Algorithmische Geometrie

October 27, 2016

1 Konvexe Hüllen

1.1 Konvexe Hülle von Punktmengen

Definition Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge in der Ebene. S heißt konvexe Hülle, genau dann, wenn $\forall p, q \in S$: $\overline{pq} \subseteq S$ wobei $\overline{pq}$ eine Gerade von p nach q ist.
Die Konvexe Hülle CH(s) einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die kleinste (in Benzug auf Inklusion) konvexe Menge die S enthält.

Eingabe: n Punkte, $S = \{q_1, .., q_n\}$
Ausgabe: Ecken $p_1, .., p_k$ der Konvexen Hülle CH(s). Wir wissen, dass $p_i \in S$ für $i = 1, .., k$. Ausgabe als Folge gegen den Uhrzeigersinn entlang des Randes von $CH(S) \Rightarrow \overline{p_i p_{i+1}}$ Randsegmente.
Komplexität des Problems: Satz: Die Berechnung der Konvexen Hülle von n Punkten im $\mathbb{R}^2$ ist mindestens so schwer wie das Sortieren von n reelen Zahlen.
Beweis: Reduktion des Sortierens auf CH. Sei CONVEX_HULL(S) ein ALgorithmus für CH. Zeige, wie man diesen Algorithmus verwenden kann, um n reele Zahlen $x_1, .., x_n$ aufsteigend zu sortieren.
Betrachte die Punktmenge $S = \{(x_i, x_i^2) | i = 1, ..., n\}$. CH(S) liefer alle Punkte in S gegen den Uhrzeigersinn zyklisch sortiert. Wandle die zyklisch sortierte Folge in Linearzeit in eine von "rechts" sortierte Folge um (X-Koordinate aufsteigend sortiert).
Folgerung: Die Komplexität des konvexe Hülle Problems ist Ω(n log n) (untere Schranke).

1.1.1 Gift-Wrapping

In $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^2$

Lexikographische Ordnung von Punkten p und q $p = (p_x, p_y), p <_{xy} q \Leftrightarrow p_x < q_x \vee (p_x = q_x \wedge p_y < q_y)$