Method

首先我们重复了 2020 年发表在 PRL 上，并被选为编辑推荐的论文：Topological Phase Transition in Coupled Rock-Paper-Scissors Cycles

本论文使用了演化博弈论的模型，使用了洛特卡-沃尔泰拉方程（别称捕食者与猎物方程）来描述石头剪刀布博弈中的现象。

如下图，我们研究的对象可以看作一条一维链，每个端点代表了持同一个策略的人群，按照一定的周期性排列，例如端点 1，2，3，4 分别代表持石头、剪刀、布、石头的一个人群，各个端点有人数这个属性。各个边代表了这两个人群之间存在着博弈的关系，两方的损益由边的有向权重来表示，例如 r1，r2，r3 表示人群 1，2，3 之间互相博弈的收益情况。

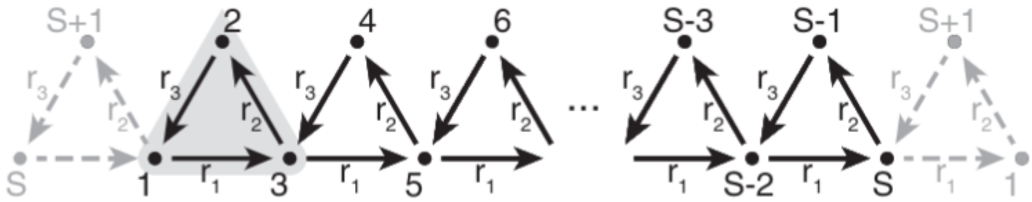

FIG. 1. One-dimensional chain of rock-paper-scissors cycles. The interactions on the S sites of the RPS chain (one single RPS cycle highlighted) are captured by the antisymmetric matrix A in Eq. (2). An arrow from one site to another indicates that mass is transported in this direction at a rate of $r_1, r_2, r_3 > 0$ following the ALVE (1); the skewness $r = r_2/r_3$ defines the control parameter. The auxiliary site $S+1$ facilitates periodic boundary conditions (dashed lines) within the framework of topological band theory.

可以使用一个方程来描述这个博弈的演化过程，此方程在 1925 和 1926 年由洛特卡和沃尔泰拉独立发表，经常用于描述生态系统中捕食者和猎物的数量演化关系。方程的形式如下：

$$\frac{d}{dt}x_\alpha = x_\alpha \sum_{\beta=1}^{S} a_{\alpha\beta} x_\beta, \quad \alpha = 1, \ldots, S. \quad (1)$$

其中系数 $a_{\alpha\beta}$ 可以组成一个反对称矩阵 $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$，例子如下：

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & r_3 & -r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-r_3 & 0 & r_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
r_1 & -r_2 & 0 & r_3 & -r_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r_3 & 0 & r_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & r_1 & -r_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_3 & -r_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r_3 & 0 & r_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_1 & -r_2 & 0
\end{pmatrix}
$$

这代表了每个人群的人数变化受到其他人群的非线性影响，此影响正比于人数 $x_\alpha x_\beta$，和损益关系矩阵 A。