Université Ouaga1 JKZ
UFR-SEA, Département de Mathématiques
Professeur: Dr Marie Françoise Ouedraogo

17 Mars 20018

L$_2$S$_4$
Examen d'algèbre bilinéaire
Durée: *2 heures*

Exercice 1 *: (5 pts)*

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien et $\| \ \|$ la norme associée.

1. Démontrer l'identité du parallélogramme: $\forall x, y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.
2. Démontrer l'identité de la médiane: $\forall x, a, b \in E$, $\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 = \frac{\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|a-b\|^2$.

Exercice 2 *: (7 pts)*

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coéfficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit φ l'application définie sur E par:

$$\varphi(P) = \int_{-1}^{1} [P(t)]^2 \, dt$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée pour φ.

Exercice 3 *: (8 pts)*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E. On considère la forme hermitienne Φ dont la matrice relative à la base $\mathcal{B}$ est: $M = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que Φ est définie positive.
2. Déterminer une base orthomormée pour Φ.
3. On suppose que E est hermitien et la base $\mathcal{B}$ est orthonormée. Soit f l'endomorphisme hermitien de matrice M dans la base $\mathcal{B}$. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E formée de vecteurs propres de f.
4. Réduire la forme hermitienne Φ.