Algorithm Engineering

July 6, 2015

Datentypen

Getränkeautomat

Automat akzeptiert 1E, ein Getränk kostet 3E
Operatoren:

1. Init(Reset)
2. Akzeptiere1E

Init $\rightarrow$ Zustand
  Semantik: Automat geht in Zustand 0
Akzeptiere1E: ZustandX{0,1} $\rightarrow$ ZustandX{tue nichts, gib Getänk}
  Semantik: Beschreibung durch einen endlichen Automaten.

Stadtplan

Übung 1

Bemerkungen

- Operatoren können partiell Definiert sein. Man gibt Definitionsbereich oft in einer Vorbedingung an.
- Operatoren, bei denen der Datentyp selbst auf der linken Seite nicht vorkommt, heißen Konstruktoren. Sie erzeugen ein neues Objekt (bzw. versetzen den Typ in einem bestimmten Zustand).
  - Create: $\rightarrow$ stack<T>
  - Create: int $\rightarrow$ vector (Vektor bestimmter Dimension)
- Objekt- und Zustandssicht sind beide nützlich. Stack/Getränkeautomat haben internen Zustand, Operatoren können ihn verändern.
  - Integer: Objektsicht besser, Operatoren erzeugen neue Objekte, exisitierende werden nicht geändert.
- stack$< T >$ ist ein parametrisierbarer Datentyp: Stack mit Elementen vom Typ T. Hat eventuell besondere Anforederungen an Typ T, z.B. $x \leq y$ in Dictionaries.
- Man kann nun eigentlich schon programmieren, obwohl über die Interpretiernug noch nichts bekannt ist.

Anwendung von stack$< T >$

Auswertung von Postfix-Ausdrücken
Vereinfachungen: alle Operatoren binär (+-*/), Eingabe nur Zahlen 0-9
Bsp.: $(7-5)*(3+1) \rightarrow 75-31+*$

Defintion eines Datentyps

(In einer Objekt-Orientierten Programmiersprache)

```
class Typname {
        //Definition der Menge der Objekte bzw Zustaende
        private: //Deklaration von Variablen zur Darstellung der Objekte/Zustaende
        public: //Operatoren
        //Kommentare z.B. ueber Effizienz
};
```

Operatoren

Methoden/Memberfunktionen
Syntax: Ergebnistyp Name(Argumente...);
Spezielle Methoden:

- Kein Ergebnistyp: stack(); stack(size);
- Destruktor: ~ Typname();

Beispiel

int_stack → stack< T >

```
class int_stack {
        /* Eine Instanz vom Typ int_stack ist eine Folge von ganzen Zahlen (int). Eine Fol
        private: //Implementierung
        public: stack(int sz); //Konstruktor
        //Erzeugt einen Stack mit maximaler Groesse sz
        ~stack() //Destruktor
        void push (int x);
        //fuegt x als letzes Element (top) an die Folge an.
        int top() const;
        //liefert das letzte (top) Element
        //Precondition: Stack nicht leer
        int pop();
        //entfernt letztes (top) Element der Folge und gibt es zurueck
        //Precondition: Stack nicht leer
        bool empty() const;
        //true, wenn Stack leer, false sonst.
```

In c++ Spezielle Header Datei, die die Deklarationen ohne Rumpf enthält. Implementierung in .cpp

Implementierung der Klasse int_stack

Mehrere Möglichkeiten: Array, Liste Array Implementierung: $int_stack.h$

```
class int_stack {
        private
                int* A; //Feld
                int sz; //Laenge von A
                int t;
};
```

$int_stack.cpp$

```
#include "int_stack.h"
int_stack::int_stack(int n) {
        sz=2;
        A = new int[sz];
        t = −1; //leer
}
int_stack::~int_stack(){
        delete[] A;
}
void int_stack::push(int x){
        if (t == sz−1){
                //stack voll
                int* B=new int[2*sz];
                sz ← 2*sz;
                for(int i=0; i ≤;i++){
                        B[i] ←
                }
                delete[] A;
        }
        A[++t] ← x; //eigentlich push
}
int int_stack::pop(){
        if(t==−1){
                EXCEPTION("Leerer Stack")
        return A[t−−];
}
```

Einschub: Variablen, Konstruktoren, Wertzuweisung

ablen Deklaration c++: Aufruf des Konstruktors generiert ein Objekt.
Java: Erst eine Referenz erstellen, dann ein Objekt generieren und auf dieses verweisen.

