

Union-Find

FIND(x): $O(1)$
 UNION(A,B,C): $O(n)$

```
for i=1 to n do
    name[i] <- i
od
```

```
Find: return name[x]
```

```
Union:
for i=1 to n do
    if name[i]==A OR name[i]==B
        then name[i] <- C
    fi
od
```

Relabel the smaller half:

FIND(x): $O(1)$
 UNION(A,B): $O(\log(n))$

```
Union:
if size[A] ≤ size[B]
then
    forall i in L[A] do
        name[i] <- B
    od
    size[B] += size[A]
    L[B] <- L[B] concatenate L[A]
else
    forall i in L[B] do
        name[i] <- A
    od
    size[A] += size[B]
    L[A] <- L[A] concatenate L[B]
fi
```

Weighted Union Rule: Hierbei gilt das Lemma, dass stets $size(x) \geq 2^{hoehe(x)}$ für alle Knoten gilt \rightarrow
 $hoehe(x) = \log(n)$

Find: $O(\log(n))$
 Union: $O(1)$

```
Init:
for i=1 to n do
    vater[i] = 0
    name[i] = i
    wurzel[i] = i
    size[i] = 1
od
```

```
Find:
while vater[x] != null do
    x = vater[x]
od
return name[x]
```

Find mit Pfadkompression (immernoch $O(\log(n))$):

```
r = x
while vater[r] != null do
    r = vater[r]
od
while x != r do
    y = vater[x]
    vater[x] = r
    x = y
od
return name[r]
```

Union:

```
r1 = wurzel[A]
r2 = wurzel[B]
if size[r1] <= size[r2] then
    vater[r1] = r2
    name[r2] = C
    wurzel[C] = r2
    size[r2] += size[r1]
else
    vater[r2] = r1
    name[r1] = C
    wurzel[C] = r1
    size[r1] += size[r2]
fi
```

Split-Find-Problem

Verwalte Liste mit Namen der jeweiligen Elemente.

Verwalte Liste mit Anfang und Ende jedes Intervalls.

Verwalte einen Zähler der den aktuell höchsten Namen speichert.

Find gibt name[x] zurück.

Split benennt die kleine Hälfte des betroffenen Intervalls um. Dafür verwendet es den Counter +1 als Namen.

Find offenstichich $O(1)$. Split $O(\log(n))$

```
public class Split_Find {

    static int[] name;
    static int count = 0;

    static void init(int len) {
        name = new int[len];
        for(int i = 0; i < len; i++) {
            name[i] = 0;
        }
        ArrayToString();
    }
    static int find(int x){
        return name[x];
    }
    static void split(int x){
        Split_Find.count++;
        int set = find(x);

        for(int i = 0; i < x; i++){
```

```

        if (name[i] == set)
            name[i] = Split_Find.count;
    }
    ArrayToString();
}

```

Wörterbücher

Randomized Searchtree

Knotenorientierter Suchbaum für Paare $(x_i, prio(x_i))$. Maximum Heap bezüglich der Prioritäten. Die Prioritäten auf einem Pfad von der Wurzel zum Blatt sind monoton fallend.

Initialisierung: Weise jedem x eine zufällige Priorität zu. Füge die Schlüssel in der Reihenfolge absteigender Prioritäten normal in den Baum ein.

Lookup(x): Suche im binären Suchbaum $O(\text{Höhe}(T))$

Insert(x): Bestimme zufällige Priorität. Füge Knoten gemäß Schlüssel ein. Rotiere den Knoten nach oben, bis $prio(\text{vater}(v)) \geq prio(v)$ bzw $v = \text{Wurzel}$

Delete(x): Rotiere v nach unten, bis Blatt. Lösche dann. $O(\log(n))$

```

while v kein Blatt do
    if prio(leftChild) > prio(rightChild) AND rightChild == null
        rotate_right(v)
    else
        rotate_left(v)
    fi
od

```

Hashing

h : Hashfunktion, **Hashing mit Verkettung**

Speichere für jedes Ergebnis der Hashfunktion eine Liste.

