อนุกรมที่พบเจอ	อนุกรมของ f.
- เลขคณิต	
- เรขาคณิต	$f(x)$
- p	$x \in \mathbb{R}$
* - อนุกรมผลสัม	

① อนุกรมเลขคณิต

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$d \quad d \quad d \quad d \quad d$

$1+1+1+1+\dots$ ลู่ออก.

$-1-2-3-4-5-\dots$ ลู่ออก.

* $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$0+0+0+0+\dots = 0$ (ลู่เข้า)

๒ อนุกรมเรขาคณิต

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

$\times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r$

หาค่า r จาก $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$

<u>เพิ่มเติม</u> เช่น $\dfrac{a_4}{a_2} = r^2$

กระโดด 2 ตัว

Ex $\quad -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots \qquad r = -\frac{1}{2}$

Ex $\quad a_3 = 1 \;,\; a_5 = 9$ จงหา a_1

$$\frac{a_5}{a_3} = r^2 = 9 \longrightarrow r = 3 \vee r = -3$$

① $r = 3$

$$\frac{a_3^{\,1}}{a_1} = 9 \;;\; a_1 = \frac{1}{9}$$

② $r = -3$

$$\frac{a_3}{a_1} = 9 \;;\; a_1 = \frac{1}{9}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

$$\times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

เกิด $|r| < 1$

$a_1 = -1$ $\quad r = -\frac{1}{2}$

<u>Ex</u> $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

$$S_\infty = \frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \quad \text{(ลู่เข้า)}$$

③ อนุกรม p $\qquad$ $p > 1$, $p \leq 1$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

<u>การลู่เข้า</u> $\qquad$ พิจารณาค่า p

p → $p \geq 1$; ลู่เข้า

p → $p < 1$; ลู่ออก

| ที่ $p = 1$; Harmonic (ลู่ออก)

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$ อนุกรม p

$$\frac{1}{1^2} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{3^2} \quad \frac{1}{4^2} \quad \cdots \longrightarrow p = 2 > 1$$ (ลู่เข้า)

Ex

$$1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \cdots$$ ลู่เข้าหรือลู่ออก.

$$\frac{1}{1^{0.5}} \quad \frac{1}{2^{0.5}} \quad \frac{1}{3^{0.5}} \quad \frac{1}{4^{0.5}} \quad \cdots \longrightarrow p = 0.5 = \frac{1}{2}$$

$\because$ $p = \frac{1}{2} < 1$ อนุกรมนี้ จึงเป็นอนุกรมลู่ออก.

$\therefore$ เป็นอนุกรมลู่ออก.

ทฤษฎีทางลู่เข้าของอนุกรม

$$0+0+0+0+\dots+0+\dots \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

** ทบ   อนุกรมลู่เข้า $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ตามกฎสมมูลของตรรกศาสตร์ $p \rightarrow q$ แปลงได้เป็น $\sim q \rightarrow \sim p$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \longrightarrow \text{อนุกรมลู่ออก}}$$

Ex จงพิจารณาว่าอนุกรม $a_n = \dfrac{n^2+5n+2}{n-3}$ ลู่ออก.

จากทฤษฎีบทการลู่เข้า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n+2}{n^{1}-3}\right) = \infty \neq 0$$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ทำให้อนุกรมของ a_n ลู่ออก.

$\therefore$ อนุกรมของ $a_n = \dfrac{n^2+5n+2}{n-3}$ ลู่ออก.

Ex จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก (ผอง)

วิธีทฤษฎีบทการลู่เข้า

$n \to \infty$; $\underbrace{\infty - \infty}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} - (\cancel{n}+2)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = 0$$

$\to -2$

$\therefore$ ซึ่งไม่เปลี่ยนผลต่อการสรุป

Ex จงพิจารณา $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\ln(n+3)}{n^2+5n}$ ว่าลู่เข้าหรือไม่.

