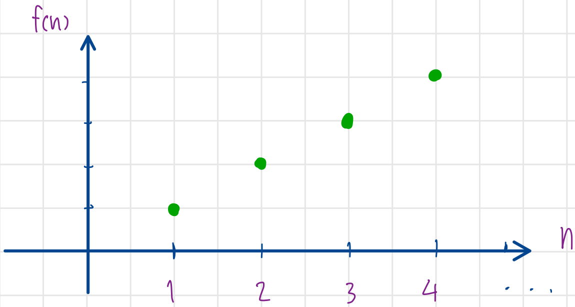
Sequences & Series
ลำดับ และ อนุกรม

Sequences ลำดับ คืออะไร ?

Sequences คือ function ที่มี Domain เป็น I^+ และมี Range เป็น R

หรือเขียนเป็น f ได้ว่า $a_n = n$ โดย n = Domain และ a_n = Range

ถ้าให้ $a_n = f(n) \to f(n) = n$ เขียนเป็นกราฟ จะได้ว่า



* จุดสังเกต - กราฟจะไม่ลากเส้นเชื่อมกัน

หน้าตาของ Sequences

แบ่งง่ายๆ เป็น 2 แบบ คือ

1. finite Sequences ลำดับจำกัด

   Ex. $a_1, a_2, \dots a_n \to 1, 2, 3 \quad -1, -2, -3$

2. infinite Sequences ลำดับอนันต์

   Ex. $a_1, a_2, \dots a_n, \dots \to 1, 2, 3, \dots \quad -1, -2, -3, \dots$

การ Cheak ลำดับ

cheak อะไร ? cheak ว่ามันเป็น ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

ซึ่งใช้เรื่อง limit เมื่อให้ n เข้าใกล้ ∞ มาช่วย

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

- $L = 1$ ค่า เป็นลำดับลู่เข้า
- $L \neq 1$ ค่า เป็นลำดับลู่ออก

Ex.

① $\{a_n\} = \left\{\dfrac{4-7n^6}{n^6+3}\right\}$

Sol^n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^6}\left(\frac{4}{n^6}-7\right)}{\cancel{n^6}\left(1+\frac{3}{n^6}\right)}$$

$$= \frac{0-7}{1+0} = -7$$ หาได้ 1 ค่า

Ans $\left\{\dfrac{4-7n^6}{n^6+3}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สู่ -7

② $\left\{\dfrac{n^2-2n+1}{n-1}\right\}$

Sol^n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\cancel{(n-1)}}{\cancel{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n-1) = \infty$$ หาได้มากกว่า 1 ค่า

Ans $\left\{\dfrac{n^2-2n+1}{n-1}\right\}$ เป็นอันดับลู่ออก

โจทย์ในลักษณะอื่นๆ

5. $\left\{\frac{\sin^2 n}{n^2}\right\}$ $\boxed{Sol^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = ???$

6. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$

7. $\left\{\frac{\sin^2 n}{4^n}\right\}$ (จ.)

8. $\left\{\frac{\cos n}{n^2}\right\}$ (จ.)

$$\frac{0 \cdot \cancel{x}}{n^2} \le \frac{\sin^2 n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = 0$$

$\left\{\frac{\sin^2 n}{n^2}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สู่ 0 #

6. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ $\boxed{Sol^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $(\infty-\infty)$

* ผลต่างกำลัง 2

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

* Conjugate

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-(n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$ หาค่าได้

9. $\cancel{\left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}}$

$\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สู่ 0 #

13) $\left\{ \dfrac{2^{1000} + 2^{n-1} + 3^{n-2}}{2^n + 3^n + 5} \right\}$

วิธีทำ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^{1000} + 2^{n-1} + 3^{n-2}}{2^n + 3^n + 5}$

กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{2^{1000} + 2^{x-1} + 3^{x-2}}{2^x + 3^x + 5}$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^{1000} + 2^{x-1} + 3^{x-2}}{2^x + 3^x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{2^{1000} + \frac{2^x}{2} + \frac{3^x}{3^2}}{2^x + 3^x + 5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3^x \left(\frac{2^{1000}}{3^x} + \frac{2^x}{2(3^x)} + \frac{3^x}{3^2(3^x)} \right)}{3^x \left(\frac{2^x}{3^x} + 1 + \frac{5}{3^x} \right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2^{1000}}{3^x} + \frac{2^x}{2(3^x)} + \frac{1}{9}}{\frac{2^x}{3^x} + 1 + \frac{5}{3^x}}$$

$$= \frac{0 + 0 + \frac{1}{9}}{0 + 1 + 0}$$

$$= \frac{1}{9}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{2^{1000} + 2^{n-1} + 3^{n-2}}{2^n + 3^n + 5} = \frac{1}{9}$$ (หาค่าได้)

$\left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}$ * ใช้ดิฟมาช่วย

Sol$^{\underline{n}}$ ให้ $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ โดยที่ $f(x) = a_n$, $x \in [1,\infty)$ * ต้องเปลี่ยนเป็น f(x) ก่อนเสมอ

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ ใช้การ L'hospital คือการดิฟ เศษและส่วน

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2x^2}$

$= \frac{1}{\infty} = 0$ หาค่าได้ 1 ค่า

Ans $\left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ 0

ลำดับทางเดียว monotone sequences

ลำดับทางเดียว $\Rightarrow \{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$

✗ $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

✗ $1, 2, 3, 3, 2, 1, \dots$

✓ $1, 2, 3, \dots$

✓ $-1, -2, -3, \dots$

✓ $-1, -1, -2, -2, -3, -3, \dots$

✓ $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$

ลำดับทางเดียว $\Rightarrow \{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$

1. ลำดับเพิ่ม $\Rightarrow a_n < a_{n+1}$
2. ลำดับลด $\Rightarrow a_n > a_{n+1}$
3. ลำดับไม่เพิ่ม (คงที่ + ลด) $\Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$
4. ลำดับไม่ลด (คงที่ + เพิ่ม) $\Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$

การทดสอบลำดับเพิ่ม - ลด มี 3 วิธี

① $a_{n+1} - a_n = L$

- $+$: $a_{n+1} > a_n$ เป็นลำดับเพิ่ม
- $-$: $a_{n+1} < a_n$ เป็นลำดับลด
- 0 : $a_{n+1} = a_n$ เป็นลำดับคงที่

② $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$

- >1 : $a_{n+1} > a_n$ เป็นลำดับเพิ่ม
- <1 : $a_{n+1} < a_n$ เป็นลำดับลด
- $=1$: $a_{n+1} = a_n$ เป็นลำดับคงที่

③ $a_n = f(n) = f'(x) = L$

- $+$: $a_{n+1} > a_n$ เป็นลำดับเพิ่ม
- $-$: $a_{n+1} < a_n$ เป็นลำดับลด
- 0 : $a_{n+1} = a_n$ เป็นลำดับคงที่

Ex.

