח בשלילה כי $v_1,...,v_k$ ת"ל. לכן קיימים $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{F}$ כך ש- $\begin{pmatrix}0_F\\ \vdots\\ 0_F\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}$ וכך ש- $\alpha_1v_1+...+\alpha_kv_k=0_V$. נגדיר $\alpha_{k+1},...,\alpha_n$ להיות 0_F אזי $\alpha_1v_1+...+\alpha_kv_k+0_Fv_{k+1}+...+0_Fv_n=0_V$. קיבלנו צירוף לינארית לא טרוויאלי (שלא כל מקדמיו הם אפס) של $v_1,...,v_n$ הנותן את 0_V בסתירה להנחה ש- $v_1,...,v_n$ בת"ל. ■

מסקנה 8.5 אם V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו- $A,B\subseteq V$ סופיות כך ש- $A\subseteq B$, אזי אם B בת"ל אזי A בת"ל (ובאופן שקול, אם A ת"ל אזי B ת"ל).

דוגמה ב- $\mathbb{R}^3$, האם $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ הם ת"ל? לא! נניח שעבור $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ מתקיים $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2+\alpha_3\cdot e_3=(0,0,0)$ ולכן $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

9 מימדים

הגדרה 9.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $v_1,...,v_n\in V$. נאמר כי $A=\left\{v_1,...,v_n\right\}$ <u>בסיס</u> של V אם A בת"ל ופורשת (כלומר $V=sp\left\{v_1,...,v_n\right\}$).

הגדרה 9.2 יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. נאמר כי $\dim V = n$ (המימד של V הוא n) אם קיים ב- V בסיס בגודל n.

הערה 9.3 נרצה להוכיח שהמימד מוגדר היטב, וכן קיים לכל מ"ו נוצר סופית.

הגדרה 9.4 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר כי $\dim V = \infty$ אם V לא נוצר סופית.

דוגמות

1. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$: $V = \mathbb{F}^n$. $\dim V = n$ כי נביט ב-

$$e_1 = \begin{pmatrix}1_F\\0_F\\ \vdots\\0_F\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0_F\\1_F\\0_F\\ \vdots\\0_F\end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix}0_F\\0_F\\ \vdots\\1_F\end{pmatrix}$$

נשים לב כי $e_1, ..., e_n$ בסיס של V:

בת"ל: נניח שעבור $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ מתקיים $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\ \vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = \begin{pmatrix}0_F\\ \vdots\\0_F\end{pmatrix}$

פורשים: יהי $v = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\\alpha_2\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$. אזי $sp\left\{e_1, ..., e_n\right\} = V \Leftarrow v = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n \in sp\left\{e_1, ..., e_n\right\}$.

2. $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, $\dim \mathbb{R}^6 = 6$, $\dim \mathbb{R} = 1$.

3. $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \infty$, $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$.

4. $\dim \mathbb{C}^2 = 2$.

5. הבסיס הסטנדרטי של $M_{m\times n}(\mathbb{F})$: נגדיר $\forall i, j$, $E_{ij} = i\begin{pmatrix}0_F & \cdots & 0_F\\ \vdots\cdots & 1_F & \cdots\\ 0_F & \underset{j}{\vdots} & 0_F\end{pmatrix}$ אזי $\left\{E_{ij} \;\middle|\; \begin{matrix}1 \le i \le m\\ 1 \le j \le n\end{matrix}\right\}$ היא בסיס של $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. אותה הוכחה כמו של $\mathbb{F}^n$ לכן $\dim M_{m\times n}(\mathbb{F}) = m \times n$.

6. ב- $M_{2\times 3}(\mathbb{F})$,

$$E_{11} = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right), E_{12} = \left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right), E_{13} = \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right), E_{21} = \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right), E_{22} = \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right), E_{23} = \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$$

.

תרגילים

1. Q : $V = \mathbb{R}^2$. האם $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right)$ בסיס ב- $\mathbb{R}^2$?

A : בת"ל: ברור כי v_1, v_2 אינם כפולה זה זה של זה בסקלר.

פורשת: יהיו $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. נחפש $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ שעבורם $\left(\begin{smallmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta\end{smallmatrix}\right) = \alpha\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right) + \beta\left(\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$. ולכן $(*)\left\{\begin{smallmatrix}\alpha+3\beta=x\\2\alpha+3\beta=y\end{smallmatrix}\right.$.

$$\left(\begin{array}{cc:c}1&3&x\\2&3&y\end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc:c}1&3&x\\0&-3&y-2x\end{array}\right)$$

⇐ $\beta = -\frac{y-2x}{3}$, $\alpha = x - 3\beta x + (y-2x) = y - x$ לכן v_1, v_2 פורשים ולכן הם בסיס.

.2 Q: $W = \left\{ p \in \mathbb{R}_2[x] \;\middle|\; p(1) = p(0) \right\}$. קבעו האם W מ"ו ואם כן מצאו את $\dim W$.

A:

$$W = \left\{ a + bx + cx^2 \;\middle|\; a + b + c = a \right\} = \left\{ a + bx + cx^2 \;\middle|\; b + c = 0 \right\} = \left\{ a + bx - bx^2 \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \cdot 1 + b(x - x^2) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = sp\left\{1, x - x^2\right\}$$

לכן W מ"ו ו־ $\left\{1, x - x^2\right\}$ פורשת את W. נשים לב כי $1, x - x^2$ בת"ל (ברור) ולכן הם בסיס, ולכן $\dim W = 2$.

$\mathbb{IX}$ | ת(י)שע כבר!

טענה 9.5 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A = \left\{v_1, ..., v_k\right\} \subseteq V$. נניח כי $0_V \in A$ אזי A ת"ל.

הוכחה: נניח בשלילה ש־ A בת"ל. בה"כ $0_V = v_1$ (אחרת נחליף את הסדר של $v_1, ..., v_k$) לכן $\left\{0_V\right\} = \left\{v_1\right\}$ בת"ל סתירה. ■

הוכח/הפרך $(1, 2, 5, 1) \in sp\left\{(0,1,0,0), (1,0,1,4), (1,0,0,2)\right\}$.

פתרון לא! נחפש $a, b, c \in \mathbb{R}$ שעבורם $(1, 2, 5, 1) = a(0,1,0,0) + b(1,0,1,4) + c(1,0,0,2) = (b + c, a, b, 4b + 2c)$ ולכן $a = 2, b = 5, c = -4$ אבל $4b + 2c = 1$ ולכן $20 - 8 = 1$ ולכן אין פתרון.

למה 9.6 (למת ההחלפה) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תהי $\left\{w_1, ..., w_m\right\} \subseteq V$ קבוצה פורשת, ותהי $\left\{u_1, ..., u_k\right\} \subseteq V$ קבוצה בת"ל. אזי $k \leq m$. (כלומר גודלה של כל קבוצה בת"ל $\leq$ גודלה של כל קבוצה פורשת).

הוכחה: נניח בשלילה ש־ $k > m$. ראשית, מהיות $w_1, ..., w_m$ פורשת $u_1 \in sp\left\{w_1, ..., w_m\right\}$ ולכן קיימים $\alpha_{11}, ..., \alpha_{1m} \in \mathbb{F}$ כך ש־ $u_1 = \alpha_{11}w_1 + ... + \alpha_{1m}w_m$. נשים לב שלפחות אחד מהמקדמים $\alpha_{11}, ..., \alpha_{1m}$ איננו 0_F, אחרת, $u_1 = 0_v$ בסתירה לכך ש־ $u_1, ..., u_k$ בת"ל. נוכל להניח בה"כ כי $\alpha_{11} \neq 0_F$ (אחרת נשנה את סדר האינדקסים ב־ $w_1, ..., w_m$). נעביר אגפים ונקבל

$$w_1 = \alpha_{11}^{-1}u_1 - \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}w_2 - ... - \alpha_{11}^{-1}\alpha_{1m}w_m$$

ולכן $w_1 \in sp\left\{u_1, w_2, ...w_m\right\}$ ולכן ממשפט פופיסמו,

$$V = sp\left\{u_1, w_1, ..., w_m\right\} = sp\left\{u_1, w_2, ..., w_m\right\}$$

לכן $\left\{u_1, w_2, ..., w_m\right\}$ פורשת. לכן, $u_2 \in sp\left\{u_1, w_2, ..., w_m\right\}$ ולכן קיימים $\alpha_{21}, ..., \alpha_{2m} \in \mathbb{F}$ שעבורם

$$u_2 = \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}w_2 + ... + \alpha_{2m}w_m$$

נשים לב שלפחות אחד מ- $\alpha_{22},...,\alpha_{2m}$ שונה מ- 0_F, אחרת, $u_2 = \alpha_{21}u_1$ ולכן $u_2 \in sp\left\{u_1\right\}$ ולכן $\left\{u_1, u_2\right\}$ ת"ל ולכן $\left\{u_1,...,u_k\right\}$ ת"ל (כי קבוצה המכילה ת"ל היא ת"ל) בסתירה לנתון. בה"כ נוכל להניח כי $\alpha_{22} \neq 0_F$ (אחרת נחליף את שמות האינדקסים מבלי לשנות את האינדקס של w_1) לכן

$$w_2 = \alpha_{22}^{-1}u_2 - \alpha_{22}^{-1}\alpha_{21}u_1 - \alpha_{22}^{-1}\alpha_{23}w_3 - ... - \alpha_{22}^{-1}\alpha_{2m}w_m$$

ולכן $w_2 \in sp\left\{u_1, u_2, w_3, ..., w_m\right\}$ ולכן

$$V = sp\left\{u_1, u_2, w_2, w_3, ...w_m\right\} = sp\left\{u_1, u_2, w_3, ..., w_m\right\}$$

מפופיסימו. נחזור על התהליך. בצד ה-m-י, $\left\{u_1,...,u_m\right\}$ קבוצה פורשת ולכן $w_{m+1} \in sp\left\{u_1,...,u_m\right\}$. לכן קיימים $\beta_1,...\beta_m \in \mathbb{F}$ כך ש- $u_{m+1} = \beta_1u_1 + ... + \beta_mu_m$ ולכן $\beta_1u_1 + ... + \beta_mu_m - u_{m+1} = 0_V$ ולכן $\left\{u_1,...,u_{m+1}\right\}$ ת"ל סתירה (כי $\left\{u_1,...,u_k\right\}$ בת"ל ולכן $\left\{u_1,...,u_{m+1}\right\}$ בת"ל) . ■

מסקנה 9.7 יהיו $\left\{w_1,...,w_m\right\}$ ו- $\left\{u_1,...,u_k\right\}$ בסיסים של V אזי $k = m$.

הוכחה: $\left\{w_1,...,w_m\right\}$ פורשת ובת"ל, $\left\{u_1,...,u_k\right\}$ פורשת ובת"ל ולכן $k \leq m$ וגם $m \geq k$ לכן $m = k$. ■

מסקנה 9.8 יהי V מ"ו ונניח כי קיים ב- V בסיס. אזי $\dim V$ מוגדר היטב.

מסקנה 9.9 $\dim \mathbb{F}^n = n$, $\forall n$ (כי ראינו ש- $\left\{e_1,...,e_n\right\}$ בסיס של $\mathbb{F}^n$).

מסקנה 9.10 יהי V מ"ו ממימד n. אזי כל $n+1$ וקטורים ב- V הם ת"ל.

הוכחה: מכך ש- $\dim V = n$, קיים ב- V בסיס $A = \left\{v_1,...,v_n\right\}$. נניח בשלילה שקיימים $w_1,...,w_{n+1} \in V$ שהם בת"ל. קיבלנו קבוצה בת"ל גדולה ממש מקבוצה פורשת, בסתירה ללמת ההחלפה. ■

מסקנה 9.11 יהי V מ"ו ממימד n. אזי כל $n-1$ וקטורים ב- V הם לא פורשים.

מסקנה 9.12 יהי V מ"ו ממימד n. תהי $V \supseteq \left\{v_1,...,v_n\right\} = A$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) A בסיס של V.

(ii) A פורשת את V.

(iii) A בת"ל.

הוכחה: $(i) \Leftarrow (ii)$ (ברור).

$(ii) \Leftarrow (iii)$: נניח בשלילה ש- A ת"ל. אזי קיימים $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n = 0_V$ וכך ש- $\begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

בה"כ $\alpha_n \neq 0_F$ (אחרת נחליף את סדר האינדקסים) לכן

$$\alpha_nv_n = -\alpha_1v_1 - ... - \alpha_{n-1}v_{n-1}$$

$$v_n = -\alpha_n^{-1}\alpha_1 v_1 - ... - \alpha_n^{-1}\alpha_{n-1}v_{n-1}$$

ולכן $v_n \in sp\left\{v_1, ..., v_{n-1}\right\}$ ולכן $V = sp\left\{v_1, ..., v_n\right\} = sp\left\{v_1, ..., v_{n-1}\right\}$ מפופסימו לכן $\left\{v_1, ..., v_{n-1}\right\}$ פורשת, בסתירה למסקנה הקודמת.

$(i) \Leftarrow (iii)$ נניח ש- A בת"ל ונניח בשלילה ש- A לא פורשת. אזי קיים $v_{n+1} \in V$ כך ש- $v_{n+1} \notin \left\{v_1, ..., v_n\right\}$ נביט בקבוצה $\left\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\right\}$. נוכיח שהיא בת"ל ובכך נקבל סתירה למסקנה הקודמת 2×. יהיו $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{n+1}v_{n+1} = 0_V$ ונוכיח ש- $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix}$. ראשית $\alpha_{n+1} = 0_F$, אחרת,

$$v_{n+1} = -\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_1 v_1 - ... - \alpha_n^{-1}\alpha_n v_n$$

ולכן $v_{n+1} \in sp\left\{v_1, ..., v_n\right\}$ בסתירה להנחה. לכן $\alpha_{n+1} = 0_F$ ולכן $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V$ ומהיות $v_1, ..., v_n$ בת"ל, גם $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix}$. ■

דוגמות

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ת"ל ב- $\mathbb{R}^3$ (4 וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ ת"ל)
2. כל 5 וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ הם ת"ל.
3. $1, x^2+1, x^3+x+1$ בת"ל ב- $\mathbb{R}[x]$ (כי כל פולינום הוא במעלה גדולה מזו של קודמיו ולכן הוא לא יכול להיות ק"ל שלהם).
4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בסיס של $\mathbb{R}^4$. (כי כל וקטור לא מתאפס במקום שקודמיו כן ולכן הוא לא ק"ל ולכן הוא הם בת"ל ולכן מהמסקנות למעלה, הוא גם בסיס כי $k = \dim \mathbb{R}^4$ | הוכחה בשיעור הבא).