Wertzuweisung c++: $int_stacks1, s2; s1 = s2;$ Objekt wird kopiert, es gibt 2 Objekte.
Java: $int_stacks1, s1; s1 = s2;$ Referenzen zeigen auf ein einziges Objekt.

semantik in c++: Verwendet Pointer auf ein Objekt.
Test auf Gleichheit (==) Operator
Parameterübergabe sind Pointer

semantik in Java: Parameter by Value, gesamtes Objekt kopiert und dann übergeben.

Korrektheit einer Implementierung

(Hier der Array-Implementierung von int_stack)
Eigentlich 2 Datentypen:

1. der abstrake Datentyp int_stack
2. der konkrete Datentyp Array

<u>Abstrakter Zustand:</u> Folge von int's
<u>Konkreter Zustand:</u> Werte der Variable A,t,sz
Wir garantieren (Invariante), dass nicht die Kombination von A,t,sz möglich sind, sondern nur gültige Zustande mit:

1. A ist ein Feld der Länge sz
2. $-1 \leq t \leq sz - 1$

Sei Z=Menge der konkreten Zustände und S = Menge der abstrakten Zustände
Um die Korrektheit zu zeigen, definieren wir eine Abbildung $F : Z \to S$
$(A, sz, t) \to \begin{cases} Folge\ A[0], ..., A[t]\ falls t \geq 0 \\ Leere\ Folge, t = -1 \end{cases}$ Und zeigen:

1. Konstruktoren erzeugen gültige konkrete Zustände
2. Für jede abstrakte Operation und die dazugehörige konkrete Operation f_{op} zeige $F(f_{op}(Z)) = op(F(Z))$
   Bsp.: push: $S \times int \to S$
   $f_{push} : Z \times int \to Z$

Kommutatives Diagramm:
$z \xrightarrow{F} s$
$\downarrow f_{op} \uparrow op$
$z' \xrightarrow{F} s'$

Vererbung/Generische Datentypen

Templates/Wiederverwendung von Code
<u>Situation</u>
Man braucht einen Datentyp A, der sehr ähnlich zu einem bereits vorhandenen definierten Typ B ist.
A soll:

- einen Teil der Daten/Operationen verwenden
- andere Daten/Operationen anfügen
- einige verändern (auf andere Weise implementieren)

Beispiel

Es existiert die Klasse Polygon (B), implementiert werden soll eine Klasse Rechteck (A).
A ist eine Spezialisierung von B
Rechteck könnte alle Polygon-Operationen (draw(),translte etc)
Einige Operationen können effizienter implementiert werden (Flächeninhalt etc.)
Andere sind nur für Rechtecke definiert.
Jedes Rechteck ist ein spezielles Polygon.

Allgemein

Wir leiten die Klasse A von der Klasse B ab.
Syntax in c++: A: public B

```
class Rechteck: public Polygon{
        //Konstruktoren -> uebung :(
        private:
                //Ueberschreiben
                double b,h;
                double area() {return b*h;}
                double umfang() {return 2*(b+h);}
                //Hinzufuegen
                double ratio() {return b/h;}
};
```

Ableitungen auch als Baum darstellbar (Shape mit Kindern Polygon/Ellipse/Punkt etc)

Typverträglichkeit

Einer Variable vom Typ B* oder B& (alle Variablen in JAVA vom Typ B) kann ein Opbjekt (Pointer/Referenz) vom Typ A zugewiesen werden.
Alle im Ableitungsbaum erreichbaren Typen können zugewiesen werden (Kinder).
Eine Variable hat 2 Typen: Einen Statischen Typ, der zur Compilezeit bekannt ist. Dynamischer Typ, der zur Laufzeit bekannt ist.

