$\overline{x} = \{y \in E, x\mathscr{R}y\}$

$E/\mathscr{R}$

Symétrique

Transitive

Réflexive

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

TD 4 : Relations

Exercice 1. On considère un ensemble $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et les relations suivantes sur E

$$\mathscr{R} = \{(e_1,e_2),(e_2,e_2),(e_4,e_2),(e_1,e_4)\} \text{ et } \mathscr{S} = \{(e_1,e_3),(e_3,e_2),(e_3,e_4)\} \tag{1}$$

1. Représenter $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ par des graphes orientés puis par des matrices booléennes $M_{\mathscr{R}}$ et $M_{\mathscr{S}}$.
2. En déduire les matrices des relations $\mathscr{R} \circ \mathscr{S}$ et $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$.
3. Vérifier à l'aide de graphes orientés la cohérence du calcul précédent.

Exercice 2. Soit X un ensemble fini ($|X| = n$).

1. Combien de relations symétriques peut-on construire sur X ?
2. Combien de relations réflexives peut-on construire sur X ?
3. Combien de relations symétriques non réflexives peut-on construire sur X ?
4. Combien de relations réflexives non symétriques peut-on construire sur X ?

Exercice 3. On considère $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient pour la relation $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow 7|x-y$.

1. Écrire la table d'addition est de multiplication dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
2. Quelles classes jouent le rôle de l'élément neutre pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$?
3. Montrer que les éléments de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ sont inversibles. Est-ce aussi vrai pour $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 4.

1. *Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$.* On suppose connaître $\mathbb{N}$, l'addition sur $\mathbb{N}$ et ses propriétés.
   (a) Sur $\mathbb{N}^2$ on définit la relation $\sim$ par :
   $$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$
   Montrer que $\sim$ est d'équivalence. Déterminer pour un couple (a,b) de $\mathbb{N}^2$ sa classe d'équivalence, notée $\overline{(a,b)}$.
   (b) Notations : On posera $\overline{(a,0)} = +a$ et $\overline{(0,b)} = -b$; on note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.En déduire qu'on peut considérer $\mathbb{N}$ comme une partie de $\mathbb{Z}$.
   (c) Opérations dans $\mathbb{Z}$
      i. Somme. On appelle somme de deux éléments de $\mathbb{Z}$, l'élément de $\mathbb{Z}$ défini comme suit :
      $$\overline{(x_1,y_1)} + \overline{(x_2,y_2)} = \overline{(x_1+x_2, y_1+y_2)}$$
      Vérifier que cette définition a un sens, cest-à-dire ne dépend pas du représentant choisi dans une classe. Quelles sont les propriétés de + dans $\mathbb{Z}$?
      ii. Produit. On appelle produit de deux éléments de $\mathbb{Z}$, l'élément de $\mathbb{Z}$ défini comme suit :
      $$\overline{(x_1,y_1)} \times \overline{(x_2,y_2)} = \overline{(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)}$$
      Vérifier que cette définition a un sens, cest-à-dire ne dépend pas du représentant choisi dans une classe. Quelles sont les propriétés de $\times$ dans $\mathbb{Z}$?
2. *Construction de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$.* On suppose connaître $\mathbb{Z}$, l'addition, le produit sur $\mathbb{Z}$ et leurs propriétés.
   (a) Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ on définit la relation $\sim$ par :
   $$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1y_2 = y_1x_2$$
   Montrer que $\sim$ est d'équivalence. Déterminer pour un couple (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,sa classe d'équivalence, notée $\overline{(a,b)}$.
   (b) Notations : On posera $\overline{(a,b)} = \frac{a}{b}$; on note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$.En déduire qu'on peut considérer $\mathbb{Z}$ comme une partie de $\mathbb{Q}$.
   (c) Opérations dans $\mathbb{Q}$

i. Produit. On appelle produit de deux éléments de $\mathbb{Q}$, l'élément de $\mathbb{Q}$ défini comme suit :

$$\overline{(x_1, y_1)} \times \overline{(x_2, y_2)} = \overline{(x_1 x_2, y_1 y_2)}$$

Vérifier que cette définition a un sens, cest-à-dire ne dépend pas du représentant choisi dans une classe. Quelles sont les propriétés de $\times$ dans $\mathbb{Q}$?

ii. Somme. On appelle produit de deux éléments de $\mathbb{Q}$, l'élément de $\mathbb{Q}$ défini comme suit :

$$\overline{(x_1, y_1)} + \overline{(x_2, y_2)} = \overline{(x_1 y_2 + y_1 x_2, y_1 y_2)}$$

Vérifier que cette définition a un sens, cest-à-dire ne dépend pas du représentant choisi dans une classe. Quelles sont les propriétés de $+$ dans $\mathbb{Q}$?

iii. Que dire de $(\mathbb{Q}, +, \times)$?