$\mathbb{X}$ | עשרת הדבורות

משפט 9.13 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $u_1, ..., u_k \in V$, ונניח כי $u_1 \neq 0_V$ אזי $u_1, ..., u_k$ הם ת"ל אם"ם קיים וקטור שהוא ק"ל של קודמיו, כלומר, אם"ם קיים $2 \leq j \leq k$ כך ש- $u_j \in sp\left\{u_1, ..., u_{j-1}\right\}$.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: נניח שקיים $2 \leq j \leq n$ כך ש- $u_j \in sp\left\{u_1, ..., u_{j-1}\right\}$. נוכיח כי $u_1, ..., u_k$ ת"ל: מהיות $u_j \in sp\left\{u_1, ..., u_{j-1}\right\}$ קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_{j-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $u_j = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_{j-1}u_{j-1}$ ולכן

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_{j-1}u_{j-1} - u_j + 0_F u_{j+1} + ... + 0_F u_k = 0_V$$

ולכן $u_1, ..., u_k$ ת"ל $(\alpha_j = -1_F \neq 0_F)$.

$\underline{\Leftarrow}$: נניח ש- $u_1, ..., u_k$ ת"ל. לכן קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ שעבורם $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k = 0_V$ ובנוסף $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix}$. נבחר $1 \leq j \leq k$ האינדקס המקסימלי שעבורו $\alpha_j \neq 0_F$ (קיים כזה כי קבוצת האינדקסים סופית) לכן $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_j u_j = 0_V$. נשים לב כי $1 < j$, אחרת נקבל ש- $\alpha_1 u_1 = 0_V$ ולכן $u_1 = 0_V$ בסתירה להנחה). לכן $u_j = -\alpha_j^{-1}\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_j^{-1}\alpha_{j-1}u_{j-1}$. ■

דוגמה $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ת"ל (כי כל $\dim V + 1$ וקטורים הם ת"ל). לכן קיים וקטור שהוא ק"ל של קודמיו. ברור ש- v_2, v_3 לא תלויים בקדמיהם ולכן $v_4 \in sp\left\{v_1, v_2, v_3\right\}$. $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{-8}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{0}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. עבור הסדר v_1, v_2, v_4, v_3, אזי v_4 ק"ל של קדמיו.

10 בת"ל מקסימלית פורשת מינמלית

הגדרה 10.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$ קבוצה סופית. A תקרא:

(i) בת"ל מקסימלית אם A בת"ל ובנוסף $\forall B \subseteq V$ סופית שעבורה $A \subseteq B$, כך ש- B בת"ל, מתקיים $A = B$.

(ii) פורשת מינימלית אם A פורשת ובנוסף $\forall B \subseteq A$ כך ש- B פורשת מתקיים $A = B$.

משפט 10.2 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A = \left\{v_1, ..., v_n\right\} \subseteq V$ אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) A בסיס של V.

(ii) A בת"ל מקסימלית.

(iii) A פורשת מינימלית.

הוכחה: $(ii) \Leftarrow (i)$ מהיות A בסיס, A בת"ל. נניח בשלילה ש- A לא בת"ל מקסימלית. לכן קיימת $B \subseteq V$ סופית כך ש- $A \subseteq B$ וכך ש- $B \neq A$. לכן קיים $v \in B$ כך ש- $v \notin A$. לכן $\left\{v_1, ..., v_n, v\right\} \subseteq B$ ומהיות B בת"ל, $\left\{v_1, ..., v_n, v\right\}$ בת"ל ולכן v בת"ל בקודמיו ולכן $V = sp\left\{v_1, ..., v_n\right\}$ $v \notin$ סתירה!

$(iii) \Leftarrow (ii)$ נניח ש- A בת"ל מקסימלית. ראשית, נוכיח כי A פורשת. נניח בשלילה ש- A לא פורשת. לכן קיים $v \in V$ כך ש- $v \notin sp\left\{v_1, ..., v_n\right\}$. לכן הקבוצה $B = \left\{v_1, ..., v_n, v\right\}$ בת"ל (כי כל וקטור ב- V לא ק"ל של קודמיו ו- $v_1 \neq 0_V$ כי A בת"ל) בסתירה לכך ש- A בת"ל מקסימלית. עתה נוכיח ש- A פורשת מינימלית: נניח בשלילה ש- A לא מינימלית. אזי קיימת $A \subseteq B$ כך ש- B פורשת וכך ש- $B \neq A$. קיבלנו קבוצה פורשת (B) שגודלה קטן מקבוצה בת"ל A סתירה.

$(i) \Leftarrow (iii)$ נניח ש- A פורשת מינימלית ונוכיח ש- A בסיס. נניח בשלילה ש- A ת"ל. ראשית , $v_1 \neq 0_V$, אחרת, $sp\left\{v_2, ..., v_n\right\} = sp\left\{v_1, ..., v_n\right\}$ בסתירה למינימליות A. לכן קיים $2 \leq j \leq n$ כך ש- $v_j \in sp\left\{v_1, ..., v_{j-1}\right\}$ ולכן $v_j \in sp\left\{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n\right\}$ ולכן ממשפט פופיסימו $sp\left\{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n\right\} = sp\left\{v_1, ..., v_n\right\}$. ■

דוגמות

1. $A = \left\{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$ (כי הם שני וקטורים בת"ל ב- $\mathbb{R}^2$) $\left\{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}, \binom{1}{1}\right\}$ ת"ל כי A בת"ל מקסימלית. $\left\{\binom{1}{2}\right\}$ לא פורשת כי A פורשת מינימלית.

2. $A=\left\{\binom{1}{2},\binom{0}{1},\binom{1}{1}\right\}$. $\mathbb{R}^2_{\text{בסיס}} = sp\left\{\binom{0}{1},\binom{1}{1}\right\} \subseteq spA$. לכן A פורשת. A מכילה פורשת מינימלית $B=\left\{\binom{0}{1},\binom{1}{1}\right\}$
לכן A מכילה בסיס.

11 מסקנות לבסיסים

מסקנה 11.1 יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. אזי קיים בסיס ב- V.

הוכחה: מהיות V נוצר סופית, קיימת קבוצה $A=\left\{v_1,...,v_m\right\}\subseteq V$ כך ש- A פורשת. מהיות A פורשת, קיימת $B\subseteq A$ שהיא פורשת וגם מינימלית ולכן קיים בסיס ל- V. ■

מסקנה 11.2 יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. תהי $A=\left\{v_1,...,v_m\right\}$ פורשת. אזי A מכילה בסיס.

מסקנה 11.3 יהי V מ"ו נוצר סופית. תהי $A=\left\{u_1,...,u_k\right\}\subseteq V$ בת"ל. אזי A ניתנת להרחבה לבסיס של V, כלומר, קיימת קבוצה סופית $B\subseteq V$ סופית כך ש- $A\subseteq B$ וכך ש- B בסיס של V.

הוכחה: ראשית, מהיות V מ"ו נוצר סופית, קיים בסיס $\left\{v_1,...,v_n\right\}$ של V ולכן $\dim V=n$. לכן $k\le n$. אם $k=n$ אזי A בסיס (כי ראינו שכל n וקטורים שהם בת"ל ב- V הם בסיס). אחרת, $k<n$ ולכן $A=\left\{u_1,...,u_k\right\}$ לא בסיס (כי ראינו שכל שני בסיסים הם בעלי אותו מספר של איברים). לכן A לא בת"ל מקסימלית, ולכן קיימת $B\subseteq V$ סופית כך ש- $A\subseteq B$ ובנוסף B בת"ל. נסמן $B=\left\{u_1,...,u_k,u_{k+1},...,u_m\right\}$. נשים לב כי $m\le n$. (כי גודל כל קבוצה בת"ל $\le n=\dim V$). נוכל להניח כי m הוא המספר המקסימלי שעבורו B בת"ל. לכן B בת"ל מקסימלית ולכן B בסיס. ■

ראו הדגמה של מסקנה 3

תרגיל תהי $A=\left\{1+x^2,1-x^3\right\}$, השלימו את A לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

פתרון ראשית, נשים לב ש- A בת"ל ולכן ניתן להשלים את A לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$. ראינו כבר ש- $\dim R_3[x]=4$ ו- $\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$ בסיס (סטנדרטי) של $\mathbb{R}_3[x]$. ברור ש- $1\notin spA$ (אחרת, קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$1=a(1+x^2)+b(1-x^3)=(1+b)+ax^2-bx^3$$

$\begin{cases}a+b=1\\a=0\\b=0\end{cases}$ ולכן אין פתרון. לכן $\left\{1+x^2,1-x^3,1\right\}$ בת"ל (כל וקטור לא ק"ל של קדמיו) נשים לב גם כי $x\notin\left\{1+x^2,1-x^3,1\right\}$ (ברור) ולכן $\left\{1+x^2,1-x^3,1,x\right\}$ בת"ל בגודל 4 ולכן בסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

דוגמות

1. תהי $A=\left\{1+x,2-x,x^2+x^3\right\}$, נשלים את A לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$. $1\in spA$ כי $\left\{1+x,2-x\right\}$ הוא בסיס של $\mathbb{R}_1[x]$. $x\in spA$, $x^2\notin spA$ ($x^2=a(1+x)+b(2-x)+c(x^2+x^3)$ אין פתרון. לכן $\left\{1+x,2-x,x^2+x^3,x^2\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

2. יהי

$$W=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{smallmatrix}\right)\ \middle|\ \begin{matrix}a+b=c\\d-e=f\\a=2f\end{matrix}\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b&a+b\\d&e&d-e\end{smallmatrix}\right)\ \middle|\ a=2(d-e)\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}2(d-e)&b&2(d-e)+b\\d&e&d-e\end{smallmatrix}\right)\ \middle|\ b,d,e\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{b\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)+e\left(\begin{smallmatrix}-2&0&-2\\1&1&-1\end{smallmatrix}\right)+d\left(\begin{smallmatrix}2&0&2\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}=sp\left\{\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-2&0&-2\\1&1&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2&0&2\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

$A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-2&0&-2\\1&1&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2&0&2\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ בת"ל (כי כל מרטיצה בת"ל בקודמיה) ופורשת, לכן A בסיס ו- $\dim W=3$.

$\mathbb{XI}$ | אחד ועוד אחד?

דוגמה ב- $\mathbb{R}^4$, $A=\left\{\underset{v_1}{(1,5,3,0)},\underset{v_2}{(2,9,1,1)}\right\}$. $E=\left\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right\}$. לא ייתכן כי $E\subseteq spA$ (אחרת $\mathbb{R}^4=spE\subseteq spA$). נבדוק האם $e_1\in spA$. נחפש $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$(1,0,0,0)=e_1=\alpha v_1+\beta v_2=(\alpha+2\beta,5\alpha+9\beta,3\alpha+\beta,\beta)$$

ולכך אין פתרון. לכן $e_1\notin spA$ ולכן $B=\left\{v_1,v_2,e_1\right\}$ בת"ל. נבדוק האם $e_2\in spB$. נחפש α,β,γ כך ש-

$$(0,1,0,0)=e_2=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma e_1=(\alpha+2\beta+\gamma,5\alpha+9\beta,3\alpha+\beta,\beta)$$

אין פתרון. לכן $C=\left\{v_1,v_2,e_1,e_2\right\}$ בת"ל (כי כל וקטור בת"ל בקודמיו). C בסיס של $\mathbb{R}^4$ (כי כל קבוצה בת"ל בגודל 4 היא בסיס של $\mathbb{R}^4$)

משפט 11.4 (מימד של ת"מ) יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$ ונסמן $\dim V=n$. יהי $W\subseteq V$ ת"מ של V. אזי W נ"ס ו- $\dim V\leq n$. יתר על כך, $\dim W=n$ אם"ם $W=V$.

הוכחה: ראשית נוכיח כי W נ"ס. נניח בשלילה כי W לא נ"ס. ראשית $W\neq\left\{0_V\right\}$ כי $\left\{0_V\right\}$ נ"ס ולכן קיים $W\ni w_1\neq 0_V$. לכן $\left\{w_1\right\}$ בת"ל. מהיות W לא נ"ס, אזי $\left\{w_1\right\}$ לא פורשת את W ולכן קיים $w_2\in W$ כך ש- $w_2\notin sp\left\{w_1\right\}$. לכן $\left\{w_1,w_2\right\}$ בת"ל (כי $w_1\neq 0_V$ ו- $w_2\notin sp\left\{w_1\right\}$). נחזור על התהליך. בשלב ה-n-י נביט ב- $\left\{w_1,...,,w_n\right\}$. מהיות w לא נ"ס $\left\{w_1,...,,w_n\right\}$ לא פורשת את w ולכן קיים וקטור $w_{n+1}\in W$ כך ש- $w_{n+1}\notin sp\left\{w_1,...,w_n\right\}$. לכן $\left\{w_1,...,w_{n+1}\right\}$ בת"ל (כי כל וקטור בת"ל בקודמיו). מצאנו קבוצה של $n+1$ וקטורים הנמצאים ב- V שהם בת"ל בסתירה להנחה ש- $\dim V=n$.

לכן W נ"ס. נסמן $m = \dim V$. עתה נוכיח כי $m \leq n$. נניח בשלילה כי $m > n$. לכן קיים בסיס $\left\{w_1, ..., w_m\right\}$ של W. לכן $\left\{w_1, ..., w_n\right\}$ בת"ל. מצאנו קבוצה של $m > n$ וקטורים הנמצאים ב־ V שהם בת"ל, בסתירה להנחה ש־ $\dim V = n$.

$\underline{\Rightarrow}$: אם $W = V$ אז ברור ש־ $\dim V = \dim W$.

$\underline{\Leftarrow}$: נניח ש־ $m = \dim W = \dim V = n$ ונוכיח כי $W = V$. יהי $\left\{w_1, ..., w_n\right\}$ בסיס של W. אזי $\left\{w_1, ..., w_n\right\}$ ב־ V ולכן $\left\{w_1, ..., w_n\right\}$ בסיס של V ולכן $V = sp\left\{w_1, ..., w_n\right\} = W$. ■

מסקנה 11.5 $V = \mathbb{R}^2$, $W \subseteq V$ ת"מ: $0 \leq \dim V \leq 2$.

