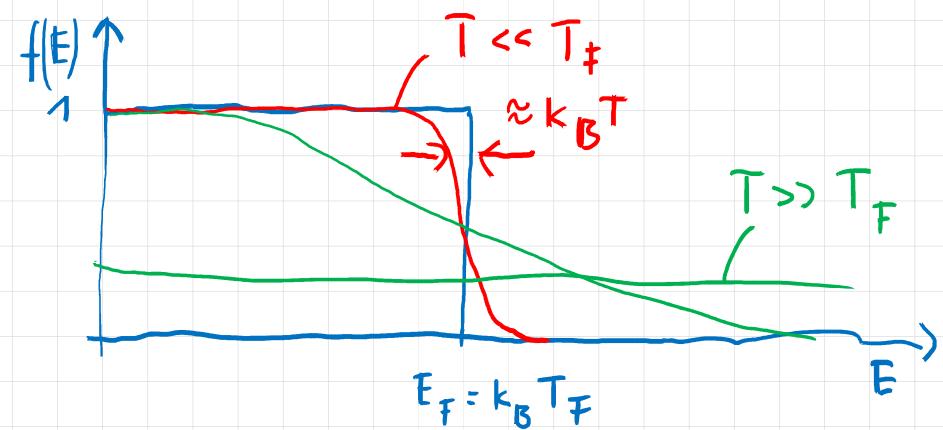


- Fermi - Dirac Verteilung

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$



- chemisches Potential: Systeme mit Teilchenaustausch im Gleichgewicht, wenn μ, T gleich. Freie Energie um Teilchen ins System hinzufügen

$$\mu(T) = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \approx E_F \text{ für } T \ll T_F$$

- Rätsel um $C_{V,C}$: $C_{V,e} \approx 0,01 C_{V,e \text{ klassisch}}$ bei 300 K

Wegen Pauli-Prinzip nur Bruchteil $\frac{I}{T_F}$ ausregbar, also
thermische Energie der e^-

$$U_{th} \propto \frac{T}{T_F} \cdot N k_B T$$

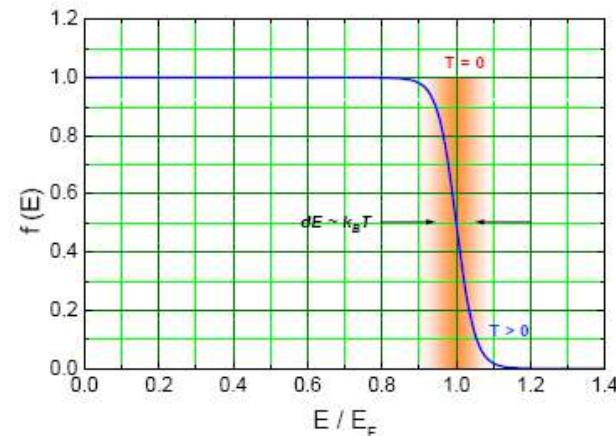
und damit

$$C_{V,e} = \frac{\partial U_{th}}{\partial T} \Big|_V \approx 2 N k_B \cdot \frac{T}{T_F}$$

