Cours de Mathématiques - ASINSA-1

Introduction à la logique mathématique

Frédéric STURM

Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

Année académique 2008-2009

Préambule

Un résultat mathématique (ou une proposition) est un énoncé vrai. Suivant son importance, il est qualifié de :

- lemme : résultat d'une importance mineure,
- théorème : résultat d'une importance majeure.

Faire une démonstration (on dit aussi preuve), c'est réaliser un processus qui permet de passer de propositions supposées vraies prises comme

hypothèses

à une proposition appelée

conclusion

et ce en utilisant les règles strictes de logique.

Plan du cours

Plan du cours

Assertion

Définition 1.1

Une assertion est un enoncé mathématique auquel on peut attribuer la valeur de vérité

vrai (V) ou faux (F),

mais jamais les deux à la fois. C'est le principe du tiers-exclu.

Exemple 1.1

- L'énoncé « Paris est la capitale de la France » est vrai (V).
- L'énoncé « 24 est un multiple de 2 » est vrai (V).
- L'énoncé « 19 est un multiple de 2 » est faux (F).

Prédicat

Définition 1.2

Un prédicat est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées variables tel que quand on remplace chacune de ces variables par un élément donné d'un ensemble, on obtient une assertion.

Exemple 1.2

L'énoncé suivant :

$$P(n) = \text{« } n \text{ est un multiple de 2 »}$$

est un prédicat car il devient une assertion quand on donne une valeur à n.

- $P(10) =$ « 10 est un mult. de 2 » est une assertion vraie,
- $P(11) =$ « 11 est un mult. de 2 » est une assertion fausse.

Exemple 1.3

L'énoncé suivant :

$$P(x, A) = \text{« } x \in A \text{ »}$$

est un prédicat à deux variables.

- $P(1, \mathbb{N})$ est une assertion vraie,
- $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est une assertion fausse.

Remarque

Une assertion peut s'interprèter comme un prédicat sans variable, c'est-à-dire comme un prédicat toujours vrai ou toujours faux.

Plan du cours

Négation

Les connecteurs logiques permettent de créer de nouveaux prédicats (dits prédicats composés) à partir de prédicats P, Q, ...

Définition 2.1

Soit P un prédicat. La négation du prédicat P est le prédicat noté non(P) qui

- *est vrai lorsque P est faux,*
- *est faux lorsque P est vrai.*

On résume ceci dans la table de vérité :

P	non(P)
V	F
F	V

Exemple 2.1

- L'assertion $P =$ « 24 est un multiple de 2 » est une assertion vraie (V). L'assertion non(P) est définie par :

$$\text{non}(P) = \text{« 24 n'est pas un multiple de 2 »}.$$

C'est une assertion fausse (F).
- À partir du prédicat « $x \in A$ », on définit le prédicat

$$\text{non}\,(x \in A) = \text{« } x \notin A \text{ »}.$$

Par exemple, l'assertion « $1/2 \notin \mathbb{Z}$ » est vraie car l'assertion « $1/2 \in \mathbb{Z}$ » est fausse.

Conjonction

Définition 2.2

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat « P et Q », appelé conjonction de P et de Q, est un prédicat qui

- *est vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément,*
- *est faux dans tous les autres cas.*

On résume ceci dans la table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

On écrit parfois « $P \wedge Q$ » au lieu de « P et Q ».

Disjonction

Définition 2.3

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat « P ou Q », appelé disjonction de P et de Q, est un prédicat qui

- *est vrai lorsque l'un au moins des deux prédicats P et Q est vrai,*
- *est faux lorsque les deux sont faux.*

On résume ceci dans la table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On écrit parfois « $P \vee Q$ » au lieu de « P ou Q ».

Exemple 2.2

Considérons les deux assertions P et Q suivantes :

$$P = \text{« 10 est divisible par 2 »},$$

$$Q = \text{« 10 est divisible par 3 »}.$$

L'assertion P est vraie tandis que l'assertion Q est fausse. On en déduit les deux assertions suivantes :

P et Q = « 10 est divisible par 2 et 10 est divisible par 3 »,

P ou Q =« 10 est divisible par 2 ou 10 est divisible par 3 ».

L'assertion « P et Q » est une assertion fausse. En revanche, l'assertion « P ou Q » est une assertion vraie.

