Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Mecanica Aplicada Computacional
METODOS DISCRETOS

PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL.

Felipe Vilela - 202465557B

N = 9

Professor: Elson Toledo

Resolucao da segunda (02) lista de exercicios da disciplina de Metodos Discretos - MAC026

Juiz de Fora

Outubro de 2024

1 Introdução

Este relatório apresenta a solução detalhada para um problema de valor de contorno em um domínio unidimensional. O problema envolve uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com condições de contorno fixas. Exploraremos a solução exata e a solução numérica utilizando métodos de diferenças finitas e discutiremos as técnicas necessárias para evitar oscilações na solução numérica. Além disso, abordaremos a difusividade ótima para garantir uma solução nodalmente exata.

2 Descrição do Problema

A equação diferencial do problema é:

$$-\varepsilon u''(x) + \beta u'(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{1}$$

com as seguintes condições de contorno ajustadas:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

Os parâmetros ε e β são definidos de acordo com o número N de ordem do aluno, conforme as equações:

$$\varepsilon = 5 \times 10^{-2}\left(1 + \frac{N-1}{54}\right), \quad \beta = 10\left(1 + \frac{N-1}{54}\right) \tag{2}$$

Para este relatório, consideramos $N = 9$.

3 Cálculo de ε e β

Substituindo $N = 9$ nas equações, temos:

$$\varepsilon = 5 \times 10^{-2}\left(1 + \frac{9-1}{54}\right) = 5 \times 10^{-2} \times 1.1481 \approx 0.05741$$

$$\beta = 10 \times 1.1481 \approx 11.481$$

Agora que temos $\varepsilon = 0.05741$ e $\beta = 11.481$, podemos continuar com os cálculos.

4 Solução Exata

Para resolver a equação diferencial $-\varepsilon u''(x) + \beta u'(x) = 0$, reescrevemos:

$$u''(x) = \frac{\beta}{\varepsilon} u'(x)$$

Esta é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem. Supondo uma solução da forma $u(x) = A + Be^{kx}$, onde $k = \frac{\beta}{\varepsilon} \approx 200.01$, a solução geral é:

$$u(x) = A + Be^{200.01x}$$

Com as novas condições de contorno $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, obtemos: 1. Em $x = 0$:

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$$

2. Em $x = 1$:

$$A + Be^{200.01} = 1$$

Substituindo $A = -B$ na segunda equação:

$$-B + Be^{200.01} = 1 \quad \Rightarrow \quad B(e^{200.01} - 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad B \approx \frac{1}{e^{200.01}}$$

Como $e^{200.01}$ é um número extremamente grande, B é aproximadamente zero. Assim, a solução exata é:

$$u(x) \approx e^{200.01x}$$

5 Método Numérico: Diferenças Finitas

Agora, aplicamos o método de diferenças finitas para resolver a equação diferencial numericamente. Para isso, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em N subintervalos com espaçamento $\Delta x = \frac{1}{N}$. Denotamos os valores de $u(x)$ nos nós por u_i, onde $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

A equação diferencial é discretizada da seguinte forma:

$$-\varepsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \beta \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 0$$

Rearranjando a equação, obtemos:

$$-\varepsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} = \beta \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

5.1 Montagem da Matriz de Coeficientes

A equação discretizada pode ser escrita na forma matricial $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, onde A é a matriz dos coeficientes, $\mathbf{u}$ é o vetor das incógnitas u_i, e $\mathbf{b}$ é o vetor de termos independentes, que neste caso contém as condições de contorno.

A matriz A para $N = 5$ (apenas um exemplo para simplificação) teria a seguinte estrutura tridiagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{2\Delta x} - \frac{\varepsilon}{\Delta x^2} & 2\frac{\varepsilon}{\Delta x^2} & \frac{\beta}{2\Delta x} - \frac{\varepsilon}{\Delta x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{2\Delta x} - \frac{\varepsilon}{\Delta x^2} & 2\frac{\varepsilon}{\Delta x^2} & \frac{\beta}{2\Delta x} - \frac{\varepsilon}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{2\Delta x} - \frac{\varepsilon}{\Delta x^2} & 2\frac{\varepsilon}{\Delta x^2} & \frac{\beta}{2\Delta x} - \frac{\varepsilon}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor $\mathbf{b}$ contém os valores das condições de contorno:

$$\mathbf{b} = [0, 0, 0, 0, 1]^T$$

5.2 Resolução do Sistema Linear

O sistema linear $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ é resolvido utilizando métodos numéricos adequados, como a decomposição de LU, ou métodos iterativos como Gauss-Seidel ou Gradientes Conjugados, dependendo do tamanho do sistema.

6 Número Mínimo de Divisões para Evitar Oscilações

Para garantir que a solução numérica baseada em diferenças finitas não apresente oscilações, usamos o critério do número de Peclet, definido como:

$$Pe = \frac{\beta \Delta x}{2\varepsilon} \tag{3}$$

Sabemos que a solução numérica é estável se $Pe \leq 1$. Assim, substituímos ε e β:

$$Pe = \frac{11.481 \Delta x}{0.11482}$$

Queremos que $Pe \leq 1$, logo:

$$\Delta x \leq \frac{0.11482}{11.481} \approx 0.01$$

Portanto, o número mínimo de divisões do domínio é:

$$N_{min} = \frac{1}{\Delta x} = 100$$

7 Redução de 20% no Número de Divisões

Reduzindo o número de divisões em 20%, temos:

$$N = 0.8 \times 100 = 80$$

O novo valor de Δx é:

$$\Delta x = \frac{1}{80} = 0.0125$$

Substituímos na equação do número de Peclet:

$$Pe = \frac{11.481 \times 0.0125}{0.11482} \approx 1.25$$

Como $Pe > 1$, a solução numérica apresentará oscilações.

8 Aumento de 20% no Número de Divisões

Aumentando o número de divisões em 20%, temos:

$$N = 1.2 \times 100 = 120$$

O valor de Δx agora é:

$$\Delta x = \frac{1}{120} \approx 0.00833$$

O número de Peclet é:

$$Pe = 0.83$$

Como $Pe < 1$, a solução numérica não apresentará oscilações.

9 Aproximação Upwind para $Pe > 1$

Quando $Pe > 1$, aplicamos a aproximação upwind. Essa técnica modifica a formulação de diferenças finitas centradas, introduzindo uma assimetria que favorece a direção do fluxo. Isso ajuda a evitar oscilações.

A equação diferencial discreta upwind é dada por:

$$-\varepsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \beta \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = 0$$

10 Difusividade Ótima para $Pe > 1$

Para $Pe > 1$, podemos ajustar a difusividade artificial para garantir uma solução nodalmente exata. A difusividade ótima é dada por:

$$\varepsilon_{otimizada} = \frac{\beta \Delta x}{2}$$

Substituindo os valores:

$$\varepsilon_{otimizada} = \frac{11.481 \times 0.0125}{2} = 0.07176$$

Com essa difusividade, a solução é nodalmente exata.

11 Conclusão

Neste relatório, resolvemos o problema de valor de contorno proposto tanto de forma analítica quanto numérica. Exploramos o critério de estabilidade baseado no número de Peclet e demonstramos a importância da difusividade ótima para garantir soluções exatas. A aproximação upwind foi essencial para lidar com situações onde $Pe > 1$.