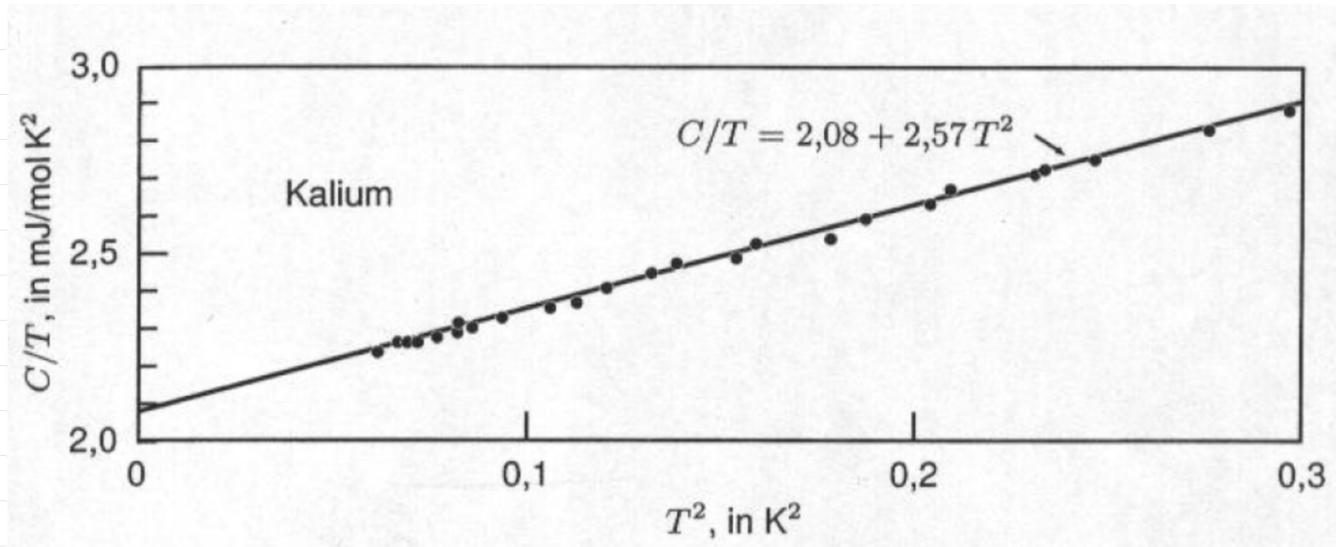
Da $\frac{T}{T_F} \approx 0,01$ bei 300K ist das Rätsel gelöst.

Eine genauere Rechnung liefert $C_{V,e} \approx \frac{n^2}{2} N k_B \cdot \frac{T}{T_F}$ in guter
Übereinstimmung mit der Abschätzung

Für Rechnung siehe Aufhang



Bei tiefem T wird $C_{V,C}$ um Vergleich zu $C_{V,\text{Gitter}}$ erheblich, weil $C_{V,\text{Gitter}} \sim T^3$ und damit $C_{V,\text{Gitter}} \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$



Wir schreiben

$$C_V = \underbrace{\gamma \cdot T}_{\text{elektronischer Beitrag}} + \underbrace{\alpha T^3}_{\text{Gitterbeitrag}}$$

Experimentelle Daten werden als

$$\frac{C_V}{T} = \underbrace{\gamma}_{y\text{-Achsenabschnitt}} + \underbrace{\alpha T^2}_{x\text{-Achse Steigung}}$$

Die Größe des Relativabschlags γ weicht häufig vom erwarteten Wert $\frac{\pi^2}{2} k_B N \frac{1}{T_F}$ ab. Führt man eine effektive thermische Masse m_{eff} durch

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{\pi^2 k_F^2}{k_B 2m_{\text{eff}}} \quad \text{ein,}$$

so kann man die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment verbessern.

Ursachen für die Abweichung:

1. WW der e^- unter periodischem Potential

2. e^- -Phonon WW. e^- deformieren Gitter

und schleppen Deformation mit.

Solche e^- -Deformationskomplexe heißen Polaronen

3. $e^- - e^-$ WW

Metall	γ_{exp} ($10^{-3} \text{ J / mol K}$)	γ_{theor} ($10^{-3} \text{ J / mol K}$)	$\gamma_{\text{exp}}/\gamma_{\text{theor}}$
Li	1.63	0.749	2.18
Na	1.38	1.094	1.26
K	2.08	1.668	1.25
Rb	2.41	1.911	1.26
Cs	3.20	2.238	1.43
Fe	4.98	0.498	10
Co	4.98	0.483	10.3
Ni	7.02	0.458	15.3
Cu	0.695	0.505	1.38
Ag	0.646	0.645	1.00
Au	0.729	0.642	1.14
Sn	1.78	1.41	1.26
Pb	2.98	1.509	1.97

sogenannte „schwere“ Fermiananverbindingen wie UBe_{13} , CeAl_3 zeigen
bis zu 10^3 -fache thermische Massen.

