Diskrete Strukturen

Die Potenzmenge von M, geschrieben 2^M (oder auch P(M)), ist die Menge, die genau die Teilmengen von M als Elemente enthält. (Einschließlich M und ∅)

Hasse-Diagramme:
Stellt Mengen als Punkte dar.
Mengen mit gleichviel Elementen erscheinen auf einer Ebene.
Oben erscheinen die größeren, unten die kleineren Mengen.
Durch einen Strich werden solche Mengen A und B verbunden,
für die $A \subset B$ gilt, sich aber kein C findet mit $A \subset C \subset B$.

Relationen:

Binäre Relation: 2 Grundmengen
Binärrelation: 2 Grundmengen mit $M_1 = M_2$

Das Relationenprodukt (die Komposition) $R \circ S$ ist wie folgt definiert:

$$\forall x \in M_1 \forall z \in M_3\ (x,z) \in (R \circ S) \Leftrightarrow \exists y \in M_2\big((x,y) \in R \land (y,z) \in S\big).$$

Eigenschaften von Binärrelationen:

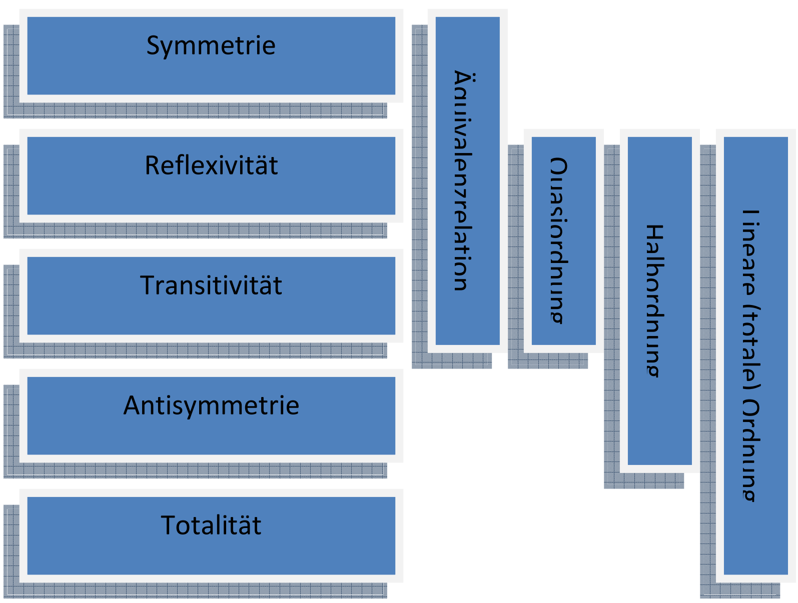
Reflexiv:	$\forall x \in M((x,x) \in R$
symmetrisch:	$\forall x,y \in M((x,y) \in R \ \Rightarrow (y,x) \in R$
antisymmetrisch:	$\forall x,y \in M(((x,y) \in R \land (y,x) \in R) \Rightarrow x = y$
transitiv:	$\forall x,y,z \in M(((x,y) \in R \land (y,z) \in R) \Rightarrow (x,z) \in R$
nacheindeutig:	$\forall x,y,z \in M(((x,y) \in R \land (x,z) \in R \Rightarrow y = z$
vortotal:	$\forall x \in M \exists y \in M((x,y) \in R)$

Nur die Gleichheitsrelation ist gleichzeitig symmetrisch und antisymmetrisch.

Hüllen:

reflexive Hülle $R^\rho = R \cup \Delta_M$
symmetrische Hülle = $R \cup R^{-}$
transitive Hülle $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$
reflexiv-transitive Hülle: $R^* = (R \cup \Delta_M)^+$ oder $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$
Äquivalenzhülle: R^*_E Symmetrische, transitive und reflexive Hülle

Spezielle Relationen:



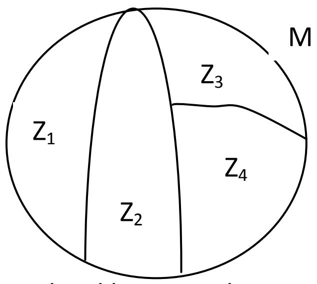
Partitionen:

Eine Partition $Z \subseteq 2^M$, auch Zerlegung, Klasseneinteilung oder Mengenfamilie hat folgende Eigenschaften:

$M = \bigcup_{A \in Z} A$

$Z \neq \emptyset$

$\forall A, B \in Z: A \cap B \neq \emptyset \ \rightarrow A = B$



Die Elemente von Z heißen Klassen.

