TD 2 - Correction

Exercice 2. À chaque fois, on pose $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy) = \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ les parties réelles et imaginaires de f. La Jacobienne de f au point $z = x+iy = (x,y)$ de $\mathbb{C}$ est donnée par

$$Jf_z = \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à demander que cette matrice soit de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}$$

On aalors $f'(x+iy) = a+ib$. Pour trouver l'expression de $f'(x+iy)$ en fonction de $z = x+iy$, on utilise les formules $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. On a alors

$$f'(z) = \partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y) = \partial_x u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + i\partial_x v\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

Bien-sûr, on peut aussi être astucieux et reconnaitre directement l'expression de $f'(z)$ en fonction de z, la méthode ci-dessus est plus longue, mais elle va toujours marcher.

1) Ici, on a $u(x,y) = x^2 + 2x - y^2$ et $v(x,y) = 2(1+x)y$. La jacobienne de f en z est alors donnée par

$$Jf_z = \begin{pmatrix} 2x+2 & -2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}.$$

Donc f respecte les équations de Cauchy-Riemann en tout point : elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec

$$f'(z) = 2x + 2 + i2y = 2(x+iy) + 2 = 2z + 2.$$

En fait, on remarque que $f(z) = z^2 + 2z$. On voit alors immédiatement que f est holomorphe (c'est un polynôme), et que $f'(z) = 2z + 2$.

2) Ici, on a $u(x,y) = y^2 \sin(x)$ et $v(x,y) = y$. La jacobienne de g en z est alors donnée par

$$Jg_z = \begin{pmatrix} y^2 \cos(x) & 2y \sin(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc g respecte les équations de Cauchy-Riemann en $z = x+iy$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2y \sin(x) = 0, \\ y^2 \cos(x) = 1. \end{cases}$$

La première équation donne $y = 0$ ou $\sin(x) = 0$. Comme la deuxième équation donne $y^2 \neq 0$, on a $y \neq 0$ et $\sin(x) = 0$. On a alors $\cos(x) = \pm 1$, mais comme $y^2 > 0$ et $1 > 0$, $y^2 \cos(x) = 1$ force $\cos(x) = 1$, autrement dit $x \equiv 0[2\pi]$. Le système devient alors

$$\begin{cases} x \equiv 0[2\pi] \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow z = 2k\pi \pm i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

La fonction g est donc $\mathbb{C}$-dérivable exactement en les points complexes de la forme $2k\pi \pm i$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Sa dérivée est donnée en ces points par $f'(z) = 1$.

3) Ici, on a $u(x, y) = x^3y^2$ et $v(x, y) = x^2y^3$. La jacobienne de g en z est alors donnée par

$$Jg_z = \begin{pmatrix} 2x^2y^2 & 2x^3y \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

Donc h respecte les équations de Cauchy-Riemann en $z = x + iy$ si et seulement si

$$2x^3y = -2xy^3 \Leftrightarrow 2xy(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

La fonction h est donc $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, sur lequel sa dérivée est donnée par $h'(z) = 0$.

4) On reconnait $k(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$. Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, avec $k'(z) = \frac{-1}{z^2}$.

5) On reconnait

$$\begin{aligned} l(x + iy) &= e^x(-\sin(y) + i\cos(y)) + 3 - 5i \\ &= e^x(i(i\sin(y) + \cos(y)) + 3 - 5i \\ &= ie^{x+iy} + 3 - 5i \\ &= ie^z + 3 - 5i \end{aligned}$$

Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec $l'(z) = ie^z$.

Exercice 3. Ici, on a $u(x, y) = x^2 + axy + by^2$ et $v(x, y) = cx^2 + dxy + y^2$ les parties réelles et imaginaires de f, respectivement. La jacobienne de f en $z \in \mathbb{C}$ est alors donnée par

$$Jf_z = \begin{pmatrix} 2x + ay & ax + 2by \\ 2cx + dy & dx + 2y \end{pmatrix}$$

Pour que f soit holomorphe sur $\mathbb{C}$, il faut et il suffit que f respecte les équations de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$. En particulier, en 1 et en i. En spécialisant Jf_z en $z = 1 = (1, 0)$ et en $z = i = (0, 1)$, on trouve

$$Jf_1 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2c & d \end{pmatrix} \text{ et } Jf_i = \begin{pmatrix} a & 2b \\ d & 2 \end{pmatrix}$$

