80133-2 תש"פ – 2019-2020 – תרגול 13

תוכן עניינים

1 נגזרות כיווניות

נשתמש רבות במהלך התרגול ב**מכפלה סקלרית**.

הגדרה: המכפלה הסקלרית היא פונקציה המתאימה לכל שני וקטורים ב-$\mathbb{R}^2$ מספר ממשי (סקלר) באופן הבא. אם $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$ וקטורים ב-$\mathbb{R}^2$, **המכפלה הסקלרית** שלהם מוגדרת על ידי

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=u_1v_1+u_2v_2.$$

אנחנו נסמן את המכפלה הסקלרית על ידי $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ או $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

הגדרה: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$, תהי $P_0\in U$ נקודה פנימית ויהי $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ וקטור יחידה (כלומר $\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=1$). **הנגזרת הכיוונית** של f בנקודה P_0 בכיוון הווקטור $\vec{u}$ מוגדרת על ידי הגבול

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(P_0+t\vec{u})-f(P_0)}{t}$$

במידה שגבול זה אכן קיים. אם זה המצב, נסמן את הגבול הזה על ידי $\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}(P_0)$ או $D_{\vec{u}}f(P_0)$.

דוגמה 1: חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $f\binom{x}{y}=3x^2y+y^2$ בנקודה $P_0=\binom{x_0}{y_0}$ בכיוון וקטור יחידה כלשהו $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$.

חישוב מפורש של הגבול יהיה מייגע ולכן נשתמש בטענה שכבר ראינו לגבי נגזרות חלקיות ונכונה גם בגרסה כללית יותר עבור נגזרות כיווניות, שאת ההוכחה לה תראו בתרגיל הבית.

טענה 1: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$, תהי $P_0\in U$ נקודה פנימית ויהי $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ וקטור יחידה. נניח כי f גזירה בנקודה P_0 בכיוון הווקטור $\vec{u}$. נגדיר פונקציה חדשה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי $g(t)=f(P_0+t\vec{u})$. אזי

$$D_{\vec{u}}f(P_0)=g'(0).$$

נשוב לדוגמה 1. עבור $P_0=\binom{x_0}{y_0}$ כלשהי ועבור וקטור יחידה $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ כלשהו, נגדיר את הפונקציה

$$g(t)=f(P_0+t\vec{u})=f\begin{pmatrix}x_0+tu_1\\y_0+tu_2\end{pmatrix}=3(x_0+tu_1)^2(y_0+tu_2)+(y_0+tu_2)^2.$$

כעת x_0,y_0,u_1,u_2 הם מבחינתנו ערכים קבועים שאינם משתנים, ואנחנו מתבוננים ב-t כמשתנה הגזירה שלנו. בהתאם לכלל השרשרת של פונקציות במשתנה אחד ולכללי הגזירה של פולינומים אנחנו מקבלים כי לכל $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}g'(t)&=3\left[(x_0+tu_1)^2(y_0+tu_2)\right]'+\left[(y_0+tu_2)^2\right]'\\&=3\left[2(x_0+tu_1)u_1(y_0+tu_2)+(x_0+tu_1)^2u_2\right]+\left[2(y_0+tu_2)u_2\right]\end{aligned}$$

ואם נציב $t=0$ נקבל

$$D_{\vec{u}}f(P_0)=g'(0)=6x_0y_0u_1+\left(3x_0^2+2y_0\right)u_2.$$

הגדרה: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0\in U$ נקודה פנימית. יהיו $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ המסמנים

$$\vec{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

הגדרנו את **הנגזרת החלקית** של f בנקודה P_0 לפי המשתנה ה־i על ידי הגבול

$$\lim_{t\to0}\frac{f\left(P_0+t\vec{e}_i\right)-f\left(P_0\right)}{t}$$

במידה שגבול זה אכן קיים. אם זה המצב, סימנו את הגבול הזה על ידי $\frac{\partial f}{\partial x}\left(P_0\right),\frac{\partial f}{\partial y}\left(P_0\right)$ או על ידי $D_if\left(P_0\right)$ (בקיצור ל־$D_{\vec{e}_i}f\left(P_0\right)$) עבור $i=1,2$.

