Universität zu Köln

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Praktikum B

B3.1
Statistik der Kernzerfälle

Catherine Tran
Carlo Kleefisch
Oliver Filla

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Versuch wird die statistische Methode des χ^2–Anpassungstests mithilfe von radioaktiver Strahlung untersucht. Dazu wird ^{137}Cs verwendet, dessen Stahlung mit einem Geiger–Müller–Zählrohr detektiert wird.

Damit wird die Hypothese getestet, dass die Präparatstärke im Rahmen der Messung konstant bleibt. Dazu sind die Varianz der gemessenen Werte und die Totzeit des Detektors von essenzieller Bedeutung.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Statistische Tests

2.1.1 Hypothesentest

Ein Hypothesentest oder Statistischer Test dient dazu, durch eine Hypothese mittels statistischer Messungen zu prüfen.

Dazu verwendet man eine *Nullhypothese*[1] H_0 und eine *Gegenhypothese* oder *Alternativhypothese* H_1, die sich unterscheiden. Ziel des Tests ist es, die Alternativhypothese H_1 zu belegen. Falls dies nicht gelingt, muss man die Nullhypothese H_0 als wahr annehmen. Diese wird nicht überprüft. [2]

Aufgrund der Zufälligkeit der Ereignisse kann es dabei zwei Arten von Fehlern geben. Ein α–Fehler beschreibt das irrtümliche Ablehnen von H_0, während ein β–Fehler das fälschliche Annehmen von H_0 bezeichnet.

2.1.2 Fehlerarten

Ein *Fehler erster Art* oder α–Fehler beschreibt die fälschliche Ablehnung der Nullhypothese H_0 in einem Statistischen Test. Man nimmt z.B. an, dass ein Würfel gezinkt ist (H_1), obwohl er in Wahrheit fair ist (H_0). Hierbei ist die H_0 die Annahme eines fairen Würfels. Man spricht hier auch von einem *falsch–positiven* Ergebnis. [3]

Ein *Fehler zweiter Art* oder *β–Fehler* beschreibt umgekehrt die fälschliche Akzeptanz der Nullhypothese H_0. Beispielsweise geht man davon aus, dass ein Würfel fair ist (H_0), obwohl er tatsächlich unfair ist (H_1). Man spricht hier auch von einem *falsch–negativen* Ergebnis. [3]

Die statistische Signifikanz beschreibt die erlaubte Wahrscheinlichkeit, einen α–Fehler zu begehen. [4] In einem *Alternativtest* dagegen beschreibt die Signifikanz die Wahrscheinlichkeit, einen α- oder einen β–Fehler zu machen. Bei einer Signifikanz Y sind α- und β–Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von je $\frac{Y}{2}$ erlaubt.

2.1.3 Der χ^2–Anpassungstest

Der χ^2–Anpassungstest dient dazu, eine Verteilung von Zufallsvariablen A mit einer theoretischen Verteilung zu vergleichen. Man kann mithilfe des Tests bewerten, ob die Zufallsvariablen der Verteilung entsprechen können. Hierbei werden sowohl Fehler 1. Art als auch Fehler 2. Art berücksichtigt.

Die Grundidee dahinter ist, einen Erwartungswert $\langle A\rangle$ und seine Varianz σ_A^2 bewerten zu können. Das Maß für die Abweichung von der Hypothese wird für einen Freiheitsgrad durch χ^2 beschrieben,[2] was durch die χ^2–Verteilung beschrieben wird.

[1] *Hypothesis to be nullified* [5]

[2] Man könnte auch den Betrag $|x_i|$ anstatt des Quadrates x_i^2 wählen. Dies wird nicht gemacht, weil damit schwieriger zu rechnen ist.

$$\chi^2 = \sum_i x_i^2 \tag{2.1}$$

Mithilfe der χ^2–Verteilung kann eine Signifikanz Y festgelegt werden. Damit kann ein Intervall $[\chi^2_{\text{min}}, \chi^2_{\text{max}}]$ durch die Verteilungsfunktion $F(x, f)$ ermittelt werden. Liegt das ermittelte χ^2 in diesem Interval, so kann H_1 als signifikant gültig angenommen werden.

$$F(\chi^2_{\text{min}}, f) = 1 - \frac{Y}{2} \tag{2.2}$$
$$F(\chi^2_{\text{max}}, f) = \frac{Y}{2} \tag{2.3}$$

Oft wird die Signifikanz von $Y = 5\,\%$ gefordert, wodurch das Gültigkeitsintervall durch folgende Gleichungen bestimmt wird.

$$F(\chi^2_{\text{min}}, f) = 0.975 \tag{2.4}$$
$$F(\chi^2_{\text{max}}, f) = 0.025 \tag{2.5}$$

Falls $\chi^2 < \chi^2_{\text{min}}$ das Ergebnis des Tests ist, sind die Daten zu gut an die These angepasst. Dies kann beispielsweise durch Overfitting entstehen.

