# Netzwerkalgorithmen

July 4, 2016

## 1 Zusätzliches blabla

Makros in C/C++: #define alias replace, wobei replace auch Code sein kann.

## 2 Datentypen für Graphen und Netzwerke (LEDA)

### Definition eines Datentyps

Definition der Objekte des Typs: $stack < T >$
Konstruktion: $stack < int >$ S(100) (max Größe)
Operationen: $s.push(Tx)$, $Ts.pop()$
Bemerkung zu Implementierung

### Graph-Datentyp in LEDA

Der Typ graph repräsentiert gerichtete Graphen.
Ein Graph g besteht aus zwei Typen von Objekten: node und edge
Mit jedem Knoten v sind zwei Listen von Kanten ($list < edge >$) verbunden (eingehend und ausgehend)
Mit jeder Kante e werden 2 Knoten source und target gespeichert.

#### Operationen auf G

Update:
node G.new_node(), erzeugt einen neuen Knoten in G und gibt ihn zurück. edge G.new_edge(node v, node w)
void G.del_edge(edge)
Access:
$list < edge >$ G.out_edges(node v);
int G.outdeg(node v);
node G.source(edge);
node G.target(edge);
Iteration:
forall_nodes(v,G)
forall_edges(e,G)
forall_out_edges(e,v)
forall_in_edges(e,v)

#### 1. Problem

Gegeben: Graph G=(V,E)
Frage: Ist G azyklisch?

Algorithmus siehe Topologisches Sortieren: Entferne jeweils einen Knoten v mit indeg(v)=0 bis der Graph leer ist. Falls wir keinen solchen Knoten finden dann ist der Graph zyklisch, falls G am Ende leer, ist er azyklisch.
C++:

```
bool ACYCLIC(graph G){          //Call by value damit G nicht zerstört
        list<node> zero;
        node v;
        forall_nodes(v,G){
                if (G.indeg(v)==0) zero.append(v);
        }
        while (!zero.empty()){
                node u = zero.pop();
                edge e;
                forall_out_edges(e,u){
                        node w=G.target(e);
                        G.del_edge(e);
                        if (G.indeg(w) == 0){
                                zero.append(w);
                        }
                }
        }
        return G.empty();
}
```

#### Daten für Knoten und Kanten

1. Parametrisierte Graphen: GRAPH<node_type,edge_type> G
2. Temporäre Daten: besucht[v] ← true

## Datentypen in LEDA

node_array< $T$ > A(G,x): Feld über die Knoten des Graphen G edge_array< $T$ > B(G,y) analog Verwendet für: Temporäre Daten, Eingabedaten, Resultate

#### Anwendung im topologischen Sortieren

injektive Abbildung: topnum: $V \to \{1, ..., n\}$ mit $\forall (v, w) \in E$: topnum[v]<topnum[w]

```
bool TOPSORT(const graph& G, node_array<int>& topnum){
        int count = 0;
        list<node> zerol
        node_array<int> indeg(G);
        node v;
        forall_nodes(v,G){
                indeg[v] = G.indeg(v);
                if(indev[v] == 0) zero.append(v);
        }
        while(!zero.empty()){
                node v = zero.pop();
                topnum[v] = ++count;
                edge e;
                forall_out_edges(e,v){
                        node w = G.target(e)
                        if (--indeg[w] == 0) zero.append(w)
```

```
                }
        }
        return count == G.number_of_nodes();
}
```

**Tiefensuche**

Hauptprogramm:

```
void DFS(const graph& G, node_array<int>& dfsnum, node_array<int>& compnum){
        int count1 = 0;
        int count2 = 0;
        node_array<bool> visited(G, false);
        node v;
        forall_nodes(v,G){
                if (!visited[v]) dfs(G,v,count1,count2,dfsnum,compnum)
        }
}
```

Rekursive Funktion dfs:

```
void dfs(const graph& g, node v, int& count1, int& count2,node_array<int>& dfsnum, _
                node_array<int>& compnum){
        dfsnum[v] == ++count1;
        visited[v] = true;
        edge e;
        forall_out_edges(e,v){
                edge w = G.target(e),
                if(!visited[w]) dfs(G,w,count1,count2,dfsnum,compnum)
        }
        compnum[v] = ++count2
}
```

**Berechnung starker Zusammenhangskomponenten**

Definition: Ein gerichteter Graph ist stark zusammenhängend, wenn $\forall v, w\ inV : v \rightarrow^* w$ (es existiert ein Pfad von v nach w)
Die starken Zusammenhangskomponenten (SZK) von G sind die maximalen SZK Teilgraphen von G.
Idee für Algorithmus:

1. führe DFS mit $G' = (V', E')$ dem Teilgraphen aufgespannt von bereits besuchten Knoten
2. Verwalte SZK von $G'$ während DFS ausgeführt wird.