Die Äquivalenzrelation $a \sim_Z b$ bedeutet, dass die Elemente a und b in derselben Klasse liegen.

Die Äquivalenzrelation $[b]_R \coloneqq \ \{a \in M | aRb\}$ über M bezeichnet die Äquivalenzklasse von b.

b heißt Vertreter/Repräsentant von $[b]_R$.

$M/R \coloneqq Z_R \coloneqq \{[b]_R | b \in M\}$ ist die Quotientenmenge von R.

Wenn R eine Äquivalenzrelation über M ist, dann gilt: Wenn $\{x, y\} \in [b]_R$, so $\{(x, y), (y, x)\} \subseteq R$.

Restriktionen:

Ist R eine Relation über M und ist $N \subseteq M$, so heißt $R_N \coloneqq (R \cap N \times N)$ Restriktion von R auf N.

Eine Restriktion hat dieselbe Ordnung, wie die Menge M auf der sie gilt.

Wenn (M,R) eine Halbordnung ist (R ist eine Relation), dann heißt $K \subseteq M$ **Kette**, wenn R_K (Restriktion) eine lineare Ordnung ist. Sie heißt maximal, wenn es keine K umfassende Kette gibt.

In jeder Halbordnung gibt es maximale Ketten.

Sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung und $N \subseteq M \neq \emptyset$:

größtes Element:$x \in N, \forall y \in N: y \leq x$

kleinstes Element:$x \in N, \forall y \in N: x \leq y$

maximales Element:$x \in N, \forall y \in N: x \leq y \rightarrow y = x$

minimales Element:$x \in N, \forall y \in N: y \leq x \rightarrow y = x$

obere Schranke:$x \in M, \forall y \in N: y \leq x$

untere Schranke: $x \in M, \forall y \in N: x \leq y$

Die kleinste obere Schranke heißt obere Grenze / Supremum, die größte untere Schranke heißt untere Grenze / Infimum.

Funktionen:

Eine partielle Funktion ist eine nacheindeutige binäre Relation.

Eine Funktion ist eine linkstotale partielle Funktion.

Kern von f: $f: A \rightarrow B, x \sim_f y \ wenn \ f(x) = f(y)$

Kanonische Abbildung: $f_{\sim}: A \rightarrow A/\sim, a \mapsto [a]$

Verknüpfung: $(g \circ f)(x) = f(g(x))$

Eigenschaften:

Surjektiv: nachtotal

Injektiv: voreindeutig

B^Aist die Menge aller totalen Funktionen von A nach B

$(|A|)!$, ist die Menge der injektiven Funktionen

Mächtigkeit von Mengen:

Wenn es eine Bijektion von A nach B gibt, sind A und B gleichmächtig.
Eine Menge ist abzählbar, wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist ($\mathbb{N}$).
$Card(U) \coloneqq 2^U/R$ bezeichnet die Mächtigkeiten der Teilmengen von U.
$|A| \leq |B|$ g.d.w. es eine injektive Abbildung $f: A \to B$
Die Kleinergleich-Relation ist eine Quasiordnung auf 2^U und eine lineare Ordnung auf *Card*(U).
(darin enthalten Schröder-Bernstein: Wenn es eine Injektion von A nach B und von B nach A gibt, so gibt es eine Bijektion. Das nehmen eines Vertreters aus jeder Kardinalität aus *Card*(U) ergibt eine maximale Kette.)
Für paarweise disjunkte Mengen gilt:
$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$
Für endliche Mengen gilt:
$\left|X_{i=1}^{k} A_i\right| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$
Demnach:
$|M^n| = |M|^n$ und auch $|B^A| = |B|^{|A|}$
Für endliche Menge M gilt: $|2^M| = 2^{|M|}$
Wir bezeichnen die Menge der L-elementigen Teilmengen von A:
$\binom{A}{l}$, gilt $n = |A|$, so schreiben wir auch $\binom{n}{l} \coloneqq \left|\binom{A}{l}\right|$ (Binomialkoeffizient)

