

TD 6 - CORRECTION

† *Calcul des résidus*

Exercice 1.

1) On pose $g(z) = z^2 + 1$ et $h(z) = z = zh_1(z)$ où $h_1(z) = 1$ ne s'annule pas en 0. On a donc que 0 est un pôle simple de $f = \frac{g}{h}$, et donc

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \frac{g(0)}{h_1(0)} = 1 = \frac{g'(0)}{h'(0)}$$

Par ailleurs, le développement en série de Laurent de f en 0 est

$$f(z) = \frac{1}{z} + z = z^{-1} + 0 + z$$

donc le résidu est $a_{-1} = 1$, ce qui est cohérent avec le résultat du dessus.

2) Ici, on a $f(z) = -5z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1}$ est le développement en série de Laurent de f en 0. Le résidu de f en 0 est donc 1 (le coefficient devant z^{-1} dans la série de Laurent). **Autre méthode** on pose $g(z) = z^2 + 3z - 5z$ et $h(z) = z^3 = z^3h_1(z)$ où $h_1(z) = 1$ ne s'annule pas en 0. On a donc

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(3-1)!} (z^3 f(z))^{(3-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{g(z)}{h_1(z)} \right)^{(2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} g''(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Là encore c'est cohérent avec le résultat du dessus.

3) On pose $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec $h(z) = (z-1)(z^4+2)$ qui ne s'annule pas en 0. La fonction f est donc holomorphe au voisinage de 0 comme quotient de deux fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas en 0. On a donc $\text{Res}(f, 0) = 0$.

4) On pose $g(z) = 3z + 1$ et $h(z) = z(z^5 + 5) = zh_1(z)$ où $h_1(z) = z^5 + 5$ ne s'annule pas en 0. On a donc que 0 est un pôle simple de $f = \frac{g}{h}$, avec

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{g(0)}{h_1(0)} = \frac{1}{5}$$

5) On connaît le développement en série entière de l'exponentielle en 0. Le développement en série de Laurent de f en 0 est alors donné par

$$\frac{1}{z^4} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n-4}}{n!} = \sum_{n \geq -4} \frac{z^n}{(n+4)!}$$

Le terme en $n = -1$ de cette série est $\frac{1}{(-1+4)!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

6) On sait que la fonction sinus a un zéro d'ordre 1 en 0, de sorte que $\frac{\sin(z)}{z}$ est une fonction holomorphe au voisinage de 0 (ou plutôt a une singularité effaçable en 0) et vaut 1 en 0. On a donc que 0 est un pôle simple de f , et on a

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{e^0}{\sin'(0)} = \frac{e^0}{\cos(0)} = 1$$

7) On pose $g(z) = \log(1+z)$ et $h(z) = z^2 h_1(z)$ avec $h_1(z) = 1$ ne s'annule pas en 0. On a donc

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2-1)!} (z^2 f(z))^{(2-1)} = \lim_{z \rightarrow 0} g'(z) = \frac{1}{1+0} = 1$$

8) On pose $h(z) = (z^2 - 1)(z + 1) = (z - 1)(z + 1)^2 = (z - 1)h_1(z)$ avec $h_1(z) = (z + 1)^2$ ne s'annule pas en 1. On a donc que 1 est un pôle simple de f , et on a

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{h_1(1)} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

9) On pose $g(z) = (z^3 - 1)(z + 2)$ et $h(z) = (z - 1)^4 = (z - 1)^4 h_1(z)$ avec $h_1(z) = 1$ ne s'annule pas en 1. On a donc que

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{3!} g'''(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{24z + 12}{6} = 6.$$

Notons aussi que, comme $g(1) = 0$, on ne peut pas dire que 1 est un pôle d'ordre 4 de f . En effet, on a

$$f(z) = \frac{(z - 1)(z^2 + z + 1)(z + 2)}{(z - 1)^4} = \frac{(z^2 + z + 1)(z + 2)}{(z - 1)^3}$$

et comme $(z^2 + z + 1)(z + 2)$ ne s'annule pas en 1, on a que 1 est pôle d'ordre 3 de f . On trouve le même résidu en faisant le même calcul que ci-dessus.

10) On pose $h(z) = z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + \dots + z + 1)$, on obtient que 1 est un pôle simple de f , et on a

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{n1^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

Exercice 2.