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Sol^n $a_n = \frac{1}{n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

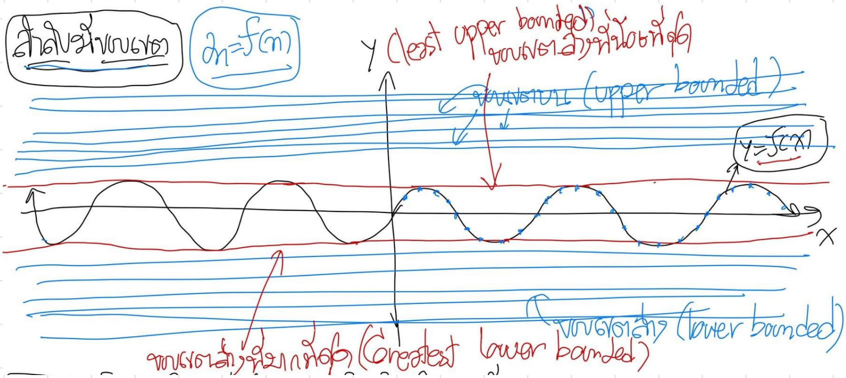
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{\cancel{n}\cancel{-n}-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow \text{ล.ลด}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow \text{ล.ลด}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{ล.ลด}$$

$x \in [1, \infty)$

ลำดับมีขอบเขต



จำง่ายๆ ว่า

* ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

* ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับทางเดียว และมีขอบเขต แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

Continuous function for sequences

ท.บ. → (Continuous function for sequences) → $\{a_n\}$, $a_n = f(n)$

ถ้า $\{a_n\} \to L$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $x \in [1,\infty)$

แล้ว $\xrightarrow{\text{ลู่เข้าสู่ } L}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} n\right)$ เช่น $\lim\limits_{n\to\infty} \cos($

$= \cos(\lim ($

สรุปสั้นๆว่า ฟังก์ชัน f ที่ต่อเนื่อง เช่น $\ln$, $\sin$, $\cos$, e

เราสามารถดึง f นั้นมาไว้ข้างหน้า $\lim$ เพื่อง่ายต่อการหาค่าได้

Ex. $\left\{\ln\left(\dfrac{4n+1}{3n+2}\right)\right\}$

Soln

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{4n+1}{3n+2}\right) = \ln \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)$$

$$= \ln\frac{4}{3} \quad \text{หาค่าได้}$$

Ans $\left\{\ln\left(\dfrac{4n+1}{3n+2}\right)\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ $\ln\dfrac{4}{3}$

Series อนุกรม

คือ ผลบวกของ Sequences อันดับ

$\boxed{\text{Sequences}}$ (ลำดับ) $\Rightarrow \{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Series}}$ (ผลบวก อนุกรม) $\Rightarrow \{S_n\} = S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k}$

$\vdots$

$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$???

หน้าตาของแต่ละ อนุกรม

$\boxed{\text{Series}}$ (อนุกรม) ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

① $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots$ → อ.เรขาฯ ($|r|=\frac{1}{2}$) อ.ลู่เข้า

② $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$ คือ อ.พี ($|P|=2$) อ.ลู่เข้า

ทวน

$\boxed{\text{อ. เลขคณิต}}$ เช่น $1+2+3+4+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$ → อ.ลู่ออก

$\boxed{\text{อ. เรขาคณิต}}$ ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a+ar+ar^2+\dots$
- → $|r|<1$ → อ.ลู่เข้า
- → $|r|\geq 1$ → อ.ลู่ออก

***

$\boxed{\text{อ. พี}}$ ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots$
- → $|P|>1$ → อ.ลู่เข้า
- → $|P|\leq 1$ → อ.ลู่ออก

***

$\boxed{\text{อ. ฮาร์โมนิก}}$ ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ → อ.ลู่ออก

(อ.พีที่มี $p=1$)

* $|r|, |P|$ คือ ขนาดของ r และ P

ตัวอย่างหน้าตาของอนุกรม

S_n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ → ซิกม่า Σ คือ ผลรวมของ อันดับ a_n

EX.

EX จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอ.ลู่เข้า - อ.ลู่ออก ???

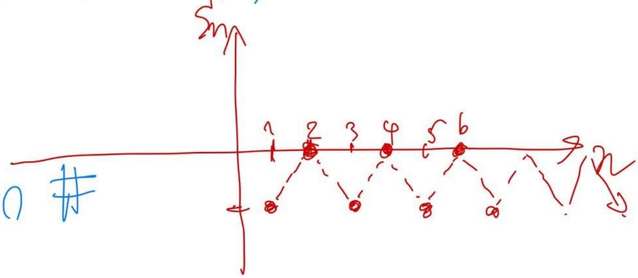
$\sum a_n \to S_n \to \lim_{n\to\infty} S_n$ ✓

① $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = (-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\dots$

จาก $\{S_n\} = S_1, S_2, S_3, S_4, \dots = \underline{-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots}$

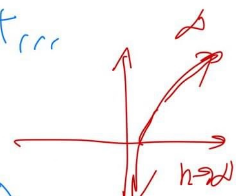
$\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าไม่ได้



$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ เป็นอ.ลู่ออก #

② $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{a_1} + \underbrace{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}_{a_2} + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \dots$



จาก $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b}$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$= (\ln 1 - \cancel{\ln 2}) + (\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 4}) + \cancel{\dots} + (\cancel{\ln n} - \ln(n+1))$

$\boxed{\ln 1 = 0}$

$= \cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln(n+1) \Rightarrow \boxed{S_n = -\ln(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (-\ln(n+1)) = -\infty$ (หาค่าไม่ได้) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ เป็นอ.ลู่ออก #

Ex.

