

## TD3 : SÉRIES ENTIÈRES

### Rayon de convergence

**Exercice 1.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1)  $\sum_{n \geq 0} z^n$  ;    2)  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  ;    3)  $\sum_{n \geq 0} e^{n \sin(n)} z^n$  ;    4)  $\sum_{n \geq 0} n! z^{n^2}$  ;    5)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} z^{n!}$  ;    6)  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$ .

**Exercice 2.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  dans les cas suivants :

- 1)  $a_n$  est la  $n$ -ième décimale de  $\pi$  ;  
2)  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  converge et  $\sum_{n \geq 0} a_n$  diverge ;  
3)  $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$  ;    4)  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  ;    5)  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

**Exercice 3.** On s'intéresse à certaines conséquences de la formule d'Hadamard pour le calcul des rayons de convergence.

- 1) Fixons  $k \geq 0$ . Montrer que  $\sqrt[n]{n^k}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini.  
2) Montrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\sqrt[n]{P(n)}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini.  
3) Exprimer le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} P(n) a_n z^n$  en fonction de celui de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .  
4) Quel est le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  pour  $a_n = \frac{2^n \ln(n)}{3n^5 + n + 1}$  ?

**Exercice 4.** Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $f$ . Soient également  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$  et  $c_n := \frac{s_n}{n+1}$ .

- 1) Déterminer le rayon de convergence de  $g(z) = \sum_{n \geq 0} s_n z^n$  et de  $h(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$   
2) Exprimer  $g$  en fonction de  $f$ .  
3) Écrire une équation différentielle dont  $h$  est solution, en fonction de  $f$ .

### Calculs avec les séries entières

**Exercice 5.** Calculer les termes d'ordre  $\leq 3$  dans le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes (qu'on peut aussi voir comme des séries formelles en  $z$ ) :

1)  $e^z \sin(z)$ ,    2)  $\sin(z) \cos(z)$ ,    3)  $\frac{e^z - 1}{z}$ ,    4)  $\frac{1}{\cos(z)}$ ,    5)  $\frac{e^z - \cos(z)}{z}$ ,    6)  $\tan(z)$ ,    7)  $\frac{e^z}{\sin(z)}$ .

**Exercice 6.** Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  une série convergente.

- 1) Montrer que  $z \mapsto f(-z)$  et  $z \mapsto -f(-z)$  sont aussi des sommes de séries entières convergentes.  
2) En déduire un critère pour que  $f$  soit paire (resp. impaire).

**Exercice 7.** Chercher toutes les séries entières  $f(z) = \sum a_n z^n$  qui vérifient  $f(z^2) = f(z)^2$ .

**Exercice 8** (Suites récurrentes). Les nombres de Fibonacci sont définis par  $F_0 = F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . On pose  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ , et on note  $R$  son rayon de convergence.

- 1) Montrer par récurrence que  $F_n \leq 2^n$ . En déduire que  $R > 0$ .  
2) Exprimer  $\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} z^n$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} z^n$  en fonction de  $f$ .

- 3) En déduire que  $f$  coïncide avec une fraction rationnelle sur son disque de convergence.
- 4) Décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples, puis développer ces éléments simples en série entière. En déduire une expression explicite pour  $F_n$  en fonction de  $n$ .
- 5) Réfléchir aux généralisations possibles de ce qu'on vient de faire.

**Exercice 9.** Le but de cet exercice est d'étudier  $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ .

- 1) Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.
- 2) Montrer que  $f'(z) = -\frac{\text{Log}(1-z)}{z}$  sur tout le disque de convergence.

**Exercice 10** (Nombres de Bernouilli). On définit les *nombres de Bernouilli*  $B_n$  par :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

- 1) Prouver que  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$
- 2) Calculer  $B_i$  pour  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Montrer que  $B_n = 0$  si  $n$  est impair  $\neq 1$ .
- 3) Montrer que  $\frac{z}{2} \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ , puis que  $\frac{\pi z}{\tan(\pi z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$ .
- 4) Exprimer les développements en série entière en 0 de  $\tan(z)$ ,  $z/\sin(z)$  et  $z/\tan(z)$  en fonction des nombres de Bernouilli.