

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Raport.
Zredukowany model wzrostu kanałów i
struktur dendrytycznych.
część 4.

Oleg Kmechak

Warszawa, Kwiecień 2019.

Treść

- Wstęp
- Generacja adaptatywnej siatki w Triangle.
- Obliczanie parametrów szeregu. Porównywanie wyników w FreeFem++, Mathematica, Deal.II.
- Pierwsze poprawne wyniki wzrostu w pole Poisson(a).

Wstęp

Już w raporcie #2 omówiono dokonane próby generacji adaptatywnej siatki z pomocą Gmsh. Próby te jednak ujawniły kilka problemów do rozwiązania (Po generacji siatki trzeba ją potem konwertować w kwadratowe elementy. Są dwa sposoby jak to zrobić z pomocą Gmsh, ale jak było wykazane wcześniej, ten algorytm pracuje niestabilnie, albo z pomocą tethex. Dodatkowo wynikły problemy z odczytaniem Gmsh elementów z powrotem do programu.), też było zwrócono uwagę na to, że Triangle też ma możliwość generowania adaptatywnej siatki.

Dlatego w aktualnym raporcie zostało zaimplementowane dane rozwiązanie, które działa niezawodnie.

W raporcie #2 były dokonane i przedstawione próby obliczania parametrów szeregu wokół czubka (są to w istocie niezbyt skomplikowane całki po powierzchni). Ale w tych wynikach były pewne błędy (część z nich była poprawiona już w raporcie #3).

W tym raporcie były przeprowadzone szczególne porównania wyników z FreeFem++, Mathematica i Deal.II, co w końcowym wyniku spowodowało prawidłowe znaczenie parametrów szeregów i w efekcie doprowadziło do przeprowadzenia pierwszej poprawnej symulacji wzrostu.

Generacja adaptatywnej siatki w Triangle.

Triangle proponuje opcję [-u](#), która pozwala skorzystać z funkcji *triunsuitable()* - ta funkcja ma na wejściu współrzędne wierzchołków elementu i jego powierzchnię, a na wyjściu wydaje czy mamy zmienić ten element czy nie.

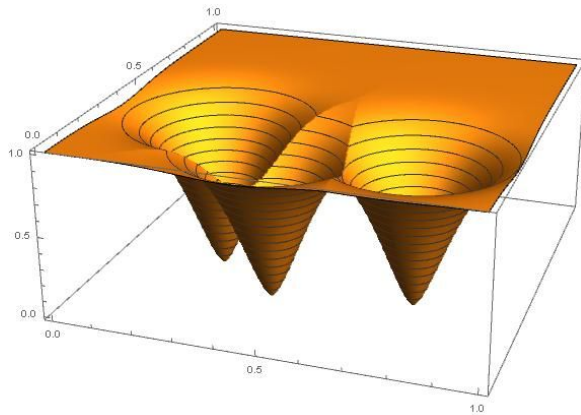
Wcześniej była już zaimplementowana podobna funkcja ograniczająca płaszczyzn elementów, jak i w oryginalnym programie FreeFem++, a dokładnie:

$$\text{Area}(r) = 1 + \text{min_area} - \text{Exp}(-(r/r0)^n)$$

min_area - minimalne znaczenie płaszczyzny trójkąta, jakie może osiągnąć Triangle (przy znaczeniu $< 1\text{-}e11$ zdarzają się błędy numeryczne).

