





# Théorie de Garside, applications aux groupes de tresses complexes. Cas de $G_{31}$ .

MÉMOIRE DE MASTER 2

Owen GARNIER

Université de Picardie Jules Verne

Département de Mathématiques

Sous la direction de M. Ivan MARIN

2020-2021

# Table des matières

<b>Introduction, notations</b>	<b>5</b>
<b>1 Présentations et catégories</b>	<b>7</b>
1.1 Catégorie libre sur un graphe, graphes conditionnés. . . . .	7
1.2 Groupoïde libre sur une catégorie, présentation de groupoïde . . . . .	10
1.3 Passage d'une présentation de groupoïde à une présentation de groupe . . .	14
1.4 Un cas particulier : la notion de germe . . . . .	16
<b>2 Catégories de Garside</b>	<b>18</b>
2.1 Préambule sur les monoïdes de Garside . . . . .	18
2.1.1 Vocabulaire sur la divisibilité dans les monoïdes . . . . .	18
2.1.2 Monoïdes de Garside . . . . .	20
2.2 Définitions et premières propriétés . . . . .	22
2.3 Germes de Garside . . . . .	28
2.3.1 Définitions, germes depuis les Catégories . . . . .	28
2.3.2 Catégories depuis les germes . . . . .	30
2.3.3 Exemple des monoïdes d'intervalles . . . . .	34
2.4 Catégorie divisée . . . . .	36
2.5 Interlude simplicial . . . . .	43
2.5.1 Ensembles simpliciaux, nerfs et revêtements . . . . .	43
2.5.2 Nerf de Garside . . . . .	45
<b>3 Groupes de tresses complexes</b>	<b>51</b>
3.1 Groupes de réflexions complexes, invariants, degrés et codegrés . . . . .	51
3.2 Groupes fondamentaux et hypersurfaces algébriques . . . . .	59
3.2.1 Groupes fondamentaux et point base épais . . . . .	59
3.2.2 Complémentaires d'hypersurfaces algébriques . . . . .	60
3.2.3 Groupe de tresses et groupe de tresses pures . . . . .	62
3.3 Morphisme de Lyashko-Looijenga . . . . .	64
3.3.1 Groupe de tresse usuel . . . . .	64
3.3.2 Interlude géométrique . . . . .	65
3.3.3 L'application $LL$ . . . . .	66
3.4 Tunnels, étiquettes et action d'Hurwitz . . . . .	68
3.5 Monoïde de Bessis . . . . .	73

<b>4</b>	<b>Centralisateurs d'éléments réguliers, présentation de <math>B_{31}</math></b>	<b>78</b>
4.1	Catégorie de tresses du centralisateur d'un élément régulier . . . . .	78
4.1.1	Notations . . . . .	78
4.1.2	Lien combinatoire $\leftrightarrow$ topologie . . . . .	80
4.2	Cas de $G_{31}$ et calcul effectif . . . . .	85
<b>Annexe</b>		<b>90</b>
	Mots pour les générateurs de $B'(u_2, u_2)$ . . . . .	90
	Fin de simplification de la présentation de $B_{31}$ . . . . .	91
	Ordre des racines pour $G_{37}$ . . . . .	96

# Introduction, notations

Le présent travail est construit pour l'essentiel comme une syntonisation de deux articles de David Bessis à propos des catégories de Garside et de la topologie du complémentaire de l'arrangement d'hyperplans d'un groupe de réflexions complexes. On utilise certaines techniques développées dans ces articles pour en venir à déterminer une présentation de groupe de tresses  $B_{31}$ , dit groupe de tresses de Borchardt, ou plus précisément à vérifier la conjecture donnée à ce sujet dans [BMR] et [BM]. Des justifications à cette conjecture sont déjà données dans [BM] et [Bes1], et reposent sur des calculs directs par la méthode de Zariski-Van Kampen. Notre démarche repose quant à elle sur la remarque 11.29 de [Bes1], qui propose d'utiliser des catégories de Garside.

On fixe  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension finie, à un groupe de réflexions complexes, c'est-à-dire un groupe fini d'endomorphismes  $W \leq \mathrm{Gl}(V)$  engendré par des (pseudo)-réflexions, est associée la collection  $\mathcal{A}$  des hyperplans correspondants, ainsi que deux variétés naturelles : le complémentaire  $V^{\mathrm{reg}} = E \setminus \bigcup \mathcal{A}$  et son quotient  $V^{\mathrm{reg}}/W$ . On considère également les groupes fondamentaux  $P(W) = \pi_1(V^{\mathrm{reg}})$  et  $B(W) = \pi_1(V^{\mathrm{reg}}/W)$  de ces deux variétés, et on appellera  $B(W)$  un groupe de tresse complexe.

Le comportement semi-simple des groupes de réflexions complexes permet de restreindre l'étude des groupes de tresses à celle des groupes de tresses associés aux groupes de réflexions complexes irréductibles, qui admettent une classification donnée par Shephard et Todd, en une série infinie  $G(de, e, n)$  formée de matrices monômiales, et de 34 groupes exceptionnels  $G_4, \dots, G_{37}$ .

De nombreux travaux ont été effectués via cette classification et ont permis de donner des présentations pour la plupart des groupe de tresses complexes associés à des groupes irréductibles

- Un groupe de Coxeter fini correspond, par extension des scalaires, à un groupe de réflexions complexes, dont le groupe de tresses correspondant admet une "présentation d'Artin", obtenue en "oubliant" les relations quadratiques dans la présentation de Coxeter.
- Le cas de la série infinie  $G(de, e, r)$  est étudié dans [BMR].
- Les groupes exceptionnels de rang 2 ( $G_4$  à  $G_{22}$ ) peuvent être étudiés par calcul direct via la méthode de Zariski-Van Kampen.

À ce stade, la recherche d'une présentation du groupe de tresse reste à faire pour 6 groupes exceptionnels :  $G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{33}, G_{34}$  et  $G_{31}$ . Dans son article [Bes1], David Bessis introduit entre autre un monoïde (dit *monoïde dual*, que nous appellerons ici *monoïde de Bessis*) associé à un groupe de réflexions complexes *bien-engendré*. Ce monoïde est donné avec une présentation, et admet le groupe de tresse comme groupe des fractions, ce qui permet de déduire une présentation du groupe de tresse d'un groupe de réflexions complexes bien-engendré. Tous ces résultats, plus ou moins élémentaires, sur les groupes de réflexions complexes, jusqu'à la construction des monoïdes de Bessis, forme le contenu de notre deuxième partie.

Pour ce qui est de déterminer des présentations des groupes de tresses complexes, il ne reste alors plus qu'un unique cas à traiter : celui de  $G_{31}$ , seul de la liste précédente à ne pas être bien-engendré. Notre stratégie (largement empruntée à [Bes1]) consiste à tirer profit d'un plongement  $G_{31} \hookrightarrow G_{37}$  comme centralisateur d'un élément dit *régulier*, ce plongement permet de construire un analogue au monoïde de Bessis pour  $G_{31}$ , et ce à partir du monoïde de Bessis de  $G_{37}$ .

Cette construction repose notamment sur une propriété structurale du monoïde de Bessis : il s'agit d'un monoïde de Garside, ce qui donne une grande quantité de propriétés combi-

natoires remarquables (et aussi au niveau du groupe de tresses). Notre deuxième partie est consacrée à l'étude théorique des structures de Garside, notamment des catégories de Garside, généralisation naturelle des monoïdes de Garside. Cette généralisation, en plus d'être naturelle, permet la construction des *catégories divisées* associées à une structure de Garside, c'est à partir de ce type de construction sur le monoïde de Bessis de  $G_{37}$  que l'on construit une catégorie associée à  $G_{31}$ .

La plupart des constructions mentionnées sont faites à partir de présentations de catégories/de groupoïdes, on consacre donc une première partie (faisant office de prologue) à la définition formelle de ce qu'est une présentation de catégorie, et aux premiers résultats que l'on en peut déduire.

Ce travail ayant été effectué dans des circonstances singulières, je tiens tout particulièrement à remercier M. Ivan Marin, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour m'avoir introduit aux groupes de réflexions complexes, et pour m'avoir guidé dans ce monde si nouveau pour moi. Je tiens également à remercier mon frère Arthur, qui reste le premier à m'avoir parlé il y a bien longtemps des groupes de réflexions complexes, et plus largement je souhaite remercier mes proches, pour leur patience et leur écoute attentive.

Sans plus attendre, donnons quelques notations et conventions qui nous suivront le long de ce travail :

- Les catégories que nous manipulons seront petites sauf mention explicite du contraire.
- **Important** : Nous utilisons pour la composition une convention catégorique :  
 si  $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$  sont deux morphismes dans une catégorie, leur composition sera notée  $g \circ f$  ou  $gf$ , et non pas  $fg$  comme dans [Bes1]. Cette convention nous contraint à certaines reformulations dans la suite.
- Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, on notera  $|\mathcal{C}|$  l'ensemble de ses objets,  $\mathcal{C}(x, y)$  désignera les morphismes allant de  $x$  vers  $y$  dans  $\mathcal{C}$ , l'identité d'un objet  $x$  sera notée  $1_x$  ou  $1$  suivant le contexte. Enfin, on notera  $Ar(\mathcal{C})$  l'ensemble des morphismes d'une catégorie  $\mathcal{C}$  (on se permettra l'abus de notation  $f \in \mathcal{C}$  au lieu de  $f \in Ar(\mathcal{C})$ ).

## Première partie

# Présentations et catégories

La notion de présentation d'un groupe est une notion des plus classiques concernant les groupes, et possède de nombreux usages tant au niveau théorique que pratique. Une étape souvent oubliée dans la construction des présentations de groupes est la construction des monoïdes libres, et par extension des présentations de monoïdes. Ce dernier concept, proche dans la forme de son équivalent pour les groupes, ne demande qu'à être généralisé au cas des catégories.

Nous allons d'abord donner un contexte général dans lequel on peut raisonnablement parler de catégorie présentée (celui des graphes conditionnés), puis nous passerons à un cas particulier, donné par la notion de germe.

### 1.1 Catégorie libre sur un graphe, graphes conditionnés.

Cette première section est essentiellement issue de [Bor1, chapitre 5], on pourra également consulter [DDGKM, II.1]. Comme dans le cas des groupes (où des monoïdes), la construction de la notion de présentation passe par la construction des objets libres. Dans le cas classique, le foncteur libre  $\mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Mon}$  est adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $\mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , nous voulons retrouver une situation similaire pour les catégories.

Comme nous serons surtout amenés à considérer des graphes orientés<sup>1</sup>, la catégorie **Grph** sera celle des graphes orientés (et non celle des graphes sans orientation). On a un foncteur d'oubli évident de **Cat** la catégorie des petites catégories vers **Grph**, envoyant objets sur sommets et morphismes sur arêtes, c'est de ce foncteur que nous voulons construire un adjoint à gauche.

Par soucis de lisibilité, on notera les catégories par des lettres cursives :  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{G}, \dots$  et les graphes par des lettres droites, le graphe sous-jacent à une catégorie sera noté par la lettre droite sous-jacente (et réciproquement).

Jusqu'à nouvel ordre,  $C$  désignera un graphe orienté,  $|C|$  désignera l'ensemble de ses sommets, et pour  $f$  une arête de  $C$ , on notera  $f : y \leftarrow x$  pour désigner les sommets de  $f$ .

**Définition 1.1.1.** On appelle *chemin* de  $C$  une suite finie non vide d'arêtes 'composables', c'est à dire une suite de la forme

$$(x_n, f_{n-1}, \dots, f_1, x_1, f_0, x_0) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i \in |C|$  et  $f_i : x_{i+1} \leftarrow x_i$

**Exemple 1.1.2.** Spécialisons au cas d'un monoïde/d'un graphe à un seul sommet. Sous ces hypothèses, on peut omettre la mention des sommets et simplement noter un chemin comme une suite  $f_n, \dots, f_1$  avec  $f_i$  une arête (autrement dit, un élément de l'ensemble dont nous souhaitons construire le monoïde libre), on retrouve là la définition usuelle d'un mot sur un alphabet.

On définit la *catégorie libre sur le graphe*  $C$ , notée  $\mathcal{C} = F(C)$  comme suit :

---

1. Dans [DDGKM], on parlera de précatégorie et non de graphe orienté, les deux définitions sont synonymes.

- Ses objets sont les sommets de  $C : |\mathcal{C}| = |C|$ .
- Ses morphismes sont les chemins :  $\mathcal{C}(x, y)$  est constitué des chemins de la forme  $(x_i, f_i)$  tels que  $x_0 = x$  et  $x_n = y$ . On rajoute à  $\mathcal{C}(x, x)$  un chemin 'vide', noté  $(x)$ .
- La composition des morphismes se fait par concaténation des chemins.

Il est immédiat que l'on a bien affaire à une catégorie (la concaténation des chemins est clairement associative et admet bien les chemins de la forme  $(x)$  comme unité).