Polymorphe Datenstrukturen

```
polygon* p = new rechteck()
double func(polygon& p){
        return poly.area();}
rechteck rect = new rechteck();
func(rect);
```

Es wird per dynamischer Bindung die Funktion func der Klasse Rechteck aufgerufen.
C++ benutzt standardmäßig statische Bindung esseidenn Funktion ist "virtual". Bsp.: Feld von Polygonen c++: Polygon** (Ein Pointer auf ein Feld von Pointern) A = new Polygon*[100];
A[0] = new Polygon(...);
A[1] = new Rechteck(...);

Abstrakte Klassen werden verwendet um Interfaces zu definieren.
Z.B. Shape als abstrakte Klasse. In C++ werden Methoden als abstrakt markiert, wenn sie bei der Deklaration = 0 gesetzt werden
virtual void draw() = 0;

Anwendung auf Algorithmen

Lineare Ordnungen durch ein Interface umgesetzt.
In C++:

```
class comparable{
        virtual int compare(compareable x)=0;
}
```

Anwendung in generischen Sortieralgorithmen:
Quicksort(comparable* A[])
Zum Vergleich benutzt man x.compare(y)

Anwendung: Sortiere ein Feld von point

```
class point: public comparable{
        int compare(comparable x){
                //x ist tatsaechlich ein point
                double px=((point&)p).x; //Casting
                double py=((point&)p).y;
                //lexikographische Ordnung..
                return ..;
        }
}
Aufruf von Quicksort:
point* A[] = new point*[100];
for(i=0;i<100<i++) A[i] = new point(i,i*i);
Quicksort(A,100);
```

Datenstrukturen, bei denen Comparable sinnvoll ist:

- Binäre Suchbäume, bei denen die Knoten vergleichbar sind.

Weitere Anwendung von Vererbung

Generische Datenstrukturen wie z.B. Listen von beliebigen Objekten.
Einfach verkettete Liste:
Beobachtung: Implementierung der Operationen (push, pop), ist nicht abhängig vom Typ. Der Wert (int,string,point,...) jedoch schon.
Abstraktion: Liste ohne Werte
1. Basisklasse für allgemeines Listenelement:

```
class slist_element{
        slist_element* next;
        slist_element(slist_element* p) {next = p;}
};
```

2. Basisklasse für allgemeine List:

```
class slist{
        slist_element* first;
        slist() {first = NULL;}

        void push(slist_element* p){
                p->next = first;
                first = p;
        }
        slist_element* pop(){
                if(first == NULL) return first;
                slist_element* p = first;
                first = first.next;
                return p;
        }
}
```

slist funktionirt auch für alle von slist_elem abgeleiteten Klassen.
Besondere Elemente werden als neue Klassen definiert, die von slist_element erben.
Ein "Point" ist ein "slist_element"

```
slist L;
point* p = new point(x,y);
L.push(p);
```

slist ist Polymorph, es kann als Liste verschiedener Datentypen dienen.
Situationen in denen diese Polymorphie vorteilhaft ist: Grafik-Editor:

```
void drawAll() //Iteriere ueber Liste und rufe draw fuer alle auf
forall x in scene //scene ist die Liste
        x -> draw();
```

Falls wir eine Liste von einem bestimmten Objekt-Typ verwenden wollen (z.B.b point_list) wird diese von slist abgeleitet.

```
class point_list: public slist {
        //neues Interface das nur points erlaubt
        void push(point* p) {slist::push(p);}
        point* pop(){return (point*) slist::pop();}
```

```
        //Das Casting ist sicher, da durch push sicher nur points in der Liste sind.
}
```

Aufwändige Datenstruktur: Balancierte Suchbäume (z.B. AVL)
1. Klasse für die Knoten (benötigt parent, left, right)

```
class bin_tree_node{
        bin_tree_node* left, right, parent;
};
```

2. Klasse für den Baum:

```
class bin_tree{
        virtual int cmp(bin_tree_node* p, bin_tree_node* u) = 0
        //Bsp.: cmp(p,q) = {-1, wenn p<q; 0, wenn p = q; 1, wenn p>q}
        void insert(bin_tree_node* p){
                //fuegt p in den Baum ein, verwendet cmp als Vergleich
        }
        bin_tree_node* lookup(bin_tree_node* p){
                /* in Schleife:
                if cmp(q,p) > 0 q=q->left;
                        else q=q->right;
                        */
        }
}
```