הגדרה: אם שתי הנגזרות החלקיות קיימות נגדיר את **הגרדיאנט** של f בנקודה P_0 להיות הווקטור

$$\vec{\nabla}f\left(P_0\right)=\begin{bmatrix}D_1f\left(P_0\right)\\D_2f\left(P_0\right)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

דוגמה 1: (המשך) נשים לב כי הנגזרות החלקיות של f בנקודה P_0 הן

$$D_1f\left(P_0\right)=6x_0y_0\,,\ \ D_2f\left(P_0\right)=3x_0^22y_0\,,$$

ולכן הגרדיאנט בנקודה P_0 הוא

$$\vec{\nabla}f\left(P_0\right)=\begin{bmatrix}6x_0y_0\\3x_0^2+2y_0\end{bmatrix}.$$

נבחין כי ניתן לכתוב את הביטוי שקיבלנו עבור הנגזרת הכיוונית על ידי המכפלה הסקלרית של הגרדיאנט עם וקטור היחידה הנתון,

$$D_{\vec{u}}f\left(P_0\right)=6x_0y_0u_1+\left(3x_0^2+2y_0\right)u_2=\vec{\nabla}f\left(P_0\right)\cdot\vec{u}.$$

זה לא מקרי ואנחנו נראה בהמשך בטענה 2 כי בהרבה מהמקרים הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בכיוון וקטור יחידה כלשהו הוא המכפלה הסקלרית של הגרדיאנט בווקטור היחידה.

דוגמה 2: תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}.$$

הראיתם בתרגיל בית כי פונקציה זו (או פונקציה דומה לה) רציפה בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$. נבדוק האם הנגזרות הכיווניות קיימות ב־P_0. יהי $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ וקטור יחידה כלשהו. נגדיר

$$g\left(t\right)=f\left(P_0+t\vec{u}\right)=f\begin{pmatrix}tu_1\\tu_2\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{t^2u_1^2tu_2}{t^2u_1^2+t^2u_2^2} & t\neq0\\ 0 & t=0\end{cases}.$$

כלומר, לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$g\left(t\right)=t\frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2}.$$

לפי כללי הגזירה של פונקציות במשתנה אחד אנחנו מקבלים מייד כי לכל $t\in\mathbb{R}$,

$$g'\left(t\right)=\frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2}$$

ולכן בפרט עבור $t=0$,

$$D_{\vec{u}}f\left(P_0\right)=g'\left(0\right)=\frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2}.$$

כלומר, מצאנו כי קיימות כל הנגזרות הכיווניות של f בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$. בפרט הנגזרות החלקיות שתיהן מתאפסות:

$$D_1f\left(P_0\right)=D_2f\left(P_0\right)=0.$$

2 דיפרנציאביליות

נזכיר כי **העתקה לינארית** $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מהצורה $L\left(\left[\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right]\right)=Ah+Bk$ כאשר $A,B\in\mathbb{R}$ קבועים כלשהם.

הגדרה: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0\in U$ נקודה פנימית. נאמר כי f **דיפרנציאבילית** בנקודה P_0 אם קיימת העתקה לינארית $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך שקיים הגבול

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)-L(P-P_0)}{\|P-P_0\|}=0 .$$

במקרה שגבול זה קיים ביחס להעתקה לינארית L, נקרא ל-L **הדיפרנציאל** של f בנקודה P_0 ונסמנו על ידי

$$L=Df(P_0).$$

(לא להתבלבל עם הסימון לנגזרות כיווניות).

בהרצאה תראו כי בכל מקרה שקיים הדיפרנציאל הוא יחיד. הטענה הבאה מאפשרת לנו לקבוע דיפרנציאביליות ולחשב את הדיפרנציאל.

