$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$1+4+9+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

TD 1 : Récurrence

Exercice 1. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

1.1 S_n définie par $S_n = 1+2+\ldots+n$ peut s'écrire : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.2 T_n définie par $T_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2$ peut s'écrire : $T_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.3 $U_n = n^3 - n$ est divisible par 6.

1.4 Le nombre entier $3^{2n}+4^{n+1}$ est divisible par 5.

1.5 Tenter de proposer une version générale du résultat de 1.1 et 1.2.

Exercice 2. *Sommme des premiers termes d'une suite géométrique*

2.1 Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{i=0}^{n} 6^i = \frac{6^{n+1}-1}{5}.$$

2.2 Quel est le défaut d'une telle preuve ?

2.3 Proposer une version de preuve dérécursivée de 2.1.

Exercice 3. *Utilisation de récurrence en algorithmique*

3.1 *Calcul d'une puissance*

Algorithme 1. Calcul de a^n

```
function puiss(a,n)
A := a ;
N := n ;
R := 1
while N > 0 do
    if N pair then
        A := A × A
        N := N/2
    else
        R := R * A
        N := N − 1
    end if
end while
 return R
```

a) Montrer que l'algorithme est convergent.

b) On note A_k, N_k et R_k les valeurs générées par la $k$ème itération de la boucle *tant que* (les valeurs avant l'entrée en boucle sont notées A_0,N_0 et R_0).
On définit l'invariant de boucle : $\mathscr{P}(k): a^n = A_k^{N_k} \times R_k$.

b1) Montrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

b2) Montrer que $\mathscr{P}(k-1) \Rightarrow \mathscr{P}(k)$.

b3) En déduire que l'algorithme fournit le résultat voulu.

c) Écrire une version récurssive de l'algorithme.

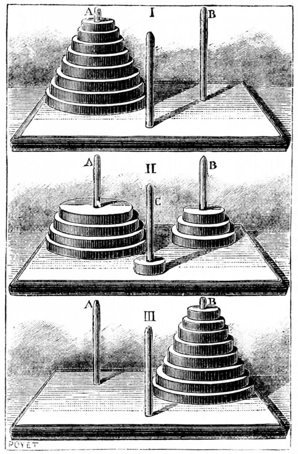
3.2 *Algorithme des tours de Hanoï*

On rappelle la règle de construction des tours de Hanoï selon le jeu inventé par le mathématicien français Édouard Lucas dans les années 1870.

a) Fournir une version récursive de l'algorithme $toursdeHanoi(A,B,C,n)$ qui transfère une tour de hauteur n ($n \in \mathbb{N}^*$) de l'axe A vers l'axe C en transitant par l'axe B.

b) Démontrer que l'algorithme est convergent pour tout n.

c) Déterminer le nombre d'opérations élémentaires (transfert d'un disque) mis en oeuvre dans $toursdeHanoi(A,B,C,n)$.



Exercice 4. Multiplication d'entiers...(d'après médian) L'algorithme 2 qui suit est appelé algorithme de multiplication *à la russe* et est une variante d'une technique connue depuis l'Egypte antique [1]. Les données d'entrée x et y sont des entiers naturels.

Algorithme 2. Function $mult(x,y)$

$r := 0$
while $x \neq 0$ **do**
  if x est impair **then**
    $r := r + y$
    $x := x - 1$
  end if
  $x := x/2$
  $y := y \times 2$
end while
Return r

1. Appliquer l'algorithme et effectuer $mult(132,45)$. Vous ferez apparaître vos résultats dans une table à trois colonnes, selon l'exemple suivant, où chaque ligne représente les valeurs x, y et r après chaque passage en boucle. La première ligne étant formée des valeurs initiales.

	x	y	r
Avant entrée en boucle	132	45	0
1er passage en boucle	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮

2. Justifier que l'algorithme est convergent.
3. Que calcule cet algorithme ?
4. On note $x_0 = x$, $y_0 = y$ et $r_0 = 0$, puis x_n, y_n et r_n les valeurs de x, y et r après le n-ème passage en boucle.
   (a) Montrer que la propriété $\mathscr{P}(n) : x_n y_n + r_n = xy$ est un invariant de boucle.
   (b) Prouver que l'algorithme réalise bien ce pour quoi il a été conçu.
5. Quelles sont les deux opérations arithmétiques élémentaires utilisées par l'algorithme ? Quel peut-être l'intérêt si on utilise cet algorithme avec une machine calculant en binaire (par exemple un ordinateur)?
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on rappelle que $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$, en déduire que $n \leq \log_2(x) < n+1$. Comment peut-on évaluer le nombre de passages en boucle nécessaires pour effectuer $mul(x,y)$?
7. Effectuer $mult(45,132)$ et comparer avec la question **1**. Est-ce cohérant avec la question **6** ?
8. Complément : donner une version récursive de l'agorithme 2.

1. On peut trouver explicitement cette technique de calcul sur le papyrus de Rhind datant du XVI$^{\text{ème}}$ siècle avant notre ère. Ce payrus regroupe 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre de géométrie et d'arpentage vieux de 4000 ans. Cette méthode de calcul est un algorithme ce qui permet de replacer l'informatique dans un contexte historique non limité au XX$^{\text{ème}}$ et XXI$^{\text{ème}}$ siècles.