Donc f respecte les équations de Cauchy-Riemann en 1 et en i si et seulement si

$$\begin{cases} 2 = d, \\ 2c = -a, \\ a = 2, \\ d = -2b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a = 2, \\ 2c = -2, \\ 2 = -2b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ d = 2, \\ c = -1, \\ b = -1. \end{cases}$$

La seule fonction possible est donc $f(x + iy) = x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2)$. Il reste à vérifier que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (pour l'instant, on sait juste qu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable en 1 et en i). La jacobienne de f en z est donnée par

$$Jf_z = \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x - 2y \\ -2x + 2y & 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

Donc f respecte les équations de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$, et on a

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2) \\ &= (x + iy)^2 - 2ixy + 2xy + i((ix - y)^2 + 2xy + 2ixy) \\ &= (x + iy)^2 + i(ix - y)^2 - 2ixy + 2xy + 2ixy - 2xy \\ &= z^2 + i(iz)^2 = (1 - i)z^2. \end{aligned}$$

Exercice 4. 1) La fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est polynomiale, donc $\mathcal{C}^\infty$, et on calcule

$$\begin{array}{ll} \partial_x u(x,y) = y^2 - x^2; & (\partial_x)^2 u(x,y) = -2x \\ \partial_y u(x,y) = 2xy; & (\partial_y)^2 u(x,y) = 2x \end{array}$$

On a donc bien $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$, donc u est harmonique.

2) On fixe $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ et on considère la fonction v donnée par

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} \partial_y u(t,y_0)dt$$

Il s'agit d'une fonction harmonique, et $u + iv$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Le choix de x_0, y_0 revient à remplacer v par une fonction de la forme $v + c$, où c est une constante (v est définie à une constante près). Ici, on prend $x_0 = y_0 = 0$ et on a

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^y t^2 - x^2 dt - \int_0^x 2t \cdot 0 dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - tx^2\right]_0^y \\ &= \frac{y^3}{3} - yx^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait de toute manière que si v_1, v_2 sont deux fonctions telles que $u + iv_1$ et $u + iv_2$ sont holomorphes, alors $i(v_1 - v_2) = (u + iv_1) - (u + iv_2)$ est holomorphe, et à valeurs dans $i\mathbb{R}$. Les seules fonctions holomorphes à valeurs dans $i\mathbb{R}$ sont les constantes, donc $v_1 - v_2$ est une constante. La fonction $f = u + iv$ est donnée par

$$\begin{aligned} f(z) &= xy^2 - \frac{x^3}{3} + i\left(\frac{y^3}{3} - yx^2\right) \\ &= \frac{1}{3}(-x^3 - 3iyx^2 + 3xy^2 + iy^3) \\ &= \frac{1}{3}(-x - iy)^3 \\ &= \frac{-z^3}{3} \end{aligned}$$

4) On reprend les questions précédentes. La fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est polynomiale, avec

$$\begin{array}{ll} \partial_x u(x,y) = 6x^2 - 6y^2 + 2x; & (\partial_x)^2 u(x,y) = 12x + 2 \\ \partial_y u(x,y) = -12xy - 2y - 1; & (\partial_y)^2 u(x,y) = -12x - 2 \end{array}$$

On a donc bien $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$, donc u est harmonique. On reprend $x_0 = y_0 = 0$ et on calcule

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^y 6x^2 - 6t^2 + 2x dt - \int_0^x -12t \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot (-1) dt \\ &= (6x^2 + 2x)y - 6\int_0^y t^2 dt + \int_0^x dt \\ &= (6x^2 + 2x)y - 6\frac{y^3}{3} + x \end{aligned}$$

On a au final

$$\begin{aligned} f(z) &= 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y + i\left((6x^2 + 2x)y - 2y^3 + x\right) \\ &= 6\left(\frac{x^3}{3} - xy^2 + ix^2y - i\frac{y^3}{3}\right) + x^2 - y^2 + 2ixy - y + ix \\ &= 6\frac{z^3}{3} + z^2 + iz. \end{aligned}$$

Exercice 5. 1) Comme u est une fonction polynomiale, il est facile de calculer ses dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\partial_x u(x,y) = 2ax + by; \quad (\partial_x)^2 u(x,y) = 2a\\ \partial_y u(x,y) = bx + 2cy; \quad (\partial_y)^2 u(x,y) = 2c\end{aligned}$$

La fonction u est donc harmonique si et seulement si $a = -c$.

