Önemli NOT: Gerçel değerli (reel) bir $x[n]$ işaretinin DTFT'si ayrık zaman Fourier dönüşümü: reel ya da kompleks olabilir. Reel olması durumunda sadece genlik spektrumu vardır. Genlik spektrumu, kompleks olması durumunda ise hem genlik hem faz spektrumu, genlik spektrumu çift, faz spektrumu tek fonksiyondur. Sürekli zamandan farklı olarak spektrumlar 2π ile periyodiktir.

Örnek: $x[n] = a^n u[n]$ — $x[n]$ işaretinin Fourier dönüşümünün var olabilmesi için gerekli koşulu bularak Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n . u[n]| < \infty$$ → gerekli koşul: işaret mutlak toplanabilir olmalı

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n < \infty$$

$|a| < 1$ yakınsak olması için

$|a| < 1$ ise $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a^n e^{-j\omega n}}_{(a e^{-j\omega})^n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & 0 \end{cases}$$

Örnek: $x[n] = a^{|n|}$, $|a| < 1$ $\quad X(e^{j\omega}) = ?$

$n < 0$ için $x[n] = a^{-n}$

$n \geq 0$ için $x[n] = a^n$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} . e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n . e^{-j\omega n}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n . e^{j\omega n} - 1\right] + \sum_{n=0}^{\infty} (a . e^{-j\omega})^n$$

$$= \left(\frac{1}{1-ae^{j\omega}} - 1\right) + \frac{1}{1-a.e^{-j\omega}} = \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$$

Önemli NOT: Ayrık zaman bir işaretin Fourier dönüşümünün hesaplanması için periyodik olma zorunluluğu yoktur. İşaret periyodik olsun, olmasın Fourier dönüşümü hesaplanabilir. Periyodik bir $x[n]$ işaretinin Fourier dönüşümü;

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$ eşitliği ile hesaplanır.

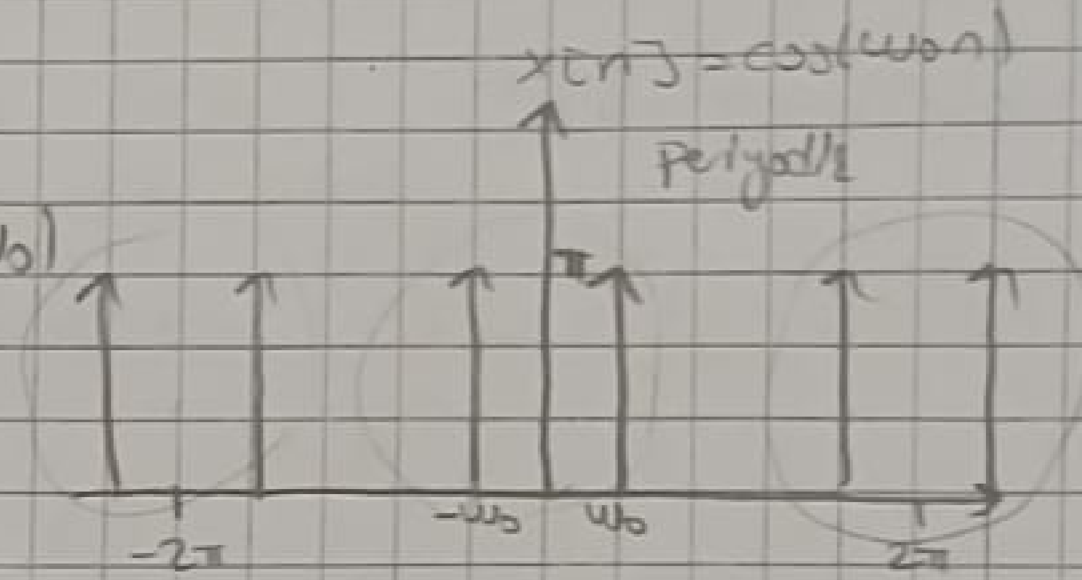
Sürekli zamandan farklı olarak bu ifade 2π ile periyodiktir.

