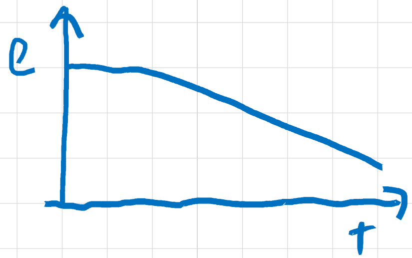
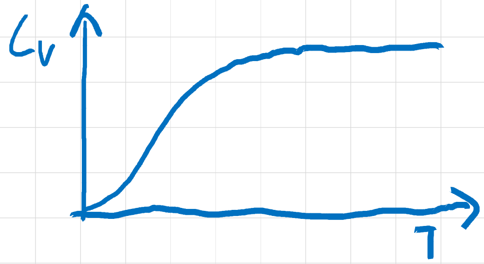
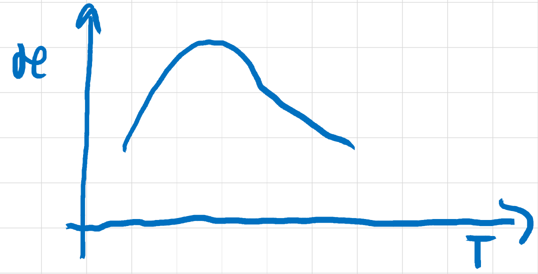
- Wärmeleitfähigkeit $\vec{j}_Q = -\varkappa \nabla T$ $\qquad \varkappa = \frac{1}{3} v \cdot \ell \cdot \frac{C_V}{V}$

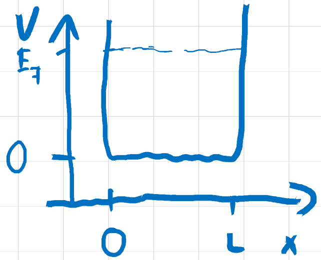
- 

- 

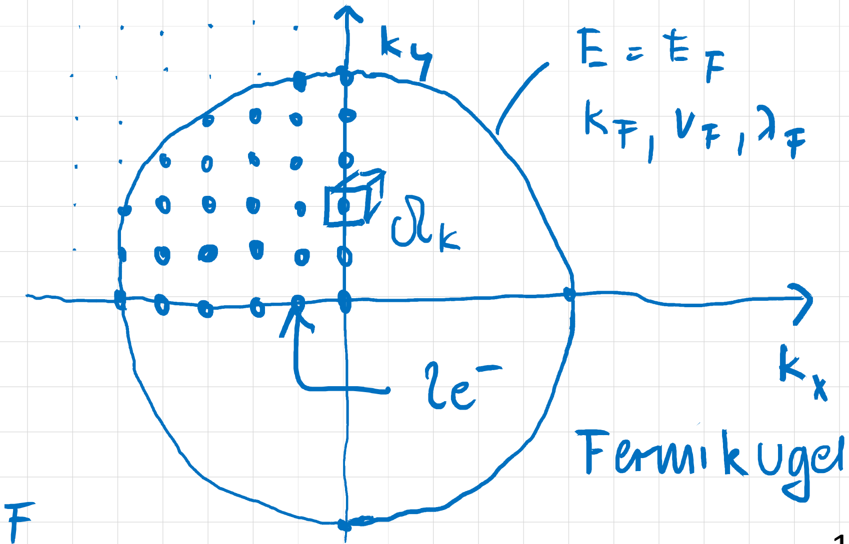
$\Rightarrow$



- freies e^- - Gas



; $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$; $k_i = \frac{2\pi}{L} n_i$ $\quad i = x, y, z \,,\; n_i \in \mathbb{Z}$



- Zustandsdichte $\qquad Z(k) = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3}$

$$D(E) = \frac{V}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E}$$

- $\bar{E}_{qm} = \frac{3}{5} k_B \cdot T_F \gg \bar{E}_{klass} = \frac{3}{2} k_B T$ für $T \ll T_F$

7.2 Das freie Elektronengas für $T > 0$

Da i. A. $k_B T \ll k_B T_F$ sind Anregungen nur in der Nähe von E_F, d.h. nahe der Fermifläche möglich. Im tiefen Innern der Fermikugel sind thermische Anregungen verboten, denn bei Einhaltung des Energiesatzes wäre der Endzustand ein bereits besetzter Zustand.