Implication

Définition 2.4

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat « $P \Longrightarrow Q$ » appelé implication de P vers Q est un prédicat qui

- *est faux lorsque P est vrai et Q faux,*
- *est vrai dans tous les autres cas.*

On résume ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque

- Ligne 1 : P est une condition suffisante pour Q.
- L'impl. $Q \Longrightarrow P$ s'appelle l'impl. réciproque de $P \Longrightarrow Q$.

Équivalence

Définition 2.5

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat « $P \Longleftrightarrow Q$ » appelé équivalence de P et de Q est un prédicat qui

- *est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux,*
- *est faux dans tous les autres cas.*

On résume ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque

- $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow R)$ se note $P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R$.
- $(P \Longleftrightarrow Q)$ et $(Q \Longleftrightarrow R)$ se note $P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R$.

Plan du cours

Équivalence logique

Définition 3.1

Soient R_1 et R_2 deux prédicats. Si

- *R_1 est vrai lorsque R_2 est vrai,*
- *R_1 est faux lorsque R_2 est faux,*

alors on dit que R_1 et R_2 ont la même table de vérité ou qu'ils sont logiquement équivalents, et on note $R_1 \equiv R_2$. Dans le cas contraire, on note $R_1 \not\equiv R_2$.

Exemple 3.1

- Soit P un prédicat. $\text{non}(\text{non}(P)) \equiv P$.
- Soient P, Q deux prédicats.

$$\begin{aligned} (P \text{ et } Q) &\equiv (Q \text{ et } P), \\ (P \text{ ou } Q) &\equiv (Q \text{ ou } P). \end{aligned}$$

Exemple 3.2

- Soient P, Q, R trois prédicats.

$$\begin{aligned} \big((P \text{ et } Q) \text{ et } R\big) &\equiv \big(P \text{ et } (Q \text{ et } R)\big), \\ \big((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R\big) &\equiv \big(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\big). \end{aligned}$$

- Soient P et Q deux prédicats. $(P \text{ et } (P \text{ ou } Q)) \equiv P$.
- Soient P et Q deux prédicats. Dans le cas

$$(P \Longleftrightarrow Q) \equiv (Q \Longleftrightarrow P).$$

- Soient P et Q deux prédicats.

$$\Big(\big(\text{non}(P) \Longrightarrow Q\big) \text{ et } \big(\text{non}(P) \Longrightarrow \text{non}(Q)\big)\Big) \equiv P.$$

Cette équivalence logique est à la base d'un raisonnement par l'absurde.

Tautologie

Considérons un prédicat P. Ce prédicat peut prendre la valeur (de vérité) Vrai ou Faux. Considérons le prédicat composé :

$$R = \text{« } P \text{ ou non}(P) \text{ »}.$$

Ce prédicat est remarquable. En effet, R est toujours vrai et ce indépendamment de P. Vérifions-le :

P	non (P)	P ou non (P)
V	F	V
F	V	V

Le prédicat composé R est alors qualifié de tautologie.

Définition 3.2

Un prédicat composé R qui est vrai quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui le composent, est appelé une tautologie.

Exemple 3.3

- Soient P, Q, R trois prédicats. Le prédicat composé suivant est une tautologie :

$$((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R).$$

- Soient P, Q, R trois prédicats. Le prédicat composé suivant est une tautologie :

$$((P \Longleftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longleftrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longleftrightarrow R).$$

- Soient P, Q deux prédicats. La tautologie suivante :

$$(P \text{ et } (P \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q$$

est à la base d'un raisonnement par hypothèse auxiliaire.

Prédicats incompatibles

Soit P un prédicat. Considérons le prédicat composé : « P et non (P) ». Ce prédicat est toujours faux. Vérifions-le :

P	non (P)	P et non (P)
V	F	F
F	V	F

On dit que les prédicats P et non(P) sont incompatibles.

Définition 3.3

On dit que deux prédicats composés sont incompatibles si leur conjonction est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui les composent.

Exemple 3.4

Les deux prédicats « $x \leqslant 1$ » et « $x \geqslant 2$ » sont incompatibles.

Propriétés incontournables

Proposition 3.1

- *Soient P, Q deux prédicats. On a les équivalences logiques suivante :*

$$\begin{aligned} \text{non}\,(P \text{ ou } Q) &\equiv (\text{non}(P) \text{ et non}(Q)), \\ \text{non}\,(P \text{ et } Q) &\equiv (\text{non}(P) \text{ ou non}(Q)). \end{aligned}$$

Ce sont les lois de Morgan pour les prédicats.