Schubfachprinzip:

Wenn $|A| < |B|$ gilt, so gibt es keine Injektion $f: B \to A$.
Nach Schröder-Bernstein zu beweisen: $|A| \leq |B|$ es gibt also eine Injektion $g: A \to B$. Gäbe es eine Injektion f, so wäre nach SB $|A| = |B|$.
Jede Abbildung $f: B \to A$ hat also zwei Elemente b, b‘, mit $f(b) = f(b')$.

Mengen:

Ist A endlich und f:A-> A so ist gleichwertig: f ist surjektiv, injektiv, bijektiv.
Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter, endlicher, nichtleeren Mengen, dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ abzählbar unendlich.

Geometrische Reihe:

$$\sum_{I=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Stochastik:

Eine Funktion P, die jedem Elementarereignis x ∈ S eine nichtnegative Zahl P(x) zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion, falls $\sum_{x\in S} P(x) = 1$
Das Paar (S,P) heißt diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, wenn gilt:

1. S ist höchstens abzählbar
2. $P: 2^S \to \mathbb{R}$ erfüllt:
   - 2.1. $\forall A \subseteq S: P(A) \geq 0$
   - 2.2. P(S)=1
   - 2.3. Für jede Folge paarweiser fremder Mengen aus S gilt: $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Falls (A∩B)=P(A)P(B) heißen A und B unabhängig.
Falls nun $P(B) \neq 0$ gilt $P(A|B) = P(A)$
Außerdem gilt: $P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(B)}$
Zufallsgröße: Abbildung aus dem Ereignisraum in die reellen Zahlen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass X=r ist, ist:$P[X = r] = \sum_{e \in X(r)^-} P(e)$
Der Erfahrungswert ist gegeben durch: $E[X] = \sum_{r \in X(S)} r * P[X = r]$
$P[X \geq c] \leq \frac{E[X]}{c}$ für c>0 und X nur positiv.

Graphen:

Ein Graph ist gegeben durch ein Paar Mengen (V,E) der Knoten und Kanten.
Adjazenzmatrix: Relationsmatrix der Bogenrelation über V x V'
Inzidenzrelation: $I \subseteq V \times E, (v, e) \in I \; wenn \; v \in e$
Die Kardinalität der Knotenmenge heißt *Ordnung*
Ein Knoten heißt inzident mit einer Kante, falls $v \epsilon e$
Die Anzahl der Kanten mit denen ein Knoten inzident ist heißt *Grad/Valenz*
Zwei Knoten heißen adjazent/benachbart, wenn es eine Kanze zwischen ihnen gibt
Gerichteter Multigraph: Eine Kante hat einen Anfangs und einen Endknoten, und damit eine Richtung (auch *Bogen* genannt). Falls Anfang=Ende *Schlinge* genannt
Gerichteter Graph: Endknotenabbildung $\eta = E \rightarrow V \times V, e \longmapsto (\alpha(e), \omega(\mathrm{e}))$ injektiv (linkseindeutig). Zwischen zwei Knoten gibt es maximal einen Bogen
Ungerichteter Graph: Ist E symmetrisch, so gibt es zu jedem Bogen ein Gegenstück. Die Pfeile und damit die Richtung sind hinfällig.
Besitzt ein Graph keine Schlingen, ist er *schlicht*.
Die Mächtigkeit der Knotenmenge heißt Ordnung
Ein Knoten v heißt inzident mit einer Kante e, wenn $v \in e$
Die Anzahl der Kanten, mit denen ein Knoten inzident ist heißt Grad/Valenz
Die Inzidenzrelation wird definiert durch: $I \subseteq V \times E \;\; (v, e) \in I \; gdw. v \in e$
Zwei Knoten heißen adjazent, falls eine Kante sie verbindet. N(v) ist die Menge der Nachbarn von v
Sei G ein ungerichteter, schlichter, endlicher Graph: $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$
Zwei Graphen sind isomorph, wenn es eine Bijektion $\phi: V \rightarrow V'$ gibt, sodass
$xy \in E \; \leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E'$
Ein Graph heißt Weg, wenn $E_k=\{x_0x_1,\ldots,x_{k-1}x_k\}$ mit paarweise unterschiedlichen x_i
Die Anzahl der Kanten eines Weges ist die Länge
Ein Graph heißt Kreis, wenn $E_k=\{x_0x_1,\ldots,x_kx_0\}$ mit paarweise unterschiedlichen x_i
Sind G(V,E) und G'(V',E') Graphen -> G Obergraph von G', G' Untergraph von G, wenn $V' \subseteq V, E' \subseteq E$
$W \subseteq V \times V: (x, y) \in W \; gdw. es \; einen \; x - y \; Weg \; gibt$. Die Äquivalenzklassen von W heißen Zusammenhangskomponenten.
Falls V Zusammenhangskomponente von G ist heißt G zusammenhängend.
Der Abstand zweier Knoten ist die Länge des kürzesten Weges