Quantitativ beschreibt die Fermi-Dirac Verteilung die Besetzungswahrsch. von Zuständen für endliche T:

$$\boxed{f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}}$$

Fermi-Dirac Verteilung

$\mu \hat{=}$ chemische Potential (später)

Es gelten folgende Verteilungsfunktionen

Spin	Teilchen	Verteilungsfunktion	
halbzahlig $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	Fermionen	Fermi - Dirac	$f(E) = \frac{1}{e^{E-\mu/k_BT}+1}$
ganzzahlig 0, 1	Bosonen	Bose - Einstein	$\bar{n} = \frac{1}{e^{E-\mu/k_BT}-1}$

Sei $T = 0$ Für $E < \mu \Rightarrow f(E) = \left(e^{-\infty}+1\right)^{-1} = 1$

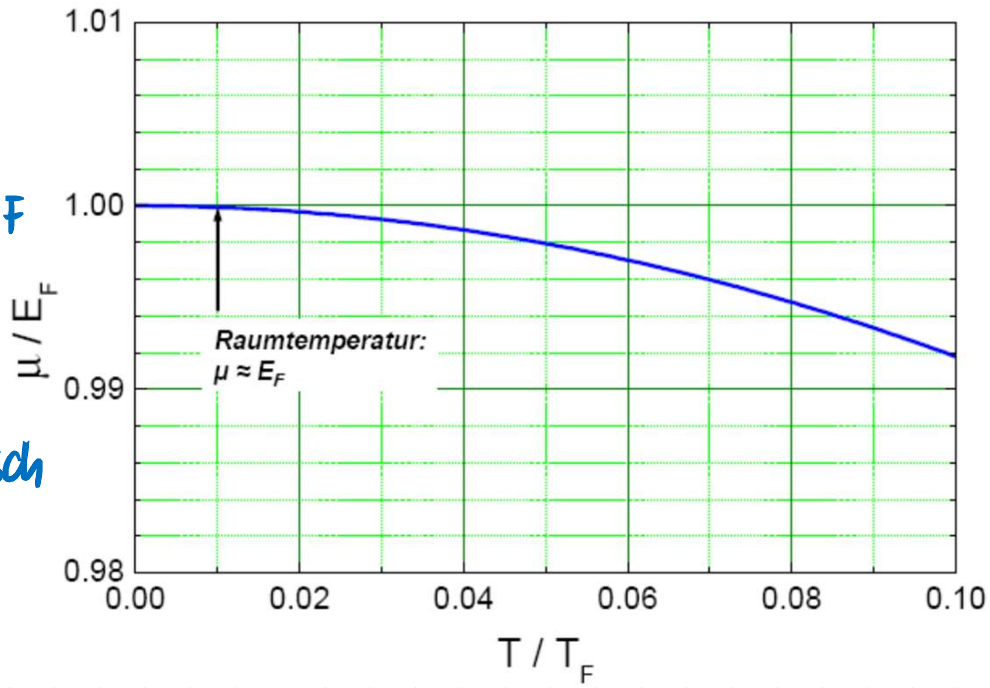
$E > \mu \Rightarrow f(E) = \left(e^{+\infty}+1\right)^{-1} = 0$

Alle Zustände mit $E < \mu$ besetzt, mit $E > \mu$ unbesetzt $\Rightarrow \mu = E_F$

sei $T \neq 0$

$$\mu(T) = E_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right] \quad \text{(ohne Beweis)}$$

Da für Metalle bei 300 K typisch $\frac{T}{T_F} \approx 10^{-2}$
ist auch bei 300 K in guter Näherung $\mu = E_F$



Definition des chemischen Potentials:

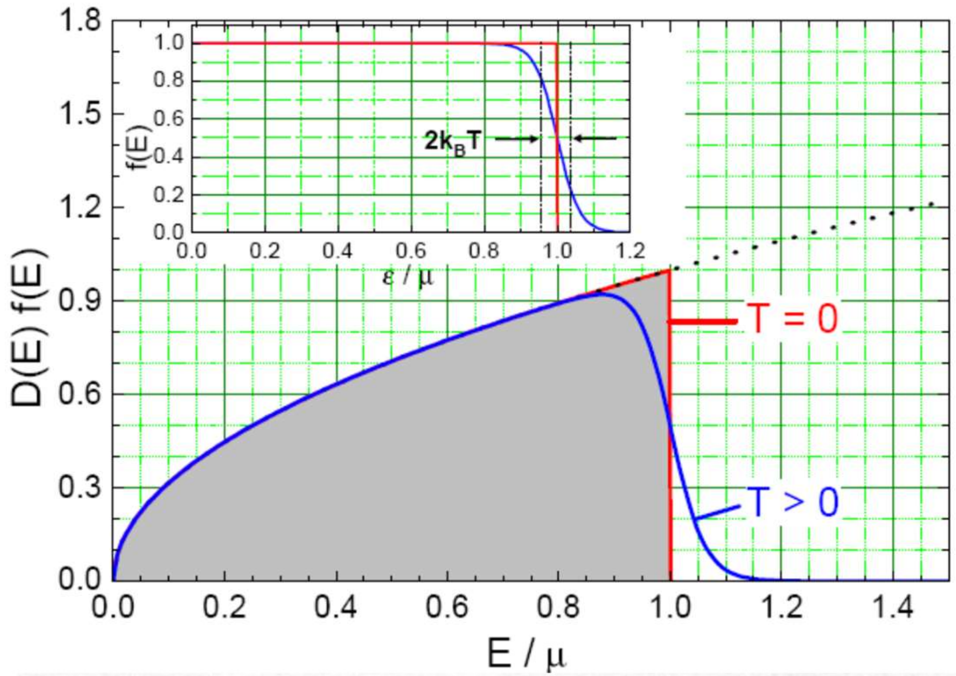
Stehen 2 Systeme im Kontakt, so dass Austausch von Wärme und Teilchen möglich ist, so müssen ihre T und ihre μ gleich sein.

μ ist die freie Energie $F = E - TS$ die nötig ist um ein Teilchen einem System hinzuzufügen, oder auch die Gibbsche freie Energie pro Teilchen: $\mu = \frac{G}{N}$.

Für $T \ll T_F$ wo $E_F \approx \mu$ weicht $f(E)$ nur in einem Bereich der Breite $2k_BT$ um E_F von $f(E)$ für $T=0$ ab

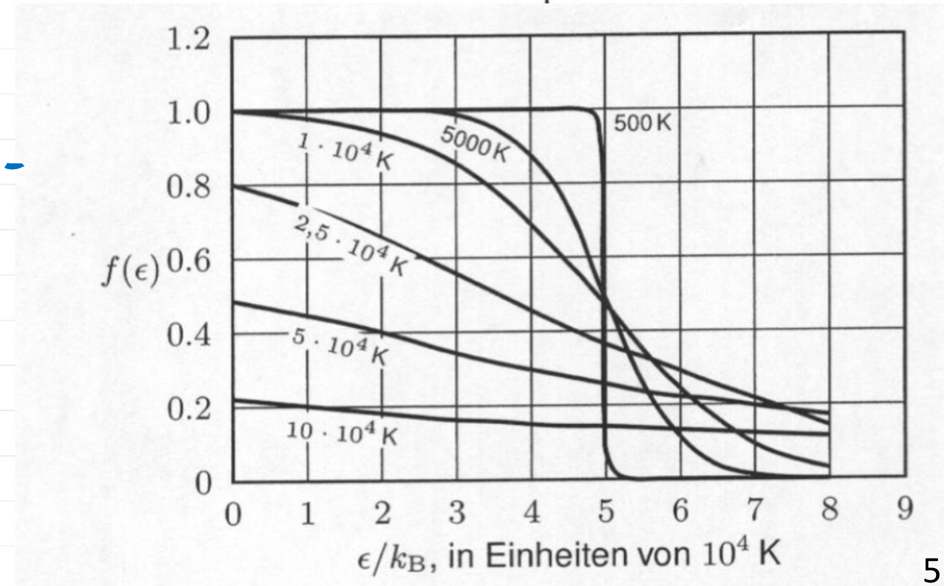
$$f(E_F + k_BT) = \frac{1}{e^{(E_F + k_BT - \mu)/k_BT} + 1} \approx \frac{1}{e^{+1}+1} \approx \frac{1}{4}$$

$$f(E_F - k_BT) = \frac{1}{e^{(E_F - k_BT - \mu)/k_BT} + 1} \approx \frac{1}{e^{-1}+1} \approx \frac{3}{4}$$



Für $T > T_F$ geht $f(E)$ in die Boltzmann-verteilung (klassische Verteilungsfunktion) über. $T \gg T_F \rightarrow \mu \rightarrow 0$

$$f(E) \approx \frac{1}{e^{E/k_BT}+1} \approx e^{-E/k_BT}$$



Warum hat $f(E)$ keine Auswirkung auf atomare Gase mit Spin $\frac{1}{2}$ (z.B Ag)

$$\left.\begin{aligned} n_{gas} &\approx 10^{-3}\, n_e \quad \Rightarrow \quad k_{F,gas} \sim n^{1/3} \approx 10^{-1}\, k_{F,e} \\ m_{gas} &\approx 10^{5}\, m_e \quad \Rightarrow \quad E_{F,gas} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx 10^{-7}\, E_{F,e} \end{aligned}\right\} T_{F,gas} \approx 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{4}\,K \approx 5 \cdot 10^{-3}\,K$$

Also ist bei allen üblichen $T \gg T_F$ und die Boltzmannstatistik gilt.