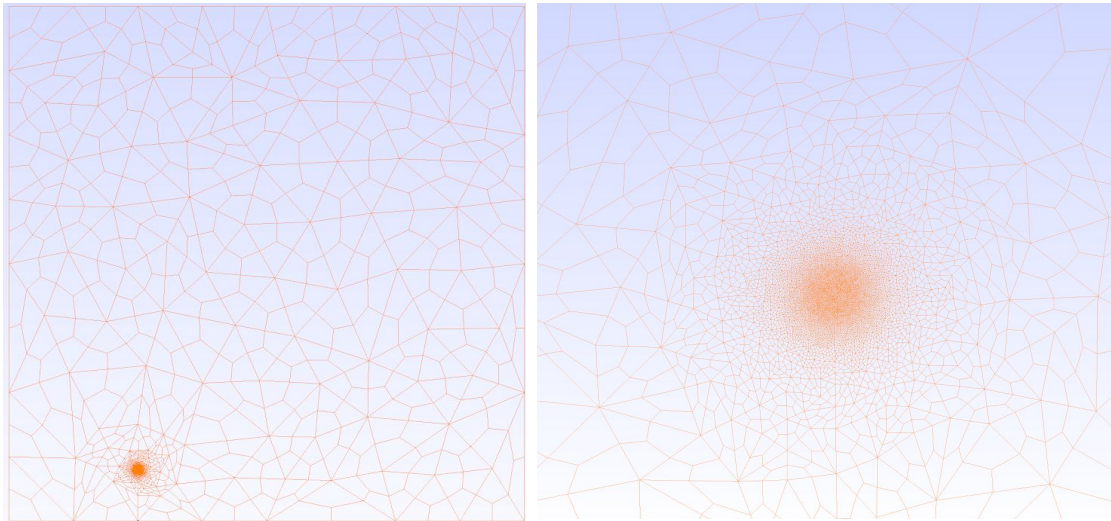
r0 - parameter wokół czubka, optymalne wyniki otrzymamy przy $r0 = 3 \cdot R$, gdzie *R* - radius całkowania wokół czubka.

n - parametry, optymalne wyniki otrzymamy przy $n = 4$.



Przykład danej funkcji dla trzech czubków.

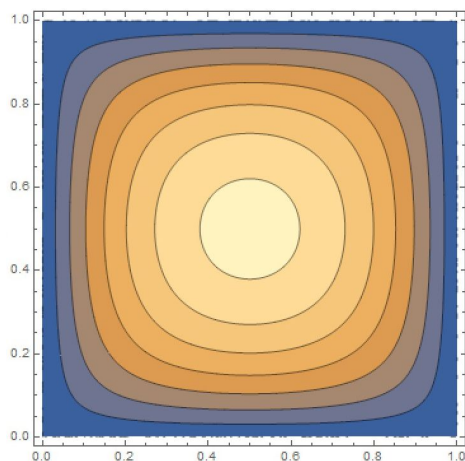
Przykład adapttywnej siatki generowanej przez Triangle (też było użyte przekształcenie trójkątnych elementów w prostokątne).



Obliczanie parametrów szeregu.

Porównywanie wyników w FreeFem++, Mathematica, Deal.II.

W raporcie #2 była przetestowana całka po całym regionie i była otrzymana bardzo dobra zgodność z analogicznym wynikiem z Mathematica. Było testowane następane równanie:



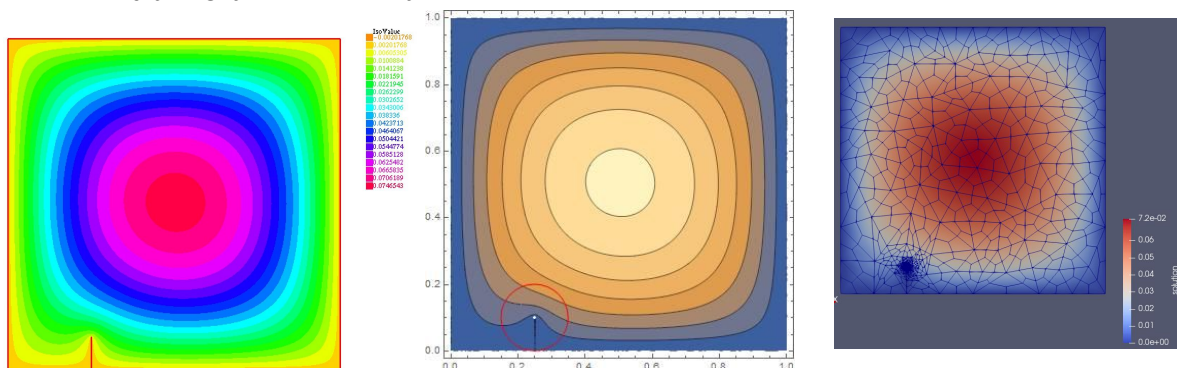
$$\text{Laplacia}(u) + 1 = 0$$

Na regionie x, y od 0 do 1.

