מודלים חישוביים 04-11

פרק 1 - שפות פורמליות

- אב: $\Sigma_1 = \{0,1\}$ $\Sigma_2 = \{a,b,c\}$
- מילה/מחרוזת: $w_1 = aabc$
- אורך מילה: $|w_1| = 4$
- המילה הריקה: ε $|\varepsilon| = 0$
- שכיחות האות a במילה w: $\#_a(w_1) = 2$
- פעולת השרשור: $w_1 = aab$ $w_2 = cb$ $\Rightarrow w_1 \cdot w_2 = aabcb$
- פעולת החזקה: $w^n = w \cdot w \cdot w \cdots w \Rightarrow \begin{cases} w^0 = \varepsilon \\ w^{n+1} = w^n \cdot w \end{cases}$
- פעולת ההיפוך: $w = abb \Rightarrow w^R = bba \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^R = \varepsilon \\ (wG)^R = G \cdot w^R \end{cases}$ $G \in \Sigma$
- $\Sigma^n = \{G_1 G_2 \dots G_n \mid \forall G_i \in \Sigma\}$
- $\Sigma = \{0,1\}$ $\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 100, \dots\}$
- $\Sigma^+ = \bigcup \Sigma^n = \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \dots \Sigma^n$
- $\Sigma^* =$ כלל המילים (כולל את המילה הריקה)

רישא, סיפא ותת-מילה

א) x תקרא רישא של w אם קיימת y כך שמתקיים $x \cdot y = w$

ב) x תקרא סיפא של w אם קיימת y כך שמתקיים $y \cdot x = w$

ג) x תקרא תת-מילה של w אם קיימות z,y כך שמתקיים $z \cdot x \cdot y = w$

תרגילים

1- רשום את כל הרישות, סיפות ותתי-מילים של המילים: $w = abaa$

רישות	סיפות	תתי-מילים			
abaa	abaa	abaa	baa	ε	{רישות}
aba	baa	aba	aa		$\cup$
ab	aa	ab	b		= {סיפות}
a	a	a	ba		$\cup$
ε	ε				{b, ba}

2- נתון: $|w| = n$

א. כמה רישות יש ל- w? ⇐ $n+1$

ב. כמה סיפא יש ל- w? ⇐ $n+1$

ג. תן חסם עליון ותחתון לגבי תתי-המילים של w? ⇐

חסם תחתון - כאשר כל האותיות זהות $w=aaaa$ ⇐ $n+1$

חסם עליון - כאשר כל האותיות שונות $w=abcd$ ⇐

מילה באורך 0 - 1

מילה באורך 1 - n

- " - " - 2 - n-1

- " - " - 3 - n-2

⋮

- " - " - n - 1

$$1+\frac{n(n+1)}{2}$$

• הגדרה: שפה פורמלית $L \subseteq \Sigma^*$

דוגמאות לשפות פורמליות.

1- $L_1 = \emptyset$

2- $L_2 = \Sigma^*$

3- $L_3 = \{w \mid \exists x \in \Sigma^* \ w = aaax\}$

4- $L_4 = \{w \mid \#a(w) \geq 5\}$

5- $L_5 = \{w \mid \#a(w) = 2 \cdot \#b(w)\}$

6- $L_6 = \{w \mid w^R = w\}$ פלינדרומים

7- $L_7 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

8- $L_8 = \{a^m b^k a^t \mid t = \max(m,k)\}$

9- $L_9 = \{a^p \mid p$ ראשוני $\}$

04-11-11

פעולות בשפות

- איחוד: $L_1 \cup L_2$
- חיתוך: $L_1 \cap L_2$
- הפרש: $L_1 - L_2$
- הפרש סימטרי: $L_1 \Delta L_2$
- משלים: $\overline{L_1}$
- שרשור: $L_1 \cdot L_2 = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 \}$

דוגמה: $L_1 = \{ab, bba\}$ $L_2 = \{\varepsilon, b, aa\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{ab, abb, abaa, bba, bbab, bbaaa\}$

- חזקה: $L \cdot L \cdot L \cdot L = L^n$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} L^0 = \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} = L^n \cdot L \end{cases}$
- $L^+ = \bigcup L^n \quad n \in N$
- $L^* = \bigcup L^n \quad n \in N \cup \{0\}$

תרגילים

1- הוכח "תכן $L^* = L^+$? $\Leftarrow$ כן, אם ורק אם $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$

$(\Leftarrow)$ $L^* = L^+$, $\varepsilon \in L^+$ $\longrightarrow$ $L = \varepsilon$, $L^+ = \varepsilon$, $L^* = L^+$ $(\Rightarrow)$

2- הוכח "תכן L^* סופי? $\Leftarrow$ כן, $L_1 = \emptyset$ $L_2 = \{\varepsilon\}$

3- נתון: $L_1 = \{w \mid |w| \bmod 2 = 0\}$

$L_2 = \{w \mid \#a(w) = \#b(w)\}$

$L_3 = \{w \mid w^R = w\}$

הסבר:

א. $L_1 \cap L_2$ $\Leftarrow$ L_2

ב. $L_1 \Delta L_2$ $\Leftarrow$ $L_1 - L_2$ (איחוד פחות חיתוך)

ג. L_3^+ $\Leftarrow$ Σ^*

aaba גם # אות אחת היא פלינדרום

ולכן ניתן להרכיב הכל

4- הוכח או הפרך:

א. $L_1\cdot(L_2\cup L_3) = L_1\cdot L_2 \cup L_1\cdot L_3$

- $(\Leftrightarrow)$ $w\in L_1\cdot(L_2\cup L_3) \Leftrightarrow w=xy$, $x\in L_1$ ו $y\in L_2\cup L_3$
- $\Leftrightarrow w=xy$, $x\in L_1$ ו $(y\in L_2$ או $y\in L_3)$
- $\Leftrightarrow w=xy$, $(x\in L_1$ ו $y\in L_2)$ או $(x\in L_1$ ו $y\in L_3)$
- $\Leftrightarrow w\in L_1\cdot L_2$ או $w\in L_1\cdot L_3 \Leftrightarrow w\in L_1\cdot L_2\cup L_1\cdot L_3$

$$\boxed{\begin{array}{l} L\cdot\emptyset=\emptyset \\ L\cdot\{\varepsilon\}=L \end{array}}$$

ב. $L_1(L_2\cap L_3) = L_1\cdot L_2 \cap L_1\cdot L_3$

דוגמה נגדית: $L_1=\{\varepsilon,a\}$ $L_2=\{a\}$ $L_3\{\varepsilon\}$

$L_1\cdot L_2 = \{a,aa\}$ $L_1\cdot L_3=\{\varepsilon,a\}$

$\emptyset \neq \{a\}$

5- $\Sigma=\{0,1\}$ היפוך סיביות w = $Neg(w)$

- דוגמה $Neg(1011)=0100$
- $Neg(L)=\{Neg(w)\mid w\in L\}$
- א. הוכח קיומה של שפה L אבחנתית: $Neg(L)=\bar{L}$

$\Leftarrow$ לכן אפשרויות: $\varepsilon\in L \rightarrow \varepsilon\in Neg(L)$, $\varepsilon\notin\bar{L}$

$\varepsilon\notin L \rightarrow \varepsilon\notin Neg(L)$, $\varepsilon\in\bar{L}$

ב. הוכח קיומה של שפה L המקיימת $Neg(L)=\bar{L}-\{\varepsilon\}$

$L=\{w\mid \exists x\in\Sigma^*\ w=0\cdot x\}$

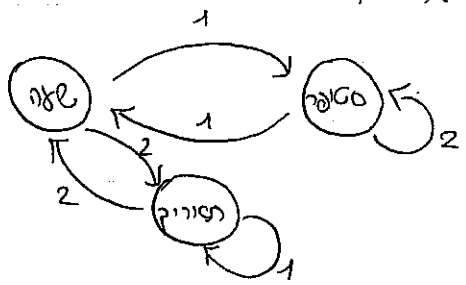
$NegL=\{w\mid \exists x\in\Sigma^*\ w=1\cdot x\} = \bar{L}-\{\varepsilon\}$

מודלים חישוביים 11-11

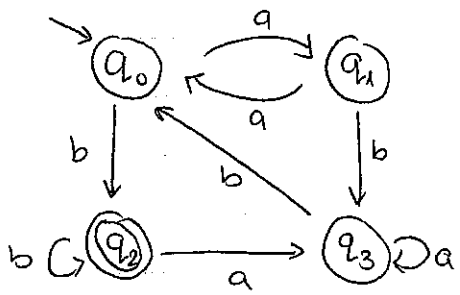
אוטומט סופי דטרמיניסטי (אס"ד)

אוטומט - מכונת מצבים

דוגמא שלנו:



אוטומט סופי:



בהגדרה: אוטומט סופי דטרמיניסטי (אס"ד) $A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$

מצבים, אבי הקלט, מצב התחלה, פונקציית המעברים, מצבים מקבלים

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ $\quad \Sigma = \{a, b\}$ $\quad \delta: Q \times \Sigma \to Q$ $\quad F \subseteq Q$

$\delta(Q_2, a) = q_3$ $\quad F = \{q_2\}$

$Q \backslash \Sigma$	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_3
q_2	q_3	q_2
q_3	q_3	q_0

מסלול שלקח על פני האוטומט:

$w_1 = abb$ $\quad q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{b} q_0$ $\quad$ (מצב לא מקבל) X

$w_2 = aab$ $\quad q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_2$ $\quad$ (מצב מקבל) V

$\hat{\delta}$ - הרחבת δ לעילים:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$$
$$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$$
$$\hat{\delta}(q, w\sigma) = \delta(\hat{\delta}(q,w), \sigma)$$

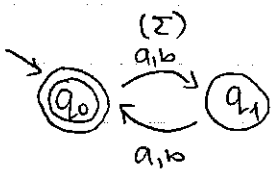
השפה המתקבלת ע"י אוט' A -

$$L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$$

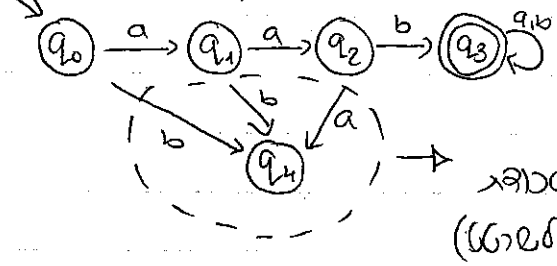
תרגיל

בנה אוט' המקבלים כל מן השפות הבאות.

