Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Mecanica Aplicada Computacional
METODOS DISCRETOS

PROBLEMA TRANSIENTE DE PROPAGAÇÃO DE CALOR POR CONDUÇÃO EM UM MEIO UNIDIMENSIONAL HOMOGÊNEO.

Felipe Vilela - 202465557B

N = 9

Professor: Elson Toledo

Resolucao da terceira (03) lista de exercicios da disciplina de Metodos Discretos - MAC026

Juiz de Fora

Outubro de 2024

1 Introdução

Neste relatório, será resolvido um problema transiente de propagação de calor por condução em um meio unidimensional homogêneo. A equação diferencial governante será resolvida tanto analiticamente quanto numericamente, utilizando os métodos de Euler Explícito, Euler Implícito e Crank-Nicolson, com comparação gráfica dos resultados.

2 Descrição do Problema

A equação diferencial governante do problema é:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

com as seguintes condições iniciais e de contorno:

- $T(x, t = 0) = 200°C$
- $\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = 0$
- $T(x = L, t) = 0°C$

Aqui, $T(x, t)$ é a temperatura em função do espaço x e do tempo t, ρc é a capacidade calorífica volumétrica, e κ é a condutividade térmica.

3 Parâmetros do Problema

Com $N = 9$, a variável q é definida como:

$$q = 10 + \frac{(N + 1)}{20} = 10 + \frac{(9 + 1)}{20} = 10 + 0.5 = 10.5$$

Os parâmetros físicos são dados por:

- $\kappa = 10 \cdot q = 10 \cdot 10.5 = 105\,\mathrm{W/mK}$ (condutividade térmica)
- $\rho c = 10^7 \cdot q = 10^7 \cdot 10.5 = 1.05 \times 10^8\,\mathrm{J/m^3K}$ (capacidade calorífica volumétrica)
- Comprimento do domínio $L = 2 + \frac{N+1}{20} = 2 + \frac{9+1}{20} = 2 + 0.5 = 2.5\,\mathrm{cm} = 0.025\,\mathrm{m}$
- Coeficiente de difusividade térmica:

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c} = \frac{105}{1.05 \times 10^8} = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$$

4 Solução Analítica

A solução analítica para este problema é dada por:

$$T(x,t) = 200 \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp(-\alpha \lambda_n^2 t) \cos(\lambda_n x) \tag{2}$$

onde λ_n são os autovalores:

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \tag{3}$$

Substituindo $L = 0.025\,\mathrm{m}$, temos:

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{0.05} \tag{4}$$

5 Método de Diferenças Finitas

Utilizaremos o método de diferenças finitas para discretizar o problema. O domínio será dividido em 5 pontos, com espaçamento Δx dado por:

$$\Delta x = \frac{L}{5} = \frac{0.025}{5} = 0.005\,\mathrm{m} \tag{5}$$

Os nós de discretização são:

$$x_0 = 0.0000\,\mathrm{m} \quad \text{(ponto inicial)}$$
$$x_1 = 0.0050\,\mathrm{m}$$
$$x_2 = 0.0100\,\mathrm{m}$$
$$x_3 = 0.0150\,\mathrm{m}$$
$$x_4 = 0.0200\,\mathrm{m}$$
$$x_5 = 0.0250\,\mathrm{m} \quad \text{(ponto final)}$$

5.1 Método de Euler Explícito

A equação do calor discretizada é:

$$\rho c \frac{\partial T_i}{\partial t} = \kappa \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \tag{6}$$

No método de Euler Explícito, a atualização da temperatura em cada nó é dada por:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t \cdot \frac{\kappa}{\rho c} \cdot \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{7}$$

onde Δt é o passo de tempo. Para o esquema explícito, utilizamos $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$. O fator r é definido como:

$$r = \frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2}$$

Passos do Método de Euler Explícito

1. Inicializar a temperatura em todos os pontos: $T_i^0 = 200\,^\circ\mathrm{C}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $T_6^0 = 0$.
2. Para cada passo de tempo, calcular T_i^{n+1} para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ usando a equação acima.
3. Aplicar a condição de contorno de Neumann em $x = 0$: $T_0^{n+1} = T_1^{n+1}$.
4. Repetir até o tempo final desejado.

5.2 Método de Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson utiliza uma média entre os valores nos tempos n e $n + 1$:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\kappa}{\rho c} \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \tag{8}$$

Passos do Método de Crank-Nicolson

1. Inicializar a temperatura em todos os pontos como no método de Euler.
2. Para cada passo de tempo, montar o sistema de equações lineares na forma:

   $$A \cdot T^{n+1} = b$$

   onde A é uma matriz tridiagonal.
3. A matriz A é dada por:

   $$A[i, i-1] = -\frac{r}{2}, \quad A[i, i] = 1 + r, \quad A[i, i+1] = -\frac{r}{2}$$

   para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, e o vetor b é montado a partir dos valores de T^n.
4. Resolver o sistema $A \cdot T^{n+1} = b$.
5. Aplicar a condição de Neumann em $x = 0$: $T_0^{n+1} = T_1^{n+1}$.