7.3 Transporteigenschaften des Elektronengases (Fermi statistik + kin Gasttheorie)

Annahmen:

- 1.) Stöße ändern \vec{v} der e^- abrupt (wo mit e^- stoßen? - später)
- 2.) Stoßwahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit $\frac{1}{\tau}$, d.h. Stoßwahrscheinlichkeit in dt ist $\frac{dt}{\tau}$. τ heißt Relaxationszeit
 - τ ist die mittlere Zeit zwischen 2 Stößen
 - ein zufällig herausgegriffenes e^- hat im Mittel seinen letzten Stoß vor der Zeit τ gefehlt und im Mittel seinen nächsten Stoß nach der Zeit τ .
- 3.) e^- kommen durch Stöße ins lokale Gleichgewicht.
Es gibt keine Korrelation von \vec{v} vor dem Stoß zu \vec{v} nach dem Stoß.

Die Aussagen unter 2.) erscheinen widersprüchlich (Wartezeit paradox), sind aber allgemein für Zufallsverteilungen gültig.

Ursache veranschaulicht Abbildung:
Im Mittel greift man häufiger mit einer langen Zeit t seit Stoß heraus, da lange Zeitintervalle die meiste Zeit auf dem „Zeitstreul“ belegen.

Ohmsches Gesetz: Strom durch Draht prop. in Spannungsabfall

$$U = R \cdot I$$

R hängt nur von Geometrie, nicht von I, U ab.

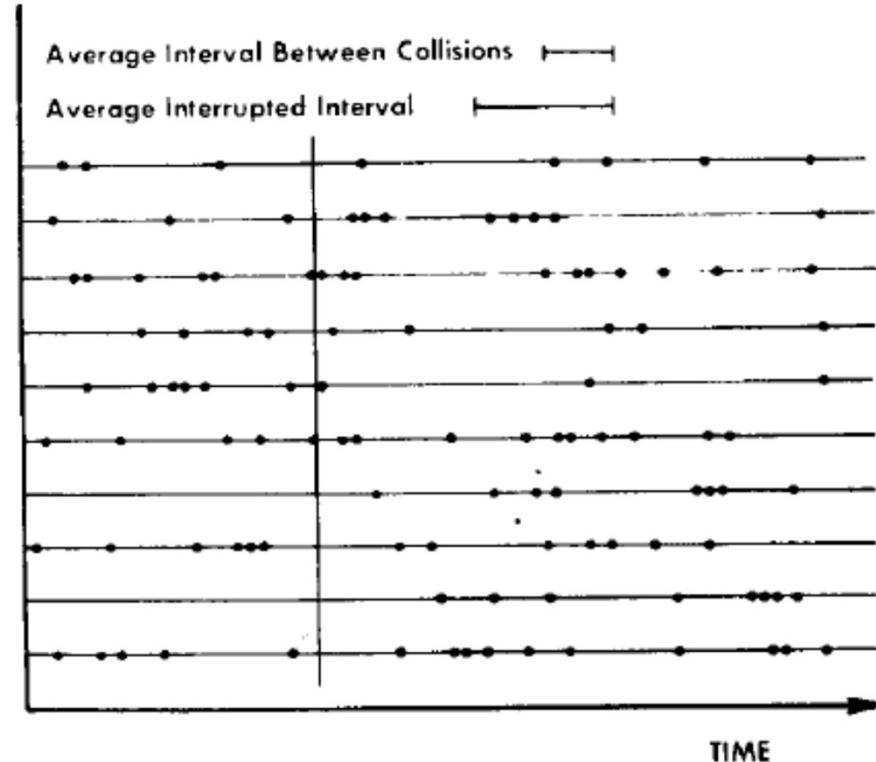


Fig. 1. The paths in time for 10 imaginary electrons. Each horizontal line represents the history of a single electron, and the dots represent randomly generated collisions. If the electrons are viewed at some instant, represented by the vertical line, the average interval between the last and next collision is about twice the average time between collisions.