1) On commence par justifier que la fonction f considérée est intégrable. Comme il s'agit d'une fonction paire et positive, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est finie. Comme f est continue sur \mathbb{R} , il suffit de montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est finie. Or, on a

$$\forall t \geq 1, 1 + t^2 \geq t^2 \Rightarrow \frac{1}{1 + t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

Or, cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ (comparaison de Riemann), donc f est bien intégrable sur \mathbb{R} . Ensuite, on a $1 + z^2 = (z - i)(z + i)$ n'a que des racines simples, donc f a deux pôles simples, un en i et un en $-i$. Les résidus de f sont alors donnés par

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{(z^2 + 1)'}(i) = \frac{1}{2i} \text{ et } \text{Res}(f, -i) = \frac{1}{(z^2 + 1)'(-i)} = \frac{1}{-2i}$$

Considérons maintenant le chemin $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ avec

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = R(4t - 1) & t \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(t) = Re^{i\pi(2t-1)} & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Il s'agit bien d'un chemin fermé car $\gamma(0) = \gamma_1(0) = -R = \gamma_2(1) = \gamma(1)$. Pour $R > 1$, on a par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \pi &= 2i\pi \text{Res}(f, i) = \int_{\gamma} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\ &= \int_0^{1/2} f(R(4t - 1))4Rdt + \int_{1/2}^1 f(Re^{i\pi(2t-1)})R2i\pi e^{i\pi(2t-1)}dt \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on peut faire le changement de variable $x = R(4t - 1)$ et $dx = 4Rdt$. Dans la deuxième intégrale, on peut faire le changement de variable $x = \pi(2t - 1)$ et $dx = 2\pi dt$. On obtient alors

$$\pi = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_0^\pi f(Re^{ix})Rie^{ix}dx$$

La première intégrale tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ quand $R \rightarrow +\infty$. Pour la seconde, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(Re^{ix})Rie^{ix}dx \right| &\leq \int_0^\pi |f(Re^{ix})Rie^{ix}| dx \\ &= \int_0^\pi R |f(Re^{ix})| dx \\ &= \int_0^\pi \frac{R}{|1 + R^2 e^{2ix}|} dx \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} dx \\ &= \frac{\pi R}{R^2 - 1} \end{aligned}$$

Et ceci tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$. En passant à la limite, on obtient donc que

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

2) On commence par justifier que la fonction f considérée est intégrable. Comme il s'agit d'une fonction paire et positive, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est finie. Comme f est continue sur \mathbb{R} , il suffit de montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est finie. Or, on a

$$\forall t \geq 1, 1+t^6 \geq t^6 \Rightarrow \frac{1}{1+t^6} \leq \frac{1}{t^6}$$

Or, cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ (comparaison de Riemann), donc f est bien intégrable sur \mathbb{R} .

Ensuite, on calcule les pôles de f sur \mathbb{C} . On a $1+t^6 = 0$ si et seulement si $t^6 = -1$. En particulier, on a alors $|t| = 1$ et $t = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On a ensuite

$$\begin{aligned} t^6 = -1 &\Leftrightarrow e^{6i\theta} = e^{i\pi} \\ &\Leftrightarrow 6i\theta - i\pi \in 2i\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 6\theta \equiv \pi[2\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3} \right] \end{aligned}$$

On a donc 6 racines distinctes

$$e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{9\pi}{6}}, e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

On pose $\rho := e^{i\pi/6}$. On peut alors réécrire les 6 racines distinctes ci-dessus en fonction de ρ

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{6}} &= \rho, \\ e^{i\frac{3\pi}{6}} &= \rho^3 = i, \\ e^{i\frac{5\pi}{6}} &= e^{i\pi} \rho^{-1} = -\rho^{-1}, \\ e^{i\frac{7\pi}{6}} &= e^{i\pi} \rho = -\rho, \\ e^{i\frac{9\pi}{6}} &= e^{i\pi} e^{i\frac{3\pi}{6}} = -i, \\ e^{i\frac{11\pi}{6}} &= e^{2i\pi} \rho^{-1} = \rho^{-1}. \end{aligned}$$

Et, comme $z \mapsto 1 + z^6$ est un polynôme de degré 6, il a au plus 6 racines. On a donc que $1 + z^6$ est un polynôme à racines simples. Les pôles de f sont donc tous simples, et le résidu en un pôle ζ est donné par

$$\text{Res}(f, \zeta) = \frac{1}{(1 + t^6)'}(\zeta) = \frac{1}{6\zeta^5} = \frac{-\zeta}{6}$$

car $\zeta^6 = -1$ par définition. Considérons maintenant le chemin $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ avec