การพิจารณาการลู่เข้า - ลู่ออก ของ อนุกรม

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

วิธีทำ

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \quad S_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= 1 - \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{0}{2} \right)$$

$$= 1$$ (หาค่าได้

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ เป็น อนุกรมลู่เข้า

4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)(n+3)}\right)$

วิธีทำ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$= \frac{1}{(2)(4)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(4)(6)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+3)}$

ตัดไม่ได้

จึงพิจารณา $\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{A}{(n+1)} + \frac{B}{(n+3)}$

$= \frac{A(n+3) + B(n+1)}{(n+1)(n+3)}$

$\therefore \quad 1 = A(n+3) + B(n+1)$

ให้ $n=-3$; $\quad 1 = -2B$

$B = -\frac{1}{2}$

ให้ $n=-1$; $\quad 1 = 2A$

$A = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+3)}$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+3)}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - 0 - 0$

$= \frac{6+4}{24}$

$= \frac{10}{24}$ (หาค่าได้)

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)(n+3)}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทวนการหาเศษส่วนย่อย

$$\frac{1}{(n+2)(n+4)} = \frac{\overset{\frac{1}{2}}{A}}{n+2} + \frac{\overset{-\frac{1}{2}}{B}}{n+4}$$

$$= \frac{A(n+4)+B(n+2)}{(n+2)(n+4)}$$

$\therefore \quad 1 = A(n+4)+B(n+2)$

ให้ $n=-2 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

ให้ $n=-4 \Rightarrow 1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

วิธีทำ $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

$= \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$

$1 = A(n+1)+Bn$

ให้ $n=0$; $1 = A$

ให้ $n=-1$; $1 = -B$

$B = -1$

$\therefore \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$

$= 1 - 0$

$= 1$ (หาค่าได้)

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

Series ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) ⇒ Test อ.ลู่เข้า − อ.ลู่ออก ???

→ 1. นิยาม ⇒ $\lim_{n\to\infty} S_n = L$

- → $\boxed{L = 1 \text{ ค่า}}$ ⇒ สามารถหาค่าได้ ⇒ อ.ลู่เข้า ลู่เข้า L
- → $\boxed{L \neq 1 \text{ ค่า}}$ ⇒ ไม่สามารถหาค่าได้ ⇒ อ.ลู่ออก

→ 2. ท.บ. →

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอ.ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ — Divergence test

2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \ (\pm\infty)$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอ.ลู่ออก

3. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอ.ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n)$ เป็นอ.ลู่เข้า

ข + ข → ข
ข + อ → อ
อ + อ → บอกไม่ได้

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอ.ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอ.ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n)$ เป็นอ.ลู่ออก

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอ.ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n)$ บอกไม่ได้

สรุป

1. นิยาม $\lim_{n\to\infty} S_n$ ถ้าหาค่าได้ แสดงว่าลู่เข้า / หาไม่ได้ แสดงว่าลู่ออก
2. Divergence test ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น อนุกรมลู่ออก
3. แบ่งเป็น 2 ส่วน แล้วนำมาบวกกัน

ถ้า	I	II		
ลู่	เข้า	เข้า	→	ลู่เข้า
	เข้า	ออก	→	ลู่ออก
	ออก	ออก	→	บอกไม่ได้

Ex. Divergence test

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+30}$$

Sol^{n} จาก $a_n = \dfrac{2n+1}{n+30}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+30} = 2 \neq 0$$

Ans $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+30}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

Ex. แบ่ง 2 ส่วน แล้วนำมาบวกกัน

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n - 1}{6^{n+1}}\right)$$

Sol^{n}

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n - 1}{6^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n+1}}$$

ค่าคงที่สามารถดึงไว้หน้า Σ ได้

คืออนุกรมเรขาคณิต

I $\displaystyle a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n \cdot 6} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow r = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ I ลู่เข้า

$\boxed{\text{อ.เรขาคณิต}} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$
- $|r| < 1 \Rightarrow$ อ.ลู่เข้า
- $|r| \geq 1 \Rightarrow$ อ.ลู่ออก

คืออนุกรมเรขาคณิต

I $\displaystyle b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n+1}} = -\sum_{n=1} \frac{1}{6^n \cdot 6} = -\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} = -\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n \rightarrow r = \frac{1}{6} < 1$

$\therefore$ II ลู่เข้า

$\therefore$ I + II $\rightarrow$ เข้า + เข้า $\rightarrow$ เข้า

Ans $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n - 1}{6^{n+1}}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

5 Test

* ใช้ได้กับอนุกรมบวก ex. 1+2+3+4+..

① Comparison test
② Limit comparison test

สร้าง b_n ขึ้นมาจาก a_n แล้วทดสอบ

---

① Comparison test

ถ้าสร้าง b_n แล้ว   * สร้าง b_n โดยอ้างอิงจาก a_n

$a_n < b_n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

$a_n > b_n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก $\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

* เนื่องจากส่วนยิ่งน้อยทำให้ค่ายิ่งมาก

Sol^n ⓘ สร้าง b_n โดย $\frac{1}{n^2+3n+2} < \frac{1}{n^2+3n} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow b_n$

ให้ $b_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี

อ.พี $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$
$\Rightarrow |p| > 1 \Rightarrow$ อ.ลู่เข้า
$\Rightarrow |p| \le 1 \Rightarrow$ อ.ลู่ออก

โดยมีค่า $p = 2 > 1$ จึงเป็นอนุกรมลู่เข้า

Ans $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n^2|}{2^n}$

Sol
$$\frac{|\sin n^2|}{2^n} \le \boxed{\frac{1}{2^n}} \leftarrow b_n$$

ตรงนี้มาจาก sin n มีค่าระหว่าง

$-1 \le \sin n \le 1$ และ

$0 \le \sin^2 n \le 1$

เนื่องจาก S test ใช้กับอนุกรมบวก
จึงใช้ค่า 1

ให้ $b_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอ.เรขาคณิต

ที่ $|r| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ อ.ลู่เข้า

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n^2|}{2^n}$ เป็นอ.ลู่เข้า #

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Sol
$$\frac{1}{\underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots}_{n}} < \frac{1}{\underbrace{1\cdot2\cdot2\cdot2\cdots}_{n-1}} \ ***$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n \cdot 2^{-1}} = \frac{2}{2^n}$$

$$\frac{1}{n!} < \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}} \leftarrow b_n$$

ตรงนี้ถ้าเราแทน $n = 1, 2, 3, \ldots$
ลงไปใน 2^{n-1} จะได้เป็น
$1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ เหมือนใน **

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^n} = 2\cdot\frac{1}{2^n}$$

ให้ $b_n = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

เป็นอ.เรขาคณิต ที่ $|r| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ อ.ลู่เข้า

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอ.ลู่เข้า #

อาจจะออกสอบ

$-1 \leq \sin n \leq 1$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sin n}}{n^2+3n+1}$$

พิจ $$\frac{2^{\sin n}}{n^2+3n+1} < \underbrace{\boxed{\frac{2^1}{n^2}}}_{b_n}$$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$$\frac{2}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

ให้ $b_n = \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

เป็น อ.ข้อพี $|p| = 2 > 1 \Rightarrow$ อ.ลู่เข้า

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sin n}}{n^2+3n+1}$ เป็น อ.ลู่เข้า #