Um die Geometrie aus dem Problem zu eliminieren schreiben wir

$$\boxed{\vec{E} = \rho \cdot \vec{j}}$$

\vec{E} -Feld $\uparrow \Sigma$ Stromdichte, Vektor \parallel Ladungsfluss
spezifische elektrische Widerstand [Sbm]

$|\vec{j}| = j \hat{=} \text{Ladung pro Zeit und Fläche } \perp \text{ zu } \vec{j}$

Berechnung folgt, da für Draht: $j = \frac{I}{A}$ $U = E \cdot L \Rightarrow U = I \cdot \left(\rho \cdot \frac{L}{A} \right)$

Annahme: Alle e^- besitzen \vec{v}_b (Driftgeschwindigkeit), wandern in der Strecke $\vec{v}_b \cdot dt$ in Richtung \vec{v}_b . Durch die Fläche $A \perp \vec{v}_b$ tritt dann die Ladung $dQ = -ne A \vec{v}_b \cdot dt$ (n = Elektronendichte)

Also $\vec{j} = -ne \vec{v}_b$ (*)

Bewegen sich e^- in zufällige Richtungen, so ist in (*) $\vec{v}_0 = \overline{\vec{v}}$

Für $\vec{E} = 0 \Rightarrow \overline{\vec{v}} = 0 \Rightarrow \vec{j} = 0$

Für $\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \overline{\vec{v}} \neq 0$

Behachte e^- mit Stöß vor Zeit $t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \left(-\frac{e \vec{E} \cdot t}{m} \right)$

$$\text{da } \overline{\vec{v}_0} = 0 \text{ nur } \vec{v}_{\text{add}} \text{ relevant} \quad \overline{\vec{v}}_{\text{add}} = \frac{-e \vec{E} \cdot t}{m} = -\frac{e \vec{E} \tau}{m}$$

$$\overline{\vec{v}_0} = -\frac{e \vec{E} \tau}{m}$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{ue^2 \tau}{m} \vec{E}}$$

oder

$$\boxed{\vec{j} = ue \mu \vec{E}}$$

$$\text{Mit } \sigma = \frac{1}{S} = \frac{ue^2 \tau}{m}$$

als spez. Leitfähigkeit

$$\left| \mu = \frac{e \tau}{m} \right.$$

$\hat{=}$ Mobilität $\hat{=}$ Reaktion von e^- auf \vec{E} -Feld

wirel

$$j = \sigma E$$

Tabelle 6.3: Elektrische Leitfähigkeit und Widerstand von Metallen bei Zimmertemperatur.

(Widerstandswerte von G.T. Meaden, *Electrical resistance of metals*, Plenum, 1965. Der Restwiderstand wurde subtrahiert.)

$$\cong 10^7 \frac{1}{\Omega \text{ cm}}$$

Li	Be																		
1.07	3.08																		
9.32	3.25																		
Na	Mg																		
2.11	2.33	Leitfähigkeit in Einheiten $10^5 (\Omega \text{ cm})^{-1}$																	
4.75	4.30	Widerstand in Einheiten von $10^{-6} \Omega \text{ cm}$																	
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr		
1.39	2.78	0.21	0.23	0.50	0.78	0.072	1.02	1.72	1.43	5.88	1.69	0.67							
7.19	3.6	46.8	43.1	19.9	12.9	139.	9.8	5.8	7.0	1.70	5.92	14.85							
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn (w)	Sb	Te	I	Xe		
0.80	0.47	0.17	0.24	0.69	1.89	~0.7	1.35	2.08	0.95	6.21	1.38	1.14	0.91	0.24					
12.5	21.5	58.5	42.4	14.5	5.3	~14.	7.4	4.8	10.5	1.61	7.27	8.75	11.0	41.3					
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg liq	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn		
0.50	0.26	0.13	0.33	0.76	1.89	0.54	1.10	1.96	0.96	4.55	0.10	0.61	0.48	0.086	0.22				
20.0	39.	79.	30.6	13.1	5.3	18.6	9.1	5.1	10.4	2.20	95.9	16.4	21.0	116.	46.				
Fr	Ra	Ac				Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
						0.12	0.15	0.17		0.10	0.11	0.070	0.090	0.11	0.13	0.12	0.16	0.38	0.19
						81.	67.	59.		99.	89.	134.	111.	90.0	77.7	81.	62.	26.4	53.
						Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr
						0.66		0.39	0.085	0.070									
						15.2		25.7	118.	143.									