1. $L_1 = \{ w \mid |w| \bmod 2 = 0 \}$

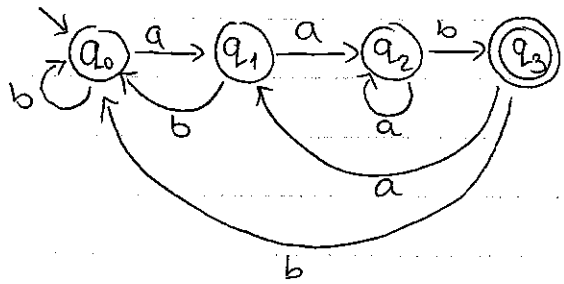


2. L_2 = עילים המתחילות ב- 'aab'

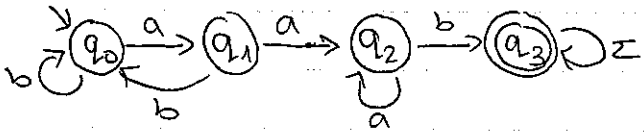


מצב מלכודת
(ניתן לוותר עליו)

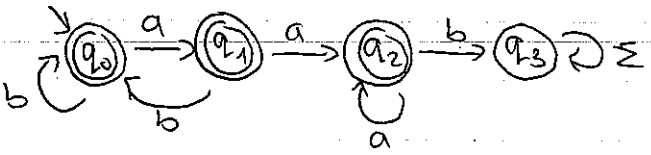
3. L_3 = עילים המסתיימות ב- 'aab'



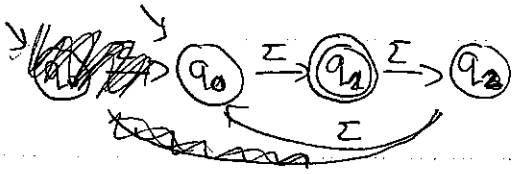
4. L_4 = עילים המכילות את 'aab'



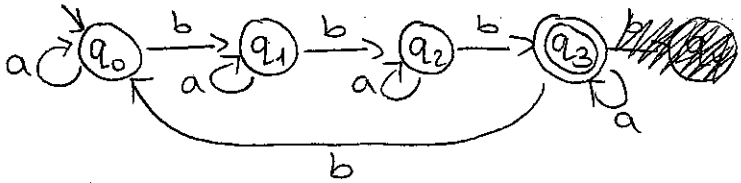
5. L_5 = עילים שאינן מכילות 'aab'



6. $L_6 = \{ w \mid |w| \bmod 3 = 1 \}$



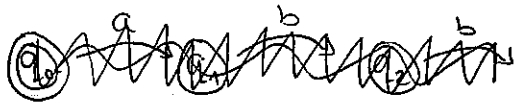
7. $L_7 = \{ w \mid \#_b(w) \bmod 4 = 3 \}$

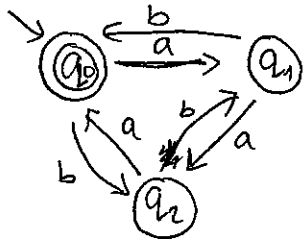


2,5
3,2
1,4
0,3

11-11-11

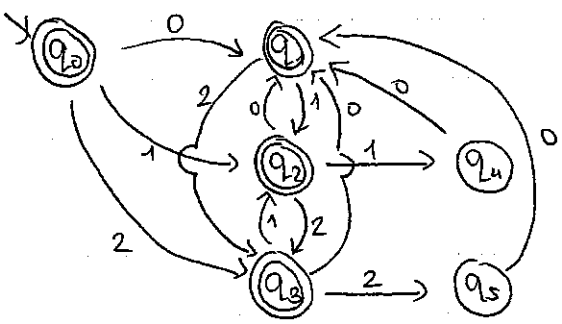
8. $L_8 = \{w \mid (\#_a(w) - \#_b(w)) \bmod 3 = 0\}$





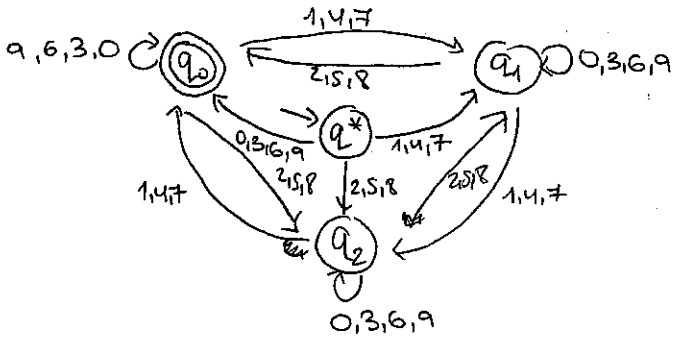
9. $\Sigma = \{0,1,2\}$ L_9 = אוסף המילים בהן לאחר הופעת כל אותיות כלשהי בהכרח חייב להופיע 0.

* ישבנה סושי 00 כי אנו מוסיפים 0 לנו לפיק אוב

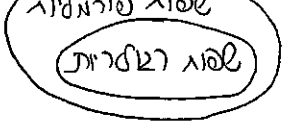


10. $\Sigma = \{0,1,2,\dots,9\}$ L_{10} = אוסף המילים המייצגות מספרים המתחלקים ב-3

* נאופשר אפסים מובילים

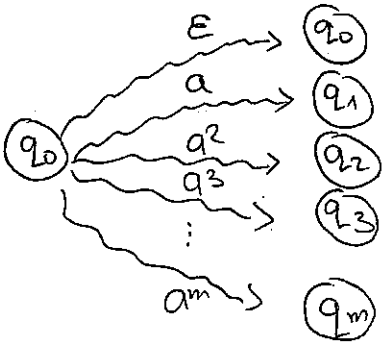


בבלבול: שפה L תקרא רגולרית אם קיים אוסף A המקבל אותה כלומר $L=L(A)$



לדוגמה: השפה $L=\{a^n b^n \mid n\geq 0\}$ איננה רגולרית

הוכחה: נניח בשלילה כי L רגולרית ולכן קיים אוסף A המקבל אותה. נסמן ב-m את מספר מצבי האוסף. נסתכל על הקלט $a^m b^m$ ונראה שהמילים הבאות (בעל הבית)



$\Longrightarrow$ בהכרח קיימים i,j $i\neq j$ כך ש a^i ו- a^j מובילים לאותו המצב שנסמנו P

$$\rightarrow q_0 \xrightarrow{a^i} P \xrightarrow{b^i} q_f$$
$$q_0 \xrightarrow{a^j} P$$

$$\begin{cases} a^i b^i \in L \longrightarrow q_f \in F & \text{סתירה} \\ a^j b^i \notin L \longrightarrow q_f \notin F & \text{מכאן ש- } L \text{ לא רגולרית} \end{cases}$$

<u>משפט</u>: השפות הרגולריות סגורות תחת פעולות בוליאניות

הגדרה: נעסיק להבא סגירות למשלים ולחיתוך

א- <u>סגירות למשלים</u>:

נתון: $A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$ $\quad L = L(A)$

נגדיר: $B = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, Q \setminus F \rangle$ $\quad \bar{L} = L(B)$

ב- <u>סגירות לחיתוך</u>:

נתון: $A_1 = \langle Q_1, \Sigma, q_0', \delta_1, F_1 \rangle$ $\quad L_1 = L(A_1)$

$A_2 = \langle Q_2, \Sigma, q_0'', \delta_2, F_2 \rangle$ $\quad L_2 = L(A_2)$

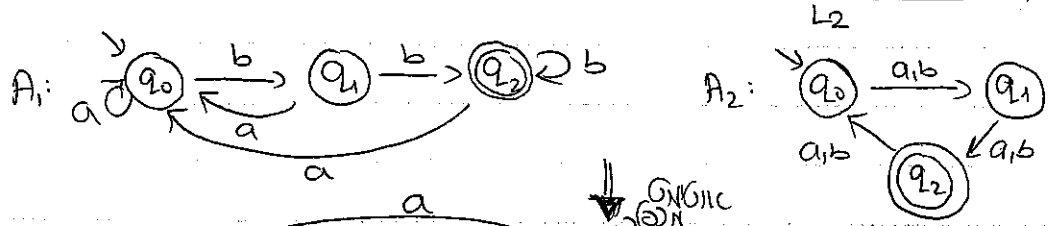
נגדיר: $C = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, (q_0', q_0''), \uparrow, F_1 \times F_2 \rangle$ $\quad L_1 \cap L_2 = L(C)$

אוטומט מכפלה

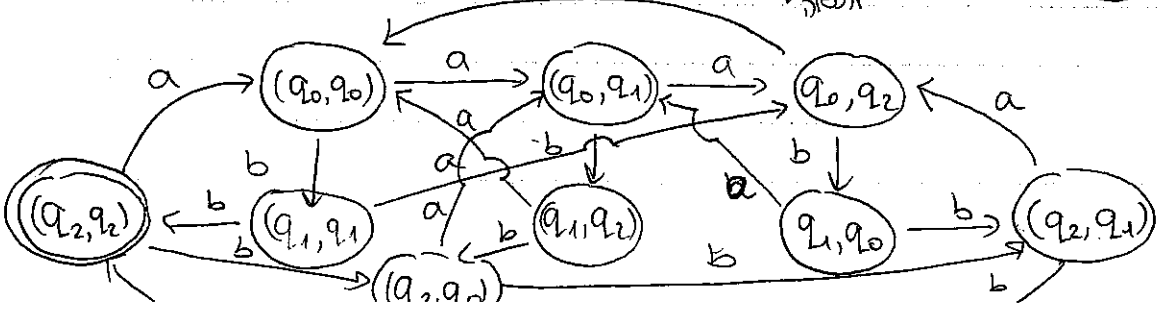
$$\delta((q_i, q_j), \sigma) = (\delta_1(q_i, \sigma), \delta_2(q_j, \sigma))$$

<u>תרגיל</u>

בנה אוטומט (מכפלה) המקבל את אוסף המילים <u>המסתיימות ב- bb</u> (L_1) <u>ושאורכן מודולו 3 שווה ל-2</u> (L_2):



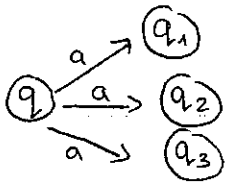
אוטומט מכפלה



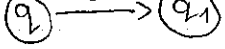
אוטומטים חישוביים 11-18

אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (אס"ל)

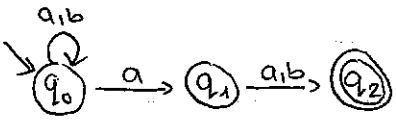
א- מעבר לאפשר מצבים



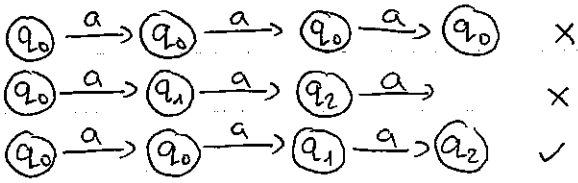
ב- מעבר-ε



מעבר לעצמו מצבים



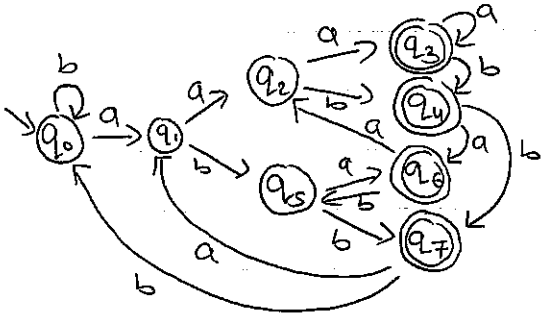
w=aaa:



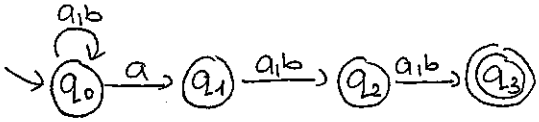
תרגיל

1. L- שפת המילים מעל {a,b} בהן האות השלישית מהסוף היא a

(i) בנה אס"ל המקבל את L



(ii) בנה אס"ל המקבל את L



הגדרה: אס"ל

$A_{ND} = \langle Q_{ND}, \Sigma, q_0, \delta_{ND}, F_{ND} \rangle$

$\delta_{ND} : Q \times \Sigma \longrightarrow 2^{Q_{ND}} \quad (P(Q_{ND}))$

משפט: אם שפה L מתקבלת ע"י אוטו' A_{ND} אז קיים אוט' B המקבל את L

$$L = L(A_{ND}) = L(B)$$

הגדרות:

