Correction Examen session 1 2020-2021

Exercice 1.
1. On commence par rappeler que $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$ sont des groupes pour la multiplication (car $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps), et que $\mathbb{R}_+^*$ est un sous groupe de $\mathbb{R}^*$ (car le produit, et l'inverse, de nombre(s) positif(s) est encore positif). Soient (r,u) et (r',u') deux éléments de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^*$, on a

$$\text{mult}((r,u)(r',u')) = \text{mult}((rr',uu')) = rr'uu'$$

$$\text{mult}((r,u))\text{mult}((r',u')) = rur'u' = rr'uu'$$

car $\mathbb{C}$ est commutatif, on a donc bien affaire à un morphisme de groupes.
Pour montrer que mult est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une bijection, on doit donc montrer que tout élément de $\mathbb{C}^*$ admet un unique antécédent $(r,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^*$ (admet=surjectif, unique=injectif). En fait comme mult est un morphisme de groupes, il suffit de montrer qu'il est surjectif, et que son noyau est réduit à l'élément neutre $(1,1)$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^*$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a $|z| > 0$ par hypothèse, donc $r := |z| \in \mathbb{R}_+^*$, et $u := \frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}^1$, on a bien-sûr

$$z = |z|\frac{z}{|z|} = ru = \text{mult}\left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$$

donc mult est surjectif.
Soit ensuite $(r,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^*$ tel que $\text{mult}(r,u) = 1$, on a

$$1 = |1| = |ru| = |r||u| = |r|$$

Donc r est un réel positif dont la valeur absolue est 1, la seule possibilité est $r = 1$, on a alors

$$1 = ru = u$$

donc $(r,u) = (1,1)$ et mult est injectif.
Ainsi, mult est bien un isomorphisme. Ensuite, on a vu que l'image réciproque d'un nombre complexe z est $\left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$, pour $z = 1+i$, on obtient

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ et } \frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{i\pi/4}$$

l'image réciproque de $1+i$ par mult est donc $\left(\sqrt{2}, e^{i\pi/4}\right)$.
2. C'est une formule déjà connue : le produit des modules, c'est le module du produit : Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$, on a

$$m(zz') = |zz'| = \sqrt{zz'(\bar{z}\bar{z'})} = \sqrt{z\bar{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z||z'| = m(z)m(z')$$

L'image réciproque de $\{2\}$ est donnée par

$$m^{-1}(\{2\}) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 2\}$$

C'est bien-sûr $\mathcal{C}(0,2)$ le cercle de centre 0 et de rayon 2. Cet ensemble n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$: comme $|zz'| = |z||z'|$, le produit de deux éléments de $m^{-1}(2)$ est un complexe de module 4, pas de module 2.
Commençons par remarquer que $\mathbb{Q}_+^*$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$: il contient 1, et le produit/l'inverse d'un nombre

rationnel positif est encore un nombre rationnel positif, donc $m^{-1}(Q_+^*)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ comme image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes. Et on a

$$m^{-1}(\mathbb{Q}_+^*) = \left\{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| \in \mathbb{Q}_+^*\right\}$$

Pour le théorème d'isomorphisme, on commence par noter que m est surjectif. En effet, tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ est l'image par m de r, vu comme nombre complexe (où de ir si ça vous amuse). Ensuite, on doit calculer le noyau de m :

$$\text{Ker } m = m^{-1}(\{1\}) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} = \mathbb{S}^1$$

On obtient donc l'isomorphisme de groupes $\mathbb{C}^*/\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}_+^*$.

3. La rotation de centre M_0 d'angle θ admet M_0 comme point fixe, donc la similitude associée s'écrit sous la forme $a(z - z_0) + z_0$, avec $\arg a = \theta$, et $|a| = 1$, la rotation de centre M_0 et d'angle θ s'écrit donc

$$z \mapsto e^{i\theta}(z - z_0) + z_0 = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta}) z_0 = az + b$$

avec $a = e^{i\theta}$ et $b = (1 - e^{i\theta}) z_0$

4. Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ une similitude directe. On sait que, pour $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$|(az + b) - (az' + b)| = |az - az'| = |a||z - z'|$$

donc φ est une isométrie si et seulement si $|a| = 1$. On distingue ensuite deux cas

- Si $b = 0$, alors $\varphi : z \mapsto az$ admet toujours 0 comme point fixe. Il s'agit d'une rotation si et seulement si $a = e^{i\theta}$ est de module 1.
- Si $b \neq 0$, alors φ admet un point fixe si et seulement si $a \neq 1$, il s'agit donc d'une rotation si et seulement si $a \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$.