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = R(4t - 1) & t \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(t) = Re^{i\pi(2t-1)} & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Il s'agit bien d'un chemin fermé car $\gamma(0) = \gamma_1(0) = -R = \gamma_2(1) = \gamma(1)$. Pour $R > 1$, il y a 3 pôles de f à l'intérieur de γ , $e^{i\pi/6} = \rho$, $e^{3i\pi/6} = i$ et $e^{5i\pi/6} = -\rho^{-1} = -\bar{\rho}$. Par le théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= 2i\pi(\text{Res}(f, \rho) + \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -\bar{\rho})) \\ &= \frac{2i\pi}{6}(-\rho - i + \bar{\rho}) \\ &= \frac{-i\pi}{3}(\rho - \bar{\rho} + i) \\ &= \frac{-i\pi}{3}(2i\Im(\rho) + i) \\ &= \frac{\pi}{3}(2\sin(\pi/6) + 1) = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Et, de même,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3} &= \int_{\gamma} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\ &= \int_0^{1/2} f(R(4t - 1))4Rdt + \int_{1/2}^1 f(Re^{i\pi(2t-1)})R2i\pi e^{i\pi(2t-1)}dt \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on peut faire le changement de variable $x = R(4t - 1)$ et $dx = 4Rdt$. Dans la deuxième intégrale, on peut faire le changement de variable $x = \pi(2t - 1)$ et $dx = 2\pi dt$. On obtient alors

$$\frac{2\pi}{3} = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_0^{\pi} f(Re^{ix})Rie^{ix}dx$$

La première intégrale tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ quand $R \rightarrow +\infty$. Pour la seconde, on a

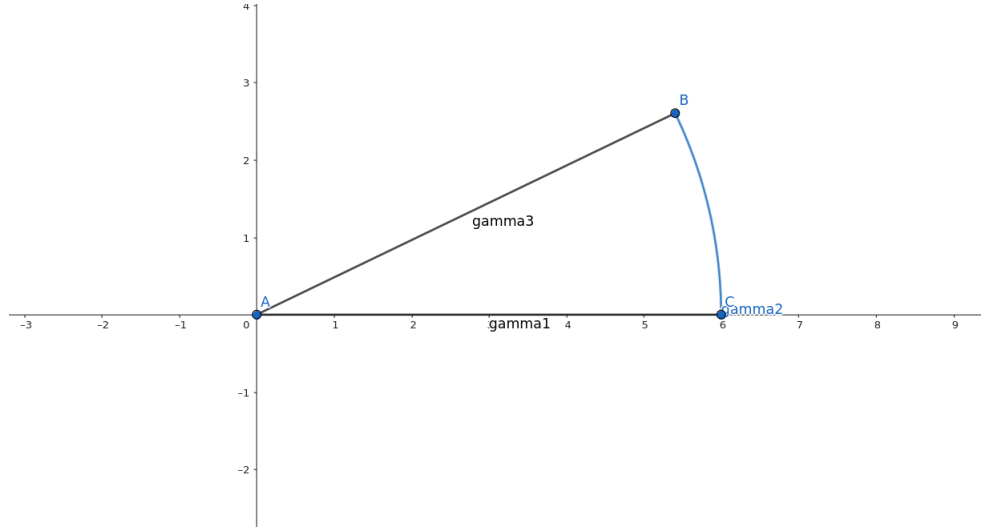
$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} f(Re^{ix})Rie^{ix}dx \right| &\leq \int_0^{\pi} |f(Re^{ix})Rie^{ix}| dx \\ &= \int_0^{\pi} R |f(Re^{ix})| dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{R}{|1 + R^6 e^{6ix}|} dx \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^6 - 1} dx \\ &= \frac{\pi R}{R^6 - 1} \end{aligned}$$

Et ceci tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$. En passant à la limite, on obtient donc que

$$\frac{2\pi}{3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$$

Exercice 3.

1)



Une paramétrisation des γ_i est donnée par

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = Rt & t \in [0, 1], \\ \gamma_2(t) = Re^{\frac{2i\pi(t-1)}{n}} & t \in [1, 2], \\ \gamma_3(t) = (1 - (t-2))Re^{\frac{2i\pi}{n}} & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

2) Par définition, les pôles de f sont les zéros de la fonction $z \mapsto 1 + z^n$. On a $1 + z^n = 0 \Leftrightarrow z^n = -1$. En particulier, on a alors $|t| = 1$ et $t = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On a ensuite

$$\begin{aligned} t^n = -1 &\Leftrightarrow e^{ni\theta} = e^{i\pi} \\ &\Leftrightarrow ni\theta - i\pi \in 2i\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n\theta \equiv \pi[2\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right] \end{aligned}$$

Les zéros de $z \mapsto 1 + z^n$ (= les pôles de f) sont donc exactement les $e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Comme $1 + z^n$ est un polynôme de degré n , on obtient que ces n racines sont toutes des racines simples, et que f n'a que des pôles simples. De plus, l'argument de $e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}$ est $\frac{(2k+1)\pi}{n}$. Or, par définition, l'intérieur de γ ne contient que des points d'argument compris entre 0 et $2\pi/n$, on a

$$0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{n} \leq \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow 0 \leq 2k+1 \leq 2$$

ce qui advient si et seulement si $k = 0$. Donc $e^{i\pi/n}$ est l'unique pôle de f se trouvant à l'intérieur du lacet γ pour $R > 1$. Comme c'est un pôle simple, on a

$$\text{Res}(f, e^{i\pi/n}) = \frac{1}{(1+t^n)'}(e^{i\pi/n}) = \frac{1}{ne^{\frac{i(n-1)\pi}{n}}} = \frac{-e^{i\pi/n}}{n}$$