$\hat{\delta}_{ND}$: הרחבת δ_{ND} למילים

$$\hat{\delta}_{ND} : Q_{ND} \times \Sigma^* \longrightarrow 2^{Q_{ND}}$$

$$\hat{\delta}_{ND}(q, \varepsilon) = q$$

$$\hat{\delta}_{ND}(q, w\sigma) = \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_{ND}(q,w)} \delta_{ND}(q', \sigma)$$

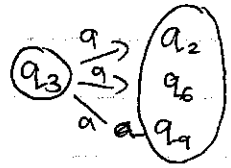
$$L(A_{ND}) = \{ w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}_{ND}(q_0, w) \cap F_{ND} \neq \emptyset \}$$

הוכחת המשפט:

נתון: $L = L(A_{ND})$ $\quad A_{ND} = \langle Q_{ND}, \Sigma, q_0, \delta_{ND}, F_{ND} \rangle$

נבנה: $L = L(B)$ $\quad B = \langle 2^{Q_{ND}}, \Sigma, \{q_0\}, \delta_B, F_B \rangle$

אוטומט מצבה



$$\delta_B(P, \sigma) = \bigcup_{q \in P} \delta_{ND}(q, \sigma)$$

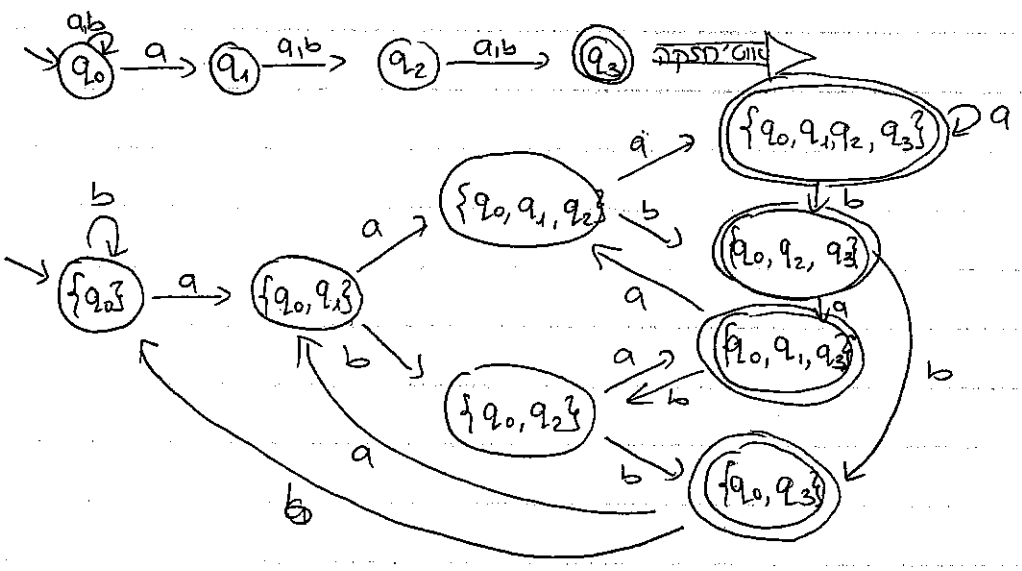
$P \subseteq Q$

$$F_B = \{ P \mid P \cap F_{ND} \neq \emptyset \}$$

(P מכיל מצב מקבל)

תרגיל

1)

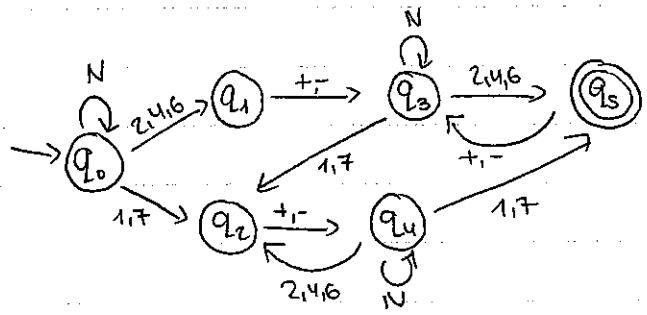


18-11-11

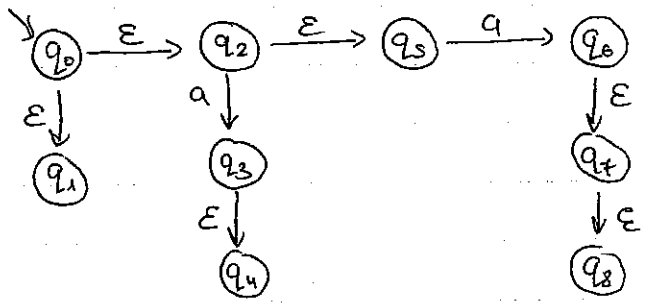
ב) בנה אוטומט המקבלים את אוסף המילים המייצגות תרגיל שמורכבות אופרטור אחד ותוצאותו לוגית

$124-71+47 \in L$ $\quad -12+44 \notin L$ $\quad 12+-44 \notin L$

$N=\{1,2,4,6,7\}$



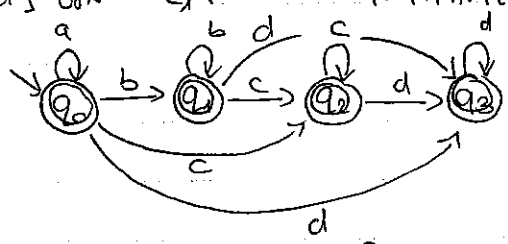
מעל - ε



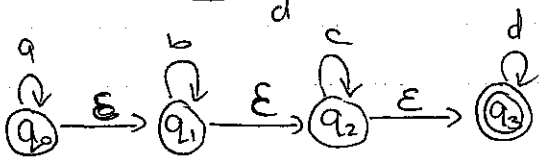
תרגיל

1) בנה אוטומט המקבלים את השפה $L_1=\{a^m b^n c^r d^t \mid m,n,r,t>0\}$ מעל $\{a,b,c,d\}$

(i) ללא מעל-ε



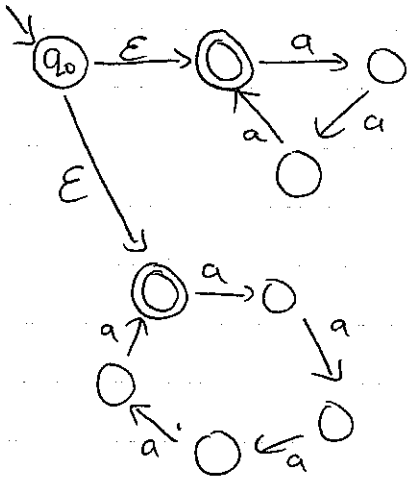
(ii) כולל מעל-ε



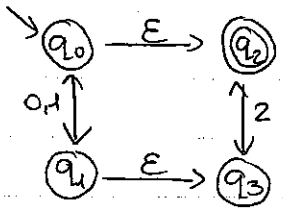
2) $\Sigma=\{a\}$ $\quad L_2=\{a^n \mid 3|n$ או $5|n\}$

(i) ללא מעל-ε ⇐ אוטומט מכפלה 15 מצבים

(ii) כולל מעל-ε



3) $L_3=\{uv \mid u\in\{0,1\}^* \wedge v\in\{2\}^* \wedge |uv| \bmod 2 = 0\}$ $\Sigma=\{0,1,2\}$



הגדרה: אוטומט סופי הכולל מעל-ε $A_\varepsilon=\langle Q,\Sigma,q_0,\delta_\varepsilon,F_\varepsilon\rangle$

$\delta_\varepsilon : Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\}) \longrightarrow Q$

משפט: אם שפה מתקבלת ע"י אוטומט A_ε הכולל מעל-ε קיים אוטומט B המקבל את L $L=L(A_\varepsilon)=L(B)$

מסקנה: שפה רגולרית היא שפה המתקבלת ע"י אוטומט סופי.

הגדרה: הסגור-ε של מצב q: $CL^\varepsilon(q)$ = אוסף המצבים אליהם ניתן להגיע מ-q ע"מ מעל-ε בלבד

תכונות המשפט: נתון: $A_\varepsilon=\langle Q,\Sigma,q_0,\delta_\varepsilon,F_\varepsilon\rangle$ $L=L(A_\varepsilon)$

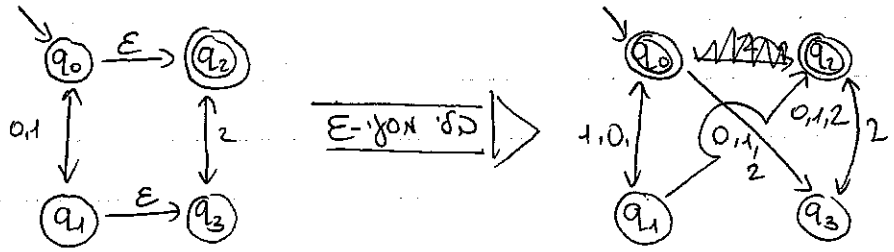
נבנה: $B=\langle Q,\Sigma,q_0,\delta_B,F_B\rangle$ $L=L(B)$

$$\delta_B(q,\sigma)=\bigcup_{\underset{(1)}{q'\in CL^\varepsilon(q)}} \overset{(3)}{CL^\varepsilon}\left(\overset{(2)}{\delta_\varepsilon(q',\sigma)}\right)$$

$$F_B=\begin{cases} F_\varepsilon \cup \{q_0\} & CL^\varepsilon(q_0)\cap F_\varepsilon \neq \emptyset \\ F_\varepsilon & \text{אחרת} \end{cases}$$

18-11-11

דוגמה



$CL^{\varepsilon}(q_0) = \{q_0, q_2\}$

$CL^{\varepsilon}(q_1) = \{q_1, q_3\}$

$CL^{\varepsilon}(q_2) = \{q_2\}$

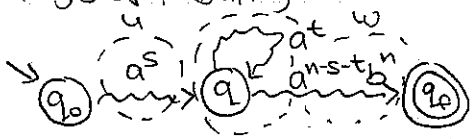
$CL^{\varepsilon}(q_3) = \{q_3\}$

מודלים חישוביים 11-25

למת הניפוח לשפות רגולריות (שימוש להוכחת אי-רגולריות של שפה)

דוגמה: $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$

נניח בשלילה כי L רגולרית. לפיכך קיים אוט' A המקבל את L ויהי n מצבים.
נסתכל על המילה $a^n b^n \in L$, במהלך קריאת הרישא a^n אינו חולפים על פני $n+1$
מצבים לפיכך קיים מצב q כמו בציור שלמעלה



$s+t \leq n$ $\qquad a^s a^t a^t a^{n-s-t} b^n \in L$

$t \geq 1$ $\qquad a^{n+t} b^n \in L \Rightarrow n+t \neq n \Rightarrow$ סתירה!

$\Downarrow$

L איננה רגולרית!