(i) $\dim V = 2$ אזי $W = \mathbb{R}^2$.

(ii) $\dim W = 0$ אזי $W = \left\{(0,0)\right\}$.

(iii) $\dim W = 1$ ולכן קיים $\mathbb{R}^2 \ni v = (a,b)$ כך ש־ $v \neq (0,0)$ ו־ $W = sp\left\{v\right\}$ ולכן

$$W = \left\{\ t(a,b) \ \middle|\ t \in \mathbb{R}\ \right\} = \left\{(ta, tb)\right\}$$

הגדרה 11.6 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ של V. נגדיר את <u>הסכום</u> של U, W להיות הקבוצה$= W + U$ $\left\{\ w + u \ \middle|\ w \in W, u \in U\ \right\}$. נאמר שהסכום הוא <u>סכום ישר</u> אם $W \cap U = \left\{0_V\right\}$ ונסמן $W \oplus U = W + U$ במקרה זה.

טענה 11.7 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ של V. אזי $W + U$ ת"מ של V.

הוכחה: $(i)^{(*)}$ יהיו $v_1, v_2 \in W + U$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. מהיות $u_1, u_2 \in W + U$ קיימים $w_1, w_2 \in W$ ו־ $u_1, u_2 \in U$ כך ש־ $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$ ולכן

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(u_1 + w_1) + \beta(u_2 + w_2) = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2) \in U + W$$

$(ii)^{(*)}$ $0_V \in W, U$ ולכן $0_V = 0_V + 0_V \in W + U$. ■

דוגמה ב־ $\mathbb{R}^2$, $W = sp\left\{(1,0)\right\}$, $U = sp\left\{(0,1)\right\}$,

$$U + W = \left\{\ (t,0) + (0,s) \ \middle|\ t, s \in \mathbb{R}\ \right\} = \left\{\ (t,s) \ \middle|\ t, s \in \mathbb{R}\ \right\} = \mathbb{R}^2$$

משפט 11.8 (משפט המימדים ה־ I) יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ של V. אזי $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

הוכחה: ראשית ראינו כי $U+W$ ו־ $U\cap W$ ת"מ של V והם נ"ס (כי V נ"ס). נסמן $\dim(U\cap W)=r$, $\dim U=l$ ו־ $\dim W=k$. נרצה להוכיח כי $\dim(U+W)=l+k-r$. יהי $A=\left\{u_1,...,u_r\right\}$ בסיס של $U\cap W$ (ראינו שלכל מ"ו נ"ס קיים בסיס) $(*)$. $(*)$ אם $U\cap W=\left\{0_V\right\}$ אזי $A=\varnothing$. מהיות A בת"ל (כי A בסיס) ניתן להשלים את A לבסיסים של U,W בהתאמה, כלומר, קיימים $w_{r+1},...,w_k\in W$ ו־ $u_{r+1},...,u_l\in U$ כך ש־ $B=\left\{v_1,...,v_r,w_{r+1},...,w_k\right\}$ ו־ $C=\left\{v_1,...,v_r,u_{r+1},...,u_k\right\}$ הם בסיסים של U,W בהתאמה. נביט ב־ $B\cup C=\left\{v_1,...,v_r,w_{r+1},...,w_k,u_{r+1},...,u_l\right\}$. נוכיח כי $B\cup C$ בסיס של $U+W$ ומכך ינבע כי $\dim(U+W)=r+(k-r)+(l-r)=k+l-r$ ובכך נסיים.

(i) <u>$B\cup C$ פורשת</u>: יהי $v\in U+W$. אזי קיימים $v=u+w$. מהיות C בסיס של U, קיימים $\alpha_1,...,\alpha_l\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$u=\alpha_1v_1+...+\alpha_rv_r+\alpha_{r+1}u_{r+1}+...+\alpha_lu_l$$

מהיות B בסיס של W, קיימים $\beta_1,...,\beta_k\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$w=\beta_1v_1+...+\beta_rv_r+\beta_{r+1}w_{r+1}+...+\beta_kw_k$$

$$v=u+w=(\alpha_1+\beta_1)v_1+...+(\alpha_r+\beta_r)v_r+\alpha_{r+1}u_{r+1}+...+\alpha_lu_l+\beta_{r+1}w_{r+1}+...+\beta_kw_k$$

ולכן $U+W\subseteq sp(B\cup C)\subseteq U+W$ ולכן $sp(B\cup C)=U+W$, כלומר $B\cup C$ פורשת.

(ii) <u>$B\cup C$ בת"ל</u>: יהיו $\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_{r+1},...,\beta_l,\gamma_{r+1},...,\gamma_k$ ב־ $\mathbb{F}$ ונניח כי

$$\alpha_1v_1+...+\alpha_rv_r+\beta_{r+1}u_{r+1}+...+\beta_lu_l+\gamma_{r+1}w_{r+1}+...+\alpha_kw_k=0_V$$

ונוכיח שכל המקדמים שווים ל־ 0_F. נשים לב כי

$$U=spC\ni\alpha_1v_1+...+\alpha_rv_r+\beta_{r+1}u_{r+1}+...+\beta_lu_l=-\gamma_{r+1}w_{r+1}-...-\gamma_kw_k\in spB=W$$

ולכן אגף שמאל שייך ל־ U ואילו אגף ימין שייך ל־ W ולכן שני האגפים נמצאים ב־ U,W ולכן הם ב־ $U\cap W$. בפרט, אגף ימין נמצא ב־ $U\cap W$ ולכן קיימים $\delta_1,...,\delta_l\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$\alpha_1v_1+...+\alpha_rv_r+\beta_{r+1}u_{r+1}+...+\beta_lu_l=\delta v_1+...+\delta_rv_r$$

$$(\alpha_1-\delta_1)v_1+...+(\alpha_r-\delta_r)v_r+\beta_{r+1}u_{r+1}+...+\beta_lu_l=0_V$$

מהיות $v_1,...,v_r,u_{r+1},...,u_l$ בת"ל (כי הם בסיס), אזי $\beta_{r+1}=....=\beta_l=0_F$ (ובנוסף $\begin{matrix}\alpha_1=\delta_1\\ \vdots\\ \alpha_r=\delta_r\end{matrix}$) לכן

$$\alpha_1v_1+...+\alpha_rv_r+\gamma_{r+1}w_{r+1}+...+\gamma_kw_k=0_V$$

מהיות $v_1,...,v_r,w_{r+1},...,w_k$ בת"ל אזי $\alpha_1=...=\alpha_r=0_F$, $\gamma_{r+1}=...=\gamma_k=0_F$. ■

מסקנה 11.9 אם B,C קבוצות פורשות את U,W בהתאמה, אזי $B\cup C$ פורשת את $W+U$.

הוכחה: ראו הוכחה של משפט המימדים ה־ I. ■

XII | 12 בנות היו ליוסף

תרגיל נגדיר שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}^4$, $W=\left\{\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{c}3w+x=0\\w+x+y+z=0\end{array}\right\}$, $U=\left\{\underset{u_1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}},\underset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}},\underset{u_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}\right\}$.

א. הוכיח כי W,U ת"מ של $\mathbb{R}^4$ ומצאו להם בסיסים.

ב. מצאו את $\dim(W\cap U)$ וגם בסיס ל־ $W+U$.

ג. קבעו האם $U\subseteq W$.

ד. קבעו האם $W\subseteq U$.

ה. מצאו בסיס ל־ $U\cap W$.

פתרון א. ראשית ברור ש־ $U\subseteq\mathbb{R}^4$ ת"מ (כי $span$ הוא תמיד מ"ו).

$$W=\left\{\begin{pmatrix}w\\-3w\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\ w-3w+y+z=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}w\\-3w\\y\\2w-y\end{pmatrix}\middle|\ w,y\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{w\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\ w,y\in\mathbb{R}\right\}=sp\left\{\underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\2\end{pmatrix}},\underset{w_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}\right\}$$

ולכן W מ"ו (ת"מ כי הוא $span$).

בסיס ל־ W: $\left\{w_1,w_2\right\}$ פורשים את W (ברור) ובת"ל (ברור כי אף אחד מהם אינו כפולה של השני בסקלר). לכן $\left\{w_1,w_2\right\}$ בסיס של W.

בסיס ל־ U: נשים לב ש־ u_2 לא כפולה בסקלר של u_1 (ברור). נבדוק האם $u_3\in sp\left\{u_1,u_2\right\}$. נחפש $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש־

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=u_3=\alpha u_1+\beta u_2=\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$\beta=-\frac{1}{2}$ וגם $\beta=1$ אין פתרון. לכן $u_3\notin sp\left\{u_1,u_2\right\}$ ולכן $\left\{u_1,u_2,u_3\right\}$ בת"ל (כי כל וקטור אינו תלוי בקודמיו ו־ $u_1\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$) ולכן $\left\{u_1,u_2,u_3\right\}$ הוא בסיס של U.

ב. ראינו כי $\left\{w_1,w_2\right\}$ בסיס של W ו־ $\left\{u_1,u_2,u_3\right\}$ לכן, מהמסקנה, הקבוצה $\left\{w_1,w_2,u_1,u_2,u_3\right\}$ פורשת את $W+U$ (נשים לב שהקבוצה הזו אינה בסיס כי יש בה חמישה איברים ומדובר בסופו של דבר ב־ $\mathbb{R}^4$). נחפש α,β שעבורם $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=u_1=\alpha w_1+\beta w_2=\alpha\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\-3\alpha\\\beta\\2\alpha-\beta\end{pmatrix}$, $\alpha=0$, $\beta=0$, $0-1=0$ אין פתרון. נבדוק האם $u_2\in sp\left\{w_1,w_2,u_1\right\}$. נחפש $a,b,c\in\mathbb{R}$ שעבורם $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=u_2=aw_1+bw_2+cu_1=a\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ אין פתרון כי יוצא ש־ $a=1$ וגם $-3a=-2$ אין פתרון. לכן $\left\{w_1,w_2,u_1,u_2\right\}$ בת"ל ב־ $\mathbb{R}^4$ ולכן הם בסיס של $\mathbb{R}^4$ לכן

$$\mathbb{R}^4\supseteq sp\left\{w_1,w_2,u_1,u_2,u_3\right\}=W+U\supseteq sp\left\{w_1,w_2,u_1,u_2\right\}=\mathbb{R}^4$$

ולכן $W+U=\mathbb{R}^4$ ולכן $\left\{w_1,w_2,u_1,u_2\right\}$ בסיס של $W+U$ (אבל גם $\left\{e_1,e_2,e_3,e_4\right\}$) לכן ממשפט המימדים ה־ I,

$$4=\dim(W+U)=\underset{2}{\dim}W+\underset{3}{\dim}U-\dim(W\cap U)$$

ולכן $\dim(U\cap W)=1$.

ג. ראינו כי $u_1\notin\left\{w_1,w_2\right\}$ ולכן $U\not\subseteq W$.

ד. נניח בשלילה כי $U\subseteq W$ לכן $W\cap U=W$ אבל $\dim W\neq\dim(W\cap U)$.

ה. נחפש $v\in W$ כך ש־ $v\in U$. נחפש $\alpha,\beta,\gamma,w,y\in\mathbb{R}$ כך ש־ נסמן

$$v=\begin{pmatrix}w\\-3w\\y\\2w-y\end{pmatrix}=\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta+\gamma\\-2\beta+\gamma\\\alpha-2\beta+\gamma\\-2\beta+\gamma\end{pmatrix}$$

לכן $\begin{matrix}-3=2w-y\\y=5w\end{matrix}\begin{matrix}\searrow\\ \\ \nearrow\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\beta+\gamma=w\\-2\beta+\gamma=-3w\\\alpha-2\beta+\gamma=y\\-2\beta+\gamma=2w-y\end{matrix}\right.(*)$, נציב ולכן $\left\{\begin{matrix}\beta+\gamma=w\\-2\beta+\gamma=-3w\\\alpha-2\beta+\gamma=5w\\-2\beta+\gamma=-3w\end{matrix}\right.(*)$ ונקצר את המערכת $\left\{\begin{matrix}\beta+\gamma-w=0\\-2\beta+\gamma+3w=0\\\alpha-2\beta+\gamma-5w=0\end{matrix}\right.(*)$,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\0&-2&1&3\\1&-2&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to-\frac{1}{2}R_2]{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&-2&1&-5\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&-5\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נבחר $w=1$ (נוכל למצוא את α,β,γ בהתאם) ונקבל $v=\begin{pmatrix}w\\-3w\\y\\2w-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\-3\end{pmatrix}$ לכן $v\in U\cap W$ ולכן $U\cap W\supseteq sp\left\{v\right\}$

ומשוויון מימדים $U\cap W=sp\left\{v\right\}$ ולכן $\left\{v\right\}$ בסיס של $U\cap W$ (כי היא פורשת).

12 שובן של המטריצות

הגדרה 12.1 תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ותהי $B\in M_{n\times r}(\mathbb{F})$. נגדיר את $A\cdot B$ להיות מטריצה מסדר $m\times r$ שרכיביה מוגדרים ע"י $[A\cdot B]_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}[A]_{ik}\cdot[B]_{kj}$.

דוגמות

1. $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\3&-1&4\\0&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&7\\9&3&36\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}\left[\overset{\begin{pmatrix}0&1&2\\3&-1&4\\0&1&5\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0&2&7\\9&3&36\end{pmatrix}}\right]$ (לזכור לתקן פה את הפרמוט).
2. $\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5\\20&13\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=$ לא מוגדר.
5. $\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&6\\1&2&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&20\\5&8\end{pmatrix}$.

הערה 12.2 כפל מטריצות אינו קומוטטיבי.

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times r}{B}=\underset{m\times r}{AB}.$$

דוגמה $\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

מסקנה 12.3 מערכת משוואות $\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$ $(*)$ נתנת לכתיבה כ־ $A\cdot\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ כאשר $\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ו־ $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

מחשבה $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אינן שדה כי לא ניתן להפכיל $A\cdot B$ כאשר $A,B\in M_{m\times n}$ אלא אם כן $m=n$. במרחב $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אז יש סגירות לכפל, אבל אין קומוטטיביות לכפל ולכן זה לא שדה. אבל זה לא אומר שלא ניתן להגדיר איבר הופכי. במקרה ובו ישנו הפכי, $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ פתרון: $\overrightarrow{x}=A^{-1}\cdot\overrightarrow{b}$.

הגדרה 12.4 מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תקרא <u>ריבועית</u> אם $m=n$.