จากทฤษฎีบทการลู่เข้า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln(n+3)}{n^2+5n}$$

กำหนดให้ $x \in [1,\infty)$ และ: $f:[1,\infty) \to [0,\infty)$

และ: $f(x) = \dfrac{x^2+\ln(x+3)}{x^2+5x}$ แล้ว

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\ln(x+3)}{x^2+5x} = 1$$

$$A \overset{L}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x + \frac{1}{x+3}}{2x+5} \overset{L}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{(x+3)^2}}{2}$$

$$= \frac{2-0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \neq 0$$

เนื่องจาก $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq 0$ จะได้ $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln(n+3)}{n^2 + 5n}$$ ลู่ออก.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln(n+3)}{n^2 + 5n}$$ เป็นอนุกรมลู่ออก.

การรวมผลสัมพันธ์ของอนุกรม ให้ $k, m \in \mathbb{R}$ แล้ว

① $k(\text{ลู่เข้า}) \pm m(\text{ลู่เข้า}) = \text{ลู่เข้า}$

② $k(\text{ลู่เข้า}) \pm m(\text{ลู่ออก}) = \text{ลู่ออก}$

③ $k(\text{ลู่ออก}) \pm m(\text{ลู่ออก}) = \text{สรุปไม่ได้}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln(n+3)}{n^2+5n} \rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+5n} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin^2 n}{n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก. (ลู่ออก)

ลู่ออก $(p = 1 \leq 1)$

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ และ

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ ← ลู่เข้า Compare.

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก $\therefore$ (sum) ลู่ออก.

