

Lista de exercícios: Métodos Discretos - MAC026

Nome: Felipe da Costa Pinto Millela
 Matrícula: 202465557 B

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x^0 = \{1, 1\} \text{ escolha } d = -(Ax^0 - b)$$

Raio espectral

↳ Relacionado a convergência do método

$$Re = \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \quad \lambda_m = \text{maior autovetor} \\ \lambda_1 = \text{menor autovetor}$$

1) Determinar os autovetores

$$\det(A - \lambda X) = 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} 2-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{array} \right| \quad \det(A - \lambda X) = x^2 - 5x + 2$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad x_m \approx 4,6 \\ x_1 \approx 0,4$$

$$Re = \frac{4,6}{0,4} \approx 11,5$$

Iterando:

$$1) d = b - Ax_0$$

$$Ax_0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$b - Ax = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ -6 \end{vmatrix} = d$$

$$\text{Calculando } \alpha = \frac{d^T(b - Ax_0)}{d^T Ad}$$

$$d^T d = [-3 \ -6] \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = 45$$

$$d^T Ad = \begin{bmatrix} A & d \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ad \\ -18 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 \end{bmatrix} = 198$$

$$\alpha = \frac{45}{198} = 0,2272$$

Atualiza valor de x

$$x_1 = x_0 + \alpha d = 0,2272 \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,577 \\ -1,159 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3181 \\ -0,3636 \end{bmatrix}$$

2)

$$d = b - Ax_1$$

$$Ax_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,3181 \\ -0,3636 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,5386 \\ 0,1158 \end{vmatrix}$$

$$b - Ax_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,5386 \\ 0,1158 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,0909 \\ -0,5454 \end{vmatrix} = d$$

Calculando para $\alpha = \frac{d^T(b - Ax)}{d^T Ad}$

$$d^T d = \begin{bmatrix} 0,4614 & -1,1158 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,4614 \\ -1,1158 \end{vmatrix} = 1,4876$$

$$d^T Ad = \begin{bmatrix} A \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} d \\ 0,4614 \\ -1,1158 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ad \\ -1,308 \\ -1,926 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} d^T \\ [0,4614 & -1,1158] \end{bmatrix}$$

$$d^T Ad = 0,8925$$

$$\alpha = \frac{1,4876}{0,8925} = 1,666$$

Atualiza valor de X :

$$X_2 = X_1 + \alpha \cdot d = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0,423 \\ -0,159 \end{bmatrix} + 0,943 \begin{vmatrix} 0,4614 \\ -1,1158 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2,1363 \\ -1,2727 \end{bmatrix}$$

$$3) d = b - Ax_2$$

$$\begin{bmatrix} A \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ 0,898 \\ -1,205 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,695 \\ -1,906 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} b \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -0,695 \\ -1,906 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,7272 \\ -1,4595 \end{vmatrix}$$

Calculando para $\alpha = \frac{d^T(b - Ax)}{d^T Ad}$

$$d^T \cdot d = \begin{vmatrix} 1,695 & 0,905 \\ 0,906 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1,695 \\ 0,906 \end{vmatrix} = 2,6445$$

$$d^T \cdot A \cdot d = \begin{matrix} A & d \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1,695 \\ 0,906 \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5,204 \\ 6,614 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1,695 & 0,905 \\ 0,906 & \end{vmatrix}$$

$$d^T \cdot A \cdot d = 11,618$$

$$\alpha = \frac{2,644}{11,618} = 0,227$$

Atualiza valor de x :

$$x_3 = x_2 + \alpha \cdot d = \begin{matrix} x_2 \\ \begin{vmatrix} 0,858 \\ -1,205 \end{vmatrix} \end{matrix} + 0,249 \begin{vmatrix} 1,695 \\ 0,906 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,971 \\ -1,6033 \end{vmatrix}$$

$$4) \quad d = b - Ax_3$$

$$\begin{matrix} A & x_3 \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1,281 \\ -0,979 \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0,602 \\ -0,377 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,602 \\ -0,377 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,268 \\ -0,132 \end{vmatrix}$$

$$\text{Calculando } \alpha = \frac{d^T(b - Ax)}{d^T \cdot Ad}$$

$$d^T \cdot d = \begin{vmatrix} 0,398 \\ -0,622 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,398 & -0,622 \end{vmatrix} = 0,0856$$