- Beitrag der e^- zur Wärmekapazität (für Metalle)

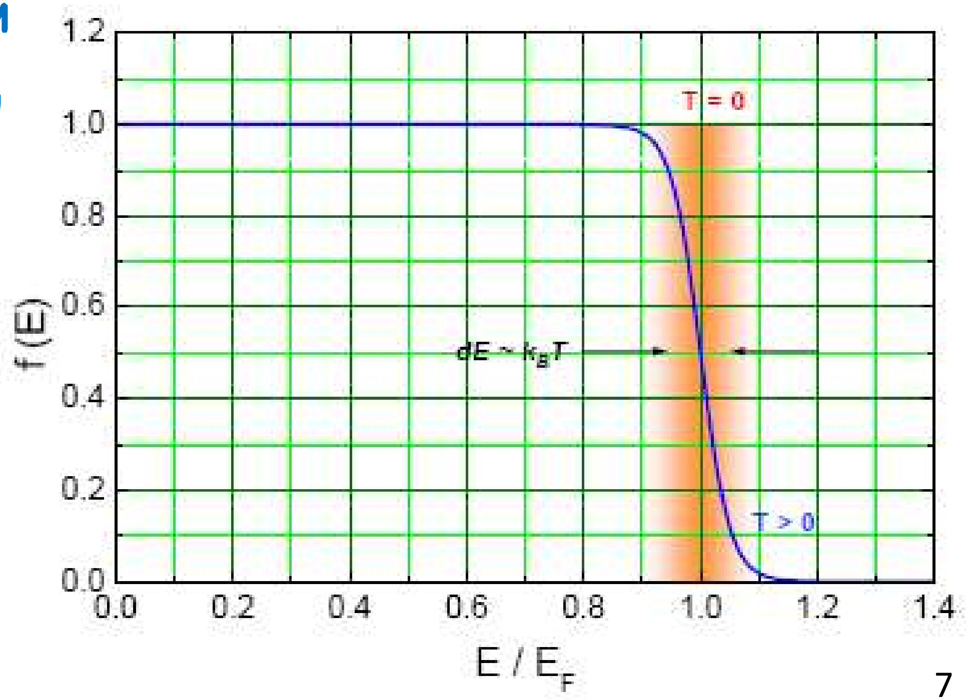
Klassische Erwartung: $\bar{E} = \frac{3}{2} k_B T$ pro Valenz-e^- (3 Freiheitsgrade)

Also $\bar{U} = N\bar{E} = \frac{3}{2} N k_B T$

und damit $C_{V,e} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial T}\Big|_V = \frac{3}{2} N k_B$

d.h. das Elektronengas sollte den halben Dulong-Petit Wert ($3Nk_B$) bei Metallen beitragen.
Experimentell bei 300 K beobachtet $C_{V,e} \approx 0{,}01\, C_{V,\text{Gitter}}$
Diskrepanz erstaunlich, weil klassische Theorie des e^--Gas mit guten Ergebnissen für die Leitfähigkeit.

Qualitative Erklärung: Nur e^- in einem Bereich der Breite k_BT um E_F können thermisch angeregt werden, wobei die typische Anregungsenergie k_BT.
Alle anderen e^- im Innern der Fermi-kugel können aufgrund des Pauli-Prinzips nicht angeregt werden: sie müssten auf besetzte Plätze.



Also ist nur ein Bruchteil $\frac{T}{T_F}$ der e^- anregbar, d.h. die thermische Energie der e^- ist

$$U_{th} \approx \frac{T}{T_F} N k_B T$$

und damit
$$C_V = \frac{\partial U_{th}}{\partial T}\Big|_V \approx 2 N k_B \cdot \frac{T}{T_F}$$

Da $\frac{T}{T_F} \approx 0{,}01$ bei 300 K ist das Rätsel gelöst.