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^3}$$

พิจ $$\frac{1+\cos n}{n^3} < \underbrace{\boxed{\frac{1+1}{n^3}}}_{b_n}$$

ให้ $b_n = \frac{2}{n^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

เป็น อ.ข้อพี $|p| = 3 > 1 \Rightarrow$ อ.ลู่เข้า

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^3}$ เป็น อ.ลู่เข้า #

② Limit comparison test

ถ้าสร้าง b_n แล้วนำไป $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

โดยค่า L

- $L \neq 0$ แล้ว
  - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \rightarrow$ อนุกรมลู่เข้า $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น อนุกรมลู่เข้า
  - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \rightarrow$ อนุกรมลู่ออก $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น อนุกรมลู่ออก
- $L = 0$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \rightarrow$ อนุกรมลู่เข้า แล้ว $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น อนุกรมลู่เข้า
- $L = \infty$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \rightarrow$ อนุกรมลู่ออก แล้ว $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น อนุกรมลู่ออก

Ex. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+1}$

Sol^n

ให้ $b_n = \dfrac{1}{n^2}$

* ถ้าเลขชี้กำลังเท่ากันสามารถเอาค่าหน้า n มาตอบได้

หา $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-4n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-4n+1} = 1 \neq 0$

check b_n เป็น ลู่เข้า $\quad b_n = \dfrac{1}{n^2}$ เป็น อนุกรมพี

อ.พี $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$
- $\rightarrow |P| > 1 \rightarrow$ อ.ลู่เข้า
- $\rightarrow |P| \leq 1 \rightarrow$ อ.ลู่ออก

โดยมีค่า $p = 2 > 1$ จึงเป็นอนุกรมลู่เข้า

Ans $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+1}$ เป็น อนุกรมลู่เข้า

③ Ratio test
④ Root test

กำหนด a_{n+1} และทดสอบ

โจทย์ ⇒ Check $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอ.ลู่เข้า – อ.ลู่ออก ???

3. Ratio test หาโดย

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L}$$

L
1. $L<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอ.ลู่เข้า
2. $L>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอ.ลู่ออก
3. $L=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ สรุปไม่ได้ ****

4. Root test หาโดย

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L}$$

L
1. $L<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอ.ลู่เข้า
2. $L>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอ.ลู่ออก
3. $L=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ สรุปไม่ได้ ***

Ex. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ * Ratio test

* a_{n+1} คือ ทุกที่ที่มี n ให้ +1 แทนไป

Sol^n

(I) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)^n(n+1)}{(n+1)\,n!}$

มาจาก $a^{n+1} = a^n \cdot a^1$

มาจาก สมมติเรามี $3!$ ก็คือ $3\times2\times1$

และเมื่อเรามี $(n+2)!$ เขียนได้ว่า $(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots$

ดังนั้น $(n+1)!$ จึงแตกออกมาเป็น $(n+1)\,n!$

(II) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^n(n+1)}{(n+1)\,n!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

ดึง n ออกมา

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

→ เมื่อ take lim แล้วได้ 1^∞ ต้องจัดรูป และ L'hospital

ให้ $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$; $x \in [1,\infty)$

$\ln a^x = x\ln a$

$$\ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

เมื่อ take lim แล้วได้ $\frac{0}{0}$ L'hospital ได้ → diff เศษ และ diff ส่วน

ย้าย ln ไว้หน้า lim

จาก $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+\frac{1}{x})}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})}\cdot\left(-\frac{\cancel{1}}{\cancel{x^2}}\right)\cdot\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{-1}}$$

$$\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{1+0} = 1$$

ln เมื่อย้ายฝั่งจะกลายเป็น e แล้วคูณ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e \quad ; \; e \approx 2.718\ldots > 1$$

∴ ลู่ออก

Trick

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1$$

Ans $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

โจทย์อื่นๆ

② $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

Root test

$\boxed{\text{วิธีทำ}}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}$

$= e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ เป็น อ.ลู่เข้า #

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ → Ratio → a_{n+1}

$n^2 \to (n+1)^2$

$2^n \to 2^{(n+1)}$

$\downarrow$

$2^n \cdot 2^1$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!-5}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\ln n}{(n+1)!+5}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n-1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$

* Root test

Ex.

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ เลือกใช้วิธีทดสอบ Root test

Sol^{n}

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}$$

$$= -1 < 1$$

ให้ $f(n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}$ แล้ว $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$

ให้ $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x} = 1^{\infty}$

ให้ $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$

$\ln y = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x} \rightarrow x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \infty\cdot 0$

$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$ can L'hospital

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\cdot\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x^2-3x-2} = -1$$

Ans $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

4) $\boxed{\text{Root test}}$ ทดสอบ

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L}$$

L

1) $\boxed{L<1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น อ.ลู่เข้า

2) $\boxed{L>1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น อ.ลู่ออก

3) $\boxed{L=1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ สรุปไม่ได้

***

5. Integral test – ใช้การอินทิเกรตมาช่วย

เงื่อนไข

I. ให้ $a_n = f(n) \Rightarrow f(n) = f(x)$

II. $f: [1,\infty)$ คือมี domain ตั้งแต่ $1 \to \infty$ แล้ว cheak ว่าเป็น function ลดหรือไม่

โดยการ diff จะได้ว่า $f'(x) < 0$ แล้ว $f(x)$ เป็น function ลด

III. $\int_1^\infty f(x)\,dx$ คือ Improper Integral ซึ่งก็คือ

* สรุป Integrate แล้วหาค่าได้ = ลู่เข้า
ไม่ได้ = ลู่ออก

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx$$

เพราะเราไม่สามารถ integrate หา ∞ ได้ จึงใช้ lim มาช่วย

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

Sol^n I. ให้ $f(n) = ne^{-n^2}$ แล้ว $f(x) = xe^{-x^2}$

II. หา $f'(x)$ cheak ว่าเป็น f ลด หรือไม่

$$f'(x) = x(e^{-x^2} \cdot -2x) + e^{-x^2}(1) = -2x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x^2+1)$$

พิจารณา $e^{-x^2}(-2x^2+1)$

$e^{-x^2} \to -x^2$ เป็น $+$ เพราะอะไรก็ตามกำลังสองได้ค่า $+$

$\therefore$ e^{-x^2} เป็น $+$

$(-2x^2+1)$ มีค่าเป็น $-$

$\oplus$ เจอ $\ominus$ เป็น $\ominus$

ดังนั้น $f'(x) = e^{-x^2}(-2x^2+1)$ มีค่าเป็น $-$ ซึ่ง < 0 จึงเป็น f ลด

ต่อ →

Ⅲ Integrate

จาก $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

ให้ $f(n) = ne^{-n^2}$ และ $f(x) = xe^{-x^2}$; $x \in [1,\infty)$ แล้วเขียนในรูป $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ได้ว่า

