Universität zu Köln

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Praktikum B

B3.1
Statistik der Kernzerfälle

Catherine Tran
Carlo Kleefisch
Oliver Filla

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Statistische Tests

2.1.1 Hypothesentest

Ein Hypothesentest oder Statistischer Test dient dazu, durch eine Hypothese mittels statistischer Messungen zu prüfen.

Dazu verwendet man eine *Nullhypothese*[1] H_0 und eine *Gegenhypothese* oder *Alternativhypothese* H_1, die sich unterscheiden. Ziel des Tests ist es, die Alternativhypothese H_1 zu belegen. Falls dies nicht gelingt, muss man die Nullhypothese H_0 als wahr annehmen. Diese wird nicht überprüft. [2]

Aufgrund der Zufälligkeit der Ereignisse kann es dabei zwei Arten von Fehlern geben. Ein α–Fehler beschreibt das irrtümliche Ablehnen von H_0, während ein β–Fehler das fälschliche Annehmen von H_0 bezeichnet.

2.1.2 Fehlerarten

Ein *Fehler erster Art* oder α–Fehler beschreibt die fälschliche Ablehnung der Nullhypothese H_0 in einem Statistischen Test. Man nimmt z.B. an, dass ein Würfel gezinkt ist (H_1), obwohl er in Wahrheit fair ist (H_0). Hierbei ist die H_0 die Annahme eines fairen Würfels. Man spricht hier auch von einem *falsch–positiven* Ergebnis. [3]

Ein *Fehler zweiter Art* oder *β–Fehler* beschreibt umgekehrt die fälschliche Akzeptanz der Nullhypothese H_0. Beispielsweise geht man davon aus, dass ein Würfel fair ist (H_0), obwohl er tatsächlich unfair ist (H_1). Man spricht hier auch von einem *falsch–negativen* Ergebnis. [3]

Die statistische Signifikanz beschreibt die erlaubte Wahrscheinlichkeit, einen α–Fehler zu begehen. [4] In einem *Alternativtest* dagegen beschreibt die Signifikanz die Wahrscheinlichkeit, einen α- oder einen β–Fehler zu machen. Bei einer Signifikanz Y sind α- und β–Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von je $\frac{Y}{2}$ erlaubt.

2.1.3 Der χ^2–Anpassungstest

Der χ^2–Anpassungstest dient dazu, eine Verteilung von Zufallsvariablen A mit einer theoretischen Verteilung zu vergleichen. Man kann mithilfe des Tests bewerten, ob die Zufallsvariablen der Verteilung entsprechen können. Hierbei werden sowohl Fehler 1. Art als auch Fehler 2. Art berücksichtigt.

Die Grundidee dahinter ist, einen Erwartungswert $\langle A \rangle$ und seine Varianz σ_A^2 bewerten zu können. Das Maß für die Abweichung von der Hypothese wird für einen Freiheitsgrad durch χ^2 beschrieben, [2] was durch die χ^2–Verteilung beschrieben wird.

[1] *Hypothesis to be nullified* [5]

[2] Man könnte auch den Betrag $|x_i|$ anstatt des Quadrates x_i^2 wählen. Dies wird nicht gemacht, weil damit schwieriger zu rechnen ist.

$$\chi^2 = \sum_i x_i^2 \quad (2.1)$$

Mithilfe der χ^2–Verteilung kann eine Signifikanz Y festgelegt werden. Damit kann ein Intervall $[\chi^2_{\text{min}}, \chi^2_{\text{max}}]$ durch die Verteilungsfunktion $F(x, f)$ ermittelt werden. Liegt das ermittelte χ^2 in diesem Interval, so kann H_1 als signifikant gültig angenommen werden.

$$F(\chi^2_{\text{min}}, f) = \frac{Y}{2} \quad (2.2)$$

$$F(\chi^2_{\text{max}}, f) = 1 - \frac{Y}{2} \quad (2.3)$$

Oft wird die Signifikanz von $Y = 5\,\%$ gefordert, wodurch das Gültigkeitsintervall durch folgende Gleichungen bestimmt wird.

$$F(\chi^2_{\text{min}}, f) = 0.025 \quad (2.4)$$

$$F(\chi^2_{\text{max}}, f) = 0.975 \quad (2.5)$$

2.1.4 Die χ^2–Verteilung

Sei A standardnormalverteilt, dann ist die χ^2_1–Verteilung eine quadrierte Normalverteilung mit einem Freiheitsgrad. Daher ist der Erwartungswert $\langle\chi^2_1\rangle = 1$. Gibt es mehrere Freiheitsgrade f, so müssen f Erwartungswerte $\langle\chi^2_i\rangle$ addiert werden, um den gesamten Erwartungswert zu ermitteln. Dies wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF[3]) $f(x, f)$ beschrieben,[4] wobei die Gammafunktion $\Gamma(x)$ benötigt wird.

$$f(x, 2f) = \begin{cases} \frac{x^{f-1}}{2^f} \frac{\exp\left[-\frac{x}{2}\right]}{\Gamma(f)} & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \quad (2.7)$$

Die Verteilungsfunktion (CDF[5]) $F(x, f)$ ist dabei komplex und hat den Erwartungswert $\left\langle\chi^2_f\right\rangle = f$ und die Varianz $\sigma_{\chi^2} = 2f$.

$$F(x, 2f) = \int_0^x \frac{y^{f-1}}{2^f} \frac{\exp\left[-\frac{y}{2}\right]}{\Gamma(f)} \,\mathrm{d}y \quad (2.8)$$

$$\left\langle\chi^2_f\right\rangle = \int_0^\infty x \cdot f(x, f) \,\mathrm{d}x \qquad = f \quad (2.9)$$

$$\sigma_{\chi^2} = \int_0^\infty \left(x - \left\langle\chi^2_f\right\rangle\right)^2 \cdot f(x, f) \,\mathrm{d}x \quad = 2f \quad (2.10)$$

[3] *probability density function*

[4] Achtung: Hier wird zur besseren Lesbarkeit $f(x, 2f)$ angegeben, die Zahl der Freiheitsgrade wird in der Funktion halbiert.

[5] *cumulative distribution function*

3 Durchführung

4 Auswertung

5 Fazit

6 Literatur

1. Universität zu Köln, "B3.1: Statistik der Kernzerfälle", Januar 2021, Online verfügbar unter `https://www.ikp.uni-koeln.de/fileadmin/data/praktikum/B3.1_statistik_de.pdf`

2. Wikipedia, "Statistischer Test", `https://de.wikipedia.org/wiki/Statistischer_Test`, Abruf am 18.04.2024

3. Wikipedia, "Fehler 1. und 2. Art", `https://de.wikipedia.org/wiki/Fehler_1._und_2._Art`, Abruf am 18.04.2024

4. Wikipedia, "Statistische Signifikanz", `https://de.wikipedia.org/wiki/Statistische_Signifikanz`, Abruf am 18.04.2024

5. G. Gigerenzer, "Mindless statistics", 2004, *The Journal of Socio–Economics*, DOI 0.1016/j.socec.2004.09.033