Es sei X eine Menge. Die Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik gdw. Für x,y,z gilt:

1. $d(x,y) \geq 0 \; und \; d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung

Ein Graph G heißt Baum, wenn G zusammenhängend ist und keinen Kreis als Untergraphen enthält.

Es sei G'=(V',E') ein Untergraph von G(V,E) mit V'=V, dann heißt G' auch aufspannender Untergraph von G.

Ist G' ein Baum, so heißt G' Gerüst/Spannbaum

Ein zusammenhängender Graph heißt Eulersch, wenn der Grad jeden Knotens gerade ist.

Typ einer Struktur: Tripel $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \sigma)$, wobei $\mathcal{F} \cup \mathcal{R} = \emptyset$

$\mathcal{F}$ ist die Menge der Funktionssymbole

$\mathcal{R}$ ist die Menge der Relationssymbole

$\sigma: \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$ liefert die Stelligkeit zu dem betreffenden Symbol

Eine Abbildung $A^n \rightarrow A$ heißt n-stellige Operation auf A

Nullstellige Operationen heißen Konstanten

$Op_n(A)$ ist die Menge der n-stelligen Operationen auf A

$Rel_n(A)$ ist die Menge der n-stelligen Relationen über A

Eine Struktur vom Typ $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \sigma)$**:** Tripel $S = (A, F, R), A \neq \emptyset \; mit \; F = \{f_S | f \in \mathcal{R}\}$,

wobei jedem $f \in \frac{\mathcal{F}}{r} \in \mathcal{R}$ genau eine Funktion/Relation zugeordnet ist.

Gibt es keine Relationen : **Algebra**

Gibt es keine Operationen: **relationale Struktur**

Eine Algebra mit nur einer zweistelligen Operation heißt **Gruppoid**

Ein Gruppoid heißt **Halbgruppe**, falls die einzige Operation assoziativ ist.

Jeder gerichtete Graph ist eine relationale Struktur (Adjazenzrelation)

Gruppoide lassen sich durch Verknüpfungstafeln angeben.

Eine Struktur $S' = (A', F', R')$ heißt **Unterstruktur**, wenn:

$A' \subseteq A$

Ist $f \epsilon \mathcal{F}$, so gilt für alle $a_1 \dots a_{\sigma(f)} \in A': f_S(a_1 \dots a_{\sigma(f)}) = f_{S'}(a_1 \dots a_{\sigma(f)})$

Ist $r \in \mathcal{R}$, so gilt: $r_{S'} \subseteq r_S|_{(A')^{\sigma(r)}}$, wobei letzteres die Restriktion von r_S auf das (σ(r)-1)-fache

Mengenprodukt von A' meint.

Falls keine Relationen vorkommen heißten Unterstrukturen auch **Unteralgebren**.

Angegeben durch die neue Grundmenge A', gesprochen A' beschreibt Unteralgebra.

