

Examen de Session 1 – Mardi 17 Décembre 2024

Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

A INDIQUER SUR LA COPIE : SUJET B

Les calculatrices sont interdites. Aucun document n'est autorisé.

Ce sujet est constitué de 2 pages et de 4 exercices indépendants les uns des autres.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie : en particulier, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié ultérieurement.

Exercice 1. — Questions de cours (6 points) —

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(3x + 1)e^{-2x}$ existe et vaut 0.
2. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
3. Démontrer qu'il existe un réel $c \in [1; 3]$ vérifiant l'égalité suivante :

$$c^4 - 2c^2 - 2 = 2c.$$

Exercice 2. — (3 points) —

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 12}$.
Calculer $f'(x)$ pour $x > 4$.
2. Résoudre l'équation $3e^x > -2$.
3. Résoudre l'équation $\ln(\sqrt{x}) + 7 = -2$.

Exercice 3. — (6 points) —

Etant donnés des réels a, b, c , on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}.$$

1. Pourquoi f est-elle effectivement bien définie sur \mathbb{R} ?
2. Pour quelles valeurs des réels a, b, c la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

T.S.V.P.

Examen de Session 1 – Mardi 17 Décembre 2024
Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures
A INDIQUER SUR LA COPIE : SUJET B

Exercice 4. — (15 points) —

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2(x - 1) + e^{-x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer, si elle existe, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{4x}$.
4. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
5. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa fonction dérivée f' .
6. Etablir le tableau de variations de f .
Tous les calculs menant à la construction de ce tableau devront être explicitement indiqués sur la copie, sous peine de pénalités.
7. Le graphe de la fonction f admet-il des asymptotes horizontales ?
8. Le graphe de la fonction f admet-il des asymptotes verticales ?
9. Démontrer que la droite d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$. Est-ce une asymptote oblique au graphe de f en $-\infty$?
10. Tracer l'allure du graphe de la fonction f , en indiquant clairement :
 - les unités du repère utilisé pour le tracé ;
 - les éventuelles asymptotes déterminées dans les questions précédentes ;
 - les éventuels points remarquables utilisés pour le tracé.

Indication : Si nécessaire, on pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :

$$\ln(2) \simeq 0,7 \text{ et } e \simeq 2,7.$$