Örnek: $x[n] = \cos(w_0 n)$

$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{jw_0 n} - e^{-jw_0 n}\right)$

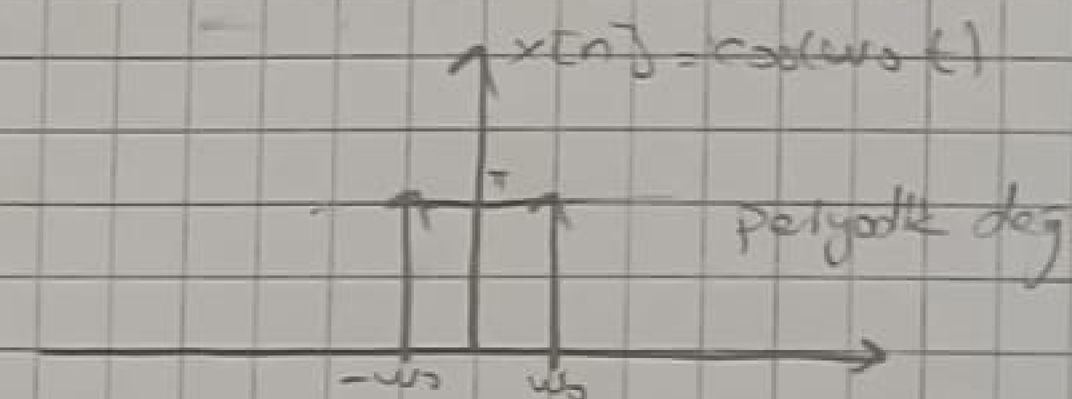
$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$

$X(e^{jw}) = \underbrace{2\pi a_{-1}}_{\pi} \delta(w+w_0) + \underbrace{2\pi a_1}_{\pi} \delta(w-w_0)$



$X(e^{jw}) = \pi\delta(w+w_0) + \pi\delta(w-w_0)$

2π ile periyodik



NOT: Sürekli zaman Fourier dönüşümünde verilen öteleme, ölçekleme, ters çevirme, konvolüsyon ve modülasyon (çarpma) gibi özellikler ayrık zamanda da mevcuttur. Ancak ayrık zamanda türev özelliği frekansta türev alma olarak şu şekilde ifade edilir.

$x[n] \xrightarrow{FD} X(e^{jw})$ ise;

$n.x[n] \longrightarrow j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$ olur.

Ek olarak aşağıdaki özellikle sık sık karşımıza çıkar;

$(n+1).a^n u[n] \xleftrightarrow{FD} \frac{1}{(1-ae^{-jw})^2}$

Örnek: $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$ giriş-çıkış ilişkisi verilen LTI sistemin frekans ve impuls cevabını hesaplayınız. Frekans cevabı nedir?

$FD\{h[n]\} = H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})}$ frekans cevabı

$y[n] \longrightarrow Y(e^{jw})$

$y[n \pm n_0] \longrightarrow Y(e^{jw}).e^{\pm jwn_0}$

$Y(e^{jw}) = \frac{3}{4}Y(e^{jw})e^{-jw(1)} + \frac{1}{8}Y(e^{jw}).e^{-jw(2)} = 2X(e^{jw})$

$Y(e^{jw})\left[1 - \frac{3}{4}e^{-jw} + \frac{1}{8}e^{-2jw}\right] = 2X(e^{jw})$

$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-jw}+\frac{1}{8}e^{-2jw}}$ (frekans cevabı)

$$a^n u[n] \xrightarrow{FD} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)$$

$$\frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow A-\frac{A}{4}e^{-j\omega}+B-\frac{B}{2}e^{-j\omega}=2$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=2 \\ \frac{A}{4}-\frac{B}{2}=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B=-2 \\ A=4 \end{array}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\rightarrow h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n . u[n] - 2.\left(\frac{1}{4}\right)^n . u[n]$$

LAPLACE Dönüşümü !

Sürekli zaman bir $x(t)$ işaretinin laplace dönüşümü;

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-st}\,dt$$ hesaplanır. f.d. $s=j\omega$ kabul ederken, Laplace $s = \sigma + j\omega$ kabul eder. (reel, imajiner)

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-\sigma t}.e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = FD\{x(t).e^{-\sigma t}\}$$

görüldüğü gibi $j\omega$ ekseni üzerinde yani $s=j\omega$ olması durumunda laplace dönüşümü ve fourier dönüşümü birbirine eşittir. Bir $x(t)$ işaretinin laplace dönüşümünün varolabilmesi için $x(t).e^{-\sigma t}$ işaretinin fd. yakınsamalıdır. yani mutlak integrallenebilir olmalı.

