

Examen de première session
Méthodes et techniques de calcul
Durée : 2h00

Les documents et les calculatrices NE sont PAS autorisés pendant l'épreuve

Exercice 1 : Donner sous forme d'union d'intervalle le domaine de définition de la fonction réelle de la variable réelle définie par la formule

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 4}$$

Exercice 2 : Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x+5}$$

Exercice 3 : Calculer

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^t dt}{1 + e^t}$$

On pourra effectuer le changement de variable $u = 1 + e^t$.

Exercice 4 : Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

- a) Donner l'équation homogène associée (EH).
- b) Donner l'équation caractéristique associée (EC).
- c) Donner les solutions sur \mathbf{R} de (EH).
- d) Chercher une solution de (E) parmi les fonctions de la forme ax^2 .
- e) Donner les solutions de (E).

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - t.e^t.y = e^{(t-1)e^t}$$

- a) Grâce à une intégration par partie calculer les primitives sur \mathbf{R} de la fonction $t \mapsto t.e^t$
- b) Quelles sont les solutions de l'équation homogène associée à (E)
- c) Trouver en utilisant la méthode de "variation de la constante" une solution particulière de (E)
- d) Quelles sont les solutions de (E).

Exercice 6 : Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par la formule

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

- a) Quel est le domaine de définition de f ? L'écrire sous forme de réunion d'intervalles.
- b) Montrer que pour tout réel h tel que $5/2 - h$ est dans le domaine de f le réel $5/2 + h$ est aussi dans le domaine de f et $f(5/2 - h) = f(5/2 + h)$. Quelle symétrie du graphe de f peut on en déduire?
- c) Calculer une expression de la fonction dérivée de f .
- d) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
- e) Etudier le comportement asymptotique de f .
- f) Donner le tableau des variations de f
- g) Donner l'allure du graphe de f .