Ablauf:
Sei (v,w) die nächste in dfs betrachtete Kante
1. Fall: $(v, w) \in T$ (Baumkante), w noch nicht besucht. $V' = V' \cup \{w\}, E' = E' \cup \{(v, w)\}, SZK = SZK \cup \{\{w\}\}$
2. Fall: $(v, w) \notin T$,d.h. w wurde schon besucht, ist also in $V'$ enthalten.$E' = E' \cup \{(v, w)\}$. Nun kann (v,w) meherere bereits bekannte SZK vereinigen (Rückwärtskante oder Cross-Kante). Bemerkung: Vorwärtskanten generieren keine neuen Pfade in $G'$, deswegen dabei keine änderung der SZK.
Bezeichnungen:

1. Eine SKZ K heißt abgeschlossen, falls die Aufrufe von dfs für alle Knoten v in K beendet sind.
2. Die Wurzel einer SZK K ist der Knoten mit der kleinsten dfsnum in K.
3. "Unfertig" ist die Folge aller Knoten für die dfs aufgerufen wurde, aber deren SZK in der sie sich befinden noch nicht abgeschlossen ist.

4. "Wurzeln" ist die Folge aller Wurzeln der nicht abgeschlossenen SZK nach dfsnum sortiert.

Situation, wenn DFS beim Knoten g angekommen ist:
Unfertig: a,b,c,e,f,g
Wurzeln: 1,b,e,g
Der Algorithmus betrachtet danach dei Kanten aus g $(g,d) \in C$: es passiert nichts, da d in einer abgeschlossenen SZK ist;$(g,c) \in C$ Vereinigt die 3 SZK mit den Wurzeln b,e,g durch entfernen von e,g aus der Wurzelfolge.
Beobachtung: Hinzufügen und Streichen nur am Ende → Stack eignet sich als Datenstruktur.
Allgemeine Situation für $(v,w) \in T$:
$K' = K_2 \cup K_3 \cup K_4$.

| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |
|---|---|---|---|
| $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ |

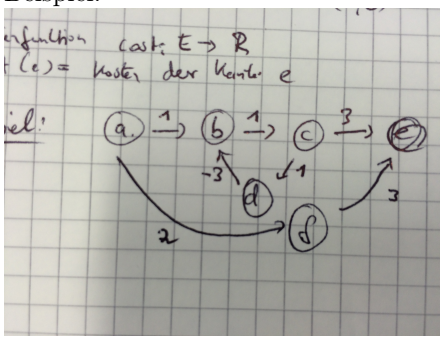
Ergänzungen von DFS für SZK:
1. Aktion: while dfsum[wurzel.top()] > dfsnum[w] do wurzeln.pop() od
2. Falls $(v,w) \in T$: Wurzeln.push(w); Unfertig.push(v)
3. Abschluss eine SZK: SZK von v wird endgültig verlassen, sie ist nun abgeschlossen.

```
Am Ende von dfs(v): if v == Wurzel.top() then
        Wurzeln.pop();
        repeat w = unfertig.pop() until w==v
fi
```

Übung 2: Algo zu SZK.
Darstellung der einzelnen SZKs: node_array< $int$ > szknum(G); k=#kompnum $forall v \in V szknum[v] = i \Leftrightarrow$v in der Komponente i
→ int SZK(const graph& G, node_array< $int$ >& sznum)

# 3 Kürzeste Wege / Billigste Wege

Allgemeines Problem: Sei gegeben ein gerichteter Graph $G = (V,E)$, eine Kostenfunktion $cost : E \to \mathbb{R}$ mit $cost(e)$ =Kosten der Kante e.
Beispiel:



k=3

Kosten eines Pfades P: $cost(P) := \sum_{e \in P} cost(e)$
**Billigste-Wege Problem:**Finde einen Pfad P mit cost(P) minimal

a) Zwischen zwei gegebenen Knoten

b) Von einem Knoten s zu allen anderen Knoten (single source shortest paths)

c) Zwischen allen Paaren $(v,w) \in V \times V$

Im Beispiel: $dist(a,f) = 2$, $dist(a,e) = -\infty$ weil $a \to b \to (c \to d \to b \to c)^i \to e$
Definition: $dist(v,w) := inf\{cost(P) | P$ist Pfad von v nach w$\}$ d.h. wenn es einen negativen Zyklus gibt $= -\infty$, wenn kein Pfad existiert: $\infty$.
Wir betrachten hier die Single-Source Variante:
Eingabe: $G = (V,E), s \in V, cost : E \Rightarrow \mathbb{R}$
Ausgabe: $\forall v \in V : dist(s,v)$
Beobachtung: Die dist-Funktion erfüllt die Dreiecksungleichung: $dist(s,w) \leq dist(s,v) + cost(v,w)$