הגדרה 12.5 נסמן $M_n(\mathbb{F})=M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

XIII | לא! רק לא המספר הזה!

הגדרה 12.6 <u>מטריצת היחידה</u> ב־ $M_n(\mathbb{F})$ מוגדרת להיות $I_n=\begin{pmatrix} 1_F & & 0_F \\ & \ddots & \\ 0_F & & 1_F \end{pmatrix}$, כלומר I_n היא המטריצה מסדר $n\times n$ המוגדרת ע"י $[I]_{ij}=\begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}=\delta_{ij}$.

דוגמה $I_1=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

טענה 12.7 תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי:

(i) $A\cdot I_n=A$.

(ii) $I_m\cdot A=A$.

(iii) $A\cdot 0_{n\times r}=0_{m\times r}$.

(iv) $0_{r\times m}\cdot A=0_{r\times n}$.

הוכחה: (i) ראשית $A\cdot I_n$ מטריצה מסר $m\times n$ לפי הגדר הכפל, ו־ $\forall i,j$, $[A\cdot I_n]_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}[A]_{ik}[I_n]_{kj}=[A]_{ij}$ כי כל שאר האיברים מתאפסים.

(ii) ראשית, $I_m\cdot A$ מטריצה מסדר $m\times n$ לפי הגדרת הכ[ל, וכן $\forall i,j$, $[I_m\cdot A]_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}[I_m]_{ik}[A]_{kj}=[A]_{ij}$ כי כל שאר האיברים מתאפסים.

(iii) באופן דומה $A\cdot 0_{n\times r}$ מטריצה מסדר $m\times r$ ו־ $\forall i,j$, $[0_{n\times r}]_{ij}=0_F=\sum\limits_{k=1}^{n}[A]_{ik}[0_{n\times r}]_{kj}$.

(iv) באותו האופן, $[0_{r\times n}]_{ij}=0_F=\sum\limits_{k=1}^{m}[0]_{ik}[A]_{kj}=[0_{r\times m}\cdot A]_{ij}$. ■

הגדרה 12.8 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. A תקרא הפיכה אם קיימת $B \in M_n(\mathbb{F})$ שעבורה $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. במקרה זה נסמן $A^{-1} = B$.

$(*)$ מוגדר היטב מיחידות ההופכי.

משפט 12.9 (תכונות הכפל ה־ I) תהיינה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו־ $B \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$. יהי $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי $(\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B) = \alpha(A\cdot B)$.

הוכחה: ראשית נשים לב כי $(\alpha \cdot A)\cdot B, A\cdot(\alpha\cdot B), \alpha(A\cdot B)$ מוגדרות והן מטריצות מסדר $m\times r$. בנוסף $\forall ij$,

$$[(\alpha\cdot A)\cdot B] = \sum_{k=1}^{n} [(\alpha\cdot A)]_{ik}[B]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha\cdot[A]_{ik}[B]_{kj} \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[\alpha\cdot B]_{kj} = [A\cdot(\alpha\cdot B)]_{ij}$$

ולכן $(\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)$. בנוסף,

$$(*) = \alpha\cdot\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj} = \alpha\cdot[AB]_{ij} = [\alpha\cdot(A\cdot B)]_{ij}$$

ולכן $(\alpha\cdot A)\cdot B = \alpha\cdot(A\cdot B)$. ■

משפט 12.10 (תכונות הכפל ה־ II) (i) תהיינה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B, C \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$ אזי $A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.

(ii) תהיינה $A \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$, $B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי $(B+C)A = B\cdot A + C\cdot A$.

הוכחה: (i) $\forall ij$,

$$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B+C]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}([B]_{kj}+[C]_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}+[A]_{ik}[C]_{kj} = [AB]_{ij}+[AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}$$

ומכיוון שסדר המטריצות $A(B+C)$ ו־ $AB+AC$ הוא זהה (והוא $m\times r$) הרי ש־ $A(B+C) = AB+AC$. (ii) באותו האופן! ■

משפט 12.11 (תכונות הכפל ה־ III) תהיינה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$, $C \in M_{r\times s}(\mathbb{F})$. אזי $(AB)C = A(BC)$.

הוכחה: נשים לב כי $A(BC)$ ו־ $(AB)C$ הן שתי מטריצות מסדר $m\times s$. יהי $1 \le i \le m$, $1 \le j \le s$. אזי

$$[(A\cdot B)\cdot C]_{ij} = \sum_{k=1}^{r} [AB]_{ik}[C]_{kj} = \sum_{k=1}^{r} (\sum_{l=1}^{n} [A]_{il}[B]_{lk})[C]_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} [A]_{il}([B]_{lk}[C]_{kj})$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} [A]_{il}([B]_{lk}[C]_{kj}) = \sum_{l=1}^{n} [A]_{il}(\sum_{k=1}^{r} [B]_{lk}[C]_{kj}) = \sum_{l=1}^{n} [A]_{il}\cdot[BC]_{lj} = [A\cdot(BC)]_{ij}$$

ולכן $(AB)C = A(BC)$. ■

מסקנה 12.12 $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$, מתקיים:

(i) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

(ii) $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$.

הגדרה 12.13 תהיינה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. A, B יקרא מתחלפות אם $A\cdot B = B\cdot A$.

הערה 12.14 אם $AB = BA$ אזי $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ובאותו האופן $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

מסקנה 12.15 הוכחנו כי ב־ $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מתקיימת כל תכונות השדה פרט לקומוטטיביות (ואולי קיים הופכי).

דוגמות

1. $\forall A\in M_n(\mathbb{F})$, A, I_n מתחלפות וגם $A, 0_n$ מתחלפות כי $A\cdot I_n = A$, $I_n\cdot A = A$ וגם $A\cdot 0_n$, $0_n\cdot A$.
2. $\forall A\in M_n(\mathbb{F})$, $(A\pm I_n)^2 = A^2\pm 2A+I_n$, $(A+I_n)(A-I_n)=A^2-I_n$.
3. $A^3-I_n=(A-I_n)(A^2+A+I_n)$.
4. $A^2-5A+6I_n=(A-3I_n)(A-2I_n)$, $\forall A\in M_n(\mathbb{F})$.

תרגילים

1. **Q** : ב- $M_{2\times 2}$, האם $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ הפיכה?

   A : כן! נחפש $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ כך ש- $AB=BA=I_2$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\2a+c&2b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$, $\begin{cases}2a+c=0\\2b+d=1\end{cases}$. $B=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$. נבדוק:

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

2. **Q** : ב- $M_{2\times 2}$, האם $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ הפיכה?

   A : לא!

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\a+2c&b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}a+2c=1\\a+2c=0\\b+2d=0\\b+2d=1\end{cases}$ אין פתרון! לכן A לא הפיכה!

3. **Q** : האם $A=\begin{pmatrix}2&4\\-6&-12\end{pmatrix}$ הפיכה?

   A : לא! כמו קודם, נרשום

$$\begin{pmatrix}2&4\\-6&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b+4d&2b+4d\\-6a-12c&-6b-12d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}2a+4c=1 & \Rightarrow -6a-12c=-3\\2b+4d=0 & \\-6a-12c=0 & \\-6b-12d=0 & \Rightarrow \text{אין פתרון}\end{cases}$ לכן A לא הפיכה!

4. **Q** : האם $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ הפיכה?

   A : לא! $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\5g&5h&5i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ אין פתרון.

דוגמה נשים לב כי $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ולכן ב- $M_2(\mathbb{R})$ יש מחלקי אפס, ובפרט $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ לא הפיכה.

$\mathbb{XIV}$ | יצאתי לחצות את מעבר החצייה הראשון שלי!

משפט 12.16 (יחידות ההופכי) תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ונניח כי קיימות $B, C \in M_n(\mathbb{F})$ שעבורן $AB = BA = I_n$ וגם $AC = CA = I_n$ אזי $B = C$.

הוכחה: $B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$. ■

הגדרה 12.17 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. נסמן ב־ A^{-1} את המטריצה ההפוכה של A.

נגדיר גם:

(i) $A^{n+1} = A \cdot A^n$, $\forall n \geq 1$ ונגדיר $A^0 = I_n$.

(ii) $A^{-n} = (A^{-1})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

משפט 12.18 (תכונות ההופכית) (i) I_n הפיכה וההפוכית של I_n $I_n^{-1} = I_n$.

(ii) אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה. אזי גם A^{-1} הפיכה ו־ $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iii) אם $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות, אזי $A \cdot B$ הפיכה ו־ $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

הוכחה: (i) $I_n \cdot I_n = I_n$ ולכן I_n הפיכה ו־ $I_n^{-1} = I_n$.

(ii) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$ ולכן A^{-1} הפיכה ומהיחידות ההופכי $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iii) $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$ ובנוסף,

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

ולכן AB הפיכה ומיחידות ההפכי, $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. ■

מסקנה 12.19 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה ויהי $\overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$. אזי למערכת הלינארית $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ קיים פתרון יחיד והוא $\overrightarrow{x} = A^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$.

הוכחה: מהיות A הפיכה קיימת מטריצה הפוכה יחידה $A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ ולכן $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \iff (A^{-1} \cdot A)\overrightarrow{x} = A^{-1} \cdot \overrightarrow{b} \Rightarrow$. ■

מסקנה 12.20 תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, ונסמן $W = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{F}^n \mid A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \right\}$ אזי W ת"מ של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה: $(i)^{(*)}$ יהיו $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in W$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

$$A \cdot (\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y}) = A(\alpha \overrightarrow{x}) + A(\beta \overrightarrow{y}) = \alpha(A\overrightarrow{x}) + \beta(A\overrightarrow{y}) = \alpha \cdot \overrightarrow{0} + \beta \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

ולכן $\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y} \in W$.

$(ii)^{(*)}$ $A \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ ולכן $\overrightarrow{0} \in W$. ■

משפט 12.21 יהי $\mathbb{F}$ שדה אינסופי, ונביט במערכת ההומגנית $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ עבור $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. אזי בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות מתקיימות:

(i) קיים פתרון יחיד למערכת, והוא $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

(ii) יש למערכת אינסוף פתרונות.

הוכחה: נביט ב־ $W = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}^n \mid A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\right\}$. ראינו ש־ $W \subseteq \mathbb{F}^n$ ת"מ. אם $\dim W = 0$ אזי $W = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ וקיבלנו את (i). אחרת, $\dim W \geq 1$ ומכיוון ש־ $\mathbb{F}$ אינסופי, אזי W מכיל אינסוף וקטורים מהצורה $\alpha \cdot \overrightarrow{x}$ כאשר $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{x} \in W$ ו־ $\alpha \in \mathbb{F}$, ולכן (ii) מתקיים. ■

$\mathbb{XV}$ | המונה ליזה היא 15 בגימטריה

דוגמה $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

$$AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a & 3b \end{smallmatrix}\right)$$

ולכן $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, ולכן היא הפיכה.

מסקנה 12.22 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נניח שיש ב־ A שורת אפסים. אזי A לא הפיכה.

הוכחה: נניח בשלילה ש־ A הייתה הפיכה. אזי ממסקנה קודמת, $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$, קיים פתרון יחיד למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. נסמן $1 \leq i \leq n$ את אינדקס השורה שמתאפס ב־ A ונביט במערכת: $i \begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=1 \\ \vdots \\ 0x_{i1}+\ldots+0x_{in}=1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=1 \end{cases}$ ברור שלמערכת זו אין פתרון. סתירה להנחה ש־ A הפיכה. ■

הערה 12.23 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ותהי $B \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$. ראינו כי $A \cdot b$ מוגדרת והיא מטריצה מסדר $m \times r$. נסמן $B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & \ldots & \overrightarrow{c_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ כאשר $\overrightarrow{c_1}, \ldots, \overrightarrow{c_r} \in \mathbb{F}^n$ וקטורי העמודה של B. נשים לב שמהגדרת הכפל, $A \cdot B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ A\overrightarrow{c_1} & A\overrightarrow{c_2} & \ldots & A\overrightarrow{c_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$.

דוגמה $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 19 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 19 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

מסקנה 12.24 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אז A הפיכה אם"ם $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$, קיים פתרון למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: ראינו כבר ($\overrightarrow{x} = A^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$ הפתרון)

$\underline{\Rightarrow}$: קיים $\overrightarrow{c_1} \in \mathbb{F}^n$ שעבורו $A\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $1 \leq \forall i \leq 1$ קיים $\overrightarrow{c_i} \in \mathbb{F}^n$ שעבורו $A\overrightarrow{c_i} = \overrightarrow{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. נביט במטריצה $B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & \ldots & \overrightarrow{c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$. לפי ההערה הקודמת, $A \cdot B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ A\overrightarrow{c_1} & A\overrightarrow{c_2} & \ldots & A\overrightarrow{c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = I_n$ ולכן A הפיכה מימין (לפי משפט אוהד, A הפיכה ו־ $B = A^{-1}$). ■

משפט 12.25 (אוהד, $\square$) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח כי $A \cdot B = I_n$ אזי $B \cdot A = I_n$ (ובפרט, A הפיכה ו־ $B = A^{-1}$).

הגדרה 12.26 מטריצה $E \in M_n(\mathbb{F})$ תקרא אלמנטרית אם E מתקבלת מ- I_n ע"י פעולת שורה אלמנטרית אחת.

משפט 12.27 (EA, הוכחה בשיעור הבא) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש- B התקבלה מ- A ע"י פעולת שורה אלמנטרית אחת. אזי קיימת מטריצה אלמנטרית $E \in M_n(\mathbb{F})$ שעבורה $B = E \cdot A$. יתר על כן, E היא המטריצה שהתקבלה מ- I_n ע"י אותה הפעולה שביצענו על A ע"מ לקבל את B.

דוגמות

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ אלמנטרית כי אפשר לעשות $I_n \xrightarrow{R_1 \to 2R_1}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ אלמטרית כי אפשר לעשות $I_n \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ אלמטרית כי אפשר לעשות $I_n \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_1}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ לא אלמנטרית.

13 טענות בסיסיות למטריצות אלמנטריות

מסקנה 13.1 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ונניח ש- A, B שקולות שורה. אזי קיימות מטריצות אלמנטריות $E_k, ..., E_2, E_1 \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $B = E_k \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$.