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

* ตรงนี้มาจากค่า $\sum_{n=?}^{\infty}$ ถ้า $n=2$ ก็จะเขียนได้ว่า $\int_2^{\infty}$

Soln

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x^2}\,dx$$

พิจารณา $\int_1^{b} xe^{-x^2}\,dx$

$$\int_1^{b} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_1^{b}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-b^2} - e^{-1^2}\right]$$

$$\int_1^{b} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{b^2}} - \frac{1}{e}\right)$$

* ต้องทบทวน

จาก Integrate By-part

ให้ $u = -x^2$ แล้ว แทนค่าใน $\int_1^{b} xe^{-x^2}\,dx$

$du = -2x\,dx$

สังเกต $du = -2x\,dx$

ดังนั้น ให้คูณ $\frac{-2}{-2}$ เข้าไปใน $\int_1^{b} xe^{-x^2}\,dx$ ก่อน

จะได้ว่า $\frac{-2}{-2}\int_1^{b} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{-2}\int_1^{b} -2xe^{-x^2}\,dx$

จาก $u = -x^2$, $du = -2x\,dx$

$$= \frac{1}{-2}\int_1^{b} -2xe^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{-2}\int_1^{b} e^{u}\,du$$

จาก $\int e^u\,du = e^u$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_1^{b}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_1^{b} \quad ; u = -x^2$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{b^2}} - \frac{1}{e}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} \quad \text{หาค่าได้}$$

Ans $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทบทวน Integrate By-part

2.3 $\sum_{n=\cancel{1}\,2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ เลือกใช้วิธีทดสอบ Integral test

Soln

① จาก $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ ✓

② เป็น f ลด ใช่ $f'(x) < 0$

$f'(x) = -\frac{2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{(x(\ln x)^2)^2} < 0$ เป็น f ลด ✓

③ $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ หาค่าได้

ให้ $u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}dx \rightarrow \int \frac{1}{u^2}du \rightarrow \left[-\frac{1}{u}\right]$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right)\right) = \frac{1}{\ln 2}$$ ✓

Ans $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

Alternating Series

คือ อนุกรมสลับ Ex. $-2+4+(-6)+8+(-10)+\dots$

หน้าตา $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ * จะมี $(-1)^n$ หรือ $(-1)^{n+1}$

Cheak การลู่เข้า, ลู่ออก

I $|a_n|$ ใส่แอบครอบ a_n แล้ว $\lim_{n\to\infty}|a_n|$ ต้อง $=0$

II $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม ลด+คงที่ — $a_{n+1}-a_n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $f'(x)$

III ถ้าเป็นจริงทั้งสองข้อ แสดงว่าเป็น อนุกรมลู่เข้า

* ถ้าไม่ตรงกับข้อ I แสดงว่าเป็น อนุกรมลู่ออก

Ex. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Sol$^{\underline{n}}$

(I) check $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|$ * การถอดแอพให้เป็น + เสมอ

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad ✓$$

(II) check ว่า เป็นลำดับไม่เพิ่ม

ให้ $f(n) = f(x) = \frac{1}{x}$

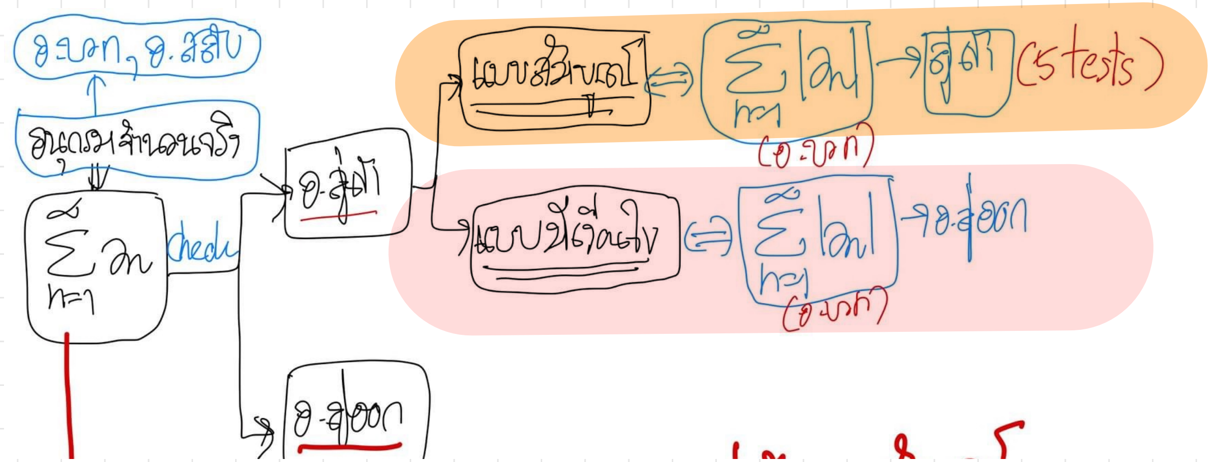
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ เป็นลบ หมายความว่า < 0

$\therefore$ เป็นลำดับลด คือ ไม่เพิ่ม

(I) และ (II) เป็นจริง $\rightarrow$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

Ans $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

สรุปอนุกรมจำนวนจริง



สรุป *

1. ถ้าเป็นอนุกรมบวก แล้วเป็นอนุกรมลู่เข้า อนุกรมนั้นจะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้าเป็นอนุกรมสลับ แล้วเป็นอนุกรมลู่เข้า

ให้ check ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมแบบใด

ถ้าลู่เข้า อนุกรมนั้นจะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ถ้าลู่ออก อนุกรมนั้นจะลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

Ex. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$ → เป็นอนุกรมสลับ

Sol$^{\underline{n}}$ ① check limit $|a_n|$ → $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ✓

Ⓘ check ลำดับไม่เพิ่ม ให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = \frac{-2}{x^3} < 0$ เป็นลำดับลด ✓

Ⓘ และ Ⓘ เป็นจริง แสดงว่าเป็น อนุกรม ลู่เข้า

Check การลู่เข้า โดย $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

พิจารณา $\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี ที่ มี $p = 2 > 1$ เป็น อนุกรมลู่เข้า

Ans $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แบบสัมบูรณ์

Ex. แก้แบบมีเงื่อนไข

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$ * เป็นอนุกรมสลับ

Sol^n I cheak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$ * ถอดแอบโซได้เลยเพราะว่า $\sqrt{\ }$ ได้ + เสมอ

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$ * Conjugate

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$ ✓

II cheak ลำดับไม่เพิ่ม

ให้ $f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

สังเกต $2\sqrt{x+1} > 2\sqrt{x}$ ทำให้ $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ดังนั้น $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$