Test 5 test

******* ① Comparison test ≈

② Limit comparison test

******* ③ Ratio test ≈

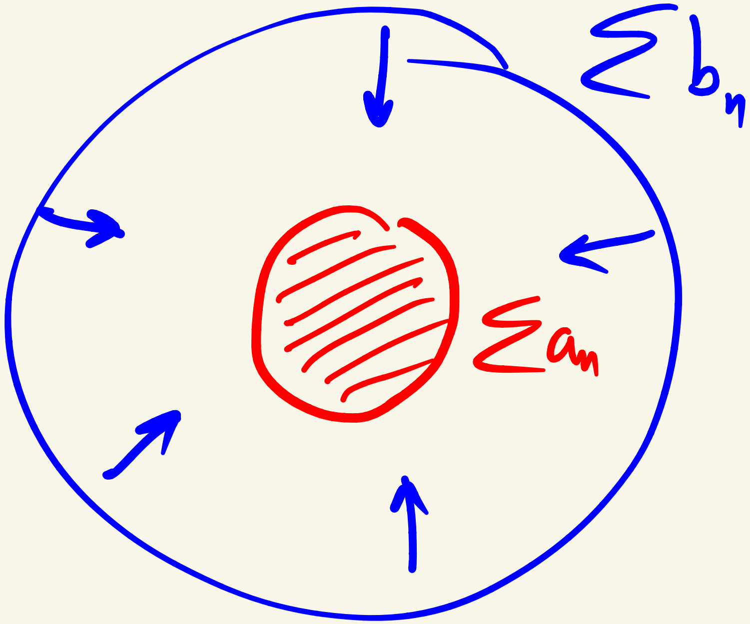
④ root test

******* ⑤ integral test

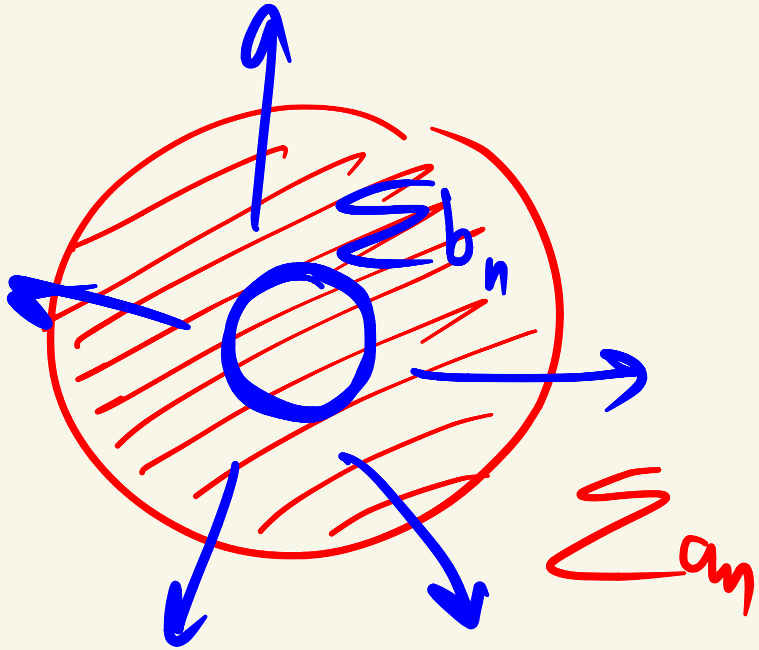
(ln ___)

① Comparison test

①



②



ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

Ex $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n+8} \xrightarrow{(\text{ลู่เข้า})} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n+8} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เนื่องจาก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n+8} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$ มี $r = \frac{2}{7}$ ซึ่ง $|r| = \left|\frac{2}{7}\right| < 1$

จึงเป็นอนุกรมลู่เข้า ทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n+8}$ ลู่เข้าโดย Comparison test

Ex $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n \cdot n}{n^4 + \sin^2 n} \text{ (ลู่เข้า)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{n^4}$ พิจารณา

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{p=2>1 \text{ ลู่เข้า}}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}_{p=3>1 \text{ ลู่เข้า}}$

จาก $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ลู่เข้า ทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า

ทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า โดย Comparison test

Ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n-2^{-n}}$ (ลู่ออก)

พิจารณา: $\sqrt{n+2} \longrightarrow \sqrt{n}$

$n-2^{-n} \longrightarrow n$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n-2^{-n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}^{\,1}}{\cancel{n}_{\sqrt{n}}}}$$

ลู่ออก

$p = \frac{1}{2}$ (ลู่ออก)

๒ Limit comparison test

กำหนด $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ โดยที่ $a_n, b_n > 0$

สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ แล้วถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$

ถ้า c หาค่าได้ , $c > 0$ แล้ว อนุกรมจะลู่เข้าทั้งคู่

หรือ ลู่ออกทั้งคู่

<u>**Ex**</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^4 - 3n} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ลู่เข้า) $b_n = \dfrac{1}{n^2}$

กำหนดให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ แล้วพิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2 - 3n + 2}{n^4 - 3n}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 3n^3 + 2n^2}{n^4 - 3n}$$

$$= 1$$

เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ มี $p = 2 > 1$ จึงเป็นอนุกรมลู่เข้า

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดย Limit comparison test

Ex

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \cos n} \quad (\text{ลู่เข้า}) \quad \uparrow, \downarrow \quad \longrightarrow \quad b_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\cos n \in [-1, 1]$

เรขาคณิต $r = \frac{1}{2}$ ลู่เข้า

พิจารณา

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2^n + \cos n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n + \cos n}$$

$$= \left(\lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{2^n} + \cos n}{\cancel{2^n}} \right)^{-1}$$

$$= \left(1 + \lim_{n \to \infty} \frac{\cos n}{2^n} \right)^{-1}$$

$$(1 + 0)^{-1} = 1$$

พิจารณา $\cos n$ จะพบว่า $-1 \leq \cos n \leq 1$

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

หารด้วย 2^n ทั้งอสมการ $2^n > 0$

$$-\frac{1}{2^n} \leq \frac{\cos n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{2^n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{2^n} \leq 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{2^n} = 0$$

③ Ratio test (a_n จะอยู่ในรูปผลของการคูณ)

กำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$

พจน์หลัง

พจน์ก่อนหน้า

① $c < 1$ $\longrightarrow$ อนุกรมลู่เข้า

② $c > 1$ $\longrightarrow$ อนุกรมลู่ออก

③ $c = 1$ $\longrightarrow$ สรุปไม่ได้ (Test อื่น)

Ex

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n} \rightarrow a_n \; ; \; a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{3^{n+1}}$$

พิจารณาโดยใช้ Ratio test

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\cancel{(2n+2)!}^{\,(2n+2)(2n+1)}}{\cancel{3^{n+1}}\,3}}{\frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{3^n}}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{3} = \infty > 1 \text{ (ลู่ออก)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n}$$ เป็นอนุกรมลู่ออก.