Anwendung auf Point:

```
class point:public bin_tree_node{
        ...
}
class point_bin_tree:public bin_tree{
        //Definiere cmp Funktion
        int cmp(bin_tree_node* p, bin_tree_node* q){
                point* a = (point*)p;
                point* b = (point*)q;
                if(a->x < b->x) return -1;
                if(a->x > b->x) return 1;
                if(a->y < b->y) return -1;
                if(a->y > b->y) return 1;
                return 0;
        }
        void insert(point* p){
                bin_tree::insert(p);
        }
        point* min() {return (point*)bin_tree::min();}
}
```

Templates

Funktionstemplates

template <class T>
Beispiel: swap(T& x, T& y) Vertauscht den Inhalt der beiden Variablen

```
 swap(T& x, T& y){
        T tmp = x;
        x = y;
```

```
        y= tmp;
    }
```

Implementierung ist unabhängig von T.

Klassentemplates

```
template<class T>
class stack{
        T* A; //Feld von T's
        int sz;
        int t;

        public
        void push(T x){...}
        T pop {...}
}
```

Beispiel für mehrere Typen:

```
template<class K, class I>
class dictionary{
        //Woerterbuch mit Schluessel vom Typ K und werte vom Typ I
        void insert(K k,I i){...}
        I translate (K key){...}
}
```

Anwendungsbeispiel: Word-Count, zählt wie oft einzelne Wörter in einem Text vorkommen. dictionary<string,int? > D; Speichert Wort als Schlüssel, Häufigkeit als Wert.

Fortgeschrittene Datenstrukturen und Algorithmen

LEDA: Library of Efficient Datatypes and Algorithms
Plattform: Algorithmus → Programm
Datentypen: Listen, Stacks, Dictionaries, Priority Queue
Efficient: Datenstrukturen
Einfache Benutzung (Pseudocode soll leicht in C++ umsetzbar sein)
Korrektheit: Datentypen (Definition), Program Checker
Weitere Themen: Graph-Datenbanken, -Algorithmen, Geometrie

Spezifikationen von Datentypen in LEDA

Item-Konzept: Viele Datentypen sind Definiert als Menge von Items.
Item: Zugriff über Parameter (Abstraktion von den Begriffen Pointer, Referenz, Index)
Bsp.: dictionary$< string, int >$ D speichert Paare aus Schlüsseln (string) und Informationen (int)
Definition: D ist eine Menge von Items (dictionary-Items)
Operationen:

- D.insert(string s, int i): Falls D kein Item mit Schlüssel s enthält, füge Item (s,i) ein und gib es zurück. Sonst: Ändere Datenwert i und liefere es zurück.
- D.lookup(strin s): liefet das Item mit dem Schlüssel s, falls es nicht existiert, Null.

2. Beispiel: Priority Queue
$priority\_queue < P, I > PQ$
P: Priorität z.B. Zahl, I: Information (z.B. Knoten eines Graphen)
Definition: Menge von Items

Operationen: insert, findMin (minimale Priorität), prio (setze Priorität), inf (setze Information), delmin, decrease_P

Dijkstra Algorithmus

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, Kostenfunktion $cost = E \to int^+$, Startknoten $s \in V$
Ausgabe: Distanzfunktion $dist : V \to int^+$, dist(v) = Kosten eines billigsten Pfades von s nach v.
    Kosten eines Pfades: Summe der Kanten.
Idee von Dijkstra:

- Überschätze Distanzfunktion: 0, falls s=v, inf, falls $s \neq v$.
- Kandidatenlist U: Menge aller Knoten, aus deren Kanten ausgehen können, die eine Abkürzung darstellen.
- Wähle jeweils $u \in U$ mit dist(u) minimal
- Beobachtung: dist(a) ist korrekt.
- Durchlaufe alle aus u ausgehenden Kanten und überprüfe Dreiecksungleichung, reduziere Distanz von v

Kann effizient mit Fibonacci Heap realisiert werden.

