TD 2 : Induction

Exercice 1. *Ensemble défini par induction*

On définit l'ensemble A par le le schéma d'induction $\langle B,R\rangle$ suivant ; on notera souvent $A = \langle B,R\rangle$.

Base B : $0 \in A$

Règle R : $\forall x \in \mathbb{N} \quad (x \in A \Rightarrow x+3 \in A)$

1.1 Démontrer que l'ensemble A construit par le shéma proposé est égal à la partie A' de $\mathbb{N}$ des naturels multiples de 3.

1.2 En déduire que le schéma proposé est un schéma consistant et complet pour la construction des naturels multiples de 3.

Exercice 2. *Invention d'un schéma d'induction pour un ensemble connu*

Fournir un schéma d'induction des entiers naturels impairs. Prouver sa consistance et sa complétude.

Exercice 3. *Etude d'un schéma d'induction (extrait du médian A04)*

On considère $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Soit l'ensemble $\mathscr{M}$ défini par le schéma d'induction $(\mathscr{S})$ suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Base :} & (0,0) \in \mathscr{M} \\ \text{Règles :} & \begin{array}{lll} (R_1): & \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 & [(m,n)\in\mathscr{M}] \Rightarrow [(m+1,n)\in\mathscr{M}] \\ (R_2): & \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 & [(m,n)\in\mathscr{M}] \Rightarrow [(m,n+1)\in\mathscr{M}] \end{array} \end{array}.$$

3.1 Fournir un arbre de dérivation de $(1,1)$ puis de $(2,3)$. Les arbres donnés sont-ils uniques ? Le schéma est-il ambigü ?

3.2 Comparer $\mathscr{M}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Que peut-on en déduire concernant le caractère consistant et complet du schéma $(\mathscr{S})$, comme générateur de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$?

Exercice 4. *Etude d'un schéma d'induction donné et définition de fonction par induction (extrait du médian A05)*

On considère la partie $\mathscr{A}$ de $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mathscr{A} = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \quad / \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \quad x = 2^a 3^b 5^c \right\}.$$

4.1 *Etude d'un schéma d'induction*

On définit l'ensemble $\mathscr{M}$ par le schéma $(\mathscr{S})$ suivant :

- Base : $1 \in \mathscr{M}$.
- Règles :
  - (R_2) : $\quad \forall m \in \mathbb{N} \quad [(m \in \mathscr{M}) \Rightarrow (2m \in \mathscr{M})]$;
  - (R_3) : $\quad \forall m \in \mathbb{N} \quad [(m \in \mathscr{M}) \Rightarrow (3m \in \mathscr{M})]$;
  - (R_5) : $\quad \forall m \in \mathbb{N} \quad [(m \in \mathscr{M}) \Rightarrow (5m \in \mathscr{M})]$.

a) Fournir un arbre de dérivation de $m_1 = 18$ et de $m_2 = 60$.

b) Montrer que $\mathscr{M} \subset \mathscr{A}$. Que dire du schéma $(\mathscr{S})$?

c) Montrer que $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$. Que dire du schéma $(\mathscr{S})$?

4.2 *Définition de fonctions par induction*

Sur $\mathscr{M}$, donc $\mathscr{A}$, on définit v_2, v_3, v_5 par :

- $v_2(1) = 0$; $\quad v_3(1) = 0$; $\quad v_5(1) = 0$.
- Si m est élément de $\mathscr{M}$ alors

$$\begin{aligned} v_2(2m) &= v_2(m)+1; \quad v_3(2m) = v_3(m); \quad v_5(2m) = v_5(m); \\ v_2(3m) &= v_2(m); \quad v_3(3m) = v_3(m)+1; \quad v_5(3m) = v_5(m); \\ v_2(5m) &= v_2(m); \quad v_3(5m) = v_3(m); \quad v_5(5m) = v_5(m)+1. \end{aligned}$$

a) Utiliser la question 4.1 a) pour fournir, pour tout i de $\{2,3,5\}$ et tout j de $\{1,2\}$, les valeurs de $v_i(m_j)$. Que représentent les v_i ?

b) Pour un m donné de $\mathscr{M}$, pour tout i de $\{2,3,5\}$, $v_i(m)$ dépend-il de l'arbre de dérivation qui a produit m ? Fournir le plan d'une preuve complète. Conséquence ?

c) On définit sur $\mathscr{M}$ la relation binaire interne $|$ par :

$$[m \mid m'] \Leftrightarrow [\forall i \in \{2,3,5\} \quad v_i(m) \le v_i(m')].$$

- Montrer que la relation $|$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Comment se traduit dans le langage mathématique ordinaire $m \mid m'$?
- Quelles sont les primitives nécessaires pour exprimer $m \mid m'$? A-t-on besoin de connaître le quotient ? Commenter brièvement.

