Grundzüge der Informatik 1

Vorlesung 3 – flipped classroom

Pseudocodebefehle und Laufzeiten - Vorüberlegungen

Rechenmodell

- Idee: Ignoriere rechnerabhängige Konstanten
- Eine Pseudocodeoperation benötigt einen Zeitschritt
- Wird eine Instruktion im Laufe des Algorithmus k-mal ausgeführt (z.B. in Schleifen), so benötigt sie insgesamt k Zeitschritte

Formales Modell

- Random Access Machines (RAM Modell)
- Details unterscheiden sich von unserem Modell

Pseudocode und Laufzeiten

Zusammenfassung

- Einzelne Pseudocode Befehle brauchen einen Rechenschritt
- Befehle, die k-mal ausgeführt werden, benötigen auch k Rechenschritte
- Tritt eine Schleife k mal in den Schleifenrumpf ein, so wird das Schleifenkonstrukt (k+1)-mal aufgerufen und der Schleifenrumpf wird k-mal ausgeführt
- Daraus ergibt sich die Anzahl der benötigten Rechenschritte
- Beim Aufruf von Prozeduren werden die übergebenen Elemente kopiert
- Pseudocode kann von diesen Definitionen abweichen, wenn es die Beschreibung des Algorithmus erleichtert

Laufzeitanalyse

Herangehensweise

- Beschreibe Laufzeit als Funktion der Eingabegröße n
- Ziel: Finde obere Schranken (Garantien) für die Laufzeit eines Algorithmus

Definition (Worst Case Analyse)

- Für jedes n definiere die Worst-Case Laufzeit T(n) durch
- T(n) = maximale Laufzeit über alle Eingaben der Größe n

Definition (Average Case Analyse)

- Für jedes n definiere die Average-Case Laufzeit T(n) durch
- T(n) = durchschnittliche Laufzeit über alle Eingaben der Größe n
- Benötigt Definition von „durchschnittlich“

Pseudocode und Laufzeiten

```
Algorithmus4(n)
i=n
j=0
while i>0 do
    j=j+i
    i=i-1
output << j
```

Aufgabe 1

- Was ist die (Worst-Case) Laufzeit von Beispiel4(n)?

Pseudocode und Laufzeiten

```
Algorithmus4(n)
i=n
j=0
while i>0 do
    j=j+i
    i=i-1
output << j
```

Aufgabe 1

- Was ist die (Worst-Case) Laufzeit von Beispiel4(n)?
- Die Laufzeit ist 3n+4.

Laufzeitanalyse

Algorithmus5(A, n)

1. **for** i=1 **to** n **do**
2.   **if** A[i] ist gerade **then**
3.   **for** j=1 **to** n **do**
4.   k=k+1

Aufgabe 2

- Was ist die Worst-Case Laufzeit von Algorithmus5(A, n)?

Laufzeitanalyse

Algorithmus5(A, n)

1. **for** i=1 **to** n **do**
2.   **if** A[i] ist gerade **then**
3.   **for** j=1 **to** n **do**
4.   k=k+1

Aufgabe 2

- Was ist die Worst-Case Laufzeit von Algorithmus5(A, n)?
- T(n) = 1+ n + n (1+n+1+n), da A[i] immer gerade sein kann

Landau Notation

O-Notation

- $O(g(n)) = \{f(n)$: Es gibt positive Konstanten c und n_0, so dass für alle $n \geq n_0$
  gilt: $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$

Interpretation

- $f(n) \in O(g(n))$ bedeutet, dass f(n) höchstens so stark wächst wie g(n) für $n \to \infty$
- Dabei ignorieren wir beim Wachstum konstante Faktoren
- Die O-Notation liefert eine obere Schranke
- Die Funktionen f(n) und g(n) müssen asymptotisch nicht-negativ sein
  (für n groß genug, sind die Funktionen nicht-negativ)

Landau Notation

Aufgabe 3

- Beweisen oder wiederlegen Sie
- $5n^2 + 10\, n \in O(n^2)$

$O(g(n)) = \{f(n)$: Es gibt positive Konstanten c und n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$

- Zu zeigen: $5n^2 + 10\, n \in O(n^2)$
- Sei dazu $f(n) = 5n^2 + 10\, n$ und $g(n) = n^2$
- Wähle $c=15$ und $n_0 = 1$
- Es gilt offensichtlich $0 \leq f(n)=5n^2+10n$ für alle $n \geq n_0 = 1$
- Außerdem gilt $f(n) = 5n^2 + 10\, n \leq 15\, n^2 = c\, n^2 = c\, g(n)$ für alle $n \geq n_0 = 1$
- Damit ist $5n^2 + 10\, n \in O(n^2)$

Landau Notation

Aufgabe 4

- Beweisen oder wiederlegen Sie:
- $5n \log n + 10\, n \in O(n)$

Landau Notation

Aufgabe 4

- Beweisen oder wiederlegen Sie
- $5n \log n + 10\, n \in O(n)$

$O(g(n)) = \{f(n)$: Es gibt positive Konstanten c und n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$

- Z.z.: $5\, n \log n + 10\, n \notin O(n)$. D.h., für jede Wahl von positiven Konstanten c und n_0, gibt es ein $n \geq n_0$, so dass $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ nicht erfüllt ist
- Seien also c und n_0 beliebige positive Konstanten
- Wähle $n = \max\{2^c, n_0\}$
- Dann ist $f(n) = 5\, n \log n + 10\, n \geq 5\, c\, n > c \cdot n = g(n)$
- Damit gibt es keine Wahl von c und n_0, die die Definition erfüllt
- Somit gilt $5\, n \log n + 10\, n \notin O(n)$.

Landau Notation

Aufgabe 5

- Die Laufzeit von InsertionSort war $T(n)= (3n^2+7n-8)/2$. Was ist eine möglichst gute Abschätzung in der O-Notation?
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
- $n^3 \in O(n^2)$
- $\log^5 n \in O(\sqrt{n})$
- Finden Sie eine möglichst gute Abschätzung in der O-Notation für:
- $130n + 2 n^2 + 15 n \log n + 12 \log n$
- $150n^{10} + 20 \log n + 21 n^{10} \log n$

Landau Notation

Aufgabe 5

- Die Laufzeit von InsertionSort war $T(n)= (3n^2+7n-8)/2$. Was ist eine möglichst gute Abschätzung in der O-Notation? $O(n^2)$
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
- $n^3 \in O(n^2)$ falsch
- $\log^5 n \in O(\sqrt{n})$ wahr
- Finden Sie eine möglichst gute Abschätzung in der O-Notation für:
- $130n + 2n^2 + 15 n \log n + 12 \log n$ $O(n^2)$
- $150n^{10} + 20 \log n + 21 n^{10} \log n$ $O(n^{10} \log n)$