$\frac{n}{n+1} \times \frac{(n+2)}{(n+2)} = \frac{n^2+2n}{n^2+3n+2}$

$\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1)}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{\cancel{n}}} = 1$ #

$\{2+(-1)^n\}$; $a_n = 2+(-1)^n$, $a_{n+1} = 2+(-1)^{n+1}$

$a_{n+1}-a_n = \cancel{2}+(-1)^{n+1} - (\cancel{2}+(-1)^n)$

$= (-1)^{n+1} - (-1)^n$

$\Downarrow$

$2, -2, 2, -2, \ldots$

หมวด ก (55 คะแนน)

1. จงทำเครื่องหมาย × ในช่อง [ ] ที่คิดว่าถูกต้องที่สุด

(6 คะแนน)

$\{\frac{n}{n+1}\}$; $a_n = \frac{n}{n+1}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n^2+3n+2}$ ⇒ ล.เพิ่ม

คำถาม	ลำดับ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$	ลำดับ $\{2+(-1)^n\}$
การเป็นลำดับทางเดียว	[✓] เป็นลำดับทางเดียว [ ] ไม่เป็นลำดับทางเดียว	[ ] เป็นลำดับทางเดียว [✓] ไม่เป็นลำดับทางเดียว
การลู่เข้าของลำดับ	[✓] ลู่เข้าสู่ค่า....1.... [ ] ไม่ลู่เข้า	[ ] ลู่เข้าสู่ค่า.......... [✓] ไม่ลู่เข้า
การมีขอบเขตของลำดับ	[✓] มีขอบเขต [ ] ไม่มีขอบเขต	[ ] มีขอบเขต [✓] ไม่มีขอบเขต

2. จงแสดงการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหรือไม่

2.1 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ Integrst test

(5 คะแนน)

① $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

② $f'(x) = \frac{\cancel{x(\ln x)^2(0)} - (1)[(\cancel{x}\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}) + (\ln x)^2(1)]}{(x(\ln x)^2)^2}$

$= -\frac{2\ln x + \ln x^2}{x^2(\ln x)^4}$

$= -\frac{\cancel{\ln x}(2+\ln x)}{x^2\cancel{(\ln x)^4}}$

$= -\frac{2+\ln x}{x^2(\ln x)^3}$ < ฟ.ลด

∴ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ เป็น อ.ลู่เข้า #

③ $\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_3^{b} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ ⇒ $\int \frac{1}{x^n}dx = \frac{-1}{(n-1)\cdot x^{n-1}}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{x(\ln x^2)} = \frac{-1}{1(\ln x)}$

$= \lim_{b\to\infty} \left. \frac{1}{-\ln x} \right|_3^b$ ⇒ บน - ล่าง

$= \lim_{b\to\infty} \left[-\cancel{\frac{1}{\ln b}}^{0} - \frac{-1}{\ln 3} \right]$

$= \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{1.09}$ หาค่าได้ #

Limit Comparison

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln n + (-1)^n}{n^3+4}$ $b_n = \frac{2\ln n + (-1)^n}{n^3}$ (5 คะแนน)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2\ln n + (-1)^n}}{n^3+4} \cdot \frac{n^3}{\cancel{2\ln n + (-1)^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{4}{\infty}_{0}} = 1 \neq 0$$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln n + (-1)^n}{n^3}$ อ.ลู่เข้า

แยกคิดได้

Divergence

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n^3}$

$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}_{0} \cdot \frac{1}{n^3}_{0} = 0$ อ.ลู่เข้า

อ.สลับ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ ① $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ ✓

② $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0$ ✓

①+② เป็น อ.ลู่เข้า

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln n + (-1)^n}{n^3+4}$ เป็น อ.ลู่เข้า #

Divergence

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+6}{n^5+n^4+2n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-n+6}{n^5+n^4+2n-3}$ (5 คะแนน)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^5}\left(\frac{4}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{6}{n^5}\right)}{\cancel{n^5}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^4} - \frac{3}{n^5}\right)}$$

$= 0$ อ.ลู่เข้า

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+6}{n^5+n^4+2n-3}$ เป็น อ.ลู่เข้า #

Root test

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$ (5 คะแนน)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{\cancel{n^2}^{\,n}}\right)^{\cancel{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^n \quad * \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

$$= \frac{\cancel{e^2}}{\cancel{e^3}} = \frac{1}{e} < 1 \quad \text{อ.ลู่เข้า}$$

$e \approx 2.71$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$ เป็น อ.ลู่เข้า #

Ratio test

2.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n}$; $a_n = \frac{(2n)!}{3^n}$; $a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{3^{n+1}}$ (4 คะแนน)

$(2n+2)(2n+1)(\cancel{2n!})$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)!}{\cancel{3^{n+1}}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{(2n)!}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{3}\right) \to \infty$$

$= \infty$ อ.ลู่ออก

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n}$ เป็น อ.ลู่ออก #

3. จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}}\right)$ ว่าเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (10 คะแนน)