הוכחה: מהיות A, B ש"ש, ניתן להגיע מ- A ל- B ע"י k פעולות שורה אלמנטריות. לפי המשפט הקודם, סיימנו. ■

מסקנה 13.2 תהי $E \in M_n(\mathbb{F})$ מטרצה אלמנטרית. אזי E הפיכה, ויתר על כן, $E^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ היא מטריצה אלמנטרית המתאימה לפעולת השורה האלמנטרית ההפוכה לזו של E.

הוכחה: ראינו כבר שכל פעולת שורה אלמנטרית היא הפיכה ושהפעולה ההפוכה גם היא אלמנטרית. לכן, $\widetilde{E} \in M_n(\mathbb{F})$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולת השורה האלמנטרית ההפוכה לזו של E, לכן, מהמשפט, $\widetilde{E} \cdot E = I_n$, $E \cdot \widetilde{E} = I_n$ ולכן E הפיכה ו- $E^{-1} = \widetilde{E}$. ■

דוגמות

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

מסקנה 13.3 תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש- A, B ש"ש. אזי A הפיכה אם"ם B הפיכה.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: נניח ש־ A הפיכה. B ש"ש ולכן ממסקנה 1, קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1,...,E_k\in M_n(\mathbb{F})$ שעבורן $B=E_k\cdot...\cdot E_2\cdot E_1\cdot A$ לכן ממסקנה 2, B היא מכפלה של הפיכות ולכן B הפיכה (מתכונות ההופכית). ו־ $B^{-1}=A^{-1}\cdot E_1^{-1}\cdot....\cdot E_k^{-1}$.

$\underline{\Rightarrow}$: ברור מסמטריה. ■

מסקנה 13.4 תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ ותהי $C\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה קנונית השקולת שורה ל־ A. אם A הפיכה אזי $C=I_n$, ואם A לא הפיכה, אזי קיימת ב־ C שורת אפסים.

הוכחה: נניח ש־ A הפיכה. מהיות A,C ש"ש, אזי C הפיכה ולכן אין ב־ C שורות אפסים. לכן, בכל שורה קיים איבר מוביל, ששוה ל־ 1_F. כל איבר מוביל נמצא מימין לאיברים המובילים בשורות שמעליו, ויש n איברים מובילים (מספר השורות ב־ C) ולכן בכל עמודה חייב להיות איבר מוביל. ולכן כל עמוד ב־ C שייכת לבסיס הסטנדרטי, ומכך ש־ C מדורגת, $C=\begin{pmatrix}1_F & & 0_F\\ & \ddots & \\ 0_F & & 1_F\end{pmatrix}$ עתה נניח ש־ A לא הפיכה. לכן C לא הפיכה. ראינו כבר שאם במטריצה קנונית ריבועית אין שורת אפסים, אזי היא מטריצת היחידה. מהיות C לא הפיכה, $C\neq I_n$ ולכן ב־ C יש שורת אפסים. ■

מסקנה 13.5 (אלגוריתם ההיפוך) תהי A מטריצה הפיכה. אזי A^{-1} מתקבלת מ־ I_n ע"י הפעלת פעולות השורה האלמנטריות שהפעלנו על A, על מנת לדרג את A למטריצה קנונית $C=I_n$.

הוכחה: מהיות A הפיכה, הצורה הקנונית של A היא I_n (ולכן A ש"ש ל־ I_n). לכן קיימות $E_k,...,E_1\in M_n(\mathbb{F})$ אלמנטריות שעבורן $\underbrace{E_k\cdot...\cdot E_1}_{B}\cdot A=I_n$ לכן $BA=I_n$ ולכן ממשפט אוהד, גם $AB=I_n$ ולכן A הפיכה ו־ $A^{-1}=B$. לכן $A^{-1}=E_k\cdot...\cdot E_1\cdot I_n$ ולכן ממשפט EA, A^{-1} מתקבלת מ־ I_n ע"י הפעולות $E_k,...,E_1$. ■

דוגמה

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&4&5&0&1&0\\0&1&7&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to 4R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&4&5&0&1&0\\0&4&28&0&0&4\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&4&5&0&1&0\\0&0&23&0&-1&4\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{4}R_2]{R_3\to\frac{1}{23}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&\frac{5}{4}&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{23}&\frac{4}{23}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1-3R_3]{R_2\to R_2-\frac{5}{4}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&\frac{3}{23}&-\frac{12}{23}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}+\frac{5}{4/23}&-\frac{5}{23}\\0&0&1&0&-\frac{1}{23}&\frac{4}{23}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-\frac{11}{23}&-\frac{2}{23}\\0&1&0&0&\frac{7}{23}&-\frac{5}{23}\\0&0&1&0&-\frac{1}{23}&\frac{4}{23}\end{array}\right)$$

לכן A הפיכה ו־ $A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}23&-11&-2\\0&7&-5\\0&-1&4\end{pmatrix}$. נבדוק $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{11}{23}&-\frac{2}{23}\\0&\frac{7}{23}&-\frac{5}{23}\\0&-\frac{1}{23}&\frac{4}{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&1&7\end{pmatrix}$.

$\mathbb{XVI}$ | ת“ז? מה תעשה עם תפוח זהב?

מסקנה 13.6 תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש־ A,B הפיכות אזי A,B שקולות שורה.

הוכחה: ראינו שכל מטריצה הפיכה ש"ש ל־ I_n (במסקנה 4) לכן $A\sim I_n$, $B\sim I_n$ ומטרנזיטיביות, נקבל ש־ $B\sim A$. ■

מסקנה 13.7 תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. אזי A הפיכה אס"ם A ש"ש ל־ I_n.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: ראינו (במסקנה 4).

$\underline{\Rightarrow}$: נניח ש־ A ש"ש ל־ I_n לכן קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1, ..., E_k \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־ $E_k \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$ ולכן

$$A = \underbrace{(E_k \cdot ... \cdot E_1)^{-1}}_{\text{מכפלה של הפיכות}} I_n = (E_k \cdot ... \cdot E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdot ... \cdot E_k^{-1}$$

לכן A היא מכפלה של מטריצות הפיכות ולכן A הפיכה. ■

משפט 13.8 (EA) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש־ B התקבלה מ־ A ע"י פעולת שורה אלמנטרית אחת. אזי קיימת מטריצה אלמנטרית $E \in M_n(\mathbb{F})$ שעבורה $B = E \cdot A$. יתר על כן, E היא המטריצה שהתקבלה מ־ I_n ע"י אותה הפעולה שביצענו על A ע"מ לקבל את B.

הוכחה: נחלק למקרים:

(i) $A \xrightarrow{R_i \to cR_i} B$ כאשר $c \neq 0_F$ ו־ $1 \leq i \leq n$. נסמן ו־

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ c \cdot a_{i1} & c \cdot a_{i2} \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$EA = \begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ a_{31} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = B$$

(ii) $A \xrightarrow{R_i \to R_j} B$ כאשר $i < j$.

$$E = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$EA = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \\ a_{j1} & & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & & \\ a_{i1} & & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & & \\ a_{nn} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = B$$

(iii) $A \xrightarrow{R_i \to R_i + cR_j} B$ כאשר $i \leq j$, $c \in \mathbb{F}$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 \quad c & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E \cdot A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 \quad c & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \\ a_{i1}+ca_{j1} & \cdots & & a_{in}+ca_{jn} \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

■

דוגמות

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

לכן A ש“ש למטריצה שיש לה שורת אפסים (ולכן איננה הפכיה) ולכן A לא הפיכה.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 1+i & 3 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to R_1-iR_2]{R_3\to R_3-(1+i)R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4-i & 0 & 1 & -i-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to \frac{1}{4-i}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4+i}{17} & \frac{-3-5i}{17} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to R_1-3R_3]{R_2\to R_2-iR_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{-3(4+i)}{17} & -i+\frac{3(3+5i)}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-i(4+i)}{17} & 1+\frac{i(3+5i)}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4+i}{17} & \frac{-3-5i}{17} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 & -12-3i & 9-2i \\ 0 & 1-4i & 12+3i \\ 0 & 4+i & -3-5 \end{pmatrix}.$$

משפט 13.9 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) A הפיכה.

(ii) $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

(iii) קיים $\overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$ שעבורו למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ יש פתרון יחיד.

(iv) למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ קיים פתרון יחיד (והוא $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$).

הוכחה: $(i) \to (ii)$ יהי $\overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$ אזי $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ אם“ם $\overrightarrow{x} = I_n \cdot \overrightarrow{x} = A_n^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$.

$(iii) \to (ii)$ ברור.

$(iv) \to (iii)$ ראינו כבר ש־ $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ הוא פתרון למערכת ההומוגנית $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. נניח בשלילה שקיים פתרון נוסף $\overrightarrow{x_h} \neq \overrightarrow{0}$. יהי $\overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$ וקטור שעבורו למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ קיים פתרון יחיד ונסמן את הפתרון ב־ $\overrightarrow{x_p}$. מתקיים $A\overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{b}$. נביט ב־ $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_h} + \overrightarrow{x_p}$ נחשב: $A\overrightarrow{x} = A(\overrightarrow{x_h} + \overrightarrow{x_p}) = A\overrightarrow{x_h} + A\overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}$. קיבלנו פתרון $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_h} + \overrightarrow{x_p}$ למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ו־ $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ (כי $\overrightarrow{x_h} \neq \overrightarrow{0}$) בסתירה לכך שלמערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ יש פתרון יחיד.

$(i) \to (iv)$ מספיק להוכיח ש־ A ש“ש ל־ I_n. (מסקנה 6). תהי C המטריצה הקנונית השקולת שורה ל־ A ונניח בשלילה ל־ A ונניח בשלילה ש־ $C \neq I_n$. לכן יש ב־ C שורת אפסים (מסקנה 4) ומכיוון ש0 C קנונית, היא מדורגת ולכן השורה האחרונה ב־ C חייבת להיות שורת אפסים ולכן יש עמודה ב־ C ללא איבר מוביל. נסמן את עמודה זו ב־ j. נביט במערכת $c \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ היא שקולה למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ (כי A ו־ C ש“ש). נוכל לקבוע את x_j להיות מה שנרצה (למשל 1_F) ושאר המשתנים יהיו תלויים ב־ x_j. ולכן קיים פתרון לא טריוויאלי. ■

תרגיל נביט במערכת הבאה במשתנים x, y, z מעל $\mathbb{R}$, כאשר $k \in \mathbb{R}$. $\left\{\begin{array}{c} -x-2y+z=0 \\ 2x+5y+kz=1 \\ 7x+(9+k)y-6z=-1 \end{array}\right.$ קבעו עבור אילו ערכי k:

(i) יש למערכת פתרון יחיד (מצאו מהו התלות ב־ k).

(ii) יש למערכת אינסוף פתרונות (ומצאו את הפתרון הכללי).

(iii) אין פתרון למערכת.

פתרון

$$A^{+}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&-2&1&0\\2&5&k&1\\7&9-k&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&0\\2&5&k&1\\7&9-k&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&0\\0&1&k+2&1\\0&-5-k&2&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+(5+k)R_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&0\\0&1&k+2&1\\0&0&(k+3)(k+4)&k+4\end{array}\right)=A^{++}$$

(רגעי נוסטלגיה לסוף שיעור III)

(i) $k\neq -3,-4$. במקרה זה, $z=\frac{1}{k+3}$, נציב במשוואה השנייה $y+(k+2)z=1$ $\leftarrow$ $y=1-\frac{k+2}{k+3}=\frac{1}{k+3}$. נציב במשוואה ראשונה $x+2y-z=0$, $x+y=0$ $\leftarrow$ $x=-\frac{1}{k+3}$. לכן קיים פתרון יחיד והוא $\frac{1}{k+3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(iii) אם $k=-3$, הרי שקיבלנו בשורה האחרונה $0\ 0\ 0 \vdots 1$ ולכן למערכת אין פתרון.

(ii) עבור $k=-4$, המטריצה היא $\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&3&-2\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$ נקבע $z=t$, $y=1+2t$, $x=-2-3t$ ולכן הפתרון הכללי הוא $\left\{\begin{pmatrix}-2-3t\\1+2t\\t\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

XVII | צו ראשון? בוא נקווה שלא נגיע ל־8... רגע, אנחנו ב־17

תרגיל נביט בקבוצה $U=\left\{A\in M_3(\mathbb{R})\,\middle|\, A\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש־ U הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

ב. מצאו ל־ U קבוצה סופית פורשת.

ג. הוכיחו/הפריכו: אם $A\in U$ אזי A לא הפיכה.

ד. הוכיחו/הפריכו: אם $A,B\in U$ אזי A,B ש"ש.

פתרון א. נוכיח ש־ U ת"מ של $M_3(\mathbb{R})$.

(i) יהיו $A,B\in U$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$(\alpha A+\beta B)\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=(\alpha A)\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+(\beta B)\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\alpha\left(B\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)+\beta\left(B\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\alpha\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ולכן $\alpha A+\beta B\in U$.

(ii) $0_{3\times 3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

ב.

$$U=\left\{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\,\middle|\,\begin{matrix}a_{12}+2a_{13}=0\\a_{22}+2a_{23}=0\\a_{32}+2a_{33}=0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}a_{11}&-2a_{13}&a_{13}\\a_{21}&-2a_{23}&a_{23}\\a_{31}&-2a_{33}&a_{33}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\left\{a_{11}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_1}+a_{13}\underbrace{\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_2}+a_{21}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_3}+a_{23}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_4}+a_{31}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{A_5}+a_{33}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{pmatrix}}_{A_6}\right\}=sp\left\{A_1,...,A_6\right\}$$

לכן $\{A_1,...,A_6\}$ קבוצה סופית פורשת. בנוסף, הקבוצה $A=\{A_1,...,A_6\}$ בת"ל כי $0_{3\times 3}\notin A$ וגם כל מטריצה היא לא ק"ל של קודמיה כי לכל מטריצה איבר שלא מתאפס שכן מתאפס בכל שאר המטריצות הקודמות.

ג. נכון. נניח בשלילה כי A הפיכה. לכן $A\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ולכן $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=A^{-1}\cdot A\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ סתירה.

ד. לא נכון. $0_{3\times 3}\in U$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ והן אינן ש"ש כי הן שתי מוריצות קנוניות ושתי מטריצות קנוניות הן ש"ש אם"ם הן שוות (מיחידות הקנונית).

הוכח/הפרך אם המטריצות $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מקיימות $(AB)^2=0_{n\times n}$, אזי $(BA)^3=0_{n\times n}$.