Eine Teilmenge A' ist ein Erzeugendensystem der Algebra:$\bigcup_{B \in Sub(A), B \supseteq A'} B$

Sub(A) ist die Menge der Unteralgebren von (A,F)

Das Erzeugendensystem wird auch $\langle A' \rangle$ geschrieben.

Für eine zweistellige Operation auf A (also $\circ: A \times A \rightarrow A$:

Eine Konstante $e \in A: \forall x \in A: x \circ e = e \circ x = x$ heißt neutrales Element

Eine Konstante $\mathfrak{o} \in A: \forall x \in A: x \circ \mathfrak{o} = \mathfrak{o} \circ x = \mathfrak{o}$ heißt absorbierendes Element.

Eine Algebra $(A, \circ, e)$ von Stelligkeitstyp (2,0) heißt **Monoid**, falls $(A, \circ)$ Halbgruppe und e neutral

Eine Algebra $(A, \circ)$ von Stelligkeitstyp (2) heißt **Halbverband**, falls $(A, \circ)$ Halbgruppe und $\circ$ kommutativ und idempotent.

Eine Algebra $(A,\circ,\mathfrak{o})$ von Stelligkeitstyp (2,0) heißt **beschränkter Halbverband**, falls $(A,\circ)$ Halbgruppe und $\mathfrak{o}$ absorbierend.

Es sei $(A,\sqcup)$ ein Halbverband, dann ist die Binärrelation $\sqsubseteq \subseteq A \times A$: $a \sqsubseteq b \Leftrightarrow a \sqcup b = b$ die von $\sqcup$ induzierte Halbordnung.

Ist $(M,\sqsubseteq)$ eine Halbordnung, bei der $(*)$ zu zwei Elementen a,b∈M stets eine obere Grenze (Supremum) von {a,b} existiert, so definiere: $a \sqcup b \coloneqq \sup\{a,b\}$

$\sqcup$ ist die von $\sqsubseteq$ induzierte Supremumsoperation

Sei $\mathbb{A} = (A,F)$ eine Algebra vom Typ ($\mathcal{F}$,σ), dann sind die **Terme über $\mathbb{A}$** induktiv definiert:

1. Jedes $a \in A$ ist ein Term
2. Sind $t_1 \ldots t_n$Terme über $\mathbb{A}$ und ist $f \in \mathcal{F}$ mit $\sigma(f) = n$, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term über $\mathbb{A}$
3. Nichts anderes sind Terme über $\mathbb{A}$

Die Menge aller Terme über $\mathbb{A}$ ist Term($\mathbb{A}$)

Die **Auswertungsfunktion** ist definiert: $eval\colon Term(\mathbb{A}) \to A$

1. Für $a \in A$ sei $eval(a) \coloneqq a$
2. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme über$\mathbb{A}$ und ist $f \in \mathcal{F}\ mit\ \sigma(f) = n$, so ist

$$eval\big(f(t_1, \ldots, t_n)\big) \coloneqq f_{\mathbb{A}}(eval(t_1), \ldots, eval(t_n))$$

Seien $\mathbb{S} = (A,F,R)\ und\ \mathbb{S}' = (A',F',R')$ zwei Strukturen des selben Typs $\tau = (\mathcal{F},\mathcal{R},\sigma)$

Eine Abbildung $h\colon A \to A'$ heißt **Homomorphismus**, wenn:

$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall a_1, \ldots, a_n\ mit\ n = \sigma(f)\ gilt\colon h\big(f_{\mathbb{S}}(a_1, \ldots, a_n)\big) = f_{\mathbb{S}'}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$

$\forall r \in \mathcal{R}\ \forall a_1, \ldots, a_n\ mit\ n = \sigma(r)\ gilt\ (a_1, \ldots, a_n) \in r_{\mathbb{S}} \Longrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in r_{\mathbb{S}'}$

Ein Homomorphismus heißt **Isomorphismus**, wenn h bijektiv ist und h^{-1} ein Homomorph.

Ein Homomorph. heißt **Automorphismus**, wenn h Isomorphismus und A=A'