

UNIVERSITÄT ZU KÖLN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT



PRAKTIKUM B

B3.4

Positronen–Emissions–Tomographie

CATHERINE TRAN
CARLO KLEEFISCH
OLIVER FILLA

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theoretische Grundlagen	4
2.1	PET	4
2.2	β -Zerfall	5
2.3	Paarvernichtung	6
2.4	γ -Strahlung	6
2.4.1	Photoeffekt	6
2.4.2	Comptoneffekt	7
2.4.3	Paarbildung	8
2.4.4	Impulshöhenspektrum	8
2.5	Elektronik	10
2.5.1	Verstärker	10
2.5.2	Diskriminator	11
2.5.3	Constant-Fraction-Diskriminator	12
2.5.4	Koinzidenzeinheit	12
2.5.5	Szintillatoren	12
2.5.6	Photomultiplier	13
2.6	Weizsäcker Massenformel	14
2.6.0.1	Volumenterm	15
2.6.0.2	Oberflächenterm	15
2.6.0.3	Coulombterm	15
2.6.0.4	Symmetrieterm	16
2.6.0.5	Paarungsterm	16
3	Durchführung	18
3.1	Ortsauflösung	18
3.2	PET-Scan	18
3.3	Winkelabhängigkeit	19
3.3.1	511keV-Peak	20
3.3.2	1275keV-Peak	21
4	Auswertung	22
4.1	Ortsauflösung	22
5	Fazit	24
6	Literatur	25

1 Einleitung

Die Positronen–Emissions–Tomographie (PET) ist ein nuklearmedizinisches bildgebendes Verfahren, bei denen radioaktive Materialien als *Tracer* verabreicht werden, die dann im Körper des Patienten gemessen werden. Dadurch können Bilder von z.B. Krebszellen erzeugt werden.

In diesem Versuch wird eine radioaktive Quelle in einer Probe mittels der PET lokalisiert. Weiterhin wird die Ortsauflösung sowie die Winkelabhängigkeit untersucht.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 PET

Die Positronen-Emissions-Tomographie ist ein Verfahren, das die Möglichkeit bietet, Veränderungen von Stoffwechselprozessen sowie physiologische Aktivitäten sichtbar zu machen. In der Medizin wird dieses Verfahren hauptsächlich verwendet, um Krebszellen im Körper zu detektieren.

Hierbei injiziert man dem Patienten radioaktive Markerstoffe (*Tracer*). Diese werden unterschiedlich von den Zellen aufgenommen und verarbeitet, abhängig vom lokalen Stoffwechsel. Damit der Körper nicht zu viel radioaktive Strahlungen ausgesetzt wird, muss der Tracer so kurzlebig wie möglich sein und dennoch Positronen abgeben. Deswegen eignen sich z.B. ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O , ^{18}F besonders. Unterschiedliche Tracer werden für unterschiedliche Körperteile verwendet.

Wenn der Tracer im Gewebe ist, zerfällt er über den β^+ -Zerfall und emittiert dabei Positronen. Innerhalb weniger Mikrometer rekombiniert ein Positron mit einem Elektron und es kommt zur *Paarvernichtung*. Hierbei entstehen zwei Photonen mit jeweils einer Energie von 511 keV in einem Winkel von 180° zueinander. [6]

Um die Aktivität quantitativ zu bestimmen, werden Signale von den ausgestrahlten Photonen registriert. Wenn zwei davon koinzident sind, hat dieser Prozess mit großer Wahrscheinlichkeit auf der Verbindungslinie¹ stattgefunden. Aus vielen solcher koinzidenten Signale lässt sich die Aktivität mit einem Computerprogramm zu einem zweidimensionalen und später dreidimensionalen Bild rekonstruieren.

Es kann bei der Messung häufig zu falschen Koinzidenzen kommen. Entweder sind das nur zufällige Signale, die zeitgleich aufgenommen werden, oder das Photon wurde schon auf den Weg zum Detektor gestreut. Diese falsche Koinzidenzen möchte man möglichst gering halten, da sie nicht zur Bildqualität tragen und Nachbearbeitung fordern.

Neben der PET gibt es noch andere bildgebende Verfahren wie Röntgentomographie, Computertomographie (CT), Magnetresonanztomographie (MRT) und Ultraschall. Die Strahlenbelastung ist bei jeweiligem Verfahren unterschiedlich.

Bei Ultraschall werden nur unschädliche Schallwellen verwendet, MRT ist ebenso frei von Strahlenbelastung. Im Vergleich zu Röntgentomographie und CT ist PET weniger schädlich, da die Stoffe sehr schnell zerfallen. Eine Röntgenaufnahme am Brustkorb hat eine Äquivalentdosis von 0.2 mSv und eine CT am Brustkorb hat ca 8 mSv [8].

Laut Bundesamt für Strahlenschutz beträgt der Grenzwert für eine einzelne Person 1 mSv pro Jahr, so lange man nicht beruflich mit Strahlung zu tun hat.

Für die Medizin ist PET ein hervorragendes Werkzeug, besonders in der Onkologie. Das Verfahren kann Veränderung im Stoffwechsel erkennen, eher ein anderes Verfahren es nachweisen kann, so können Krebstumoren früher erkannt und behandelt werden.

¹Englisch: *line of response (LOR)*

2.2 β -Zerfall

Der β -Zerfall ist eine der drei Arten radioaktiven Zerfalls. Wie beim α -Zerfall wird dabei ein chemisches Element in ein anderes umgewandelt. Im Unterschied zum α -Zerfall werden hierbei keine Nukleonen abgesondert, sondern ein Nukleon in ein anderes umgewandelt.

Es wird zwischen drei Arten des β -Zerfalls unterschieden. Es gibt β^+ -Zerfall und β^- -Zerfall, weiterhin wird der Elektroneneinfang dazugezählt.

Radioaktiver Zerfall geschieht, wenn der Tochterkern eine höhere Bindungsenergie als der Mutterkern erhält. Hierfür ist insbesondere der Symmetrieterm der Weizsäcker Massenformel (??) interessant. Daran kann man erklären, dass β^- -Zerfall dann geschehen kann, wenn der Kern mehr Neutronen als Protonen hat.

Umgekehrt kann es zu β^+ -Zerfall kommen, wenn der Kern mehr Protonen als Neutronen hat. Ebenso ist Elektroneneinfang möglich. Welcher dieser Prozesse stattfindet hängt von der Energiedifferenz zwischen Mutterkern und Tochterkern ab: Wenn die Energiedifferenz kleiner als $\Delta E_{\min} = 1.022\text{MeV}$ beträgt, dann reicht die Energie nur für Elektroneneinfang. Bei einer Energie von mehr als ΔE_{\min} ist auch β^+ -Zerfall möglich. ΔE_{\min} entspricht der doppelten Ruheenergie von Elektronen.

Beim β^+ -Zerfall wird ein Proton p in ein Neutron n umgewandelt, dabei entstehen ein Positron e^+ sowie ein Elektronenneutrino ν_e . Hierbei wird ein Mutterkern ${}_Z^AX$ in einen Tochterkern ${}_{Z-1}^AY^-$ umgewandelt. Beim β^- -Zerfall wird ein Neutron n in ein Proton p umgewandelt, dabei entstehen ein Elektron e^- sowie ein Elektronen-Antineutrino $\bar{\nu}_e$. Hierbei wird ein Mutterkern ${}_Z^AX$ in einen Tochterkern ${}_{Z+1}^AY^+$ umgewandelt.

