Name(n)/Matrikelnummer(n): Übungsgruppe:

Festkörperphysik, SoSe 2023
Übungsblatt 11

Prof. Dr. Thomas Michely
Dr. Wouter Jolie (wjolie@ph2.uni-koeln.de)
II. Physikalisches Institut, Universität zu Köln

Ausgabe: **Mittwoch, 28.06.2023**
Abgabe: **Mittwoch, 05.07.2023, bis 8 Uhr über ILIAS**

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	**Summe**
Points:	5	7	6	2	20
Punkte:					

Bitte Aufgaben zusammen mit Aufgabenblatt als PDF hochladen. Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer deutlich lesbar eintragen (sonst Punktabzug). Abgabe in Gruppen zu 2, max. 3 Personen erwünscht. Die Teammitglieder müssen in der gleichen Übungsgruppe sein.

1. **[5 Punkte] Kurzfragen**
   Markieren Sie im folgenden die richtigen Satzenden (Mehrfachauswahl möglich).

   - In der Relaxationszeitnäherung
     - ist der Effekt der Elektronenstöße eine zur Driftgeschwindigkeit v_D proportionale Reibungskraft. ☐
     - ist die Relaxationszeit τ identisch mit der mittleren Zeit τ, vor der ein beliebig herausgegriffenes Elektron seinen letzten Stoß hatte. ☐
     - lenkt eine äußere Kraft die Fermikugel um δk aus. ☐
     - entsteht die Auslenkung δk der Fermikugel durch Elektronen, die durch Stöße von der Rückseite der Fermikugel zu ihrer Vorderseite transportiert werden. ☐
     - steigt beim Ausschalten der äußeren Kraft die Driftgeschwindigkeit auf ihren Gleichgewichtswert an. ☐
   - Das Wiedemann-Franz Gesetz
     - besagt, dass das Produkt von thermischer Leitfähigkeit und Temperatur dividiert durch die elektrische Leitfähigkeit eine Konstante ist. ☐
     - besagt, dass die Lorenzzahl eine Konstante ist. ☐
     - ergibt klassisch und mit korrekter Quantenstatistik gerechnet fast den gleichen Wert für die Lorenzzahl, weil in der klassischen Rechnung die Stoßzeit τ um ca. den Faktor 100 überschätzt, die Wärmekapazität des freien Elektronengases aber um etwa den Faktor 100 unterschätzt wurde. ☐

- besagt, dass das Verhältnis von thermischer und elektrischer Leitfähigkeit proportional zu Temperatur ist. ☐
- berücksichtigt den Beitrag des Gitters zur Wärmeleitfähigkeit von Metallen. ☐

- Der Hall-Effekt
  - ist der Aufbau eines elektrischen Feldes quer zur Stromdichte und zum Magnetfeld, wenn ein äußeres Magnetfeld senkrecht zur Stromdichte angelegt wird. ☐
  - wird durch den Hallkoeffizienten charakterisiert, der umgekehrt proportional zur Stärke des Querfeldes ist. ☐
  - liefert in der Theorie des freien Elektronengases einen positiven Hall-Koeffizienten, der von der Elektronendichte abhängt. ☐
  - zeigt für den Hallwiderstand bei tiefen Temperaturen und in zweidimensionalen Elektronengasen ganzzahlige Vielfache der Klitzing-Konstante. ☐
  - wird neben der Bestimmung der Ladungsträgerkonzentration auch für die Magnetfeldmessung eingesetzt. ☐

- Das Bloch Theorem
  - berücksichtigt explizit die Wechselwirkung der Elektronen miteinander. ☐
  - besagt, dass die Wellenfunktionen der Elektronen gitterperiodisch sein müssen. ☐
  - besagt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte der Elektronen gitterperiodisch ist. ☐
  - besagt, dass die Wellenfunktion am Ort $r + R$ identisch mit der Wellenfunktion am Ort R ist, wenn man diese mit einem Phasenfaktor e^{ikR} multipliziert. ☐
  - ergibt sich aus der Schrödingergleichung, wenn die Fourierreihen für das gitterperiodische Potential und die Wellenfunktion eingesetzt werden. ☐

- Bänder
  - nennt man quasikontinuierliche Bereiche erlaubter Energien von Elektronen in Festkörpern. ☐
  - ergeben sich, wenn die Gitterperiodizität des Potentials beim Lösen der Schrödingergleichung berücksichtigt wird. ☐
  - ergeben sich durch Verbreiterung diskreter Energieniveaus, wenn die Gitterkonstante weit voneinander entfernte Atome auf einem Gitter soweit reduziert wird, dass die Wellenfunktionen der Elektronen in diesen Energieniveaus anfangen zu überlappen. ☐
  - ergeben sich, weil k in der Fourierdarstellung der Schrödingergleichung ein quasikontinuierlicher Parameter ist und es zu jedem k mehrere Energieeigenwerte geben kann. ☐
  - geben Anlass zum Bandindex n, mit dem Wellenfunktionen im Bloch Theorem abgezählt werden. ☐

2. **[7 Punkte] Zonenschema für freie Elektronen**
   Berechnen Sie die zwei niedrigsten Energien freier Elektronen in einem dreidimensionalen Kristall mit einfach kubischer Struktur, Gitterkonstante $a = 4\,\text{Å}$, an den reziproken Gitterpunkten (000), (100) und (010), in der Darstellung im reduzierten Zonenschema. Skizzieren Sie das reduzierte Zonenschema $E(k_x, 0, 0)$ in der ersten Brillouin-Zone und berechnen Sie die zwei niedrigsten Energien der Elektronen auch am Zonenrand.

3. **[6 Punkte] Energielücke in einer eindimensionalen periodischen Struktur**
   Wir betrachten fast freie Elektronen in einem eindimensionalen, linearen Gitter (Gitterkonstante a). Elektronen mit Wellenvektor auf dem Rand der ersten Brillouinzone erfahren eine Bragg-Reflexion, so dass sich stehenden Wellen

$$\Psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\frac{\pi x}{a}} \pm e^{-i\frac{\pi x}{a}}\right)$$

   für $k = \pm\pi/a$ bilden. Aufgrund der unterschiedlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten haben die beiden Wellenfunktionen in einem periodischen Kristallpotenzial der Form

$$U(x) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

   nicht dieselbe Energie, so dass an dieser Stelle des k-Raums die Energieentartung aufgehoben wird und eine Energielücke entsteht.

   Zeigen Sie, dass die Größe der Energieaufspaltung $\Delta E = E_+ - E_-$ gleich der Fourier-Komponente des Kristallpotenzials $U(x)$ ist. Hinweis: Die Energie ist der Erwartungswert von H: $E_\pm = \langle\Psi_\pm|H|\Psi_\pm\rangle = \int \Psi_\pm^* H \Psi_\pm dx$.

4. **[2 Punkte] Hall-Effekt**
   Berechnen Sie den Hall-Koeffizienten A_H für Natrium und Kalium. Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit den experimentellen Ergebnissen von $A_\mathrm{H} = -2{,}5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{C}$ (Natrium) bzw. $A_\mathrm{H} = -4{,}2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{C}$ (Kalium).

Erreichbare Gesamtpunktzahl: 20