Дано:
$$f(x,y)=x^4+2\cdot x^2y+10\cdot x^2+6\cdot x\cdot y+10\cdot y^2-6\cdot x+4$$

Найти (x,y) : $f(x,y)=min$:

- А) Для начала немного проанализируем данную функцию
 - 1. Область определения $D(f) = x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R}$
 - 2. По 1 нет вертикальных ассимптот
 - 3. Горизонтальных ассимптот тоже нет, т.к $\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} f(x,y) = \infty \\ \lim_{\substack{y\to\infty}} f(x,y) = \infty$ (чётность старших

степеней при x и y позволяет не рассматривать случаи: $\lim_{x \to -\infty} f(x,y) = \lim_{v \to -\infty} f(x,y)$)

1. Вычислим частные производные f по x и y

1.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot x^3 + 4 \cdot x \cdot y + 20 \cdot x + 6 \cdot y - 6$$

2.
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 20 \cdot y$$

- 2. Т.к $D(f) = [x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R}] = D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ (по A)1), то производные f существуют на всей её области определения.
- 3. Зная что в точке минимума производная равна нулю, приравняем к нему выражения 1.1 и 1.2

1.
$$4 \cdot x^3 + 4 \cdot x \cdot y + 20 \cdot x + 6 \cdot y - 6 = 0$$

2.
$$2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 20 \cdot y = 0$$

4. Из 3.2 найдём у

1.
$$y = -\frac{x \cdot (x+3)}{10}$$

5. В 3.1 заменим у на 4.1

1.
$$18 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 91 \cdot x - 30 = 0$$

6. Решим 5.1

$$18 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 91 \cdot x - 30 = 0$$
$$x_0 = \frac{1}{3}$$

1.
$$18 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 91 \cdot x - 30 = 18 \cdot \left(x - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{6} \cdot x + 5 \right) = 0$$
$$\left(\frac{1}{6} \right)^2 - 4 \cdot 5 < 0 \Rightarrow \nexists x_i : x_i \in \mathbb{R}$$

7. В 6.1 нашли единственный действительный корень 5.1, подставим его в 4.1

1.
$$y = -\frac{1}{9}$$

8. Подставим значения х из 6.1 и у из 7.1 в 3.1 и 3.2 для проверки

1.
$$4 \cdot x^3 + 4 \cdot x \cdot y + 20 \cdot x + 6 \cdot y - 6 = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{20}{3} - \frac{6}{9} - 6 = 0$$

2.
$$2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 20 \cdot y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{3} - \frac{20}{9} = 0$$

9. Найдём промежутки монотонности 1.1 и 1.2

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot x^3 + 4 \cdot x \cdot y + 20 \cdot x + 6 \cdot y - 6 = 4 \cdot x^3 - \frac{4}{9} \cdot x + 20 \cdot x - \frac{20}{3} = a$$

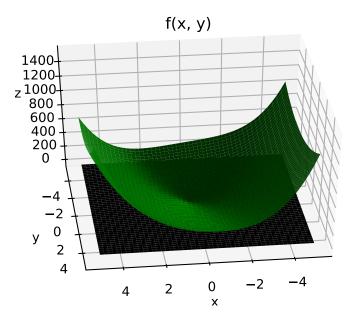
1.
$$a > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$
 -> f возрастает $a < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

при
$$x > \frac{1}{3}$$
 , убывает при $x < \frac{1}{3}$ -> $x = \frac{1}{3}$ - x-координата точки минимума f
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 20 \cdot y = 20 \cdot y + \frac{20}{9} = b$$

2.
$$b > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{9}$$
 -> f возрастает при $y > -\frac{1}{9}$, убывает при $b < 0 \Rightarrow y < -\frac{1}{9}$ $y < -\frac{1}{9}$ -> $y = -\frac{1}{9}$ - y-координата точки минимума f

10. Таким образом,
$$\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)$$
 - точка минимума f

Графики функции f (шаг по осям переменных - .01, чёрная плоскость проведена на высоте



 $f\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9}\right)$,красным обозначена точка $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{9}\right)$), сделано с использованием библиотеки matplotlib

