Дано: $f(x,y)=x^4+2\cdot x^2 y+10\cdot x^2+6\cdot x\cdot y+10\cdot y^2-6\cdot x+4$
Найти $(x,y): f(x,y)=min$:

A) Для начала немного проанализируем данную функцию
   1. Область определения $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\}$
   2. По 1 нет вертикальных ассимптот
   3. Горизонтальных ассимптот тоже нет, т.к $\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y)=\infty\\ \lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)=\infty\end{matrix}$ (чётность старших степеней при x и y позволяет не рассматривать случаи: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,y)$ $\lim\limits_{y\to-\infty} f(x,y)$)

1. Вычислим частные производные f по x и y
   1. $\frac{\partial f}{\partial x}=4\cdot x^3+4\cdot x\cdot y+20\cdot x+6\cdot y-6$
   2. $\frac{\partial f}{\partial y}=2\cdot x^2+6\cdot x+20\cdot y$
2. Т.к $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\}=D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ (по А)1), то производные f существуют на всей её области определения.
3. Зная что в точке минимума производная равна нулю, приравняем к нему выражения 1.1 и 1.2
   1. $4\cdot x^3+4\cdot x\cdot y+20\cdot x+6\cdot y-6=0$
   2. $2\cdot x^2+6\cdot x+20\cdot y=0$
4. Из 3.2 найдём y
   1. $y=-\frac{x\cdot(x+3)}{10}$
5. В 3.1 заменим y на 4.1
   1. $18\cdot x^3-9\cdot x^2+91\cdot x-30=0$
6. Решим 5.1
   1. $18\cdot x^3-9\cdot x^2+91\cdot x-30=0$
      $x_0=\frac{1}{3}$
      $18\cdot x^3-9\cdot x^2+91\cdot x-30=18\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x^2-\frac{1}{6}\cdot x+5\right)=0$
      $\left(\frac{1}{6}\right)^2-4\cdot 5<0\Rightarrow\nexists x_i: x_i\in\mathbb{R}$
7. В 6.1 нашли единственный действительный корень 5.1, подставим его в 4.1
   1. $y=-\frac{1}{9}$
8. Подставим значения x из 6.1 и y из 7.1 в 3.1 и 3.2 для проверки
   1. $4\cdot x^3+4\cdot x\cdot y+20\cdot x+6\cdot y-6=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{20}{3}-\frac{6}{9}-6=0$
   2. $2\cdot x^2+6\cdot x+20\cdot y=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+6\cdot\frac{1}{3}-\frac{20}{9}=0$
9. Найдём промежутки монотонности 1.1 и 1.2

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot x^3 + 4 \cdot x \cdot y + 20 \cdot x + 6 \cdot y - 6 = 4 \cdot x^3 - \frac{4}{9} \cdot x + 20 \cdot x - \frac{20}{3} = a$$

1. $a > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ -> f возрастает

$a < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

при $x > \frac{1}{3}$, убывает при $x < \frac{1}{3}$ -> $x = \frac{1}{3}$ - x-координата точки минимума f

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 20 \cdot y = 20 \cdot y + \frac{20}{9} = b$$

2. $b > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{9}$ -> f возрастает при $y > -\frac{1}{9}$, убывает при

$b < 0 \Rightarrow y < -\frac{1}{9}$

$y < -\frac{1}{9}$ -> $y = -\frac{1}{9}$ - y-координата точки минимума f

10. Таким образом, $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)$ - точка минимума f

Графики функции f (шаг по осям переменных - .01, чёрная плоскость проведена на высоте $f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$,красным обозначена точка $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)$), сделано с использованием библиотеки matplotlib