Nous voulons à présent faire de cette construction un foncteur  $\mathbf{Grph} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , on rappelle qu'un morphisme de graphes  $\varphi : C \rightarrow D$  est la donnée de

- Une application entre les sommets  $|\varphi| : |C| \rightarrow |D|$  (souvent notée  $\varphi$  par abus).
- Pour  $x, y \in |C|$ , une application  $\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{D}(\varphi(x), \varphi(y))$

Il est immédiat qu'un tel morphisme se prolonge au chemins, et donne un foncteur  $F(\varphi) : F(C) \rightarrow F(D)$ .

Il reste maintenant à voir que ce foncteur est un foncteur libre (i.e adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Grph}$ ). Soient donc  $C$  un graphe,  $\mathcal{C} = F(C)$ ,  $\mathcal{D}$  une catégorie et  $D$  son graphe sous-jacent. On cherche une bijection naturelle entre  $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  et  $\mathbf{Grph}(C, D)$ .

- Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur, il induit en particulier une application aux niveaux des objets, donc une application  $|\mathcal{C}| = |C| \rightarrow |D| = |\mathcal{D}|$ . Ensuite, pour  $f : x \rightarrow y$  une arête de  $C$ , on a un chemin  $(y, f, x)$  dans  $\mathcal{C}$ , envoyé par  $F$  sur un morphisme  $\phi : F(x) \rightarrow F(y)$ , autrement dit une arête du graphe  $D$  : on a bien construit un morphisme de graphe  $C \rightarrow D$ .
- Réciproquement, si  $\varphi : C \rightarrow D$  est un morphisme de graphe, on définit un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  de la façon suivante :
  - \* Sur les objets,  $F = |\varphi|$ .
  - \* Tout chemin est clairement concaténation de chemins de longueur 1, par fonctorialité, il suffit de définir  $F$  sur de tels chemins, on définit évidemment  $F(y, f, x) := \varphi(f) : F(y) \leftarrow F(x)$ .

On s'aperçoit immédiatement que ces applications sont bien définies et réciproque l'une de l'autre. La preuve que ces bijections fournissent bien une adjonction est une preuve calculatoire aisée et peu instructive.

*Remarque 1.1.3.* Si  $C$  est un "grand graphe" (la collection de ses sommets n'est pas un ensemble, mais une classe propre),  $F(C)$  n'est pas une catégorie localement petite, ce qui pose de nouveaux problèmes ensemblistes.

Nous avons à présent une notion satisfaisante de catégorie libre sur un graphe, et nous pouvons aborder la question des présentations. Plutôt que penser aux catégories présentées comme à des quotients d'une catégorie libre, nous allons plutôt les considérer comme des objets libres sur des graphes conditionnés, notion qu'il nous faut à présent définir.

**Définition 1.1.4.** Soit  $G$  un graphe, une *condition* sur  $G$  est une paire de chemins ayant même départ et même arrivée.

Un *graphe conditionné* est un graphe muni d'un ensemble de conditions.



**Exemple 1.1.5.** Revenons à nouveau au cas d'un monoïde, sur un graphe à un seul sommet, une condition est la simple donnée d'un couple de mots, un tel couple est plus communément appelé "relation". On remarque qu'un graphe conditionné à un seul sommet est bien la donnée d'une présentation d'un monoïde (une liste de générateurs, et certaines relations entre ces générateurs).

On pose **CGrph** la catégorie des graphes conditionnés (les morphismes sont les morphismes de graphe envoyant les conditions des graphes de départ sur des conditions du graphe d'arrivée). On a à nouveau un foncteur d'oubli **Cat**  $\rightarrow$  **CGrph**, envoyant une catégorie  $\mathcal{C}$  sur son graphe sous-jacent  $C$ , muni des conditions suivantes :

- Pour  $z \xleftarrow{g} y \xleftarrow{f} x$  deux morphismes composables, une condition  $(z, g, y, f, x) \sim (z, gf, x)$ .
- Pour  $x \in |\mathcal{C}|$ , une condition  $(x) \sim (x, 1_x, x)$ .

Nous cherchons à présent à décrire un adjoint à gauche de ce foncteur d'oubli. Prenons  $C$  un graphe conditionné, on considère  $\Sigma \subset Ar(\mathcal{C}) \times Ar(\mathcal{C})$  l'ensemble des couples  $(c, d)$  tels que  $\{c, d\}$  soit une condition de  $C$ .

On pose  $\mathcal{R}$  l'intersection des sous catégories  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  respectant :

- $|\mathcal{S}| = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{C}\}$ .
- L'ensemble  $Ar(\mathcal{S})$  des morphismes de  $\mathcal{S}$ , sous ensemble de  $Ar(\mathcal{C}) \times Ar(\mathcal{C})$  est une relation d'équivalence sur  $Ar(\mathcal{C})$ .
- $\Sigma \subset Ar(\mathcal{S})$ .

Explicitons un peu : par la première hypothèse, un morphisme dans  $\mathcal{R}$  doit être un couple de morphismes  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(x, y)$ . La seconde hypothèse se retraduit par

- Pour  $f \in Ar(\mathcal{C})$ ,  $(f, f) \in Ar(\mathcal{R})$ .
- Pour  $(\varphi, \psi) \in Ar(\mathcal{R})$ , on a également  $(\psi, \varphi) \in Ar(\mathcal{R})$ .
- Pour  $(\varphi, \psi), (\psi, \theta) \in Ar(\mathcal{R})$ , on a  $(\varphi, \theta) \in Ar(\mathcal{R})$ .

En somme, on prend la 'relation d'équivalence engendrée' par les conditions, avec comme demande supplémentaire d'avoir une compatibilité à la composition :

$$\psi_1 \sim \varphi_1 \text{ et } \psi_2 \sim \varphi_2 \Rightarrow \psi_2 \psi_1 \sim \varphi_2 \varphi_1$$

Grâce à ces hypothèses, on peut considérer la catégorie quotient  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{R}$ , dont les objets sont ceux de  $\mathcal{C}$ , et les morphismes les classes d'équivalences de chemins pour la relation donnée par  $\mathcal{R}$ .

Comme dans le cas des catégories libres, on s'aperçoit rapidement que cette construction est fonctorielle et donne bien l'adjoint recherché.

*Notation 1.1.6.* À partir d'ici, si  $C$  est un graphe conditionné, on notera  $\mathcal{C}$  la catégorie qu'il présente (plutôt que la catégorie libre).

**Exemple 1.1.7.** Reprenons le cas des graphes à un seul sommet. La première hypothèse sur  $\mathcal{S}$  devient vide ( $F(C) \times F(C)$  n'a qu'un seul objet), et les deux autres expriment simplement que  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence engendrée par les relations sur le monoïde libre (et compatible au produit). Le quotient que nous proposons est alors effectivement le monoïde correspondant à la présentation de départ.

**Exemple 1.1.8.** Considérons le graphe suivant :

$$C := \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{a} & y \\ c \downarrow & & \downarrow b \\ x' & \xrightarrow{d} & y' \end{array}$$

avec la condition  $ba \sim dc$  (que nous noterons  $ba = dc$  pour des raisons évidentes). La catégorie  $\mathcal{C}$  associée à ce graphe conditionné est un carré commutatif. Par adjonction, la donnée d'un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers une catégorie  $\mathcal{D}$  équivaut à la donnée d'un carré de  $\mathcal{D}$ , commutatif dans la catégorie  $\mathcal{D}$ .

À partir d'ici, on adoptera la notation habituelle des présentations, en l'occurrence sous la forme  $\langle C | R \rangle$  où  $C$  désigne le graphe de départ, et  $R$  les conditions. Dans certains cas concret, on omettra la structure du graphe pour n'écrire que les arêtes, dans l'exemple précédent, on aurait alors  $\langle a, b, c, d \mid ba = dc \rangle$ .

## 1.2 Groupoïde libre sur une catégorie, présentation de groupoïde

Rappelons qu'un groupoïde est une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes (un groupoïde à un seul objet est alors un monoïde dont les éléments sont inversibles : un groupe).

Comme un groupoïde n'est jamais qu'une catégorie respectant une propriété supplémentaire, nous avons à nouveau un foncteur d'oubli de la catégorie des groupoïde vers celle des catégories. Construire un adjoint à ce foncteur revient en somme à poser la question suivante : comment inverser formellement (et canoniquement !) les morphismes d'une catégorie donnée ?

Cette question est celle de la localisation dans les catégories, question largement étudiée et à laquelle les présentations de catégories vont nous permettre de donner une réponse.

**Définition 1.2.1.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie, et  $\Sigma$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Un *localisé* de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\Sigma$  est une catégorie, notée  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ , munie d'un foncteur  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  respectant les conditions suivantes

- Pour tout  $f \in \Sigma$ ,  $\varphi(f)$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ .
- Pour tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ayant la propriété précédente, il existe un unique foncteur  $G : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$  tel que  $G \circ \varphi = F$ .

Ces conditions forment une propriété universelle, résumée dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \varphi \downarrow & \nearrow \exists! G & \\ \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] & & \end{array} \quad (\forall f \in \Sigma, F(f) \text{ et } \varphi(f) \text{ sont des isomorphismes})$$

Cette définition générale est surtout donnée dans un soucis de généralité, dans notre cas,  $\Sigma$  sera formée de tous les morphismes de notre catégorie (et pas seulement d'une partie). Mais

la construction générale n'est pas beaucoup plus coûteuse.

On considère le graphe conditionné  $C$  sous-jacent à la catégorie  $\mathcal{C}$ , on construit à partir de  $C$  un nouveau graphe, noté  $G$ , sur lequel on a ajouté des inverses formels pour les morphismes de  $\Sigma$  :

$$\forall x, y \in |C|, G(x, y) = \mathcal{C}(x, y) \sqcup (\mathcal{C}(y, x) \cap \Sigma)$$

on notera les éléments de  $(\mathcal{C}(y, x) \cap \Sigma) \subset G(x, y)$  comme des inverses. Bien-sûr, pour que ces inverses formels aient le bon comportement, on doit rajouter des conditions sur  $G$ , en plus des conditions héritées de la catégorie  $\mathcal{C}$  :

$$\forall f \in \Sigma, (y, f, x, f^{-1}, y) \sim (y) \quad \text{et} \quad (x, f^{-1}, y, f, x) \sim (x)$$

On note  $\mathcal{G}$  la catégorie présentée par le graphe conditionné  $G$ .

**Proposition 1.2.2.** *Si  $\mathcal{C}$  est une (petite) catégorie, et  $\Sigma$  un ensemble de morphisme de  $\mathcal{C}$ . La catégorie  $\mathcal{G}$  construite ci-dessus satisfait la propriété du localisé  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ .*

*Démonstration.* On doit d'abord construire le foncteur  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ . On a un morphisme de graphes conditionnés évident  $C \rightarrow G$  (car les conditions sur  $C$  sont des conditions de  $G$  par définition), qui induit un foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ , c'est le foncteur  $\varphi$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}(x, y)$  un élément de  $\Sigma$ , son image dans  $\mathcal{G}$  est un isomorphisme par construction : le générateur formel  $f^{-1}$  de  $\mathcal{G}$  en est un inverse.

Enfin, soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur envoyant  $\Sigma$  sur des isomorphismes. On va définir un morphisme de graphes conditionnés  $\phi : G \rightarrow D$ , où  $D$  est le graphe conditionné sous-jacent à  $\mathcal{D}$ .

- Pour  $f \in \mathcal{C}(x, y) \subset G(x, y)$ , on pose  $\phi(f) := F(f)$ , et
- Pour  $f^{-1} \in (\mathcal{C}(y, x) \cap \Sigma) \subset G(x, y)$ , on pose  $\phi(f^{-1}) := F(f)^{-1}$ .

Ceci définit bien un morphisme de graphes conditionnés  $G \rightarrow D$ , donnant par fonctorialité un foncteur  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D}$ , qui factorise bien  $F$  par  $\varphi$ . Pour l'unicité, un foncteur  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D}$  équivaut à un morphisme de graphes  $G \rightarrow D$ , notre morphisme  $\phi$  est clairement le seul satisfaisant la condition de factorisation par  $\varphi$ .  $\square$

Notons que cette procédure est ici décrite de façon très formelle, mais en pratique, elle peut provoquer des cas dégénérés, typiquement si dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , on a une égalité de la forme  $fg = fh$  (i.e  $f$  n'est pas un épimorphisme), alors inverser  $f$  forcera l'égalité de  $g$  et  $h$  dans la catégorie obtenue.

**Exemple 1.2.3.** Soit  $A$  un anneau, l'ensemble  $A$  muni de la multiplication forme un monoïde, donc une catégorie, dont l'on peut chercher à inverser des morphismes (=des éléments). On retrouve là la localisation classique dans les anneaux<sup>2</sup>.

Mais il est connu que tenter d'inverser formellement 0 dans un anneau donnera l'anneau nul  $\{0\}$  : on retrouve là un cas dégénéré. Cependant on a une définition de "système multiplicatif" dans les anneaux, qui permet de décrire le localisé via des fractions.