(I) Check $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}}\right)$ เป็น อ.สลับ

① $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt[3]{n^2+\frac{1}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\underset{\downarrow\,\infty}{n^2}+\underset{\downarrow\,0}{\frac{1}{n^3}}}} = 0$ ✓

② ให้ $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^5+1}} \Rightarrow (x^5+1)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt[3]{x^5+1})(1)-(x)\frac{1}{3}(x^5+1)^{-\frac{2}{3}}(5x^4)}{(x^5+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{\cancel{(x^5+1)^{\frac{1}{3}}}}{\cancel{(x^5+1)^{\frac{2}{3}}}} - \frac{\frac{5}{3}x^5\,(x^5+1)^{-\frac{2}{3}}}{(x^5+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{(x^5+1)^{\frac{1}{3}}}}}_{\text{น้อย}} - \underbrace{\boxed{\frac{5}{3}x^5\left(\frac{1}{(x^5+1)^{\frac{4}{3}}}\right)}}_{\text{มาก}} < 0 \checkmark$$

$\sqrt[3]{n^5+1} = (n^5)^{\frac{1}{3}} + 1^{\frac{1}{3}}$
$= \sqrt[3]{n} + 1$

①+② $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}}\right)$ เป็น อ.ลู่เข้า

(II) test serise $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}}$ $< \frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}} < \frac{n}{\sqrt[3]{n^5}}$ Comparison

สร้าง $b_n = \frac{\cancel{n}}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \to \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ อ.พี $|p| = \frac{2}{3} < 1$
อ.ลู่ออก

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{\sqrt[3]{n^5+1}}\right)$ เป็น อ.ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข #

$$a_n = \frac{(-2)^n (X-2)^n}{n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(-2)^{n+1}(X+2)^{n+1}}{n+1}$$

4. จงหารัศมีของการลู่เข้าและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x-2)^n}{n}$ (10 คะแนน)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-2)^{n+1}}^{(-2)} \cancel{(X-2)^{n+1}}^{(X-2)}}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{(-2)^n}\cancel{(X-2)^n}} \right|$$

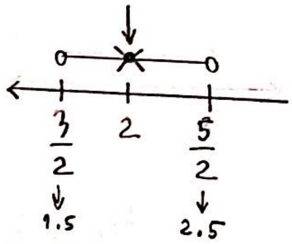
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)(X-2)(n)}{n+1} \right|$$

$$= |-2(X-2)| \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\, 1}{\cancel{n+1}}$$

$$= |-2X+4| < 1$$

อ.ลู่เข้า

$$-1 < -2X+4 < 1$$
$$-5 < -2X < -3$$
$$5 > 2X > 3$$
$$\frac{5}{2} > X > \frac{3}{2}$$



▧ ที่ $X = \frac{5}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(\frac{5}{2}-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(\frac{1}{2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$ อ.สลับ

① $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

② ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ✓

①+② เป็น อ.ลู่เข้า

▧ ที่ $X = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(\frac{3}{2}-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\cancel{2})^n(-\frac{1}{\cancel{2}})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n}$

① $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

② ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ✓

①+② เป็น อ.ลู่เข้า

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(X-2)^n}{n}$ เป็น อ.ลู่เข้าในช่วง $X \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ และรัศมีเป็น 0.5 หน่วย #

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

a_n

$- + - + - + \quad (-1)^n$

$+ - + - + - \quad (-1)^{n+1}$

5. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ รอบจุด $x=1$ (5 คะแนน)

$\boxed{x=1}$

$f(x)=\dfrac{1}{x+2} \Rightarrow f(1)=\dfrac{1}{3}$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x+2)^2} \Rightarrow f(1)=-\dfrac{1}{9}$

$f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3} \Rightarrow f(1)=\dfrac{2}{27}$

$f'''(x)=\dfrac{-6}{(x+2)^4} \Rightarrow f(1)=\dfrac{-2}{27}$

$\vdots$

$f^n(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \Rightarrow f(1)=\dfrac{(-1)^n n!}{(3)^{n+1}}$

$\boxed{\text{Taylor}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{f(1)(x-1)^0}{0!}+\frac{f'(1)(x-1)^1}{1!}+\dots+\frac{f^n(1)(x-1)^n}{n!}+\dots_{\infty}$$

เขียน อ. Taylor

$$= \frac{1}{3\cdot 0!}(x-1)^0-\frac{1}{9\cdot 1!}(x-1)^1+\frac{2}{27\cdot 2!}(x-1)^2+\dots+\frac{(-1)^n n!}{(3)^{n+1}n!}(x+1)^n+\dots$$

หาช่วงการลู่เข้า

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cancel{n!}}{3^{n+1}\cdot \cancel{n!}}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

หา $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{3^{n+2}}\cdot\dfrac{3^{n+1}}{(-1)^n(x-1)^n}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(x-1)}{3}\right|$$

$$=\frac{|(-1)(x-1)|}{3}\lim_{n\to\infty}$$

= หาค่าไม่ได้ #