$$d^T Ad = \begin{vmatrix} 10,398 & -0,622 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Ad \\ -0,4494 \\ -0,8693 \end{vmatrix} = 0,0526$$

$$\alpha = \frac{0,0856}{0,0526} = 1,665$$

Atualiza valor de x :

$$x_4 = x_3 + \alpha \cdot d = 1,505 \begin{vmatrix} 0,398 \\ -0,622 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,281 \\ -0,979 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,41184 \\ -1,8236 \end{vmatrix}$$

$$5) \quad d = b - Ax_3$$

$$\begin{array}{c|cc} A & x_4 \\ \hline 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \begin{vmatrix} 1,8794 \\ -1,9163 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,074 \\ -1,990 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -0,074 \\ -1,990 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,174 \\ -0,350 \end{vmatrix}$$

$$\text{Calculando para } \alpha = \frac{d^T(b - Ax)}{d^T Ad}$$

$$d^T d = \begin{vmatrix} 1,074 \\ 0,990 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1,074 & 0,990 \end{vmatrix} = 0,151$$

$$d^T Ad \Rightarrow \begin{array}{c|cc} A & d \\ \hline 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \begin{vmatrix} 1,074 \\ 0,990 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ad \\ 4,128 \\ 5,118 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1,074 & 0,99 \end{vmatrix}$$

$$d^T Ad = 0,6535$$

$$\alpha = \frac{0,1507}{0,653} = 0,2271$$

Atualiza valor de X :

$$X_5 = X_4 + \alpha d = 0,2271 \begin{vmatrix} 1,074 \\ 0,990 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,8794 \\ -1,9163 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,3794 \\ -1,9038 \end{vmatrix}$$

$$6) \quad d = b - Ax_3$$

$$A \quad X_5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2,1194 \\ -1,6938 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,8512 \\ -0,843 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,8512 \\ -0,843 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1488 \\ -0,1574 \end{vmatrix}$$

$$\text{Calculando } \alpha \text{ para } \alpha = \frac{d^T(b - Ax)}{d^T Ad}$$

$$d^T \cdot d = \begin{vmatrix} 0,1488 \\ -0,1574 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,1488 & -0,1574 \end{vmatrix} = 0,0469$$

$$d^T \cdot Ad = \begin{vmatrix} A \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d \\ 0,1488 \\ -0,1574 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,0172 \\ -0,1746 \end{vmatrix}$$

$$d^T \cdot Ad = \begin{vmatrix} -0,0172 \\ -0,1746 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,1488 & -0,1574 \end{vmatrix} = 0,0249$$

$$\alpha = \frac{0,0469}{0,0249} = 1,884$$

Atualiza valor de X:

$$X_6 = X_5 + \alpha \cdot d = 1,884 \cdot \begin{vmatrix} 0,1488 \\ -0,1574 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,8794 \\ -1,9163 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,400 \\ -1,990 \end{vmatrix}$$

$$7) \quad X_6 = \begin{vmatrix} 2,400 \\ -1,990 \end{vmatrix}$$

$$d = b - Ax_5$$

$$\begin{matrix} A & X_5 \\ \left| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} 2,400 \\ -1,990 \end{array} \right| \end{matrix} = \begin{matrix} 0,819 \\ -1,171 \end{matrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,819 \\ -1,171 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1806 \\ 0,1711 \end{vmatrix}$$

$$\text{Calculando para } \alpha = \frac{d^T(b - Ax)}{d^T A d}$$

$$d^T \cdot d = \begin{vmatrix} 0,1806 \\ 0,1711 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,1806 & 0,1711 \end{vmatrix} = 0,0619$$

$$d^T A \cdot d = \begin{vmatrix} 0,1806 & 0,1711 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,7034 \\ 0,8745 \end{vmatrix} = 0,2765$$

$$\alpha = \frac{0,0619}{0,2765} = 0,2234$$

Atualiza valor de X:

$$X_7 = X_6 + \alpha \cdot d = 0,2234 \begin{vmatrix} 0,1806 \\ 0,1711 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2,400 \\ -1,990 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,4406 \\ -1,952 \end{vmatrix}$$