Alle Größen in $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ bis auf τ bekannt $\Rightarrow \tau \approx 10^{-14} \text{ s}$

+ klassisch: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow v \approx 10^5 \text{ ms}^{-1}$

Mit $\ell = v \cdot \tau \Rightarrow \ell \approx 10^{-9} \text{ m} \approx 3a^\leftarrow$ Gitterkonstante

Daher nahm man zunächst an, dass die e^- an den Ionenmünzen stoßen (das ist falsch)

+ QM: mittlere Geschwindigkeit $v_F \approx 10^6 \text{ ms}^{-1}$

Mit $\ell = v \cdot \tau \Rightarrow \ell \approx 10^{-8} \text{ m} = 10 \text{ nm} \approx 30a$

+ Durch Stöße $\Delta E \approx k_B T$

Pauli Prinzip: Stöße nur in thermischer Haut, nur dort freie Zustände

Obwohl $\Delta E \approx k_B T$ kann $\Delta \vec{k}$ groß sein.
Daher immer noch aufällig orientierter Impuls

$$+ \kappa = \kappa(T) \quad \text{oder} \quad \epsilon = \epsilon(T)$$

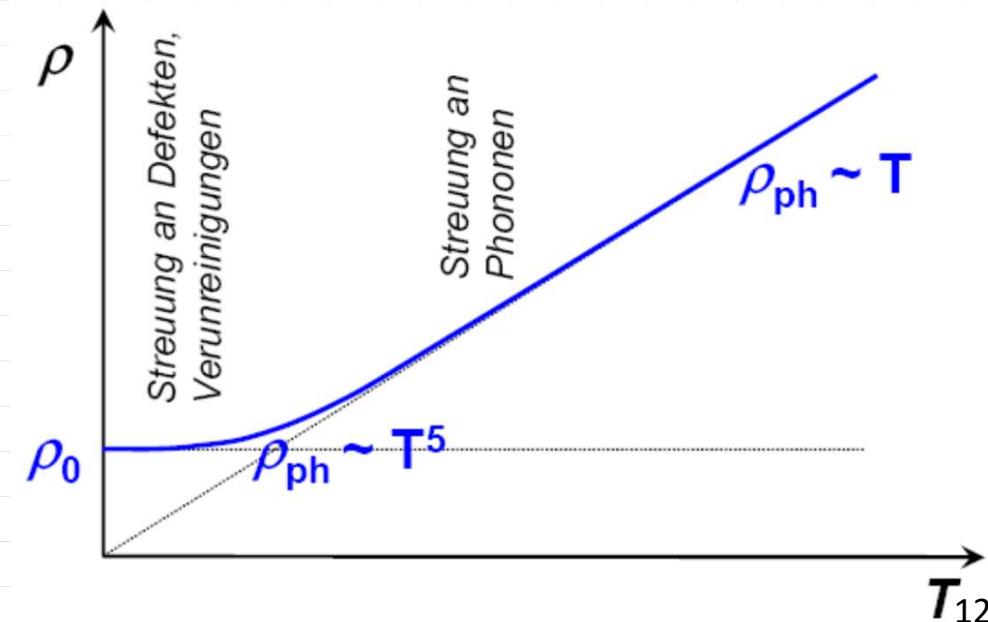
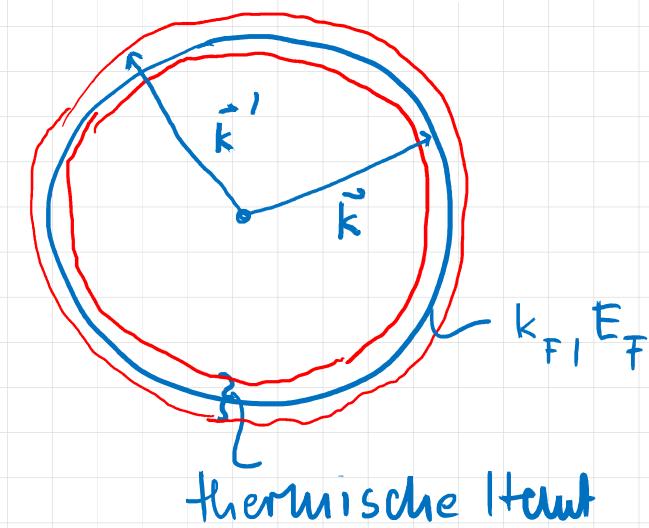
Streu mechanismen:

