טופולוגיה - תרגיל 8

עופר יהודה - 307960468

25 במאי 2017

1. מרחב מטרי קומפקטי מקיים כי לכל כיסוי פתוח יש תת־כיסוי סופי. בפרט יש תת־כיסוי בן מנייה, לכן הוא מרחב Lindelof. כמו שנראה בשאלה 2, נובע מכך כי X מקיים את אקס' המניה השנייה.

2.
- $1 \Rightarrow 2$: X מקיים את אקס' המניה השנייה. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ כיסוי פתוח של X. יהי $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ הבסיס בן המנייה. לכל n שניתן, נחליף את B_n ב־U_α שמכיל אותו. נטען כי (U_n) היא כיסוי של X. לכל $x\in X$, קיימת U_α כך ש־$x\in U_\alpha$. בפרט, קיים $x\in B_n\subseteq U_\alpha$. לכן $x\in U_n$.
- $2\Rightarrow 3$: X מרחב לינדלף. נקבע נק' x_0 במרחב. לכל n נגדיר כיסוי $\{U_x^n\}_{x\in X}$

$$\forall x\in X,\, U_x=B_{\frac{1}{n}}\left(x\right)$$

יהי $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ תת כיסוי בן מנייה, ותהי $\left(x_j^n\right)_{j=1}^{\infty}$ סדרת מרכזי הכדורים בתת הכיסוי. נגדיר $D=\left\{x_j^n\mid j,n\in\mathbb{N}\right\}$, קבוצת כל איברי הסדרות, היא גם בת מנייה. נטען כי זו קבוצה צפופה. תהי U פתוחה. יהי $x\in U$. קיים $r>0$ כך ש־$B_r\left(x\right)\subseteq U$. יהי n כך ש־$\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$. כיוון ש־$\left\{U_j^n\right\}_{j=1}^{\infty}$ כיסוי בן מנייה, קיים x_j^n כך ש־$x\in B_{\frac{1}{n}}\left(x_j^n\right)$. אבל מכך נובע כי

$$B_{\frac{1}{n}}\left(x_j^n\right)\subseteq B_r\left(x\right)\subseteq U$$

ולכן $x_j^n\in U$, משמע $D\cap U\neq\varnothing$ כנדרש.

- $3\Rightarrow 1$: X ספרבילי. תהי קבוצה צפופה בת מנייה $D=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$. לכל n, נגדיר את הקבוצה $B_n=\left\{B_{\frac{1}{k}}\left(x_n\right)\mid k\in\mathbb{N}\right\}$. זו קבוצה בת מנייה ולכן הקבוצה

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

מנייה. נראה כי היא בסיס. תהא קבוצה פתוחה U. יהי $x \in U$. קיים $B_r(x) \subseteq U \ni x$. מצפיפות D קיים n כך ש־$x_n \in B_{\frac{r}{2}}(x)$, וקיים k כך ש־$\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$, לכן

$$B_{\frac{1}{k}}(x_n) \subseteq B_r(x) \subseteq U$$

משמע B בסיס.

3. $(\Omega, <)$ מקיים את אקס' המנייה הראשונה. לכל $\alpha \in \Omega$:

- אם $\alpha = \varnothing$ אז $[\varnothing, 1) = \{\varnothing\}$ קבוצה פתוחה ומוכלת בכל קבוצה שמכילה את $\varnothing$.
- אם α עוקב אז שוב $(\alpha - 1, \alpha + 1) = \{\alpha\}$ פתוחה ומוכלת בהכל.
- אם α גבולי אז יהיה β הסודר הגבולי הגדול ביותר שמקיים $\beta < \alpha$ (אם אין נבחר את $\varnothing$). הקבוצה

$$\{(\beta + n, \alpha + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

מקיימת את הנדרש כי אם U פתוחה שמכילה את α אז יש קבוצה בסיסית $\alpha \in (a, b)$. כעת, $b \geq \alpha + 1$ ואו ש־$a \leq \beta$ או ש־$a = \beta + n$ (אחרת בהכרח $a > \alpha$) ולכן הקטע $(\beta + n + 1, \alpha + 1) \subset (a, b)$.