Graphalgorithmen in LEDA

Der Datentyp Graph

Dient zur Erstellung von gerichteten Graphen G=(V,E) mit $E \subseteq (V \times V)$

Arten von Objekten

Operationen auf einem Graphen G:
Access Operationen:
    node G.source(Edge e): Von welchem Knoten geht die Kante e aus
    node G.target(Edge e): Zu welchem Knoten geht die Kante e
    int G.outdeg(node v): Ausgangsgrad
    int G.indeg(node v): Eingangsgrad
    list<edge>G.out_edges(node v)
Update Operationen:
    node G.new_node()
    edje G.new_edge(node v, node w)
    void G.del_edge(edge e)
    void G.del_node(node v) (entfernt v und alle Kanten)
Iterationen (Laufvariable wird extern deklariert, weil weil):
    forall_nodes(v,G)
    forall_edges(e,G)
    forall_out_edges(e,v)
    forall_in_edges(e,v)
Beispiel: Iteration über alle Nachbarknoten von v:

```
forall_out_edges(e,v){
        node w = G.target(e)
}
```

Beispiel: Teste, ob G azyklisch
Idee: Siehe topologisches Sortieren:
    Solange ein Knoten v existiert mit indeg(v)=0, entferne ihn und alle ausgehenden Kanten.
    Falls G leer, dann ist der Graph azyklisch.

```
zero <- {v ∈ V | indeg(v) = 0}
while zero ≠ ∅ do
        u <- beliebiger Knoten aus zero
        zero <- zero\{u}
        forall v ∈ V mit (u,v) ∈ E
                entferne (u,v) aus G
                if indeg(v)=0 then
                        zero <- zero ∪{u}
                fi
        od
        entferne u aus G
od
```

Als C++ Programm (oder auch nicht... Näherliegende Gründe):

```
bool isAcyclic (graph G) //Call by Value, Graph wird kopiert
        stack<node> zero;
        node v;
        forall_nodes(v,G){
                if (G.indeg(v)==0) zero.push(v);
        }
        while (!zero.empty()){
                node u = zero.pop();
                edge e;
                forall_out_edges(e,u){
                        node v = G.target(e);
                        G.del_edge(e);
                        if (G.indeg(v)==0) zero.push(v);
                }
        }
        return G.number_of_edges()==0;
}
```

Informationen (Daten) mit den Knoten und Kanten speichern.

Parametrisierter Graph

Netzwerk: Knoten stehen für Objekte vom Typ vtype, Kanten etype.
Unterklasse vom gegebenen graph
$GRAPH < vtype, etype > G;$

Node/Edge Array

$node\_array < T > A(G)$ Mit G einem Graph
$edge\_array < T > B(G)$
Z.B. Kürzester Weg: DIJKSTRA(graph G, $edge\_array < int >$ cost,node startNode, $node\_array < int >$ distance);
Einige Ausgabedaten werden getrennt vom Graphen übergeben.

Erstes konkretes Beispiel: Dijkstra

```
void DIJKSTRA (graph& G, node s, edge_array<int>& cost, node_array<int>& dist)
{
        p_queue<node,int> PQ;
        node_array<pq_item> I(G);
        dist[s] = 0;
```

```
        I[s] = PQ.insert(s,0);
        node v;
        forall_nodes(v,G){
                if(v!=s) dist[s] = MAXINT;
        }
        While (!PQ.empty()){
                node u = PQ.delmin();
                edge e;
                forall_out_edges(e,u){
                        node w = G.target(e);
                        int d = dist[u]+cost[e];
                        if(d<dist[w]){   //Dreiecksungleichung
                                if(dist[w]==MAXINT) //Wurde schon besucht?
                                        I[w] = PQ.insert(w,d)
                                else PQ.decrease_p(I[w],d)
                                dist[w] = d;
                }
        }
```

Analyse: delmin, insert wird n mal ausgeführt. decrease_p wird m mal (für alle nodes und alle deren Kanten) asugeführt.
Ergebnis: O((m+n)log n)
Korrektheit:
Idee: Füge Programmcode hinzu, der für eine konkrete Testeingabe überprüft, ob das Ergebnis korrekt ist. Teste am Ende, ob für jede Kante die Dreiecksungleichung erfüllt ist.

```
edge e;
forall_edges(e,G){
        node v = G.source(e);
        node w = G.target(e);
        ASSERT(dist[v] + cost[e] >= dist[w]);
}
```

Netzwerkflussprobleme: Maxflow

Graph: Transportnetzwerk
Jede Kante besitzt eine Kapazität (wie viel pro Zeiteinheit über diese Kante transportiert werden kann).
<u>Probleme:</u>