2.1.3.1 Pearsons χ^2–Test Eine Variante des χ^2–Tests betrachtet nur ein Ende der Gauß–Verteilung. Hierbei wird die Signifikanz Y verwendet, um ein maximal gültiges χ^2_{max} zu bestimmen, dabei wird auf einen minimalen Wert verzichtet. [**?**] Damit kann eine Hypothese nur dann abgelehnt werden, wenn χ^2 zu groß ist, ein zu kleines χ^2 ist dabei nicht betrachtet. Auch hier wird oft eine Signifikanz von 5 % verwendet.

$$F(\chi^2_{\text{max}}, f) = Y \tag{2.6}$$
$$F(\chi^2_{\text{max}}, f) = 0.05 \tag{2.7}$$
$$\tag{2.8}$$

2.1.4 Die χ^2–Verteilung

Sei A standardnormalverteilt[3], dann ist die χ^2_1–Verteilung eine quadrierte Normalverteilung mit einem Freiheitsgrad. Daher ist der Erwartungswert $\langle \chi^2_1 \rangle = 1$. Gibt es mehrere Freiheitsgrade f, so müssen f Erwartungswerte $\langle \chi^2_i \rangle$ addiert werden, um den gesamten Erwartungswert zu ermitteln. Dies wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF[4]) $f(x, f)$ beschrieben,[5] wobei die Gammafunktion $\Gamma(x)$ benötigt wird.

[3]Diese Annahme ist bei ausreichend vielen Messung durch das Gesetz der großen Zahl gerechtfertigt.
[4]*probability density function*
[5]Achtung: Hier wird zur besseren Lesbarkeit $f(x, 2f)$ angegeben, die Zahl der Freiheitsgrade wird in der Funktion halbiert.

$$f(x,2f) = \begin{cases} \frac{x^{f-1}}{2^f}\frac{\exp\left[-\frac{x}{2}\right]}{\Gamma(f)} & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \tag{2.10}$$

Die Verteilungsfunktion (CDF[6]) $F(x,f)$ ist dabei komplex und hat den Erwartungswert $\left\langle \chi_f^2 \right\rangle = f$ und die Varianz $\sigma_{\chi^2} = 2f$.

$$F(x,2f) = \int_0^x \frac{y^{f-1}}{2^f}\frac{\exp\left[-\frac{y}{2}\right]}{\Gamma(f)}\,\mathrm{d}y \tag{2.11}$$

$$\left\langle \chi_f^2 \right\rangle = \int_0^\infty x \cdot f(x,f)\,\mathrm{d}x \qquad = f \tag{2.12}$$

$$\sigma_{\chi^2} = \int_0^\infty \left(x - \left\langle \chi_f^2 \right\rangle\right)^2 \cdot f(x,f)\,\mathrm{d}x \qquad = 2f \tag{2.13}$$

2.2 Versuchsidee

In diesem Versuch wird ^{137}Cs als radioaktive Probe verwendet, das eine Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}} \approx 30\,\mathrm{a}$ hat.

Damit soll die folgende Hypothese getestet, die Präparatstärke sei konstant und habe den Wert $\bar{n}$. Hierbei ist $\bar{n}$ der Mittelwert von vielen Einzelmessungen n_i über eine kurze Zeit von $\Delta t = 20\,\mathrm{s}$, der durch Gleichung (2.14) bestimmt wird. All diese N Messungen werden in einem Zeitraum von wenigen Stunden absolviert.

Da der Zeitraum der Messungen sehr kurz gegen die Halbwertszeit ist, kann man annehmen, dass die Stärke der Probe sich im Rahmen der Messungenauigkeit nicht verändert.

Damit können die Differenzen zum Mittelwert $(n_i - \bar{n})$ ermittelt werden. Nach dem zentralen Grenzwertsatz sind die relativen Differenzen standardnormalverteilt. Dadurch kann die Abweichung χ^2 wie folgt ermittelt werden.