Idee für allgemeinen Algorithmus (Label Correcting):
Überschätze die dist-Werte (DIST=$\infty$). Solange eine Kante (u,v) die Dreiecksungleichung verletzt, korrigiere DIST[v]

```
forall v in V do
        DIST[v] = ∞
od
DIST[s] = 0
while ∃(u,v) ∈ E mit DIST[v] > DIST[u] + cost(u,v)
        DIST[v] = DIST[u]+cost(u,v)
od
```

Eigenschaften

a) Es gilt immer $DIST[v] \geq dist(s,v)$

b) Wenn $DIST[v] < \infty$, dann existiert ein Pfad von s nach v mit den Kosten DIST[v]

c) Die kürzesten Pfade bilden einen Baum T mit Wurzel s. Begründung: In jeden Knoten mit $DIST[v] < \infty$ mündet genau ein kürzester Pfad. Bei korrigieren von DIST-Wert wird die eingehende Kante von T definiert.

d) Für jede Kante $(v,w)$ auf einem Kürzesten Pfad gilt: $dist(s,w) = dist(s,v) + cost(v,w)$

Effizienter Algorithmus: Kandidatenmenge
Wir speichern alle Knoten aus denen Kanten ausgehen können, die die Dreiecksungleichung verletzen in einer Menge U.
Am Anfang gilt: $U = \{s\}$. Immer wenn DIST[v] vermindert wird, nimm v nach U auf.
PREFlow (excess):$e(i) = \sum x_{ji} - \sum x_{ik} \leq 0$
Wenn $e(i) > 0$ dann ist i aktiv ($i \notin \{s,t\}$
Idee für Algorithmus:
1. Schiebe (push) Fluss von s nach t
2. Während des Ablaufs ensteht dadurch ein Preflow mit ExcessKnoten
3. am Ende soll der Preflow ein echter Fluss sein, d.h. keine aktiven Knoten
Für die Richtung s nach t verwenden wir eine Distanzfunktion (Distanz=Länge von Pfaden von s nach t)
**Definition: (Distanz-Label):**
Für einen Preflow x definieren wir in G(x) eine Distanzfunktion $d : V \to \mathbb{N}_0$ mit:

1. d(t) = 0
2. $d(i) \leq d(j) + 1$ für alle $(i,j) \in G(x)$

Beobachtung: 1. d ist eine untere Schranke für exakte Distanzwerte. 2. Die Nullfunktion ist ein gültiges Distanz-Label.
Intuition: d = Höhe/Level von Knoten
**Definition: admissible/zulässig**
Eine Kante (i,j) in G(x) heißt admissible gdw $d(i) = d(j) + 1$
Preflow-Push Algorithmus:
1. Saturiere alle von s ausgehenden Kanten
2. Setze $d(i) = 0$für $i \neq 0$ oder n für $i = s$
3. Betrachte einen aktiven Knoten i und schiebe Fluss über eine admissible Edge.
4. Falls ein aktiver Knoten i keine ausgehende admissible Edge hat -¿ Relabel $d(i) \leftarrow min\{d(j)|$j Nachbar in G(x)$\}+$ 1
Der generische Preflow-Push-Algorithmus:

```
1 x=0;e=0;d=0;
2 forall j in V mit (s,j) in E do
3         x_sj = u_sj //Volle Kapazität
4         e(j) += x_sj
```

```
od
d(s) = n
while ∃ aktive Knoten do
        wähle einen aktiven Knoten i //am besten highest label
        PUSH/RELABEL(i)
od
```

PUSH/RELABEL(knoten i):

```
if ∃ admissible Edge (i,j) in G(x) then
        wähle eine solche Kante (i,j)
        delta = min{e(i), r_ij}
        x_ij += delta
        e(i) -= delta
        e(j) += delta
else //Relabel
        d(i) = min{d(j)|(i,j) in G(x)}+1
fi
```

Laufzeit: $\mathcal{O}(\#Push + \#Relabel)$
Lemma: Falls $e(i) > 0$ dann existiert ein Pfad von i nach s im Restnetzwerk G(x).
Lemma2: Für alle aktiven Knoten $i \in V : d(i) < 2n$ folgt aus Lemma 1.
Lemma3: Maximal $2n^2$ Realbels (Folgt aus Lemma2). Für jeden einzelnen Knoten maximal 2n.
Lemma4: $\leq n * m$ saturierende Pushes
Lemma5: $\mathcal{O}(n^2 * m)$ nicht saturierende Pushes
Der Generische Algorithmus hat$\mathcal{O}(n^2 * m)$