Beim Elektroneneinfang (ec) wird ähnlich wie beim β^+ -Zerfall ein Proton p in ein Neutron n umgewandelt. Allerdings wird dazu ein Elektron e^- verwendet, dass aus der K -Schale des Atoms eingefangen wurde. Daher wird nur ein Elektronenneutrino ν_e erzeugt. Hierbei wird ein Mutterkern ${}_Z^AX$ in einen Tochterkern ${}_{Z-1}^AY$ umgewandelt.

$$\beta^+ : \quad p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (2.1)$$

$${}_Z^AX \longrightarrow {}_{Z-1}^AY^- + e^+ + \nu_e \quad (2.2)$$

$$\beta^- : \quad n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.3)$$

$${}_Z^AX \longrightarrow {}_{Z+1}^AY^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.4)$$

$$\text{ec} : \quad p + e^- \longrightarrow n + \nu_e \quad (2.5)$$

$${}_Z^AX \longrightarrow {}_{Z-1}^AY + \nu_e \quad (2.6)$$

In diesem Versuch wird als Quelle ${}^{22}\text{Na}$ verwendet, da eine Halbwertszeit von etwa 2.6 Jahren hat [2]. Dieses zerfällt über den β^+ -Zerfall in einen angeregten Zustand des stabilen Nuklides ${}^{22}\text{Ne}$, welches unter Aussenden eines γ -Quants mit $E_\gamma = 1275\text{keV}$ in den Grundzustand zerfällt, siehe Abbildung 1. Beide Zerfälle geschehen koinzident.

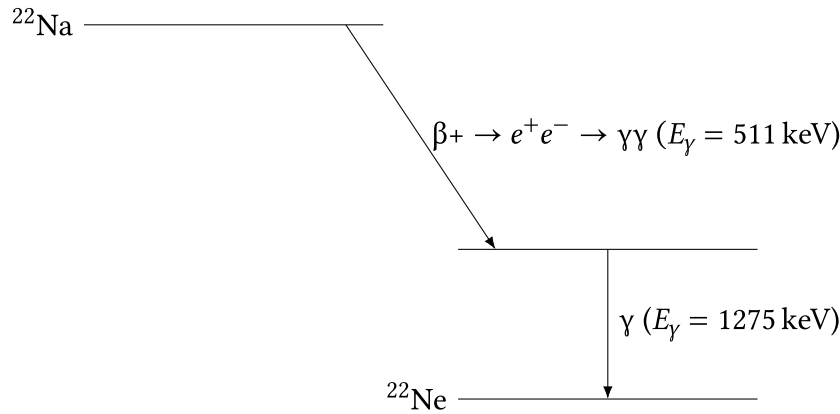


Abbildung 1: Skizze des Zerfalls von ^{22}Na zu ^{22}Ne [1]

2.3 Paarvernichtung

Der Begriff der Paarvernichtung beschreibt die Zerstrahlung von einem Teilchen und seinem Antiteilchen, bei der die Teilchen in γ -Strahlung umgewandelt werden. Die Energie der Strahlung ist die Summe der kinetischen Energie dieser Teilchen sowie ihrer Ruhemassen. Die Paarerzeugung ist der dazu inverse Effekt. [5]

Bei der Vernichtung eines Positrons e^+ mit einem Elektron e^- entstehen normalerweise zwei γ -Quanten in einem Winkel θ . Dieser hängt von der transversalen Impulskomponente p_T ab. Weiterhin sind die Ruhemasse m_e der Teilchen und die Lichtgeschwindigkeit c relevant. [6]

$$\tan(\theta) = \frac{p_T}{m_e c} \quad (2.7)$$

Sind die beiden Teilchen in Ruhe zueinander, so ist der Winkel der γ -Quanten 180° . Dies liegt an der Impulserhaltung. Ist der Gesamtimpuls vor der Vernichtung 0, so muss der Gesamtimpuls der beiden γ -Quanten ebenfalls 0 sein.

Haben sie einen relativen Impuls, so wird der Winkel kleiner. Sind die Teilchen jedoch zu schnell, dann ist der Wirkungsquerschnitt sehr klein und es ist sehr unwahrscheinlich, dass Paarvernichtung stattfindet.

2.4 γ -Strahlung

Gammastrahlung ist im engeren Sinne eine besonders durchdringende elektromagnetische Strahlung, die bei radioaktivem Zerfall auftritt. Sie wirkt durch drei Prozesse auf Materie. Bei einer Energie von bis zu $E_\gamma = 100\text{keV}$ überwiegt der Photoeffekt, weiterhin gibt es den Comptoneffekt und Paarbildung.

2.4.1 Photoeffekt

Beim Photoeffekt überträgt ein Photon seine gesamte Energie auf ein Hüllenelektron, welches daraufhin das Atom verlässt. Er wirkt vor allem bei elektromagnetischer Strahlung

mit einer Energie von bis zu $E_\gamma = 100\text{keV}$.

Die kinetische Energie E_{kin} des Elektrons hängt von der Energie des Photons $h\nu$ sowie der Austrittsarbeit W_A , ab. Letztere ist notwendig, um das Elektron aus dem Atom zu lösen.

$$E_{\text{kin}} = h\nu - W_A \quad (2.8)$$

Der Wirkungsquerschnitt σ_{ph} wird durch die Ordnungszahl Z , die reduzierte Photonenenergie ϵ (2.11), die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante α und den Thomson-Wirkungsquerschnitt σ_{Th}^e bestimmt. [7]

$$\sigma_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{32}{\epsilon^7}} \alpha^4 Z^5 \sigma_{\text{Th}}^e \frac{\text{cm}}{\text{Atom}} \quad (2.9)$$

$$\sigma_{\text{ph}} \propto \frac{Z^5}{E_\gamma^{\frac{7}{2}}} \quad (2.10)$$

$$\epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{\text{Th}}^e = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \quad (2.12)$$

Hierbei sind weiterhin die Elektronenmasse m_e und der Radius r_e eines Elektrons relevant.

Da die γ -Quanten in diesem Versuch im oberen Bereich dieses Energieintervalls liegen, wird der Photoeffekt in diesem Fall zur Ionisation der Atome führen.

2.4.2 Comptoneffekt

Der Comptoneffekt tritt vor allem bei γ -Strahlung mit mittleren Energien von ca. 100keV bis 1MeV auf. Dabei stößt ein Photon mit einem (quasi-freien) Elektron, wodurch es einen Impuls auf das Elektron überträgt und gestreut wird.

Die Änderung der Wellenlänge λ des Photons hängt vom Streuwinkel θ ab. Der Wirkungsquerschnitt σ_{Co} ist von der Ordnungszahl Z des Absorbers und der Energie E_γ der Strahlung abhängig. [7]

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\text{Co}} \propto \frac{Z}{E_\gamma} \quad (2.14)$$

Comptoneffekt und Photoeffekt unterscheiden sich in zwei Eigenschaften essenziell. Zum Einen wirkt der Photoeffekt nur auf gebundene, der Comptoneffekt dagegen auf quasifreie Elektronen. Zum Anderen wird beim Photoeffekt die gesamte Energie des Photons aufgebraucht, dagegen wird das Photon beim Comptoneffekt unter Energieverlust gestreut.