1. Maximiere den Transport von einem Knoten s (Source) zu einem Knoten t (Senke)
2. Minimiere die Transportkosten (min cost flow)

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, Knoten $s, t \in V | s \neq t$, Kapazitäten $u \to \mathbb{R}_0^+$
Schreibweise: u_{ij} für $(u : u(i, j))$
Ergebnis: Flussfunktion $x : E \to \mathbb{R}_0^+$ mit:

1. $\forall (i, j) \in E : 0 \leq x_{i,j} \leq u_{i,j}$ Kapazitätsbedingung
2. $\forall i \in V \backslash \{s, t\} : \sum_{j \in V mit (i,j) \in E} x_{i,j} = \sum_{k \in V | (k,i) \in E} x_{k,i}$ (Die Menge, die aus i rausgeht, muss auch in i reinkommen).

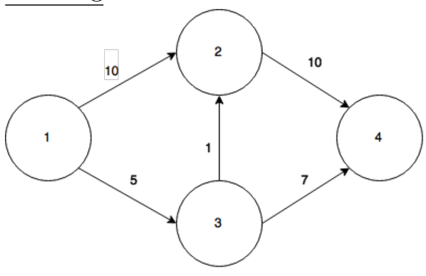
Gesucht ist ein Fluss x mit $\sum_{i \in V | (s,i) \in V} x_{s,i} - \sum_{j \in V | (j,s) \in V} x_{js}$ maximal.
$\forall i \in V \backslash \{s, t\} \delta(i) = 0$ maximiere $\delta(s)$
Beobachtung: $\delta(t) = -\delta(s)$

Idee für einen Algorithmus: Erhöhende Pfade

- Starte mit allen x=0 ($\forall (i, j) \in E : x_{i,j} \leftarrow 0$)

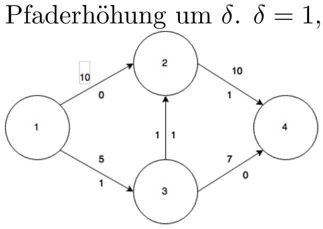
- Erhöhe x entlang von Pfaden von s nach t.

<u>Definition</u> Restnetzwerk G(x) (hängt vom aktuellen Fluss x ab), beschreibt die Möglichkeiten x zu verändern.
<u>Erhöhende Pfade</u> Pfad P von s nach t in G(x). Erhöung von $\delta = min\{r_{i,j}|(i,j) \in P\}$
<u>Achtung</u> Der reale Pfad in G hat eventuell Kanten in Gegenrichtung. <u>Beispiel:</u>



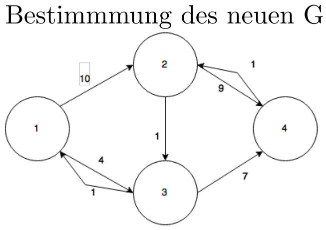
Beispiel Graph G

1. $x \leftarrow 0, G(x) = G$ (man lässt sonst alle Kanten mit Kapazität 0 weg)
2. Pfad $s \rightarrow t$ suchen, z.B. $a \rightarrow^5 3 \rightarrow^1 2 \rightarrow^{10} 4$
3. Pfaderhöhung um δ. $\delta = 1$, da minimale Kapazität = 1



Graph nach Schritt 3

4. Bestimmmung des neuen G(x) (Restkapazitäten)



Restkapazitäten G(x)

<u>Korrektheit</u> x ist immer ein Fluss. Terminiert mit Fluss x, sodass in G(x) kein Pfad von s nach t (bitte was?)
<u>Implementierung</u>

1 Keine explizite Darstellung von G(x), stattdessen Navigiere im Originalgraphen, verwende ausgehende Kanten, wenn $u_{i,j} > x_{i,j}$, eingehende Kanten, wenn $x_{i,j} > 0$.

2 Berechnung eines erhöhten Pfades: Verwende DFS oder BFS vom Knoten s aus, und berechne die Kanten wie in 1. beschrieben. Stoppe, wenn t erreicht.