Et donc, par le théorème des résidus, on a

$$2i\pi \frac{-e^{i\pi/n}}{n} = \int_{\gamma} f(z) dz$$

3) Par définition, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_1^2 f(Re^{\frac{2i\pi(t-1)}{n}}) \frac{2i\pi}{n} Re^{\frac{2i\pi(t-1)}{n}} dt \\ &= \int_0^1 f(Re^{\frac{2i\pi t}{n}}) \frac{2i\pi}{n} Re^{\frac{2i\pi t}{n}} dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(Re^{it}) i Re^{itn} dt \end{aligned}$$

Comme à l'exercice précédent, le module de cette intégrale est borné par $\frac{\pi R}{R^n-1}$, qui décroît vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

4) Par définition, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} f(z) dz &= - \int_2^3 f\left((1-(t-2))Re^{\frac{2i\pi}{n}}\right) Re^{\frac{2i\pi}{n}} dt \\ &= - \int_2^3 f\left((3-t)Re^{\frac{2i\pi}{n}}\right) Re^{\frac{2i\pi}{n}} dt \\ &= \int_1^0 f\left(tRe^{\frac{2i\pi}{n}}\right) Re^{\frac{2i\pi}{n}} dt \\ &= - \int_0^1 f\left(tRe^{\frac{2i\pi}{n}}\right) Re^{\frac{2i\pi}{n}} dt \\ &= -e^{\frac{2i\pi}{n}} \int_0^R f\left(te^{\frac{2i\pi}{n}}\right) dt \\ &= -e^{\frac{2i\pi}{n}} \int_0^R \frac{1}{1+(te^{\frac{2i\pi}{n}})^n} dt \\ &= -e^{\frac{2i\pi}{n}} \int_0^R \frac{1}{1+t^n} dt \\ &= -e^{\frac{2i\pi}{n}} \int_{\gamma_1} f(z) dz \end{aligned}$$

5) En revenant au théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} 2i\pi \frac{-e^{i\pi/n}}{n} &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz - e^{\frac{2i\pi}{n}} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \end{aligned}$$

En passant à la limite, et en utilisant la question 3), on trouve alors que

$$\begin{aligned} (1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} &= \frac{-2i\pi e^{i\pi/n}}{n} \Leftrightarrow \left(e^{-i\pi/n} - e^{i\pi/n}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{-2i\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow -2i \sin(\pi/n) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{-2i\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \end{aligned}$$

6) Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$ pour n paire sont des fonctions paires, leurs intégrales sur \mathbb{R} sont donc données par le double de leurs intégrales sur \mathbb{R}_+ . En appliquant la question précédente à $n = 2, n = 4, n = 6$, on trouve que les trois intégrales de l'exercice 2 sont égales à

$$2 \frac{\pi/2}{\sin(\pi/2)} = \pi, \quad 2 \frac{\pi/4}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad 2 \frac{\pi/6}{\sin(\pi/6)} = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 4.

1) On commence par montrer que la fonction est intégrable. Il s'agit d'une fonction continue car $1+t^4 > 0$ pour $t \in \mathbb{R}$. De plus, comme f est une fonction paire, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur $[1, +\infty[$. Or, comme $1+t^4 > t^4$ pour $t \in [1, +\infty[$, on a $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On pose $g(z) = z^2$ et $h(z) = 1 + z^4$. Les pôles de la fonction $f = \frac{g}{h}$ sont exactement les zéros de la fonction h . Un nombre complexe z est un zéro de h si et seulement si $z^4 = -1$. Cela entraîne en particulier que $|z| = 1$ et que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow e^{4i\theta} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

En posant $\rho := e^{i\pi/4}$, les quatres solutions de l'équation $z^4 = -1$ sont $\rho, i\rho, -i\rho, -\rho$. Ce sont les quatres racines simples de h . Donc f n'a que des pôles simples, et le résidus de f en un pôle simple a est donné par

$$\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)} = \frac{a^2}{4a^3} = \frac{1}{4a} = \frac{a^3}{4a^4} = \frac{-a^3}{4}$$

car $a^4 = -1$ par définition. Les pôles de f se trouvant dans le demi plan supérieur ($\Im m(z) > 0$) sont donc $\rho, i\rho$, et f n'a pas de pôle réels. Comme f est à décroissance quadratique (au moins), l'intégrale de f sur \mathbb{R} vaut $2i\pi$ fois la somme des résidus des pôles dans le demi plan supérieur, d'où