Comme dans le cas des anneaux, on souhaite avoir des conditions sur  $\Sigma$  sous lesquelles le localisé peut être décrit de façon plus agréable :

---

2. nous ne nous attarderons pas sur la structure d'anneau du localisé, mais elle peut être reformulée en termes catégoriques

**Définition 1.2.4.** On dit qu'une classe de morphismes  $\Sigma$  est un **système multiplicatif** si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1)  $\Sigma$  est stable par composition et contient les identités.
- (2) (Condition d'Ore) Pour un diagramme  $x \xrightarrow{f} y \xleftarrow{s} z$  avec  $s \in \Sigma$ , il existe un diagramme  $x \xleftarrow{t} u \xrightarrow{g} z$  avec  $t \in \Sigma$  tel que  $sg = ft$  :

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\exists g} & z \\ \exists t \downarrow & & \downarrow s \\ x & \xrightarrow{f} & y \end{array}$$

- (3) Pour  $f, g : x \rightarrow y$  dans  $\mathcal{C}$  et  $s : y \rightarrow z$  dans  $\Sigma$ , alors

$$sf = sg \Rightarrow \exists t : u \rightarrow x \text{ dans } \Sigma \mid ft = gt$$

Sous l'hypothèse que  $\Sigma$  est un système multiplicatif, on peut décrire plus explicitement le localisé  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  (on admet ce résultat, qui est la proposition 5.2.4 de [Bor1]). Les objets sont toujours les objets de  $\mathcal{C}$ , un morphisme  $x \rightarrow y$  dans  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  est une classe d'équivalence  $(s, u, f)$  avec  $s \in \Sigma$ , où

$$\begin{array}{ccc} & u & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ x & & y \end{array}$$

la relation d'équivalence étant donnée par  $(s, u, f) \sim (t, v, g)$  s'il existe des morphismes  $a, b$  tels que  $sa = tb \in \Sigma$  et  $fa = gb$ , c'est à dire :

$$\begin{array}{ccccc} & & w & & \\ & a \swarrow & & \searrow b & \\ u & & & & v \\ f \swarrow & & t & \searrow & \\ x & & & & y \\ s \downarrow & & & & \downarrow g \end{array}$$

On compose  $(s, u, f) : x \rightarrow y$  et  $(t, v, g) : y \rightarrow z$  grâce à la condition d'Ore :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & w & & & \\ & & \exists a \swarrow & & \searrow \exists b & & \\ & u & & & & v & \\ s \swarrow & & f \searrow & & t \swarrow & & g \searrow \\ x & & & y & & & z \end{array}$$

la composée est donnée par la classe  $(sa, w, gb)$ .

Bien-sûr, on sera amenés à noter  $fs^{-1}$  la classe  $(s, u, f)$ .

*Remarque 1.2.5.* Même sous ces hypothèses, le foncteur  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  peut ne pas être fidèle, en effet il envoie  $f : x \rightarrow y$  sur  $(1, x, f)$ , et on a  $(1, x, f) = (1, x', g)$  dans  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  si et seulement s'il existe  $a, b$  tels que  $a = b \in \Sigma$  et  $fa = gb$ , autrement dit s'il existe  $s \in \Sigma$  tel que  $fs = gs$ . On a donc fidélité si tous les morphismes de  $\Sigma$  sont des épimorphismes. Dans les exemples qui nous occuperont dans la suite, cette condition sera remplie.

Comme annoncé au début de cette section, nous comptons surtout appliquer ces résultats de localisation au cas où  $\Sigma$  est constitué de tous les morphismes de la catégorie  $\mathcal{C}$ , auquel cas la première hypothèse pour former un système multiplicatif devient vide, les deux autres donnent :

- Pour un diagramme  $x \xrightarrow{f} y \xleftarrow{s} z$ , il existe un diagramme  $x \xleftarrow{t} u \xrightarrow{g} z$  tel que  $sg = ft$  (c'est pas exemple le cas si les pullbacks existent dans  $\mathcal{C}$ ).
- Pour  $f, g : x \rightarrow y$ , s'il existe  $s : y \rightarrow z$  tel que  $sf = sg$ , alors il existe  $t : u \rightarrow x$  tel que  $ft = gt$  (c'est pas exemple le cas si les (co)égalisateurs existent dans  $\mathcal{C}$ ).

Pour  $\mathcal{C}$  une catégorie, on note  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  le localisé de  $\mathcal{C}$  par rapport à tous ses morphismes. On remarque immédiatement que  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  est un groupoïde, en effet un morphisme de  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  est représenté par un chemin constitué de morphismes de  $\mathcal{C}$ , et d'inverse formels, un tel chemin admet toujours un inverse. Nous allons montrer que  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  est un groupoïde libre sur la catégorie  $\mathcal{C}$ .

Premièrement, on note que notre construction  $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{C})$  est fonctorielle : si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un foncteur, on a par localisation un foncteur  $\varphi F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{D})$ , qui envoie par définition tous les morphismes de  $\mathcal{C}$  sur des isomorphismes (car  $\mathcal{G}(\mathcal{D})$  est un groupoïde), et donc induit un unique foncteur  $\mathcal{G}(F) : \mathcal{G}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{D})$ .

Notons **Grp** la catégorie des groupoïdes, et soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde. Par définition du localisé,  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  représente le foncteur

$$\mathcal{D} \mapsto \{F \in \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \mid \forall f \in \text{Ar}(\mathcal{C}), F(f) \text{ est un isomorphisme}\}$$

Mais si  $\mathcal{D} = \mathcal{G}$  est un groupoïde, ce dernier ensemble est directement égal à  $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ , d'où un isomorphisme naturel  $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \simeq \mathbf{Cat}(\mathcal{G}(\mathcal{C}), \mathcal{G}) = \mathbf{Grp}(\mathcal{G}(\mathcal{C}), \mathcal{G})$ , qui est bien l'adjonction souhaitée. Notons que le foncteur canonique  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{C})$  est en fait l'unité de cette adjonction.

On a donc à ce stade :

**Proposition 1.2.6.** (a) Une paire adjointe  $\mathbf{Grph} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathbf{Cat}$  donné par la catégorie libre.  
(b) Une paire adjointe  $\mathbf{CGrph} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathbf{Cat}$  donné par les présentations de catégories.  
(c) Une paire adjointe  $\mathbf{Cat} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathbf{Grp}$  donné par le groupoïde libre sur une catégorie.  
(d) Par composition des deux paires ci-dessus, une paire adjointe  $\mathbf{CGrph} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathbf{Grp}$  qui nous apprend qu'un graphe conditionné présente un groupoïde, qui est par ailleurs le groupoïde libre sur la catégorie qu'il représente.

**Exemple 1.2.7.** Plaçons nous (une fois encore) dans le cas d'un monoïde  $M$ , et considérons  $\Sigma = M$ . Comment se reformulent les conditions d'un système multiplicatif? Comme précédemment, la première est vide, la seconde équivaut à l'existence de multiples communs à droite. La troisième s'exprime comme dans le cas catégorique général.

Sous ces hypothèses, les éléments du groupe libre sur  $M$  se décrivent comme des couples  $(s, f)$  avec

$$(s, f) \sim (t, g) \Leftrightarrow \exists x, y \in M \mid fx = gy \text{ et } sx = ty$$

le produit étant donné par  $(t, g)(s, f) := (rs, gh)$  où  $fr = th$ .

En adoptant la notation  $(s, f) = fs^{-1}$ , ceci devient

$$fs^{-1} = gt^{-1} \Leftrightarrow \exists x, y \in M \mid fx = gy \text{ et } sx = ty$$

et  $gt^{-1}.fs^{-1} = gh(sr)^{-1} = ghr^{-1}s^{-1}$ , où  $fr = th$ .

### 1.3 Passage d'une présentation de groupoïde à une présentation de groupe

Considérant un groupoïde  $\mathcal{G}$ , et un objet  $x$  de ce groupoïde, il est clair que l'on a un groupe d'automorphismes  $\mathcal{G}(x, x)$ , et d'ailleurs tous les groupes d'automorphismes d'objets d'une même composante connexe de  $\mathcal{G}$  sont isomorphe entre eux (non canoniquement).

Ainsi, étant donné un groupoïde  $\mathcal{G}$ , est-il possible de déduire une présentation de  $\mathcal{G}(x, x)$  à partir d'une présentation de  $\mathcal{G}$  ?

On peut d'emblée se restreindre au cas d'un groupoïde connexe, car

- Les composantes connexes d'un groupoïde sont des groupoïdes.
- Un groupoïde présenté est connexe si et seulement si le graphe qui le présente est connexe (comme graphe non orienté), on peut donc facilement déduire des présentations des composantes connexes de  $\mathcal{G}$  à partir d'une présentation de  $\mathcal{G}$ .

Notre stratégie va consister à "supprimer" progressivement des arêtes du graphe présentant  $\mathcal{G}$ , de sorte à identifier des sommets de ce graphe entre eux.

Pour des raisons de lisibilité, on adoptera la définition d'un graphe orienté suivante : un ensemble  $V$  de sommets, et un ensemble  $E$  d'arêtes, muni de deux applications  $E \rightarrow V$ , respectivement sommet et but. On considère à partir d'ici un graphe orienté  $G := (V, E)$ , et fixons  $f : a \rightarrow b$  une arête avec  $a \neq b$ , on définit un nouveau graphe  $G/f$ , où l'on a "contracté" l'arête  $f$ , et identifié les sommets  $a$  et  $b$ . Ce graphe est défini comme suit :

- Ses objets sont les objets de  $G$ , privés de  $b : V' := V \setminus b$ . On a une application de projection évidente  $V \rightarrow V'$  (envoyant  $b$  sur  $a$ ).
- Les arêtes sont données par les arêtes de  $G$ , privées de  $f : E' = E \setminus f$ , et les applications sommet et but sont données par celles de  $G$ , composées par la projection  $V \rightarrow V'$  (concrètement, les sommets sont les mêmes que pour  $G$ , sauf que les occurrences de  $b$  ont été remplacées par  $a$ ).

On a un morphisme de graphes orientés  $G \rightarrow F(G/f)$ , envoyant les sommets sur eux mêmes (sauf  $b$ , envoyé sur  $a$ ), et envoyant les flèches sur elles mêmes, sauf  $f$ , envoyé sur l'identité de  $a$ . Ce morphisme s'étend en un foncteur  $F(G) \rightarrow F(G/f)$ .

À présent si  $G$  est un graphe conditionné, une condition de  $G$  est par définition une paire de morphismes de  $F(G)$ , dont on peut regarder l'image dans  $F(G/f)$  par le foncteur ci-dessus, cela donne par définition une condition sur  $G/f$ . Concrètement, les conditions sur  $G/f$  sont les conditions de  $G$ , où l'on a remplacé les occurrences de  $f$  par des chemins vides (des identités). On fait ainsi de  $G/f$  un graphe conditionné.

**Proposition 1.3.1.** (*Groupoid  $\rightarrow$  Group trick*)

*Les groupoïdes présentés par  $G$  et par  $G/f$  sont équivalents. En particulier, les groupes d'automorphismes d'un de leurs objets respectifs sont isomorphes.*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}_f$  les groupoïdes présentés respectivement par  $G$  et  $G/f$ . On a un morphisme de graphes  $G \rightarrow F(G/f) \rightarrow \mathcal{G}_f$ , par définition des conditions sur  $G/f$ , ce morphisme induit un foncteur  $H : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_f$  (qui envoie les morphismes sur eux mêmes, en supprimant les éventuelles occurrences de  $f$  et  $f^{-1}$ ). Nous allons en construire un quasi-inverse  $F : \mathcal{G}_f \rightarrow \mathcal{G}$ , on le définit sur les objets comme l'inclusion  $V \setminus b \hookrightarrow V$ , et pour les morphismes, il suffit de le définir sur les générateurs, c'est à dire sur les éléments de  $E'$ , soit donc  $s' \in E'$ , associé à un élément  $s \in E = E' \sqcup \{f\}$ .

- si  $s : x \rightarrow y$  avec  $b \notin \{x, y\}$ , alors  $s' : x \rightarrow y$  et on pose  $F(s') = s \in \mathcal{G}(x, y)$ .

- si  $s : b \rightarrow x$  avec  $b \neq x$ , alors  $s' : a \rightarrow x$  et on pose  $F(s') = sf \in \mathcal{G}(a, x)$ .
- si  $s : x \rightarrow b$  avec  $b \neq x$ , alors  $s' : x \rightarrow a$  et on pose  $F(s') := f^{-1}s \in \mathcal{G}(x, a)$ .
- si  $s : b \rightarrow b$ , alors  $s' : a \rightarrow a$  et on pose  $F(s') = f^{-1}sf \in \mathcal{G}(a, a)$ .

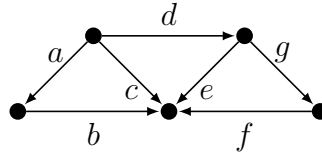
Ces définitions sont compatibles avec les conditions sur  $G/f$ , de sorte que l'on en déduit bien un foncteur  $F := \mathcal{G}_f \rightarrow \mathcal{G}$ , il reste à montrer que  $F$  est le quasi-inverse de  $H$ .