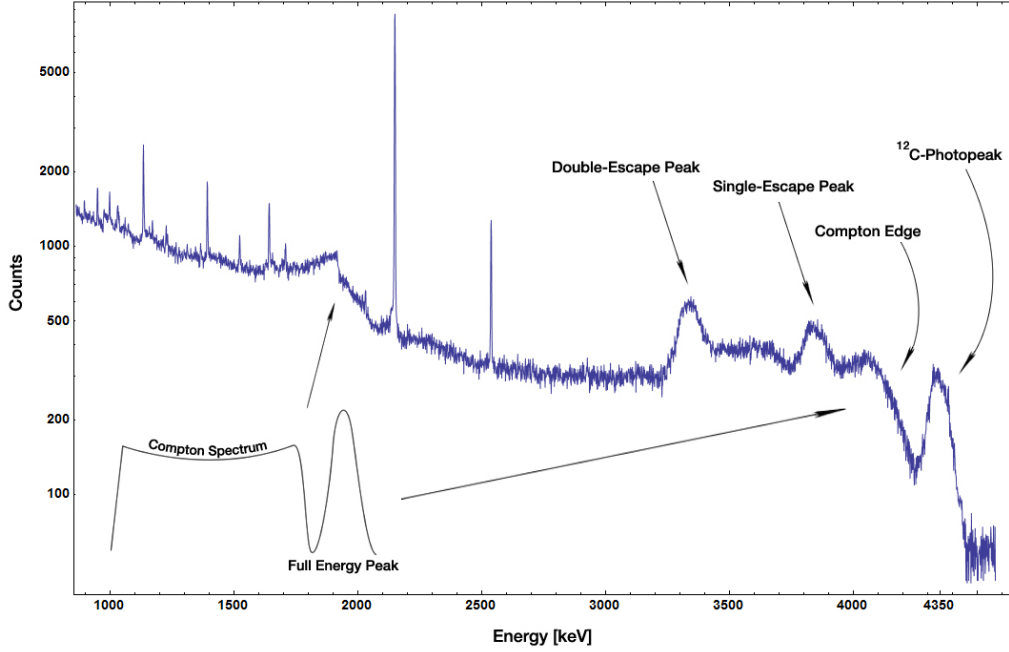


Abbildung 2: Impulshöhenspektrum [7]

2.4.3 Paarbildung

Bei der Paarbildung entsteht aus einem Photon mit einer hohen Energie ein Teilchen–Antiteilchen–Paar, dieser Effekt dominiert bei Energien von etwa 5MeV. Die Umkehrung dieses Effektes nennt man Paarvernichtung.

Im Coulombfeld eines Atomkernes kann ein Photon zu einem Positron e^+ und einem Elektron e^- zerstrahlen, wenn die Energie des Photons mindestens 1.022MeV beträgt. Diese Energie entspricht der Gesamtmasse beider Teilchen.

Der Wirkungsquerschnitt σ_{Paar} kann wie folgt beschrieben werden. Wie bei dem Photoeffekt sind dabei die Feinstrukturkonstante α und der Elektronenradius r_e relevant, ebenso die reduzierte Energie ϵ (2.11).

$$\sigma_{\text{Paar}} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \left(\frac{7}{9} \ln(2\epsilon) - \frac{109}{54} \right) \quad (2.15)$$

$$\sigma_{\text{Paar}} \propto Z^2 \ln(E_\gamma) \quad (2.16)$$

2.4.4 Impulshöhenspektrum

Die Zahl der in einem Detektor nachgewiesenen Ereignisse als Funktion ihrer Impulshöhe wird durch ein Impulshöhenspektrum dargestellt. [9] In Abbildung 2 ist ein solches für monoenergetische Gamma–Übergänge in ^{24}Mg dargestellt.

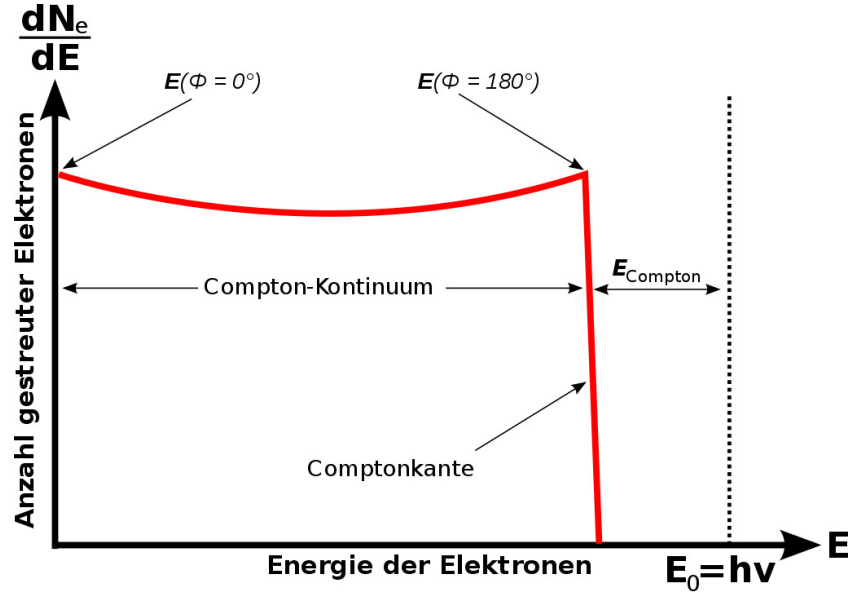


Abbildung 3: Compton-Kontinuum und Compton-Kante [10]

Photopeak Ein Photopeak (*Full-Energy-Peak*) entsteht, wenn die gesamte Energie eines Photons in einem Detektor gemessen wird. Dies kann beispielsweise durch den bereits genannten Photoeffekt oder durch die Anregung von Atomen entstehen.

Compton-Kante Werden viele Photonen mit der gleichen Energie durch den Comptoneffekt gestreut, so ergibt sich ein charakteristisches Energiespektrum der gestreuten Elektronen, siehe Abbildung 3. Die hierbei auf die Elektronen übertragene Energie ist eine kontinuierliche Funktion des Streuwinkels ϕ , hat jedoch eine scharfe obere Schranke.