5. Une homothéthie admet toujours au moins un point fixe, on distingue alors deux cas

- Si $b = 0$, alors 0 est toujours un point fixe, et $z \mapsto az$ est une homothétie si et seulement si $a \in \mathbb{R}_+^*$
- Si $b \neq 0$, alors $z \mapsto az + b$ admet un point fixe si et seulement si $a \neq 1$, il s'agit alors d'une homothétie si et seulement si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

6. L'ensemble des rotations du plan n'est pas un sous-groupe des similitudes, car le produit de deux rotations peut être une translation (qui n'est pas une rotation) : Considérons les similitudes $\varphi_1 : z \mapsto iz+1$ et $\varphi_2 : z \mapsto -iz$, ce sont deux rotations d'après la question 4, et on a

$$\varphi_2 \circ \varphi_1(z) = -i(iz + 1) = z - i$$

Cette dernière similitude est une translation, pas une rotation.

7. On peut raisonner de façon brutale (montrer que $\mathcal{R}$ contient 1, est stable par composition et passage à l'inverse, puis montrer qu'il est stable par conjugaison...), mais on peut être un peu plus subtil : Considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \text{Sim}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ az + b & \longmapsto & a \end{array}$$

Il s'agit d'un morphisme de groupe : si $\varphi_1(z) = az + b$ et $\varphi_2(z) = cz + d$, alors

$$\varphi_2(\varphi_1(z)) = c(az + b) + d = caz + cb + d$$

donc $f(\varphi_2\varphi_1) = ac = f(\varphi_2)f(\varphi_1)$ et f est bien un morphisme. Ensuite, on considère à nouveau le morphisme m de la question 2, et la composition $m \circ f$, qui est un morphisme de groupes qui envoie $az + b$ sur $|a|$, on a

$$\text{Ker } m \circ f = \{\varphi : z \mapsto az + b \mid |a| = 1\} = \mathcal{R}$$

Donc $\mathcal{R}$ est un sous-groupe distingué, comme noyau d'un morphisme de groupes.
Le sous-groupe $\mathcal{R}$ n'est pas abélien, car, en posant $\varphi_1(z) = iz$ et $\varphi_2(z) = iz + 1$, on a

$$\varphi_2\varphi_1(z) = i(iz) + 1 = -z + 1 \quad \text{et} \quad \varphi_1\varphi_2(z)i(iz+1) = -z + i$$

8. L'application ψ considérée est simplement la restriction à $\mathcal{R}$ du morphisme f introduit à la question précédente, il s'agit donc d'emblée d'un morphisme de groupes, dont il reste à montrer qu'il est surjectif (et à valeur dans $\mathbb{S}^1$, mais ce dernier point est évident par définition de $\mathcal{R}$). Soit $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, la similitude $z \mapsto e^{i\theta}z$ se trouve dans $\mathcal{R}$ et est un antécédent de $e^{i\theta}$ dans $\mathcal{R}$.
Déterminons le noyau de ψ : soit $\varphi : z \mapsto e^{i\theta}z + b \in \mathcal{R}$, on a $\varphi \in \operatorname{Ker} \psi$ si et seulement si $e^{i\theta} = 1$, autrement dit si et seulement si φ est de la forme $z \mapsto z + b$, autrement dit une translation. En notant $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations, on obtient l'isomorphisme

$$\mathcal{R}/\mathcal{T} \simeq \mathbb{S}^1$$

9. Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ une similitude directe, on distingue deux cas

- Si $a = 1$, autrement dit φ est une translation, dans ce cas on a

$$z + b = i(-iz) + b$$

  donc φ est composition des rotation $z \mapsto iz + b$ et $z \mapsto -iz$.
- Si $a \neq 1$, alors $\varphi(z) = a(z - z_0) + z_0$ où $z_0 = \frac{b}{1-a}$, φ est alors de la composée de la rotation $z \mapsto e^{i \arg a}(z - z_0) + z_0$ par l'homothétie $z \mapsto |a|z$.

Dans tous les cas φ est une composition d'homothétie et de translations.