Lookup(x): Durchsuche $T[h(x)]$ linear. wc: $O(n)$, erw: $O(1 + \frac{n}{m})$

Insert(x): Füge an erste freie Stelle von $T[h(x)]$ ein

Delete(x): Entferne aus $T[h(x)]$

Wenn der Belegungsfaktor $n/m > 4$, verdopple Tafelgröße

Hashing mit offener Adressierung

Folge von Hashfunktionen $h_i(x)$. Falls $h_1(x)$ belegt versuche $h_2(x)$ usw.

Lookup/Delete: Teste bis $T[h_i(x)] == x$.

Achtung: Verwalte Statusarray mit empty/full/deleted Einträgen, damit bekannt ist, ob lookup abbrechen soll.

Perfektes Hashing

Hashfunktion soll injektiv sein.

Idee: Zwei Hashfunktionen. Erste verteilt auf Buckets W_i . Jedes Bucket hat eigene Hashfunktion h_i , die in dem Bucket injektiv ist.

Speicher: $O(n^2)$, Lookup: $O(1)$:

$h_i(x) = (k * x \bmod p) \bmod s$ mit p : Primzahl $> N$, s : Bucketanzahl & Größe.

Speicher: $O(n)$, Lookup: $O(1)$:

1. Stufe: Wähle k sodass $\sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k|^2 < 3n$. Es gibt n Buckets. Hashfunktion $h_k(x) = (kx \bmod p) \bmod n$
2. Stufe: Wähle k_i für $h_{k_i}(x)$ so, dass $h_{k_i}(x) = (k_i x \bmod p) \bmod s_i$ injektiv auf W_i^k ist.

Priority Queues (Fibonacci Heap)

Speichert Paare (p, i) von Prioritäten und Informationen.

Operationen: $PQ.insert(p, i)$, $PQ.findmin()$, $PQ.delmin()$, $PQ.decrease_p(x, q)$ (Vermindert $x = (p, i)$ zu (q, i))

Heap ordered Tree: Knoten mit Prioritäten sodass gilt $prio(v) \geq prio(vater(v))$

```
class nod{
    P prio;
    I info;
    node parent, left_sib, right_sib;
    bool mark;
    int rank;
}
```

Damit sind alle Knoten einer Ebene in einer zyklischen Liste. Auch die Wurzeln liegen in einer zyklischen Liste.
Konstruktor für FibHeap: min = 0 (Pointer auf minimale Wurzel)

PQ.findmin(): Zugriff auf min (Minpointer)

PQ.insert(p,i): Erzeuge neuen Baum der nur aus 1 Knoten besteht. Füge ihn in Wurzelliste ein.

PQ.delmin(): $v = \min$. Lösche v aus Wurzelliste, füge alle Kinder ein. Eliminiere Mehrfachvorkommen von Rängen:

```
while  $\exists v_1, v_2$  sodass  $rang(v_1) = rang(v_2)$  do
    if not  $v_1.prio \leq v_2.prio$  then
        vertausche  $v_1, v_2$ 
    fi
    Verschmelze( $v_1, v_2$ ) (Haenge Baum groesserer Prio an den kleinerer
od
```

PQ.decrease: Vermindere p , verletzt Heap Eigenschaft. Lösche Pointer zum Vaternknoten und füge v in Wurzelliste ein. Setze das Löschen in Richtung Wurzel fort, falls ein zweites Kind gelöscht wurde. Aktualisieren minpointer.

Amortisierte Analysen

Datenstruktur D , Potential $pot : D \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, Operation $op : D' \rightarrow^{op} D''$

$T_{tats}(op)$ = Ausführzeit einer Operation

$T_{amort}(op) = T_{tats}(op) + pot(D'') - pot(D') = T_{tats}(op) + \Delta pot$

$\sum_{i=1}^n T_{tats}(op_i) = \sum_{i=1}^n T_{amort}(op_i) + pot(D_0) - pot(D_n)$ für Folge von Operationen $D_0 \rightarrow \dots \rightarrow D_n$

Problem: Wähle gute Potentialfunktion

Spezialfall: $pot(D_0) = 0, pot(D_i) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n T_{amort}(op_i) \geq \sum_{i=1}^n T_{tats}(op_i)$

Binärzähler: Sei pot die Anzahl der Einsen bis zur ersten Null im Bitstring (xxxxx0111 = 3 = k)