Das Compton-Kontinuum $E'_e(\phi)$ beschreibt den Energie des Elektrons nach dem Stoß (2.18), die obere Schranke derselben ist die *Compton-Kante* $E'_e(180^\circ)$ (2.19). Die Energie des Photons nach der Streuung $E'_\gamma(\phi)$ wird dagegen durch die Klein-Nishina-Formel (2.20) beschrieben.

$$E'_e(\phi) = E_\gamma - E'_\gamma(\phi) \quad (2.17)$$

$$= E_\gamma \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos(\phi))} \right) \quad (2.18)$$

$$E'_e(180^\circ) = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{m_e c^2}{2E_\gamma}} \quad (2.19)$$

$$E'_\gamma(\phi) = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \phi)} \quad (2.20)$$

Rückstreupeak Ein Compton-Rückstreuungspeak (*Backscatter Peak*) tritt bei der Energie $E_{\text{Rück}}$ auf, wenn die γ -Strahlen in das Material um den Detektor herum gestreut

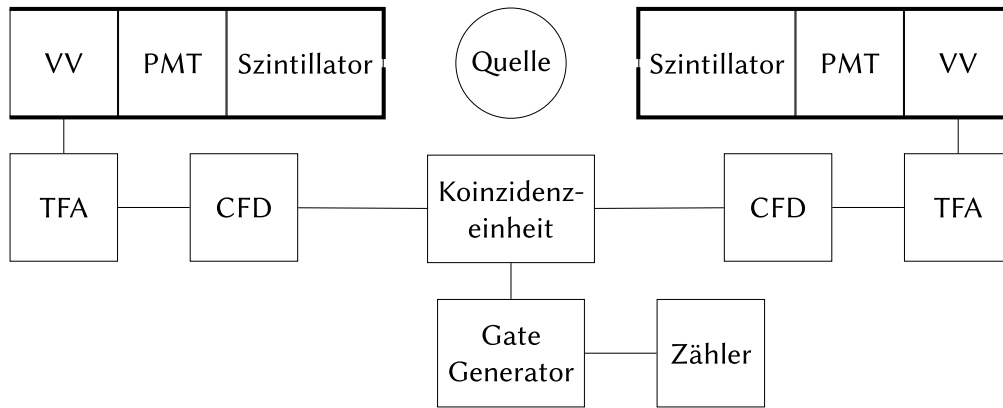


Abbildung 4: Schaltskizze des Versuchs [1], bestehend aus Photomultiplier (PMT), Vorverstärker (VV), Hauptverstärker (TFA) und Diskriminator (CFD)

wurden und erst danach in den den Detektor treffen. [7]

$$E_{\text{Rück}} = E_{\gamma} - E'_e(180^{\circ}) \quad (2.21)$$

Escapelinien Escapelinien oder Escape-Peaks sind unechte Spektrallinien, die bei der Röntgen- und Gammaspektroskopie auftreten und z.B. die Anwesenheit nicht vorhandener Radionuklide in der gemessenen Probe vortäuschen können. [16]

Gammastrahlung mit einer Energie von $E_{\gamma} \geq 1022\text{MeV}$ kann zur Paarbildung führen. Dabei entstehende Positronen zerstrahlen wiederum mit anderen Elektronen. Dies kann auch in einem Detektor geschehen. Es ist dabei nicht garantiert, dass die dabei entstehenden γ -Quanten detektiert werden. [7]

Wenn nur ein Photon detektiert wird, verursacht dies einen *Single-Escape-Peak* bei einer Energie von $E_{\gamma} - 511\text{keV}$. Wird keines der Photonen detektiert, gibt es einen *Double-Escape-Peak* bei der Energie $E_{\gamma} - 1022\text{keV}$.

2.5 Elektronik

In diesem Versuch werden verschiedene elektronische Bauteile verwendet, die im Folgenden näher erläutert werden. Ein Schaltskizze des Versuchs lässt sich in Abbildung 4 finden.

Als Detektor für die koinzidenten Signale werden anorganische Szintillationszähler sowie Photomultiplier zur Elektronenvervielfachung verwendet.

In diesem Versuch wird NaI als anorganischer Szintillator verwendet, hierbei beträgt die Ausbeute je Photon $4 \cdot 10^4\text{MeV}^{-1}$.

2.5.1 Verstärker

Ein Verstärker wird dazu verwendet ein eintreffendes elektronisches Signal zu verstärken. Dabei wird zwischen Vor- und Hauptverstärker unterschieden.

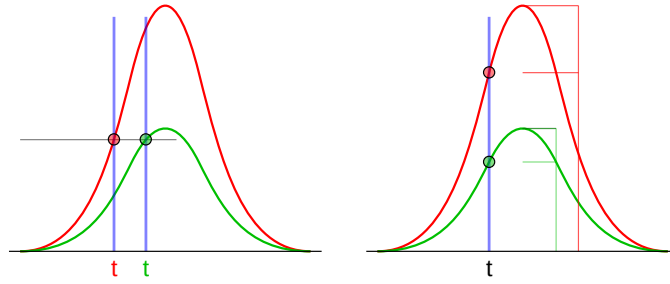


Abbildung 5: Links: Walk-Effekt, Rechts: Kein Walk-Effekt

Ein Vorverstärker wird direkt an die Detektoren angeschlossen, oder die Detektoren haben, wie in diesem Versuch, bereits einen Vorverstärker integriert. Dieser dient dazu, das von den Detektoren stammende Signal zu verstärken, sodass die Verluste in den Kabeln, die den Detektor mit den anderen Bauteilen verbinden, minimiert werden.

Der in diesem Versuch verwendete Hauptverstärker, ein *Timing Filter Amplifier* (TFA), dient dazu, dem Signal eine möglichst kurze Anstiegsflanke zu verleihen. Er empfängt das Signal aus den Vorverstärkern, verstärkt es und leitet es weiter zu den Diskriminatoren.

Alternativ kann man einen *Spectroscopy Amplifier* (SA) als Hauptverstärker nutzen, der das Signal möglichst verzerrungsfrei verstärkt. Dies ist für Messungen interessant, in denen die Energieauflösung wichtiger als die Zeitauflösung ist.

2.5.2 Diskriminator

Ein Diskriminator ist ein Bauteil, das ein logisches Signal² einer gewissen Breite ausgibt, falls die Amplitude des eintreffenden Signals eine einstellbare Schwelle überschreitet.

Da in diesem Versuch die Messung von zwei koinzidenten γ -Quanten relevant ist, ist es wichtig, dass die Diskriminatoren die logischen Signale zweier zeitgleich eintreffenden Signale auch zeitgleich ausgeben. Dabei gibt es jedoch zwei Probleme, den *Walk* und den *Jitter*.

Walk Treffen zwei Signale zeitgleich in zwei Detektoren ein, haben aber unterschiedliche maximale Amplituden, erreichen diese beiden Signale die Amplituden-Schwelle der Diskriminatoren zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Dies ist in Abbildung 5 dargestellt.

Die von den Diskriminatoren ausgesendeten logischen Signale sind dadurch zeitverschoben, obwohl die eintreffenden Signale koinzident waren. Diese Verschiebung der logischen Signale wird *Walk* genannt.

Jitter Aufgrund von statistischen Fluktuationen und Untergrundrauschen kann es passieren, dass zwei eigentlich gleiche Signale einen unterschiedlichen Zeitverlauf aufweisen.

²Ein logisches Signal ist ein Kastensignal, das nur zwei verschiedene Werte annimmt.