טענה 2: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0\in U$ נקודה פנימית. נניח כי f דיפרנציאלית ב-P_0. אזי:

1. כל הנגזרות הכיווניות (ובפרט שתי הנגזרות החלקיות) של f בנקודה P_0 קיימות. כלומר, דיפרנציאביליות גוררת גזירות כיוונית בכל כיוון.
2. ההעתקה הלינארית $Df(P_0)$ מתקבלת על ידי המכפלה הסקלרית

$$Df(P_0)\left(\left[\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right]\right)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\left[\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right]=D_1f(P_0)\,h+D_2f(P_0)\,k.$$

כלומר, הקבועים A,B של ההעתקה הלינארית $Df(P_0)\left(\left[\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right]\right)=Ah+Bk$ הם

$$A=D_1f(P_0)\,,\;B=D_2f(P_0).$$

3. יתרה מזאת, לכל וקטור יחידה $\vec{u}=\left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right]\in\mathbb{R}^2$ יש לנו נוסחה לנגזרת הכיוונית על ידי

$$D_{\vec{u}}f(P_0)=Df(P_0)(\vec{u})=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\vec{u}=D_1f(P_0)\,u_1+D_2f(P_0)\,u_2.$$

דוגמה 3: הראינו כי הפונקציה

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}.$$

שבדוגמה 2 לעיל גזירה בכל כיוון בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$ והנגזרת הכיוונית היא

$$D_{\vec{u}}f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2}.$$

נבדוק האם היא דיפרנציאבילית בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$. לפי טענה 2, אם היא הייתה דיפרנציאבילית בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$ אז הדיפרנציאל שלה בנקודה זו היה

$$Df\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\left(\left[\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right]\right)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\left[\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right]=0,$$

ואז היה צריך להתקיים הגבול

$$0=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-Df\binom{0}{0}\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-Df\binom{0}{0}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)}{\left\|\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)}$$

אולם נראה כי גבול זה אינו קיים. נבחר למשל את הסדרה $(x_n,y_n)=(1/n,1/n)$ (או למעשה כל סדרה (x_n,y_n) שעבורה $x_n=y_n\neq 0$ תיתן לנו את הסתירה המבוקשת) ונקבל כי

$$\frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{3/2}}=\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2^{3/2}}{n^3}}=\frac{1}{2^{3/2}},$$

וביטוי זה בבירור לא מתכנס לאפס, וקיבלנו סתירה להנחה כי f דיפרנציאבילית ב-$P_0=\binom{0}{0}$. המשמעות הגאומטרית היא שלפונקציה f לא קיים מישור משיק בראשית.

דוגמה 4: תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה $f\binom{x}{y}=xy$. הראו כי f דיפרנציאבילית בכל נקודה.

בכל פעם שאנחנו מעוניינים להראות כי פונקציה כלשהי היא דיפרנציאבילית, עלינו לחשב את המועמד הטבעי לדיפרנציאל על ידי הנגזרות החלקיות בהתאם לחלק 2 בטענה 2. עבור $P_0=\binom{x_0}{y_0}$ נקודה כלשהי מתקיים

$$D_1f\left(P_0\right)=y\mid_{\binom{x}{y}=\binom{x_0}{y_0}}=y_0$$

$$D_2f\left(P_0\right)=x\mid_{\binom{x}{y}=\binom{x_0}{y_0}}=x_0.$$

אם כך הגרדיאנט הוא

$$\vec{\nabla}f\binom{x_0}{y_0}=\begin{bmatrix}y_0\\x_0\end{bmatrix},$$

והמועמדת לדיפרנציאל של f בנקודה P_0 היא ההעתקה הלינארית

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\vec{\nabla}f\binom{x_0}{y_0}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0\\x_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=y_0x+x_0y.$$

נבדוק האם זה אכן דיפרנציאל. עבור $P=\binom{x}{y}$ כלשהו מתקיים

$$\begin{aligned}f\left(P\right)-f\left(P_0\right)-L\left(P-P_0\right)&=xy-x_0y_0-\left(y_0\left(x-x_0\right)+x_0\left(y-y_0\right)\right)\\&=\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\frac{\left|f\left(P\right)-f\left(P_0\right)-L\left(P-P_0\right)\right|}{\left\|P-P_0\right\|}&=\frac{\left|\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)\right|}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}}\\&\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}=\frac{1}{2}\left\|P-P_0\right\|.\end{aligned}$$

(כאשר השתמשנו באי השוויון $ab\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$) ומעצם ההגדרה ביטוי זה שואף לאפס כאשר $P\to P_0$.