- *Soient P, Q, R trois prédicats. On a aussi les équivalences logiques suivantes :*

$$\begin{aligned} P \text{ ou } (Q \text{ et } R) &\equiv (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R), \\ P \text{ et } (Q \text{ ou } R) &\equiv (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R). \end{aligned}$$

Proposition 3.2

Soient P, Q deux prédicats. On a les équivalences logiques :

$$\begin{aligned} P \Longrightarrow Q &\equiv (\text{non}(P) \text{ ou } Q); \\ \text{non}(P \Longrightarrow Q) &\equiv (P \text{ et non}(Q)); \\ P \Longrightarrow Q &\equiv \text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P); \\ P \Longleftrightarrow Q &\equiv \Big((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P)\Big). \end{aligned}$$

Remarque

On interprète l'équivalence logique :

$$P \Longrightarrow Q \equiv \text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)$$

en disant que Q est une condition nécessaire pour P.

Exemple 3.5

- Soient A et B deux ensembles finis. On a

$$\begin{gathered} (A \subset B \Longrightarrow \text{card}\,(A) \leqslant \text{card}\,(B)) \\ \equiv \\ (\text{card}\,(A) > \text{card}\,(B) \Longrightarrow A \not\subset B). \end{gathered}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(n^2 \text{ pair} \Longrightarrow n \text{ pair}) \equiv (n \text{ impair} \Longrightarrow n^2 \text{ impair}).$$

Remarque

- L'implication « non(Q) $\Longrightarrow$ non(P) » s'appelle la contraposée de « $P \Longrightarrow Q$ ».
- Les prédicats composés « $P \Longrightarrow P$ » et « $P \Longleftrightarrow P$ » sont deux tautologies.

Plan du cours

Les quantificateurs simples

À partir d'un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble E, on construit de nouvelles assertions (dites assertions quantifiées) en utilisant les quantificateurs « quel que soit » et « il existe ».

Définition 4.1

Le quantificateur « quel que soit » noté $\forall$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\forall x \in E \;\; P(x)$ » qui est vraie si pour tous les éléments x appartenant à E, l'assertion $P(x)$ est vraie.

Exemple 4.1

- « $\forall x \in [-3, 1] \;\; x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ » est vraie.
- « $\forall n \in \mathbb{N} \;\; (n-3)n > 0$ » est fausse.
- « $\forall n \in \mathbb{N} \;\; (n^2 \text{ pair} \Longrightarrow n \text{ pair})$ » est vraie.

Définition 4.2

Le quantificateur « il existe » noté $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\exists x \in E \;\; P(x)$ » qui est vraie si on peut trouver (au moins) un élément x appartenant à E tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.

S'il en existe un et un seul, on pourra écrire

$$\exists\, ! \, x \in E \quad P(x)$$

et on dira qu'il existe un unique élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemple 4.2

- L'assertion quantifiée « $\exists x \in \mathbb{R} \;\; x^2 = 4$ » est vraie.
- L'assertion quantifiée « $\exists! x \in \mathbb{R}_+^* \;\; \ln x = 1$ » est vraie.

Remarque

Si « $\forall x \in E \; P(x)$ » est vraie alors « $\exists x \in E \;\; P(x)$ » est vraie.

ATTENTION On manipulera avec précaution les assertions de la forme « $\exists ! x \in E \; P(x)$ » pour lesquelles la notation « $\exists !$ » ne désigne pas un quantificateur (bien qu'elle en ait l'air !)

En effet, on se convainc facilement de l'équivalence logique suivante :

$$\big(\exists ! x \in E \; P(x)\big) \equiv \big(R_1 \text{ et } R_2\big)$$

où les deux assertions R_1 et R_2 sont définies comme suit :

$R_1 =$ « $\exists x \in E \;\; P(x)$ »

$R_2 =$ « $\forall x \in E \; \forall x' \in E \; \Big(\big(P(x) \text{ et } P(x') \big) \implies x = x' \Big)$ »

L'assertion R_1 traduit l'existence d'un élément x vérifiant $P(x)$ et l'assertion R_2 traduit l'unicité de cet élément.