$T_{tats}(incr) = O(1 + k)$: Alle 1 auf 0 und eine 0 auf 1

$\Delta pot = 1 - k$

$T_{amort}(incr) = 1 + k + (1 - k) = 2 = O(1)$

Für n Operationen hat die Potentialmethode auf dem Binärzähler Kosten von $2n$ ($O(n)$)

Dijkstra Algorithmus

```
forall v in V do
    DIST[v] =  $\infty$ 
    PRED[v] = null
od
DIST[s] = 0
PQ.insert(v,0)
while not PQ.empty() do
    u = PQ.delmin()
    forall v in V mit (u,v) in E do
        d = DIST[u] + c(u,v)
        if d < DIST[v] then
```

```
        if DIST[v] == ∞ then
            PQ.insert(v,d)
        else
            PQ.decrease(v,d)
        fi
        DIST[v] = d
        Pred[v] = u
    fi
od
od
```

Laufzeit auf Fib-Heap: Insert+Empty+Decrease = $O(1)$, delmin $O(\log(n))$

Bei nicht-negativen Kreisen terminiert Dijkstra nicht

Bellman/Ford Algorithmus

U: Schlange von Knoten, in_U[bool] ob Knoten in U, count[int], s Startknoten

```
forall v in V do
    DIST[v] = ∞
    PRED[v] = null
    count[v] = 0
    in_U[v] = false
od
DIST[s] = 0
U.append(s)
in_U[s] = true
while not U.empty() do
    u = U.pop()
    in_U[u] = false
    if ++count[u] > n then
        Print("Negativer Zyklus")
        return
    fi
    forall v in V mit (u,v) in E do
        d = DIST[u] + c(u,v)
        if d < DIST[v] then
            DIST[v] = d
            PRED[v] = u
            if not in_U[v] then
                U.append(v)
                in_U[v] = true
            fi
        fi
    fi
od
od
```

Planare Graphen

Ein ungerichteter Graph ist planar, wenn er eine planare Zeichnung besitzt.

Eine planare Zeichnung eines Graphen ordnet jeden Knoten v einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ und jeder Kante $\{v, w\} \in E$ eine stetige Kurve mit den Endpunkten Position(v) und Position(w) zu, sodass sich die Kurven paarweise nicht schneiden.

K_5 ist der vollständige Graph mit 5 Knoten, nicht planar

$K_{3,3}$ ist der vollständige bipartite Graph mit 2×3 Knoten, nicht planar

G ist planar $\Leftrightarrow \exists$ planare Zeichnung auf einer Kugeloberfläche (Fläche von Geschlecht 0)

Satz von Kuratowski: G ist planar \Leftrightarrow G enthält keinen K_5 oder $K_{3,3}$

G heißt einfach zusammenhängend, wenn es für jedes beliebige Knotenpaar einen Pfad zwischen diesen gibt.
 G heißt zweifach zusammenhängend, wenn G trotz entfernen eines beliebigen Knotens weiterhin zusammenhängend ist. Und so weiter

cut-Vertex/Artikulationspunkt: Wenn dieser Knoten entfernt wird zerfällt der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten.

Maximal planarer Graph: Das hinzufügen einer beliebigen Kante verletzt die Planarität.

Satz von Euler: Für eine planare Einbettung gilt $n - m + f = 2$ mit n Knoten, m Kanten und f Faces

Maximal planarer Graph hat nur Dreiecke \Rightarrow Jede Fläche hat 3 Kanten, eine Kante gehört zu 2 Flächen:

$$3f = 2m \Rightarrow f = \frac{2}{3}m \Rightarrow n - m + \frac{2}{3}m = 2 \Rightarrow m = 3n - 6$$

Bipartite planare Graühen haben nur Vierecke $4f = 2m \Rightarrow f = \frac{1}{2}m = 2 \Rightarrow m = 2n - 4$

Sei G planarer Graph mit n Knoten m Kanten, dann gilt $m \leq 3n - 6$. Annahme: $\forall v \in V : \deg(v) \leq 6$

$$m = \sum_{v \in V} \deg(v) / 2 \geq \frac{6n}{2} = 3n \text{ Widerspruch.}$$

Zusammenhangskomponenten finden:

```

init: Union-Find Struktur mit nur einelementigen Mengen
forall (v,w) in E do
    A = Find(v)
    B = Find(w)
    if A!=B then
        UNION (A,B)
    fi
od
    
```