פתרון של ערך נרשום: $(BA)^3=B(A\cdot BA\cdot B)A=B(AB)^2A=B\cdot 0\cdot A=0$.

14 העתקות לינאריות

הגדרה 14.1 יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$. העתקה (או פונקציה או טרנספורמציה) $T:V\to W$ תקרא העתקה לינארית אם:

(i) T אדיטיבית, כלומר $\forall v_1,v_2\in V$, $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.

(ii) T הומוגנית, כלומר, $\forall v\in V$ ו־ $\alpha\in\mathbb{F}$, $T(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot T(v)$.

דוגמות

1. נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\\x\end{pmatrix}$, $\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. נוכיח ש־ T ה"ל.

(i) $\forall\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$,

$$T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x_1+x_2-(y_1+y_2)\\x_1+x_2+(y_1+y_2)\\x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-y_1\\x_1+y_1\\x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2-y_2\\x_2+y_2\\x_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

(ii) $\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ו־ $\forall t\in\mathbb{R}$, $T\left(t\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}t\cdot x\\t\cdot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}tx-ty\\tx+ty\\tx\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}x-y\\x+y\\x\end{pmatrix}$.

2. תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונגדיר העתקה $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ ע"י $T_A(\overrightarrow{x})=A\cdot\overrightarrow{x}$, $\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{F}^n$.

3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ה"ל. נשים לב ש־ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(x\cdot 1)=x\cdot f(1)=c\cdot x$ ולכן קיים $c\in\mathbb{R}$ שעבורו $f(x)=c\cdot x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. נשים לב שבמקרה זה, $f(x+y)=c(x+y)=cx+cy=f(x)+f(y)$ ולכן $f(x)=cx$ עבור $c\in\mathbb{R}$ (שיכול להיות כל דבר).

4. $f(x)=x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$ לא לינארית (כי היא לא מהצורה של 3).

5. $W=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\;\middle|\;f\ \text{גזירה}\right\}$ ונגדיר $W\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ע"י $T(f)=f'$, $\forall t\in W$. נשים לב ש־ T לינארית מאשג"ז, $T(f+g)=(f+g)'=f'+g'=T(f)+T(g)$, $T(\alpha f)=(\alpha f)'=\alpha f'=\alpha T(f)$.

טענה 14.2 $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ היא ה"ל.

הוכחה: ראשית נשים לב כי $A\cdot\overrightarrow{x}\in\mathbb{F}^m$, $\forall x\in\mathbb{F}^n$.

(i) יהיו $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{F}^n$. $T_a(\vec{x}+\vec{y})=A\cdot(\vec{x}+\vec{y})=A\vec{x}+A\vec{y}=T_A(\vec{x})+T_A(\vec{y})$.

(ii) יהיו $\vec{x}\in\mathbb{F}^n$ ו־ $\alpha\in\mathbb{F}$. $T_A(\alpha\cdot\vec{x})=A\cdot(\alpha\cdot\vec{x})=\alpha\cdot(A\cdot\vec{x})=\alpha\cdot T_A(\vec{x})$. ■

מסקנה 14.3 כל מטריצה $A \in M_{m\times n}$ מתאימה לה"ל $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$.

טענה 14.4 נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x\cdot y \end{pmatrix}$. T לא ה"ל.

הוכחה:

$$T\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 72 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 38 \end{pmatrix} \neq T\begin{pmatrix} 6 \\ 72 \end{pmatrix}$$

בסתירה לאדיטיבות ולכן T לא לינארית. ■

15 טענות בסיסיות לה"ל

טענה 15.1 יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to W$. אזי T ה"ל אם"ם T שומרת על צירופים לינאריים, כלומר, אם"ם $\forall v_1, ..., v_k \in V$ ו- $\forall \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$, $T(\alpha v_1 + ... + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_k T(v_k)$ (הדבר) ובהארכה, הדבר הזה שתמיד עושים באלגברה לינארית).

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: נניח ש- T ה"ל. נוכיח באינדוקציה ש- הדבר מתקיים:

$\underline{k=1}$: $T(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 T(v_1)$ ברור כי T הומוגנית.

$\underline{k \to k+1}$: יהיו $v_1, ..., v_k \in V$ ו- $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$. אזי בעזרת אדיטיביות והומוגניות,

$$T(\alpha v_1 + ... + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = T(\alpha v_1 + ... + \alpha_k v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) \underset{\text{ה"א}}{=} \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1})$$

$\underline{\Rightarrow}$: ברור. נבחר $k = 2$, $\alpha_1, \alpha_2 = 1$ ונקבל ש- T אדיטיבית: נבחר $k = 1$ ונקבל ש- T הומוגנית. ■

טענה 15.2 תהי $T : V \xrightarrow{\text{ה"ל}} W$ אזי $T(0_V) = 0_W$.

הוכחה: $T(0_V) = T(0_F \cdot 0_V) = 0_F \cdot T(0_V) = 0_F \cdot w = 0_W$. ■

דוגמה נגדיר $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ y \end{pmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ אזי T לא לינארית, כי $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

XVIII | חוקילדת!

טענה 15.3 (אשט"ל בסיס) תהיינה $T, S : V \xrightarrow{\text{ה"ל}} W$. (i) $T + S : V \to W$ העתקה לינארית, כאשר $(T+S)(v) = T(v) + S(v)$, $\forall v \in V$.

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot T : V \to W$ העתקה לנארית, כאשר $(\alpha \cdot T)(x) = \alpha \cdot T(v)$.

הוכחה: (i) יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו־ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ אזי

$$(T+S)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + S(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2)$$

$$= \alpha_1 (T(v_1) + S(v_1)) + \alpha_2 (T(v_2) + S(v_2)) = \alpha_1 (T+S)(v_1) + \alpha_2 (T+S)(v_2)$$

(ii) יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו־ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ אזי

$$(\alpha \cdot T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)) = \alpha(\alpha \cdot T)(v_1) + \alpha_2 (\alpha \cdot T)(v_2)$$

■

הגדרה 15.4 יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נסמן $\underline{\text{hom}}(V,W) = \left\{ T : V \to W \;\middle|\; T\text{ה"ל} \right\}$.

טענה 15.5 $\text{hom}(V,W)$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: נראה שהוא ת"מ של V^W. $(i)^{(*)}$ ראינו ש־ $\text{hom}(V,W)$ סגור לחיבור ולכפל בסקלר (אשט"ל).

$(ii)^{(*)}$ נשים לב ש־ $T(V) = 0_W$, $\forall v$ היא לינארית ולכן $0_{V^W} \in \text{hom}(V,W)$:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0_W = \alpha_1 \cdot 0_W + \alpha_2 \cdot 0_W = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

■

טענה 15.6 (אשט"ל הרכבה) יהיו V, W, U מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תהיינה $T : V \to W$ ו־ $S : W \to U$ העתקות לינאריות. אזי $S \circ T : V \to U$ העתקה לינארית.

הוכחה: יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו־ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$.

$$(S \circ T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = S(T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) = S(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2))$$

$$= \alpha_1 S(T(v_1)) + \alpha_2 S(T(v_2)) = \alpha_1 (S \circ T)(v_1) + \alpha_2 (S \circ T)(v_2)$$

■

הגדרה 15.7 $T : V \to W$ תקרא הפיכה אם:

(i) T חח"ע, כלומר, $\forall v_1, v_2 \in V$, $T(v_1) = T(v_2) \iff v_1 = v_2$.

(ii) T על, כלומר $ImT = \left\{ T(v) \;\middle|\; v \in V \right\} = W$.

הערה 15.8 אם $T : V \to W$ הפיכה, קיימת פונקציה הפוכה $T^{-1} : W \to V$ המוגדרת על ידי: $T(v) = w \iff T^{-1}(w) = v$, $\forall v \in V$ ו־ $\forall w \in W$.

טענה 15.9 (אשט"ל היפוך) יהי V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to W$ ה"ל. נניח ש־ T הפיכה. אזי $T^{-1}:W\to V$ היא ה"ל.

הוכחה: יהיו $v_1,v_2\in V$ ו־ $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$ נסמן $v_1=T^{-1}(w_1)$ ו־ $v_2=T^{-1}(w_2)$. אזי $T(v_1)=w_1$ ו־ $T(v_2)=w_2$. נסמן גם $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2$.

$$T(v)=T(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)=\alpha_1T(v_1)+\alpha_2T(v_2)=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2$$

$$T^{-1}(\alpha_1w_1+\alpha_2w_2)=v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2=\alpha_1T^{-1}(w_1)+\alpha_2T^{-1}(w_2)$$

∎

טענה 15.10 יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. אזי $ImT=\left\{\ T(v)\ \middle|\ v\in V\ \right\}\subseteq W$ היא מ"ו.

הוכחה: נוכיח כי ImT ת"מ של W ונסיים.

$(i)^{(*)}$ יהיו $w_1,w_2\in ImT$ ו־ $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$. מהיות $w_1\in ImT$, קיים $v_1\in V$ כך ש־ $w_1=T(v_1)$. מהיות $w_2\in ImT$, קיים $v_2\in V$ כך ש־ $w_2=T(v_2)$. לכן

$$\alpha_2w_1+\alpha_2w_2=\alpha_1T(v_1)+\alpha_2T(v_2)=T(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)=T(v)$$

ולכן $\alpha_1w_1+\alpha_2w_2\in ImT$.

$(ii)^{(*)}$ $0_W\in ImT$. כי $T(0_V)=0_W$. ∎

הגדרה 15.11 יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to W$ ה"ל. נגדיר $\underline{\ker}T=\left\{\ v\in V\ \middle|\ T(v)=0_W\ \right\}$.

טענה 15.12 $\ker T$ הוא מ"ו.

הוכחה: נוכיח ש־ $\ker T$ ת"מ של V. $(i)^{(*)}$ יהיו $v_1,v_2\in\ker T$ ו־ $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$. $T(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)=\alpha_1T(v_1)+\alpha_2T(v_2)=$ $\alpha_1\cdot 0_W+\alpha_2\cdot 0_W=0_W$.

$(ii)^{(*)}$ $0_V\in\ker T$: $T(0_V)=0_W$ ולכן $0_V\in\ker T$. ∎

דוגמה תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי $\ker T_A=\left\{\ \vec{x}\in\mathbb{F}^n\ \middle|\ T_A(\vec{x})=\vec{0}\ \right\}=\left\{\ \vec{x}\in\mathbb{F}^n\ \middle|\ A\cdot\vec{x}=\vec{0}\ \right\}$ ולכן קבוצת הפתרונות למערכת $A\vec{x}=\vec{0}$ מ"ו ($\ker T_A$).

תרגיל נגדיר $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ע"י $T(p)(x)=2\cdot p(x)+x\cdot p'(x)$.

א. הוכיחו כי T ה"ל.

ב. מצאו בסיס ל־ ImT.

ג. מצאו בסיס ל־ $\ker T$.

פתרון א. יהיו $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ ו־ $p_1,p_2\in\mathbb{R}_2[x]$. אזי

$$T(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)(x)=2\cdot(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)(x)+x\cdot(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)'(x)=2\cdot(\alpha_1p_1(x)+\alpha_2p_2(x))+x\cdot(\alpha_1\cdot p_1'(x)+\alpha_2\cdot p_2'(x))$$

$$=\alpha_1(2p_1(x)+xp_1'(x))+\alpha_2(2p_2(x)+xp_2'(x))=\alpha_1T(p_1)(x)+\alpha_2T(p_2)(x)=(\alpha_1T(p_1)+\alpha_2T(p_2))(x)$$

ולכן $T(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)=\alpha_1T(p_1)+\alpha_2T(p_2)$.

ב. $ImT\subseteq\mathbb{R}_2[x]$. $T(x)=2\cdot x+x\cdot 1=3x\in ImT$. $T(1)=2\cdot 1+x\cdot 0=2$. $T(x^2)=2x^2+x\cdot 2x=4x^2$ ולכן $2,3x,4x^2\in ImT$ ולכן $sp\left\{2,3x,4x^2\right\}\subseteq ImT$ אבל מהיות $2,3x,4x^2$ (כי כל פולינום הוא ממעלה הגדולה ממש מזו של קודמיו) ומכך ש־ $\dim\mathbb{R}_2[x]=3$ אזי $\left\{2,3x,4x^2\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ ולכן $\mathbb{R}_2[x]=sp\left\{2,3x,4x^2\right\}\subseteq ImT\subseteq\mathbb{R}_2[x]$ ולכן $ImT=\mathbb{R}_2[x]$ ולכן בסיס של ImT הוא למשל $\left\{1,x,x^2\right\}$.

ג. $\ker T\subseteq\mathbb{R}_2[x]$.

$$\ker T=\left\{\ p\in\mathbb{R}_2[x]\ \middle|\ T(p)=0\ \right\}=\left\{\ p\in\mathbb{R}_2[x]\ \middle|\ 2\cdot p(x)+x\cdot p'(x)=0\ \right\}$$

$$=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ 2(a+bx+cx^2)+x(b+2cx)=0\ \right\}=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ 2a+3bx+4cx^2=0\ \right\}=$$

$$=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ \begin{matrix}2a=0\\3b=0\\4c=0\end{matrix}\ \right\}=\{0\}$$

ולכן $\ker T=\left\{0_{\mathbb{R}_2[x]}\right\}$ ולכן בסיס ל־ $\ker T$ הוא $\varnothing$.

טענה 15.13 יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to W$ ה"ל. אזי T חח"ע אס"ם $\ker T=\{0_V\}$.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: נניח ש־ T חח"ע ונוכיח ש־ $\ker T=\{0_V\}$. יהי $v\in\ker T$ ונוכיח כי $v=0_V$: $T(v)=0_W=T(0_V)$ ולכן $T(v)=T(0_V)$ ומהיות T חח"ע, $v=0_V$. לכן $\ker T\subseteq\{0_V\}$.

$\underline{\Rightarrow}$: נניח כי $\ker T=\{0_V\}$ ונוכיח ש־ T חח"ע: יהיו $v_1,v_2\in V$ כך ש־ $T(v_1)=T(v_2)$ ונוכיח ש־ $v_1=v_2$. נשים לב כי $T(v_1-v_2)=T(v_1)-T(v_2)=0_W$ ולכן $v_1-v_2\in\ker T=\{0_V\}$ ולכן $v_1-v_2=0_V$ ולכן $v_1=v_2$. ■

XIX | עד מתי?