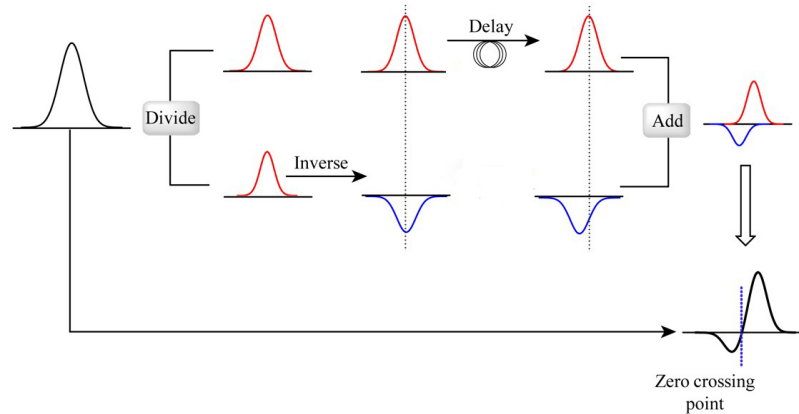


Abbildung 6: Funktionsprinzips eines Constant-Fraction-Diskriminators [15]

Daraufhin kann sich wie schon beim Walk der Zeitpunkt unterscheiden, bei dem die Signale die Amplituden-Schwelle der Diskriminatoren erreichen, wodurch die ausgesendeten logischen Signale wieder zeitversetzt sind. Dieses Phänomen wird als *Jitter* bezeichnet.

2.5.3 Constant-Fraction-Diskriminator

Um den Problemen durch Walk und Jitter entgegenzuwirken, wird in diesem Versuch ein *Constant-Fraction-Diskriminator* (CFD) verwendet. Ein CFD teilt ein eintreffendes Signal in zwei Teilsignale. Das erste Teilsignal wird um eine gewisse Zeit T verzögert. Das zweite Teilsignal wird invertiert und um einen Faktor $k \in (0, 1)$ gestaucht. Daraufhin werden beide Teilsignale wieder addiert. Der CFD sendet das logische Signal dann erst aus, wenn das wie oben beschrieben veränderte Signal seinen Nulldurchgang erreicht. Es ist in Abbildung 6 dargestellt.

2.5.4 Koinzidenzeinheit

Die logischen Signale aus den beiden Diskriminatoren werden dann gemeinsam zur Koinzidenzeinheit weitergeleitet. Diese überprüft, ob sich die beiden Signale überlappen. Falls dies der Fall ist, sendet sie ein logisches Signal an einen *Gate Generator*, der das Signal in ein genormtes logisches Signal umformt. Dieses wiederum wird an den Zähler weitergegeben.

2.5.5 Szintillatoren

Wenn Photonen auf ein Szintillationsmaterial treffen, wechselwirken sie und regen die Elektronen an. Nach einer Zeit fallen diese wieder in den Grundzustand ab und senden dabei Licht im sichtbaren Bereich aus. Die Zeit dieses Ablaufs beträgt abhängig vom verwendeten Material zwischen 100ps und 1μs.

Wenn Photonen auf den Szintillationskristall treffen, wird die Energie des Photons auf Elektronen im Valenzband übertragen und die Elektronen werden ins Leitungsband

angehoben. Fallen sie wieder zurück ins Valenzband, wird erneut ein Photon mit derselben Energie emittiert. Mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit wird dieses Photons wieder direkt von einem anderen Elektron im Valenzband absorbiert, dies kann unendlich oft passieren.

Um diesem endlosen Effekt entgegenzuwirken dotiert man den Kristall so, dass die Bandlücke lokal durch Energiezustände von diesen Atomen verkleinert wird. Die Elektronen können dann in verschiedene Zuständen zwischen Valenz- und Leitungsband fallen und emittieren dabei Photonen im sichtbaren Bereich. Diese Photonen haben aber nicht mehr die Größe der vorherrschenden Bandlücke und werden daher auch nicht wieder absorbiert.

Diese Photonen treffen dann auf die Kathode des Photomultipliers, welcher im nächsten Kapitel erläutert wird.

Häufig sind Szintillatoren anorganische Isolatoren oder Halbleiter mit einer großen Bandlücke. Der Vorteil von anorganischen Szintillatoren aus Kristall oder Glas ist die hohe Lichtausbeute, welche sehr wichtig für die Energiemessgenauigkeit ist. Nachteilig dagegen ist die langsame Lichtemission im Bereich von einigen 100ns, die Energieauflösung sowie die Feuchtigkeitsempfindlichkeit von manchen Kristallen.

Ein Photon aus einem Paarvernichtungsprozess mit einer Energie von 511keV kann zehntausende Elektronen anregen, da diese mit Energien im eV-Bereich gebunden sind. Beim Wasserstoff ist das Elektron mit 13.6eV gebunden, hier könnten theoretisch bis zu $35.6 \cdot 10^3$ Photonen angeregt werden.

Weiterhin gibt es organische Szintillatoren, die hauptsächlich aus langen Kohlenstoffketten bestehen. Das Licht wird durch zwei Hauptprozesse erzeugt, die Fluoreszenz und die Phosphoreszenz.

Fluoreszenz ist ein Prozess, bei dem ein absorbiertes Photon nach Anregung sofort wieder abgestrahlt wird, dies erfolgt durch einen erlaubten Übergang zwischen zwei Zuständen.

Der Prozess der Phosphoreszenz läuft dagegen langsamer ab, weil ein verbotener Übergang zwischen einem angeregten Zustand und dem Grundzustand durch eine Multipol-Auswahlregel stattfinden muss. Im Allgemeinen kommt das Lichtsignal in einem organischen Szintillator früher als im anorganischen, im Idealfall kommt es schon nach 100ps. Trotz diesem Vorteil haben sie nur eine geringe Lichtausbeute. [13]

2.5.6 Photomultiplier

Um aus dem Szintillationslicht ein Messsignal zu erhalten, schließt man dem Szintillator einen Photomultiplier an. Dieser besteht aus einer Photokathode und einem Sekundärelektronenvervielfacher. Dabei muss das Emissionsspektrum des Detektors optimal auf die spektrale Empfindlichkeit der Photokathode abgestimmt sein.

Die Kathode besteht entweder aus Alkali-Metallen oder Erdalkali-Metallen, die über eine geringe Elektronenaustrittsarbeit verfügen.

Der zweite Bauteil heißt Sekundärelektronenvervielfacher³ (SEV). Dieser besitzt eine

³*photomultiplier tube* (PMT)

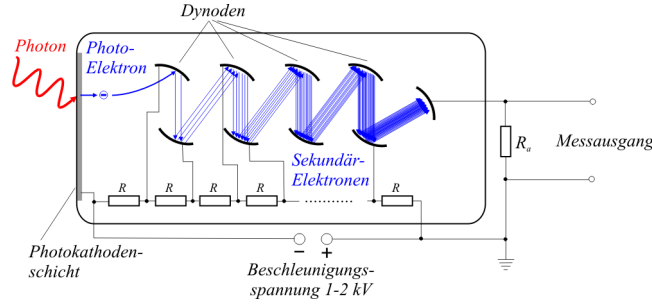


Abbildung 7: Photomultiplier (schematisch) [12]

Folge von Elektroden, genannt Dynoden, die bis zu 10^7 Sekundärelektronen pro Primärelektron erzeugen können. Zwischen den einzelnen Dynoden wird ein elektrisches Potenzial angelegt, sodass die Elektronen bis zur Anode hin beschleunigt werden. Üblicherweise haben SEVs ca. 10 Dynoden, mit jedem Auftreffen auf eine davon werden Sekundärelektronen heraus geschlagen und vervielfacht.