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt &= 2i\pi(\text{Res}(f, \rho) + \text{Res}(f, i\rho)) \\ &= \frac{2i\pi}{4}(-\rho - i\rho) \\ &= \frac{-\rho i\pi}{2}(1+i) \end{aligned}$$

Ensuite, $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\rho$. L'intégrale est donc égale à $\frac{-i\pi\rho^2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

2) On commence par montrer que la fonction est intégrable. Il s'agit d'une fonction continue car $1+t^6 > 0$ pour $t \in \mathbb{R}$. De plus, comme f est une fonction paire, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur $[1, +\infty[$. Or, comme $1+t^6 > t^6$ pour $t \in [1, +\infty[$, on a $|f(t)| \leq \frac{1}{t^4}$, qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On pose $g(z) = z^2$ et $h(z) = 1 + z^6$. Les pôles de la fonction $f = \frac{g}{h}$ sont exactement les zéros de la fonction h . Un nombre complexe z est un zéro de h si et seulement si $z^6 = -1$. Cela entraîne en particulier que $|z| = 1$ et que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$z^6 = -1 \Leftrightarrow e^{6i\theta} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3} \right]$$

On a donc 6 racines distinctes

$$e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{9\pi}{6}}, e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

On pose $\rho := e^{i\pi/6}$. On peut alors réécrire les 6 racines distinctes ci-dessus en fonction de ρ

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{6}} &= \rho, \\ e^{i\frac{3\pi}{6}} &= \rho^3 = i, \\ e^{i\frac{5\pi}{6}} &= e^{i\pi} \rho^{-1} = -\rho^{-1}, \\ e^{i\frac{7\pi}{6}} &= e^{i\pi} \rho = -\rho, \\ e^{i\frac{9\pi}{6}} &= e^{i\pi} e^{i\frac{3\pi}{6}} = -i, \\ e^{i\frac{11\pi}{6}} &= e^{2i\pi} \rho^{-1} = \rho^{-1}. \end{aligned}$$

Et, comme $z \mapsto 1 + z^6$ est un polynôme de degré 6, il a au plus 6 racines. On a donc que $1 + z^6$ est un polynôme à racines simples. Les pôles de f sont donc tous simples, et le résidu en un pôle ζ est donné par

$$\text{Res}(f, \zeta) = \frac{g(\zeta)}{h'(\zeta)} = \frac{\zeta^2}{6\zeta^5} = \frac{1}{6\zeta^3} = \frac{-\zeta^3}{6}$$

car $\zeta^6 = -1$ par définition. Les pôles de f se trouvant dans le demi plan supérieur ($\Im m(z) > 0$) sont donc $\rho, i, -\rho^{-1}$, et f n'a pas de pôle réels. Comme f est à décroissance quadratique (au moins), l'intégrale de f sur \mathbb{R} vaut $2i\pi$ fois la somme des résidus des pôles dans le demi plan supérieur, d'où

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt &= 2i\pi(\text{Res}(f, \rho) + \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -\rho^{-1})) \\ &= \frac{-i\pi}{3}(\rho^3 + i^3 - \rho^{-3}) \\ &= \frac{-i\pi}{3}(i - i + i) \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

3) On pose $h(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$, on a $(1-t)h(t) = t^5 - 1$. En fait, $h(z) = \Phi_5(z)$ est le cinquième polynôme cyclotomique : ses racines sont les racines primitives 5-èmes de l'unité dans \mathbb{C} . Aucune n'est réelle, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{h(t)}$ est continue sur \mathbb{R} . Quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la fonction h est équivalente à $t \mapsto t^4$, qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ et sur $]-\infty, 1]$. Comme $t \mapsto \frac{1}{h(t)}$ est continue, donc intégrable sur $[-1, 1]$, on obtient bien que $t \mapsto \frac{1}{h(t)}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Ensuite, sait que les pôles de $z \mapsto \frac{1}{h(z)}$ sont les racines primitives cinquièmes de l'unité

$$\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \zeta^2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \zeta^3 = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \zeta^4 = e^{\frac{8i\pi}{5}}$$

Ce sont tous des pôles simples. Parmi eux, ceux qui sont dans le demi-plan supérieur sont ζ et ζ^2 . Pour le calcul des résidus, on utilise le fait que l'on a des pôles simples : $\text{Res}(f, x) = \frac{1}{h'(x)}$. Seulement, calculer $h'(\zeta)$ pourrait être un peu compliqué sans astuce. Cependant, on a $z^5 - 1 = (z - 1)h(z)$, donc

$$5z^4 = (z^5 - 1)' = ((z - 1)h(z))' = h(z) + (z - 1)h'(z).$$

Si x est un zéro de h , alors l'égalité ci-dessus devient

$$5x^4 = (x - 1)h'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{h'(x)} = \frac{x - 1}{5x^4} = \frac{x^2 - x}{5} = \text{Res}(f, x).$$