Le foncteur  $HF$  donne l'identité sur les objets, et sur les générateurs de  $\mathcal{G}_f$ , donc  $HF = 1_{\mathcal{G}_f}$ . Réciproquement,  $FH$  donne l'identité sur les objets de  $\mathcal{G}$ , sauf  $b$  qui est envoyé sur  $a$ , la transformation naturelle voulue de  $FH$  vers  $1_{\mathcal{G}}$  est donnée par  $\varepsilon_x = 1_x$  si  $x \neq b$  et  $\varepsilon_b = f^{-1}$ .  $\square$

Dans le cas où le graphe présentant  $\mathcal{G}$  a un nombre fini de sommets, on peut itérer cette construction pour obtenir finalement un graphe à un seul objet, qui présente donc un groupe, équivalent au groupoïde de départ, donc isomorphe à un de ses groupes d'automorphismes. Bien-sûr, cette construction repose lourdement sur le choix des morphismes que l'on supprime, ce qui peut beaucoup modifier l'élégance de la présentation finale du groupe voulue.

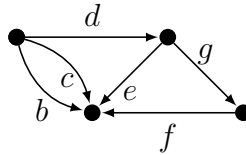
Remarque 1.3.2. Le choix à faire dans les morphismes que l'on supprime successivement revient *in fine* à choisir un sous arbre maximal du graphe qui présente  $\mathcal{G}$ . Un tel arbre donne un système d'isomorphismes, qui permettent ensuite de relier les générateurs formels que l'on obtient avec des morphismes de  $\mathcal{G}$ .

**Exemple 1.3.3.** Partons du graphe suivant

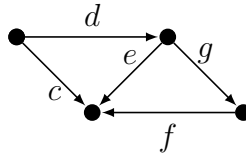


Avec la relation  $ba = c$ . On itère notre construction :

- On supprime  $a$ , le graphe devient

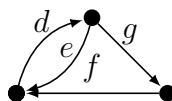


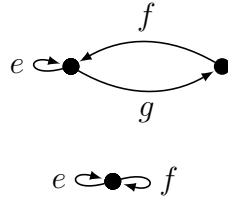
et la relation devient  $c = b$ . Ce graphe présente donc le même groupoïde que le graphe



sans relations.

- On supprime successivement  $c, d$  et  $g$ , le graphe devient





Ce dernier graphe, sans relations, présente un groupe libre à 2 générateurs, ces générateurs étant associés dans le graphe de départ aux boucles  $cd^{-1}e^{-1}$  et  $fge^{-1}$ . et . Si l'on était partis du graphe de départ sans imposer la relation  $ba = c$ , on aurait obtenu un groupe libre à 3 générateurs (la boucle supplémentaire étant  $bac^{-1}$ ).

## 1.4 Un cas particulier : la notion de germe

Si la notion de graphe orienté est adéquate pour présenter une catégorie, en pratique on pourra se contenter de la notion moins générale de germe, l'idée étant que les conditions seront issues d'une loi de composition partielle.

On considère donc un graphe orienté  $C = (V, E)$ .

**Définition 1.4.1.** Une structure de **germe** sur  $C$  est la donnée, pour tout triplet  $x, y, z \in V$ , d'un sous ensemble  $S(x, y, z) \subset E(x, y) \times E(y, z)$  et d'une application de "composition partielle" :

$$m_{x,y,z} : S(x, y, z) \rightarrow E(x, z)$$

où l'on notera  $g \circ f = m_{x,y,z}(f, g)$ . Les applications  $m$  respectent de plus les conditions suivantes :

- **Associativité** : Soient  $x, y, z, t$  des sommets, on a  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ , en particulier, pour un triplet  $f, g, h$ , l'existence de  $h \circ (g \circ f)$  équivaut à celle de  $(h \circ g) \circ f$ .<sup>3</sup>
- **Unité** : Pour tout sommet  $x$ , il existe un élément  $1_x \in E(x, x)$  tel que, pour tous sommets  $x, y$ , l'application partielle  $m_{x,x,y}(1_x, -)$  (resp.  $m_{x,y,y}(-, 1_y)$ ) est définie sur tout  $E(x, y)$ , et égale à l'identité de  $E(x, y)$ .

On vérifie immédiatement que l'associativité entraîne que, pour une famille d'arêtes  $f_1, \dots, f_n$  de  $C$ , le parenthésage n'influe pas sur le fait que le produit soit défini ou non, et il n'influe pas non plus la valeur de ce produit le cas échéant. On vérifie tout aussi simplement que les éléments  $1_x$  sont uniques pour  $x \in V$ .

**Exemple 1.4.2.** Un germe dans lequel  $S(x, y, z) = E(x, y) \times E(y, z)$  pour tout triplet  $x, y, z$  est par définition une catégorie.

Une structure de germe sur le graphe  $C$  le munit d'emblée d'une structure de graphe conditionné, donné (comme dans le cas d'une catégorie) par

- Pour  $x, y, z \in V$ , des conditions  $(z, g, y, f, x) \sim (z, g \circ f, x)$  pour  $(f, g) \in S(x, y, z)$
- Pour  $x \in V$ ,  $(x, 1_x, x) \sim (x)$ .

---

3. cette dernière condition se traduit par la condition ensembliste  $(m_{x,y,z} \times 1_{E(z,t)})^{-1}S(x, z, t) = (1_{E(x,y)} \times m_{y,z,t})^{-1}S(x, y, t)$



Par ailleurs, la composition partielle permet de munir  $E(x, -)$  d'une relation binaire, de "divisibilité/factorisation à gauche" :

$$s' \prec s \Leftrightarrow \exists s'' \mid s's'' = s$$

de même, on a une relation sur  $E(-, y)$  donnée par

$$s \succ s'' \Leftrightarrow \exists s' \mid s's'' = s$$

Et ces relations sont conservées par le morphisme de graphes  $C \rightarrow \mathcal{C}$  par définition (ces relations de factorisation au niveau catégorique joueront un grand rôle dans la suite).

## Deuxième partie

# Catégories de Garside

Dans l'étude des groupes de tresses des groupes de réflexions complexes, les structures de Garside sont rapidement devenues incontournables. Si les monoïdes/groupes de Garside s'avèrent efficaces pour traiter la plupart des groupes de tresses (notamment pour les groupes bien-engendrés), nous aurons besoin pour traiter notre problème d'étudier les catégories de Garside.

Pour des raisons de lisibilité, on commence par une succincte exposition des bases de la théorie des monoïdes de Garside (tirée de [Mic] et [Mar]), avant de considérer le cas des catégories, pour lesquelles nous suivrons l'exposition de [Bes2].

## 2.1 Préambule sur les monoïdes de Garside

### 2.1.1 Vocabulaire sur la divisibilité dans les monoïdes

Cette section est présente non seulement pour des raisons historiques, mais aussi pour faciliter l'appropriation des structures de Garside par les lecteurs peu à l'aise avec la gymnastique catégorique. Les preuves seront cependant omises : étant donné que les monoïdes de Garside sont avant tout des cas particuliers de catégories de Garside, les preuves dans ce second cas suffiront.

Dans toute cette section, on fixe un monoïde  $M$ .

**Définition 2.1.1.** Un monoïde  $M$  est dit *simplifiable* si

- $\forall a, b, c \in M, ac = bc \Rightarrow a = b$  (simplifiabilité à droite)
- $\forall a, b, c \in M, ca = cb \Rightarrow a = b$  (simplifiabilité à gauche)

Un groupe est un exemple particulier de monoïde simplifiable, un peu plus généralement, tout sous-monoïde d'un groupe est simplifiable (le résultat bien connu de simplifiabilité de la multiplication pour un anneau intègre est au fond un résultat de simplifiabilité de monoïde).

**Exemple 2.1.2.** Prenons  $M = (\mathbb{N}^*, \times)$ , il s'agit d'un monoïde simplifiable, d'ailleurs plongé dans un groupe :  $\mathbb{Q}_+^*$ .

Par contre,  $M = (\mathbb{N}, \times)$  n'est évidemment pas simplifiable :  $0 \times 1 = 0 \times 2$ .

La notion de divisibilité dans  $\mathbb{N}^*$  est à la base de l'arithmétique depuis ses tout débuts, elle peut se généraliser sans peine au cas d'un monoïde quelconque, en distinguant gauche et droite quand  $M$  est non commutatif.

**Définition 2.1.3.** Soient  $a, c \in M$ , on dit que

- $a$  *divise  $c$  à gauche* si  $\exists b \in M \mid ab = c$ , on note  $a \prec c$ .
- $a$  *divise  $c$  à droite* si  $\exists b \in M \mid ba = c$ , on note  $c \succ a$ .

Dans le premier cas,  $c$  est un *multiple à droite*, dans le deuxième un *multiple à gauche*.

**Exemple 2.1.4.** Considérons  $M = \langle a, b \rangle$  le monoïde libre à deux éléments, dans ce monoïde, on a  $a \prec ab$  mais  $ab \not\prec a$ .

À ce stade, il peut être bon de préciser que malgré les notations adoptées, les relations  $\succ$  et  $\prec$  n'ont pas de raison d'être des relations d'ordre : si elles sont immédiatement réflexive et transitives, elles peuvent ne pas être antisymétrique : si  $x \in M^\times$  est inversible (et non trivial), on a  $x \succ 1 \succ x$  et  $x \prec 1 \prec x$ .

**Définition 2.1.5.** On dit qu'un monoïde  $M$  est *homogène* si l'on a un morphisme  $\ell : M \rightarrow (\mathbb{N}, +)$  tel que  $M$  est engendré par ses éléments de longueur  $> 0$ .

Dans un tel monoïde, on a  $\ell(x) = 0$  pour  $x \in M^\times$ , comme  $x$  est par hypothèse un produit d'éléments de longueur  $> 0$ , la seule option est que  $x$  soit produit vide, autrement dit  $M^\times = \{1\}$ .

**Lemme 2.1.6.** Dans un monoïde homogène simplifiable, les relations  $\succ$  et  $\prec$  sont des relations d'ordre.

On se place désormais dans le cas d'un monoïde simplifiable homogène. Le fait que  $\succ$  et  $\prec$  soient des relations d'ordre nous permettent d'exprimer les définitions de pgcd et ppcm comme des supremums et infimum :

**Définition 2.1.7.** Soient  $a, b \in M$ , on appelle

- *pgcd à gauche* de  $a$  et  $b$  un élément  $a \wedge_G b$  tel que  $a \wedge_G b \prec a, b$  et

$$\forall c \in M, c \prec a, b \Rightarrow c \prec a \wedge_G b$$

- *pgcd à droite* de  $a$  et  $b$  un élément  $a \wedge_D b$  tel que  $a, b \succ a \wedge_D b$  et

$$\forall c \in M, a, b \succ c \Rightarrow a \wedge_D b \succ c$$

- *ppcm à droite* de  $a$  et  $b$  un élément  $a \vee_D b$  tel que  $a, b \prec a \vee_D b$  et

$$\forall c \in M, a, b \prec c \Rightarrow a \vee_D b \prec c$$

- *ppcm à gauche* de  $a$  et  $b$  un élément  $a \vee_G b$  tel que  $a \vee_G b \succ a, b$  et

$$\forall c \in M, c \succ a, b \Rightarrow c \succ a \vee_G b$$

Les pgcd à droite et à gauche sont respectivement des inf pour  $\succ$  et  $\prec$ , et les ppcm à droite et à gauche sont respectivement des sup pour  $\prec$  et  $\succ$ .

Ces définitions ont sens même si  $\succ$  et  $\prec$  ne sont pas des relations d'ordre, mais les interprétations en tant qu'infimum et supremum font appel à ces hypothèses.

Remarquons que dans le cas d'un monoïde simplifiable homogène où les pgcd et ppcm existent, les conditions d'Ore sont respectées (cf exemple 1.2.7) et  $M$  se plonge dans son groupe de fractions  $\mathcal{G}(M)$ .

## 2.1.2 Monoïdes de Garside

En somme, un monoïde de Garside est un monoïde aux propriétés arithmétiques agréables, muni d'un élément particulier (l'élément de Garside) tel que ses diviseurs l'engendrent :

On dit qu'un élément  $x \in M$  est **équilibré** si les ensembles  $Div_D(x)$  et  $Div_G(x)$  de ses diviseurs à droite et à gauche sont égaux (on notera alors simplement  $Div(x)$  cet ensemble).

**Définition 2.1.8.** Un monoïde  $M$ , muni d'un élément  $\Delta$  est dit **de Garside** si

- $M$  est homogène simplifiable.
- Toute paire d'éléments de  $M$  admet des pgcd et ppcm à gauche et à droite (autrement dit,  $(M, \succ)$  et  $(M, \prec)$  sont des treillis).
- L'élément  $\Delta$  est équilibré,  $Div(\Delta)$  est fini et engendre  $M$ . On appellera les éléments de  $Div(\Delta)$  les éléments **simples** de  $M$

*Remarque 2.1.9.* On impose dans notre définition à notre monoïde d'être homogène, ce qui est en réalité très restrictif, la définition présente dans [DDGKM] est par exemple moins restrictive. Comme tous les exemples que nous serons amenés à manipuler sont effectivement homogènes, on se contentera de cette définition restrictive.