$$8) \quad X_7 = \begin{vmatrix} 2,4406 \\ -1,952 \end{vmatrix}$$

$$d = b - Ax_5$$

$$\begin{array}{c|cc|c} A & & X_7 \\ \hline 2 & 2 & 2,4406 \\ 2 & 3 & -1,952 \end{array} = \begin{vmatrix} 0,9766 \\ -0,9758 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0155 \\ -0,0077 \end{vmatrix} = d$$

$$\text{Calculando passo } \alpha = \frac{d^T(b - Ax)}{d^T Ad}$$

$$d^T d = \begin{vmatrix} 0,0234 & -0,0242 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,0234 \\ -0,0242 \end{vmatrix} = 0,00030$$

$$d^T Ad = \begin{vmatrix} 0,0234 & -0,0242 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -0,0016 \\ -0,0258 \end{vmatrix} = 0,000181$$

$$\alpha = \frac{0,0030}{0,00018} = 1,663$$

Atualiza valor de X :

$$X_8 = X_7 + \alpha \cdot d = \begin{vmatrix} 0,0234 \\ -0,0242 \end{vmatrix} \cdot 1,663 + \begin{vmatrix} 2,4406 \\ -1,952 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,4948 \\ -1,9896 \end{vmatrix}$$

$$9) \quad X_8 = \begin{vmatrix} 2,4948 \\ -1,9896 \end{vmatrix}$$

$$d = b - Ax_5$$

$$\begin{array}{c|cc|c} A & & X_8 \\ \hline 2 & 2 & 2,4834 \\ 2 & 3 & -1,9967 \end{array} = \begin{vmatrix} 0,9734 \\ -1,023 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,0103 \\ -0,0207 \end{vmatrix} = d$$

$$\text{Calculando parâmetro } \alpha = \frac{\mathbf{d}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\mathbf{d}^T \mathbf{A} \mathbf{d}}$$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{d} = \begin{vmatrix} 0,026 & | & 0,026 & 0,023 \\ 0,023 & | & & \end{vmatrix} = 0,00053$$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{A} \mathbf{d} = \begin{vmatrix} 0,026 & 0,023 & | & 0,099 \\ 0,023 & & | & 0,012 \end{vmatrix} = 0,00236$$

$$\alpha = \frac{0,00053}{0,00236} = 0,2272$$

Atualiza valor de \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}_9 = \mathbf{x}_8 + \alpha \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_8 & | & 0,2143 & 2,4834 \\ 0,026 & | & -1,9967 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,4924 \\ -5,9943 \end{vmatrix}$$

$$10) \quad \mathbf{x}_9 = \begin{vmatrix} 2,4924 \\ -5,9943 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_9$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{x}_9 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,9948 \\ -0,9969 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0037 \\ -0,0018 \end{vmatrix} = \mathbf{d}$$

$$\text{Calculando parâmetro } \alpha = \frac{\mathbf{d}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_9)}{\mathbf{d}^T \mathbf{A} \mathbf{d}}$$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{d} = \begin{vmatrix} 0,0052 & | & 0,0052 & -0,0031 \\ -0,0031 & | & & \end{vmatrix} = 0,000018$$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{A} \mathbf{d} = \begin{vmatrix} 0,0052 & -0,0031 & | & 0,0042 \\ 0,0042 & | & 0,0011 & \end{vmatrix} = 0,000011$$

$$\alpha = \frac{0,000018}{0,000011} = 1,6667$$

Atualiza valor de X :

$$X_{10} = X_9 + \alpha \cdot d = \begin{vmatrix} 0,0037 \\ -0,0018 \end{vmatrix} \cdot 1,667 + \begin{vmatrix} 2,4924 \\ -1,9943 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,4987 \\ -1,9974 \end{vmatrix}$$

Calculando o erro relativo entre os últimos 2 pontos temos:

$$E_n = \frac{\|X_{10} - X_9\|}{\|X_{10}\|} = 0,00219 > 10^{-4}$$

Neste exemplo, para se obter o critério de parada com erro menor que 10^{-4} foi necessário cerca de 15 iterações, realizado computacionalmente.