Comme f est à décroissance quadratique (au moins), l'intégrale de f sur \mathbb{R} vaut $2i\pi$ fois la somme des résidus

des pôles dans le demi plan supérieur, d'où

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^3+t^4} &= 2i\pi(\text{Res}(f, \zeta) + \text{Res}(f, \zeta^2)) \\
&= \frac{2i\pi}{5}(\zeta^2 - \zeta + \zeta^4 - \zeta^2) \\
&= \frac{2i\pi}{5}(-\zeta + \bar{\zeta}) \\
&= \frac{-2i\pi}{5}(\zeta - \bar{\zeta}) \\
&= \frac{-2i\pi}{5}2i\Im(\zeta) \\
&= \frac{4\pi}{5} \sin(2\pi/5)
\end{aligned}$$

En se souvenant que $\sin(2\pi/5) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, on trouve au final que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^3+t^4} = \pi \frac{4}{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{25}} = \sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{5}}}$$

Exercice 5. On pose $g(z) = e^{az}$ et $h(z) = 1 + e^z$. Quand x réel tend vers $+\infty$, la fonction $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ est équivalente à $e^{(a-1)x}$, qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ car $a-1$ est négatif. Quand x réel tend vers $-\infty$, la fonction f est équivalente à e^{ax} , qui est intégrable sur \mathbb{R}_- car $a > 0$. La fonction f est donc intégrable sur \mathbb{R} .

Pour appliquer le théorème des résidus, on calcule les pôles de f , donc les zéros de $h(z)$. On a

$$1 + e^z = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z = i\pi[2i\pi]$$

Les zéros de h sont donc les $(2k+1)i\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. De plus, on a $h'((2k+1)i\pi) = -1 \neq 0$ et $g((2k+1)i\pi) \neq 0$ (l'exponentielle ne s'annule jamais sur \mathbb{C}), donc les $(2k+1)i\pi$ sont des pôles simples de f , et on a

$$\text{Res}(f, (2k+1)i\pi) = \frac{g((2k+1)i\pi)}{h'((2k+1)i\pi)} = \frac{e^{a(2k+1)i\pi}}{e^{(2k+1)i\pi}} = e^{(a-1)(2k+1)i\pi}.$$

On considère les chemins suivant

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = t & t \in [-R, R], \\ \gamma_2(t) = R + it & t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_3(t) = 2i\pi - t & t \in [-R, R], \\ \gamma_4(t) = -R + i(2\pi - t) & t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Quitte à reparamétriser ces chemins, on peut aussi les définir sur $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 1]$, pour pouvoir ensuite définir leur concaténation γ (il suffit de faire des changement de variables affines).

Le seul zéro de h se trouvant dans le rectangle considéré, qui ne contient que des nombres complexes de parties réelles incluses entre 0 et $2i\pi$, est $i\pi$. Par le théorème des résidus, on obtient que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi \text{Res}(f, i\pi) = 2i\pi e^{(a-1)i\pi}$$

On doit maintenant contrôler les intégrales de f le long des chemins $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Premièrement, on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_{-R}^R f(t)dt \\ \int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(R+it)idt \\ \int_{\gamma_3} f(z)dz &= - \int_{-R}^R f(2i\pi - t)dt \\ \int_{\gamma_4} f(z)dz &= - \int_0^{2\pi} f(-R+i(2\pi-t))idt\end{aligned}$$

Ensuite, cherchons à contrôler les intégrales sur γ_2 et γ_4 . Pour $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\begin{aligned}|f(R+it)| &= \left| \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}} \right| = \frac{e^{aR}}{|1+e^{R+it}|} \leq \frac{e^{aR}}{e^R-1} \\ |f(-R+2i\pi-it)| &= \left| \frac{e^{a(-R+2i\pi-it)}}{1+e^{-R+2i\pi-it}} \right| = \frac{e^{-aR}}{|1+e^{-R-it}|} \leq \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}\end{aligned}$$

Comme ces deux dernières quantités tendent vers 0 quand R tend vers $+\infty$, on trouve

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| &\leq \frac{2\pi e^{aR}}{e^R-1} \rightarrow 0 \\ \left| \int_{\gamma_3} f(z)dz \right| &\leq \frac{2\pi e^{-aR}}{1-e^{-R}} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Ensuite, on cherche à écrire l'intégrale le long de γ_3 en fonction de l'intégrale le long de γ_1

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} f(z)dz &= - \int_{-R}^R \frac{e^{a(2i\pi-t)}}{1+e^{-t}} dt \\ &= -e^{2ai\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt \\ &= e^{2ai\pi} \int_R^{-R} \frac{e^t}{1+e^t} dt \\ &= -e^{2ai\pi} \int_{\gamma_1} f(t)dt\end{aligned}$$

Par le théorème des résidus (et en passant à la limite $R \rightarrow +\infty$), on obtient

$$\begin{aligned}2i\pi e^{(a-1)i\pi} &= (1 - e^{2ai\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ \Leftrightarrow -2i\pi e^{ai\pi} &= (1 - e^{2ai\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ \Leftrightarrow -2i\pi &= (e^{-ai\pi} - e^{ai\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ \Leftrightarrow 2i\pi &= (e^{ai\pi} - e^{-ai\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ \Leftrightarrow 2i\pi &= 2i\Im(e^{ai\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{\sin(\pi a)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\end{aligned}$$

Et on a bien le résultat voulu.

