# GTI 1 –(Elementare Logik)

**Prädikatenlogik: Aussagenlogik angereichert mit Quantoren.**

Aussageform (Prädikat): Satz mit mind. einem Platzhalter, in der/die X eingesetzt werden kann, wobei X das Universum ist.

Eine Belegung eines Prädikats führt zu einer Aussage.

Junktor: Logische Verknüpfung

Tautologie: Immer wahr

Kontradiktion: Immer falsch

Modus Ponens: $\left(p \wedge (p \Rightarrow q)\right) \Rightarrow q$

**Boolesche Ausdrücke:**

1. 0 und 1 sind Boolsche Ausdrücke
2. Jede Boolsche Variable (fängt mit X1 an und danach 0/1) ist ein Boolscher Ausdruck
3. Ist w ein B.A., so auch ¬w
4. Sind v, w B.A., so auch (v+w)
5. Sind v, w B.A., so auch (vw)

Literal: Ein Boolscher Ausdruck, der nur aus einer (negierten) Variable besteht.

Disjunktive Normalform: Summe von Produkten (Disj. Von Konj.)

Konjunktive Normalform: Produkt von Summen (Konj. Von Disj.)

**Aussagenlogik:**

Aussagenlogische Formel:

1. Alle atomaren Formeln sind Formeln
2. Ist F eine Formel, so auch ¬F
3. Sind F und G Formeln, so auch (F∧G), (F∨G)

0,1 heißen Wahrheitswerte

Eine Belegung ist eine Abbildung, die jeder Atomaren Formel einen Wahrheitswert zuweist.

**Resolutionskalkül:**

Klausel: Endliche Menge von Literalen

Klauselmenge: Nichtleere Menge von Klauseln einer Formel

Resolvente: $A \epsilon K_x, \neg A \epsilon K_y \rightarrow K_z = (K_x \backslash \{A\}) \cup \left(K_y \backslash \{\neg A\}\right)$

Enthält eine Klauselmenge ∅, wird sie als unerfüllbar bezeihnet.

Menge der Resolventen n-ter Stufe: $Res^n(K) = K \cup \{R | R\ Resolvente\ zweier\ Klauseln\ aus\ K\}$

**Hornlogik:**

Eine Formel in KNF heißt Hornformel, wenn jede Disjunktion maximal ein positives Literal hat.

Eine Klausel heißt Hornklausel, wenn höchstens eins der Literale positiv ist.

Tatsachenklausel: Klausel ohne negative Literale (also ein positives).

Regel/Prozedurklausel: Ein positives und mindestens ein negatives Literal.

Zielklausel: Ohne positives aber mindestens ein Negatives Literal.

Markierungsalgorithmus:

1. Markiere jedes Literal aus Tatsachenklauseln
2. Markiere Tatsachenklausel als erfüllt
3. Wiederhole solange es neu markierte Literale gibt:
    3.1 Für alle neu markierten Literale: Markiere jedes Auftreten des Literals in den Klauseln.
    3.2 Danach für alle Programmklauseln: Sind alle negativen Literale in der Klausel markiert, so

markiere auch das Positive Literal und die Klausel selbst.

4. Bleiben Literale der Zielklausel unmarkiert: Ziel ist keine Folgerung
5. Sind alle Literale der Zielklausel markiert: Ziel ist eine Foglerung

Gibt der Algorithmus „keine Folgerung“ aus, so ist die Belegung (mit 1 falls markiert, sonst 0) ein Modell von F. F ist also erfüllbar.

Resolventen als Baum darstellbar -> DFS/BFS (Depth-first/Breadth-first search)

**Prädikatenlogik:**

Man benötigt:

Variablen über einem Universum
Funktionen
Terme zur Bildung komplexer Ausdrücke
Prädikate, mit denen aus Werten des Universums Wahrheitswerte gebildet werden können
Junktoren zur Verknüpfung von Wahrheitswerten
Quantoren

Syntax:

Eine Variable ist ein Symbol der Formel $x_i$ mit $i \in \mathbb{N}$.
Ein Funktionssymbol hat die Form $f_i^{(k)} mit\ i, k \in \mathbb{N}$, wobei k die Anzahl der Parameter angibt
Ein Prädikatensymbol hat die Form$P_i^{(k)} mit\ i, k \in \mathbb{N}$, wobei k die Anzahl der Parameter angibt
Ein Term entsteht durch endlich viele Anwendungen aus:

Jede Variable ist ein Term
Ist f ein k-stelliges Funktionssymbol und sind $t_1 \ldots t_k$ bereits Terme, so ist auch $f(t_1 \ldots t_k)$ ein Term

Eine prädikatenlogische Formel entsteht durch endlich viele Anwendungen aus:

Ist P ein k-stelliges Prädikatensymbol und sind $t_1 \ldots t_k$ bereits Terme, so ist $P(t_1 \ldots t_k)$ eine Formel.
Sind F und G Formeln, so auch $\neg F, (F \wedge G), (F \vee G)$
Ist x eine Variable und F eine Formel, so auch $\forall x: F\ und\ \exists x: F$

Das Alphabet besteht somit aus:$\{x, f, P, 0, 1, (, ), \neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, :\}$

Semantik:

Eine zu F passende *Struktur* α ist ein Tupel $\alpha = (U, \phi, \psi, \xi), wobei$:

U eine nichtleere Menge (Universum) ist
ϕ ordnet jedem in F vorkommenden Funktionssymbol eine Abbildung $\phi(f): U^k \rightarrow U$ zu
ψ ordnet jedem in F vorkommenden Prädikatensymbol P eine Teilmenge $\psi(P) \subseteq U^k$zu
ξ ordnet jeder in F vorkommenden Variablen x ein Element $\xi(x)$ aus U zu

Eine zu F passende Struktur α heißt *Modell* für F, wenn α(F)=1 (Schreibweise: $\alpha| = F$

F heißt erfüllbar, wenn es ein Modell für F gibt

F heißt unerfüllbar, wenn es kein Modell für F gibt

F heißt allgemeingültig oder Tautologie, wenn jede passende Struktur α bereits ein Modell ist

Die Aussagenlogik ist Teil der Prädikatenlogik.