**石头剪刀布演化博弈模型的拓扑相变：**

**从一维边缘态到选择性高阶拓扑**

在本研究报告中，我们复现了Johannes Knebel等人于2020年发表Physical Review Letters上的有关石头剪刀布（RPS）演化博弈链上拓扑边界态的工作/cite{PRL2020}。验证了该工作所揭示的一维RPS链从右极化、固体波到左极化的拓扑相变过程，并进一步验证了RPS链拓扑边界态的鲁棒性。在此基础上，我们以实现演化博弈网络中的高阶拓扑为目标，设计了一种二维三角密铺RPS网络，并在该网络中观察到了新奇的选择性拓扑边缘态和拓扑角态。这一率先在经济物理模型中实现的选择性高阶拓扑是一种在传统的拓扑物理领域都未能被发现的新奇拓扑相，它体现了经济学模型的独特物理性质。

引言：物质的拓扑相和演化博弈论各自是当今物理学和经济学的研究热点。拓扑学是一门研究几何图形或空间在连续改变形状后还能保持不变的一些性质（如拓扑数）的学科。对某些物理系统而言，其特征矢量轨迹的拓扑数是其具有的某些新奇物性的表征。例如，拓扑绝缘体是一种内部绝缘，但表面具有对杂质免疫的良好导电性（即边缘态）的物质。理论计算表明，拓扑绝缘体具有的这种性质与其能带的拓扑数密切相关：非零的拓扑数意味着边缘态的出现。拓扑相的概念最早在凝聚态物理领域被提出，并引出了量子反常霍尔效应、量子自旋霍尔效应等一系列重大发现。目前，这一具有普适性的概念也被应用到光学、声学、力学、热学等不同的物理系统中，揭示了大量新奇的物理现象，是当今物理学研究中最活跃的概念之一。演化博弈论则是脱胎于生物科学研究、考虑了生物进化原理的博弈理论。它摈弃了超级理性人的假设，而认为人类通常是通过试错的方法来达到博弈均衡的。这一理论受到生物学、经济学、社会学等领域的广泛关注，也早就成为了经济物理的一个研究课题。

最近，Johannes Knebel等人首次在演化博弈系统中报告了拓扑相变。他们构造了一个耦合的“石头剪刀布”（RPS）博弈链，并通过调节该系统支付矩阵的参数，在数值模拟中实现了将大部分交易者局域在链左/右端的左/右边界态和让交易者人口密度以固体波的形式在链上运动的体态。通过对支付矩阵作傅里叶变换并推导能带拓扑，他们发现，边界态对应着非零拓扑数，而体态对应着零拓扑数，而要实现边界态和体态间的相变，系统必须经历相应的能带开闭过程——这些都是拓扑绝缘体的典型性质。这一发现印证了拓扑能带论的强大普适性，也为研究演化博弈论提供了一条新的进路。在此之后，Tsuneya Yoshida等人将这一模型自然地推广到二维，并发现了对应的一维手性边缘态，即交易者局域在一条边上且只会沿着一个方向挪动。然而，上述的工作仅仅局限于一阶拓扑边界态的讨论（如二维的体系，交易者局域到一维的边上），对当今物理学界炙手可热的高阶拓扑（如二维的体系，交易者局域到零维的角上）却毫无涉及。另一方面，从演化博弈的角度讲，将二维网络上的交易者局域到特定的点（即特定的少数几个博弈策略）上，是在实际应用中出现得更多的问题。因此，探讨RPS模型的高阶拓扑将是一项很有意义的工作。

模型与方法

本研究报告首先重复了 Johannes Knebel 在一维耦合“石头剪刀布”（RPS）博弈链上的模拟结果。

拓扑相有以下的性质，它们在一维 RPS 博弈链上同样能够被观察到：

1. 局部性：动态激励局限在系统的边界处。
2. 鲁棒性：在系统的参数变化、加入噪声等影响因素下，边模仍然能保持稳定。
3. 相变：在拓扑相之间的相变点，动态模式将会以波的形式扩展到整个系统。