כעת, נבחין כי אפשר לחלק את Ω לאיחוד זר של הסודרים העוקבים S והסודרים הגבוליים L שקטנים ממנו. נשים לב כי $|L| \leq |S|$ כי לכל סודר גבולי α אפשר להתאים חח"ע סודר עוקב $\alpha + 1$. לכן בהכרח $|S| \neq \aleph_0$ (אחרת גם L, משמע Ω איחוד של קבוצות בנות מניה ולכן בן מנייה בעצמו). כעת, לכל סודר עוקב β הקבוצה $(\beta - 1, \beta + 1) = \{\beta\}$ פתוחה. מכך אפשר להסיק כי אף אחת מתכונות המנייה האחרות לא מתקיימת.

- אקס' מניה שנייה - הקבוצה $\{\beta\}$ חייבת להיות קבוצה בסיסית, לכן לא ייתכן מספר בן מנייה של קבוצות בסיסיות.
- לינדלף - $\bigcup_{\beta \in S} \{\beta\} \cup L$ כיסוי פתוח ומאותו נימוק לא ניתן למצוא לו תת כיסוי בן מנייה.
- ספרביליות - כל קבוצה צפופה חייבת להכיל את כל העוקבים כי היא חייבת לחתוך את היחידונים שמכילים אותם.

$X = (\overline{\Omega}, <)$.

- מנייה ראשונה - אם $\alpha = \Omega$, לא נוכל למצוא לו אוסף כנדרש, כי אחרת תהיה $\{U_n\}$ האוסף. לכל n יהיה x_n המינימלי ב־U_n. אז בהכרח

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n = \alpha$$

אחרת אין לקטע הפתוח $[\bigcup_{n=1}^{\infty}, \Omega)$ קבוצה באוסף שמוכלת בו ונקבל סתירה. אבל כעת קיבלנו ש־Ω איחוד בן מנייה של סודרים בני מנייה, בסתירה לכך שהוא לא בן מנייה.

לכל שאר האקסיומות הנימוקים זהים.

4. $X = \mathbb{R}_l$.

- מניה ראשונה ־ תהי $a \in \mathbb{R}$. נגדיר את האוסף

$$\left\{[a, a + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

אז כל קבוצה בסיסית $[b, c)$ שמכילה את a מקיימת כי קיים n כך ש־$\frac{1}{n} \leq c - a$ ולכן $[a, a + \frac{1}{n}) \subseteq [b, c)$.

- ספרביליות ־ $\mathbb{Q}$ צפופה כי לכל $[b, c)$ קיים q רציונלי כך ש־$b < q < c$ ולכן

$$q \in [b, c)$$

- לינדלף ־ נטען כי מספיק להראות את הטענה לכיסוים בסיסיים. ואכן, בהינתן כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, נחליף אותו בכיסוי $\{B_\beta\}_{\beta \in J'}$ כך שלכל U_α כל הקבוצות הבסיסיות שמוכלות בו נמצאות ב־$\{B_\beta\}$. כעת, בהינתן תת־כיסוי בן מנייה $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, לכל n קיים $\alpha \in J$ כך ש־$B_n \subseteq U_\alpha$. אז נחליף את B_n ב־U_α ונקבל תת־כיסוי של הכיסוי המקורי $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. כעת, נשים לב כי מתקיים

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq X$$

לכן זהו כיסוי כנדרש.