משפט 15.14 תהי $T:V\to W$ ה"ל ותהי $\{v_1,...,v_m\}$ קבוצה פורשת ב־ V. אזי $\{T(v_1),...,T(v_m)\}$ פורשת את ImT.

הוכחה: יהי $w\in ImT$. מהיות $w\in ImT$, קיים $v\in V$ כך ש־ $w=T(v)$. מהיות $v_1,...,v_m$ פורשים את V, קיימים $\alpha_1,...,\alpha_m\in\mathbb{F}$ שעבורם $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_mv_m$. לכן $T(v)=T(\alpha_1v_1+...+\alpha_mv_m)=\alpha_1T(v_1)+...+\alpha_mT(v_m)$. ■

משפט 15.15 (משפט המימדים ה- II) יהיו V,W מ״ו מעל $\mathbb{F}$ כך ש- V נ״ס. תהי $T:V\to W$ ה״ל.
אזי $\dim V=\dim\ker T+\dim ImT$.

הוכחה: ראשית, מהיות V נ״ס, אזי $\dim V<\infty$ ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n=\dim V$. מהיות $\ker T\subseteq V$ ו- V נ״ס הרי שגם $\ker T$ נ״ס ונסמן $k=\dim\ker T$. יהי $\{v_1,...,v_k\}$ בסיס של $\ker T$ ונשלים אותו לבסיס $\{v_1,...,v_n\}$ של V (ראינו שכל קבוצה בת״ל מוכלת בבסיס). נוכיח כי $\dim ImT=n-k$ ונסיים. נביט בקבוצה $w_1=T(v_{k+1})$, $w_2=T(v_{k+2})$,..., $w_{n-k}=T(v_n)$.
ראשית ברור כי $w_1,...,w_{n-k}$ שייכים ל- ImT. נוכיח שהם בסיס ונסיים.

<u>פורשים</u>: מהמשפט הקודם, $v_1,...,v_n$ פורשים את V כי הם בסיס ולכן

$$ImT=sp\left\{T(v_1),...,T(v_n)\right\}=sp\left\{0_W,...,0_W,w_1,...,w_{n-k}\right\}=sp\left\{w_1,...,w_{n-k}\right\}$$

.

<u>בת״ל</u>: נניח שעבור $\alpha_1,...,\alpha_{n-k}\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha_1w_1+...+\alpha_{n-k}w_{n-k}=0_W$ ונוכיח כי $\begin{pmatrix}0_F\\ \vdots\\ 0_Fn\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-k}\end{pmatrix}$. נרשום

$$0_W=\alpha_1w_1+...+\alpha_{n-k}w_{n-k}=\alpha_1T(v_{k+1})+...+\alpha_{n-k}T(v_n)=T(\alpha_1v_{k+1}+...+\alpha_{n-k}+v_n)$$

ולכן $\alpha_1v_{k+1}+...+\alpha_{n-k}v_n\in\ker T$ ולכן קיימים $\beta_1,...,\beta_k\in\mathbb{F}$ כך ש-

$$\alpha_1v_{k+1}+...+\alpha_{n-k}v_n=\beta_1v_1+...+\beta_kv_k$$

$$-\beta_1v_1-...-\beta_kv_k+\alpha_1v_{k+1}+...+\alpha_{n-k}v_n=0_V$$

ומהיות $v_1,...,v_n$ בת״ל, כל המקדמים שווים ל- 9_F ובפרט $\alpha_1=0_F,...,\alpha_{n-k}=0_F$. ■

תרגילים

1. האם קיימת ט״ל חח״ע $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$? לא! נניח בשלילה שקיימת ה״ל כנ״ל אזי ממשפט המימדים ה- II

$$3=\dim V=\dim\underset{0}{\ker}T+\dim ImT$$

ולכן $\dim ImT=3$ סתירה כי $ImT\subseteq\mathbb{R}^2$.

2. האם קיימת ה״ל חח״ע $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$? כן! $T\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\\ 0&0\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)$.

3. האם קיימת ה״ל על $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$? לא! נניח בשלילה שקיימת ה״ל כנל. אזי ממשפט המימדים ה- II,

$$2=\dim V=\dim\ker T+\dim\underset{3}{I}mT$$

ולכן $\dim\ker T=-1$ סתירה!

4. האם קיימת ה״ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שעבורה $\ker T=ImT$? לא! כמו קודם, $3=\dim\ker T+\dim ImT=2\dim\ker T$ סתירה!

5. האם קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ שעבורה $\ker T = ImT$? כן! נביט ב־ $T(x,y)=(y,0)$, $\forall x,y$.

$$\ker T = \left\{ \ (x,y) \ \middle| \ y=0 \ \right\} = \left\{ \ (x,0) \ \middle| \ x\in\mathbb{R} \ \right\} = sp\left\{(1,0)\right\}$$

ולבסוף T לינארית כי $T\binom{x}{y} = \binom{y}{0} = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\binom{x}{y}$.

6. יהיו U,V,W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $T:V\to W$ ו־ $S:W\to U$ ה"ל. נניח כי $S\circ T=0$. הוכיח כי $\dim ImT+\dim ImS\leq\dim W$. נשים לב כי $ImT\subseteq\ker S$. יהי $v\in ImT$, נשים לב כי $S(v)=0$ ולכן $v\in\ker S$ אבל $v\in ImT$. לכן $\dim ImT\leq\dim\ker S$ ולכן $\dim ImT+\dim ImS\leq\dim\ker S+\dim ImS=\dim W$ ממשפט המימדים ה־ II.

XX

תרגילים

1. יהי V מ"ו כך ש־ $\dim V=9$ ויהיו $U,W,Z\subseteq V$ ת"מים ממימד 6. נניח שקיים $u\in V$ כך ש־ $u\notin W+Z$ הוכיחו שקיימים לפחות שני וקטורים שונים ב־ $U\cap W\cap Z$.

ראשית, מכך שקיים $u\in V$ כך ש־ $u\notin W+Z$ אזי $V\supseteq W+Z\neq V$ ולכן $\dim W+Z<\dim V=9$ ולכן $\dim(W+Z)\leq 8$. ממשפט המימדים ה־ I, $8\geq\dim(W+Z)=\underset{6}{\dim}W+\underset{6}{\dim}Z-\dim(W\cap Z)$ ולכן $\dim(W\cap Z)\geq 4$. נוכיח כי $\dim(U\cap W\cap Z)\geq 1$ ומכך ינבע שקיימים לפחות 2 וקטורים שונים ב־ $U\cap W\cap Z$. ממשפט המימדים $\dim((W\cap Z)+U)=\dim W\cap Z+\dim U-\dim W\cap Z\cap U\geq 4+6-\dim W\cap Z\cap U$ ולכן $\dim(W\cap Z\cap U)\geq 10-\dim((W\cap Z)+U)\geq 10-9=1$.

2. יהי $U\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ת"מ המוגדר ע"י $U=sp\left\{2,x,2^x\right\}$. נגדיר $T:U\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ע"י $T(f)=f(x+2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

א. הוכיחו כי T ה"ל

ב. הוכיחו כי $ImT\subseteq U$

ג. מצאו את $\dim\ker T$ ואת $\dim ImT$

א. יהיו $f,g\in U$ ו־ $t,s\in\mathbb{R}$.

$$T(tf+sg)=(tf+sg)(x+2)=tf(x+2)+sg(x+2)=tT(f)(x)+sT(g)(x)$$

ב. יהי $f\in U$ אזי $f\in sp\left\{2,x,2^x\right\}$ ולכן קיימים $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש־ $f(x)=2a+bx+c2^x$ ולכן

$$T(f)(x)=f(x+2)=2a+b(x+2)=c2^{x+2}=2(a+b)+bx+(4c)2^x\in U$$

ג. נניח כי $T(f)=0$. אזי $f(x+2)=0$, $\forall x$ ולכן $f(x)=0$, $\forall x$ ולכן $\ker T=\{0\}$ ולכן $\dim\ker T=0$ ולכן ממשפט המימדים ה־ II, $3\overset{(*)}{=}\dim I=\dim\underset{0}{\ker}T+\dim ImT$ ולכן $\dim ImT=3$. $(*)$ נוכיח כי $2,x,2^x$ בת"ל. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש־ $2a+bx+c2^x=0$, $\forall x$. נוכיח כי $a=b=c=0$. נגזור פעמיים ונקבל כי $\ln^2 2\cdot c\cdot 2^x=0$ לכן $c=0$. ועבור $x=0$, $2a=0$ ולכן $a=0$, ועבור $x=1$, $2b=0$ ולכן $b=0$.

3. יהי V מ"ו $v_1, ..., v_5 \in V$ כך ש־ $v_1 \neq 0_V$, $v_3 \notin sp\{v_1, v_2\}$ וכך ש־ $v_1 v_2 - v_3, v_4 - v_5$ ת"ל. הוכיחו כי $v_5 \in sp\{v_1, ..., v_4\}$.

מהיות $v_1 \neq 0_V$, ו־ $v_1, v_2 - v_3, v_4 - v_5$ ת"ל, קיים וקטור הת"ל בקודמיו. לכן $v_2 - v_3 \in sp\{v_1\}$ או $v_4 - v_5 \in sp\{v_1, v_2 - v_3\}$. נניח בשלילה כי $v_2 - v_3 \in sp\{v_1\}$ לכן קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש־ $v_2 - v_3 = \alpha \cdot v_1$ לכן $v_3 = v_2 - \alpha v_1$ ולכן $v_3 \notin sp\{v_1, v_2\}$ בסתירה לנתון. לכן $v_4 - v_5 \in sp\{v_1, v_2 - v_3\}$ לכן קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ כך ש־ $v_4 - v_5 = \alpha v_1 + \beta(v_2 - v_3)$ ולכן $v_5 = -\alpha v_1 - \beta v_2 + \beta v_3 + v_4$ ולכן $v_5 \in sp\{v_1, ..., v_4\}$.

4. יהיו U, V, W מ"ו נ"ס ו־ $S : V \to W$, $R : U \to W$ ה"ל על. הוכיח שאם קיימת $T : U \to V$ ה"ל כך ש־ $R = S \circ T$ אזי $\dim \ker R \geq \dim \ker S$.

ממשפט המימדים ה־ II,

$$\dim U = \dim \ker R + \dim ImR \underset{\text{על}}{=} \dim \ker R + \dim W$$

$$\dim V = \dim \ker S + \dim ImS = \dim \ker S + \dim W$$

ולכן $\dim \ker R - \dim \ker S = \dim U - \dim V$. נוכיח כי $\dim U - \dim V \geq 0$ ומכך נסיק כי $\dim \ker R - \dim \ker S \geq 0$ כלומר $\dim \ker R \geq \dim \ker S$. עתה, $R = S \circ T$. נוכיח כי $\dim U \geq \dim V$. ראשית, $ImT \subseteq V$. $\dim U = \dim \ker T + \dim ImT$. ולכן, מספיק להוכיח כי T על. כי אז נקבל $\dim U = \dim \ker T + \dim V$ ולכן $\dim U \geq \dim V$.

נניח בשלילה כי T לא על. **לא סיימנו את ההוכחה**

XXI

מסקנה 15.16 יהי V מ"ו נ"ס. תהי $T : V \to V$ ה"ל. אזי T חח"ע אם"ם T על.

הוכחה: T: חח"ע אם $\ker T = \{0_V\}$ אם"ם $\dim \ker T = 0$, וזה אם"ם $\dim ImT = \dim V$ (כי $\dim V = \dim \ker T + \dim ImT$) וזה אם"ם $ImT = V$, כלומר אם"ם T היא על. ■

דוגמה $T : V \to V$ חח"ע ולא על, ושהיא ה"ל. נביט ב־ $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ המוגדרת על ידי $T(p)(x) = x \cdot p(x)$. נשים לב כי T ה"ל כי $T(\alpha p_1 + \beta p_2) = x \cdot (\alpha p_2 + \beta p_2)(x) = x(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x)) = \alpha x p_1(x) + \beta x p_2(x) = \alpha T(p_1)(x) + \beta T(p_2)(x)$. נשים לב כי T חח"ע. נניח שעבור $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$, $T(p_1) = T(p_2)$ לכן $x p_1 = x p_2$, $\forall x$. ולכן $p_1(x) = p_2(x)$, $\forall x \neq 0$ ולכן $p_1(x) = p_2(x)$ גם עבור $x = 0$ (כי פולינומיום הם פונקציות רציפות). לכן $p_1 = p_2$ ולכן T חח"ע. בנוסף נשים לב כי $1 \notin ImT$ כי $\forall 0 \neq p \in \mathbb{R}[x]$, $\deg T(p) = \deg(x \cdot p(x)) \geq 1$ לכן T לא על.

הגדרה 15.17 תהי $T : V \to V$. נגדיר $T^1 = T$ ו־ $\forall n \in \mathbb{N}$ נגדיר $T^{n+1} = T \circ T^n$. אם T הפיכה, נגדרי $T^{-n} = (T^{-1})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

מסקנה 15.18 יהי V מ"ו נ"ס ותהי $T : V \to V$ ה"ל. אם $ImT = ImT^2$ אזי $\ker T^2 = \ker T$.

הוכחה: ממשפט המימדים ה- II, $\dim V = \dim \ker T + \dim ImT$. $T^2 = T \circ T$ ה"ל (אשט"ל הרכבה) ולכן $\dim V = \dim \ker T^2 + \dim ImT^2$. מהיות $ImT = ImT^2$, אזי $\dim ImT = \dim ImT^2$ ולכן $\dim \ker T = \dim \ker T^2$ ומהיות $\ker T \overset{(*)}{\subseteq} \ker T^2$ אזי $\ker T = \ker T^2$ (מימד של ת"מ). $(*)$ אם $v \in \ker T$ $\Leftarrow$ $T(v) = 0_V$ $\Leftarrow$ $T(v) = 0_V$ $\Leftarrow$ $T(T(v)) =$ $T(0_V) = 0_V$. ■

הגדרה 15.19 תהי $T : V \to W$. T תקרא <u>איזומורפיזם</u> אם:

(i) T ה"ל.

(ii) T חח"ע.

(iii) T על.

הערה 15.20 נאמר כי V, W איזומורפים אם קיים $T : V \to W$ שהוא איזומורפים.

דוגמה $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{C}$. נשי לב כי V, W הם מ"ו מעל $\mathbb{R}$. נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ ע"י $T(x, y) = x + yi$. נשים לב כי T ה"ל, חחע"ל ולכן T איזומורפיזם.