Règles de négation

Soit $P(x)$ un prédicat sur E. De manière évidente, on a

$$\begin{aligned} \text{non}\big(\forall x \in E \;\; P(x)\big) &\equiv \exists x \in E \;\; \text{non}(P(x)), \\ \text{non}\big(\exists x \in E \;\; P(x)\big) &\equiv \forall x \in E \;\; \text{non}(P(x)). \end{aligned}$$

Exemple 4.3

Soit $P(x)$ un prédicat sur E. On a

$$\text{non}\Big(\forall x \in E \; \big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)\Big) \equiv \exists x \in E \; \Big(P(x) \text{ et non}\big(Q(x)\big)\Big).$$

On vérifie aussi que l'on a :

$$\text{non}\Big(\exists ! x \in E \;\; P(x)\Big) \equiv \text{non}(R_1 \text{ et } R_2) \equiv \text{non}(R_1) \text{ ou non}(R_2).$$

avec $R_1 =$ « existence » et $R_2 =$ « unicité ». Par exemple l'assertion quantifiée « $\exists ! x \in \mathbb{R} \;\; x^2 = 4$ » est fausse.

Les quantificateurs multiples

Définition 4.3

Soit $P(x, y)$ un prédicat à deux variables avec $x \in E$ et $y \in F$.

- *L'assertion quantifiée*

$$\forall x \in E \;\; \forall y \in F \;\; P(x, y)$$

est vraie lorsque tous les éléments x de E et tous les éléments y de F vérifient $P(x, y)$.

- *L'assertion quantifiée*

$$\exists x \in E \;\; \exists y \in F \;\; P(x, y)$$

est vraie lorsqu'il existe (au moins) un élément x appartenant à E et lorsqu'il existe (au moins) un élément y appartenant à F vérifiant $P(x, y)$.

Exemple 4.4

- Soit le prédicat à deux variables avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$P(z, n) = \text{« } 1 - z^{n+1} = (1 - z) \textstyle\sum_{k=0}^{n} z^k \text{ ».}$$

Alors, l'assertion « $\forall z \in \mathbb{C} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; P(z, n)$ » est vraie.

- L'assertion quantifiée

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 1 + nx \leqslant (1 + x)^n$$

est une assertion vraie (V).

- L'assertion quantifiée

$$\exists x \in \mathbb{R} \;\; \exists y \in \mathbb{R} \;\; x + y = 5$$

est une assertion vraie (V).

Règles d'utilisation

On peut combiner des quantificateurs de natures différentes. Par exemple, l'énoncé « tout nombre complexe possède au moins une racine carrée » s'écrit sous la forme :

$$\forall z \in \mathbb{C} \;\; \exists u \in \mathbb{C} \;\; u^2 = z.$$

Mais, **attention**, il faut respecter les règles suivantes :

- On peut permuter deux quantificateurs identiques :

$$\big(\forall x \in E \;\; \forall y \in F \;\; P(x, y)\big) \equiv \big(\forall y \in F \;\; \forall x \in E \;\; P(x, y)\big).$$

$$\big(\exists x \in E \;\; \exists y \in F \;\; P(x, y)\big) \equiv \big(\exists y \in F \;\; \exists x \in E \;\; P(x, y)\big).$$

- Ne pas permuter deux quantificateurs différents :

$$\big(\exists y \in F \;\; \forall x \in E \;\; P(x, y)\big) \not\equiv \big(\forall x \in E \;\; \exists y \in F \;\; P(x, y)\big).$$

Exemple 4.5

- L'assertion quantifiée « $\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \exists ! x \in \mathbb{R}_+^* \;\; \ln x = \alpha$ » est vraie.
- L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists y \in \mathbb{R} \;\; x + y = 0$ » est vraie. En revanche, l'assertion « $\exists y \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; x + y = 0$ » est fausse.
- L'assertion quantifiée

$$\text{« } \forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists y \in \mathbb{R} \;\; x \leqslant y \text{ »}$$

est une assertion vraie puisque si $x \in \mathbb{R}$ alors, en prenant $y = x + 1$ on a : $x \leqslant x + 1$. En revanche l'assertion

$$\text{« } \exists y \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; x \leqslant y \text{ »}$$

est fausse puisque l'ensemble des réels n'est pas borné.

Plan du cours

Raisonnement par hypothèse auxiliaire

- But : montrer qu'un énoncé Q est vrai.
- Principe : il s'appuie sur la tautologie :

$$\big(P \text{ et } (P \implies Q)\big) \implies Q.$$

Ainsi, si l'énoncé P est vrai et si l'implication « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie alors l'énoncé Q est nécessairement vrai.