Ex $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{10^n}{4^{2n+1}(n+1)}}_{a_n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)}$$

พิจารณาโดย Ratio test จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{\overset{10}{\cancel{10^{n+1}}}}{\underset{16}{\cancel{4^{2n+3}}}(n+2)}}{\dfrac{\cancel{10^n}}{\cancel{4^{2n+1}}(n+1)}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10}{16(n+2)}\right)\left(\frac{n+1}{1}\right) = \frac{10}{16} < 1$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{4^{2n+1}(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

Ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2}{\cos^2 n + n!} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ลู่เข้า)

$[0,1]$

กำหนดให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} > \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

พิจารณา $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ โดย Ratio test จะได้.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\cancel{3^{n+1}}^{\,3}}{\cancel{(n+1)!}\,(n+1)}}{\frac{\cancel{3^n}}{\cancel{n!}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

ข้อทำให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า ทำให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ โดย Comparison test

Ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$ (ระวังไว้ จะเสียเวลา)

พิจารณา $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\text{Cal I}}$

$= e \neq 0$ (ลู่ออก)

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สูตรลัด $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}$

④ Root test (ถ้าสิ่งติดกำลัง n)

กำหนด $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ พิจารณา $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c$

① $c < 1 \longrightarrow$ อนุกรมลู่เข้า

② $c > 1 \longrightarrow$ อนุกรมลู่ออก

③ $c = 1 \longrightarrow$ สรุปไม่ได้ (Test อื่น)

Ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$ (ดูเผินๆ) $\rightsquigarrow a_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$

ทดสอบการลู่เข้าโดยใช้ Root test

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{\cancel{n^2}\,n}\right]^{\frac{1}{\cancel{n}}}$$

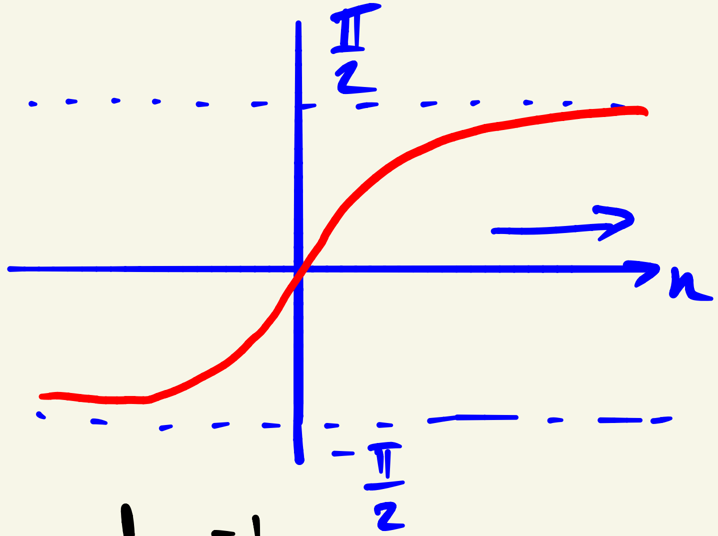
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)}\right)^{n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}} = \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} < 1$$

[illegible] :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}}$$

Ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1} n)^n$



พิจารณาโดย Root test จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \left[(\tan^{-1} n)^{\cancel{n}}\right]^{\frac{1}{\cancel{n}}} = \lim_{n\to\infty} \tan^{-1} n = \frac{\pi}{2} > 1$$

จึงสรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1} n)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออกโดย Root test

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1} n)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

Trick!

