On se place dans une catégorie localement petite $\mathcal{C}$ telle que

- $\mathcal{C}$ admet un objet zéro.
- $\mathcal{C}$ admet des noyaux et des conoyaux.
- $\mathcal{C}$ admet des pushouts et des pullbacks.

**Lemme 1.** *Pour tout morphisme $f : X \to Y$, le morphisme canonique $\pi : Y \to \operatorname{Coker} f$ est un épimorphisme.*

*Démonstration.* Soient $\alpha, \beta : \operatorname{Coker} f \to Z$ deux morphismes tels que $\alpha\pi = \beta\pi$, on a en particulier $\alpha\pi f = \beta\pi f = 0$, il existe donc un unique $\varphi : \operatorname{Coker} f \to Z$ tel que $\varphi\pi = \alpha\pi = \beta\pi$. Par unicité de $\varphi$, on a $\beta = \alpha = \varphi$. □

On considère $A \in \mathcal{C}$, muni de deux monomorphismes normaux $I \to A$ et $J \to A$ (pour des raisons de lisibilité, si $X \to Y$ est un monomorphisme normal, on notera $Y/X$ son conoyau, on a donc un couple noyau/conoyau $X \to Y \to Y/X$). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[d, hook, "\iota_2"] & \\ I \arrow[r, hook, "\iota_1"] & A \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & A/I \\ & A/J & \end{tikzcd}$$

En formant le pushout de $\pi_1$ et $\pi_2$, on obtient un carré de pushout :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A/I \arrow[d, "p_1"] \\ A/J \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

**Lemme 2.** *Les morphismes $p_1$ et $p_2$ sont des épimorphismes.*

*Démonstration.* Soient $\alpha, \beta : B \to Z$ tels que $\alpha p_1 = \beta p_1$, on a alors

$$\alpha p_1\pi_1 = \beta p_1\pi_1 \Rightarrow \alpha p_2\pi_2 = \beta p_2\pi_2 \Rightarrow \alpha p_2 = \beta p_2$$

Il existe donc un unique $\varphi : B \to Z$ tel que en particulier $\varphi p_1 = \alpha p_1 = \beta p_1$, donc $\alpha = \beta = \varphi$ par unicité. On applique le même raisonnement pour $p_2$. □

On pose à présent $\pi = p_1 \circ \pi_1 (= p_2 \circ \pi_2)$, et $\iota : I \vee J \to A$ le noyau de $\pi$. Comme $\pi \circ \iota_1 = p_1 \circ \pi_1 \circ \iota_1 = 0$, il existe un unique $\iota_I : I \to I \vee J$ tel que $\iota\iota_I = \iota_1$, et de même pour $J$, on a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} I \vee J \arrow[dr, "\iota"] & J \arrow[l, hook', "\iota_J"'] \arrow[d, hook, "\iota_2"] & \\ I \arrow[u, hook, "\iota_I"] \arrow[r, hook, "\iota_1"'] & A \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi"] & A/I \arrow[d, "p_1"] \\ & A/J \arrow[r, two heads, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Attention : on ne sait pas quels morphismes sont normaux sur ce diagramme.

**Proposition 3.** *Le morphisme $\pi$ est le conoyau de $\iota$ : c'est un épimorphisme normal.*

*Démonstration.* Soit $f : A \to Z$ tel que $f\iota = 0$, on a alors $f\iota\iota_J = f\iota_2 = 0$, donc il existe un unique $\beta : A/J \to Z$ tel que $f = \beta\pi_2$, de même, il existe un unique $\alpha : A/I \to Z$ tel que $f = \alpha\pi_1$.
Par propriété universelle du pushout, il existe un unique morphisme $\varphi : B \to Z$ tel que $\varphi p_1 = \alpha$ et $\varphi p_2 = \beta$, on a alors

$$\varphi p_2 \pi_2 = \varphi\pi = f$$

et comme $\pi_2$ est un épimorphisme, $\varphi$ est bien unique avec la propriété $\varphi\pi = f$, d'où le résultat. $\square$

Venons en à présent au résultat recherché.

**Proposition 4.** *(Propriété des quotients successifs)*
*Si l'on a deux carrés commutatifs*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & A \arrow[d, "\pi_2"] \\ I' \arrow[r, hook, "i_1"'] & A/J \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} J \arrow[r, two heads, "\rho_2"] \arrow[d, hook, "\iota_2"'] & J' \arrow[d, hook, "i_2"] \\ A \arrow[r, two heads, "\pi_1"'] & A/I \end{tikzcd}$$

*Alors les conoyaux de $i_1$ et $i_2$, respectivement $m_1 : A/J \to K_1$ et $m_2 : A/I \to K_2$ sont isomorphes, et $m_1\pi_2, m_2\pi_1$ sont deux conoyaux de $\iota$.*
*En particulier, si $i_1$ et $i_2$ sont normaux, on a*

$$A/J \big/ I' \simeq A/I \big/ J'$$

*et cet isomorphisme est canonique.*

*Démonstration.* On considère $m : A/J \to K$ le conoyau de $i_1$, on montre que $m\pi_2$ est un conoyau de $\iota$ (par symétrie, on aura le même résultat sur $d$). Soit $f : A \to Z$ tel que $f\iota = 0$, on a donc $f\iota_2 = 0$, et il existe un unique $\beta : A/J \to z$ tel que $\beta\pi_2 = f$. On a alors

$$\beta i_1 \rho_1 = \beta\pi_2\iota_1 = f\iota\iota_I = 0$$

comme $\rho_1$ est un épimorphisme, on a $\beta i_1 = 0$ et donc il existe un unique $\varphi : K \to Z$ tel que $\varphi m = \beta$, on a alors $\varphi m \pi_2 = \beta\pi_2 = f$, et comme $\pi_2$ est un épimorphisme, $\varphi$ est unique avec cette propriété, d'où le résultat. $\square$

**Exemple 5.** Dans la catégorie des pseudo-anneaux, on a un isomorphisme entre $\mathbb{Z}[i]/(p)$ et $\mathbb{F}_p[X]/(X^2+1)$, en considérant le diagramme

$$\begin{tikzcd} (p, X^2+1) \arrow[dr, hook] & (p) \arrow[l, hook'] \arrow[rr, two heads] \arrow[d, hook] & & (p) \arrow[d, hook] \\ (X^2+1) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{Z}[X] \arrow[rr, two heads] \arrow[d] \arrow[drr] & & \mathbb{Z}[i] \arrow[d] \\ (X^2+1) \arrow[r, hook] & \mathbb{F}_p[X] \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}[X] \big/ (X^2+1, p) & \end{tikzcd}$$