למת הניפוח: אם L רגולרית, קיים קבוע n כך שעבור כל $z \in L$ $|z| \geq n$
קיים פירוק $z = uvw$ המקיים: 1. $|uv| \leq n$

2. $1 \leq |v|$

3. לכל $i \geq 0$ $\quad z_i = uv^i w \in L$

תרגיל

הוכח באמצעות למת הניפוח כי השפות הבאות אינן רגולריות

א. (התאומה) 1) $L_1=\{a^{n+1}b^n \mid n\geq 0\}$

נניח בשלילה כי L_1 רגולרית. נבחר $z=a^{n+1}b^n\in L_1$ כאשר n הוא הקבוע של למת הניפוח. אזי למת הניפוח קיים פירוק: $z=uvw$,

$|uv|\leq n$, $|v|\geq 1$

בהכרח $u=a^s$, $v=a^t$ $w=a^{n+1-s-t}b^n$

לתה, כל מילה מהצורה $z_i=uv^iw\in L_1 \Leftarrow z_i=a^s(a^t)^i a^{n+1-s-t}b^n\in L_1$

$z_i=a^{n+1+(i-1)t}b^n\in L_1$

נבחר (לדוגמה) $i=5$ ונקבל בסתירה $z_5=a^{n+1+4t}b^n\in L_1$

מכאן L_1 אינה רגולרית

2) $L_2=\{w \mid \#_a(w)=\#_b(w)\}$

נניח L_2 רגולרית בשלילה. נבחר $z=a^nb^n$ ... $z=uvw$

$u=a^s$, $v=a^t$, $w=a^{n-s-t}b^n$ ... $z_i=a^{n+(i-1)t}b^n\in L_2$

נבחר $i=0$ ונקבל בסתירה $z_0=a^{n-t}b^n \Leftarrow$ השפה L_2

לא רגולרית

3) $L_3=\{w \mid w^R=w\}$

נבחר $z=a^nba^n$ ... אזי למת הניפוח $z=uvw$ ... $z_i=a^{n+(i-1)t}ba^n\in L_3$

נבחר $i=2$ ונקבל בסתירה $z_2=a^{n+t}ba^n$

ב. (נוסחה) 1) $L_4=\{a^{k^2} \mid k\geq 0\}$

נבחר $z=a^{n^2}$ ... $u=a^s, v=a^t, w=a^{n^2-s-t}$ $z_i=a^{n^2+(i-1)t}$

נבחר $i=2$ $a^{n^2+t}\in L_4$

$n^2 \underset{1\leq t}{\leq} n^2+t \underset{t\leq n}{\leq} n^2+n < (n+1)^2$

2) $L_5=\{a^{k!} \mid k\geq 0$

נבחר $z=a^{n!}$ ... $z_i=a^{n!+(i-1)t}$

נבחר $i=2$ ונקבל בסתירה $z_2=a^{n!+t}\in L_5$

$n! < n!+t \leq n!+n < (n+1)!$

25-11-11

3) $L_6=\{a^p \mid p \text{ ראשוני}\}$

נבחר $z=a^p$ ($p\ge n$ ראשוני) ...

$z_i=a^{p+(i-1)t}$

נבחר $i=p+1$ ונקבל סתירה $z_{p+1}=a^{p+pt}=a^{p(1+t)}\in L_6$

פריק!

<u>תרגיל מסכם</u>

הוכח כי השפה אינה רגולרית $L=\{a^k b^r \mid k\ne r\}$

או- בעזרת סגירויות (מתוך ידיעה ש- $L'=\{a^m b^m \mid m\ge 0\}$ אינה רגולרית)

$L''=\{a^m b^s \mid m,s\ge 0\}$ - רגולרית

נניח בשלילה L רגולרית ונקבל סתירה: $L'=L''-L$

L' - סתירה רגולרית, L'' - רגולרית, L - רגולרית

ב- בעזרת למת הניפוח

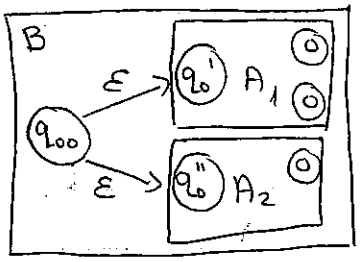
$z=a^n b^{n+n!}$ ... $z_i=a^{n+(i-1)t} b^{n+n!}$

נבחר $i=\frac{n!}{t}+1$ ונקבל סתירה $z_{\frac{n!}{t}+1}=a^{n+n!} b^{n+n!}\in L$

מודלים חישוביים - 02-12

<u>השפות הרגולריות סגורות לפעולות רגולריות</u>

1- איחוד $L_1\cup L_2$:



$L_1=L(A_1)$ $A_1=\langle Q_1,\Sigma,q_0',\delta_1,F_1\rangle$

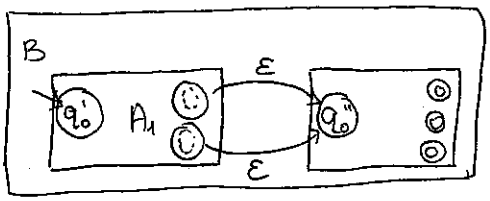
$L_2=L(A_2)$ $A_2=\langle Q_2,\Sigma,q_0'',\delta_2,F_2\rangle$

$L_1\cup L_2=L(B)$ $B=\langle Q_1\cup Q_2\cup\{q_{00}\},\Sigma,q_{00},\delta_B,F_1\cup F_2\rangle$

$\forall q\in Q_1$ $\delta_B(q,\sigma)=\delta_1(q,\sigma)$

$\forall q\in Q_2$ $\delta_B(q,\sigma)=\delta_2(q,\sigma)$

$\delta_B(q_{00},\varepsilon)=\{q_0',q_0''\}$



2- שרשור $L_1\cdot L_2$:

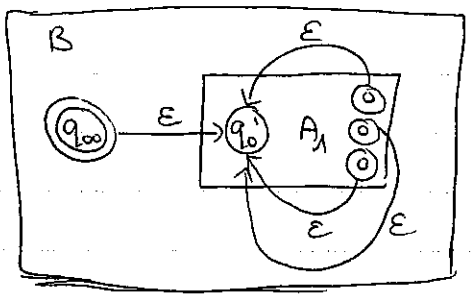
$C=\langle Q_1\cup Q_2,\Sigma,q_0',\delta_C,F_2\rangle$

$\forall q\in Q_1$ $\delta_C(q,\sigma)=\delta_1(q,\sigma)$

$\forall q\in Q_2$ $\delta_C(q,\sigma)=\delta_2(q,\sigma)$

$\forall q\in F_1$ $\delta_C(q,\sigma)=q_0''$

3- סגור *



ביטויים רגולריים

ביטוי רגולרי r מעל Σ הוא:

א. בסס: 1- ∅

2- σ ∀σ∈Σ

ב. אם r_1 ו- r_2 ביטויים רגולריים אז: 1- (r_1+r_2) הם ביטויים רגולריים

2- $(r_1 \cdot r_2)$

3- (r_1^*)

פונקציות לביטויים רגולריים:

1- $a \cdot b \cdot b \cdot (b \cdot b + a)^*$

2- $(a+b)^* \cdot bbb \cdot (a+b)^*$

הגדרה העתקה מ"ל ביטוי רגולרי:

$L: R \to 2^{\Sigma^*}$

אוסף הביטויים הרגולריים

$L(\emptyset) = \emptyset$

$L(\sigma) = \{\sigma\}$

$L(R_1+R_2) = L(R_1) \cup L(R_2)$

$L(R_1 R_2) = L(R_1) \cdot L(R_2)$

$L(r_1^*) = L(r_1)^*$

תרגיל

בנה ביטוי רגולרי העונה כל אחת מהשפות הבאות

1- אוסף המילים הפותח ב- aab: $aab(a+b)^*$ => $\{a\}\{a\}\{b\}\{a,b\}^*$

2- אוסף המילים המכיל את תת המילה bbb: $(a+b)^* bbb (a+b)^* = \Sigma^* bbb \Sigma^*$

3- $L_3 = \{w \mid |w| \bmod 2 = 0\}$: $((a+b)(a+b))^* = (\Sigma\Sigma)^*$

4- $L_4 = \{w \mid \bmod 3 = 1\}$ $\Sigma^*(\Sigma\Sigma\Sigma)$

5- $L_5 = \{w \mid \#_b(w) \bmod 2 = 0\}$ a|baab|bab|aa|bb|a $(a+ba^*b)^*$

02-12-11

6- ε : $\emptyset^* = \boxed{\varepsilon}$ (למרות ש-ε לא בתקן ניתן להשתמש בה)

7- r^+ : $r^* \cdot r = \boxed{r^+}$ (-"-)

8- אוטומט המכילות את המילה aba וגם את המילה bab

$\Sigma^* aba \Sigma^* bab \Sigma^* + \Sigma^* bab \Sigma^* aba \Sigma^* + \Sigma^* abab \Sigma^* + \Sigma^* baba \Sigma^*$

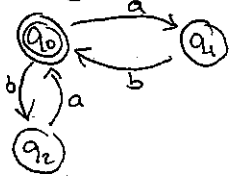
9- אוטומט המילים שאינן מכילות את המילה bbb :

$(bb+b+\varepsilon) \cdot (\underbrace{a+ba+bba}_{})^*$

(כדי לבנות לא נספיק כי היו מחייב לפחות ב-a!)

10- $L_{10} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)$ וגם $\#_a(x) - \#_b(x) \le 1$ לכל רישא x שלו מתקיים$\}$

$(ab+ba)^*$



11- $L_{11} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)$ וגם $\#_a(x) - \#_b(x) \le 2$ לכל רישא x שלו מתקיים$\}$

$(a(ab)^*b + b(ba)^*a)^*$

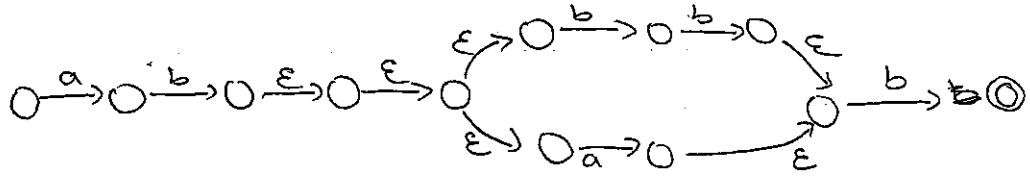
משפט קלין

L רגולרית $\longleftrightarrow$ קיים ביטוי רגולרי r כך ש- $L=L(r)$

($\Leftarrow$) השפות $\emptyset$ ו- $\{\varepsilon\}$ הן שפות רגולריות. Σ בגודל 1 $\quad \circ \xrightarrow{\varepsilon} \circ$

ומהן כן השפות הרגולריות סגורות לפעולות איחוד, שרשור וסגור *

דוגמה: $ab \cdot (ba+a)^* b$



אוטומטים חישוביים 12-09

המשך מהפעם הקודמת

($\Leftarrow$) נתון: $A=\langle Q,\Sigma,q_1,\delta,F\rangle$ $\quad L=L(A)$ $\quad Q=\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$

צ"ל: r כך ש- $L=L(r)$

סימון: r_{ij}^{k} - ביטוי רגולרי לאוסף המילים שיש לקחת מעל מ- q_i ל- q_j

$1\le i,j\le n$ הנמצאים דרך (אולי) המצבים $q_1,\dots,q_k$

$0\le k\le n$

[דוג: $F=\{q_5,q_7\}$ $\quad n=15$ $\Leftarrow$ $r=r_{1,5}^{15}+r_{1,7}^{15}$]

$$r=\sum r_{1j}^{n} \quad j:q_j\in F$$

מס': $k=0$:

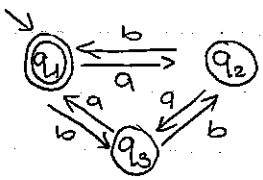
$$r_{ij}^{0}=\begin{cases}\sigma & \delta(q_i,\sigma)=q_j \\ \emptyset & \text{אחרת}\end{cases} \quad i\neq j$$

$$r_{ij}^{0}=\begin{cases}\varepsilon+\sigma & \delta(q_i,\sigma)=q_j \\ \varepsilon & \text{אחרת}\end{cases} \quad i=j$$

אינדוקציה:

$$r_{ij}^{k+1}=r_{ij}^{k}+r_{i\,k+1}^{k}\cdot\left(r_{k+1\,k+1}^{k}\right)^{*}\cdot r_{k+1\,j}^{k}$$

דוג': $L=\{w \mid (\#_a(w)-\#_b(w)) \bmod 3=0\}$



r_{ij}	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
r_{11}				
r_{12}				×
r_{13}				×
r_{21}				×
r_{22}				×
r_{23}				×
r_{31}				×
r_{32}				×
r_{33}				×

המשך..