- Méthodologie : on montre que l'énoncé P est vrai. L'énoncé Q sera alors vrai puisque « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie.

Exemple 5.1

Considérons les deux ensembles $A = \{2, -3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$. Montrons que : $A = B$.

Raisonnement par l'absurde

- But : montrer qu'un énoncé P est vrai.
- Principe : il s'appuie sur l'équivalence logique :

$$\Big(\big(\text{non}(P) \Longrightarrow Q\big) \text{ et } \big(\text{non}(P) \Longrightarrow \text{non}(Q)\big)\Big) \equiv P.$$

Un raisonnement par l'absurde consiste à montrer que $\text{non}(P)$ entraîne un énoncé Q et son contraire $\text{non}(Q)$.

- Méthodologie : on suppose l'énoncé $\text{non}(P)$ vrai et on cherche alors Q qui, sous cette hypothèse, serait à la fois vrai et faux. On dit que l'on a obtenu une contradiction ou que l'hypothèse est contradictoire.

Exemple 5.2

Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Raisonnement par contraposée

- But : montrer des résultats faisant apparaître une implication « $P \Longrightarrow Q$ ».
- Principe : il s'appuie sur l'équivalence logique :

$$\big(P \implies Q\big) \equiv \big(\mathrm{non}(Q) \implies \mathrm{non}(P)\big).$$

  Ainsi, au lieu de montrer l'implication « $P \Longrightarrow Q$ », on montre sa contraposée $\mathrm{non}(Q) \implies \mathrm{non}(P)$.
- Méthodologie : on fait l'hypothèse que $\mathrm{non}(Q)$ est vrai et on montre que cela entraîne que $\mathrm{non}(P)$ est vrai.

Exemple 5.3

Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n^2 \text{ impair} \implies n \text{ impair}\big).$$

Raisonnement par contre-exemple

- But : il sert à montrer qu'un énoncé de la forme « $\forall x \in E \;\; P(x)$ » est un énoncé faux.
- Principe : on montre que sa négation est vraie. Rappel :

$$\mathrm{non}\big(\forall x \in E \;\; P(x)\big) \equiv \exists x \in E \;\; \mathrm{non}\big(P(x)\big).$$

- Méthodologie : on cherche alors à exhiber un élément $x \in E$ qui ne vérifie pas $P(x)$.

Exemple 5.4

Montrons que « $\forall x \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 \; \big(|x| < \varepsilon \implies x = 0\big)$ » est faux.

Attention à ne pas confondre avec l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \Big(\big(\forall \varepsilon > 0 \;\; |x| < \varepsilon\big) \Longrightarrow x = 0\Big)$$

qui est utilisée pour montrer qu'un nombre réel est nul.

Raisonnement par récurrence

- But : montrer qu'un énoncé de la forme

  « Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0 \quad P(n)$ »

  est un énoncé vrai. Par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 1 + nx \leqslant (1+x)^n.$$

- Principe : Si la propriété $P(n_0)$ est vraie et si l'implication « $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ » est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

- Méthodologie : elle s'effectue ainsi en deux étapes successives.
  1. Étape d'initialisation : on commence par vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
  2. Étape d'hérédité : on montre ensuite que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

Exemple 5.5

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Attention aux raisonnements hâtifs !

Suivez attentivement chacune des étapes suivantes :

- Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$x^2 = x - 1. \tag{1}$$

- Puisque la valeur nulle ne vérifie pas cette équation, divisons par x membre à membre. Après réarrangement des termes, nous obtenons

$$-\frac{1}{x} = x - 1. \tag{2}$$

- En regroupant les égalités (1) et (2), nous en déduisons

$$x^2 = -\frac{1}{x}. \tag{3}$$

- Finalement, puisque x est non nul, nous multiplions par x l'égalité (3) pour obtenir l'équation

$$x^3 = -1, \tag{4}$$

  dont -1 est de toute évidence une solution.
- Injectons cette solution dans l'égalité (1). Nous obtenons au final que

$$1 = -2.$$

Donc, fièrement, on écrit :

Théorème 5.1 (du Candide)

« $1 = -2$ »

Bien évidemmment, nous avons commis une erreur dans notre raisonnement. Mais où ?