Notons que la donnée de  $\Delta$  est importante : toute puissance de  $\Delta$  fournit également un autre élément de Garside.

À l'aide de  $\Delta$ , on définit deux applications, dites "partie initiale" et "partie finale" :

$$\alpha : M \rightarrow Div(\Delta) \quad \text{et} \quad \omega : M \rightarrow M$$

données par  $\alpha(x) = x \vee_G \Delta$  et  $x = \alpha(x)\omega(x)$  (la simplifiabilité donne que  $\omega(x)$  est bien défini par cette équation). Par définition  $\alpha(x)$  est le plus grand élément de  $(Div(\Delta), \prec)$  qui divise  $x$  à gauche. On peut alors montrer que  $\alpha(xy) = \alpha(x\alpha(y))$  pour  $x, y \in M$ , ce résultat permet de construire une décomposition canonique d'un élément de  $M$  en produit d'éléments de  $Div(\Delta)$  :

Pour  $x \in M$ , on note  $x_1 = \alpha(x)$ ,  $x_2 = \alpha(\omega(x))$ ,  $x_i = \alpha(\omega^{i-1}(x))$ , on a pour des raisons de longueur que ce processus finit par donner 1, et on a alors que le produit  $x_1 \cdots x_r$  est égal à  $x$ , avec  $x_i \in Div(\Delta)$  par construction.

**Définition 2.1.10.** La **forme normale gloutonne** ("greedy normal form") de  $x \in M$  est le mot  $x_1 x_2 \cdots x_r$  construit ci dessus.

Par construction de cette décomposition, on voit que deux éléments de  $M$  sont égaux si et seulement si ils ont même forme normale.

La propriété pour un mot  $x_1 \cdots x_r$  sur  $Div(\Delta)$  d'être une forme normale gloutonne est **locale** dans le sens qu'il est équivalent de dire que chaque sous-mot  $x_i x_{i+1}$  est une forme normale.

**Lemme 2.1.11.** Si  $b \in M$  est un élément équilibré, alors

$$\forall s \in Div(b), \exists s' \in Div(b) \mid sb = bs'$$

de plus, l'application  $s \mapsto s'$  définit une permutation de  $Div(b)$ .

*Démonstration.* Si  $s \in \text{Div}(b)$ , alors on a  $b = sb'$  pour un  $b' \in M$ . Or  $b' \in \text{Div}(b)$  entraîne  $b' \prec b$  et  $b = b's'$  pour un  $s' \in \text{Div}(b)$ , donc  $sb' = b = b's'$ , et  $sb = sb's' = bs'$ . Comme  $M$  est simplifiable,  $b'$  et  $s'$  sont bien définis par  $s$  et  $b$ . On en déduit une application  $\text{Div}(b) \rightarrow \text{Div}(b)$  envoyant  $s$  sur  $s'$ , donc on définit une réciproque de la même façon.  $\square$

Dans le cas d'un élément de Garside  $\Delta$ , ce lemme a la conséquence suivante :

**Proposition 2.1.12.** *Soit  $(M, \Delta)$  un monoïde de Garside, alors*

(a) *Il existe un automorphisme  $\phi$  de  $M$  uniquement défini par*

$$\forall x \in M, x\Delta = \Delta\phi(x)$$

*Il est d'ordre fini.*

(b) *Il existe un  $r \geq 1$  tel que  $\Delta^r$  est central dans  $M$ .*

(c) *Pour tout  $x \in M$ , on a  $\Delta \prec x$  si et seulement si  $x \succ \Delta$ .*

(d) *Pour  $a, b \in M$  on a  $a \succ \Delta \Rightarrow ab \succ \Delta$ .*

(e) *Pour  $a, b \in M$  on a  $a \prec \Delta \Rightarrow \Delta \prec ba$ .*

(f) *Si  $\Delta^r$  est central (pour  $r \geq 1$ ), alors*

$$\forall x \in M, x \leq \Delta^{r\ell(x)}$$

*Démonstration.* Par le lemme, on a une permutation de  $\text{Div}(\Delta)$ , caractérisée par  $x\Delta = \Delta\phi(x)$ . Si  $x = x_1 \cdots x_r$  est écrit en forme normale gloutonne, on a

$$x\Delta = \Delta\phi(x_1) \cdots \phi(x_r)$$

et par simplifiabilité, cette définition ne dépend pas de l'écriture choisie, on peut donc ainsi étendre  $\phi$  à  $M$  tout entier.

Comme  $\text{Div}(\Delta)$  est fini, il existe  $r \geq 1$  tel que  $\phi^r|_{\text{Div}(\Delta)} = 1_{\text{Div}(\Delta)}$ , d'où  $\phi^r = 1_M$  et (a).

Vu dans le groupe  $\mathcal{G}(M)$ ,  $\phi$  est en fait la conjugaison par  $\Delta$ , le fait que  $\phi^r|_{\text{Div}(\Delta)} = 1_{\text{Div}(\Delta)}$  montre que  $\Delta^r$  centralise  $\text{Div}(\Delta)$  et donc  $\mathcal{G}(M)$ .

Ensuite, si  $\Delta \prec m$ , alors il existe  $m'$  tel que  $\Delta m' = m$ , mais alors  $\phi^{-1}(m')\Delta = m$  et  $m \succ \Delta$ , d'où (c). Les trois derniers points s'en déduisent sans peine.  $\square$

**Corollaire 2.1.13.** *Pour tout  $x \in \mathcal{G}(M)$ , il existe un unique couple  $(m, b) \in \mathbb{Z} \times M$  tel que*

$$x = \Delta^{-m}b \text{ et } \Delta \not\prec b$$

Cette écriture de  $x$  (avec éventuellement  $b \in M$  écrit en forme normale gloutonne) s'appelle la **forme normale gauche** de  $x$ . La forme normale droite consiste à écrire  $x = b'\Delta^{-m'}$  avec  $b' \not\prec \Delta$ . Ces formes normales permettent de donner une solution au problème du mot dans  $\mathcal{G}(M)$  (et dans  $M$  en particulier).

On étend à  $\mathcal{G}(M)$  les ordre de divisibilité en posant

- $x \prec y$  si  $x^{-1}y \in M$
- $y \succ x$  si  $yx^{-1} \in M$ .

(le fait que  $M$  se plonge dans  $\mathcal{G}(M)$  garantit que ces deux relations sont des ordres sur  $\mathcal{G}(M)$ ).

**Corollaire 2.1.14.** *Les ensembles  $(\mathcal{G}(M), \succ)$  et  $(\mathcal{G}(M), \prec)$  sont des treillis.*

**Corollaire 2.1.15.** *Soit  $(M, \Delta)$  un monoïde de Garside, alors  $\mathcal{G}(M)$  est sans torsion.*

## 2.2 Définitions et premières propriétés

Nous avons toujours en tête l'idée qu'un monoïde n'est qu'une catégorie en puissance, on cherche donc à interpréter les données d'une structure de Garside dans un sens catégorique :

- Le premier point est la notion de monoïde homogène. Cette notion se traduit *mutatis mutandis* au cas catégorique : on demande l'existence d'un foncteur longueur  $\ell : \mathcal{C} \rightarrow (\mathbb{N}, +)$  tel que  $\mathcal{C}$  soit engendrée par ses éléments de longueur  $> 0$ .

Comme dans le cas précédent, l'existence d'un tel foncteur garantit certaines propriétés fortes sur  $\mathcal{C}$  : premièrement, si  $f \in \mathcal{C}$  est un isomorphisme, on a  $\ell(f) + \ell(f^{-1}) = 0 = \ell(1)$ , donc  $\ell(f) = 0$ , et  $f = 1$  car  $\mathcal{C}$  est engendrée par ses éléments de longueur  $> 0$ . Ainsi,  $\mathcal{C}$  n'admet pas d'isomorphisme non triviaux, en particulier les (co)limites, quand elles existent, sont uniques dans  $\mathcal{C}$  au sens propre du terme (et non plus à isomorphisme canonique près).

De plus, l'homogénéité entraîne que la catégorie  $\mathcal{C}$  est **atomique** : pour  $f \in \mathcal{C}$  un morphisme, il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  (la longueur) tel que les factorisations de  $f$  sous la forme  $f = f_r f_{r-1} \cdots f_1$  soient toujours de longueur  $\leq n$  (bien-sûr avec l'hypothèse qu'aucun des  $f_i$  n'est une identité).

Enfin, dans une catégorie atomique, on appelle **atome** un morphisme dont la longueur maximale des factorisations est égale à 1 (dans le cas homogène, les morphismes de longueur 1 sont des atomes<sup>4</sup>). Il est clair par récurrence que l'ensemble des atomes de  $\mathcal{C}$  engendre  $\mathcal{C}$  dans le cas atomique (donc en particulier dans le cas homogène).

- Une autre hypothèse simple à traduire en termes catégoriques est celle de simplifiabilité : par exemple la simplifiabilité à droite :

$$\forall a, b, c \in M, \quad ac = bc \Rightarrow a = b$$

est la définition du fait que  $c$  est un épimorphisme de  $M$  (et de même pour la simplifiabilité à gauche et les monomorphismes). On suppose donc que tous les morphismes de  $\mathcal{C}$  sont à la fois des monomorphismes et des épimorphismes.

- Le point suivant est un peu plus subtil : l'existence de ppcm et de pgcd pour les relations de divisibilité. Il faut commencer par reformuler ces relations dans une catégorie : ce sont les relations de factorisation évoquées à la fin de la section précédente dans le cas d'un germe.

Soient  $f : x \rightarrow y$  et  $f' : x \rightarrow z$ , on dit que  $f'$  **factorise**  $f$  à **droite** s'il existe  $g : z \rightarrow y$  tel que  $f = gf'$ , on note alors  $f \succ f'$ .

Soient  $f : x \rightarrow y$  et  $f' : z \rightarrow y$ , on dit que  $f'$  **factorise**  $f$  à **gauche** s'il existe  $g : x \rightarrow z$  tel que  $f = f'g$ , on note alors  $f' \prec f$ .

Notons que dans le cas d'une catégorie simplifiable à gauche et à droite, les morphismes  $g$  dans les définitions ci-dessus sont uniques. Et comme dans le cas d'un monoïde, on a :

**Lemme 2.2.1.** *Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie homogène et simplifiable, alors pour  $x \in |\mathcal{C}|$ , on a*

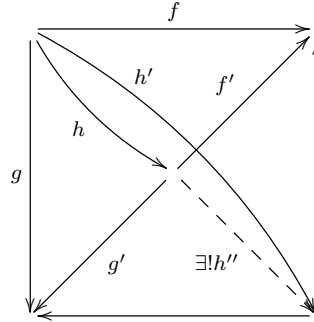
- La relation  $\succ$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{C}(x, -)$
- La relation  $\prec$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{C}(-, x)$

*Démonstration.* On montre le cas de  $\succ$ , celui de  $\prec$  se déduisant par un argument similaire. Supposons avoir  $f \succ g$  et  $g \succ f$ , on a alors  $\ell(f) \geq \ell(g)$  et  $\ell(g) \geq \ell(f)$ , donc  $\ell(f) = \ell(g)$  et  $f = g$  car  $\mathcal{C}$  n'admet pas d'isomorphismes non triviaux.  $\square$

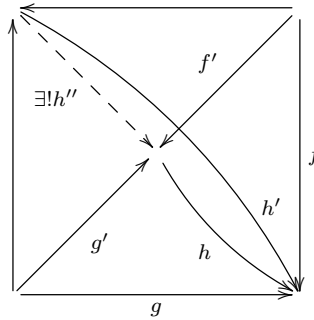
---

4. la réciproque est fausse, par exemple en remplaçant  $\ell$  par  $2\ell$

Essayons d'interpréter la définition de pgcd à droite pour deux morphismes  $f : x \rightarrow y$  et  $g : x \rightarrow z$ . Un diviseur commun à droite serait un morphisme  $h : x \rightarrow t$  tel que  $f \succ h$  et  $g \succ h$ , il existe donc  $f', g'$  tels que  $f'h = f$  et  $g'h = g$ , et un tel  $h$  est pgcd si, pour tout autre diviseur  $h'$  de  $f$  et  $g$ , on a  $h \succ h'$ , autrement dit il existe un  $h''$  tel que  $h = h''h'$ , on a vu qu'un tel  $h''$  était alors unique : on obtient là une propriété universelle :



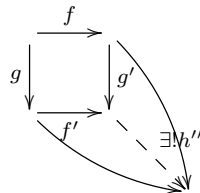
De même, on a une propriété universelle pour les pgcd à gauche :



Comme dans le cas des monoïdes, les morphismes donnant les pgcd seront noté (quand ils existent)  $f \wedge_G g$  et  $f \wedge_D g$  respectivement.

