TD 3 : Ensembles

Exercice 1. Selon leur donnée, fournir pour les ensembles suivants l'écriture "manquante", en extension ou compréhension.

1. $A = [\{x \in \mathbb{N}/x \equiv 2 \quad (4)\} \cup \{x \in \mathbb{N}/x \equiv 2 \quad (3)\}] \cap \left\{x \in \mathbb{N}/1\langle x^2 \langle 60\right\}$
2. $A = \{2,4,6,8,\ldots\}$
3. $A = \left\{\ldots,\frac{1}{27},\frac{1}{9},\frac{1}{3},1,3,9,27,\ldots\right\}$
4. $A = \{a, aba, ababa, \ldots\}$

Exercice 2. Déterminer, parmi les égalités suivantes, celles qui sont vraies, celles qui sont fausses et le prouver.On identifiera avec soin les lois logiques utilisées, pour assurer chaque étape du raisonnement.

A,B,C,D désigent des parties d'un ensemble E.

1. $(A-B)\cap D = (A\cap D)-B$
2. $A-(B\cap D) = (A-B)\cap(A-D)$
3. $A-(B\cup D) = (A-B)\cap(A-D)$
4. $A-(B-D) = (A-B)-D$
5. $A-(B-D) = (A-B)-D$
6. $A\Delta A = E$

Exercice 3.

1. Déterminer $A\times B$ et son cardinal pour les données suivantes :
   $A=\{0\};B=\{a,b,c,d\}\,A=\{\emptyset\};B=\emptyset A=\{\emptyset\};B=\{\{\emptyset\}\}$
2. Déterminer $\mathscr{P}(A), A^B, B^A$ et leurs cardinaux pour les données suivantes :
   $A=\{0,1,2\};B=\{3,4\}\,A=\emptyset;B=\{1,2\}$

Exercice 4. On suppose disposer d' un système informatique, doté des fonctions ordinaires relative à la théorie des ensembles : égalité, différence, réunion, intersection. On se propose de définir la notion de produit cartésien, supposée non encore disponible, et d'abord celle de couple.

Pour ce faire, on propose trois versions de définition

- Version 1
  $(x,y)_1 = \{\{x\},\{x,y\}\}$
- Version 2
  $(x,y)_2 = \{\{x,0\},\{y,1\}\}$ sachant que 0 et 1 désignent des éléments distincts.
- Version 3 $(x,y)_3 = \{x\}\cup\{x,y\}$

1. Étudier comment ces trois versions ($i \in \{1,2,3\}$) assurent ou non la proriété fondamentale d'égalité des couples

$$\left[(x_1,y_1)_i = (x_2,y_2)_i\right] \Rightarrow [(x_1=x_2) \text{ et } (y_1=y_2)]$$

2. Proposer alors une définition de triplet, quadruplet, etc...

Exercice 5. On suppose disposer d'un système informatique connaissant $\{0,1\}$, l'ordre sur cet ensemble (en particulier le max et le min de deux éléments) ainsi que les n-uplets d'éléments de $\{0,1\}$. Soit E un ensemble fini, et A,B deux parties de E.On note χ_A la fonction caractéristique de A.

1. Montrer que

$$\forall x\in E\, \chi_{A\cup B}(x) = \max\left(\chi_A(x),\chi_B(x)\right) \quad \chi_{A\cap B}(x) = \min\left(\chi_A(x),\chi_B(x)\right)$$

2. Au vu des hypothèses, montrer comment 8.1 permet de définir la réunion, l'intersection de deux ensembles.
3. *Complément* : Définir, par une méthode similaire, le complémentaire d'une partie donnée de E.

Exercice 6.

1. Montrer que $\phi : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ n & \mapsto & -\dfrac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable :on pourra considérer l'application $\phi : \begin{cases} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (m,n) & \mapsto & \dfrac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m \end{cases}$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 7. En 1936 le mathématicien anglais Alan Turing définit dans l'article *On Computationable numbers* le concept de Machine de Turing pour démontrer qu'il existe des nombres réels non calculables. Dans l'article de Turing un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est calculable s'il existe une machine de Turing permettant d'écrire le développement décimal de α avec une précision ε, où ε est choisi par l'utilisateur. Si on traduit machine de Turing par programme, on dira que α est calculable si et seulement si il existe un programme $prog_\alpha(\varepsilon)$ qui retourne un nombre réel (noté $prog_\alpha(\varepsilon)$) tel que

$$|\alpha - prog_\alpha(\varepsilon)| \le \varepsilon \tag{1}$$

On suppose utiliser un language de programmation quelconque qui utilise un alphabet composé de N caractères. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les programmes que l'on peut écrire avec ce language (incluant les programmes mal écrit ou qui n'ont aucun sens).

1. Imaginer un moyen d'associer à un mot (i.e. une succession de caractères sur l'alphabet considéré) un nombre entier unique.
2. En déduire qu'il existe une application injective $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$.
3. Conclure que $|\mathbb{P}| = \aleph_0$.
4. En déduire qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas calculables.