Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse

# Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 1

*Sommersemester 2023*

**Webpage:** *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/qm_2023.html/*

**Abgabe**: bis **Mittwoch, 19.04.23, 10:00** in elektronischer Form per ILIAS unter https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_5154210.html

## 1. Zur Diskussion *0 Punkte*

**a)** Was ist ein komplexer Vektorraum?

**b)** Was ist eine hermitesches Skalarprodukt?

**c)** Was ist eine unitärer Vektorraum?

## 2. Stern-Gerlach-Experiment *2+2+4=8 Punkte*

In $z$-Richtung positiv bzw. negativ polarisierte Silberatome seien durch orthonormale Zustandsvektoren $\varphi_{z+}$ bzw. $\varphi_{z-}$ beschrieben. In $x$- bzw. $y$-Richtung polarisierte Atome sind dann beschrieben durch Zustandsvektoren

$$\varphi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} + \varphi_{z-}), \qquad \varphi_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} - \varphi_{z-}),$$

$$\text{und} \qquad \varphi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} + i\varphi_{z-}), \qquad \varphi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{z+} - i\varphi_{z-})$$

(vgl. Vorlesung).

**a)** Bestimmen Sie die Betragsquadrate der Skalarprodukte $\langle \varphi_{x+}, \varphi_{y+} \rangle$ und $\langle \varphi_{z+}, \varphi_{y-} \rangle$.

**b)** Zeigen Sie, dass

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\varphi_{x+} + \varphi_{y+})$$

ein normierter Vektor (und damit ein Zustandsvektor) ist.

**c)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine $\mu_y$-Messung an einem Silberatom im Zustand $\psi$ das Ergebnis $+\mu_0$ bzw. $-\mu_0$? Welcher Erwartungswert $\langle \mu_y \rangle_\psi$ ergibt sich daraus?

## 3. Superposition und Gemisch *4 Punkte*

Wir betrachten zwei Quellen $A$ und $B$ von Silberatomen. Quelle $A$ emittiert Silberatome, deren Spin sich jeweils in der quantenmechanischen Superposition $\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{z+} + \varphi_{z-})$ von "up" und "down" befindet (bzgl. $z$-Richtung). Quelle $B$ emittiert dagegen Silberatome in einem sogenannten Zustands-Gemisch, bei dem sich der Spin eines Atomes zufällig im Zustand $\varphi_{z+}$ ("up") oder im Zustand $\varphi_{z-}$ ("down") befindet (bzgl. $z$-Richtung), jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Wie kann man anhand von Messungen an den Atomen der jeweiligen Quelle entscheiden, ob Quelle $A$ oder $B$ vorliegt? Oder ist das am Ende unmöglich und die quantenmechanische Superposition ist nicht von dem Zustandsgemisch zu unterscheiden?

## 4. Pauli-Matrizen *6+3=9 Punkte*

Die Komponenten $\mu_x$, $\mu_y$ und $\mu_z$ des magnetische Momentes $\vec{\mu}$ eines Silberatoms bilden Observablen, die durch Operatoren

$$\begin{aligned}\mu_x &= \mu_0\left(P_{\varphi_{x+}} - P_{\varphi_{x-}}\right)\\ \mu_y &= \mu_0\left(P_{\varphi_{y+}} - P_{\varphi_{y-}}\right)\\ \mu_x &= \mu_0\left(P_{\varphi_{z+}} - P_{\varphi_{z-}}\right)\end{aligned}$$

dargestellt werden können (vgl. Vorlesung). Hierbei bezeichnet $P_\chi$ die Orthogonalprojektion auf einen normierten Vektor $\chi$. Die Vektoren $\varphi_{x\pm}$, $\varphi_{y\pm}$, $\varphi_{z\pm}$ sind wie in Aufgabe **1.** definiert.

**a)** Zeigen Sie, dass die Abbildungsmatrizen dieser Operatoren bzgl. der ONB $(\varphi_{z+}, \varphi_{z-})$ bis auf den Faktor $\mu_0$ durch die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, also $\mu_x = \mu_0\sigma_1$, $\mu_y = \mu_0\sigma_2$ und $\mu_z = \mu_0\sigma_3$ (unter der üblichen Gleichsetzung von Symbolen für Operatoren und deren Abbildungsmatrizen).

**b)** Bestimmen Sie Eigenwerte und -vektoren der Pauli-Matrizen. [Tipp: Aufgabenteil **a)** . ]

## 5. Verallgemeinerte Euler-Formel *6 Punkte*

Eulers Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (für $\varphi \in \mathbb{R}$) besitzt eine in der Quantenmechanik nützliche Verallgemeinerung für Pauli-Matrizen:

$$e^{i\sigma_j\,\varphi} = \mathbf{1}\cos\varphi + i\sigma_j\sin\varphi, \qquad j = 1,2,3\,, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Beweisen Sie diese Beziehung, indem Sie sich an den Beweis der Euler-Formel erinnern und Sie sich zudem davon überzeugen, dass für $l \in \mathbb{N}$

$$\sigma_j^{2l} = \mathbf{1}, \qquad \sigma_j^{2l+1} = \sigma_j\,.$$

Für einen Operator $A$ ist $e^A$ durch die Potenzreihe der Exponentialfunktion definiert: $e^A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$.