Si ces deux propriétés universelle n'évoquent à priori pas d'objets "courants" du monde des catégories, il est probable que le cas des ppcm sera plus familier :

Soient deux morphismes  $f : x \rightarrow y$  et  $g : x \rightarrow z$  deux morphismes, un multiple commun à gauche de  $f$  et  $g$  est un morphisme  $h : x \rightarrow t$  tel qu'il existe  $f', g'$  avec  $f'h = f$  et  $g'h = g$ . Un tel  $h$  est ppcm si, pour tout autre multiple  $h'$  commun à  $f$  et  $g$ ,  $h'$  est multiple à gauche de  $h$  (autrement dit  $h' \succ h$ ), à nouveau si  $\mathcal{C}$  est simplifiable, on a unicité de la factorisation, et on retrouve une propriété universelle bien connue :



Un ppcm à gauche de deux morphismes  $f$  et  $g$  est par définition leur pushout ! De même un ppcm à droite est un pullback<sup>5</sup>.

À nouveau, on notera  $f \vee_G g$  et  $f \vee_D g$  les ppcm.

5. Il faut bien l'hypothèse de simplifiabilité pour avoir unicité de la factorisation, sinon il on obtient des pullbacks/pushout faibles.

- À présent, il faut traduire la donnée de l'élément de Garside  $\Delta$ . On a vu que dans les monoïdes (et les groupes) de Garside, la conjugaison par  $\Delta$  induit un automorphisme du monoïde, envoyant  $m \in M$  sur  $\phi(m)$  défini par  $m\Delta = \Delta\phi(m)$ . Ceci nous donne que, vu comme des morphismes, on a pour tout  $m \in M$ , un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\phi(m)} & \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ & \xrightarrow{m} & \end{array}$$

autrement dit,  $\Delta$  constitue une transformation naturelle de  $\phi$  vers  $1_M$ .

On considère donc un automorphisme de  $\mathcal{C}$ ,  $\phi$ , et  $\Delta$  une transformation naturelle de  $\phi$  vers  $1_{\mathcal{C}}$ . Comme  $\phi$  est un avatar de la "conjugaison à droite par  $\Delta$ ", on le notera comme tel :  $\phi(f) := f^\phi$ .

- Enfin, il nous faut une notion de morphisme simple, autrement dit de "diviseur de  $\Delta$ " : on dira qu'un morphisme  $f : x \rightarrow y$  est **simple** s'il existe  $\bar{f} : y \rightarrow x^\phi$  tel que  $\bar{f}f = \Delta_x$  (si  $\mathcal{C}$  est simplifiable, un tel  $\bar{f}$  est alors unique). On notera  $S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  (ou simplement  $S$ ) le sous-graphe de  $\mathcal{C}$  constitué des morphismes simples.

Nous avons à présent toutes les cartes en main pour donner la définition de catégorie de Garside :

**Définition 2.2.2.** Un triplet  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  formé d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , d'un automorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{C}$ , et d'une transformation naturelle  $\Delta : \phi \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$  est une **catégorie de Garside** si on a les conditions suivantes :

- $\mathcal{C}$  est homogène et simplifiable (à gauche et à droite).
- Les atomes de  $\mathcal{C}$  sont inclus dans l'ensemble  $S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  des morphismes simples.
- Pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , les ensembles  $(\mathcal{C}(x, -), \succ)$  et  $(\mathcal{C}(-, x), \prec)$  sont des treillis.<sup>6</sup>

On dit alors que  $\mathcal{C}$  est de **type fini** si  $S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est fini. Pour  $k \geq 1$ , on dit que  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est  **$k$ -cyclique** si  $\phi^k = 1$  (et **cyclique** si elle est cyclique pour un certain  $k$ ).

**Exemple 2.2.3.** Un monoïde de Garside  $(M, \Delta)$  est un exemple particulier de catégorie de Garside. En fait, on voit immédiatement que les catégories de Garside à un seul objet (de type fini) sont exactement les monoïdes de Garside tels que définis en 2.1.8.

**Remarque 2.2.4.** Comme dans le cas des monoïdes, cette définition est en réalité assez restrictive, on peut faire fonctionner cette notion avec des hypothèses plus faibles que "homogène" : par exemple "atomique" (on renvoie à nouveau vers [DDGKM] qui propose des définitions plus minimales). Mais pour les exemples que nous allons considérer, cette définition s'avèrera efficace et suffisante.

Considérons à partir d'ici une catégorie de Garside  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ . Une première conséquence heureuse de ces définitions est que l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{C}$  forme un système multiplicatif : l'existence de pullbacks garantit la seconde condition, la troisième condition découle de la simplifiabilité : si  $sf = sg$ , alors  $f = g$  et  $t = 1$  convient (en reprenant les notations de la définition 1.2.4).

Par ailleurs, comme  $\mathcal{C}$  est simplifiable, on a que le foncteur naturel de  $\mathcal{C}$  vers son groupoïde libre  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  est fidèle (cf remarque 1.2.5).

---

6. Autrement dit, les pgcd/ppcm à droite et à gauche existent



**Définition 2.2.5.** Un groupoïde de la forme  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ , où  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est une catégorie de Garside est appelé **groupoïde de Garside**. Un groupe d'automorphisme d'un groupoïde de Garside est appelé **groupe faiblement Garside**.

*Remarque 2.2.6.* • Bien-sûr, dans le cas d'un monoïde de Garside, on parlera de groupe de Garside plutôt que de groupoïde de Garside.

S'il est clair qu'un groupe de Garside est en particulier un groupe faiblement Garside, on peut s'interroger sur l'implication réciproque : elle est fausse, on a un contre-exemple dans [Bes2, Section 13].

- Il faut noter qu'un groupoïde peut être le groupoïde de Garside associé à différentes catégories de Garside distinctes (c'est déjà vrai au niveau des monoïdes/groupes).
- Même si nous serons régulièrement amenés à faire cet abus de notation, il faut garder à l'esprit qu'une catégorie de Garside est donnée non seulement par la catégorie elle-même, mais aussi par l'automorphisme  $\phi$  et la transformation naturelle  $\Delta$ , ces données n'ont à priori rien de canonique, on voit par exemple que  $(\mathcal{C}, \phi^k, \Delta^k)$  est toujours une catégorie de Garside pour  $k \geq 1$ .

On fixe jusqu'à nouvel ordre une catégorie de Garside  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ .

*Notation 2.2.7.* Comme  $\Delta$  est une transformation naturelle, on a une bijection entre les objets de  $\mathcal{C}$  et les éléments de  $\Delta$ . Ainsi, pour  $f : x \rightarrow y$  un morphisme, la seule façon d'avoir  $f$  dans  $\Delta$  est d'avoir  $f = \Delta_y$  (et en particulier  $y^\phi = x$ ), cette absence d'ambiguïté justifie la notation  $f \in \Delta$  (voire  $f = \Delta$ ) au lieu de  $f = \Delta_y$ .

Plus généralement, on aura tendance à omettre l'indice dans l'écriture de  $\Delta$  pour alléger les expressions.

**Lemme 2.2.8.** ( $\Delta$  est équilibré)

Avec ces nouvelles notations, pour  $f \in \mathcal{C}$ , on a l'équivalence

$$\Delta \succ f \Leftrightarrow f \prec \Delta$$

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) Notons  $f : x^\phi \rightarrow y$ , on a par hypothèse un  $g : y \rightarrow x \in \mathcal{C}$  tel que  $gf = \Delta_x : x^\phi \rightarrow x$ , on a alors :

$$gfg^\phi = \Delta g^\phi = g\Delta$$

donc  $fg^\phi = \Delta$  par simplifiabilité. La preuve de ( $\Leftarrow$ ) repose sur la même astuce.  $\square$

*Notation 2.2.9.* À partir d'ici, pour  $s \in S$  un morphisme simple, on notera  $\bar{s}$  et  $\hat{s}$  les morphismes respectivement définis par  $s\bar{s} = \Delta$  et  $\hat{s}s = \Delta$ .

Considérant  $f : x \rightarrow y$  un morphisme, on pose

$$\alpha(f) := f \wedge_G \Delta_y = f \wedge_G \Delta$$

et on appelle  $\alpha(f)$  la **partie initiale**<sup>7</sup> de  $f$ . Comme  $\alpha(f)$  divise  $f$  à gauche (par définition), on peut également définir  $\omega(f)$  par l'équation  $f = \alpha(f)\omega(f)$ , c'est la **partie finale** de  $f$ .

Remarquons que comme les atomes sont des simples, et qu'ils engendrent  $\mathcal{C}$ , on a toujours  $\alpha(f) \neq 1$  pour  $f \neq 1$  (car un certain atome divise nécessairement  $f$ , et cet atome est simple).

---

7. On conserve cette nomenclature standard, même si elle est peu intuitive au regard de notre convention pour la composition

**Lemme 2.2.10.** Pour tout couple de morphismes composables  $z \xleftarrow{g} u \xleftarrow{f} x$  de  $\mathcal{C}$ , on a

$$\alpha(gf) = \alpha(g\alpha(f))$$

*Démonstration.* Commençons par relever que notre équation a du sens en terme de composabilité des morphismes en jeux.

On montre d'abord le cas où  $g \in S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est un morphisme simple, dans ce cas on a  $g'$  tel que  $gg' \in \Delta$ , et

$$\alpha(gf) = gf \wedge_G gg' = g(f \wedge_G g')$$

Or, comme  $\Delta \succ g'$ , et donc  $g' \prec \Delta$  d'après le lemme précédent, on a  $(f \wedge_G g') \prec (f \wedge_G \Delta) = \alpha(f)$  et  $\alpha(gf) \prec g\alpha(f)$ . Par ailleurs,  $\alpha(gf) \prec \Delta$  donc  $\alpha(gf) \prec (g\alpha(f) \wedge_G \Delta) = \alpha(g\alpha(f))$ .

Réciproquement,  $\alpha(g\alpha(f)) \prec g\alpha(f) \prec g\alpha(f)\omega(f) = gf$ , comme  $\alpha(g\alpha(f)) \prec \Delta$ , ceci entraîne  $\alpha(g\alpha(f)) \prec (gf \wedge_G \Delta) = \alpha(gf)$  d'où le résultat.

Revenons au cas général, on raisonne par récurrence sur  $\ell(g)$ , le cas  $\ell(g) = 0$  immédiat, ensuite, si  $\ell(g) \leq 1$ , on peut écrire  $g = ag'$  où  $a$  est un atome de  $\mathcal{C}$  (donc en particulier un simple), on a alors

$$\begin{aligned} \alpha(gf) &= \alpha(ag'f) \\ &= \alpha(a\alpha(g'f)) \\ &= \alpha(a\alpha(g'\alpha(f))) \\ &= \alpha(ag'\alpha(f)) \\ &= \alpha(g\alpha(f)) \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. □

Considérons  $f \in \mathcal{C}$ , on note  $f_1 = \alpha(f)$ ,  $f_2 = \alpha(\omega(f))$ ,  $f_i = \alpha(\omega^{i-1}(f))$ ..., comme pour tout  $i$ , le produit  $f_1 \cdots f_i$  divise  $f$  (à gauche), on a pour des raisons de longueur que pour un certain  $r$ ,  $f_{r+1} = 1$  et donc  $\omega^r(f) = 1$ , auquel cas, le produit  $f_1 \cdots f_r$  est égal à  $f$  :

**Définition 2.2.11.** Pour  $f \in \mathcal{C}$ , on appelle **forme normale gloutonne** ("greedy normal form") de  $f$  le chemin  $(f_1, \dots, f_r)$  construit ci-dessus.

**Lemme 2.2.12.** La propriété pour un chemin  $(f_1, f_2, \dots, f_r)$  dans  $S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  d'être une forme normale gloutonne est **locale**, i.e il est équivalent de dire que chaque sous-chemin  $(f_i, f_{i+1})$  est une forme normale gloutonne.

*Démonstration.* Si l'on a cette propriété locale et si l'on sait déjà que  $(f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_r)$  est une forme normale (pour le produit  $f_{k+1} \cdots f_r$ ), alors

$$f_k = \alpha(f_k f_{k+1}) = \alpha(f_k \alpha(f_{k+1} \cdots f_r)) = \alpha(f_k \cdots f_r)$$

et

$$f_{k+1} = \alpha(\omega^{u-1}(f_{k+1} \cdots f_r)) = \alpha(\omega^u(f_k \cdots f_r))$$

On conclut par récurrence descendante, la réciproque fait appel aux mêmes formules. □

Par construction de cette décomposition, on voit que deux morphismes de  $\mathcal{C}$  sont égaux si et seulement si ils ont même forme normale. Dans le cas d'une catégorie de Garside de type fini, ceci permettra de donner une solution au problème du mot dans le cas d'une catégorie présentée (et de son groupoïde associé) !