∴ เป็นลำดับลด ✓

I และ II เป็นจริง แสดงว่าเป็น อนุกรมลู่เข้า

ต่อ →

Cheak การลู่เข้า

โดย $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

ใช้ limit comparison test

จากการ Conjugate ใน I จะได้ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

และ ให้ $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$\sqrt{n+1} = \sqrt{n(1+\frac{1}{n})} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}$$

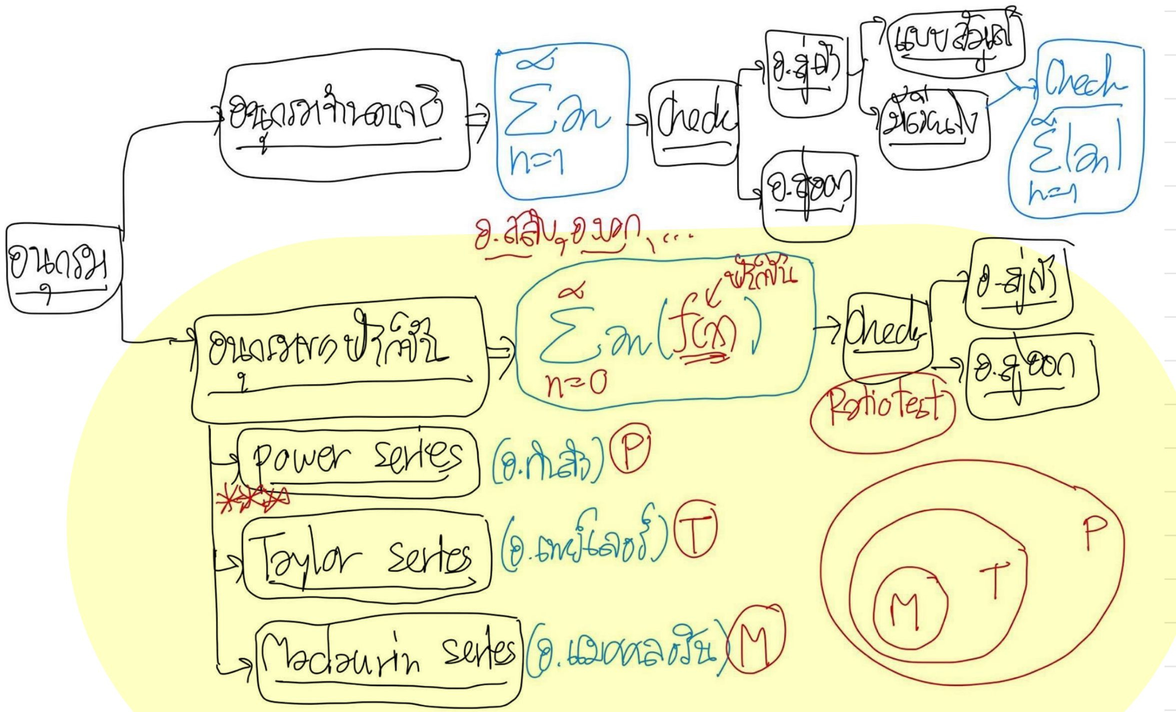
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

cheak b_n , $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ เป็นอนุกรมพีที่ $p = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore \sum_{=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

Ans $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

Preview



อนุกรม
อนุกรมจำนวนจริง
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
Check
อ.ลู่เข้า
แบบสัมบูรณ์
แบบมีเงื่อนไข
Check $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
อ.ลู่ออก
อ.สลับ, อ.บวก, ...
อนุกรมของฟังก์ชัน
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))$
ฟังก์ชัน
Check
Ratio Test
อ.ลู่เข้า
อ.ลู่ออก
Power series (อ.กำลัง) P
***
Taylor series (อ.เทย์เลอร์) T
Maclaurin series (อ.แมคลอริน) M
P
T
M

อนุกรม Function

1. Power series

อนุกรมกำลัง

ตัวแปร

หน้าตา → $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

ค่าคงที่ และ เป็นจุดศูนย์กลางการลู่เข้าของอนุกรม

2. Taylor series

หน้าตา → $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$f^{(n)}(a)$ คือ อนุพันธ์ อันดับใดๆ

Ex. $f^{4}(2)$

2 คือค่าคงที่แทนลงไปใน $f'(x)$

4 คือ จำนวนครั้งในการดิฟ

3. Maclaurin series $a = 0$

หน้าตา → $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

1. Power series

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$
  $= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$
- เช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-3)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+1)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!}x^n$
- $\boxed{\text{Check}} \rightarrow \boxed{\text{อ.ลู่เข้า} - \text{อ.ลู่ออก}} \rightarrow \boxed{\text{ใช้ Ratio test}}$: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$
  1. $\boxed{L<1} \rightarrow$ อ.ลู่เข้า
  2. $\boxed{L>1} \rightarrow$ อ.ลู่ออก
  3. $\boxed{L=1} \rightarrow$ สรุปไม่ได้

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \rightarrow a_n$

Sol$^{\text{n}}$ จาก $a_n = \frac{1}{n!}x^n$ แล้ว $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$

ratio test

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n \cdot x}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|$$

ดึงออกมาได้เพราะว่าเราสนใจที่ n , x จึงเหมือนค่าคงที่

$$= |x| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

$$= |x|\cdot 0 = 0 < 1$$

ดังนั้น เป็นลู่เข้า

Ans $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ เป็น อนุกรมลู่เข้า

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$$

* จาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ จะได้ว่า $a = 0$ หมายความว่า ลู่เข้า 0

Soln

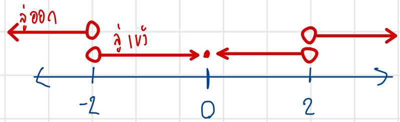
$a_n = \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ แล้ว $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n \cdot x}{(n+2)\cdot 2^n \cdot 2}\cdot\frac{(n+1)\cdot 2^n}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{2(n+2)}\right|$$

$$= \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

$$= \frac{|x|}{2}\cdot 1 < 1 = |x| < 2 \rightarrow -2 < x < 2$$



$x = -2$ $x = 2$

พิจารณา ที่ $x = 2$ แทนใน $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \leftarrow a_n$$

ใช้ limit comparison โดยให้ $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

cheak b_n

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมฮาร์มอนิก → เป็นลู่ออก

ต่อ →

พิจารณา ที่ $x = -2$ แทนใน $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$(-2)^n = (-1 \cdot 2)^n = (-1)^n \cdot 2^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$ * เป็นอ.สลับ