Base $:0 \in \mathscr{M}$; **Règles** $:\forall x \in \mathscr{M} \Rightarrow ((x+1) \in \mathscr{M}) \wedge ((x-1) \in \mathscr{M})$;

$\mathscr{M} \subset \mathbb{Z}$ **(consistence)** $\quad \mathbb{Z} \subset \mathscr{M}$ **(complétude)**

d) *Complément*

Comment définir sur $\mathscr{M}^2$ le plus simplement possible, en utilisant les outils précédents, les fonctions $pgcd$ et $ppcm$? Quelles sont les seules primitives nécessaires ?

Exercice 5. *Etude d'une fonction définie par induction*

On considère la relation binaire $\mathscr{G}$ sur $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ définie comme suit :

Base : $((0,0),1) \in \mathscr{G}$

Règles :
(R_1) : $[\ ((m,n),y) \in \mathscr{G}] \Rightarrow [((m+1,n),Y) \in \mathscr{G}$ et $Y = 2y]$.
(R_2) : $[\ ((m,n),y) \in \mathscr{G}] \Rightarrow [((m,n+1),Y) \in \mathscr{G}$ et $Y = 3y]$.

Montrer par induction que $\mathscr{G}$ est une fonction g et que pour tout (m,n) de $\mathbb{N}^2$: $g[(m,n)] = 2^m 3^n$.

Exercice 6. *Invention d'un schéma d'induction*

Sur l'alphabet $A=\{a,b,c\}$, on définit l'ensemble L des mots non vides tels que deux lettres consécutives, à tout endroit du mot, sont distinctes.

7.1 Fournir un schéma d'induction pour L.

7.2 Prouver sa consistance et sa complétude.

Exercice 7. *Langage des parenthèses*

On définit par un schéma d'induction le langage des parenthèses. Il s'agit d'une partie des mots sur l'alphabet $\{a,b\}$, où a désigne la parenthèse ouvrante et b désigne la parenthèse fermante.

On donne donc le schéma $\langle B,R\rangle$ comme suit.

– Base : $B=\{\varepsilon\}$, où ε désigne le mot vide.
– Règle : $R=\{R_1\}$ avec R_1 donnée comme suit : si u et v sont des mots de $\langle B,R\rangle$,alors $uavb$ est un mot de $\langle B,R\rangle$.

Prouver par nduction structurelle les propriétés suivantes.

8.1 Si $x \in \langle B,R\rangle$, les valuations en a et en b sont égales ; on notera $|x|_a = |x|_b$.

8.2 Si $x \in \langle B,R\rangle$ on a $\left(x = \alpha\beta \Rightarrow |\alpha|_a \geq |\alpha|_b\right)$

8.3 Si $|x|_a = |x|_b$ et $\left(x = \alpha\beta \Rightarrow |\alpha|_a \geq |\alpha|_b\right)$ alors $x \in \langle B,R\rangle$.

Exercice 8. *Schéma inductif, longueur sur une partie discrète de $\mathbb{R}^2$ (médian A14)*

On considère $\mathbb{R}^2$ et a un nombre réel non nul et non égal à 1. Soit $(\mathscr{S})$ le schéma inductif suivant :

Base : $(1,1) \in \mathscr{M}_a$
Règles : (R1) : $(m,n) \in \mathscr{M} \Rightarrow (a \times m, n) \in \mathscr{M}_a$
(R2) : $(m,n) \in \mathscr{M} \Rightarrow (m, a \times n) \in \mathscr{M}_a$

On définit également l'application d sur $\mathscr{M}_a$ de la manière suivante :

$$d(1,1) = 0$$
$$d(a \times m, n) = |a-1|m + d(m,n)$$
$$d(m, b \times n) = |a-1|n + d(m,n)$$

A) Dans toute cette partie on considère $a = 2$.

A1) Déterminer un arbre de dérivation du couple $(8,8)$. Cet arbre est-il unique ?

A2) Représenter graphiquement l'ensemble des couples $(m,n) \in \mathscr{M}_2$ pour $m,n \leq 8$.

A3) On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathscr{A} = \{(2^k, 2^s), k, s \in \mathbb{N}^*\}$.

i. Montrer que $\mathscr{M}_2 \subset \mathscr{A}$, que peut-on dire de $(\mathscr{S})$?

ii. Montrer que $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_2$, que peut-on dire de $((\mathscr{S})$?

A4) Calculer $d(8,4)$.

A5) A priori la fonction d est-elle bien définie ?

A6) Montrer par induction que pour tout $(2^k, 2^s) \in \mathscr{M}$ on a $d(2^k, 2^s) = (2^k - 1) + (2^s - 1)$.

