Examen final (11 mai 2023)

Exercice 1. Considérons la série entière
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

a) Montrer que le rayon de convergence de $f(z)$ vaut 1.

b) Supposons qu'il existe un ouvert connexe D avec $D \cap B_1(0) \neq \varnothing$ et $D \setminus B_1(0) \neq 0$, ainsi qu'une fonction $g \in \mathcal{O}(D)$ avec $f_{|B_1(0)\cap D} = g_{B_1(0)\cap D}$.

1) Soit $z = e^{i\varphi} \in D \cap \partial B_1(0)$. Montrer que la limite
$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} f(re^{i\varphi})$$
existe

2) Montrer que l'ensemble $E := \{e^{2i\pi q} \mid q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\partial B_1(0)$ et en déduire qu'il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ tels que la limite
$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} f(re^{2i\pi\frac{\ell}{k}})$$
existe.

3) Fixons dans la suite $\varphi = \frac{\ell}{k} \in \mathbb{Q}$ pour $k, \ell \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$ tel que la limite
$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} f(re^{2i\pi\frac{\ell}{k}})$$
existe. Montrer que
$$\forall r \in]0,1[, \quad \left|\sum_{\nu=0}^{k-1} (re^{2i\pi\varphi})^{\nu!}\right| \leqslant k$$

4) Justifier que $(e^{2i\pi\varphi})^{\nu!} = 1$ pour $\nu \geqslant k$. En considérant des sommes partielles, montrer que
$$\forall m > k, \ \liminf_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} (re^{2i\pi\varphi})^{\nu!})\right) \geqslant m - k + 1.$$
En déduire que D ne peut pas exister.

c) Trouver le rayon de convergence de
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{\nu+1} (z-a)^{\nu}$$
pour un complexe a avec $a \neq 1$. En déduire qu'il existe un ouvert connexe D avec $D \cap B_1(0) \neq \varnothing$ et $D \setminus B_1(0) \neq \varnothing$, et une fonction $h \in \mathcal{O}(D)$ avec $h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$ si $z \in D \cap B_1(0)$.

Exercice 2. Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{O}(U)$, et f une fonction méromorphe sur U. Soit également γ un lacet dans U tel que $|\gamma|$ ne contient aucun pôle de f et aucun zéro de f.

a) Utiliser la compacité de $|\gamma|$ pour montrer qu'il existe un ouvert V dont l'adhérence $\overline{V}$ est un compact dans U et tel que $|\gamma| \subset V$. En déduire qu'il existe un ensemble fini de points $b_1, \dots, b_m \in V$ tel que $f \in \mathcal{O}(V \setminus \{b_1, \dots, b_m\})$, et puis, de plus $f^{-1}(0) = \{a_1, \dots, a_n\}$, c'est à dire que f n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \dots, a_n$ de f dans V.

b) Si a est un zéro d'ordre $k =: \sigma_a(f)$ de f, montrer que la fonction $g\frac{f'}{f}$ possède ou bien une singularité enlevable en a ou bien un pôle simple en a.

c) Montrer que
$$\mathrm{res}_a\left(g\frac{f'}{f}\right) = kg(a).$$

d) Si b est un pôle d'ordre $k =: \nu_b(f)$ de f, montrer que
$$\mathrm{res}_b\left(g\frac{f'}{f}\right) = -kg(b).$$

e) Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{a_k}(f)g(a_k)\,\mathrm{ind}_\gamma(a_k) - \sum_{j=1}^{n} \nu_{b_j}(f)g(b_j)\,\mathrm{ind}_\gamma(b_j)$$
où $\{a_1, \dots, a_n\} = f^{-1}(0) \cap \mathrm{Int}(\gamma)$ et $\{b_1, \dots, b_m\}$ est l'ensemble des pôles de f dans $\mathrm{Int}(\gamma)$.

f) Montrer que $f \circ \gamma$ est un lacet avec $0 \notin |f \circ \gamma|$. En déduire
$$\mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{a_k}(f)\,\mathrm{ind}_\gamma(a_k) - \sum_{j=1}^{n} \nu_{b_j}(f)\,\mathrm{ind}_\gamma(b_j)$$

g) Que vaut la formule de e) si γ est le bord d'un disque ? Évaluer le cas particulier $f(z) = (z-1)^n + \frac{1}{(z+1)^n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et $\gamma = \partial B_3(0)$.