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{N} \tag{2.14}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - \bar{n})^2}{\bar{n}} \tag{2.15}$$

2.2.1 Einfluss der Totzeit

Die Totzeit der Länge τ hat einen Einfluss auf die gemessenen Zählraten. Anstatt einer Zählrate von $\frac{n_i}{\Delta t}$ wird eine totzeitkorrigierte Anzahl k_i gemessen. Dadurch kann ein

[6] *cumulative distribution function*

korrigierter Mittelwert M nach (2.14) bestimmt werden und man erhält eine korrigierte Abweichung χ^2_{korr}. Die korrigierte Rate wird nach Gleichung (??) bestimmt.

$$k_i = \frac{n_i}{1 - \frac{m}{\Delta t}\tau} \tag{2.16}$$

$$M = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{N} \tag{2.17}$$

$$\chi^2_{\mathrm{korr}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(k_i - M)^2}{M} \tag{2.18}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (2.16)-(2.17) sowie (2.15) kann man (2.18) vereinfachen und man erhält die folgende vereinfachte Relation. Hier sieht man, dass die korrigierte Abweichung χ^2_{korr} kleiner als die nicht–korrigierte Abweichung χ^2 ist, was kontraintuitiv wahrgenommen werden kann.

$$\chi^2_{\mathrm{korr}} = \frac{1}{1 - \frac{m}{\Delta t}\tau} \cdot \chi^2 \tag{2.19}$$

3 Durchführung

4 Auswertung

4.1 Poissonverteilung

4.2 Gaußverteilung

4.3 Intervallverteilung

4.4 χ^2–Test

Es werden 51 zufällige Messergebnisse gewählt, aus denen χ^2 gewählt wird. Da der Mittelwert einen statistischen Freiheitsgrad bindet, bleiben 50 Freiheitsgrade übrig, um die Gültigkeitsintervalle zu bilden.

$$\chi^2_{\text{min}} = 32.357 \tag{4.1}$$
$$\chi^2_{\text{max}} = 71.420 \tag{4.2}$$

4.4.1 Hypothese H_1

Nach (2.15):

$$\bar{x} = \bar{n} \tag{4.3}$$
$$\chi^2_1 = \sum_i \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}} \tag{4.4}$$

4.4.2 Hypothese H_2

$$\bar{x}' = 0.9 \cdot \bar{n} \tag{4.5}$$
$$\chi^2_2 = \sum_i \frac{(x_i - \bar{x}')^2}{\bar{x}'} \tag{4.6}$$

4.4.3 Hypothese H_3

Mit $i \in [0, N]$:

$$\langle x(i) \rangle = \bar{n} - i \tag{4.7}$$
$$\chi^2_3 = \sum_i \frac{(x_i - (n-i))^2}{(n-i)} \tag{4.8}$$

4.4.4 Halbwertszeit

$$N(t) = \bar{n} \cdot \exp[-\lambda t] \tag{4.9}$$

$$\bar{n} - 1 = \bar{n} \cdot \exp[-\lambda \Delta t] \tag{4.10}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\Delta t} \ln\left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}-1}\right) \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow T_{1/2} = \frac{\Delta t \ln(2)}{\ln\left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}-1}\right)} \tag{4.12}$$

5 Fazit

6 Literatur

1. Universität zu Köln, “B3.1: Statistik der Kernzerfälle”, Januar 2021, Online verfügbar unter https://www.ikp.uni-koeln.de/fileadmin/data/praktikum/B3.1_statistik_de.pdf

2. Wikipedia, “Statistischer Test”, https://de.wikipedia.org/wiki/Statistischer_Test, Abruf am 18.04.2024

3. Wikipedia, “Fehler 1. und 2. Art”, https://de.wikipedia.org/wiki/Fehler_1._und_2._Art, Abruf am 18.04.2024

4. Wikipedia, “Statistische Signifikanz”, https://de.wikipedia.org/wiki/Statistische_Signifikanz, Abruf am 18.04.2024

5. G. Gigerenzer, “Mindless statistics”, 2004, *The Journal of Socio–Economics*, p.587-606, DOI 0.1016/j.socec.2004.09.033

6. K. C. Kapur & M. Pecht, “Reliability Engineering”: Appendix E, Wiley 2014, DOI 10.1002/9781118841716

7. E. Cramer & U. Kamps, “Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik”, Springer 2020, DOI 10.1007/978-3-662-60552-3

8. J. Puhani, “Statistik”, Springer 2020, DOI 10.1007/978-3-658-28955-3

9. Mary L. McHugh, “The Chi-square test of independence”, Biochemia Medica, DOI 10.11613/BM.2013.018