Theoretische Physik II – Quantenmechanik – Blatt 8

Sommersemester 2023

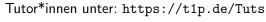
Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/qm 2023.html/

Abgabe: bis Mittwoch, 14.06.23, 10:00 in elektronischer Form per ILIAS unter

https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto uk crs 5154210.html

Wer möchte, kann an einer Umfrage der Uni Darmstadt teilnehmen.

Studierende unter: https://t1p.de/Stud







28. Zur Diskussion

0 Punkte

a und a^{\dagger} seien Vernichter- und Erzeugeroperator eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω .

- a) Was ist $[a, a^{\dagger}]$?
- b) Wie lautet der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators in a und a^{\dagger} ?
- c) Welche Werte nehmen folgende Ausdrücke an?

$$\langle 2|a^{\dagger}a|2\rangle$$
, $\langle 2|a|2\rangle$, $\langle 2|aa^{\dagger}|2\rangle$, $\langle 0|a|1\rangle$, $\langle 2|a^{\dagger}|1\rangle$.

29. Orts- und Impulsvarianz in Ozillatorzuständen

6 Punkte

a und a^{\dagger} seien die aus der Vorlesung bekannten Vernichter- und Erzeugeroperatoren eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω . Zeigen Sie, dass damit die Quadrate von Orts- und Impulsoperator dargestellt werden können als

$$x^2 = l^2 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (a^{\dagger^2} + a^2) \right) \qquad \text{und} \qquad p^2 = \frac{\hbar^2}{l^2} \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (a^{\dagger^2} + a^2) \right) \; ,$$

wobei $l=\sqrt{\hbar/m\omega}$ die charakteristische Länge des Oszillators ist. Ermitteln Sie anhand dieser Beziehungen die Erwartungswerte von x^2 und p^2 in den Energieeigenzuständen $|n\rangle$ des Oszillators. Welchen Wert erhalten Sie für das Produkt von Orts- und Impulsunschärfe $\Delta x \Delta p = (\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle)^{1/2}$ im n-ten Eigenzustand?

30. Harmonischer Oszillator

2+3=5 Punkte

- a) Begründen Sie, dass die Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ eines harmonischen Oszillators für gerade n symmetrische und für ungerade n antisymmetrische Funktionen sind.
- b) Ein Teilchen der Masse m bewege sich im eindimensionalen Potenzial

$$U(x) = \begin{cases} \infty & : x \le 0 \\ \frac{m\omega^2}{2}x^2 & : x > 0 \end{cases}$$

Wie lauten die Eigenenergieen des Systems?

Für Operatoren A und B, die jeweils mit dem Kommutator [A, B] vertauschen, gilt die Identität

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$
 (1)

Beweisen Sie diese Identiät, indem Sie zuerst zeigen, dass die operatorwertige Funktion

$$f_1(t) := e^{At}e^{Bt}$$

eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{f}(t) = (A + B + [A, B]t) f(t)$$

zum Anfangswert 1 bei t=0 ist. Duch direkte Integration der DGL können Sie diese spezielle Lösung ebenfalls erhalten, was Ihnen für t=1 dann die zu beweisenden Identität liefert. Beim Umformen der Ableitung von $f_1(t)$ ist die in Aufgabe 8b) gezeigte* Identität

$$e^A B e^{-A} = e^{[A,...]} B \equiv B + [A,B] + \frac{1}{2!} [A,[A,B]] + \frac{1}{3!} [A,[A,A,B]] + \cdots$$

hilfreich. Die Identität (1) ist ein Spezialfall der allgemeineren Baker-Campbell-Hausdorff-Identität.

32. Kohärente Zustände

 $2 \times 5 = 10$ Punkte

a und a^{\dagger} seien Vernichter- und Erzeugeroperatoren eines harmonische Oszillators der Frequenz ω . Für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist der Displacement-Operator $D(\alpha)$ gegeben durch

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^{\dagger} - \alpha^* a},$$

der kohärente Zustand $|c(\alpha)\rangle$ des Oszillators ist definiert durch

$$|c(\alpha)\rangle := D(\alpha)|0\rangle$$

(vgl. Vorlesung).

- a) Was ist die physikalische Bedeutung des Operators $D(\alpha)$? Was ergibt sich damit für die Erwartungswerte von x, p bzw. deren Varianzen $(x-\langle x\rangle)^2$, $(p-\langle p\rangle)^2$ im kohärenten Zustand $|c(\alpha)\rangle$?
- b) Zeigen Sie, dass

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^{\dagger}} e^{-\alpha^* a}$$

c) Zeigen Sie mittels b), dass

$$|c(\alpha)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

d) Zeigen Sie mittels c), dass

$$U(t) |c(\alpha)\rangle = e^{-i\omega t/2} |c(e^{-i\omega t}\alpha)\rangle$$
.

Interpretieren Sie dieses Ergebnis. U(t) ist wie immer der Zeitentwicklungoperator.

e) Zeigen Sie, dass $|c(\alpha)\rangle$ ein (rechter) Eigenvektor des Operators α zum Eigenwert α ist, d.h.

$$a |c(\alpha)\rangle = \alpha |c(\alpha)\rangle$$
.

^{*}setze dazu $iHt/\hbar \equiv A$ und $A_H(0) \equiv B$