המסקנה שלנו היא כי $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ שהגדרנו לעיל היא הדיפרנציאל של f בנקודה P_0. לפיכך אנחנו יכולים לקבוע כי f דיפרנציאבילית בנקודה P_0 וכי הדיפרנציאל בנקודה הוא

$$Df\left(P_0\right)\left(\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right)=\vec{\nabla}f\left(P_0\right)\cdot\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}=hy_0+kx_0.$$

הטענה הבאה מקלה עלינו בקביעת דיפרנציאביליות של פונקציה בכך שהיא נותנת תנאי מספיק לדיפרנציאביליות.

טענה 3: תהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U \subset \mathbb{R}^2$ ותהי $P_0 \in U$ נקודה פנימית. אם הנגזרות החלקיות של f מקיימות כי הן (1) **קיימות בסביבה** של הנקודה P_0 (2) **ורציפות בנקודה** P_0, אזי f דיפרנציאבילית בנקודה P_0.

דוגמה 5: נראה כיצד טענה 3 מאפשרת לנו לפתור את דוגמה 4 בקלות. כפי שחישבנו כבר לעיל, לכל $P = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ מתקיים

$$D_1 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \, , \ \ D_2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x ,$$

ואלה בבירור פונקציות מוגדרות ורציפות בכל מקום. לכן מטענה 3 נובע מיידית כי $f\binom{x}{y} = xy$ דיפרנציאבילית בכל מקום.

נחשב למשל את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $P_0 = \binom{2}{1}$ בכיוון וקטור היחידה $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. בהתאם לטענה 2 לעיל אנחנו מקבלים כי

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3 כלל השרשרת

תזכורת: (**כלל השרשרת לפונקציות במשתנה אחד**) יהיו פונקציות $I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ עבור קטע פתוח $I \subset \mathbb{R}$ (כלומר $\gamma : I \to \mathbb{R}$ ו־$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). אם γ גזירה בנקודה $t_0 \in I$ ו־f גזירה בנקודה $\gamma(t_0)$, אזי $f \circ \gamma$ גזירה בנקודה t_0 ומתקיים

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) .$$

טענה 4: (**כלל השרשרת לדיפרנציאלים**) יהיו פונקציות $I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ עבור קטע פתוח $I \subset \mathbb{R}$ (כלומר $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ו־$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).
אם γ גזירה בנקודה $t_0 \in I$ ו־f דיפרנציאבילית בנקודה $\gamma(t_0)$, אזי $f \circ \gamma$ גזירה בנקודה t_0 ומתקיים

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = Df(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \gamma'(t_0) .$$

השימוש שלנו בכלל השרשרת יהיה כדלהלן. נניח כי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בתחום פתוח $U \subset \mathbb{R}^2$, ויהי $\left\{ \binom{x}{y} \in U : f\binom{x}{y} = c \right\}$ קו גובה של הפונקציה. נניח כי אנחנו יכולים למצוא פרמטריזציה לקו הגובה הזה, כלומר מסילה $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ שהמסלול שלה מוכל בקו הגובה, ונניח כי המסילה גזירה. תהי $P_0 \in U$ נקודה בקו הגובה הנ"ל ונקבע $t_0 \in I$ שעבורה $\gamma(t_0) = P_0$.
כעת הווקטור $\gamma'(t_0)$ הוא וקטור שמשיק לנקודה $f(P_0)$. באמצעות כלל השרשרת אנחנו יכולים לדעת שווקטור הגרדיאנט $\vec{\nabla} f(P_0)$ הוא תמיד וקטור ניצב לווקטור המשיק $\gamma'(t_0)$, ללא תלות בבחירת המסילה γ.
לשם כך נבחין כי $f(\gamma(t)) = c$ לכל $t \in I$, ולכן מכלל השרשרת אנחנו מקבלים כי

$$0 = (f \circ \gamma)'(t_0) = \vec{\nabla} f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \gamma'(t_0) .$$