דוגמה נגדיר $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ ע"י $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. נשים לב כי T ה"ל חחע"ל. לכן $\mathbb{R}^3$ ו- $\mathbb{R}_2[x]$ איזומורפים.

תרגיל האם $1 + x + x^2$, $1 - x + 3x^2$, $2 - 2x + x^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

לכן הוקטורים בת"ל.

דוגמה $\begin{array}{c|ccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline v_1 & 1 & 2 & 3 \\ v_2 & 4 & 5 & 6 \\ v_3 & 7 & 8 & 9 \end{array}$, $2v_1 = v_1 + v_3$, $2u_2 = u_1 + u_3$.

דוגמה $\begin{array}{c|ccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 2 & 1 & 3 \\ v_3 & 1 & -1 & 0 \end{array}$, $v_3 = 3v_1 - v_2$, $u_3 \neq 3u_1 - u_2$ אבל $u_3 = u_1 + u_2$.

משפט 15.21 (משפט חשוב כלשהו I) יהיו V, W מ"ו כך ש- V נ"ס. ויהיו $v_1, ..., v_n \in V$ וקטורי בסיס של V. יהיו $w_1, ..., w_n \in W$.
אזי קיימת ה"ל $T : V \to W$ יחידה שמקיימת $T(v_i) = w_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

הוכחה: ראשית, נוכיח כי קיימת T כזו. יהי $v \in V$ ונרצה להגדיר את $T(v)$. מהיות $v_1, ..., v_n \in V$ בסיס של V, אזי הם פורשים, ולכן קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ שעבורם $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. נגדיר $T(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n$. עתה נוכיח כי

(i) $T : V \to W$.

(ii) T מוגדרת היטב.

(iii) T ה"ל.

(iv) $T(v_i) = w_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

(i) $T(v)$ מוגדרת $\forall v \in V$ וברור כי $T(v) \in W$ (כי W סגור לקומבינציות לינאריות)

(ii) נשים לב כי $T(v)$ נקבע באופן יחיד ע"י v, כלומר, אם $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n=\beta_1v_1+...+\beta_nv_n$ אזי נחסר ונקבל $(\alpha_1-\beta_1)v_1+...+(\alpha_n-\beta_n)v_n=0_V$ ומהיות $v_1,...,v_n$ בת"ל, $\alpha_i-\beta_i=0_F$, $\forall 1\le i\le n$ ולכן $T(v)=\alpha_1w_1+...+\alpha_nw_n=\beta_1w_1+...+\beta_nw_n$.

(iii) יהיו $u,v\in V$. קיימים $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_n\in\mathbb{F}$ כך ש- $u=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$, $v=\beta_1v_1+...+\beta_nv_n$ לכן $u+v=(\alpha_1+\beta_1)v_1+...+(\alpha_n+\beta_n)v_n$ ולכן $T(u+v)=(\alpha_1+\beta_1)w_1+...+(\alpha_n+\beta_n)v_n=(\alpha_1w_1+...+\alpha_nw_n)+(\beta_1w_1+...+\beta_nw_n)=T(u)+T(v)$ ולכן T אדיטיבית. עתה יהי $\beta\in\mathbb{F}$. $T(\beta u)=T(\beta(\alpha_1w_1+...+\alpha_nw_n))=T(\beta\alpha_1w_1+...+\beta\alpha_nw_n)=\beta\alpha_1w_1+...+\beta\alpha_nw_n=\beta(\alpha_1w_1+...+\alpha_nw_n)=\beta T(u)$.

(iv) מתקיים $v_i=0_Fv_1+...+1_F\cdot v_i+...+0_F\cdot v_n$ ולכן $T(v_i)=0_Fw_1+...+1_F\cdot w_i+...+0_F\cdot w_n$. נניח שקיימות $T,S:V\to W$ ה"ל כך ש- $T(v_i)=w_i$ וגם $S(v_i)=w_i$. $\forall 1\le i\le n$ ונוכיח כי $S=T$, כלומר ש- $S(v)=T(v)$, $\forall v$. יהי $v\in V$. קיימים $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש- $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$ לכן

$$T(v)=T(\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n)=\alpha_1T(v_1)+...+\alpha_nT(v_n)=\alpha_1w_1+...+\alpha_nw_n=\alpha_1S(v_1)+...+\alpha_nS(v_n)=S(\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n)=S(v)$$

■

תרגילים

1. מצאו ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\binom{1}{2},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\binom{1}{1},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\binom{2}{3}$$

אזי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\binom{1}{2}+y\binom{1}{1}+z\binom{2}{3}=\begin{pmatrix}x+y+2z\\2x+y+3z\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

2. מצאו ה"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך ש-

$$T\binom{1}{-1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},T\binom{1}{1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

אזי

$$T\binom{x}{y}=xT\binom{1}{0}+yT\binom{0}{1}=xT\left[\frac{1}{2}\binom{1}{-1}+\frac{1}{2}\binom{1}{1}\right]+yT\left[\frac{1}{2}\binom{1}{1}-\frac{1}{2}\binom{1}{-1}\right]$$

$$=x\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]+y\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]=x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+y\\2x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\binom{x}{y}$$

3. הוכיחו/הפריכו: קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש- $T\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}=\binom{1}{-1}$.

נכון! נשלים את v_1 לבסיס של $\mathbb{R}_3$, נסמנו v_1,v_2,v_3. ראשינו שיש ה"ל יחידה כך ש- $T(v_1)=w_1$, $T(v_2)=\binom{0}{0}$ ו- $T(v_3)=\binom{0}{0}$.

XXII

תרגילים

1. האם קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right),T\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\right),T\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}8\\9\end{smallmatrix}\right)$$

לא! נניח בשלילה. נשים לב כי $v_3=2v_2-v_1$ ולכן $T(v_3)=T(2v_2-v_1)=2T(v_2)-T(v_1)=2\left(\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix}\right)$ סתירה (כי ממשפט חשוב כלשהו קיימת T יחידה כך ש- $T(v_3)=\left(\begin{smallmatrix}8\\9\end{smallmatrix}\right)$.

2. האם קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)=w_1,T\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\right)=w_2,T\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix}\right)$$

כן! נשלים את v_1,v_2 לבסיס של $\mathbb{R}^3$, ונסמנו $\{v_1,v_2,u\}$. לפי משפט חשוב כלשהו I, קיימת $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ה"ל יחידה המקיימת: $T(v_1)=w_1,T(v_2)=w_2,T(u)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$. נשים לב כי $T(v_3)=T(2v_2-v_1)=2T(v_2)-T(v_1)=2\left(\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix}\right)$ ולכן T מקיימת את הדרוש.

3. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ה"ל כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=w_1,T\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=w_2,T\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=w_3$$

אזי $w_3=2w_2-w_1$

הגדרה 15.22 תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונסמן ב- $\vec{R}_1,...,\vec{R}_m$ ו- $\vec{C}_1,...,\vec{C}_n$ את וקטורי השורות ואת וקטורי העמודות של המטריצה A בהתאמה.

<u>דרגת השורות</u> של A מוגדרת להיות $r_1=\dim sp\left\{\vec{R_1},...\vec{R_m}\right\}$.

<u>דרגת העמודות</u> של A מוגדרת להיות $r_2=\dim sp\left\{\vec{C_1},...,\vec{C_n}\right\}$.

דוגמות

1. $A=\left(\begin{smallmatrix}1&2&0\\1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$.

$$r_1=\dim sp\left\{(1,2,0),(1,0,0),(0,0,0)\right\}=\dim sp\left\{(1,2,0),(1,0,0)\right\}=2$$

$$r_2=\dim sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=2$$

2. $A=\left(\begin{smallmatrix}1&3&0\\1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$. $r_1=3$, $r_2=3$.

3. $A = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{smallmatrix}\right)$. $r_1 = 2$, $r_2 = 2$.

4. $A = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&1\end{smallmatrix}\right)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 2$.

5. $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{smallmatrix}\right)$, $r_1 = r_2 = 3$

משפט 15.23 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. אזי $r_1 = r_2$.

הוכחה: נביט ב־ $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ ההעתקה המוגדרת ע"י $T_A(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$. ראינו כי T_Aה"ל. נשים לב כי

$$T_A\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = T_A(e_1) = Ae_1 = C_1, T_A(e_2) = A\cdot e_2 = \vec{c_2}, ..., T_A(e_n) = \vec{c_n}$$

ולכן $ImT_A = sp\left\{T_A(e_1), ..., T_A(e_n)\right\} = sp\left\{\vec{c_1}, ..., \vec{c_n}\right\}$ (ראינו ה"ל של קבוצה פורשת פורשת את התמונה) ולכן $\dim ImT_A = r_2$. לכן ממשפט המימדים ה־ II, $\dim\ker T_A = n - \dim ImT_A = n - r_2$. נוכיח כי $r_1 = n - \dim\ker T_A$ ונסיים. נשים לב כי r_1 לא משתנה תחת אף אחת מפעולות השורה האלמנטריות: כלומר, אם B התקבלה מ־ A ע"י פעולת שורה אלמנטרית אזי דרגת השורות של B זהה לזו של A $(*)$. לכן $r_1 =$ דרגת השורות של הצורה הקנונית של A

= מס' האיברים המובילים בצורה הקנונית של A

= מספר המשתנים שמופיעים בעמודה שיש בה איבר מוביל.

ולכן $n - r_1 =$ מס' האיברים הלא מובילים בצורה הקנונית של A

$= \dim\left\{\ \vec{x}\in\mathbb{F}^n \ \middle|\ A\vec{x} = \vec{0}\ \right\} = \dim\ker T_A$. $r_1 = n - \dim\ker T_A$. ■

הגדרה 15.24 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. הדרגה $(rank)$ של A מוגדרת להיות דרגת השורות (או דרגת העמודות) של A, ומסומנות ב־ $rankA$.

הערה 15.25 מס' השורות שלא מתאפסות בצורה הקנונית של A=מס' האיברים המובילים בצורה הקנונית$= r_1 = rankA$.

מסקנה 15.26 $rankA \leq \min\left\{n, m\right\}$.

מסקנה 15.27 אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי: $rankA = n-$מס' שורות האפסים ולכן: מס' שורות האפסים בצורה הקנונית$= \dim\ker T_A$

דוגמה $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\x_1+4x_2+5x_3=0\\6x_2+4x_3=0\end{cases}$, $A = \begin{pmatrix}1&-2&1\\1&4&5\\0&6&4\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix}1&-2&1\\0&6&4\\0&6&4\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix}1&-2&1\\0&6&4\\0&0&0\end{pmatrix}$ ולכן $\ker T_A = \left\{\ \begin{pmatrix}-\frac{8}{6}t-t\\-\frac{2}{3}t\\t\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\ \right\} = sp\left\{\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$ לכן $rankA = 2$.

משפט 15.28 יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$ ויהי $v_1, ..., v_n$ בסיס של V. יהי $v \in V$ אזי קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ יחידים שעבורם $v = \alpha_1v_1 + ... + \alpha_nv_n(*)$.

הוכחה: ראשית, מהיות $v_1, ..., v_n$ בסיס אזי $v_1, ..., v_n$ פורשים ולכן $v \in sp\left\{v_1, ..., v_n\right\}$ ולכן $\alpha_1, ..., \alpha_n$ קימים כך ש־ $(*)$ מתקיימים. עתה נניח שעבור $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{F}$ מתקיים $\beta_1v_1+...+\beta_nv_n = \alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$ לכן $(\alpha_1-\beta_1)v_1+...+(\alpha_n-\beta_n)v_n = 0_V$ ומהיות $v_1, ..., v_n$ בת"ל אזי $\begin{matrix}\alpha_1-\beta_1=0\\ \vdots\\ \alpha_n-\beta_n=0\end{matrix}$ ולכן $\begin{matrix}\alpha_1=\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n=\beta_n\end{matrix}$. ■

משפט 15.29 יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$. אזי V איזומורפי ל- $\mathbb{F}^n$.

הוכחה: יהי $v_1,...,v_n$ בסיס של V. נגדיר $T:V\to\mathbb{F}^n$ ע"י $T(v)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$. ראינו מהמשפט הקודם ש- T מוגדרת היטב. נוכיח כי T חחע"ל וה"ל.

T חחע"ל: נביט בהעתקה $T^{-1}:\mathbb{F}^n\to V$ המוגדרת ע"י $T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_1v_1+...+x_nv_n$. ברור כי T^{-1} ההעתקה ההפוכה של T ולכן T הפיכה, כלומר חחע"ל.

T ה"ל: יהיו $u_1,u_2\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ונרשום $u_1=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$, $u_2=\beta_1v_1+...+\beta_nv_n$ אזי $T(\alpha u_1+\beta u_2)=T((\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)v_1+...+(\alpha\alpha_n+\beta\beta_n)v_n)=\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1+\beta\beta_1\\ \vdots\\ \alpha\alpha_n+\beta\beta_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\alpha T(u_1)+\beta T(u_2)$. ■

הגדרה 15.30 יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$. בסיס סדור הוא n-יה של וקטורים $(v_1,v_2,...,v_n)$ כך ש- $v_1,...,v_n\in V$ בסיס של V.

הגדרה 15.31 יהי $A=(v_1,...,v_n)$ בסיס סדור של מ"ו V. יהי $v\in V$. וקטור הקווארינטות של v ביחס ל- A מסומן ב- $[v]_A$ ומוגדר ע"י $\mathbb{F}^n\ni\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=[v]_A$, כשאר $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$.

הערה 15.32 $[v]_A$ מוגדר היטב כי $\alpha_1,...,\alpha_n$ קיימים ויחידים וכי הסדר נקבע (הבסיס הסדור).

דוגמות

1. $V=\mathbb{R}^3$, $A=(e_1,e_2,e_3)$. יהי $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. מהו $[v]_A$? $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\underline{1}e_1+\underline{2}e_2+\underline{3}e_3$ ולכן $[v]_A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.
2. $V=\mathbb{R}^3$. $A=(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix})$. ויהי $v=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$. מהו $[v]_A$? $v=\underline{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\underline{-6}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\underline{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
3. נביט בבסיס הסדור של $\mathbb{R}_2[x]$ הנתון ע"י $A=(1+x,1+x^2,1-x^2)$. יהי $p(x)=1-x+2x^2$. מהו $[p]_A$? $p(x)=\underline{-1}(1+x)+\underline{2}(1+x^2)+\underline{0}(1-x^2)$ לכן $[p]_A=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.