Die ganze Elektronik befindet sich in einem vakuumdichten Glaskolben, der zusätzlich mit einem μ -Metall-Zylinder gegen magnetische Streufelder abgeschirmt ist [13]. Abbildung 7 zeigt den Aufbau von einem typischen Photomultiplier.

Das messbare Signal an der Anode ist dann durch richtige Kalibrierung proportional zu der im Szintillationskristall deponierten Energie des Photons aus dem e^+e^- -Annihilationprozess.

2.6 Weizsäcker Massenformel

Die *Weizsäcker Formel* gibt die Bindungsenergie eines Atomkerns an. Sie basiert einerseits auf empirischen Daten, andererseits auf dem Tröpfchenmodell. Aus ihr wird die Weizsäcker Massenformel ermittelt.

Das Tröpfchenmodell beschreibt einen Atomkern als einen inkompressiblen, kugelförmigen Fluidtropfen, der zur Energieminimierung den Kernradius R aufweist. Dabei ist die Dichte überall konstant.

Die Bindungsenergie E_B wird aus fünf verschiedenen Termen ermittelt, auf die im Folgenden eingegangen wird. Diese Terme werden durch die empirisch ermittelten Faktoren a_i sowie die Nukleonenzahl bzw. Massenzahl A , Protonenzahl Z und Neutronenzahl N beschrieben. Hierbei handelt es sich um den Volumenterm E_V (2.25), den Oberflächenterm E_O (2.27), den Coulombterm E_C (2.29), den Symmetrieterm E_S (2.31) und den Paarungsterm E_P (2.33).

$$E_B = E_V + E_O + E_C + E_S + E_P \quad (2.22)$$

Die Bindungsenergie E_B verringert die Masse des Atomkernes. Daher kann die Kernmasse m durch die Protonenmasse m_P , die Neutronenmasse n_N sowie E_B beschrieben werden, wobei die Lichtgeschwindigkeit c die Energie in Masse konvertiert. Dies ergibt die *Weizsäcker Massenformel*.

$$m = N \cdot m_N + P \cdot m_P - \frac{E_B}{c^2} \quad (2.23)$$

In der Darstellung der einzelnen Terme ist weiterhin relevant, dass der Kernradius R kann durch den Radius r eines Nukleons und die Nukleonenzahl A beschrieben werden kann.

$$R = r \cdot \sqrt[3]{A} \quad (2.24)$$

2.6.0.1 Volumenterm Der Volumenterm E_V beschreibt die Anziehung der Nukleonen durch die starke Wechselwirkung.

Diese hat eine Reichweite von 2.5 fm, weswegen sie nur auf die nächsten Nachbarn eines Nukleons wirkt. Da die Dichte im Kern nach dem Tröpfchenmodell konstant ist, ist die gesamte Bindungsenergie durch die starke Wechselwirkung proportional zum Kernvolumen. Dieses wiederum ist proportional zu $R^3 \propto A$.

$$E_V = +a_V \cdot A \quad (2.25)$$

$$a_V = 15.85 \text{ MeV} \quad (2.26)$$

2.6.0.2 Oberflächenterm Da die Atome an der Oberfläche des Atomkerns weniger Nachbarn haben als die Nukleonen im Kern, sind die ersteren schwächer gebunden. Daher beschreibt der Oberflächenterm E_O eine Korrektur des Volumenterms. Diese ist proportional zur Oberfläche einer Kugel mit dem Kernradius R , also proportional zu $\sqrt[3]{A^2}$.

$$E_O = -a_O \cdot \sqrt[3]{A^2} \quad (2.27)$$

$$a_O = 18.34 \text{ MeV} \quad (2.28)$$

2.6.0.3 Coulombterm Der Coulombterm E_C beschreibt die elektrostatische Abstoßung der Protonen voneinander, die die Bindungsenergie senkt. Jedes der Z Protonen wird von den anderen $(Z - 1)$ Protonen abgestoßen. Die Coulombwechselwirkung ist proportional zu $R^{-1} \propto (\sqrt[3]{A})^{-1}$.

$$E_C = -a_C \cdot \frac{Z(Z - 1)}{\sqrt[3]{A}} \quad (2.29)$$

$$a_C = 0.71 \text{ MeV} \quad (2.30)$$

Für große Kerne mit $Z \approx (Z - 1)$ kann der Term $Z(Z - 1) \approx Z^2$ vereinfacht werden.

2.6.0.4 Symmetrieterm Der Symmetrieterm E_S beschreibt die Verringerung der Bindungsenergie durch ein Ungleichgewicht von Protonen und Neutronen.

Die Ursache kann quantenmechanisch erklärt werden. Protonen und Neutronen werden als Fermigas in einem Potentialtopf betrachtet. Beide Gase teilen sich denselben Potentialtopf und füllen Einteilchenniveaus bis zu ihrer jeweiligen Fermienergie auf. Sind genau gleich viele beider Teilchensorten vorhanden, so sind alle Zustände bis zur Fermienergie besetzt.

Gibt es jedoch ein Teilchen mehr von einer Sorte, so müssen höhere Energieniveaus besetzt werden. Sei z.B. ein Proton mehr vorhanden, so muss ein Proton ein höheres Energieniveau als alle anderen Nukleonen besetzen. Dies benötigt mehr Energie.

Wandelt man nun in einem symmetrischen Kern ein Nukleon um, so erhöht man die eine Fermienergie und senkt die andere ab. Dieser Prozess kostet Energie, der Betrag der Energie ist die Differenz zwischen den Fermienergien. Wenn man die Energiedifferenz in einer Tabelle aufträgt, sieht man, dass der Term erst am Anfang mit $(N - Z)$ wächst und bei Umschichtungen von drei Nukleonen eine besser Beschreibung des Wachstums mit $(N - Z)/2$ ist. Wenn man dann noch betrachtet, dass Abstand der Einteilchenniveaus mit steigendem Volumen sinkt, erhält man mit der Proportionalität zwischen Volumen und Nukleonenzahl A folgende Formel.

$$E_S = -a_S \cdot \frac{(N - Z)^2}{4A} \quad (2.31)$$

$$a_S = 2.86 \text{ MeV} \quad (2.32)$$

2.6.0.5 Paarungsterm Der Paarungsterm E_P beschreibt das Phänomen, dass gerade Anzahlen von Protonen bzw. Neutronen in einem Kern stabilere Kerne produzieren. Paare von Protonen oder Neutronen sind stärker gebunden als ein ungepaartes Proton oder Neutron.

Deswegen wird zwischen gerade-gerade-Kernen (gg), gerade-ungerade-Kernen (gu) und ungerade-gerade-Kernen (ug) sowie ungerade-ungerade-Kernen (uu) unterschieden. Erstere haben jeweils eine gerade Anzahl von Protonen und Neutronen, während letztere jeweils ungerade Anzahlen haben. ug- und gu-Kerne haben eine Nukleonensorte in gerader und die andere in ungerader Menge.

Bei einer geraden Anzahl derselben Nukleonensorte heben sich die Spins auf, bei einer ungeraden Anzahl nicht. Auf diese Weise kann das Phänomen mithilfe des Schalenmodells erklärt werden.