Exercice 6. On pose $g(z) = e^{iz}$ et $h(z) = e^z + e^{-z}$. Quand x réel tend vers $+\infty$, la fonction $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ est équivalente en module à $\frac{1}{e^x}$, qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Quand x réel tend vers $-\infty$, la fonction f est équivalente en module à $\frac{1}{e^{-x}}$, qui est intégrable sur \mathbb{R}_- . La fonction f est donc intégrable sur \mathbb{R} .

Pour appliquer le théorème des résidus, on calcule les pôles de f , donc les zéros de $h(z)$. On a

$$e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2z \equiv i\pi[2i\pi] \Leftrightarrow z \equiv i\frac{\pi}{2}$$

Les zéros de h sont donc les $\frac{i\pi}{2} + ik\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. De plus, on a

$$h' \left(\frac{i\pi}{2} + ik\pi \right) = e^{i\pi/2+ik\pi} - e^{-i\pi/2-ik\pi} = (-1)^k (i - (-i)) = 2i(-1)^k.$$

et $g(\frac{i\pi}{2} + ik\pi) \neq 0$ (l'exponentielle ne s'annule jamais sur \mathbb{C}), donc les $\frac{i\pi}{2} + ik\pi$ sont des pôles simples de f .

On considère les chemins suivant

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = t & t \in [-R, R], \\ \gamma_2(t) = R + it & t \in [0, \pi], \\ \gamma_3(t) = i\pi - t & t \in [-R, R], \\ \gamma_4(t) = -R + i(\pi - t) & t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Quitte à reparamétriser ces chemins, on peut aussi les définir sur $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 1]$, pour pouvoir ensuite définir leur concaténation γ (il suffit de faire des changement de variables affines).

Le seul zéro de h se trouvant dans le rectangle considéré, qui ne contient que des nombres complexes de parties réelles incluses entre 0 et $i\pi$, est $i\pi/2$. Par le théorème des résidus, on obtient que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i\pi/2) = 2i\pi \frac{g(i\pi/2)}{h'(i\pi/2)} = 2i\pi \frac{e^{-\pi/2}}{2i} = \pi e^{-\pi/2}.$$

On doit maintenant contrôler les intégrales de f le long des chemins $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Premièrement, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_{-R}^R f(t) dt \\ \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_0^\pi f(R + it) i dt \\ \int_{\gamma_3} f(z) dz &= - \int_{-R}^R f(i\pi - t) dt \\ \int_{\gamma_4} f(z) dz &= - \int_0^\pi f(-R + i(\pi - t)) i dt \end{aligned}$$

Ensuite, cherchons à contrôler les intégrales sur γ_2 et γ_4 . Pour $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$f(R + it) = \frac{e^{iR-t}}{e^{R+it} + e^{-R-it}}$$

Quand R tend vers $+\infty$, e^{-R-it} converge vers 0, donc la fonction ci-dessus est équivalente en module à $\frac{e^{-t}}{e^R}$, donc

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{e^R} \leq \pi \frac{1}{e^R} \rightarrow 0$$

De la même manière, on calcule

$$f(-R + i\pi - it) = \frac{e^{-iR+\pi+t}}{e^{-R+i\pi-it} + e^{R-i\pi+it}} = \frac{-e^{-iR+\pi+t}}{e^{-R-it} + e^{R+it}}$$

Quand R tend vers $+\infty$, e^{-R-it} converge vers 0, donc la fonction ci-dessus est équivalente en module à $\frac{e^{\pi+t}}{e^R}$, donc

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{\pi+t}}{e^R} \leq \pi \frac{e^{2\pi}}{e^R} \rightarrow 0$$

Ensuite, on cherche à écrire l'intégrale le long de γ_3 en fonction de l'intégrale le long de γ_1

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} f(z) dz &= - \int_{-R}^R \frac{e^{-\pi-it}}{e^{i\pi-t} + e^{t-i\pi}} dt \\ &= -e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-it}}{-e^{-t} - e^t} dt \\ &= e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-it}}{e^t + e^{-t}} dt \\ &= -e^{-\pi} \int_R^{-R} \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt \\ &= e^{-\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt = e^{-\pi} \int_{\gamma_1} f(z) dz \end{aligned}$$

Par le théorème des résidus (et en passant à la limite $R \rightarrow +\infty$), on obtient

$$\begin{aligned} \pi e^{-\pi/2} &= (1 + e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \\ \Leftrightarrow \pi &= (e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \end{aligned}$$

Comme la valeur de l'intégrale est réelle, elle est égale à sa partie réelle, et on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} &= \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt \right) \\ &= \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{e^t + e^{-t}} dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t + e^{-t}} dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{e^t + e^{-t}} dt \end{aligned}$$

Et on a bien le résultat voulu.

