Nota de introducción: Caminos, Homotopía y su conexión con TDA

Contents

1 Objetivo y notación

El objetivo de esta nota es introducir:

- caminos en espacios topológicos,
- homotopía entre funciones (y entre caminos),
- relación de equivalencia y clases,
- una conexión básica con Topological Data Analysis (TDA) mediante complejos de Vietoris–Rips.

Notación:

- $[0, 1]$ es el intervalo unidad.
- $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es el círculo unitario.
- $\mathcal{C}(X, Y)$ denota el conjunto de funciones continuas $X \to Y$.

2 Relación de equivalencia

Sea A un conjunto. Una relación $\sim$ sobre A es una **relación de equivalencia** si para todo $a, b, c \in A$:

(a) **Reflexiva:** $a \sim a$.

(b) **Simétrica:** si $a \sim b$, entonces $b \sim a$.

(c) **Transitiva:** si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.

2.1 Clases de equivalencia y cociente

La **clase de equivalencia** de $a \in A$ es

$$[a] = \{x \in A : \ x \sim a\}.$$

El conjunto cociente es

$$A/\!\sim \; = \; \{[a] : a \in A\}.$$

Las clases de equivalencia forman una partición de A (no se traslapan y cubren todo A).

3 Caminos (paths)

Sea X un espacio topológico.

3.1 Definición

Un **camino** en X es una función continua

$$\gamma : [0,1] \to X.$$

Decimos que γ va de a a b si

$$\gamma(0) = a, \qquad \gamma(1) = b.$$

3.2 Ejemplo en $\mathbb{R}^2$

De $a = (0,0)$ a $b = (1,1)$:

$$\gamma(t) = (t,t).$$

Un **lazo** es un camino cerrado: $\gamma(0) = \gamma(1)$.

4 Homotopía entre funciones

Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

4.1 Definición

Decimos que f es **homotópica** a g (se escribe $f \simeq g$) si existe una función continua

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

tal que

$$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = g(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Intuición: H es una deformación continua de f a g.

5 La homotopía es una relación de equivalencia

Consideremos la relación $\simeq$ sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ dada por homotopía.

5.1 Reflexividad

Para $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ definimos

$$H(x,t) = f(x).$$

Entonces $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = f(x)$, y H es continua. Por tanto, $f \simeq f$.

5.2 Simetría

Si H es una homotopía de f a g, definimos

$$K(x,t) = H(x, 1-t).$$

Entonces

$$K(x,0) = H(x,1) = g(x), \qquad K(x,1) = H(x,0) = f(x),$$

y K es continua. Luego, $g \simeq f$.

5.3 Transitividad

Si H es una homotopía de f a g y G es una homotopía de g a h, definimos $F : X \times [0,1] \to Y$ por pegado:

$$F(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se cumple:

$$F(x,0) = H(x,0) = f(x), \qquad F(x,1) = G(x,1) = h(x),$$

y en $t = \frac{1}{2}$ coinciden porque

$$H(x,1) = g(x) = G(x,0).$$

Por el lema de pegado, F es continua, así que $f \simeq h$.

Conclusión: $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$.

6 Homotopía de caminos con extremos fijos (mención útil)

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ caminos con los mismos extremos:

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \qquad \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Decimos que son **homotópicos con extremos fijos** si existe una aplicación continua

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

tal que

$$H(s,0) = \gamma_0(s), \qquad H(s,1) = \gamma_1(s),$$

y además mantiene fijos los extremos:

$$H(0,t) = \gamma_0(0), \qquad H(1,t) = \gamma_0(1) \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Esta relación también es una relación de equivalencia y es base para definir el grupo fundamental $\pi_1(X)$.

7 Conexión con TDA: ejemplo simple con Vietoris–Rips

La idea en TDA es aproximar la "forma" de datos (puntos) construyendo complejos simpliciales a diferentes escalas ε y calculando invariantes (por ejemplo, homología y números de Betti), que son invariantes por homotopía.

7.1 Círculo unitario y puntos equiespaciados

Tomamos 6 puntos en el círculo unitario S^1:

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{6}, \qquad p_j = (\cos\theta_j, \sin\theta_j), \qquad j = 0,1,2,3,4,5.$$

Interpretación de "pasos": desde p_j, moverse k pasos significa ir a p_{j+k} (índices módulo 6).

7.2 Distancias por pasos

El ángulo entre p_j y p_{j+k} es

$$\Delta\theta = \theta_{j+k} - \theta_j = \frac{2\pi k}{6}.$$

En un círculo de radio 1, la cuerda correspondiente tiene longitud

$$d(k) = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right).$$

Por tanto:

$$d(1) = 1, \qquad d(2) = \sqrt{3}, \qquad d(3) = 2.$$

7.3 Complejo de Vietoris–Rips VR_ε

Dado un conjunto finito de puntos, el complejo VR_ε se define así:

- Se agrega una arista (p_i, p_j) si $\|p_i - p_j\| \leq \varepsilon$.
- Se agrega un triángulo (p_i, p_j, p_k) si las tres distancias por pares son $\leq \varepsilon$.
- En general, se agrega un símplice cuando todas las distancias por pares cumplen $\leq \varepsilon$.

7.4 Dos escalas y números de Betti

Caso A: $1 < \varepsilon < \sqrt{3}$ **(ej.** $\varepsilon = 1.2$**).** Como $d(1) = 1 \leq \varepsilon$, se conectan vecinos. Como $d(2) = \sqrt{3} > \varepsilon$, no se conectan puntos a dos pasos. El complejo es un ciclo (hexágono), con un agujero:

$$\beta_0 = 1, \qquad \beta_1 = 1.$$

Intuición: VR_ε "se parece" a un círculo ($VR_\varepsilon \simeq S^1$).

Caso B: $\sqrt{3} < \varepsilon < 2$ **(ej.** $\varepsilon = 1.75$**).** Ahora también se conectan puntos a dos pasos porque $d(2) = \sqrt{3} \leq \varepsilon$. Entonces para cada triple consecutivo (p_j, p_{j+1}, p_{j+2}) aparecen las tres aristas y, por tanto, un triángulo que rellena el ciclo. El agujero desaparece:

$$\beta_0 = 1, \qquad \beta_1 = 0.$$

7.5 Comentario clave

En TDA se estudia cómo cambian estos rasgos al variar ε (persistencia). Como la homología es invariante por homotopía, rasgos que persisten suelen interpretarse como estructura real y no ruido.