אז יהי $\{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ כיסוי ע"י קבוצות בסיס. נגדיר $C = \bigcup_\alpha (a_\alpha, b_\alpha)$. אם נסתכל על C כתת מרחב של $\mathbb{R}$ נבחין כי הוא לינדלף (כי הוא מטרי ומניה שנייה כתת מרחב של מניה שנייה). ולכן יש כיסוי ב"מ $\{(a_n, b_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ של C. בפרט גם $\{[a_n, b_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ כיסוי של C. נתבונן ב־$S = \mathbb{R} \backslash C$. נטען כי היא בת מניה. יהי $x \in S$. אזי קיים $\alpha \in J$ כך ש־$x = a_\alpha$. בנוסף $S \cap [a_\alpha, b_\alpha) = \{a_\alpha\}$. נתאים ל־$x$ רציונלי $a_\alpha < q_x < b_\alpha$ בקטע. נטען כי $f: S \to \mathbb{R}$, $f(x) = q_x$ חח"ע. נניח כי $x_1 \neq x_2 \in S$ ו־$f(x_1) = f(x_2)$. נניח $x_1 < x_2$. אז אם $x_1 = a_{\alpha_1}$ אז $q_{x_1} \in [a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1})$. בפרט $x_2 \in [a_{\alpha_1}, q_{x_1} = q_{x_2}) \subseteq [a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1})$ אבל ראינו קודם ש־$S \cap [a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) = \{a_{\alpha_1}\} = \{x_1\}$ משמע $x_1 = x_2$, סתירה. לכן $|S| = \aleph_0$. לכל $x \in S$ נבחר קטע שמכיל אותו ונקבל כיסוי בן מנייה של S. אז איחוד שני הכיסויים ייתן כיסוי בן מנייה ל־$C \cup S = \mathbb{R}$ כנדרש.

- מניה שנייה ־ בהמשך אני נותן כדוגמה נגדית למכפלה של לינדלף היא לינדלף את המרחב $\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$. אם הוא היה מנייה שניה אז גם המכפלה היתה מניה שנייה, ולכן גם כל תת מרחב היה מניה שנייה. בפרט, האלכסון עם המטריקה הדיסקרטית היה, בסתירה לכך שהוא אינו בן מנייה.

5. (א) מניה ראשונה ־ יהי $A\subset X$. יהי $x\in A$. קיימת $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ אוסף פתוחות המכילות את x כך שלכל $x\in V$ פתוחה קיים n כך ש־$U_n\subseteq V$. נגדיר $\{U_n\cap A\}_{n=1}^{\infty}$. זהו אוסף קבוצות פתוחות ב־A המכילות את x. לכל $U\subseteq A$ פתוחה ב־A המכילה את x, קיימת V פתוחה ב־X כך ש־$U=V\cap A$. יהי n כך ש־$U_n\subseteq V$. אז

$$x\in U_n\cap A\subseteq V\cap A=U$$

כנדרש.

יהי $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ מכפלה בת מנייה של מרחבים עם תכונת המנייה הראשונה. תהי $x=(x_n)\in X$. לכל n, תהי $\{U_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף הפתוחות שקיים ממניה ראשונה סביב x_n. נגדיר את אוסף הקבוצות מהצורה

$$\prod_{j=1}^{\infty}V_j,\ \ i_1,...,i_k\in\mathbb{N},\ \ \begin{cases}V_j\in\left\{U_i^j\right\}_{i=1}^{\infty} & j=i_1,...,i_k\\ X_j & \text{else}\end{cases}$$

אלו קבוצות פתוחות ואוסף קבוצות זה הוא בן מנייה (כי הוא מתאים לאוסף תתי הקבוצות הסופיות של הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$). כעת, אם $x\in S$ פתוחה ב־X, אז יש מספר סופי של קבוצות $S_{i_1},...,S_{i_k}$ במכפלה של S ששונות ממרחב המקור שלהן. לכל S_{i_j} כזו, יש $U_k^{i_j}\subseteq X_{i_j}$ באוסף שקיים ממניה ראשונה. מכיוון שיש מספר סופי, המכפלה של ה־$U_k^{i_j}$ מוכל באוסף הקבוצות שהגדרנו קודם, ומוכל ב־S, כנדרש.

(ב) ספרביליות ־ דוגמה נגדית לתת מרחב: $X=\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה U פתוחה אס"ם $U=\varnothing$ או $0\in U$. אז $\{0\}$ קבוצה צפופה ובת מניה ב־X, אבל תת המרחב $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ מקבל את הטופולוגיה הדיסקרטית, ומכיוון שאינו בן מנייה לא יכולה להיות בו קבוצה צפופה בת מניה.