3 Darstellung des Pfades durch pred_Verweise (Vorfahrverweise).

Beispiel Pfaderhöhung (MaxFlow)

Idee: Suche alle im Restnetzwerk erreichbaren Knoten bis t gefunden wurde (mit DFS,BFS o.A.)
Algorithmus Labelling:
graph G;edge_array$< int >$ cap; edge_array$< int >$ flow;node_array$< bool >$ label; node_array$< edge >$ predecessor;

```
//UEbergabeparameter: Startknoten s
edge e;
forall_edges(e,G) flow[e] ← 0;
```

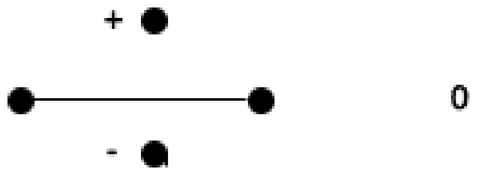
```
node v;
forall_nodes(v,G){
        labelled[v] ← fale;
        pred[v] ← NULL;
}
while(true){
        queue<node> S;
        S.append(s);
        labelled[s] ← true;
        while(S.empty() == false){
                node v = S.pop();
                //iteriere alle im Restnetzwerk adjazenten Kanten
                edge e;
                forall_out_edges(e,V) {
                        if(flow[e] == cap[e]) continue;
                        node w = G.target(e);
                        if(labelled[w]) continue;
                        labelled[w] ← true;
                        pred[w] ← e;
                        S.append(w);
                }
                forall_in_edges(e,V){
                        if(flow[e] == 0) continue;
                        node w = G.source(e);
                        if(labelled[w]) continue;
                        labelled[w] ← true;
                        pred[w] ← e;
                        S.append(w);
                }
        }
        if(labelled[t] == false) break; //t nicht erreichbar
        int delta = MAXINT;
        node v = t;
        while (v != s){
                edge e = pred[v];
                int r = (G.source(e) == v) ? flow[e] : cap[e]-flow[e];
                if(r<delta) delta = r;
                v = (G.source() == v) ? G.target(e) : G.source(e) ;
        }
        v = t;
        while(v!=s){
                edge e = pred[v];
                if(v==G.target(e)){
                        flow[e]+=delta;
                        v = G.source(e);
                }else{
                        flow[e]-=delta;
                        v = G.target(e);
                }
        }

}
```

Geometrische Algorithmen

In $\mathbb{R}^2$
Objekte (Klassen/Typen): Point,segment (Strecken), line (Gerade)
Operationen: Vergleiche, Orientierung (Lage eines 3. Punktes zum Strahl zwsichen den ersten beiden)

Grundoperationen

a.orientation(b,c)



Vergleich von Punkten
a.cmp_xy(b): +1, wenn $a >_{xy} b$, 0 wenn $a = b$, -1 wenn $a <_{xy} b$
Min/Max in xy: trivial
Vergleich von Entfernungen
Ist c oder b näher an a...
$sign((d_x^2 + d_y^2) - (d_x^{'2} + d_y^{'2}))$
Bei allen Grundoperationen muss nur +,- und * verwendet werden, schneller und exakt

Anwendung von orientation

Strecke: segment(a,b)
point s.start(), point s.end()
Schnitt von zwei Segmenten:
Zwei Segmente (a,b) (c,d): a,orientation(b,c) != a.orientation(b,d) $\wedge$ c.orientation(d,a) != c.orientation(d,b)

Konvexe Hülle

Eingabe: Liste von Punkten L
Ausgabe: Kleinstes konvexes Polygon P, das alle Punkte enthält (Polygonecken sind Punkte aus L)
Konvex: Alle Winkel des Polygons > 180 Grad, jede Strecke zwischen zwei Punkten in diesem Polygon liegt komplett im Polygon.
Ausgabe: Ecken gegen den Urzeigersinn sortiert (und nummeriert)
Algorithmus: Gift wrapping (Ursprünglich im Raum)
Starte bei $Min_{xy}(L)$

```
list<point> convexHull(list<point> &L){
        list<point> P;
        point q0 = L.first();
        point p;
        forall(p in L){
                if(p.cmp_xy(q)  == -1) q0=p;
        }
        P.append(q0); L.del(q0);
        do point q = L.first(){
                forall(p in L){
                        if P.last().orientation(q,p) == -1 ||
                        (P.last().orientation(q,p) == 0 && P.last().cmp_dist(q,p) == -1){
```