- 1.) Phonon - e^-
- 2.) Defekte + Verunreinigungen
- 3.) Probenoberfläche

Streu mechanismen, Streu raten und Widerstande spez. Widerstände sind additiv:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \dots$$

empirische Matthiessen - Regel



$T \rightarrow \Theta_D$: ist $\bar{u} \sim T$

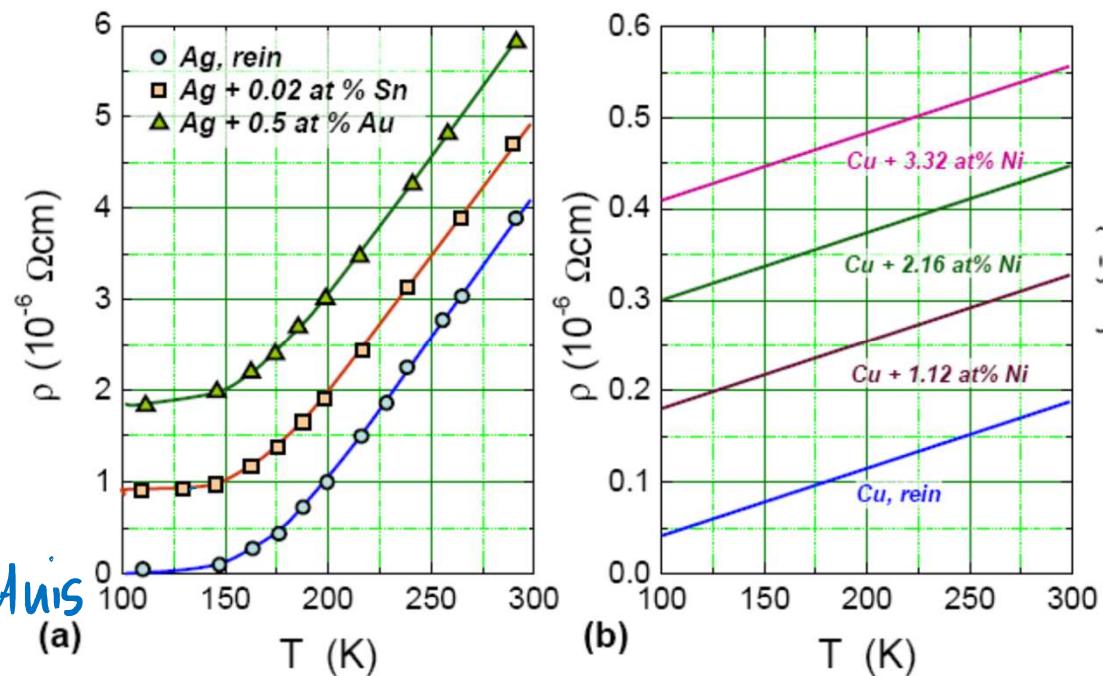
Also ist $\rho_{ph} \sim T$

Für $T \ll \Theta_D$ gilt $\bar{u} \rightarrow 0$ und
Defektstreuung dominiert.