2) Comme précédemment, on fixe $x_0 = y_0 = 0$ et on calcule

$$\begin{aligned}v(x,y) &= \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} \partial_y u(t,y_0)dt\\ &= \int_{0}^{y} \partial_x u(x,t)dt - \int_{0}^{x} \partial_y u(t,0)dt\\ &= \int_{0}^{y} 2zx + btdt - \int_{0}^{x} btdt\\ &= \left[2axt + \frac{bt^2}{2}\right]_0^y - \left[\frac{bt^2}{2}\right]_0^x\\ &= 2axy + \frac{by^2}{2} - \frac{bx^2}{2}.\end{aligned}$$

En général, les fonctions $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $u + iv$ soit holomorphes sont les fonctions de la forme $v(x,y) = 2axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + z_0$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$.

3) En prenant $z_0 = 0$ dans le résultat de la question précédente, on trouve

$$\begin{aligned}f(z) &= ax^2 + bxy - ay^2 + i\left(2axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2)\right)\\ &= a(x^2 - y^2 + 2ixy) + \frac{b}{2}\left(2xy + i(y^2 - x^2)\right)\\ &= az^2 + \frac{b}{2}(-iz^2)\\ &= z^2\left(a^2 - \frac{ib}{2}\right).\end{aligned}$$

Exercice 6. par les équations de Cauchy-Riemann, on a $\partial_x u = \partial_y v$. L'équation $\partial_x u + \partial_y v = 0$ entraîne donc $\partial_x u = \partial_y v = 0$ sur U. On en déduit en particulier (en re-dérivant) que $\partial_x^2 u = 0 = \partial_y^2 v$ sur U. Comme u et v sont harmoniques, on a alors $\partial_y^2 u = \partial_x^2 v = 0$. Ainsi, $\partial_x v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\partial_x(\partial_x v) = 0$ et $\partial_y(\partial_x v) = -\partial_y(\partial_y u) = 0$. Comme v est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on trouve que $J_{\partial_x v}$ est nulle en tout points de U et donc ∂_v est constante par morceaux. On trouve de même que $\partial_x u$ est constante par morceaux. Ainsi, $f' = \partial_x u + i\partial_x v$ est constante par morceaux sur U.

Exercice 7. On pose $f = u + iv$ comme d'habitude. Par hypothèse, la fonction u est constante. On a alors $\partial_x u = \partial_y u = 0$ sur U. D'après les équations de Cauchy-Riemann, la jacobienne de f est alors identiquement nulle sur U, et $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$. Comme U est connexe par hypothèse, on en déduit que f est constante sur U.

Exercice 8. 1) On pose $f = u + iv$ comme d'habitude pour le restant de cet exercice. On a

$$\begin{aligned}\partial_x f + i\partial_y f &= \partial_x(u + iv) + i\partial_y(u + iv)\\ &= \partial_x u + i\partial_x v + i\partial_y u - \partial_y v\\ &= \partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u)\end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\partial_x f + i\partial_y f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases}$$

Soit exactement les équations de Cauchy-Riemann. Une fonction f est donc $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z = x + iy$ si et seulement si $(\partial_x f + i\partial_y f)(x, y) = 0$, soit le résultat voulu.

2) On a

$$\begin{aligned}
\partial_z f + \partial_{\overline{z}} f &= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f + \partial_x f - i\partial_y f) = \partial_x f \\
\partial_{\overline{z}} f - \partial_z f &= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f - \partial_x f + i\partial_y f) = i\partial_y f \\
2\overline{\partial_z f} &= \overline{(\partial_x f - i\partial_y f)} \\
&= \overline{(\partial_x(u + iv) - i\partial_y(u + iv))} \\
&= \overline{\partial_x u + i\partial_x v - i\partial_y u + \partial_y v} \\
&= \overline{\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u)} \\
&= \partial_x u + \partial_y v - i(\partial_x v - \partial_y u) \\
&= \partial_x u - i\partial_x v + i\partial_y u + \partial_y v \\
&= \partial_x(u - iv) + i\partial_y(u - iv) \\
&= (\partial_x \overline{f} + i\partial_y \overline{f}) = 2\partial_{\overline{z}} \overline{f}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\partial_{\overline{z}} f = \partial_{\overline{z}} \overline{\overline{f}} = \overline{\partial_z \overline{f}}$ et que $\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \partial_z \overline{f}$ en passant au conjugué.