$\ln n \,,\; n^k \,;\, k>0$	$r = 1$
a^n	$r = a$
$n^n \,,\; n!$	$r \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n^2 \cdot \ln n}{2^n \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n^2 \cdot \ln n}{2^n \cdot 3^n} \xrightarrow{\text{root t.}} \frac{(5)(1)(1)}{(2)(3)} \overset{\text{in lim}}{=} \frac{5}{6}$$

⑤ Integral test (ln n) (สุดท้าย)

กำหนด $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ พิจารณา $\boxed{a_n \mapsto f(x)}$

กำหนด $x \in [1,\infty)$ และ $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$

โดยที่ $f(x)$ สอดคล้องกับ a_n เป็นฟังก์ชันแบบลด พิจารณา

Imp. Int.

$$\int_{a\,(1)}^{\infty} f(x)\,dx = c \quad (\text{หาค่าได้})$$

$$\frac{df}{dx} < 0$$

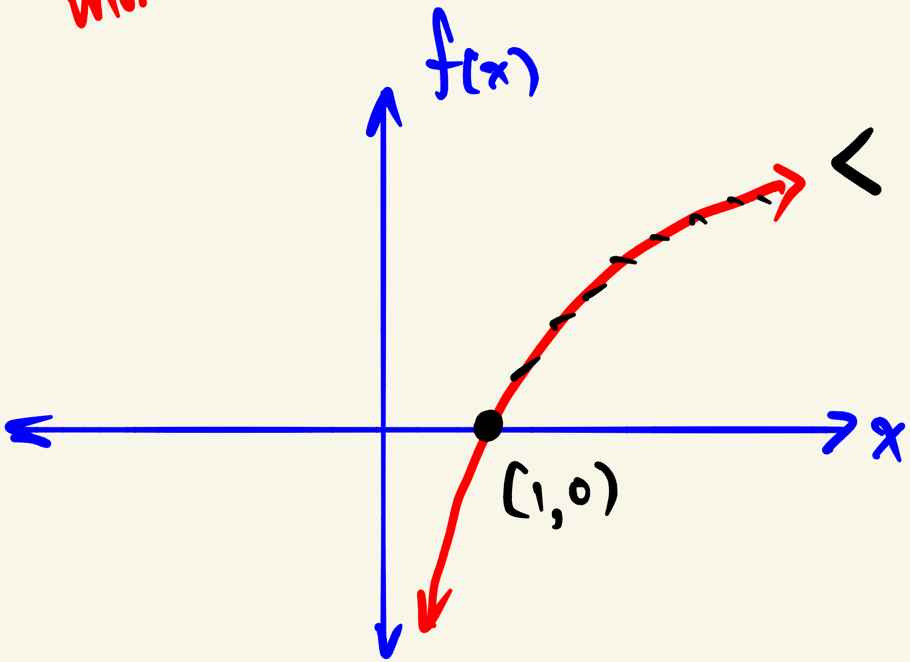
แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะหาค่าได้.

Ex $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \implies x \in [2,\infty)\,,\ f : [2,\infty) \to [0,\infty)$

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

พลาดไป.

พิจารณา $f'(x) = -\dfrac{\left(\overbrace{\cancel{x}\cdot 2(\ln x)\cdot \cancel{x^{-1}}}^{\oplus} + \overbrace{(\ln x)^2\cdot 1}^{\oplus}\right)}{\underbrace{x^2(\ln x)^2}_{\oplus}}$



< 0 ; a_n เป็นลำดับลด.

$\boxed{\text{ใช้ Integral test}}$

พิจารณา $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

แทน $u = \ln x \longrightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$$= -(\ln x)^{-1} + c$$

หาต่อได้.