09-12-11

r_{ij}	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
r_{11}	ε	ε	$(ab)^*$	$\binom{**}{**}$
r_{12}	a	a	$\times$	$\times$
r_{13}	b	b	$(ab)^*(b+aa)$	$\times$
r_{21}	b	b	$\times$	$\times$
r_{22}	ε	$\varepsilon+ba$	$\times$	$\times$
r_{23}	a	$a+bb$	$\times$	$\times$
r_{31}	a	a	$a+(b+aa)(ba)^*b$	$\times$
r_{32}	b	$b+aa$	$\times$	$\times$
r_{33}	ε	$\varepsilon+ab$	$(\varepsilon+ab)+(b+aa)(ba)^*(a+bb)$	$\times$
			$a(ab)^*(b+aa)+b(ba)^*(a+bb)$	$\times$

** לפי הנוסחה:

*** לפי הנוסחה:

אי אפשר לצאת מהצומת פעמיים!

כלי נוסחה:

$$r_{11}^3 = r_{11}^2 + r_{13}^2 \cdot (r_{33}^2)^* \, r_{31}^2$$

(**) $$r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1 (r_{22}^1)^* r_{21}^1 = a+(b+aa)(ba)^*(b)$$

(***) $$r_{33}^2 = r_{33}^1 + r_{32}^1 (r_{22}^1) r_{23}^1 = (\varepsilon+ab)+(b+aa)(ba)^*(a+bb)$$

$\binom{**}{**}$ $$r = r_{11}^3 = r_{11}^2 + r_{13}^2 \cdot (r_{33}^2)^* r_{31}^2 =$$

$$= (ab)^* + (ab)^*(b+aa) \cdot \left[ab+(b+aa)(ba)^*(a+bb)\right]^* (a+(b+aa)(ba)^* b)$$

סגירות בשפות רגולריות

א- פעולות בוליאניות

ב- פעולות רגולריות

ג- פעולות נוספות

(1) היפוך L^R :

$L=L(A)$ $\quad A=\langle Q,\Sigma,q_0,\delta,\{q_F\}\rangle$

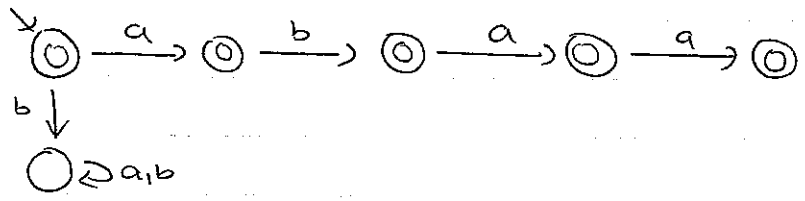
אפשר להניח מצב מקבל יחיד

$L^R=L(B)$ $\quad B=\langle Q,\Sigma,q_F,\delta_B,\{q_0\}\rangle$

$$\delta_B(q,\sigma)=\{q' \mid \delta(q',\sigma)=q\} \qquad \sigma\in(\Sigma\cup\{\varepsilon\})$$

(2) $L_2=\{x \mid \exists y\in\Sigma^*\ xy\in L\}$ אוסף הרישות של L

$L=\{abaa\} \Rightarrow L_2=\{\varepsilon,a,ab,aba,abaa\}$



$L = L(A) \qquad A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$

$L_2 = L(C) \qquad C = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F_C \rangle$

$F_C = \{ q \mid \exists w \in \Sigma^*, \ \delta(q,w) \in F \}$

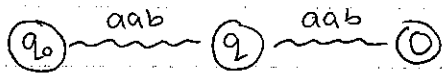
(3) $L_3 = \{ a^n \mid \exists w \in L, \ |w| = n \}$

$D = \langle Q, \{a\}, \delta_0, \delta_0, F \rangle$

$\delta_0(q,a) = \{ q' \mid \exists \sigma \in \Sigma, \ \delta(q,\sigma) = q' \}$

(4) $L_4 = \{ w \mid ww \in L \}$

$L = \{ \varepsilon, b, aab, baabaa, a^9, b^{10} \} \Rightarrow L_4 = \{ \varepsilon, baa, b^5 \}$



לכל מצב $q \in Q$ נבנה 2 אוטומטים:

$A_q = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, \{q\} \rangle$

$B_q = \langle Q, \Sigma, q, \delta, F \rangle$

$L_4 = \bigcup_{q \in Q} L(A_q) \cap L(B_q)$

(5) X $\qquad L_5 = \{ ww \mid ww \in L \}$ $\Leftarrow$ לא ניתן לבנות!

דוגמה מפריכה: $L = \Sigma^*$

$L_5 = \{ ww \mid w \in \Sigma^* \}$

לפי למת הניפוח נבחר $z = a^n b a^n b$

(6) $L_6 = \{ w \mid$ w פרמוטציה של מילה ב-L $\}$

X $\qquad L = \{abc\} \Rightarrow L_6 = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$

דוגמה מפריכה: $L = \{ (ab)^n \mid n \geq 0 \}$

$L_6 = \{ w \mid \#a(w) = \#b(w) \}$

09-12-11

(7) $L_7 = \{xy \mid yx \in L \ , \ x,y \in \Sigma^*\}$

$L = \{abc\}$ $\quad L_7 = \{abc, bca, cab\}$

$L_7 = \bigcup_{q \in Q} L(B_q)L(A_q)$

מודלים חישוביים 12-16

תרגיל בסגירויות

נתון L_1, L_2 רגולריות. הוכיחו:

$L_{1-1} = \{G_1Y_1G_2Y_2 \dots G_nY_n \mid G_i, Y_i \in \Sigma \ , \ G_1G_2\dots G_n \in L_1 \ Y_1Y_2\dots Y_n \in L_2\}$ (מיזוג 1-1)

* דוגמא: $\Sigma = \{a,b,c\}$ $\quad L_1 = \{\varepsilon, \underline{ab}, \underline{bcc}, a^5\}$

$L_2 = \{b, \underline{bc}, \underline{aba}, b^4\}$

$L_{1-1} = \{abbc, bacbca\}$

$L_1 = L(A_1)$ $\quad A_1 = \langle Q_1, \Sigma, q_0', \delta_1, F_1 \rangle$

$L_2 = L(A_2)$ $\quad A_2 = \langle Q_2, \Sigma, q_0'', \delta_2, F_2 \rangle$

$L_{1-1} = L(B)$ $\quad B = \langle Q_1 \times Q_2 \times \{1,2\}, \Sigma, (q_0', q_0'', 1), \delta_B, F_1 \times F_2 \times \{1\} \rangle$

דגל שמגדיר מתי האות שאנו קורא (הבאה)

$\delta_B((q_i, q_j, 1), \sigma) = (\delta_1(q_i, \sigma), q_j, 2)$

$\delta_B((q_i, q_j, 2), \sigma) = (q_i, \delta_2(q_j, \sigma), 1)$

משפט נרוד

אי- משפט נרוד

1- מספר המצבים האוטומט (המינימלי) המקבל שפה L רגולרית.

2- שיטה להוכחת אי רגולריות של שפה

3- ולעזרתם לבנות אוטומט

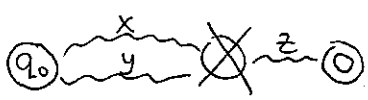
"הרעיון"

תהי L שפה רגולרית. יהיו $x,y \in \Sigma^*$ ותהי $z \in \Sigma^*$ כך ש- $xz \in L$, $yz \notin L$

נסתכל על האוטומט A שמקבל את L:

x,y מובילות למצבים שונים => באוטומט A

לפחות 2 מצבים



x_1
x_2
x_3
$\vdots$
x_k

לכל מהם מימין עי מילה כלשהי z ⇐ אוטומט A המקבל את L לפחות k מצבים.

<u>הגדרה</u>

יהי R_L יחס שקילות על Σ^*:

$$R_L = \{(x,y) \mid \forall z \quad xz \in L \iff yz \in L\}$$

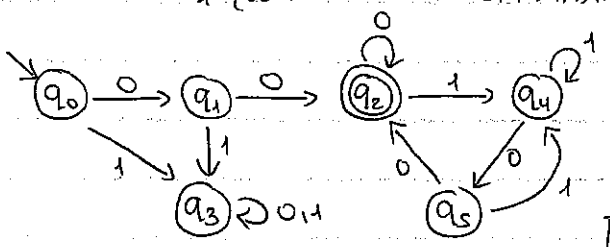
1- אם קיימות n מחלקות שקילות של R_L אז באוטומט המינימלי n מצבים

2- אם קיימות אינסוף מחלקות שקילות של R_L אז L איננה רגולרית

<u>תרגיל</u>

לכל אחד מן הסעיפים הבאים נתנה שפה רגולרית L. רשום את מחלקות השקילות של יחס R_L והבא מילים המבחינות ביניהן

א- $\Sigma = \{0,1\}$ $\quad L_1 = \{w \mid w$ פותחת ומסיימת ב- $00\}$



נסמן את המילים שמובילות לכל מצב ומצב:

q_0: $[\varepsilon] = \varepsilon$

q_1: $[0] = 0$

q_2: $[00] = L_1 = 00(0+1)^*00 + 00 + 000$

q_3: $[1] = (1+01)(0+1)^*$

q_4: $[001] = 00(0+1)^*1$

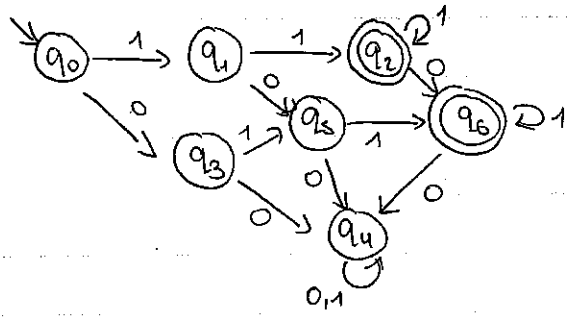
q_5: $[0010] = 00(0+1)^*10$

מצבים / תווים	0010	001	1	00	0
ε	0	100	00	ε	0
0	100	0	0	ε	
00	ε	ε	ε		
1	0	00			
001	0				

* נתפס באוטומט מלא שאם נוסף אותה לאותה היא תוביל למקבל ולשם לא מקבל.

