Diagramme de Hasse

Borne sup

$f : \mathscr{B}^n \longrightarrow \mathscr{B}$

$x \oplus y = \overline{x}.y + x.\overline{y}$

$A \cup A = A$

$\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$

TD 5 : Treillis et algèbre de Boole

NB : Pour tous les treillis considérés, nous utiliserons le symbole $\vee$ $[\text{resp}^t \wedge]$ pour désigner la borne supérieure $[\text{resp}^t\text{inférieure}]$ d'une paire du treillis étudié. Lorsque nous nous restreignons aux algèbres de Boole, ces symboles seront respectivement remplacés par + et .

Exercice 1. *Treillis fondamentaux.*

1. Montrer que $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est un treillis.
2. Montrer que $(\mathbb{N}^*, /)$ est un treillis.
3. Montrer que $\left(\mathscr{B}^2, \prec\right)$, puis $\left(\mathscr{B}^k, \prec\right)$pour tout k de $\mathbb{N}^*$est un treillis : dans les deux cas $\prec$ désigne l'ordre produit.

   Remarque 1. Ce dernier exemple est spécialement important en termes théoriques et pratiques pour l'informaticien. On peut démontrer en effet que toute algèbre de Boole finie (autrement dit "le paradis de l'informaticien") est isomorphe à une algèbre de la forme $\left(\mathscr{B}^k, \prec\right)$, où k est le nombre des atomes de l'algèbre considérée. Ainsi, lors d'une étude d'algèbre de Boole finie quelconque, l'informaticien transfère le problème par codage dans l'algèbre $\left(\mathscr{B}^k, \prec\right)$, le résout dans ce cadre pour lequel il s'est créé des outils logiciels, et retourne dans l'espace initial par décodage. Le concept de modèle prend ici toute sa force grâce au puissant théorème de structure évoqué.

Exercice 2. Soit E un ensemble et $[n]^E$ l'ensemble des fonctions $f : E \to \{1, 2, \ldots, n\}$. On muni $[n]^E$ de la relation $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in E$.

1. Vérifier que $\leq$ est bien une relation d'ordre.
2. Montrer que $[n]^E$ est un treillis distributif. Est-il complémenté ?

Exercice 3. *Un exemple plus savant !*

On considère un groupe $(G, *)$ commutatif. On note $\mathscr{G}$ l'ensemble de ses sous-groupes.

1. *Définition d'un ordre sur* $\mathscr{G}$
   (a) On définit sur $\mathscr{G}$ la relation $\prec$ comme suit :
   $$\forall (G_1, G_2) \in \mathscr{G}^2 \quad [G_1 \prec G_2 \Leftrightarrow (G_1 \text{ est un sous-groupe de } G_2)]$$
   (b) Montrer que $\prec$ est un ordre sur $\mathscr{G}$.
2. On considère une paire d'éléments de $\mathscr{G}$, notée $\mathscr{A} = \{G_1, G_2\}$.
   (a) *Recherche de borne inférieure*
   Proposer une borne inférieure b_{inf} pour $\mathscr{A}$ et vérifier qu'elle convient.
   (b) *Recherche de borne supérieure*
   On considère la partie de G, notée $G_1 * G_2$, définie par :
   $$G_1 * G_2 = \{g = g_1 g_2, g_1 \in G_1 \text{ et } g_2 \in G_2\}.$$
   – Montrer que $G_1 * G_2$ est un sous-groupe de G.
   – Montrer que $G_1 * G_2$ est borne supérieure de $\mathscr{A}$.
   – Conclusion ?