**Proposition 2.2.13.** *Une catégorie de Garside  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  de type fini est cyclique. De plus, si elle est  $k$ -cyclique pour  $k \geq 1$ , alors*

$$\forall f \in \mathcal{C}, f \prec \Delta^{k\ell(x)}$$

*Démonstration.* Par hypothèse, l'ensemble  $S = S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est fini et engendre  $\mathcal{C}$ . On a vu dans la preuve du lemme 2.2.8 que, pour  $s \in S$ , on a  $s^\phi \in S$  également. Donc  $\phi$  définit une bijection de  $S$ , d'ordre fini car  $S$  est fini. Il existe donc une puissance de  $\phi$  agissant trivialement sur  $S$ , et donc sur  $\mathcal{C}$ , autrement dit  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est cyclique.

Ensuite, si  $\mathcal{C}$  est  $k$ -cyclique, pour  $f \in \mathcal{C}$ , on raisonne par récurrence sur  $\ell(f)$ , le cas  $\ell(f) = 0$  étant trivial. Si  $\ell(f) \geq 1$ , si  $f \in S(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  le résultat est clair, sinon on a

$$f = gs \text{ avec } 0 < \ell(s), \ell(g) < \ell(f)$$

et on applique l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{cases} \Delta^{k\ell(g)} = gg' \\ \Delta^{k\ell(s)} = ss' \end{cases} \Rightarrow \Delta^{k\ell(f)} = gg' \Delta^{k\ell(s)} = g \Delta^{k\ell(s)} g' = gss'g' = fs'g'$$

autrement dit  $f \prec \Delta^{k\ell(f)}$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque 2.2.14.* On peut appliquer une preuve similaire pour montrer qu'il est toujours vrai (même quand  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  n'est pas de type fini) que tout morphisme divise une certaine puissance de  $\Delta$ . En reprenant

$$\begin{cases} \Delta^p = gg' \\ \Delta^q = ss' \end{cases} \Rightarrow \Delta^{p+q} = gg' \Delta^q = g \Delta^q g'^{\phi^q} = gss'g'^{\phi^q} = fs'g'^{\phi^q}$$

Mais on ne peut plus garantir que tout morphisme divise une "puissance centrale", on ne sait même pas qu'une telle puissance existe (si  $\mathcal{C}$  n'est pas cyclique par exemple).

**Corollaire 2.2.15.** *Soit  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside de type fini.*

*Pour tout morphisme  $f \in \mathcal{G}(\mathcal{C})$ , il existe un unique couple  $(m, g) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{C}$  tel que  $f = \Delta^{-m}g$  et  $\Delta \nprec g$ .*

*Démonstration.* Un morphisme de  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  s'écrit sous la forme  $fg^{-1}$  pour  $f, g \in \mathcal{C}$ . Par la proposition précédente, il existe  $m \geq 0$  tel que  $\Delta^m \succ f$ , donc  $\Delta^m = g'g$  et  $g^{-1} = \Delta^{-m}g'$ , quitte à prendre  $m$  assez grand pour avoir  $\phi^m = 1$ , on a  $fg^{-1} = f\Delta^{-m}g' = \Delta^{-m}fg'$ .

On peut donc écrire  $fg^{-1}$  sous la forme  $\Delta^{-m}h$  pour  $h \in \mathcal{C}$ , si  $\Delta \prec h$ , alors  $h = \Delta h'$  et  $fg^{-1} = \Delta^{-(m-1)}h'$ , prenant  $h$  de longueur minimale, on peut donc supposer  $\Delta \nprec h$ .

Reste à montrer l'unicité, si l'on a  $\Delta^{-m}f = \Delta^{-n}g$  avec  $\Delta \nprec f$ ,  $\Delta \nprec g$ . Par symétrie on peut supposer  $n \geq m$ , on a alors  $\Delta^{n-m}f = g$ , comme  $\Delta \nprec c$ , on a  $n - m = 0$ , et  $f = g$  par simplifiabilité.  $\square$

Toujours comme dans le cas des monoïdes, on peut étendre à  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  les ordres de factorisations : pour  $x \in |\mathcal{G}(\mathcal{C})|$  on pose

$$\forall f, g \in \mathcal{G}(\mathcal{C})(-, x), f \prec g \Leftrightarrow f^{-1}g \in \mathcal{C} \text{ et } \forall f, g \in \mathcal{G}(\mathcal{C})(x, -), g \succ f \Leftrightarrow gf^{-1} \in \mathcal{C}$$

(on note que ces définitions ont du sens quant à la composabilité des morphismes en jeu).

**Corollaire 2.2.16.** Si  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est une catégorie de Garside, alors pour tout  $x \in |\mathcal{C}|$ , les ensembles  $(\mathcal{G}(\mathcal{C})(-, x), \prec)$  et  $(\mathcal{G}(\mathcal{C})(x, -), \succ)$  sont des treillis.

*Démonstration.* Soient  $f : y \rightarrow x$  et  $g : z \rightarrow x$  des morphismes de  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ , on prend également  $r \geq 0$  tel que  $\Delta^r f$  et  $\Delta^r g$  sont dans  $\mathcal{C}$ . Alors  $h = \Delta^{-r}(\Delta^r f \wedge_G \Delta^r g)$ , ne dépend pas du choix d'un tel  $r$ , puisque

$$\Delta^{-(r+1)}(\Delta^{r+1} f \wedge_G \Delta^{r+1} g) = \Delta^{-(r+1)} \Delta(\Delta^r f \wedge_G \Delta^r g)$$

On a  $h \prec f$  et  $h \prec g$ , et si  $k \prec f, g$  on peut choisir  $r \geq 0$  assez grand pour que  $\Delta^r f, \Delta^r g, \Delta^r k \in \mathcal{C}$ , alors

$$\Delta^r h \prec \Delta^r f, \Delta^r g \Rightarrow \Delta^r k \prec (\Delta^r f \wedge_G \Delta^r g)$$

d'où  $k \prec h$  et  $h = f \wedge_G g$ . On montre de même

$$f \vee_D g = \Delta^r(\Delta^r x \vee_D \Delta^r g) \quad f \vee_G g = \Delta^r(\Delta^r x \vee_G \Delta^r g) \quad f \wedge_D g = \Delta^r(\Delta^r x \wedge_D \Delta^r g)$$

□

**Corollaire 2.2.17.** Un groupe de Garside faible, associé à une catégorie de Garside de type fini, est sans torsion.

*Démonstration.* Soit  $f : x \rightarrow x$  un morphisme d'ordre  $m \geq 1$ , on pose  $g = 1 \vee f \vee \dots \vee f^{m-1}$  et on a  $fg = f \vee f^2 \vee \dots \vee 1 = g$ , donc  $f = 1$  par simplifiabilité. □

## 2.3 Germes de Garside

Il est à présent temps de faire le lien entre nos deux premières parties. Nous avons pour l'instant décrit un peu du comportement des catégories de Garside, mais nous n'avons pas discoursu sur comment construire en pratique des catégories de Garside, (les lecteurs familiers avec le cas de monoïdes de Garside penseront vraisemblablement aux monoïdes d'intervalles, qui sont de fait un cas particulier de ce que nous allons voir maintenant). Pour traiter le cas des catégories, on utilisera la notion de germe de Garside.

Premièrement, si l'on sait qu'une catégorie de Garside est engendrée par ses simples, peut-on extraire la donnée plus précise d'une présentation ?

### 2.3.1 Définitions, germes depuis les Catégories

On considère  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside, et  $S$  le graphe de ses simples, on note  $\mathcal{S}$  le germe obtenu en restreignant à  $S$  les lois de compositions de  $\mathcal{C}$  (on peut donc calculer dans  $\mathcal{S}$  la composition de deux simples, à condition que cette composée soit elle même un simple).

**Proposition 2.3.1.** Soit  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside, la catégorie  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  présentée par le germe  $\mathcal{S}$  est isomorphe à  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* On fera notamment appel au lemme suivant :

**Lemme 2.3.2.** Soient  $s, t \in \mathcal{S}(-, x)$  deux simples de  $\mathcal{C}$ , on note  $s', t'$  tels que  $ss' = tt' = s \vee_D t$ . Les morphismes  $s'$  et  $t'$  sont simples, de même que le produit  $ss' = tt'$ .

*Démonstration.* Comme  $s$  et  $t$  sont des simples, on peut considérer  $\bar{s}$  et  $\bar{t}$  tels que  $s\bar{s} = \Delta = t\bar{t}$ , il existe donc  $h$  tel que  $s'h = \bar{s}$  et  $t'h = \bar{t}$ . En particulier,  $s'$  et  $t'$  sont des simples, et on a  $ss'h = s\bar{s} = \Delta$ , donc  $ss'$  est également un simple.  $\square$

Revenons à la proposition : par définitions des conditions sur  $\mathcal{S}$ , l'inclusion  $S \hookrightarrow \mathcal{C}$  se prolonge en un foncteur  $F : \mathcal{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}$ , qui atteint tous les objets, et qui est plein car  $S$  engendre  $\mathcal{C}$ . Il reste à montrer que ce foncteur est fidèle, ce que l'on fait par récurrence sur la longueur. Notons déjà que  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  est homogène, le foncteur longueur étant défini à partir de la restriction  $\ell : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ , on a donc en particulier que  $F$  préserve les longueurs.

On sait de plus que  $F$  est injectif sur les simples (en particulier, sur les identités), on se permet donc de noter  $s = F(s)$  pour  $s \in \mathcal{S}$ . Soient ensuite  $f, g$  deux morphismes de  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  tels que  $F(f) = F(g)$  et  $\ell(f) = \ell(F(f)) = \ell(F(g)) > 0$ , on peut supposer  $F(f) = F(sf') = sF(f') = F(g) = tF(g')$ . En reprenant les notations du lemme, on obtient l'existence de  $h \in \mathcal{C}$  tel que  $s'h = F(f')$  et  $t'h = F(g')$ , par hypothèse de récurrence, il existe un unique antécédent  $\theta \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  de  $h$  par  $F$ , et  $s'\theta = f', t'\theta = g'$  on a alors

$$f = sf' = ss'\theta = tt'\theta = tg' = g$$

d'où le résultat par récurrence. (L'égalité  $ss' = tt'$  tient dans  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  car  $ss' = tt'$  est une égalité de simples de  $\mathcal{C}$ ).  $\square$

Il est donc possible de retrouver toute la donnée d'une catégorie de Garside à partir de ses simples. À présent, il faut se demander quelles conditions peut-on imposer à un graphe pour qu'il soit le graphe des simples d'une catégorie de Garside ? Une réponse satisfaisante est donnée par la notion de germe de Garside :

**Définition 2.3.3.** Un germe  $\mathcal{S} = (S, m)$  est dit **de Garside** s'il respecte les conditions suivantes :

- La catégorie  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  est homogène, autrement dit il existe un morphisme de graphes (conditionnés)  $\mathcal{S} \rightarrow (\mathbb{N}, +)$ .
- $\mathcal{S}$  est  $\mathcal{C}$ -simplifiable<sup>8</sup> : pour  $s, t \in S$ , et  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ , on a  $(fs = ft \text{ ou } sf = tf) \Rightarrow s = t$ .
- Pour tout sommet  $x$ , l'ensemble ordonné  $(S(-, x), \prec)$  admet un maximum noté  $\Delta_x$ .
- Notons  $x^\phi$  le sommet source de  $\Delta_x$ . L'application  $(S(-, x), \prec) \rightarrow (S(x^\phi, -), \succ)$  envoyant  $s$  sur  $\bar{s}$  défini par  $s\bar{s} = \Delta_x$  est un isomorphisme<sup>9</sup>.
- Pour tout sommet  $x$ , l'ensemble  $(S(-, x), \prec)$  est un treillis.

*Remarque 2.3.4.* L'isomorphisme donné par le quatrième point permet d'annuler l'apparence asymétrie des axiomes :  $\Delta_x$  est aussi l'élément maximal de  $(\mathcal{S}(x^\phi, -), \succ)$ , et  $(\mathcal{S}(x^\phi, -), \succ)$  est également un treillis.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.3.5.** *Le germe des simples d'une catégorie de Garside est un germe de Garside. Réciproquement, la catégorie présentée par un germe de Garside  $\mathcal{S}$  est une catégorie de Garside dont le germe des simples est isomorphe à  $\mathcal{S}$ .*

8. Cette condition est plus faible que la simplifiabilité usuelle, on ne peut à priori pas remplacer  $s$  et  $t$  par des morphismes de  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$

9. Cette application est bien définie par simplifiabilité

La première assertion est nettement plus simple à démontrer que la seconde : si  $\mathcal{S}$  est le germe des simples de  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ , alors les quatre premiers points de la définition de germe de Garside sont clairs.

Pour le dernier point de la définition, soient  $s, t \in S(-, x)$  des simples, le lemme 2.3.2 nous apprend que le ppcm à droite de  $s$  et  $t$  est lui même un simple, il s'agit donc aussi d'un supremum dans  $\mathcal{S}(-, x)$ , on montre de même que le pgcd à gauche de  $s$  et  $t$  est un simple, et un infimum dans  $\mathcal{S}(-, x)$ , ce qui permet de conclure.