A7) On appelle longueur d'un arbre de dérivation de point terminal $(2^k, 2^s)$ et on note $l(2^k, 2^s)$ la somme des distances euclidiennes parcourues en suivant l'arbre de dérivation pour atteindre $(2^k, 2^s)$ à partir de $(1,1)$.

Base $:0 \in \mathscr{M}$; **Règles** $:\forall x \in \mathscr{M} \Rightarrow ((x+1) \in \mathscr{M}) \wedge ((x-1) \in \mathscr{M})$;

$\mathscr{M} \subset \mathbb{Z}$ **(consistence)** $\mathbb{Z} \subset \mathscr{M}$ **(complétude)**

Base $:0 \in \mathscr{M}$; **Règles** $:\forall x \in \mathscr{M} \Rightarrow ((x+1) \in \mathscr{M}) \wedge ((x-1) \in \mathscr{M})$;

$\mathscr{M} \subset \mathbb{Z}$ **(consistence)** $\mathbb{Z} \subset \mathscr{M}$ **(complétude)**

i. Calculer $l(8,4)$.

ii. Montrer que pour $k, s \in \mathbb{N}^*$, on a $l(2^k, 2^s) = (\sum_{i=1}^{k-1} 2^i) + (\sum_{j=1}^{s-1} 2^j)$.

iii. En déduire que $l = d$.

iv. Conclure que l'on peut construire une suite d'arbres dont les longueurs tendent vers $+\infty$.

B) On considère maintenant le cas $a = \frac{1}{2}$.

B1) Donner une représentation graphique de $\mathscr{M}_{\frac{1}{2}}$ en représentant les couples (m,n) tels que $m,n \geq \frac{1}{8}$.

B2) Donner une définition non inductive de $\mathscr{M}_{\frac{1}{2}}$.

B3) Donner une expression de la longueur des arbres de dérivation de $\mathscr{M}_{\frac{1}{2}}$.

B4) En déduire que tous les arbres de dérivation de $\mathscr{M}_{\frac{1}{2}}$ sont de longueurs inférieures ou égales à 2.

C) *Compléments*. On considère $\phi : \mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_{\frac{1}{2}}$ définie par $\phi(x,y) = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$. Montrer que ϕ est une bijection.

NB : il est intéressant de remarquer ici qu'en tant qu'ensemble $\mathscr{M}_2$ et $\mathscr{M}_{\frac{1}{2}}$ sont identiques puisque bijectifs. Pourtant dans le premier il n'y pas de limite sur les longueurs possibles des arbres de dérivation alors que pour le second tous les arbres sont de longueurs finies.

Exercice 9. Le système formel MIU (d'après médian)

Dans cet exercice on considère l'alphabet $A = \{M, I, U\}$. On note A^* l'ensemble de tous les mots possibles sur l'alphabet A^*. Le sous-ensemble MIU (on dit aussi le langage MIU [1]) de A^* est défini par induction de la manière suivante :

MIU = $\langle \mathscr{B}, \mathscr{R} \rangle$ avec

- $\mathscr{B}$: $MI \in \mathscr{B}$.
- $\mathscr{R}$:
  - R_1 : $xI \in$ MIU $\Rightarrow xIU \in$ MIU (x désigne une chaîne de caractères)
  - R_2 : $Mx \in$ MIU $\Rightarrow Mxx \in$ MIU (x désigne une chaîne de caractères)
  - R_3 : Dans $m \in$ MIU la chaîne de caractère III peut être remplacée par U.
  - R_4 : Dans un mot $m \in$ MIU la chaîne de caractère UU peut être supprimée.

1. Déterminer un arbre de dérivation du mot MUIIU.
2. Montrer que le schéma inductif est ambigü.
3. Démontrer par induction que si $m \in$ MIU, le nombre de I dans l'écriture de m ne peut pas être un multiple de 3.
4. En déduire que $MU \notin$ MIU.
5. On considère la variante de MIU, notée $\overline{\text{MIU}}$ où seules les règles R_1 et R_2 s'appliquent. Montrer qu'il existe un algorithme simple permettant de prouver qu'un mot composé de k lettres appartient ou n'appartient pas à $\overline{\text{MIU}}$ (indication : on raisonnera sur la longueur du mot à chercher). Un tel langage est dit *décidable*. D'après vous le langage MIU est-il décidable ?

1. D'après *Gödel, Escher and Bach : an Eternal Golden Braid* de Hofstader, R. Douglas. Ce système a été inventé par Hofstader pour donner un exemple simple de langage formel non décidable, c'est-à-dire un language qui ne peut pas toujours répondre par lui-même à la question suivante : «est-ce que m est un mot du langage ?».