I cheak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ✓

II ให้ $f(x) = \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ ✓

เป็นลู่เข้า

สรุป

Ans $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าในช่วง $x \in [-2, 2)$

4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{5^n}$

วิธีทำ $a_n = \frac{nx^n}{5^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}}\left(\frac{5^n}{nx^n}\right)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cancel{(x^n)}(x)\cancel{5^n}}{5\cancel{(5^n)}(n)\cancel{(x^n)}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{5n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{n+1}{5n}\right|$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{5n}\right|$$

$$= |x|\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{|x|}{5} < 1$$

จะได้ $\frac{|x|}{5} < 1 \Rightarrow -5 < x < 5$

พิจารณาที่ $x = -5$ และ $x = 5$

ที่ $x = -5$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n \cancel{5^n}}{\cancel{5^n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

I $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

$\therefore$ ที่ $x=-5$ จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-5)^n}{5^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ที่ $x = 5$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cancel{(5)^n}}{\cancel{5^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

$\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$ $\therefore$ ลู่ออก

$\therefore$ ที่ $x = 5$ จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(5^n)}{5^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

$\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าในช่วง $x \in (-5,5)$

$\boxed{EX}$ จงหารัศมีของการลู่เข้าและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n-1}}{2^{n-1}}$

Sol$^{\underline{n}}$ ให้ $a_n = \frac{(-1)^n (x-2)^{n-1}}{2^{n-1}}$ แล้ว $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1+1}}{2^{n-1+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n}}{2^{n}}$

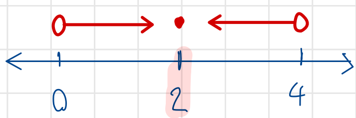
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot(-1)\cdot(x-2)^n}{2^n}\cdot\frac{2^n\cdot(x-2)}{2\cdot(-1)^n\cdot(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1\cdot(x-2)}{2}\right|$$

$$= \frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty} 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$= \frac{|x-2|}{2} < 1 \longrightarrow |x-2| < 2 \;\Big|\; -2 < x-2 < 2$$

$$0 < x < 4$$



พิจารณา $x = 0$ แทนใน $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad (-2)^{n-1} = (-1\cdot 2)^{n-1} = (-1)^{n-1}\cdot(2)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(0-2)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot(2)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}$$

$n=1 \to -1$

$n=2 \to -1$

$n=3 \to -1$

$\vdots \qquad \vdots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1) \to -\infty$$

ลู่ออก

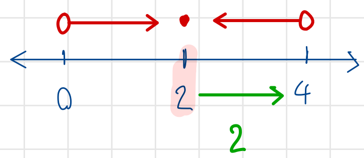
พิจารณา $x = 4$ แทนใน $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (4-2)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} -1^n$$ เป็นอนุกรมสลับ

I cheak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$ $\therefore$ ลู่ออก

Ans $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n-1}}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าในช่วง $x \in (0,4)$ และมีรัศมีเป็น 2

รัศมีนับจากจุดศูนย์กลางไปหาขอบ



$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

2 Taylor series

Ex. จงเขียน อ.ก.เทย์เลอร์ของ $f(x)=e^{2x}$ รอบจุด $x=1$ และหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม

I, II

Sol^n

I

$\sum a_n$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow f(1)=e^2$$
$$f'(x)=2\cdot e^{2x} \Rightarrow f'(1)=2\cdot e^2$$
$$f''(x)=2^2\cdot e^{2x} \Rightarrow f''(1)=2^2\cdot e^2$$
$$\vdots$$
$$f^{n}(x)=2^n\cdot e^{2x} \Rightarrow f^{n}(1)=2^n\cdot e^2$$

คิดหาค่าไปเรื่อยๆ

จาก $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

แทน $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\frac{f(1)}{0!}(x-1)^0+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1+\dots+\frac{f^{n}(1)}{n!}(x-1)^n+\dots$$

$$=\frac{e^2}{0!}(x-1)^0+\frac{2^1\cdot e^2}{1!}(x-1)^1+\dots+\frac{2^n\cdot e^2}{n!}(x-1)^n+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot e^2(x-1)^n}{n!}$$ #

II หาช่วงการลู่เข้าของอนุกรม

ให้ $a_n = \dfrac{2^n \cdot e^2 (x-1)^n}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} \cdot e^2 (x-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

หา $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n \cdot 2 \cdot e^2 \cdot (x-1)^n \cdot (x-1)}{(n+1)\, n!} \cdot \frac{n!}{2^n \cdot e^2 (x-1)^n} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(x-1)}{n+1} \right|$$

$$= 2|x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

$$= 2|x-1| \cdot 0 = 0 < 1$$

Ans $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot e^2 (x-1)^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าในช่วง $(-\infty, \infty)$

3. Maclaurin series $a = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Ex 1) จงเขียนอ.แมคลอริน $f(x) = e^{2x}$ และหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมดังกล่าว

I II

$\underline{Sol^n}$

Σa_n

I

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 1$$
$$f''(x) = 2^2 \cdot e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 2^2 \cdot 1$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = 2^n \cdot e^{2x} \Rightarrow f^n(0) = 2^n \cdot 1$$

จาก $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

แทน $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{f(0)}{0!}(x)^0 + \frac{f'(0)}{1!}(x)^1 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n + \dots$

$$= \frac{1}{0!}(x)^0 + \frac{2^1}{1!}(x)^1 + \dots + \frac{2^n}{n!}(x)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \quad \#$$

II หาช่วง ลู่เข้า ของ อนุกรม

ให้ $a_n = \dfrac{2^n x^n}{n!}$ และ $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot \cancel{x^n}\cdot x}{(n+1)\cdot \cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}\,\cancel{x^n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x}{n+1}\right|$$

$$= |2x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$$

$$= |2x|\cdot 0 = 0 < 1$$

Ans $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าในช่วง $(-\infty,\infty)$

อาจจะออกสอบ

ชื่อ-นามสกุล____________________ รหัสนักศึกษา____________ ภาควิชา__________

Homework ครั้งที่ 2 MTH112 ประจำภาคการศึกษา 2/2562

1. จงพิจารณาลำดับในแต่ละข้อ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

ลำดับ $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{6}{27}, \frac{24}{81}, \frac{120}{243}$	เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่ ถ้าเป็นลำดับทางเดียว เป็นลำดับทางเดียวชนิดใด	เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้าลู่เข้าสู่ค่าใด	เป็นลำดับมีขอบเขตหรือไม่
$\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}$	- เป็นลำดับทางเดียว - เป็นลำดับไม่เพิ่ม	เป็นลำดับลู่ออก	ไม่มีขอบเขต
$\left\{\frac{1}{n+\ln n}\right\}$	- เป็นลำดับทางเดียว - เป็นลำดับลด	เป็นลำดับลู่เข้า เข้าสู่ 0	ลำดับมีขอบเขต
$\left\{\cos\left(\frac{3n\pi}{6n+\pi}\right)\right\}$	- เป็นลำดับทางเดียว - เป็นลำดับลด	เป็นลำดับลู่เข้า เข้าสู่ 0	ลำดับมีขอบเขต