מכפלה בת מנייה־ יהי $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ מכפלה ב"מ של מרחבים ספרביליים. לכל n תהי $\left\{d_j^n\right\}_{j=1}^{\infty}$ הקבוצה הצפופה והב"מ ב־X_n. נגדיר את הקבוצה

$$S=\left\{\left(d_{j_n}^n\right)_{n=1}^{\infty}\mid\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ j_n=1\right\}$$

זו קבוצה ב"מ כי היא מתאימה לקבוצה של סדרות סופיות של מספרים טבעיים. כעת, לכל $V=\prod_{i=1}^{\infty}V_i\subseteq X$ פתוחה, בה"כ היא בסיסית (אחרת מכילה כזו). יש קיים N כך שלכל $n>N$ $V_n=X_n$. לכל $n\leq N$, יש $j_n\in\mathbb{N}$ כך ש־ $d_{j_n}^n\in V_n$ (מחיתוך בקבוצה הצפופה). לכן $\left(d_{j_1}^1,...,d_{j_N}^N,d_1^{N+1},...\right)\in V$ וגם שייך ל־S כנדרש.

(ג) לינדלף - דוגמה נגדית לתת מרחב: $\langle\overline{\Omega},<\rangle$ לינדלף, אבל $\langle\Omega,<\rangle$ ת"מ ולא לינדלף.

דוגמה נגדית למכפלה: ראינו כי $\mathbb{R}_l$ לינדלף. יהי $X=\mathbb{R}^2$ עם הטופולוגיה המתקבלת ממכפלה של $\mathbb{R}_l$. נשתמש בטענה כי קבוצה סגורה במרחב לינדלף היא גם לינדלף (ההוכחה זהה להוכחה במקרה של קומפקטיות). נשים לב כי הקבוצה $D=\{(x,-x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ סגורה כי המשלים פתוח. לכל $(x,y)\notin D$, אם $x+y<0$ אז $(x,y)\in[x,x-\frac{(x+y)}{2})\times[y,y-\frac{(x+y)}{2})$ ולכל (x',y') בפתוחה $x'+y'=x+i+y+j<x+y+2\frac{-(x+y)}{2}=0$ ולכן זר ל-D. אם $x+y>0$ אז שוב $(x,y)\in[x,x+1)\times[y,y+1)$ שזר ל-D כי אם (x',y') בפתוחה אז

$$x'+y'>x+y>0$$

כעת הטופ' המושרית על D היא הטופ' הדיסקרטית כי $D\cap[-x,-x+1)\times[x,x+1)=\{(x,-x)\}$ (כל נק' במלבן שאינה ממש $(x,-x)$ סכום הקואורדינטות שלה גדול ממש מ-0). מרחב שאינו בן מנייה עם הטופ' הדיסקרטית אינו לינדלף ולכן גם X אינו לינדלף.

(ד) מניה שנייה - יהי $A\subseteq X$. יהי $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס בן מנייה של X. אז $\{B_n\cap A\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס בן מנייה של A, כי לכל $V\cap A$ פתוחה ב-A, $V\cap A=(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n_k})\cap A=\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_{n_k}\cap A)$.

נניח $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ מכפלה של מרחבי מניה שנייה. לכל X_n יש בסיס בן מנייה $\{B_j^n\}_{n=1}^{\infty}$, והקבוצה

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}B_{j_i}^{i}\right)\times\left(\prod_{i=n+1}^{\infty}X_i\right)\mid j_1,...,j_n\in\mathbb{N}\right\}$$

איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה ולכן בן מנייה. בנוסף זה בסיס לטופולוגית המכפלה כי כל קבוצה בסיסית שלה היא מהצורה

$$V=\left(\prod_{i=1}^{n}V_i\right)\times\prod_{i=n+1}^{\infty}X_i$$

עבור n כלשהו, ולכן V תתקבל מאיחוד של קבוצות מ-B.