

Method

首先我们重复了 2020 年发表在 PRL 上，并被选为编辑推荐的论文：Topological Phase Transition in Coupled Rock-Paper-Scissors Cycles

本论文使用了演化博弈论的模型，使用了洛特卡-沃尔泰拉方程（别称捕食者与猎物方程）来描述石头剪刀布博弈中的现象。

如下图，我们研究的对象可以看作一条一维链，每个端点代表了持同一个策略的人群，按照一定的周期性排列，例如端点 1, 2, 3, 4 分别代表持石头、剪刀、布、石头的一个人群，各个端点有人数这个属性。各个边代表了这两个人群之间存在着博弈的关系，两方的损益由边的有向权重来表示，例如 r_1 , r_2 , r_3 表示人群 1, 2, 3 之间互相博弈的收益情况。

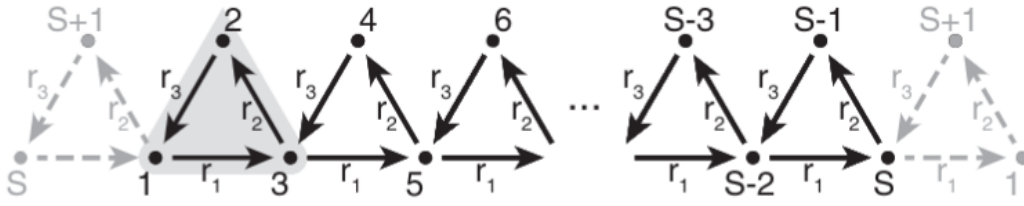


FIG. 1. One-dimensional chain of rock-paper-scissors cycles. The interactions on the S sites of the RPS chain (one single RPS cycle highlighted) are captured by the antisymmetric matrix A in Eq. (2). An arrow from one site to another indicates that mass is transported in this direction at a rate of $r_1, r_2, r_3 > 0$ following the ALVE (1); the skewness $r = r_2/r_3$ defines the control parameter. The auxiliary site $S + 1$ facilitates periodic boundary conditions (dashed lines) within the framework of topological band theory.

可以使用一个方程来描述这个博弈的演化过程，此方程在 1925 和 1926 年由洛特卡和沃尔泰拉独立发表，经常用于描述生态系统中捕食者和猎物的数量演化关系。方程的形式如下：

$$\frac{d}{dt} x_\alpha = x_\alpha \sum_{\beta=1}^S a_{\alpha\beta} x_\beta, \quad \alpha = 1, \dots, S. \quad (1)$$

其中系数 $a_{\alpha\beta}$ 可以组成一个反对称矩阵 $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$ ，例子如下：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & -r_2 & 0 & r_3 & -r_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 & 0 & r_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & -r_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_3 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_3 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_1 & -r_2 & 0 \end{pmatrix}$$

这代表了每个人群的人数变化受到其他人群的非线性影响，此影响正比于人数 $x_\alpha x_\beta$ ，和损益关系矩阵 A_0 。

物理中的拓扑相有如下的性质：

1. 局部性：动态激励局限在系统的边界处。
2. 鲁棒性：在系统的参数变化、加入噪声等影响因素下，边模仍然能保持稳定。
3. 相变：在拓扑相之间的相变点，动态模式将会扩展到整个系统。

..... 决定了系统的拓扑相，而 又由系统的对称性分类。

// TODO: nontrivial topological property of the system's bulk 啥意思？

下图是在这个一维石头剪刀布博弈链，简称为 RPS 链，上出现的拓扑相变现象。我们重复了论文中的实验，得到了相同的结果。

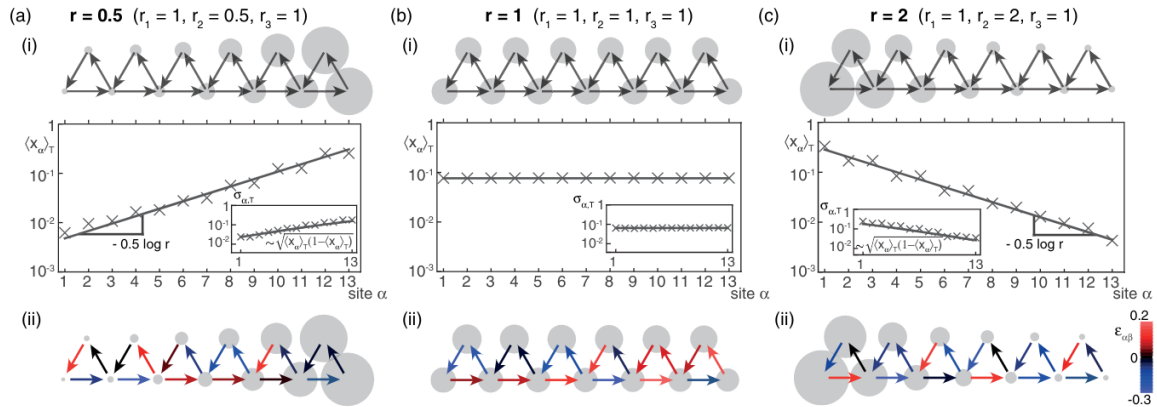


FIG. 2. Polarization of mass to the boundary. (a)–(c) (i) Temporal mass averages $\langle x_\alpha \rangle_T$ from single realizations of the ALVE (1) are depicted on the RPS chain (disk size encodes magnitude) and on lin-log scale for $T = 5000$. Mass becomes polarized to the right for $r < 1$ and to the left for $r > 1$. For $r = 1$, mass is uniformly distributed on the whole chain. Polarization is no state of rest (nonvanishing fluctuations $\sigma_{\alpha,T}$ around the averages; insets). (a)–(c) (ii) Polarization is robust against perturbations ($\epsilon_{\alpha\beta}$ uniformly sampled in $[-0.30, 0.20]$) with the same qualitative characteristics as without perturbations.

模型中边权 r_1, r_2, r_3 均大于 0。将 r_1 设为标准值 1，比例 $r := \frac{r_2}{r_3}$ 为系统的控制参量，称为偏度 (skewness)。RPS 链上的每个石头-剪刀-布单元是一个非线性局部振子，人数在其中转移，因此整条链可以看作一组一维非线性振子所构成的链。当 $r \neq 1$ 时，人数在一个局部单元中的迁移是不均衡的。

// 百姓洋人官？（王朝兴衰、土地兼并）

论文中的实验给出了如下的结果：

1. 无论初值如何设置，人数最终都会集中在链的左侧或者右侧。

2. 这个极化过程在系统参量变化以及噪声的加入中都保持鲁棒，仍然会发生。
3. 在左极化和右极化的相变过程中，总人数扩散到整条链上，并且观察到了孤波。