דוגמה 6: תהי $f\binom{x}{y} = x^2 + y^2$. לכל $c > 0$ נתבונן בקו הגובה $f\binom{x}{y} = 1$ (מעגל היחידה). נבחר את המסילה $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $\gamma(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$ שעבורה $\gamma'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$. עבור כל נקודה $P_0 = \binom{x_0}{y_0}$ בקו הגובה, הגרדיאנט הוא

$$\vec{\nabla} f(P_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix}$$

ולכן מייד אנחנו יודעים שעבור $t_0 \in [0, 2\pi]$ המקיימת $\gamma(t_0) = P_0$, הווקטורים $\vec{\nabla} f(P_0), \gamma'(t_0)$ ניצבים זה לזה. נראה זאת גם על ידי חישוב מפורש. נבחין כי אם $\gamma(t_0) = P_0 = \binom{x_0}{y_0}$ זה אומר כי $\cos t_0 = x_0$ וכי $\sin t_0 = y_0$. אם כך

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \gamma'(t_0) &= \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{bmatrix} = -2x_0 y_0 + 2x_0 y_0 = 0 \end{aligned}$$

4 מחסנית

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה נתונה ויהיו $\varphi,\psi:U\to\mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות בקבוצה פתוחה $U\subset\mathbb{R}^2$. נתבונן בפונקציה $F:U\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}\varphi\binom{x}{y}\\\psi\binom{x}{y}\end{pmatrix}.$$

נראה כיצד להשתמש בטענה 4 כדי לחשב את הנגזרות החלקיות של F בנקודה כלשהי $P_0=\binom{x_0}{y_0}\in U$. נסמן $Q_0=\binom{\varphi(P_0)}{\psi(P_0)}$. כדי לחשב את הנגזרת החלקית לפי x אנחנו קובעים את y_0 ומגדירים את הפונקציה

$$g(t)=F(P_0+t\vec{e}_1)=F\begin{pmatrix}x_0+t\\y_0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}\varphi\binom{x_0+t}{y_0}\\\psi\binom{x_0+t}{y_0}\end{pmatrix}.$$

נבחין כי קיבלנו פונקציה מהצורה שהייתה בטענה 4: נגדיר את המסילה $\gamma(t)=\binom{\varphi\binom{x_0+t}{y_0}}{\psi\binom{x_0+t}{y_0}}$ עבור t בקטע פתוח כלשהו סביב 0, שעבורה $g(t)=f(\gamma(t))$ וכן $g(0)=f(Q_0)$. מיידית מההגדרה אנחנו רואים כי

$$\gamma'(0)=\begin{bmatrix}D_1\varphi(P_0)\\D_1\psi(P_0)\end{bmatrix}.$$

לפי טענה 4 נקבל כי הנגזרת החלקית לפי x היא

$$\begin{aligned}D_1F(P_0)&=g'(0)=(f\circ\gamma)'(0)=Df(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)\\&=\vec{\nabla}f(Q_0)\cdot\begin{bmatrix}D_1\varphi(P_0)\\D_1\psi(P_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1f(Q_0)\\D_2f(Q_0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}D_1\varphi(P_0)\\D_1\psi(P_0)\end{bmatrix}\\&=D_1f(Q_0)D_1\varphi(P_0)+D_2f(Q_0)D_1\psi(P_0)\end{aligned}$$

חישוב זהה מראה לנו נוסחה דומה עבור הנגזרת החלקית השנייה,

$$D_2F(P_0)=\begin{bmatrix}D_1f(Q_0)\\D_2f(Q_0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}D_2\varphi(P_0)\\D_2\psi(P_0)\end{bmatrix}=D_1f(Q_0)D_2\varphi(P_0)+D_2f(Q_0)D_2\psi(P_0).$$

את שני השוויונים האלה אנחנו יכולים לארגן באמצעות כפל מטריצות ולכתוב

$$\vec{\nabla}F(P_0)=\begin{bmatrix}D_1F(P_0)\\D_2F(P_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1f(Q_0)\\D_2f(P_0)\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}D_1\varphi(P_0)&D_2\varphi(P_0)\\D_1\psi(P_0)&D_2\psi(P_0)\end{bmatrix}$$