Exercice 4. Montrer que les lois de Morgan sont vérifiées dans une algèbre de Boole. C'est-à-dire montrer que

$$(x + y)' = x'.y' \text{ et } (x.y)' = x' + y' \tag{1}$$

Exercice 5. *Faces couvertes par une fonction monôme (interprétation géométrique des fonctions monômes).*

On pose $n = 3$. Déterminer pour tout i de $\{1, 2, 3\}$ la face F_i de $\mathscr{B}^3$ couverte par la fonction f_i ,où cette fonction est définie par :

$$f_i : \begin{array}{ccc} \mathscr{B}^3 & \to & \mathscr{B} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & f_i[(x_1, x_2, x_3)] \end{array}.$$

– Cas 1 : $f_1[(x_1, x_2, x_3)] = x_1 \; \overline{x_2} \; x_3$.
– Cas 2 : $f_2[(x_1, x_2, x_3)] = x_1 \; \overline{x_3}$.
– Cas 3 : $f_3[(x_1, x_2, x_3)] = x_3$.
– Interpréter les résultats obtenus en mettant en évidence le lien entre la dimension de la face F_i couverte et le degré du monôme considéré.

Exercice 6. *Expression simplifiée de l'ordre $f \leq g$.*

Soit f et g deux fonctions booléennes de n variables, c'est-à-dire, de $\mathscr{B}n$ dans $\mathscr{B}$.

1. Montrer qu'on a l'équivalence suivante :

$$\left[\forall x \in \mathscr{B}^n \quad f(x) \leq g(x)\right] \Leftrightarrow \left[\forall x \in \mathscr{B}^n \quad (f(x)=1) \Rightarrow (g(x)=1)\right].$$

2. Interpréter l'équivalence proposée. Quel est son intérêt en termes de coût de preuve ?

Exercice 7. *Ordre sur des fonctions monômes*

1. Soit m_1 et m_2 deux monômes de de $\mathscr{B}^n$ dans $\mathscr{B}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$(m_1 \leq m_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Toute variable présente dans } m_2 \\ \text{figure dans } m_1 \text{ de façon identique} \\ \text{en termes de complément ou non.} \end{array} \right\}$$

2. En déduire que, si deux fonctions monômes m_1 et m_2 vérifient $m_1 \leq m_2$, ceci se traduit par le fait que "l'écriture de m_2 divise celle de m_1".
3. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{B}^3 & \to & \mathscr{B} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & f[(x_1,x_2,x_3)] = \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2} + x_1x_3. \end{array}$$

   (a) Grâce à une représentation graphique, déterminer tous les monômes inférieurs à f.
   (b) Déterminer parmi eux, ceux qui "doivent être" des monômes premiers de f, en un sens géométrique à préciser.
   (c) Prouver que les candidats monômes premiers de f le sont effectivement.
   (d) Montrer dans ce cas particulier que f est la somme de ses monômes premiers.

Exercice 8. *Monômes premiers d'une fonction booléenne (variante !)*

Soit $\mathscr{B} = \{0,1\}$. On note x' le complément de x. On considère la fonction f de trois variables booléennes définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathscr{B}^3 \quad f(x,y,z) = x'z' + x'yz + xy'z' + xyz + x'y'z.$$

1. *Interprétation géométrique*
   Fournir une représentation dans l'espace qui fasse apparaître les points "couverts" par f, c'est-à-dire ceux où elle prend la valeur 1.
2. *Monômes premiers de f*
   Déterminer l'ensemble des monômes premiers de f.
   Nb : On en fournira la liste puis on démontrera, pour chaque degré concerné, que l'un de ces monômes est premier.
3. *Somme des monômes premiers d'une fonction*
   Montrer directement, sans utiliser le théorème de cours, que f est égale à la somme de ses monômes premiers. L'écriture est-elle optimale en termes de simplification ? Pourquoi ?

Exercice 9. *Simplification de fonctions booléennes*

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous :
- déterminer l'ensemble des monômes premiers, en utilisant la méthode indiquée,
- et trouver une couverture irredondante par des monômes premiers.

utiliser les méthodes indiquées pour simplifier leur expression.

1. Tableau de Karnaugh

$$f(t,u,x,y,z) = tu'x'y' + u'xyz' + uxy'z + ut'y' + xyz + ux'z + uzy;$$

2. Quine et McCluskey

$$f(x,y,z) = xyz' + x'y'z' + x'y'z + x'y'z;$$

3. Consensus

$$f(x,y,z) = xy + x'y'z + xy'z + x'yz + xz.$$