

† Calcul de limite

### Exercice I

Calculer les limites suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x-4}{-7x+2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x-4}{5x^2+2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x-4}{x^4-5x} . \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+3x-4}{-2x+2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin(x), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1} \quad , \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + \ln(x)}{3^x + x^{122}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left[\frac{\sin(x)}{x^2}\right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x^2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\pi/4 - 1/x), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^x \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\ln^3(1+x^2)} \end{aligned}$$

### Exercice II

Calculer les limites suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3-3x^2}{\sin^2(x)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x)}{\ln(1+x^2)}. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\ln(x)) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

† Continuité, prolongement par continuité

### Exercice III

Soit  $f$  la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 3x \text{ si } x < -1, \quad f(x) = 3x + 7 \text{ si } -1 \leq x < 1, \quad f(x) = 0 \text{ si } x = 1, \\ f(x) = \frac{20 \cos(2\pi x)}{x+1} \text{ si } 1 \leq x. \end{aligned}$$

Calculer

$$f(-1), f(1), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Quel est le domaine de continuité de  $f$ ?

### Exercice IV

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-16} \text{ si } x \neq 4, -4 \text{ et } f(-4) = a \text{ et } f(4) = b.$$

Etudier le domaine de continuité de  $f$ .

### Exercice V

Calculer le domaine de définition des fonctions définies par les formules

$$f(x) = \frac{|x|^{3/2} - 1}{x - 1}$$

et

$$g(x) = \ln(|x|)$$

Peut-on les prolonger par continuité à  $\mathbf{R}$ ?

### Exercice VI

Soit  $f(x) = x \ln(x)$

- 1) Quel est le domaine de définition de  $f$ ?
- 2) Calculer si elle existe l'expression de la fonction dérivée. Donner le tableau des variations de  $f$ .
- 3) Donner l'allure du graphe de  $f$ .

† *Fonctions de plusieurs variables*

### Exercice VII

Calculer les domaines de définition des fonctions de deux variables réelles suivantes :

- 1)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + yx + 1}$  On pourra étudier la fonction  $y = -(x^2 + 1)/x$
- 2)  $g(x, y) = \ln(x + y)$
- 3)  $h(x, y) = \sqrt{\ln(x - y)}$

### Exercice VIII

Calculer les dérivées partielles par rapport à chacune des variables pour les fonctions suivantes :

- 1)  $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$
- 2)  $g(x, y) = \frac{x \sin(y) + \cos(x)y}{xy}$

### Exercice IX

- 1) Soit  $f(x)$  une fonction réelle de la variable réelle on la suppose définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$ . Pour  $x$  et  $y$  deux variables réelles on pose  $g(x, y) = f(xy)$ , calculer les dérivées partielles de  $g$  par rapport aux variables  $x$  et  $y$ .
- 2) Dédire de 1) que si on suppose que pour tout réels  $x$  et  $\lambda$  on a  $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$  alors pour tout  $x$  on a  $xf'(x) = 2f(x)$ . Quelles sont ces fonctions?