2

2. จงแสดงการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้ พร้อมทั้งระบุวิธีการทดสอบอนุกรมที่ใช้ด้วย

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ เลือกใช้วิธีทดสอบ Ratio test

Sol^n จาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ $\therefore\ a_n = \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{3^{n+1}((n+1)!)^2}$

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)!}{3^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}\cdot\frac{3^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot\cancel{(2n)!}}{\cancel{3^n}\cdot 3\cdot(n+1)^2\cdot\cancel{(n!)^2}}\cdot\frac{\cancel{3^n}\cdot\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+6n+2}{3n^2+6n+3}\right) = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \text{อ. ลู่ออก}$$

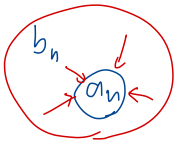
Ans $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2\cos^2 n}{n^2}$ เลือกใช้วิธีทดสอบ Comparison test

Sol^n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2\cos^2 n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1+2\cos^2 n}{n^2} < \frac{1+2}{n^2} \nearrow \frac{3}{n^2} = b_n$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow$$ เป็นอนุกรม p ที่ $|p| > 1 \therefore b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

จึงได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2\cos^2 n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า Ans

2.3 $\sum_{n=\cancel{1}\,2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ เลือกใช้วิธีทดสอบ Integral test

Sol^n

① จาก $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ ✓

② เป็น f ลด ให้ $f'(x) < 0$

$$f'(x) = -\frac{2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{(x(\ln x)^2)^2} < 0$$ เป็น f ลด ✓

③ $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ หาค่าได้

ให้ $u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}dx \rightarrow \int \frac{1}{u^2}du \rightarrow \left[-\frac{1}{u}\right]$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right)\right) = \frac{1}{\ln 2}$$ ✓

Ans $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ เลือกใช้วิธีทดสอบ Root test

Sol^n

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

$$= -1 < 1$$

ให้ $f(n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ แล้ว $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$

ให้ $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = 1^{\infty}$

ให้ $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$

$\ln y = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x \rightarrow x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \infty\cdot 0$

$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$ can L'hospital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\cdot\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-x^2-3x-2} = -1$$

Ans $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

3. จงตรวจสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าแล้วอนุกรมนี้ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้า แบบมีเงื่อนไข

Sol$^{\underline{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ เป็น อนุกรมสลับ

① check $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0 \quad ✓$$

② check $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ เป็น ล.ไม่เพิ่ม

จาก a_n ได้ $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{(\sqrt{n}+\cancel{\sqrt{n+1}})-(\cancel{\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+2})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$ เป็นลบ ✓ $\therefore$ เป็น ล.ลด

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

Check ชนิดการลู่เข้า

ได้ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

ใช้ Comparison test $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}_{a_n} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{b_n}$

ได้ $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow$ เป็นอนุกรม p ที่ $|p| \leq 1$ เป็น อ.ลู่ออก

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

Ans $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

4. จงหาช่วงการลู่เข้าของ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n\left[x-\frac{1}{2}\right]^n}{\ln n}$

Sol$^{\underline{n}}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n\left[x-\frac{1}{2}\right]^n}{\ln n}$ เป็น Power Series ให้ $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}\left[x-\frac{1}{2}\right]^{n+1}}{\ln(n+1)}$

Cheak ⇒ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{2^{n+1}}^{\,2}\cdot\cancel{(x-\frac{1}{2})^{n+1}}}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln n}{\cancel{2^n}\cdot\cancel{(x-\frac{1}{2})^n}}\right|$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\left|2(x-\tfrac{1}{2})\cdot\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right|$

$\displaystyle = |2x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$

$= |2x-1|\cdot 1$

ให้ $f(n) = \dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \frac{\infty}{\infty}$ Can L'hospital

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}$

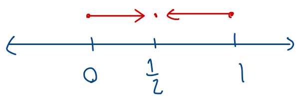
$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$

เนื่องจากเป็นอ.ลู่เข้า ให้ $= |2x-1| < 1$

$-1 < 2x-1 < 1$

$0 < 2x < 2$

$\underline{0 < x < 1}$



ที่ $x = 0$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\left[-\frac{1}{2}\right]^n}{\ln n} = \sum_{n=2}\frac{-1^n}{\ln n} = \sum_{n=2}(-1)^n\cdot\frac{1}{\ln n}$

เป็น อนุกรมสลับ test โดย $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0$ ①

cheak ว่าเป็นลด.ไม่เพิ่ม

ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} \rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2} < 0$ เป็นล.ลด ②

ที่ $x = 1$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\left[1-\frac{1}{2}\right]^n}{\ln n} = \sum_{n=2}\frac{1^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ test อนุกรม ใช้ Comparison test

$a_n = \dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n} = b_n$

$b_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็น อ. Harmonic

เป็นอ.ลู่ออก

$\therefore \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ เป็น อ. ลู่เข้า

Ans $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\left[x-\frac{1}{2}\right]^n}{\ln n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าในช่วง $x \in [0,1]$

5. จงหาอนุกรมแมคลอรินของ $\sin^2 x$ และช่วงการลู่เข้าของอนุกรมกำหนดให้

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \text{ และ } \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)(x-0)^n}{n!}$$

Sol^n

จัดรูป $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ ให้ $f(x) = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$

$\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$

พิจารณา $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

จะได้ อนุกรมของ $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x)^{2n}}{(2n)!}$

แล้วอนุกรมของ $\cos 2x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2)^{2n} \cdot (x)^{2n}}{(2n)!}$

—"— $\dfrac{1-\cos 2x}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $\sin^2 x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$

Cheak ช่วงลู่เข้า

กำหนดจาก $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ ให้ $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

และ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^n} \cdot (-1) \cdot \cancel{2^{2n}} \cdot 2 \cdot \cancel{x^{2n}} \cdot x^2}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!} \cdot 2}{\cancel{(-1)^n} \cdot \cancel{(-1)} \cdot \cancel{2^{2n}} \cdot \cancel{x^{2n}}} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-4x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = |-4x^2| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2+6n+2} = |-4x^2| \cdot 0$$

$= 0 < 1$ ∴ ลู่เข้า

Ans $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าในช่วง $x \in (-\infty, \infty)$