a

Następnie trzeba było policzyć podobną całkę w okolicy czubka dendryty, ale wyniki ciągle były błędne. Po szczegółowym zapoznaniu się z dokumentacją Deal.II okazało się, że problem polegał na tym, że moja całka była sumowana po poszczególnych punktach kwadratury. A współrzędne punktów kwadratury są zdefiniowane lokalnie względnie elementu. Ponieważ całka po całym regionie dawała prawidłowy wynik, to utrudniało wykrycie błędu.

1. Dlatego zostało przeprowadzone szczegółowe porównanie wyników z FreeFem++, Mathematica i Deal.II, dopóki nie wskazano błędu (akurat to, że punktu kwadratury mają względne współrzędne).



Względny błąd parametrów szeregu(FreeFem++ do Deal.II):

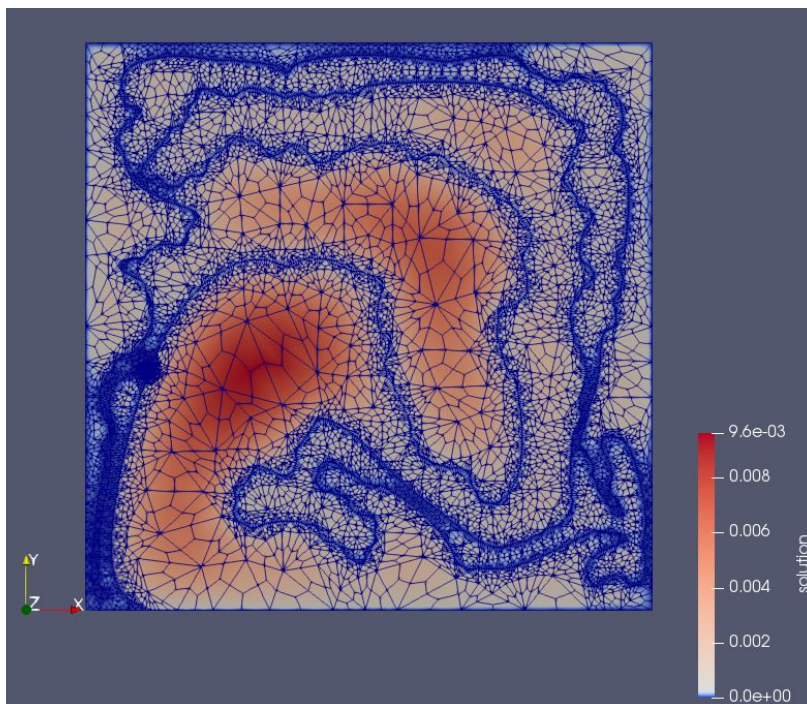
A1 - 0.2%, A2 - 0.008 %, A3 - 6%

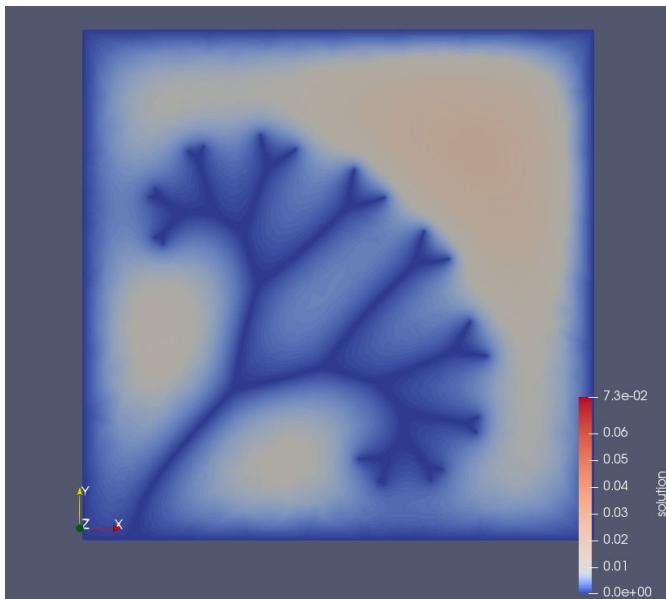
Pierwsze poprawne wyniki wzrostu w pole Poisson(a)