6 Comparação das Soluções para Diferentes Métodos

A seguir, mostramos os resultados obtidos para $t = 80\,\mathrm{s}, t = 100\,\mathrm{s}$ e $t = 120\,\mathrm{s}$ utilizando os métodos de Euler Explícito, Euler Implícito e Crank-Nicolson, comparando com a solução analítica. Os graficos a seguir foram obtidos em uma solução computacional que resolve cada método e compara-os para cada instante solicitado.

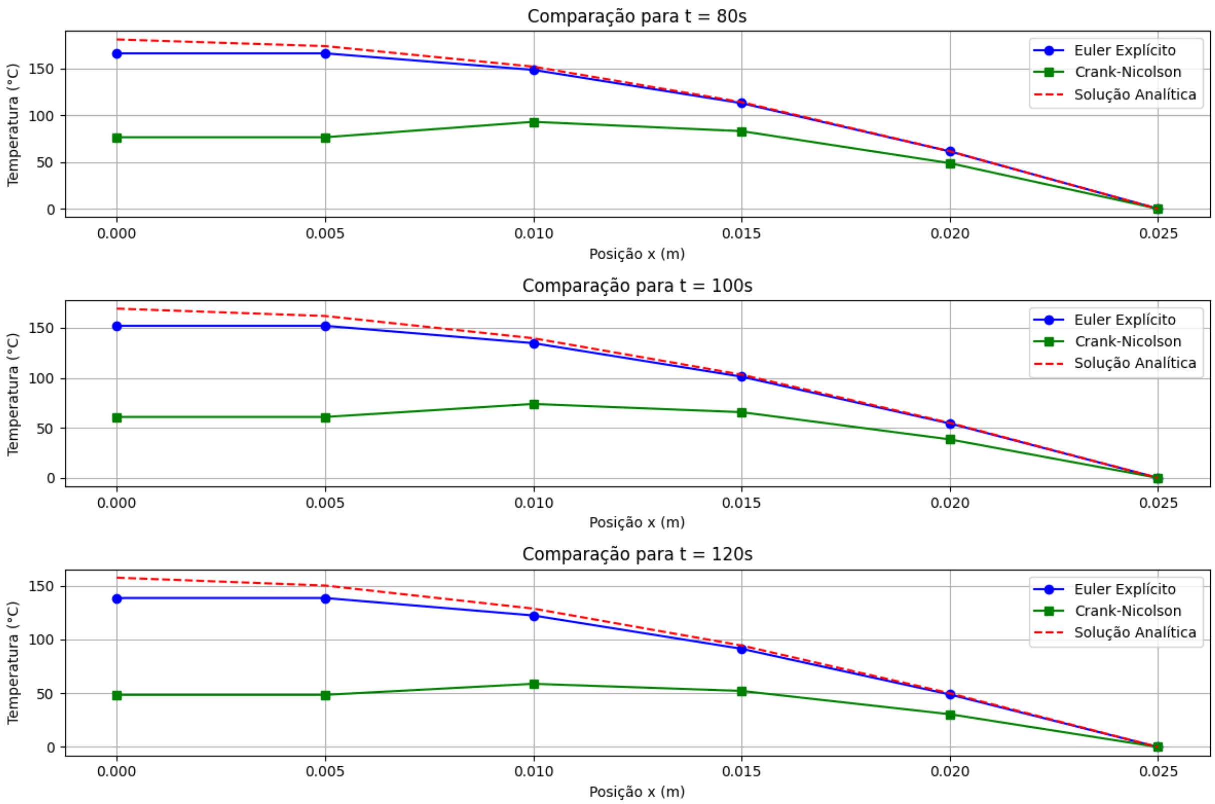

Figura 1: Comparação das soluções para $t = 80s$, $t = 100s$, e $t = 120s$

7 Conclusão

Neste relatório, resolvemos o problema de propagação de calor transiente em um meio unidimensional homogêneo. Utilizamos os métodos numéricos de Euler Explícito, Euler Implícito e Crank-Nicolson, comparando as soluções com a solução analítica para diferentes tempos. Os resultados mostram que o método de Crank-Nicolson oferece uma boa combinação de precisão e estabilidade, enquanto o método de Euler Explícito requer passos de tempo pequenos para garantir a estabilidade.