Der Paarungsterm wird betragsmäßig kleiner, je größer die Nukleonenzahl A ist. Dies wird durch die folgende Gleichung beschrieben.

$$E_P = \begin{cases} +a_P \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} & \text{gg} \\ 0 & \text{gu} \\ 0 & \text{ug} \\ -a_P \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} & \text{uu} \end{cases} \quad (2.33)$$

$$a_P = 11.46 \text{ MeV} \quad (2.34)$$

Beide Nukleonensorten liefern betragsmäßig den gleichen Beitrag zu E_P . Bei gg- und uu-Kernen addieren sich diese Werte zu einer nicht-verschwindenden Energie. Bei gu- und ug-Kernen heben sich die Terme dagegen auf, weswegen der Paarungsterm hier verschwindet.

3 Durchführung

3.1 Ortsauflösung

Es soll die Ortsauflösung der Koinzidenzmessung bestimmt werden. Dazu wurde die Quelle mittig auf dem Wagen positioniert. Daraufhin wurde der Wagen auf verschiedene Positionen im Bereich von $\pm 50\text{mm}$ eingestellt und bei verschiedenen Positionen die Zählraten für jeweils $T_{\text{Ort}} = 60\text{s}$ gemessen.

In den Abständen von $\pm 8\text{mm}$ wurden minimale Abstände von $\pm 1\text{mm}$ zwischen den Positionen verändert, weiter außen wurden größere Abstände gewählt. Die Ungenauigkeit beim Einstellen der Position wird auf $\pm 2\text{mm}$ gesetzt.

3.2 PET-Scan

$x_1 = (-45 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_1) = 190$
$x_2 = (-35 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_2) = 261$
$x_3 = (-25 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_3) = 440$
$x_4 = (-15 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_4) = 312$
$x_5 = (-5 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_5) = 414$
$x_6 = (5 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_6) = 639$
$x_7 = (15 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_7) = 2025$
$x_8 = (25 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_8) = 616$
$x_9 = (35 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_9) = 660$
$x_{10} = (45 \pm 2)\text{mm}$	$N(x_{10}) = 2186$

$y_1 = (-45 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_1) = 313$
$y_2 = (-35 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_2) = 466$
$y_3 = (-25 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_3) = 542$
$y_4 = (-15 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_4) = 2021$
$y_5 = (-5 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_5) = 498$
$y_6 = (5 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_6) = 481$
$y_7 = (15 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_7) = 431$
$y_8 = (25 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_8) = 503$
$y_9 = (35 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_9) = 2385$
$y_{10} = (45 \pm 2)\text{mm}$	$N(y_{10}) = 520$

$z_1 = (64 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_1) = 203$
$z_2 = (57 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_2) = 246$
$z_3 = (49 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_3) = 243$
$z_4 = (42 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_4) = 271$
$z_5 = (35 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_5) = 318$
$z_6 = (28 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_6) = 407$
$z_7 = (21 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_7) = 644$
$z_8 = (14 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_8) = 1907$
$z_9 = (7 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_9) = 556$
$z_{10} = (0 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{10}) = 486$
$z_{11} = (-7 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{11}) = 524$
$z_{12} = (-14 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{12}) = 397$
$z_{13} = (-21 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{13}) = 384$
$z_{14} = (-28 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{14}) = 401$
$z_{15} = (-35 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{15}) = 562$
$z_{16} = (-42 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{16}) = 2173$
$z_{17} = (-49 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{17}) = 571$
$z_{18} = (-57 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{18}) = 390$
$z_{19} = (-64 \pm 2)\text{mm}$	$N(z_{19}) = 306$

An den Positionen (7, 8) und (10, 4) sind ziemlich sicher Proben, die Probe bei (3, 2) war ebenfalls eine Probe, dies fanden wir an den Werten allerdings schwer zu erkennen.

3.3 Winkelabhängigkeit

Im Folgenden wird die Winkelabhängigkeit sowohl von dem 511keV-Peak der Annihilation als auch von dem 1275keV-Peak aus dem sekundären Zerfall ermittelt. Bei ersterem wird eine starke Winkelabhängigkeit erwartet, bei letzterem keine Winkelabhängigkeit.

Der Fehler des Winkels wird auf $\Delta\theta = 0.5^\circ$ geschätzt.

3.3.1 511keV-Peak

$N(-5.0^\circ)$	=	432
$N(-4.5^\circ)$	=	476
$N(-4.0^\circ)$	=	484
$N(-3.5^\circ)$	=	585
$N(-3.0^\circ)$	=	885
$N(-2.5^\circ)$	=	707
$N(-2.0^\circ)$	=	1007
$N(-1.5^\circ)$	=	1646
$N(-1.0^\circ)$	=	2147
$N(-0.5^\circ)$	=	2559
$N(\pm 0.0^\circ)$	=	2462
$N(+0.5^\circ)$	=	1946
$N(+1.0^\circ)$	=	1383
$N(+1.5^\circ)$	=	1075
$N(+2.0^\circ)$	=	637
$N(+2.5^\circ)$	=	533
$N(+3.0^\circ)$	=	444
$N(+3.5^\circ)$	=	494
$N(+4.0^\circ)$	=	503
$N(+4.5^\circ)$	=	471
$N(+5.0^\circ)$	=	456

3.3.2 1275keV–Peak

$N(-5.0^\circ)$	=	22
$N(-4.5^\circ)$	=	31
$N(-4.0^\circ)$	=	28
$N(-3.5^\circ)$	=	25
$N(-3.0^\circ)$	=	32
$N(-2.5^\circ)$	=	24
$N(-2.0^\circ)$	=	17
$N(-1.5^\circ)$	=	30
$N(-1.0^\circ)$	=	27
$N(-0.5^\circ)$	=	36
$N(\pm 0.0^\circ)$	=	22
$N(+0.5^\circ)$	=	36
$N(+1.0^\circ)$	=	27
$N(+1.5^\circ)$	=	23
$N(+2.0^\circ)$	=	26
$N(+2.5^\circ)$	=	38
$N(+3.0^\circ)$	=	18
$N(+3.5^\circ)$	=	17
$N(+4.0^\circ)$	=	23
$N(+4.5^\circ)$	=	34
$N(+5.0^\circ)$	=	29

4 Auswertung

4.1 Ortsauflösung

Zur Bestimmung der Ortsauflösung wird die Zählrate r aus der Anzahl der Detektionen n und der Messdauer $T_{\text{Ort}} = 60 \text{ s}$ bestimmt. Der Fehler der Detektionszahl Δn folgt aus statistischer Streuung, der Fehler der Zählrate Δr folgt nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung. Hierbei kann die Messdauer als näherungsweise exakt angenommen werden, der Messfehler in der Zeit ist vernachlässigbar. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 dargestellt.

$$\Delta n = \sqrt{n} \quad (4.1)$$

$$r = \frac{n}{T_{\text{Ort}}} \quad (4.2)$$

$$\Delta r = \frac{\Delta n}{T_{\text{Ort}}} \quad (4.3)$$

Diese Daten sind in Abbildung 8 dargestellt und gefittet worden. Dabei wurde eine Gaußverteilung angenommen. Dabei wurden der Mittelwert $\mu \approx 0.35 \text{ mm}$, eine Standardabweichung $\sigma \approx 1.89 \text{ mm}$ und ein Streckungsfaktor $\alpha \approx 40 \text{ Hz}$ ermittelt.

$$\phi(x, \mu, \sigma, \alpha) = \alpha \cdot \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.4)$$