Laplace dönüşümünün varolduğu s değerler kümesine yakınsaklık bölgesi (ROC) denir. Yakınsaklık bölgesi yani ROC $j\omega$ eksenini kapsıyorsa işaretin f.d.'si vardır. Bazı işaretler için f.d. yakınsamazken, laplace dönüşümü yakınsayabilir.

"her laplace dönüşümünün fourier serisi olmayabilir"

Örnek | $x(t) = e^{-at}u(t)$

$[X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-at} \cdot u(t)] \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt$ a>0 ise FD var

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+s)} dt = \frac{-1}{a+s} \cdot e^{-t(a+s)} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$

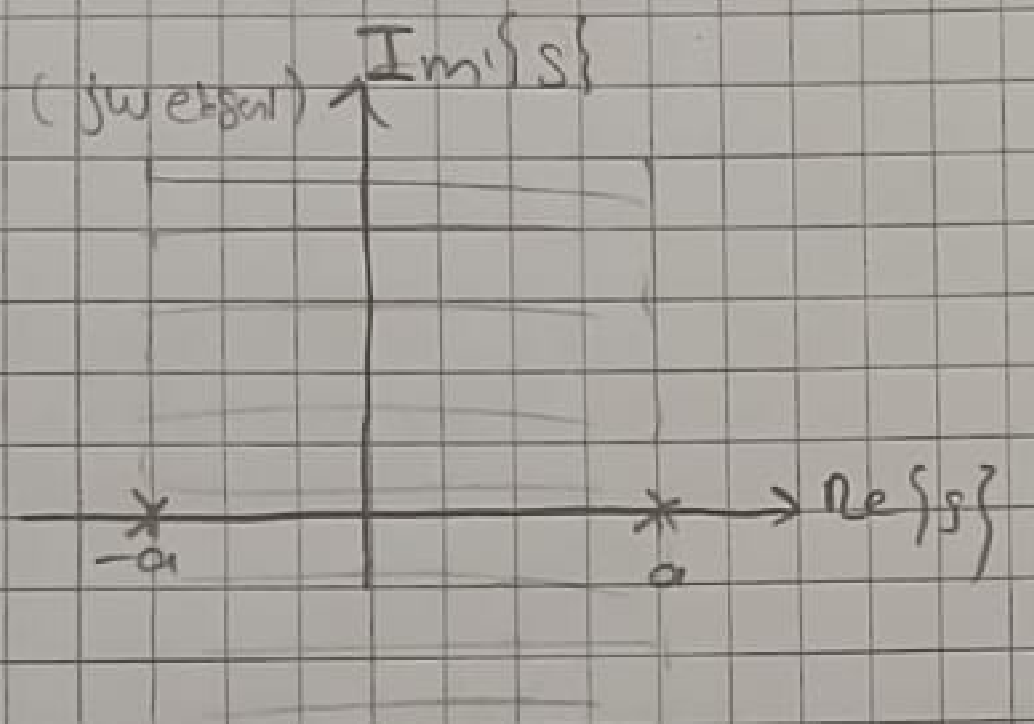
$= \int_{0}^{\infty} [e^{-at} \cdot e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+\sigma)} \cdot e^{-j\omega t} dt$