Charakterisierung der Reinheit einer
Probe durch das Restwiderstandsverhältnis
oder residual resistance ratio

$$RRR = \frac{\rho(300\text{ K})}{\rho_0} \leftarrow \text{grenzwert für } T \rightarrow 0$$

Reine Materialien $RRR \approx 10^6$; Legierungen $RRR \approx 1$



7.4 Relaxationszeit Näherung

Wie ist die Wirkung der Stöße auf die Bewegungsgleichung im Allgemeinen?

(Im Folgenden reine Mittelwertsbalken über Mittelwerten)

Zu Zeitpunkt t ist $\vec{p}(t) = \vec{v}_0 \cdot m$. Wie ist $\vec{p}(t+dt)$?

In dt Stoß mit Wahrscheinlichkeit $\frac{dt}{\tau}$, kein Stoß mit W. $(1 - \frac{dt}{\tau})$

"Mittlere Kraft \vec{F} - Wirkung?"

Nicht-stoßendes e^- in $[t, t+dt]$

$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t) + \frac{d\vec{p}}{dt} |_t dt + O(dt)^2$$

Der Beitrag der nicht stoßenden e^- zum mittleren Impuls eines e^- ist dann also das Produkt von Bruchteil \times Impuls

$$\begin{aligned}\vec{p}(t+dt) &= \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) [\vec{p}(t) + \vec{f}(t) \cdot dt + O(dt)^2] \\ &= \vec{p}(t) - \frac{dt}{\tau} \vec{p}(t) + \vec{f}(t) dt + O(dt)^2\end{aligned}$$

Der Betrag der e^- , die in $[t, t+dt]$ stoßen ist $O(dt)^2$, denn Bruchteil $\frac{dt}{\tau}$, Impuls $\vec{p}(t) = 0$ und Zusatzimpuls $\vec{f}(t) dt$

also $\vec{p}(t+dt) = O(dt)^2$

Insgesamt $\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = -\frac{dt}{\tau} \vec{p}(t) + \vec{f}(t) dt + O(dt)^2$

Im Grenzübergang $dt \rightarrow 0$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}(t)}{\tau} + \vec{f}(t)}$$

Relaxationszeit Näherung

Auftrag: Rechnung zu $C_{V,e}$: Wir führen eine etwas explizitere Rechnung durch und schreiben die gesuchte Wärmeleistung in der folgender Form

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\infty E f(E, T) D(E) \cdot dE \\ &= \int_0^{\infty - E_F} (E - E_F) f(E, T) D(E) dE + E_F \int_0^\infty f(E, T) D(E) dE \\ &= \int_0^{\infty - E_F} (E - E_F) f(E, T) D(E) dE + E_F \cdot N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{V,e} &= \frac{\partial U}{\partial T} = \int_0^\infty (E - E_F) D(E) \cdot \frac{\partial}{\partial T} f(E, T) dE \\ &\quad \text{~} \\ &\approx D(E_F), \text{ da } \frac{\partial}{\partial T} f(E, T) \neq 0 \text{ nur in Nähe von } E_F \end{aligned}$$

Für $T \ll T_F$ wird in $f(E, T)$ $\mu \approx E_F$. Außerdem integrieren wir von $-\infty$ bis $+\infty$ statt von 0 bis $+\infty$, das erleichtert die Integration.

Also wird

$$C_{V,e} \approx D(E_F) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(E - E_F)^2}{k_B T^2} \cdot \frac{e^{(E-E_F)/k_B T}}{(e^{(E-E_F)/k_B T} + 1)^2} dE$$

Wir substituieren $\frac{E - E_F}{k_B \cdot T} = x \Leftrightarrow \frac{dx}{dE} = \frac{1}{k_B T} \Leftrightarrow dE = k_B \cdot T dx$

$$\begin{aligned} C_{V,e} &\approx D(E_F) \cdot k_B^2 \cdot T \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \underbrace{\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}}_{\text{dx}} dx \\ &= \frac{3}{2} \frac{N}{E_F} \cdot k_B^2 T \cdot \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$C_{V,e} \approx \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{T}{T_F}$$

in guter Übereinstimmung mit unserer Formel

Abschätzung.