16-12-11

א- $\Sigma=\{0,1\}$ $\qquad L_2=\{w \mid \#_0(w)\le 1,\ \#_1(w)\ge 2\}$



q_0: $[\varepsilon]=\varepsilon$

q_1: $[1]=1$

q_2: $[11]=11^+$

q_3: $[0]=0$

q_4: $[00]=\{w \mid \#_0(w)\ge 2\}$

q_5: $[10]=10+01$

q_6: $[110]=\{w \mid \#_1(w)\ge 2, \#_0(w)=1\}$

	100	10	00	0	11	1
ε			11			1
1				1		
11			ε			
0	ε					
00		1				
10	ε					

(אלו הן חלק מהמצבים, סתם פיצלתי לתרגיל, בטוח לא לעשות הכל)

2) הוכח ע"י משפט נרוד כי השפות הבאות אינן רגולריות

א- $L_1=\{a^n b^n \mid n\ge 0\}$

נסתכל על הקבוצת המילים הבינומיות הבאה $w_i=a^i$ $(i\ge 0)$

נראה כי כל זוג מהן שונות: $w_i=a^i$ $\quad i\ne j \quad$ $w_j=a^i$

נבחר $z=b^i$ ונקבל $\quad w_iz=a^ib^i\in L \quad$ $w_jz=a^ib^i\notin L$ $\Rightarrow$ השפה לא רגולרית

כי $L_2=\{a^m b^k \mid m|k\}$ (לדוגמא $\{a^7b^{21}, a^4b^4 \dots\}$)

נסתכל על הקודקוד המצומצם הכבוד $w_p=a^p$ p ראשוני

נראה כי כל צמד מוכתן מינימלי: $w_p=a^p$, $w_q=a^q$ $p\neq q$

נבחר $z=b^p$ ונקבל: $w_pz=a^pb^p\in L_2$ $w_qz=a^qb^p\notin L_2$

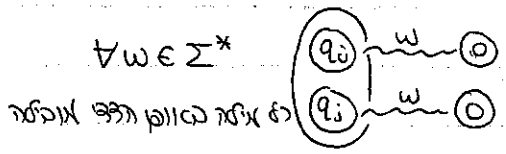
מכאן ש- L_2 אינה רגולרית.

מושגים חשובים 12-23

אלגוריתם הצמצום

קלט: אוטומט A המקבל את L

פלט: האוטומט המינימלי B המקבל את L

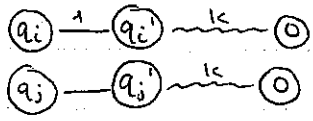


מתבדר שמספיק לבדוק מצבים בתחום $0\le|w|\le|Q|-2$

הגדרה: יהי השקילות E_k על Q: $E_k=\{(q_i,q_j)\mid \forall w\in\Sigma^*, |w|\le k$
$\delta(q_i,w)\in F \iff \delta(q_j,w)\in F\}$

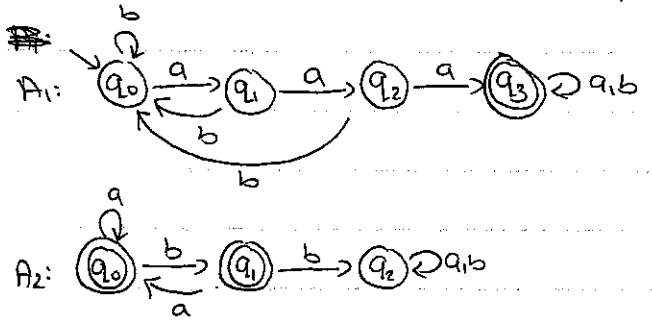
כלומר q_i, q_j אינם ניתנים להבחנה ע"י מילים שאורכן הוא לכל היותר k

כלל: $(q_i,q_j)\in E_{k+1} \iff (q_i,q_j)\in E_k \wedge \forall\sigma\in\Sigma\ (\delta(q_i,\sigma),\delta(q_j,\sigma))\in E_k$

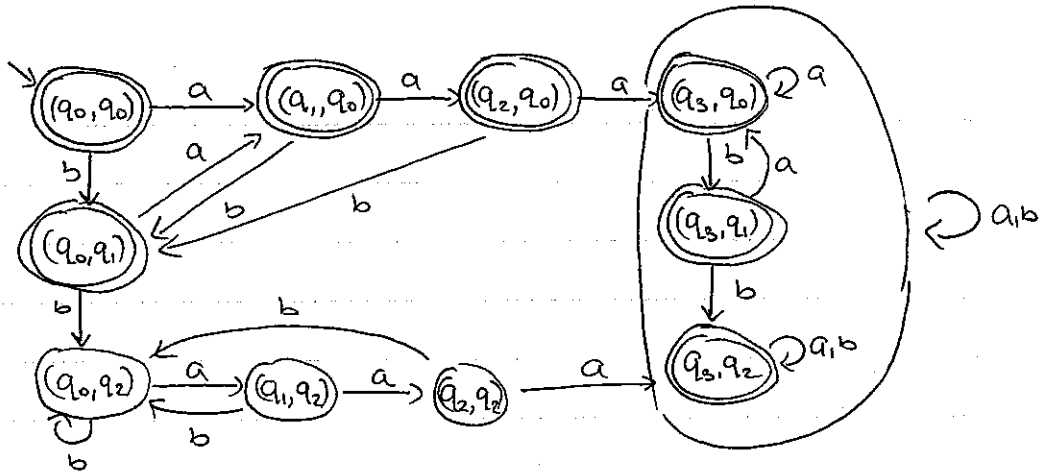


תרגיל

1. אוסף המילים המכילות את תת המילה 'aaa' $= L$
אוסף המילים המכילות את תת המילה 'bb'
אז הנה "אוטומט מכפלה" A המקבל את השפה L



23-12-11



בל דוגמה זו האוטומט למינימלי

$\pi_0 = \{\{q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{31}, q_{32}\}, \{q_{02}, q_{12}, q_{22}\}\}$

$\pi_1 = \{\{q_{00}, q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{31}, q_{32}\}, \{q_{01}\}, \{q_{02}, q_{12}\}, \{q_{22}\}\}$

* בשלב הראשון מדקים הוא עשה המורכב 1 מהחנה בין q_{00}, q_{01} ~~[illegible]~~ ורואים כי b מהחנה ביניהם ולכן שתיהן במחלקות שקילות שונות, כלומר נמדוק מה קורה לגם q_{10} ← הוא יחד לגם q_{00} וכך הלאה.

$\pi_2 = \{\{q_{00}, q_{10}, q_{20}\}, \{q_{30}, q_{31}, q_{32}\}, \{q_{01}\}, \{q_{02}\}, \{q_{12}\}, \{q_{22}\}\}$

* נמשיך עשה המורכב אחד, ויהיה לאין מוכלל ונמדוק בשלב π_4 הוא המצבים שהגיעו אליהם הם מוהחנים, אום לאו אז אלו שמדקים עליו גם ק לאו מוהחנים.

$\pi_3 = \{\{q_{00}, q_{10}\}, \{q_{20}\}, \{q_{30}, q_{31}, q_{32}\}, \{q_{01}\}, \{q_{02}\}, \{q_{12}\}, \{q_{22}\}\}$

$\pi_4 = \{\{q_{00}\}, \{q_{10}\}, \ldots\}$

$\pi_5 = \pi_4$ ← לעצור!

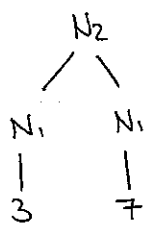
דקדוקים

דוגמאות לדקדוקים

1- $\Sigma = \{0,1,2,\ldots,9, ,\}$ אוסף המספרים הטבעיים $= L_1$

$7,036,123 \in L_1$, $007 \in L_1$

עץ גזירה:



חד-ספרתי $N_1 \to 0/1/2/\ldots/9$

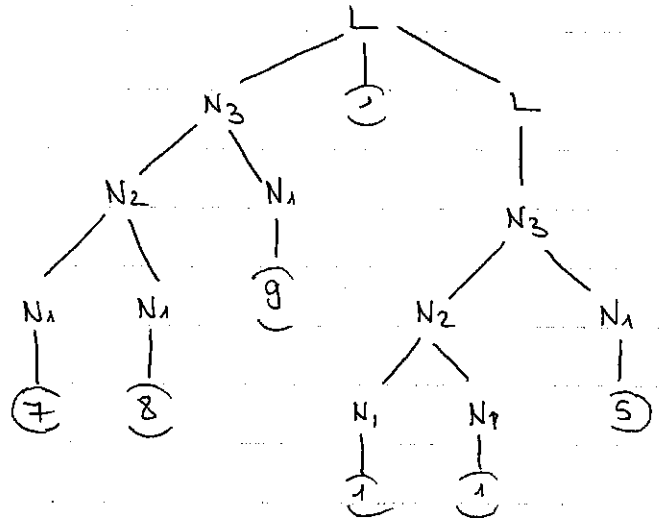
דו-ספרתי $N_2 \to N_1 N_1$

תת-ספרתי $N_3 \to N_2 N_1$

$N_{1-3} \to N_1 / N_2 / N_3$

מיקום מספרים שלמה של 3 $L \to N_3 / N_3, L$ (לא תקינים)

$w = 789,115$



$N \rightarrow N_{1-3} \,/\, N_{1-3}, L$

הגדרה:

פורמלית: $G = \langle V, T, S, P \rangle$

משתנים, אותיות, משתנה התחלה, כללי הגזירה

דוגמא:

$V = \{N_1, N_2, N_3, N_{1-3}, L, N\}$

$T = \{0, 1, 2, \ldots, 9, ,\}$

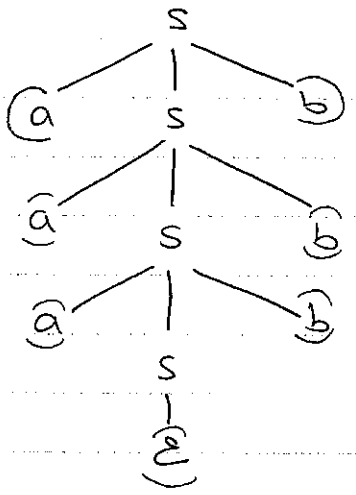
$S = 'N'$

$P = \{"N_1 \rightarrow 0", \ldots, "N \rightarrow N_{1-3}, L"\}$

דוגמא פונאווה

2- $L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$\boxed{S \rightarrow aSb \mid \varepsilon}$ $w = a^3b^3$



מודלים חישוביים 12-30

המשך דוגמאות

3- $L_3=\{a^{2^k} \mid k\geq 1\}=\{a^2,a^4,a^8,a^{16},\dots\}$

"רעיון": $\vec{|a|}$ $\vec{|aa|}$ $|aaaa|$

בהתחלה

1) $S \to LDaR$

צעדים שמאלי כפלן צעדים ימני

הכפלה:

2) $Da \to aaD$

לקראת סיום:

3) $DR \to \varepsilon$

סיום:

4) $L \to \varepsilon$

לקראת הכפלה:

5) $DR \to ER$

תזוזה של E שמאלה:

6) $aE \to Ea$

היגיה להכפלה:

7) $LE \to LD$

$w=aaaa$

$S \xrightarrow{1} LDaR \xrightarrow{2} LaaDR \xrightarrow{3} LaaER \xrightarrow{6} LaEaR$
$\xrightarrow{6} LEaaR \xrightarrow{7} LDaaR \xrightarrow{2} LaaDaR \xrightarrow{2} LaaaaDR$
$\xrightarrow{3} Laaaa \xrightarrow{4} aaaa$

