Lineare Algebra (SS 2012)

Darstellung eines LGS:

$$3x1+2x2+x3=39$$
$$2x_1+3x_2+x_3=34$$
$$x_1+2x_2+3x_3=26$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39\\ 34\\ 26\end{pmatrix}$$

Matrix Vektor

Zentrale Fragen:

- Existiert eine Lösung?
- Ist diese Eindeutig?
- Finden der Lösung

Zentrale Gleichungen der LA und ihre Anwendung:

Ax=b , $A^{\top}Ax = A^{\top}b$ „A Transponiert Ax“

Grundbegriffe der LA:

Aussagenlogik, Mengen, Abbildungen, Funktionen

Logisches Schließen und Beweistechniken:

Definition: Wir definieren durch die nachfolgende Wahrheitstabelle die Verknüpfung von Aussagen durch:

∧ und (Konjunktion)

∨ oder (Disjunktion)

¬ nicht

A	B	A∧B	A∨B	¬A
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Es gelten folgende Regeln:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ A\wedge B = B\wedge A\\ 2.\ A\vee B = B\vee A\end{array}\right\}\text{Kommutativgesetz}$$

$$\left.\begin{array}{l}3.\ A\wedge(B\wedge C) = (A\wedge B)\wedge C\\ 4.\ A\vee(B\vee C) = (A\vee B)\vee C\end{array}\right\}\text{Assoziativgesetz}$$

$$\left.\begin{array}{l}5.\ A\vee(B\wedge C) = (A\vee B)\wedge(A\vee C)\\ 6.\ A\wedge(B\vee C) = (A\wedge B)\vee(A\wedge C)\end{array}\right\}\text{Distributivgesetz}$$

$$\left.\begin{array}{l}7.\ A\vee(A\wedge B) = A\\ 8.\ A\wedge(A\vee B) = A\end{array}\right\}\text{Absorptionsgesetz}$$

$$\left.\begin{array}{l}9.\ \neg(A\vee B) = \neg A\wedge\neg B\\ 10.\ \neg(A\wedge B) = \neg A\vee\neg B\end{array}\right\}\text{De-Morgan‘sche Gesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l}11.\ A\wedge A = A\\ 12.\ A\vee A = A\end{array}\right\}\text{Idempotenz}$$

$A \Rightarrow B$ „Aus A folgt B“ (Subjunktion)
$A \Rightarrow B = \neg (A \wedge \neg B) = \neg A \vee B$

Definition Logische Modi:

$A \Rightarrow B$ wird definiert als $\neg A \vee B$ und heißt „modus ponens“ (Direkter Beweis)
$\neg B \Rightarrow \neg A$ heißt „modus tollens“ (Indirekter Beweis)

Definition Äquivalenz:

Wir definieren A und B als gleich, wenn $A \Rightarrow B \; und \; B \Rightarrow A$ und schreiben $A \Leftrightarrow B$.

Satz: Modus ponens und modus tollens sind äquivalent
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$A \Rightarrow B$: A heißt hinreichend für B, B notwendig für A

Satz: Kettenschluss: Die folgende Aussage ist für Aussagen A, B, C immer wahr:
$\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$

Beweis: Wahrheitstabelle

Beweistechniken:

1. Modus ponens (direkter Beweis)
2. Modus tollens (indirekter Beweis)
3. Wiederspruchbeweis (A ist zu beweisen -> Annahme ¬A -> Wiederspruch)
4. Vollständige Induktion
5. Konstruktiver Beweis (Suchen einer potentiellen Lösung (e.g. Funktion)
6. Gegenbeispiel

Mengen:

Definition: Eine Menge M ist die Zusammenfassung wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten (Elementen).

$$x \in M \rightarrow x \; ist \; ein \; Element \; von \; M$$
$$x \notin M \rightarrow x \; ist \; kein \; Element \; von \; M$$

Bekannte Mengen:

$\mathbb{N}$: Menge aller natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$: Menge aller natürlichen Zahlen mit 0
$\mathbb{Z}$: Menge aller ganzen Zahlen (+/-)
$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$
$M = \emptyset$: Leere Menge $= \{\}$

Beschreibung von Mengen:

1. Aufzähalung M={A, B, C, D}
2. Beschreibung M={x|x ist eine der ersten Buchstaben des lat. Alph.}

Verknüpfung von Mengen:

Verknüpfen aller A_i mit $\wedge$:
$\bigwedge_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots$ (Großes UND, $i \in \{1, \dots, n\}$ Bedingung unterm UND)

$\bigvee_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i = A_1 \vee A_2 \vee \dots$ (Großes ODER, $i \in \{1, \dots, n\}$ Bedingung unterm ODER)

$\neg \bigwedge_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i = \bigvee_{i\in\{1,\dots,n\}} \neg A_i$

Definition:

Sei eine Menge M und A(x) eine Aussage, die für bestimmte x∈M gilt bzw. wahr ist, dann:

$\bigwedge_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i \equiv \forall x \in M: A(x)$ „für alle x gilt A(x)"
$\bigvee_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i \equiv \exists x \in M: A(x)$ „es gibt mind. ein x für das gilt A(x)"
$\neg \left(\forall x \in M: A(x)\right) \equiv \exists x \in M: \neg A(x)$
$\neg \exists x \in M: A(x) \equiv \forall x \in M: \neg A(x)$

$M \subseteq N \Leftrightarrow \forall x \in M: x \in N$	M ist Teilmenge oder gleich N
$M \subset N \Leftrightarrow (\forall x \in M: x \in N) \wedge (\exists y \in N: y \notin M)$	M ist eine Teilmenge von N
$M = N \Leftrightarrow (M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M)$	
$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$	M vereinigt N
$M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$	M schnitt N
$M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$	M ohne N
Falls M, N disjunkt ($M \cap N = \emptyset$) -> $M \dot\cup N$	M disjunkt N (disjunkte Vereinigung)

Mengenkomplement: Falls alle Mengen Teilmengen einer Grundmenge Ω

→ Komplement: Für $M \subseteq \Omega$: $M^c := \Omega \setminus M$ (Auch $\overline{M}$ geschrieben)

Satz: Rechenregeln für Mengen:

a. $A \cap B = b \cap A$
b. $A \cup B = B \cup A$ — Kommutativität
c. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
d. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — Assoziativität
e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
f. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — Distributivität
g. $(A \setminus B) \cap C = (C \setminus B) \cap A$
h. $A \cup (A \cap B) = A$
i. $A \cap (A \cup B) = A$ — Absorptionsgesetz
j. $A \cap A = A$
k. $A \cup A = A$ — Idempotenz

Falls gilt: $A, B \subseteq \Omega$ gelten die De Morgan'schen Gesetze

l. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
m. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Definition: Mächtigkeit von Mengen

Für Mengen M mit endliche vielen Elementen definieren wir die Mächtigkeit von M durch
|M| = #M := Anzahl der Elemente in M

Lemma: Sind Mengen A, B endlich und disjunkt, dann gilt:

$|A \cup B| = |A \dot{\cup} B| = |A| + |B|$

Sind Mengen A, B beliebige endliche Mengen:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Beweis durch Zerlegung von $A \cup B$ in disjunkte Mengen ($(A \setminus B) \dot{\cup} (A \cap B) \dot{\cup} (B \setminus A)$)