ดังนั้น $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\Big[-(\ln x)^{-1}\Big]_{2}^{R} = \frac{1}{\ln 2}$

* ① ทำให้อ่าน b_n (ง่ายๆ)

② ใช้ ① แล้วดึงตาม

* ③ การคูณ

④ เลขกำลัง n

⑤ เลขดังๆ โจทย์ Cal I final , $\ln n$

<u>อนุกรมสลับ</u> $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{|a_n|}_{\text{อนุกรมบวก}} \right)$

การลู่เข้า

① $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$

② $|a_{n+1}| < |a_n|$

- $|a_{n+1}| - |a_n| < 0$
- $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$
- $f'(x) < 0$

ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ – ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

- เข้า : สัมบูรณ์
- ออก : แบบมีเงื่อนไข

Ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt{n^2+1} - n \right)$

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \right|$

$(\infty - \infty)$

$\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = |n|$ $\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n \right)$

$= n$ $\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n}$

$\therefore \sqrt{n^2+1} - n > 0$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{(\cancel{n^2}+1) - \cancel{(n^2)}}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$ ① ✓

② กำหนดให้ $x \in [1,\infty)$ และ $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$

เพื่อ $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$= \frac{\overbrace{x - \sqrt{x^2+1}}^{\ominus}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\oplus}} < 0$$

$\therefore$ $|a_{n+1}| < |a_n|$ เป็นจริง

$\therefore$ อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$\displaystyle < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\;}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรม Harmonic

$p = 1 \leq 1$ เป็นอนุกรมลู่ออก

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ ลู่ออก โดย Comparison test

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข.

<u>Ex</u> $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{n}\right)$ ⑤ Integral test (u-sub)

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{\ln n}{n}\right) \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$

พิจารณา $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

$$= 0$$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ เป็นจริง

(2) กำหนดให้ $x \in [3, \infty)$ และ $f : [1, \infty)$ โดยที่

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad f'(x) = \frac{\cancelto{1}{x\left(\frac{1}{x}\right)} - \ln x}{x^2} \; \oplus$$

$$1 = \ln e < \ln 3 \leq \ln x$$

$$1 < \ln x$$

$$1 - \ln x < 0$$

$\therefore f'(x) < 0$; $|a_{n+1}| < |a_n|$ เป็นจริง

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{n}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

③ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \Longrightarrow x \in [3,\infty)\ ,\ f : [3,\infty) \to [0,\infty)$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$; เป็นฟังก์ชันลด

พิจารณา $\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ โดย $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

$\therefore \int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_3^R = \infty$ (ลู่ออก)

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\ln n / n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

Taylor's + Mac series.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylor's

$a=0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Mac.

Ex จงหาอนุกรม Taylor ของ $f(x) = \ln x$ รอบ $x = 1$
พร้อมทั้งหารัศมีการลู่เข้า (Ratio test)

$$f^{(0)}(x) = \ln x \quad ; \quad f^{(0)}(1) = \boxed{0}$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f^{(1)}(1) = \boxed{1}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \quad ; \quad f^{(3)}(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \quad ; \quad f^{(4)}(1) = -6$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$(-1)^{n+1} n!$

จ: ได้ว่า $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$

$$= 0 + (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} (x-1)^n$$

$$= (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-1)^n$$

$$= (x-1)^1 - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4 + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-1)^n$$

หาช่วงที่ซีรีส์มีทางลู่เข้า

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\overset{-1}{\cancel{(-1)^{n+2}}}\;\overset{x-1}{\cancel{(x-1)^{n+1}}}}{\cancel{(-1)^{n+1}}\;\cancel{(x-1)^{n}}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\overset{1}{\cancel{-1}}|\,|x-1| = \lim_{n\to\infty} |x-1|$$

$$< 1$$

$$|x-1| < 1 \;;\quad -1 < x-1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

แทน 0 แทน 2

แทน $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cancelto{(-1)^n}{(0-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1}$$

$$\cancel{(-1)^{2n}} \cdot (-1)^1$$

$$= -1 -1 -1 -1 -1 - \dots \text{(ลู่ออก)}$$

แทน $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cancelto{1}{(2-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \text{(ลู่ออก)}$$

$\therefore$ รัศมีการลู่เข้าคือ $x \in (0, 2)$ #

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$