Die Ortsauflösung kann durch die ermittelte Standardabweichung bestimmt werden. Allerdings sieht man, dass auch außerhalb des Peaks erhöhte Werte gemessen werden. Daher wird die Messgenauigkeit durch die Auflösung auf $\Delta x_{\text{res}} = \pm 1.9 \text{ mm}$ festgelegt. Da schon bei der Messung ein Fehler $\Delta x = \pm 2 \text{ mm}$ verwendet wurde, nimmt die Ungenauigkeit durch die Auflösung einen geringeren Einfluss auf die Messgenauigkeit und kann vernachlässigt werden.

x [mm]	n [1]	r [Hz]	x [mm]	n [1]	r [Hz]
0 ± 2	2971 ± 55	49.52 ± 0.91	—	—	—
$+1 \pm 2$	2202 ± 47	36.70 ± 0.78	-1 ± 2	1650 ± 41	27.50 ± 0.68
$+2 \pm 2$	1616 ± 40	26.93 ± 0.67	-2 ± 2	938 ± 31	15.63 ± 0.51
$+3 \pm 2$	686 ± 26	11.43 ± 0.44	-3 ± 2	493 ± 22	8.22 ± 0.37
$+4 \pm 2$	512 ± 23	8.53 ± 0.38	-4 ± 2	477 ± 22	7.95 ± 0.36
$+5 \pm 2$	538 ± 23	8.97 ± 0.39	-5 ± 2	486 ± 22	8.10 ± 0.37
$+6 \pm 2$	498 ± 22	8.30 ± 0.37	-6 ± 2	511 ± 23	8.52 ± 0.38
$+7 \pm 2$	467 ± 22	7.78 ± 0.36	-7 ± 2	414 ± 20	6.90 ± 0.34
$+8 \pm 2$	487 ± 22	8.12 ± 0.37	-8 ± 2	405 ± 20	6.75 ± 0.34
$+11 \pm 2$	335 ± 18	5.58 ± 0.31	—	—	—
$+15 \pm 2$	249 ± 16	4.15 ± 0.26	-15 ± 2	229 ± 15	3.82 ± 0.25
$+20 \pm 2$	170 ± 13	2.83 ± 0.22	-20 ± 2	159 ± 13	2.65 ± 0.21
$+30 \pm 2$	95 ± 10	1.58 ± 0.16	-30 ± 2	112 ± 11	1.87 ± 0.18
$+50 \pm 2$	78 ± 9	1.30 ± 0.15	—	—	—

Tabelle 1: Messergebnisse der Ortsauflösung

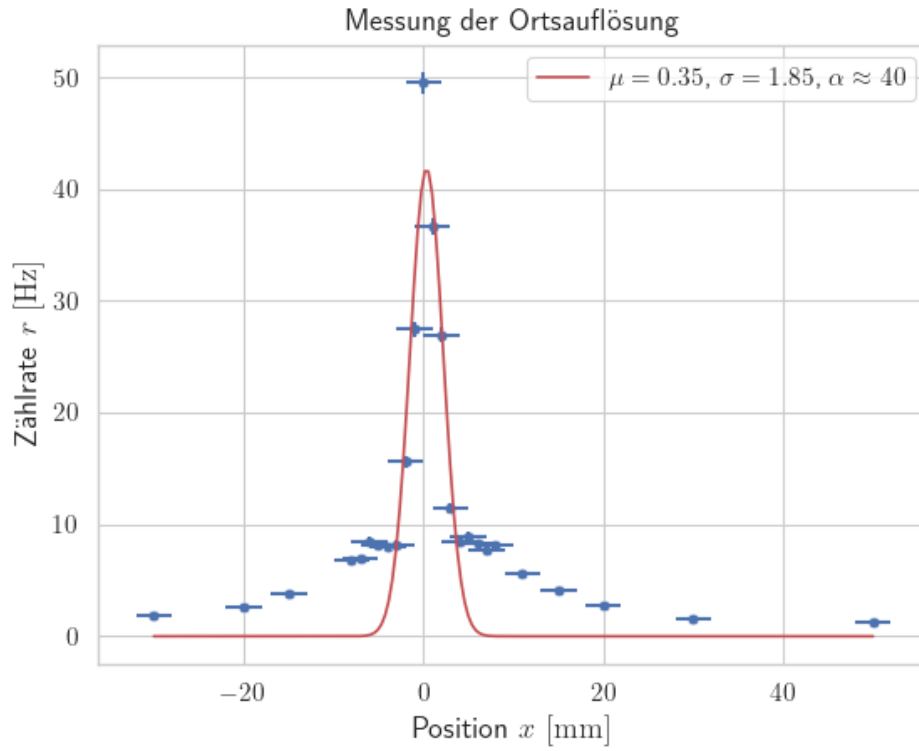


Abbildung 8: Zählraten

5 Fazit

6 Literatur

1. Universität zu Köln, “B3.4: Positronen–Emissions–Tomografie”, Januar 2021, https://www.ikp.uni-koeln.de/fileadmin/data/praktikum/B3.4_PET_de.pdf, Abruf am 20.03.2024
2. “Chart of Nuclides”, National Nuclear Data Center, <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3>, Abruf am 28.03.2024
3. “Positronen Emissions Tomographie”, Deutsche Gesellschaft für Nuklearmedizin e.V., Online verfügbar unter http://www.nuklearmedizin.de/docs/pet_bro_06.pdf, Abruf am 03.04.2024
4. W. Demtröder, “Experimentalphysik 4: Kern-, Teilchen- und Astrophysik”, Springer–Spektrum–Verlag, 2017, DOI: 10.1007/978-3-662-52884-6
5. Lexikon der Physik, “Paarvernichtung”, <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/paarvernichtung/10838>, Abruf am 04.04.2024
6. Wikipedia, “Annihilation”, <https://de.wikipedia.org/wiki/Annihilation>, Abruf am 04.04.2024
7. K. Bethge, Kernphysik: Eine Einführung, 3. aktualisierte und erweiterte Auflage, Springer–Verlag, 2008, DOI: 10.1007/978-3-540-74567-9
8. Strahlenschutzkommission, “Orientierungshilfe SSK”, 2006, ISBN 3873441306, https://campus-nes.de/fileadmin/user_upload/Orientierungshilfe_SSK.pdf, Abruf am 07.04.2024
9. Lexikon der Physik, “Impulshöhenspektrum”, <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/impulshoehenspektrum/7156>, Abruf am 08.04.2024
10. Wikipedia, <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Compton-spektrum.svg>, Abruf am 08.04.2024
11. Wikipedia, <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Am-Be-SourceSpectrum.jpg>, Abruf am 08.04.2024
12. Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Photomultiplier_schema_de.png, Abruf am 08.04.2024
13. LMU München, “Detektor”, <https://homepages.physik.uni-muenchen.de/~0tmar.Biebel/detektor/detector06.pdf>, Abruf am 07.04.2024
14. Wikipedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Constant_fraction_1.svg, Abruf am 06.04.2024
15. Wikipedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CFD_Diagram1.jpg, Abruf am 06.04.2024

16. Wikipedia, “Escapelinie”, <https://de.wikipedia.org/wiki/Escapelinie>,
Abruf am 08.04.2024