拓扑相可以用洛特卡-沃尔泰拉方程（别称捕食者与猎物方程）来描述。这个方程此方程在 1925 和 1926 年由洛特卡和沃尔泰拉独立发表，是生态系统中的捕食/被捕食关系，以及驱动-耗散体系下的非相互作用玻色子凝聚态\*（翻译存疑）的重要模型。方程的数学形式如下：

// \* condensation of  
noninteracting bosons in driven-dissipative setups

// latex: \frac{d}{dt}x\_\alpha = x\_\alpha \sum\_{\beta=1}^{S}a\_{\alpha\beta}x\_\beta, \ \ \alpha = 1, ..., S.

该方程描述了一个由 S 个状态定义的非线性系统，状态 α 的人数 x\_α 根据这个耦合常微分方程变化。反对称 S x S矩阵 A 定义了人数是如何在不同状态之间通过一个非线性耦合 x\_αx\_β 转移的，每个人群受其他人群的影响正比于 x\_αx\_β 和矩阵元 a\_αβ。

// Matrix\_A.png

接下来介绍模型的配置。如下图，模型可以看作一条一维链，每个端点代表了持同一个策略的人群，按照一定的周期性排列，例如端点 1，2，3，4 分别代表持石头、剪刀、布、石头的一个人群，各个端点有人数属性。边代表了两个人群之间存在着博弈关系，两方的损益由边的有向权重r\_1-3来表示，例如 r1，r2，r3 表示人群 1，2，3 之间互相博弈的收益情况。模型中边权 r1, r2, r3 均大于 0。将 r1 设为标准值 1，比例 r = r\_2/r\_3 为系统的控制参量，称为偏度（skewness）。RPS 链上的每个石头-剪刀-布单元是一个非线性局部振子，人数在其中转移，因此整条链可以看作一组一维非线性振子所构成的链。当控制参量 r 不等于 1 时，人数在一个局部单元中的迁移是不均衡的。

// RPS\_chain.png

论文中的实验给出了如下的结果，被我们所复现：

1. 无论初值如何设置，人数最终都会集中在链的左侧或者右侧。
2. 这个极化过程在系统参量变化以及加入噪声的情况下仍然会发生，保持鲁棒性。
3. 在左极化和右极化的相变过程中，总人数扩散到整条链上，并且会产生孤波。

我们使用四阶龙格-库塔方法对模型中的洛特卡-沃尔泰拉方程进行求解。（图注：可视化和对数曲线，以下两图是示意）

首先观察人数极化的状况，当偏度 R < 1 时，人数将会聚集在链的右侧，R > 1 时将会聚集在左侧，其他的系数会影响人数分布的参数，但是不会影响这个极化行为本身。为了描述极化的状况，我们通过一个长为 T=2000 的滑动窗口对各个点上的历史人数进行平均，得到的平均值<x\_alpha>T如下图。我们观察到，当 r 不等于 1 时，平均值<x\_alpha>T 有一个指数递减的关系，参数 lp 为 2/ln(r)。这个极化过程在初值的各种设置下都能够观察到，并且在一个非常小的系统尺度（S=13）下也会出现。我们使用标准差sigma来衡量系统的稳定情况，每个位置标准差和人数成正比。

鲁棒性：如图 2 ，在人数转移矩阵上加上 a\_ab’ 的随机扰动，系统最终也能达到一个极化的状态。

相变：当 r = 1 时，人数均匀的分布在整条链上。在调节 r 的过程中，在一个极化状态转变为另一个的过程中，平均人数一定会在链的一边扩散到另一边。

另外我们观察到了在 r = 1 时生成的波包，如下图所示，当两个波包穿过彼此时，它们的形状和速度都保持不变。

……接下来是不动点和拓扑能带的部分