Exercice 2.
1. L'inversion considérée est de rapport $r = 4$ (le carré du rayon du cercle), son expression analytique est alors donnée par

$$i(z) = \frac{4}{\overline{z - (1+i)}} + 1 + i$$

2. Les deux inversions considérées ont pour expression analytique

$$i_1(z) = \frac{R_1^2}{\overline{z - (3+2i)}} + (3+2i) \quad \text{et} \quad i_2(z) = \frac{R_2^2}{\overline{z - (3+2i)}} + (3+2i)$$

On a donc

$$\begin{aligned} i_1 \circ i_2(z) &= \frac{R_1^2}{\overline{\frac{R_2^2}{\overline{z-(3+2i)}} + (3+2i) - (3+2i)}} + (3+2i) \\ &= \frac{R_1^2}{\frac{R_2^2}{z-(3+2i)}} + (3+2i) \\ &= \frac{R_1^2}{R_2^2}(z - (3+2i)) + (3+2i) \end{aligned}$$

Cette transformation est une similitude, plus précisément une homothétie, de centre A et de rapport $\frac{R_1^2}{R_2^2}$ (sauf dans le cas $R_1 = R_2$, on a alors $i_1 = i_2$, donc la composée est l'identité, car les inversions sont des involutions).

3. On commence par noter que l'expression analytique de i est la suivante

$$i(z) = \frac{4}{\bar{z}}$$

Et $i^{-1} = i$ (car i est une inversion), une équation complexe de la droite $D = \{x = 0\}$ est

$$z + \overline{z} = 0$$

Ainsi, une équation de l'image de cette droite par i est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{4}{\overline{z}} + \frac{4}{\overline{\overline{z}}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{z}} + \frac{1}{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \end{aligned}$$

Donc $i(D) = D$.
Ensuite, une équation complexe du cercle $\mathcal{C}(2, 2)$ est donnée par

$$|z - 2| = 4 \Leftrightarrow z\overline{z} - 2\overline{z} - 2z = 0$$

Une équation de $i(C'')$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \frac{4}{\overline{z}}\frac{4}{\overline{\overline{z}}} - \frac{8}{\overline{\overline{z}}} - \frac{8}{\overline{z}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{4}{\overline{z}}\frac{4}{z} - \frac{8}{z} - \frac{8}{\overline{z}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{z\overline{z}} - \frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - \overline{z} - z = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 = \overline{z} + z \end{aligned}$$

C'est une équation de droite, la droite d'équation $x = 1$ (on peut le voir sur l'équation directement, ou alors en disant que c'est la droite passant par les images de deux points de C'')

Exercice 3.
1. Si q est un quaternion pur, alors $\overline{q} = -q$, donc $N(q) = q\overline{q} = -qq = -q^2$, donc $q^2 = -N(q)$ est un réel négatif. Réciproquement, tout quaternion $q = a + ib + jc + kd$ s'écrit $a + q'$ où a est un réel, et q' est un quaternion pur, on a alors

$$q^2 = (a + q')(a + q') = a^2 + q'^2 + 2aq'$$

avec $a^2 + q'^2$ la partie réelle de q^2 et $2aq'$ sa "partie quaternionique".
Le nombre q^2 est réel si et seulement si $2aq' = 0$, on a donc soit $a = 0$ (et $q = q'$ est un quaternion pur), soit $q' = 0$ (et $q = a$ est un nombre réel).
Si $q = a$ est réel, on n'a bien-sûr pas que q^2 est un réel négatif, donc q^2 est un réel négatif si et seulement si c'est un quaternion pur.
Ensuite, si q^2 est un réel positif, alors à nouveau q est soit un quaternion pur, soit un réel, mais il ne peut être un quaternion pur (car son carré serait alors négatif) : les quaternions dont le carré est un réel positif sont donc exactement les nombres réels.

2. On constate que w est un quaternion pur, et de norme 1, on a donc $w^{-1} = \overline{w} = -w$. Pour déterminer la matrice de l'application Φ_w considérée, on calcule

$$\Phi_w(i) = -wiw = -\frac{1}{2}(i + j)i(i + j) = -\frac{1}{2}(i + j)(-1 + k) = -\frac{1}{2}(-i - j - j + i) = j$$

$$\Phi_w(j) = -wjw = -\frac{1}{2}(i + j)j(i + j) = -\frac{1}{2}(i + j)(-k - 1) = -\frac{1}{2}(j - i - i - j) = i$$

$$\Phi_w(i) = -wkw = -\frac{1}{2}(i + j)k(i + j) = -\frac{1}{2}(i + j)(j - i) = -\frac{1}{2}(k - 1 + 1 + k) = -k$$

La matrice associée à Φ_w est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une rotation, d'axe $i + j$ et d'angle π.