

Ausgewählte Kapitel ADS

October 28, 2015

1 Datenstrukturen für Mengen

1.1 Union-Find-Problem

Verwaltung von diskunkten Mengen

Problem

Verwalte eine Partition (Zerlegung in disjunkte Teilmengen) der Menge $\{1, \dots, n\}$ unter folgenden Operationen. Jede Teilmenge (Block) besitzt einen eindeutigen Namen aus $\{1, \dots, n\}$.

- $\text{FIND}(x)$: $x \in \{1, \dots, n\}$ Liefert den Namen der Teilmenge, die x enthält
- $\text{UNION}(A, B, C)$: Vereinigt die Teilmengen mit Namen A und B zu einer Teilmenge mit dem Namen C .

Initialisierung

Wir starten mit der Partitionierung: $\{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ mit dem Namen i für $\{i\}, 1 \leq i \leq n$

Analyse: Kosten für 1 Union (worst case)

Amortisiert: Kosten für $n - 1$ mögliche UNIONS

→ Kosten von $n - 1$ UNIONS und m FINDs

1. Lösung (einfach)

Verwende ein Feld $\text{name}[1..n]$ mit $\text{name}[x]$ = Name des Blocks der x enthält. $1 \leq x \leq n$

```
for i=1 to n do
    name[i] ← i
done
```

$\text{FIND}(x)$: return $\text{name}[x]$: $\mathcal{O}(n)$

$\text{UNION}(A, B, C)$: $\mathcal{O}(n)$

```
for i=1 to n do
    if name[i] = A OR name[i] = B
    then name[i] ← C
fi
done
```

Gesamtlaufzeit (Lemma 1):

$n - 1$ UNIONS und m FINDs kosten $\mathcal{O}(n^2 + m)$

2. Lösung (Verbesserung)

1. Find unverändert

2. Ändere den Namen der kleineren Menge in den Namen der größeren

Zusätzliche Felder:

- $\text{size}[1..n]$: $\text{size}[A]$ = Anzahl Elemente im Block A , initialisiert mit 1
- $L[1..n]$: $L[A]$ = Liste aller Elemente in Block A , initialisiert $L[i] = \{i\}$

FIND(x) bleibt gleich

UNION(A,B):

```
if size[A] ≤ size[B]
then
    forall i in L[A] do
        name[i] ← B
    done
    size[B] += size[A]
    L[B] ← L[B] concatenate L[A]
else
    symmetrisch
```

Die Menge heißt jetzt A oder B

Effekt: UNION(A,B,..) hat Laufzeit $\mathcal{O}(\min(|A|, |B|))$

Worst Case eines UNION dieser Folge von UNIONS: $\mathcal{O}(\frac{n}{2}) = \mathcal{O}(n)$ (kann nur einmal vorkommen)

Gesamtkosten für alle n-1 UNIONS: $\mathcal{O}(n * \log(n))$