ההיררכיה של חומסקי

$\alpha,\beta \in (V \cup T)^*$

שם הדקדוק	כללים מותרים	מכונה שקולה
דקדוק כללי	$\alpha \to \beta$	מכונת טיורינג (מ"ט)
דקדוק תלוי הקשר (תה")	$\alpha \to \beta$ + אילוץ	מ"ט + אילוץ
דקדוק חופשי הקשר (חה")	$A \to \alpha$	אוטומט מחסנית
דקדוק רגולרי	ליניארי ימני (או) ליניארי שמאלי $A \to aB$ ⋮ $A \to Ba$ $A \to a$ ⋮ $A \to a$ בנוסף נוסף כלל $X \to \varepsilon$	אוטומט סופי

סימונים והגדרות

$\alpha,\beta,\gamma,\delta \in (V \cup T)^*$

- $\gamma\alpha\gamma \xrightarrow[G]{} \gamma\beta\gamma$ כאשר קיים כלל $\alpha \to \beta$
- $\alpha \xrightarrow[G]{*} \beta$ ($\alpha \to \alpha_1 \to \alpha_2 \to \dots \to \beta$)
- השפה המתקבלת ע"י דקדוק G:

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \xrightarrow[G]{*} w\}$$

משפט

L רגולרית $\longleftrightarrow$ קיים דקדוק רגולרי G (כ.ה.ב שניאורי ינאי) המקבל L

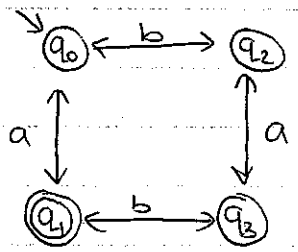
הוכחה

$(\Leftarrow)$ נתון: $A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$ $\quad L = L(A)$

נבנה $G = \langle V, T, S, P \rangle$ $\quad L = L(G)$

$T = \Sigma \quad V = \{V_i \mid q_i \in Q\} \quad S = V_0$

δ	$\Rightarrow$	P
$\delta(q_i, \sigma) = q_j$		$V_i \to \sigma V_j$
וכן גם		
$q_j \in F$		$V_i \to \sigma$



$\Rightarrow$

$V_0 \to bV_2 \mid aV_1 \mid a$

$V_1 \to aV_0 \mid bV_3$

$V_2 \to bV_0 \mid aV_3$

$V_3 \to aV_2 \mid bV_1 \mid b$

דוגמה: [redacted]

$(\Rightarrow)$ נתון: $G = \langle V, T, S, P \rangle$ $\quad L = L(G)$

נבנה $A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$ $\quad L = L(A)$

$\Sigma = T \quad Q = V \cup \{q_f\} \quad q_0 = 'S' \quad F = \{q_F\}$

P	$\Rightarrow$	δ
$A \to aB$		$\delta(A, a) = B$
$A \to a$		$\delta(A, a) = q_f$

30-12-11

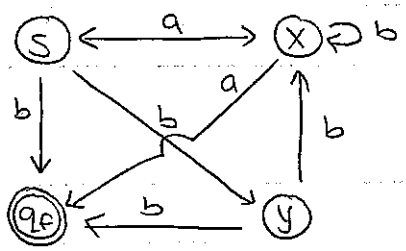
דוגמה:

$S \to aX \mid bY \mid b$

$X \to aS \mid bX \mid a$

$Y \to bX \mid b$

$\Rightarrow$



תרגיל

רשום דקדוק חל"ח העונה כל אחת מהשפות הבאות:

1- אוסף המילים הפותחות ב- 'aab' $= L_1$

$S \to aabX$

$X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$

2- $L_2 = \{ w \mid |w| \bmod 2 = 0 \}$

$S \to aX \mid bX \mid \varepsilon$

$X \to aS \mid bS$

3- $L_3 = \{ w \mid \#b \bmod 3 = 1 \}$

$S \to aS \mid bX$

$X \to aX \mid bY \mid \varepsilon$

$Y \to aY \mid bS$

4- $L_4 = \{ a^{2n} b^n \mid n \geq 0 \}$

$S \to aaSb \mid \varepsilon$

5- $L_5 = \{ a^n b^{3n+2} \mid n \geq 1 \}$

$S \to aSbbb \mid abbbbbb$

6- $L_6 = \{ a^n b^m c^{n+m} \mid n, m > 0 \}$

$S \to aSc \mid X$

$X \to bXc \mid \varepsilon$

7- $L_7 = \{ a^n b^n a^m b^m \mid n, m \geq 1 \}$

$S \to XX$

$X \to aXb \mid ab$

8- $L_8 = \{ a^n b^m a^m b^n \mid n \geq 0, m \geq 1 \}$

$S \to aSb \mid X$

$X \to bXa \mid ba$

9- $L_9 = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ פלינדרום זוגיים

$S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$

10- $L_{10} = \{w \mid w^R = w\}$ פלינדרומים

$S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

11- $L_{11} = \{a^m b^k c^r d^t \mid m+k = r+t\}$

$S \to S_1 \mid S_2$

$S_1 \to aS_1d \mid X$ $\quad S_2 \to aS_2d \mid Z$

$X \to aXc \mid Y$ $\quad Z \to bZd \mid Y$

$Y \to bYc \mid \varepsilon$

מועדים חשמליים 01-06

תרגיל

רשום בקלות ה"ח המקבל כל אן השפות הבאות:

1- $L_1 = \{w \mid w^R = w\}$ הלו פלינדרומים

$S \to aSa \mid bSb \mid aXb \mid bXa$

$X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$

2- $L_2 = \{ab^{m_1}cab^{m_2}c \dots ab^{m_k}c \mid k \geq 2 \ \exists 1 \leq j \leq k-1 \ m_j = m_{j+1}+1\}$

לדוגמא $ab^{10}cab^6cacab^5cab^4cab^6cab^2c$

$j=4$

תמונה הקלדה $abcac$

$S \to XYX$

$(ab^*c)^*$ $X \to XZ \mid \varepsilon$ $\quad Y \to aMc$

ab^*c $Z \to aBc$ $\quad M \to bMb \mid bca$

$B \to bB \mid \varepsilon$

3- $L_3 = \{w \mid \#a(w) = \#b(w)\}$

$G: S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$

לטענה: $L_3 = L(G)$

בהוכחה: כיוון א' - $L(G) \subseteq L_3$ ברור!

כיוון ב' - $L_3 \subseteq L(G)$ תכנית כאינדוקציה על אורך מילה

בס"ד - $n=0$ $\quad S\to\varepsilon \quad \varepsilon\in L_3$

שלב האינדוקציה - נניח נכונות עבור כל $w\in L_3$ $\quad |w|\le n$ כאן

נסתכל על $w\in L_3$ $\quad |w|=n+2$

נניח בלי הגבלת הכלליות

$w=aX$

$a\,|\,y\,|\,b\,|\,z\,|$

נקודה ראשונה השוויון מתקיים בדיוק אז $\#_b(yb)=\#_a(yb)+1$

$\#_a(y)=\#_b(y) \quad \#_a(z)=\#_b(z) \quad |y|,|z|\le n$

$S\to aSbS$

$y \quad z$

לפי הנחת האינדוקציה

בהמשך תרגיל

4- $L_4=\{w \mid \#_a(w)=\#_b(w)+1\}$

$S\to XaX$

$X\to aXbX \mid bXaX \mid \varepsilon$

בדקדוק בלבד - $L_2=\{a^n b^n c^n \mid n\ge 0\}$

"רעיון"

$aaabXbXbX$

$S\to MR$ צבוע ימין

$M\to aMbX \mid \varepsilon$

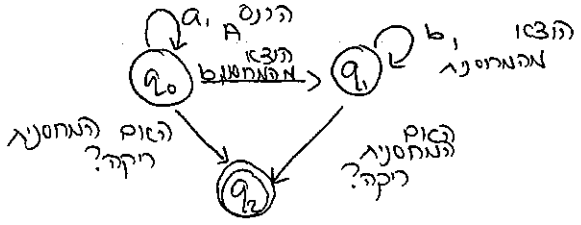
$XR\to Rc$

$Xb\to bX$

$R\to\varepsilon$

אוטומט מחסנית

דוגמה לאוטומטים: $L=\{a^n b^n \mid n\ge 0\}$



הגדרה:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \perp, \delta, F \rangle$$

Σ – אב מחסנית

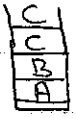
$\perp$ – אות תחילית במחסנית

$$\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma^*$$

פעולות מחסנית

$\delta(q, 6, A) \longrightarrow (q', BA)$ הכנסה

$(q', CCBA)$ הכנסה מרובה



(q', B) הוצאה

(q', A) אין שינוי

(q', ε) הוצאה

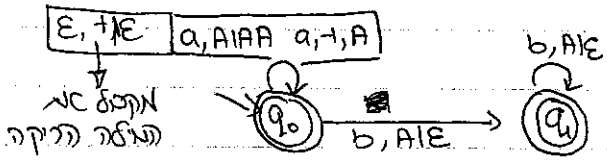
מודלים חישוביים 01-13

הגדרה המתקבלת ע"י אוטומט מחסנית $L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid$ לאחר מקבל המחסנית ריק, כאשר הקלט $\}$

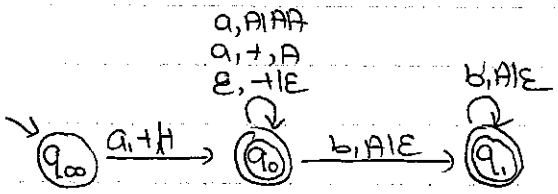
תרגיל

בנה אוטומט מחסנית המקבל כל אחד מן השפות הבאות

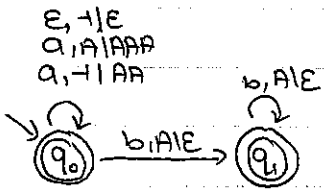
1- $L_1 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$



2- $L_2 = \{ a^{n+1} b^n \mid n \geq 0 \}$



3- $L_3 = \{ a^n b^{2n} \mid n \geq 0 \}$



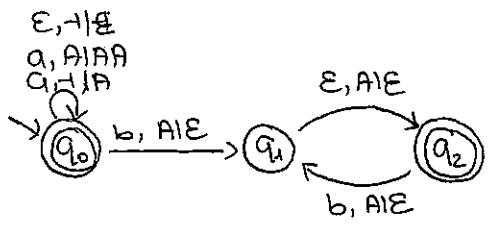
13-01-12

4- $L_4 = \{a^{2n} b^n \mid n \geq 0\}$

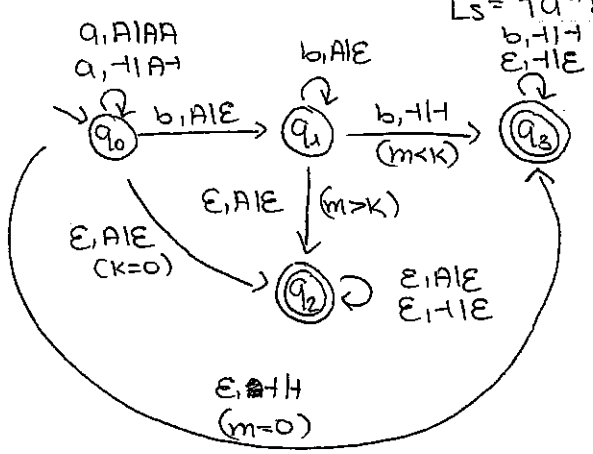
יש שתי דרכים לעשות כאות: (i) $aa \xrightarrow{\text{הכנסה}} A$