3) Comme f est $\mathbb{R}$-différentiable, on peut définir $\partial_x f$ et $\partial_y f$. D'après la question 1, on a

$$\begin{aligned}
f\ \mathbb{C} - \text{dérivable en } z_0 &\Leftrightarrow (\partial_x f + i\partial_y f)(z_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(f))(z_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\partial_{\overline{z}} f)(z_0) = 0.
\end{aligned}$$

Sous cette condition (les équation de Cauchy-Riemann), la jacobienne de f au point z_0 est donnée par

$$\begin{pmatrix} \partial_x u(z_0) & \partial_y u(z_0) \\ \partial_x v(z_0) & \partial_y v(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et $f'(z_0) = a + ib = \partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0)$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
(\partial_z f)(z_0) &= \frac{1}{2}\left((\partial_x - i\partial_y)(u + iv)(z_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\partial_x u + i\partial_x v - i\partial_y u + \partial_y v)(z_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\partial_x u + i\partial_x v + i\partial_x v + \partial_x u)(z_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\partial_x u(z_0) + 2i\partial_x v(z_0)\right) \\
&= \partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0) = f'(z_0).
\end{aligned}$$

4) Soit f une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. La fonction $\overline{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si $(\partial_{\overline{z}} \overline{f})(z_0) = 0$. En passant au conjugué et en utilisant la question 1), on trouve que $\overline{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si $\overline{\partial_{\overline{z}} \overline{f}}(z_0) = (\partial_z \overline{\overline{f}})(z_0) = f'(z_0) = 0$.

5) On pose $g(z) = u_1(z) + iv_1(z)$. Par définition, on a $g(x, y) = u(x, -y) + iv(x, -y)$, donc $u_1(x, y) = u(x, -y)$ et $v_1(x, y) = v(x, -y)$, et

$$\begin{aligned}
\partial_x u_1(x, y) = \partial_x u(x, -y); &\quad \partial_y u_1(x, y) = -\partial_y u(x, -y) \\
\partial_x v_1(x, y) = \partial_x v(x, -y); &\quad \partial_y v_1(x, y) = -\partial_y v(x, -y)
\end{aligned}$$

En appliquant ces formules, on trouve

$$\begin{aligned}
2(\partial_{\overline{z}}g)(z_0) &= ((\partial_x + i\partial_y)(g))(z_0) \\
&= \partial_x u_1(x,y) - \partial_y v_1(x,y) + i(\partial_x v_1(x,y) + \partial_y u_1(x,y)) \\
&= \partial_x u(x,-y) + \partial_y v(x,-y) + i(\partial_x v(x,-y) - \partial_y u(x,-y)) \\
&= ((\partial_x - i\partial_y)(f))(\overline{z_0}) \\
&= 2(\partial_z f)(\overline{z_0}).
\end{aligned}$$

Ensuite, comme $f(\overline{\overline{z}}) = f(z)$, on obtient également $(\partial_{\overline{z}}f)(z_0) = (\partial_z g)(\overline{z_0})$ pour z_0 dans U. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, alors

$$(\partial_{\overline{z}}\overline{g})(\overline{z_0}) = \overline{(\partial_z g)(\overline{z_0})} = \overline{(\partial_{\overline{z}}f)(z_0)} = 0$$

Et donc $\overline{g}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $\overline{z_0}$.

6) Sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^2$, les opérateurs $\partial_x^2, \partial_y^2, \partial_x\partial_y$ et $\partial_y\partial_x$ sont définis. De plus, les opérateurs $\partial_x\partial_y$ et $\partial_y\partial_x$ sont égaux par la rêgle de Schwarz. On a alors

$$\begin{aligned}
4\partial_z\partial_{\overline{z}} &= (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y) \\
&= \partial_x^2 - i\partial_y\partial_x + i\partial_x\partial_y + \partial_y^2 \\
&= \partial_x^2 + \partial_y^2 \\
&= \partial_x^2 + i\partial_y\partial_x - i\partial_x\partial_y + \partial_y^2 \\
&= (\partial_x + i\partial_y)(\partial_x - i\partial_y) \\
&= 4\partial_{\overline{z}}\partial_z.
\end{aligned}$$