$Re\{s\} > -a$

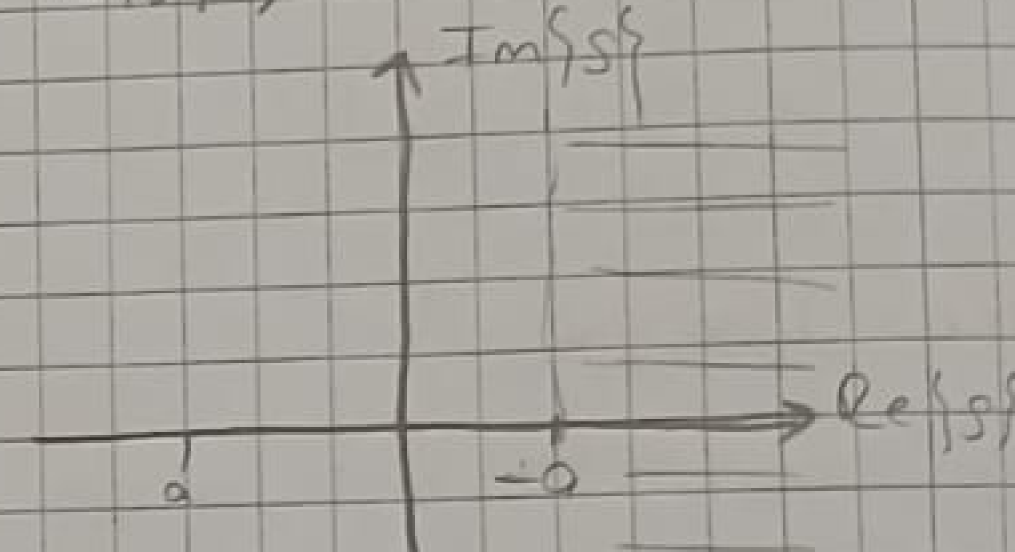
$Re\{s\} = \sigma$

$a + \sigma > 0$

$Re\{s\} > -a$



a>0 için



a<0 için

HATIRLATMA

Örnek | $x(t) = -e^{-at}u(t)$

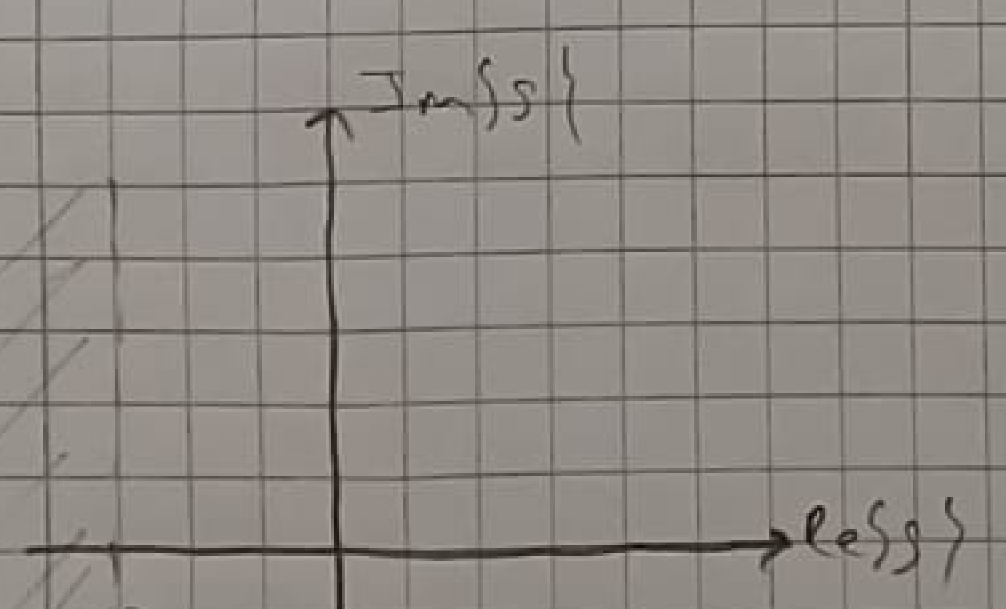
$[X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [-e^{-at}u(-t)] e^{-j\omega t} dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$ FD için a<0 olmalı

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [-e^{-at}u(-t)] \cdot e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{t(-a-s)} dt = \frac{1}{s+a} \cdot e^{t(-a-s)} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a}$

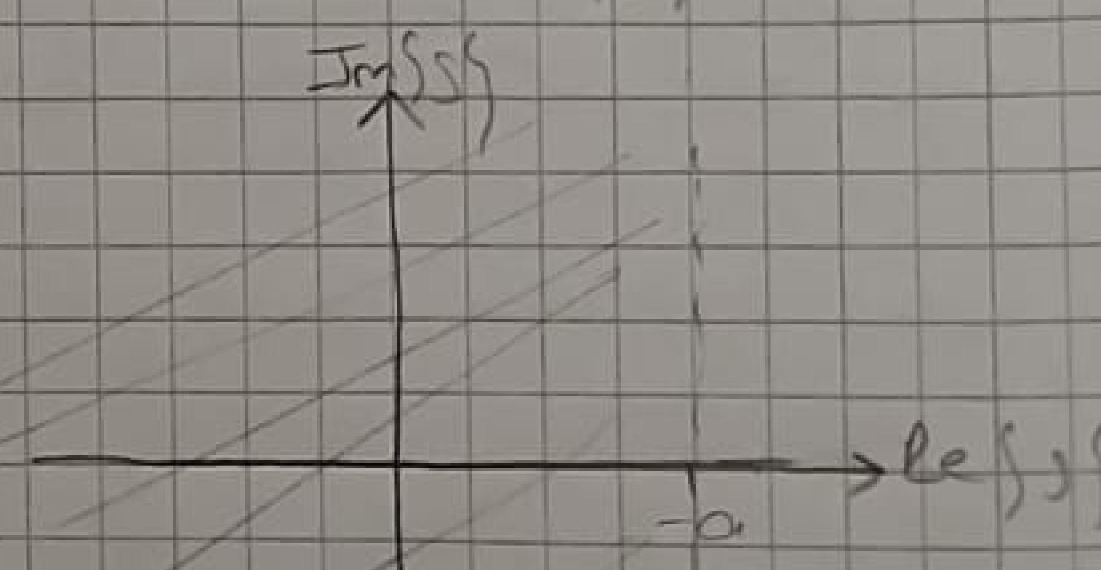
$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$ $\boxed{Re\{s\} < a}$ ROC