(ii) $b \xrightarrow{\text{הוצאה}} AA$

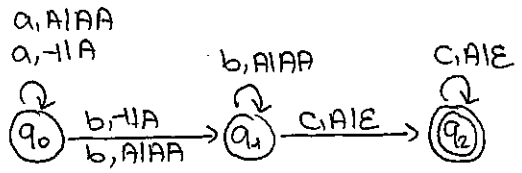
לפי הדרך השנייה



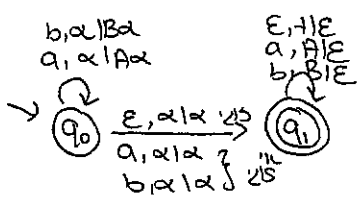
5- $L_5 = \{a^m b^k \mid m \neq k\}$



6- $L_6 = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$ $\Sigma = \{a,b,c\}$

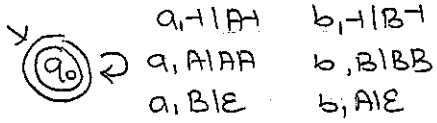


7- $L_7 = \{\omega \mid \omega = \omega^R\}$



$\alpha \in \{\perp, A, B\}$

8- $L_8 = \{\omega \mid \#_a(\omega) = \#_b(\omega)\}$



הסבר:

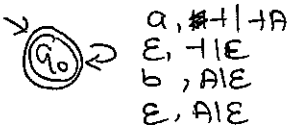
A-יים מאחסנים - לפחות a-יים

לכן בקבלת a נוסף A

ובקבלת b נוציא A ונוסיף

13-01-12

9- $L_9 = \{a^m b^k \mid m \geq k\}$



<u>משפט</u>

L חל"ח $\Longleftrightarrow$ קיים אוטומט מחסנית M המקבלים אותו

<u>הוכחה:</u>

$\Rightarrow$ <u>נתון:</u> $G = \langle V, T, S, P \rangle$ $\quad L = L(G)$

* נרשום את הדקדוק בצורה "צ'ומסקי"

$A \to aXYZ$ $\quad$ $A \to aXyZ$

מה קשור של אותיות $\quad$ $y \to y$

$A \to XYZ$

$A \to \varepsilon$

<u>נבנה:</u> $M = \langle \{q_0\}, \Sigma, \Gamma, q_0, S, \delta, \{q_0\} \rangle$ אוטומט מחסנית כאן אבן יחיד

↑ תו תחילי במחסנית

$\Sigma = T \quad \Gamma = V$

P	δ
$A \to aXYZ$	$\delta(q_0, a, A) = (q_0, XYZ)$
$A \to a$	$\delta(q_0, a, A) = (q_0, \varepsilon)$
$A \to XYZ$	$\delta(q_0, \varepsilon, A) = (q_0, XYZ)$

<u>דוגמה:</u> פרון 9 לפי המשפט.

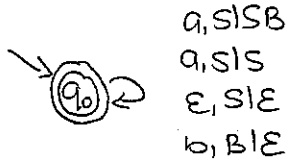
$S \to aSb \mid aS \mid \varepsilon$

⇓ לוקחים לדקדוק צ'ומסקי

$S \to aSB \mid aS \mid \varepsilon$

$B \to b$

$\Rightarrow$



מופעים תשע"ט 01-20

למת הניפוח לשפות חח"ד

תהי L חח"ד אז קיים קבוע n. כך שלכל $z\in L$ $|z|\ge n$ קיים פירוק: $z=uvwxy$

ומתקיים: 1- $|vx|\ge 1$

2- $|vwx|\le n$

3- לכל $i\ge 0$ $z_i=uv^iwx^iy\in L$

תרגיל

הוכח בעזרת למת הניפוח לשפות חח"ד כי השפות הבאות אינן חח"ד:

א. 1) $L_1=\{a^nb^nc^n \mid n\ge 0\}$ (התשובה בעמוד)

~~נבחר $z=a^nb^nc^n$ (n הקבוע~~ נניח בשלילה כי L_1 חח"ד, נבחר $z=a^nb^nc^n\in L_1$

(n קבוע למת הניפוח) אם למת הניפוח קיים פירוק: $z=uvwxy$ כך שמתקיים:

1) $|vx|\ge 1$ 2) $|vwx|\le n$ 3) לכל $i\ge 0$ $z_i=uv^iwx^iy\in L_1$

אפשרויות: 1- $vx=a^t$ 4- $vx=a^tb^s$

2- $vx=b^t$ 5- $vx=b^tc^s$

3- $vx=c^t$

לדוגמה: 1- $z_i=a^{n+(i-1)t}b^nc^n$ נבחר $i=2$ ונקבל בסתירה $z_2=a^{n+t}b^nc^n\in L_1$

בפונה 1-3: 2- נבחר $i=2$ ונקבל בסתירה $z_2=a^nb^{n+t}c^n\in L_1$

3- נבחר $i=2$ ונקבל בסתירה $z_2=a^nb^nc^{n+t}\in L_1$

4- נבחר $i=0$ ונקבל בסתירה $z_0=a^{n+t}b^{n-s}c^n\in L_1$

(אפשרות ii ונקבל בסתירה $z_2\in L_1$ $\#a(z_2)=n+t$, $\#b(z_2)=n+s$, $\#c(z_2)=n$)

5- בפונה 1-4

2) $L_2=\{\omega \mid \#a(\omega)<\#b(\omega)<\#c(\omega)\}$ (התשובה בעמוד)

נבחר $z=a^nb^{n+1}c^{n+2}\in L_2$, אפשרויות כמו בשלב 1

1- נבחר $i=2$ ונקבל בסתירה $z_2=a^{n+t}b^{n+1}c^{n+2}\in L_2$

2- נבחר $i=0$ ונקבל בסתירה $z_0=a^nb^{n+1-t}c^{n+2}\in L_2$

3- נבחר $i=0$ ונקבל בסתירה $z_0=a^nb^{n+1}c^{n+2-t}\in L_2$

20-01-12

4- נבחר $i=2$ ונקבל בסתירה $z_2\in L_2$ $\#_a(z_2)=n+t$ $\#_b(z_2)=n+1+s$ $\#_c(z_2)=n+2$

5- נבחר $i=0$ ונקבל בסתירה $z_0=a^n b^{n+1+t} c^{n+2-s}\in L_2$

3) $L_3=\{ww \mid w\in\{a,b\}^*\}$

נבחר $z=\underbrace{a^n b^n}\underbrace{a^n b^n}$ אופשרויות:

1- $vx=a^t b^s$ שמאלי

2- $vx=a^t b^s$ ימני

3- $vx=b^t a^s$ מרכזי

נבחר $i=0$ ונקבל בסתירה $t+s\geq 1$

1. $z_0=a^{n-t}b^{n-s}a^n b^n$

2. באופן דומה.

3. באופן דומה.

4) $L_4=\{a^{m^2} \mid m\geq 0\}$

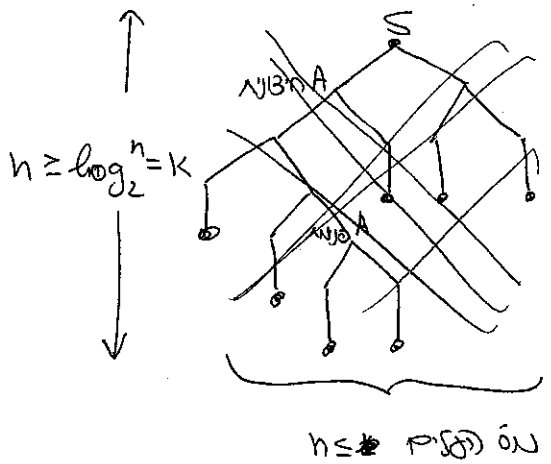
נבחר $z=a^{n^2}$ $vx=a^t$ $z_i=a^{n^2+(i-1)t}$ (בדומה לאמת הנעבות הרגילה)

נבחר $i=2$ ונקבל בסתירה $z_2=a^{n^2+t}\in L_4$

$n^2<n^2+t\leq n^2+n<(n+1)^2$

הוכחת לגת הקיבוי לשפות חח"

תהי L חח"ח ~~הנוקבלת~~ הנתקבלת ע"י הקדוק חח"ח G, נציג הקדוק לה בצורת תומסקי: נסתכל על עץ הגזירה של $z\in L$ $n=|z|$ (נסמן את מספר המשתנים ב- k. $n=2^k$)



תמונה 3:

$S\to uAy$

A חיצוני $\to vAx$ פנימי

A פנימי $\to w$

$S\to uAy\to uvAxy\to uvvAxxy\to$

$\to uv^iwx^iy$

20-01-12

סגירויות בשפות חב"ר

1- איחוד $L_1 \cup L_2$ ✓ $L_1 \cup L_2$ $\quad S \to S_1 | S_2$

$L_1 \quad S_1 \to \dots$

$L_2 \quad S_2 \to \dots$

2- חיתוך $L_1 \cap L_2$ × הפרכה:

חב"ר $\begin{cases} L_1 = \{a^m b^m c^k\} \\ L_2 = \{a^t b^s c^s\} \end{cases}$

עכשיו חב"ר $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n\}$

3- משלים $\bar{L_1}$ × הפרכה:

חב"ר $\{\overline{a^n b^n c^n}\}$

או חב"ר $\{a^n b^n c^n\}$

4- שרשור $L_1 L_2$ ✓ $S \to S_1 S_2$

5- סגור * L_1^* ✓ $S \to S S_1 | \varepsilon$

6- חיתוך חב"ר עם רגולרית ✓ אוטומט מכפלה: מחסנית × רגיל

7- פרמוטציה $L_7 = \{w \mid$ w פרמוטציה של מילה מ-$L_1\}$ ×

$L_1 = \{abc\}$ $\quad L_7 = \{abc, bac, cab, cba, bca, acb\}$

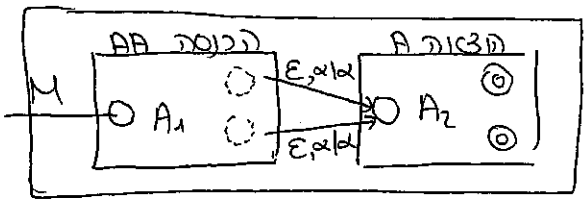
הפרכה: חב"ר $L = \{(abc)^n \mid n \geq 0\}$

עכשיו חב"ר $L_7 = \{w \mid \#a(w) = \#b(w) = \#c(w)\}$

תרגיל:

נתון L_1, L_2 שפות רגולריות, הוכח כי השפה: $L = \{u \cdot v \mid u \in L_1, v \in L_2, |v| = 2|u|\}$ חב"ר

הרעיון:



נתון: $L_1 = L(A_1) \quad A_1 = \langle Q_1, \Sigma, q_0', \delta_1, F_1 \rangle$

$L_2 = L(A_2) \quad A_2 = \langle Q_2, \Sigma, q_0'', \delta_2, F_2 \rangle$

נבנה: $L = L(M) \quad M = \langle Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \Gamma, q_0', \perp, \delta, F_2 \rangle$

$\Gamma = \{\perp, A\}$

$\alpha \in \{\perp, A\} \quad \forall q \in Q_1 \quad \delta(q, \sigma, \alpha) = (\delta_1(q, \sigma), AA\alpha)$

$\forall q_f \in F_1 \quad \delta(q_f, \varepsilon, \alpha) = (q_0'', \alpha)$

$\forall q \in Q_2 \quad \delta(q, \sigma, A) = (\delta_2(q, \sigma), \varepsilon)$

$\forall q_f \in F_2 \quad \delta(q_f, \varepsilon, \perp) = (q_f, \varepsilon)$