Com isso, vemos que o condicionamento da matriz fornece a convergência do método com algumas iterações. Isto está relacionado com o raiopectral = λ_m / λ_1 (maior e menor autovalores)

Q2) 10 Iterações de método de descida para os seguintes dados:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4,99 \\ 4,99 & 5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considerar $d = b - Ax_i$

Determinando os autovalores:

$$\det(A - X\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-x & 4,99 \\ 4,99 & 5-x \end{vmatrix} = (0,01-x)(9,99-x) = 0$$

$$x_1 = 0,01$$

$$x_2 = 9,99$$

Logo $R_e = \frac{9,99}{0,01} = 1000 \rightarrow$ matriz mal condicionada
 ↳ tende a convergir mais lentamente

Iteração 1:

$$d = b - A \cdot x_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 4,99 \\ 4,99 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8,99 \\ -10,99 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0}$$

$$d^T \cdot d = \begin{vmatrix} -8,99 \\ -10,99 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8,99 & -10,99 \end{vmatrix} = 201,6$$

$$d^T \cdot A \cdot d_0 = \begin{vmatrix} 5 & 4,99 \\ 4,99 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8,99 \\ -10,99 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8,99 & -10,99 \end{vmatrix} = 1995,1$$

$$\alpha = \frac{201,6}{1995,1} = 0,1011$$

Atualizando X :

$$X_{i+1} = X_i + \alpha d = \begin{vmatrix} 0,092 \\ -0,1111 \end{vmatrix}$$

De forma análoga, para as seguintes iterações teremos:

Iteração 2)

$$d = b - AX_i = \begin{vmatrix} 1,0989 \\ -0,8989 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 9,1736$$

$$X_2 = \begin{vmatrix} 10,1728 \\ -8,3581 \end{vmatrix}$$

Iteração 3)

$$d = b - AX_i = \begin{vmatrix} -8,1570 \\ -9,9717 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 0,1011$$

$$X_3 = \begin{vmatrix} 9,3481 \\ -9,3662 \end{vmatrix}$$

Iteração 4)

$$d = b - AX_i = \begin{vmatrix} 0,9971 \\ -0,8156 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 9,1736$$

$$X_4 = \begin{vmatrix} 18,4957 \\ -16,8491 \end{vmatrix}$$

Iteração 5)

$$d = b - AX_i = \begin{vmatrix} -7,4012 \\ -9,0477 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 0,1011$$

$$X_5 = \begin{vmatrix} 17,7474 \\ -17,7639 \end{vmatrix}$$

Iteração 6)

$$d = b - AX_i = \begin{vmatrix} 0,90476 \\ -0,7401 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 9,17365$$

$$X_6 = \begin{vmatrix} 26,0475 \\ -24,5535 \end{vmatrix}$$

Iteração 7)

$$d = b - AX_i = \begin{vmatrix} -6,7154 \\ -8,2094 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 0,10112$$

$$X_7 = \begin{vmatrix} 25,3685 \\ -25,3835 \end{vmatrix}$$

Iteração 8)

$$d = b - AX_i = \begin{vmatrix} 0,8209 \\ -0,6715 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 0,1736$$

$$X_8 = \begin{vmatrix} 32,8995 \\ -31,5439 \end{vmatrix}$$

Iteração 9)

$$d = b - AX_i = \begin{vmatrix} -6,0932 \\ -7,4488 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 0,1011$$

$$X_9 = \begin{vmatrix} 32,2835 \\ -32,2970 \end{vmatrix}$$

I iteracão 10)

$$d = b - Ax_i = \begin{vmatrix} 0,7448 \\ -0,6093 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{d^T \cdot d_0}{d^T \cdot A \cdot d_0} = 9,1736$$

$$x_{10} = \begin{vmatrix} 39,11673 \\ -37,88676 \end{vmatrix}$$

Para calcular o erro relativo, usamos:

$$\text{Erro} = \frac{\|x_{10} - x_9\|}{\|x_{10}\|} = 0,1621$$

Em uma análise computacional, podemos perceber que essa configuração leva mais de 100 iterações para obter um erro relativo $\leq 10^{-4}$, devido ao mal condicionamento da matriz e seus autovalores.

Concluímos nesse exercícios como as propriedades espectrais das matrizes afetam a eficácia dos métodos numéricos, particularmente o método de descida, em encontrar soluções de mínimos para funções quadráticas.

Alem disso, pode-se perceber também, que a escolha dos parâmetros e condições iniciais pode influenciar o desempenho do método em termos de precisões e iterações necessárias.