$a + \sigma < 0$ olmalı

$Re\{s\} < -a$



a>0 için



a<0 için

NOT: Örneklerden görüldüğü gibi farklı iki işaretin laplace dönüşümü aynı olabilir. O halde Laplace dönüşümüyle beraber ROC mutlaka belirtilmelidir.

Örnek: $x(t) = 3.e^{-2t}u(t) - 2.e^{-t}u(t)$ $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız. Kutup sıfır diyagramını çizerek yakınsaklık bölgesini gösteriniz.

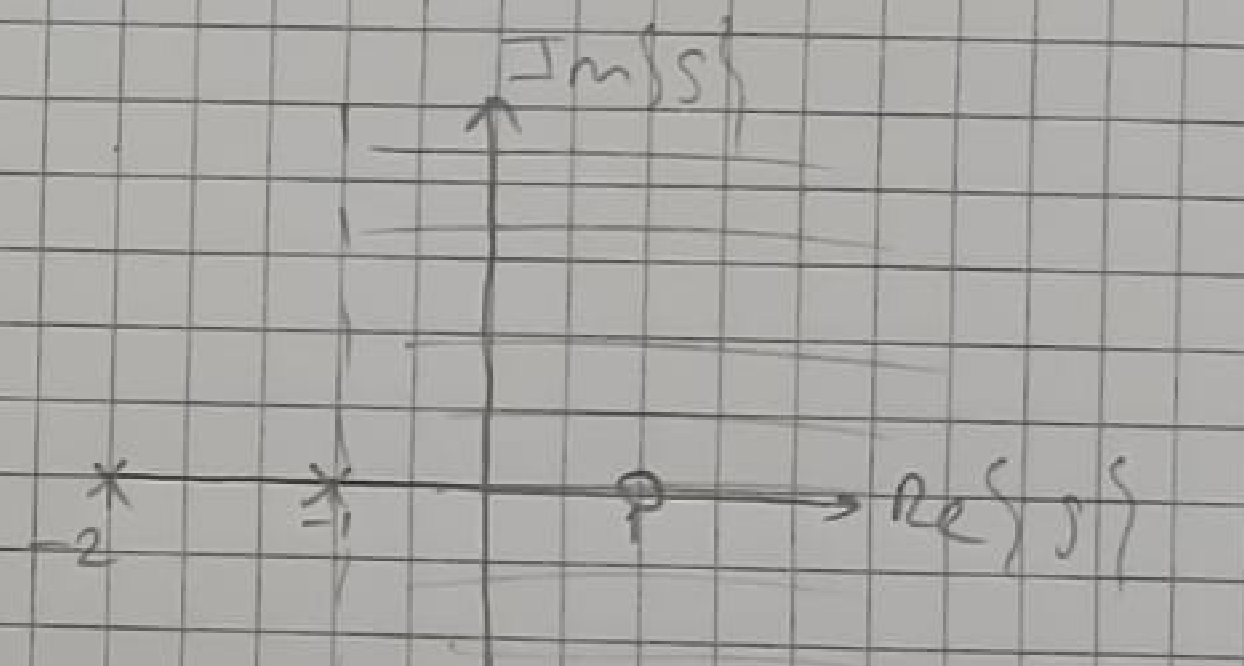
$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -a$$

$$X(s) = 3\underbrace{\frac{1}{s+2}}_{Re\{s\}>-2} - 2\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{Re\{s\}>-1} = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

$$X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

Payın kökleri sıfırlar "o"

Paydanın kökleri kutuplar "x"



ROC: $Re\{s\} > -1$ kesişim