† *Complément sur les singularités*

Exercice 7.

1) Si f admet une singularité effaçable en a , alors f se prolonge en une fonction holomorphe \tilde{f} définie au voisinage de a . En particulier, il existe un rayon positif $r > 0$ tel que \tilde{f} soit holomorphe sur $\mathbb{D}(a, r)$. La fonction f est alors continue sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}(a, r/2)}$. Comme ce dernier est compact, la fonction $|f|$ est bornée sur $\overline{\mathbb{D}(a, r/2)}$, disons par un réel positif M . Par définition, on $f(\mathbb{D}(a, r/2)) \subset \mathbb{D}(0, M+1)$ n'est pas dense dans \mathbb{C} (ce dernier ouvert est inclus dans le fermé $\overline{\mathbb{D}(0, M+1)}$).

2) Supposons que a est un pôle d'ordre m de f . On peut écrire $f = \frac{1}{(z-a)^m} h(z)$, où h est holomorphe au voisinage de a . En particulier $|h|$ est borné au voisinage de a (car h est continue en a). On a alors

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{|z-a|^m} |h(z)| = +\infty$$

Par définition d'une limite, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{D}(a, r)$, on $|f(z)| > 1$. En particulier, on $f(\mathbb{D}(a, r)) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0, 1)}$ n'est pas dense dans \mathbb{C} (ce dernier ouvert est inclus dans le fermé $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$).

3)a) Par définition, $z \mapsto \frac{1}{f(z)-\alpha}$ est bien définie sur $\mathbb{D}^*(a, r)$ car $f(z) - \alpha$ ne s'annule jamais (par hypothèse) sur cet ensemble, et il s'agit bien d'une fonction holomorphe. De plus, on a

$$\left| \frac{1}{f(z) - \alpha} \right| = \frac{1}{|f(z) - \alpha|}$$

Comme, par hypothèse, $f(\mathbb{D}^*(a, r)) \cap \mathbb{D}(\alpha, R) = \emptyset$, on a $|f(z) - \alpha| \geq R$ pour tout $z \in \mathbb{D}^*(a, r)$. Donc le module ci-dessus est inférieur à R sur $\mathbb{D}^*(a, r)$. Autrement dit, la fonction $z \mapsto \frac{1}{f(z)-\alpha}$ est bornée sur $\mathbb{D}^*(a, r)$. Ainsi, a est une singularité effaçable de cette dernière fonction, qui se prolonge donc en une fonction holomorphe g sur $\mathbb{D}(a, r)$.

b) On écrit, au voisinage de a , $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n$. On pose $m \geq 0$ le plus petit entier pour lequel $a_m \neq 0$, de sorte que

$$g(z) = \sum_{n \geq m} a_n(z-a)^n = \sum_{n \geq 0} a_{n+m}(z-a)^{n+m} = (z-a)^m \sum_{n \geq 0} a_{n+m}(z-a)^n$$

Et la dernière série entière définit une fonction h holomorphe au voisinage de a et telle que $g(z) = (z-a)^m h(z)$ au voisinage de a . Par ailleurs, $h(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ est une fonction holomorphe au voisinage de a et qui se prolonge naturellement à $\mathbb{D}(a, r)$.

c) Pour $z \in \mathbb{D}^*(a, r)$, on a

$$\frac{1}{f(z) - \alpha} = (z-a)^m h(z) \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{h(z)} \frac{1}{(z-a)^m} + \alpha = \frac{1/h(z) + (z-a)^m \alpha}{(z-a)^m}$$

Comme h ne s'annule pas en a , la fonction $z \mapsto 1/h(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(a, r)$, en posant $l(z) = 1/h(z) + (z-a)^m \alpha$, on obtient bien le résultat voulu.

4) En effet il existe trois sortes de singularités : si f est holomorphe sur $\mathbb{D}^*(a, r)$, alors f admet soit une singularité effaçable en a , soit un pôle en a , soit une singularité essentielle en a . On vient de montrer que f non dense au voisinage de a équivaut au fait que a est soit une singularité effaçable, soit un pôle. Par contraposée, on obtient que f admet une singularité essentielle en a si et seulement si $f(\mathbb{D}^*(a, r))$ est dense dans \mathbb{C} pour tout $r > 0$.