Tylko jeszcze tylko jeden niepoprawny pozwolimy, ale zasługuje uwagi. Kierunek wzrostu w danej symulacji był obliczony z pomocą następnego wzoru (więcej szczegółów o modelu można znaleźć za tym linkiem: <https://www.fuw.edu.pl/~piotrek/theses/PMorawiecki.pdf>):

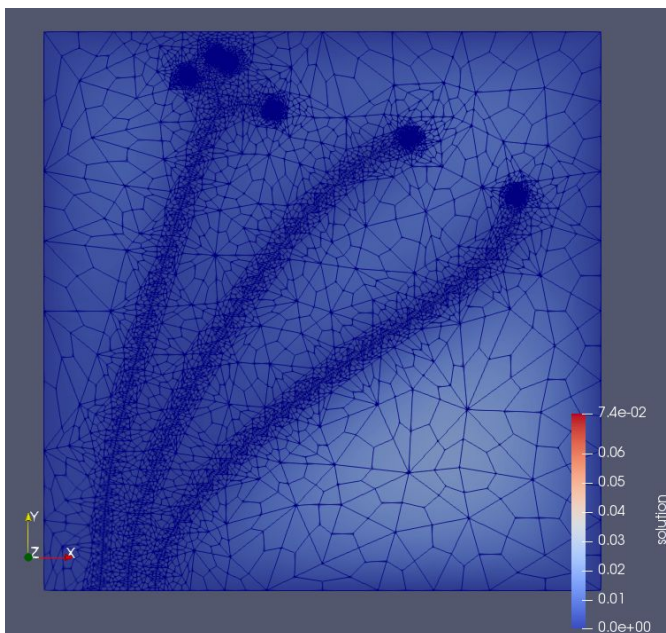
$$\tan \alpha = 2 \frac{a_2}{a_1} \sqrt{ds}$$

Przez błąd były podstawione parametry A3 i A2, i jak widać takie rozwiązanie też produkuje bardzo podobną linię wzrostu, która nie przecina sama siebie i wzrasta w kierunku maksymalnego pola.

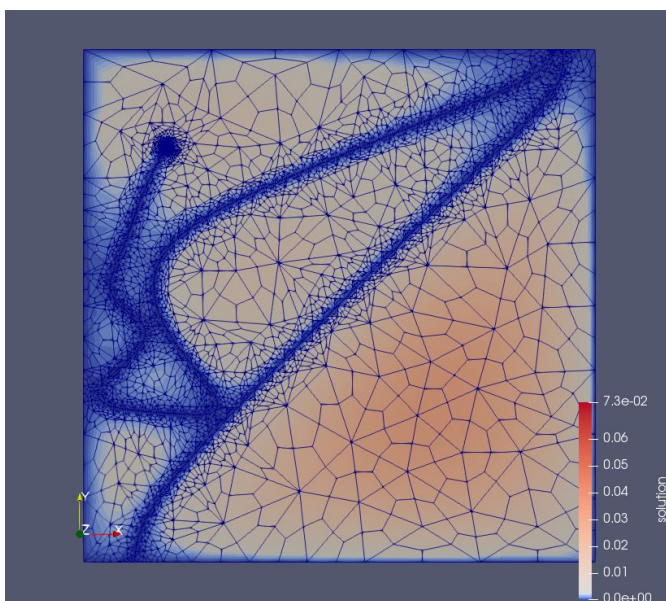




Wzór wykazuje wzrost dendrytów i ich bifurkacje



Ściganie się pomiędzy kilkoma dendrytami. Krok wzrostu jest stały i nie jest proporcjonalny do parametru $A1$.



Wzrost pojedynczej gałęzi bez bifurkacji.