La deuxième assertion fait l'objet de la sous-section suivante :

### 2.3.2 Catégories depuis les germes

On fixe  $\mathcal{S} = (S, m)$  un germe de Garside. La première étape consiste à construire un automorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  et une transformation naturelle  $\Delta : \phi \Rightarrow 1_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}$ .

Soient  $x, y \in |\mathcal{S}|$ , on a un isomorphisme  $\mathcal{S}(-, y) \rightarrow \mathcal{S}(y^\phi, -)$ , qui se restreint en particulier en une bijection  $\mathcal{S}(x, y) \rightarrow \mathcal{S}(y^\phi, x)$ , on a de même une bijection  $\mathcal{S}(y^\phi, x) \rightarrow \mathcal{S}(x^\phi, y^\phi)$ , on obtient ainsi un automorphisme  $\phi$  du graphe  $S$ , et donc un automorphisme  $\phi$  de la catégorie libre sur  $S$ .

**Lemme 2.3.6.** *L'automorphisme  $\phi$  respecte la composition partielle, et induit donc un automorphisme de  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ .*

*Démonstration.* Pour  $s \in S(x, y)$ , on note  $\bar{s} \in S(y^\phi, x)$  tel que  $s\bar{s} = \Delta_y$ , et  $s^\phi \in S(x^\phi, y^\phi)$  tel que  $\bar{s}s^\phi = \Delta_x$ . Supposons avoir une relations dans  $\mathcal{S}$  de la forme  $st = u$ , on veut montrer que l'on a  $s^\phi t^\phi = u^\phi$  dans  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ .

Par hypothèse  $s \prec u \Rightarrow \bar{s} \succ \bar{u}$  et on a une relation  $\bar{s} = v\bar{u}$  dans  $\mathcal{S}$ , comme  $s\bar{s} = \Delta = sv\bar{u}$ , on a  $sv = u = st$  et  $v = t$  par simplifiabilité, d'où une relations  $\bar{s} = t\bar{u}$  dans  $\mathcal{S}$ . On a alors  $t \prec \bar{s} \Rightarrow \bar{t} \succ s^\phi$  et une relation  $\bar{t} = ws^\phi$ , à nouveau  $\Delta = t\bar{t} = tws^\phi$  entraîne  $tw = \bar{s}$  et  $\bar{u} = w$ , on a donc une égalité  $\bar{t}t^\phi = \bar{u}s^\phi t^\phi = \Delta$  dans  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ , d'où  $s^\phi t^\phi = u^\phi$  dans  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  comme annoncé.  $\square$

On a donc un automorphisme  $\phi$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ , de plus par construction, on a, pour  $s \in S(x, y)$  que

$$s\Delta_x = s\bar{s}s^\phi = \Delta_y s^\phi$$

ce résultat s'étend immédiatement à  $s \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  et montre que  $\Delta$  est une transformation naturelle de  $\phi$  vers  $1_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}$ . Il reste alors à montrer que le triplet  $(\mathcal{C}(\mathcal{S}), \phi, \Delta)$  est une catégorie de Garside.

L'homogénéité est claire par définition. Ensuite, comme  $\mathcal{S}$  engendre  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ , il en contient en particulier les atomes, d'où le second point.

Le troisième et dernier point, de même que la simplifiabilité, va nécessiter un certain nombres de résultats intermédiaires et de constructions techniques (issues de [DM] et [Mar]), notons par exemple qu'il n'y a à priori aucune raison pour que les supremums dans  $S$  donnent des pullbacks/pushouts dans  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ .

**Lemme 2.3.7.**

(a) On fixe  $x \in |\mathcal{S}|$ , soit  $E \subset \mathcal{C}(\mathcal{S})(-, x)$  tel que, pour tout  $s \in E$

- $([1, s], \prec) \subset E$  (autrement dit,  $E$  est stable par facteur à gauche).
- $\forall u, v \in S$  tels que  $su, sv \in E$ ,  $s(u \vee_D v) \in E$ .

Alors il existe  $u_0$  dans  $E$  tel que  $E = ([1, u_0], \prec)$  soit l'ensemble des facteurs à gauche de  $u_0$ .

(b) Soient  $z \xleftarrow{s} y \xleftarrow{t} x$  deux éléments de  $\mathcal{S}$ , il existe un unique  $u \in S(-, y)$  maximal tel que  $u \prec t$  et  $su \in S$ .

*Démonstration.* (a) : Comme  $E$  est inclus dans  $\mathcal{C}(\mathcal{S})(-, x)$ , qui admet un élément maximal  $\Delta_x$ , de longueur finie, il existe dans  $E$  un élément de longueur maximale  $u_0$ , qui est alors un élément maximal pour  $\prec$ . Si  $[1, u_0] \subsetneq E$ , alors soit  $y \not\prec u_0$ , et soit  $x$  un facteur commun à gauche maximal de  $y$  et  $u_0$ . On a  $x \in X = \{x \prec u_0, x \neq u_0 \mid \exists s \in S \text{ tel que } xs \in E \text{ et } xs \not\prec u_0\}$ , en effet, prenons  $y = xs_1 \cdots s_k$  avec  $s_i \in S, k$  minimal, et  $s_1 \neq 1$ , on a alors  $xs_1 \neq u_0$  par hypothèse.

Soit maintenant  $x \in X$  maximal, et  $s \in S$  tel que  $xs \in E$  et  $xs \not\prec u_0$ . Comme  $x \neq u_0$ , il existe  $t \in S$  non trivial tel que  $x \prec xt \prec u_0$ , on a alors  $xs, xt \in E$ , donc  $xm \in E$ , où  $m = s \vee_D t$ . Comme  $xm$  est un multiple à droite de  $xs$ , on a  $xs \not\prec u_0$ . On prend  $t'$  maximal tel que  $t \prec t' \prec m$  et  $xt' \prec g$ , on a  $x \prec xt' \prec xm$ , et  $xt' \in X$ , d'où une contradiction avec la maximalité de  $x$ .

(b) : On pose

$$E := \{u \prec t \mid st \in S\}$$

ensemble auquel on cherche à appliquer le point (a). Il est clair que  $E$  est stable par facteur à gauche (notamment car  $S$  l'est), il reste à voir la condition de ppcm, soient donc  $u, v, w$  tels que  $w \in E$ ,  $u, v \in S$  tels que  $uw, uv \in E$ . On a donc  $suw, suv \in S$ , et  $uv, uw \in S$ , ils admettent donc un ppcm à droite  $uv \vee uw$ , avec évidemment  $u \prec uv \vee uw$ , il existe donc un simple  $a$  tel que  $ua = uv \vee uw$ , on vérifie par sa définition que  $a = v \vee w$ .

On a donc  $uv, uw \prec t$ , donc  $uv \vee uw = u(v \vee w) \prec t$ , et  $su(v \vee w) = suv \vee suw \in S$ , donc  $E$  respecte bien les hypothèse du point (a), le simple  $u$  tel que  $E = [1, u]$  est le simple recherché.  $\square$

On utilise ce lemme pour définir deux applications

$$\hat{\alpha}, \hat{\omega} : S \times S \rightarrow S$$

les notations ne sont pas innocentes : elles nous serviront *in fine* à définir ce qui sera la forme normale gauche de  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ .

Soient donc deux simples  $z \xleftarrow{s} y \xleftarrow{t} x$ , en gardant les notations du lemme, on pose

$$\hat{\alpha}(s, t) = su \text{ et } t = u\hat{\omega}(x, y)$$

de sorte que  $st = \hat{\alpha}(s, t)\hat{\omega}(s, t)$

**Lemme 2.3.8.** Pour  $s, t, u, st \in S$  on a

$$(a) \hat{\alpha}(st, u) = \hat{\alpha}(s, \hat{\alpha}(t, u))$$

$$(b) \hat{\omega}(st, u) = \hat{\omega}(s, \hat{\alpha}(t, u))\hat{\omega}(t, u)$$

*Démonstration.* (a) : Par définition, on a

$$\begin{cases} \hat{\alpha}(st, u) = stx \text{ pour } x \text{ maximal tel que } stx \text{ simple, et } x \prec u \\ \hat{\alpha}(t, u) = ty \text{ pour } y \text{ maximal tel que } ty \text{ simple, et } y \prec u \end{cases}$$

Comme  $tx$  est un simple (facteur d'un simple), avec  $x \prec u$ , par maximalité on a  $x \prec y$  et  $tx \prec ty$ . De même,  $stx \prec \hat{\alpha}(s, ty) = \hat{\alpha}(s, \hat{\alpha}(t, u))$ , soit donc  $x'$  tel que  $stxx' = \hat{\alpha}(s, \hat{\alpha}(t, u))$ , on a  $stxx' \prec sty$  et donc  $xx' \prec y$  par simplifiabilité, et donc  $xx' \prec u$  (car  $v \prec u$ ). Par définition de  $\hat{\alpha}(st, u)$ , on a alors  $x' = 1$ , d'où (a).

(b) : comme  $stu = \hat{\alpha}(st, u)\hat{\omega}(st, u)$ , et

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(st, u)\hat{\omega}(s, \hat{\alpha}(t, u))\hat{\omega}(t, u) &= \hat{\alpha}(s, \hat{\alpha}(t, u))\hat{\omega}(s, \hat{\alpha}(t, u))\hat{\omega}(t, u) \\ &= s\hat{\alpha}(t, u)\hat{\omega}(t, u) \\ &= stu \end{aligned}$$

On souhaite alors conclure par simplifiabilité, mais il faut pour cela que les deux membres de l'équation (b) soient des simples, c'est par définition le cas du membre de gauche, pour le membre de droite, on pose

- $a \in S$  défini par  $\hat{\alpha}(t, u) = ta$ , de sorte que  $a\hat{\omega}(t, u) = u$
- $a_1 \in S$  défini par  $\hat{\alpha}(s, \hat{\alpha}(t, u)) = sta_1$  de sorte que  $sta_1\hat{\omega}(s, \hat{\alpha}(t, u)) = s\hat{\alpha}(t, u) = sta$ .

On a alors  $a_1\hat{\omega}(s, \hat{\alpha}(t, u)) \in S$  comme facteur droit de  $\hat{\alpha}(t, u) \in S$ , et donc  $a_1\hat{\omega}(s, \hat{\alpha}(t, u)) = a$  par  $\mathcal{C}$ -simplifiabilité, donc

$$a_1\hat{\omega}(s, \hat{\alpha}(t, u))\hat{\omega}(t, u) = a\hat{\omega}(t, u) = u$$

d'où le résultat :  $\hat{\omega}(s, \hat{\alpha}(t, u))\hat{\omega}(t, u)$  est un simple comme facteur droit de  $u$ . □

À présent, on peut s'attaquer à la preuve proprement dite de la seconde moitié du théorème 2.3.5 :

Étape 1 : On utilise  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\omega}$  pour définir  $\alpha : \mathcal{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}$  et  $\omega : \mathcal{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S})$  telles que, pour  $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  composables, on ait

$$\alpha(g\alpha(f)) = \alpha(gf) \quad \text{et} \quad \omega(gf) = \omega(g\alpha(f))\omega(f)$$

Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie libre sur  $S$ , on définit  $\alpha, \omega : \mathcal{C} \rightarrow S$  par

$$\alpha : s_1 \cdots s_r \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ s_1 & \text{si } r = 1 \\ \hat{\alpha}(s_1, \alpha(s_2 \cdots s_r)) & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

$$\omega : s_1 \cdots s_r \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq 1 \\ \hat{\omega}(s_1, \alpha(s_2 \cdots s_r))\omega(s_2 \cdots s_r) & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

**Lemme 2.3.9.** *Les deux applications  $\alpha, \omega$  passent à la catégorie  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ .*

*De plus, pour  $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  composables, on a*

- (a)  $\alpha(gf) = \alpha(g\alpha(f))$
- (b)  $\omega(gf) = \omega(g\alpha(f))\omega(f)$



*Démonstration.* Une relation de  $\mathcal{S}$  est de la forme  $st = u$ , on doit alors montrer  $\alpha(st) = \alpha(u) = u$ . Par définition, on a  $\alpha(st) = \widehat{\alpha}(s, \alpha(t)) = \widehat{\alpha}(s, t)$ , mais par le lemme 2.3.7, comme  $st = u \in S$ , on a bien  $\widehat{\alpha}(s, t) = u$ .

De même, on a

$$\omega(st) = \widehat{\omega}(s, \alpha(t))\omega(t) = \widehat{\omega}(s, t) = 1 = \omega(u)$$

Ensuite pour les relations (a) et (b), il suffit comme au lemme 2.2.10 de montrer le cas où  $g$  est simple (on conclut ensuite par récurrence), dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\alpha(gf) &= \widehat{\alpha}(g, \alpha(f)) = \widehat{\alpha}(g, \alpha^2(f)) = \alpha(g\alpha(f)) \\ \omega(g\alpha(f))\omega(g) &= \widehat{\omega}(g, \alpha^2(f))\omega(\alpha(f))\omega(f) = \omega(gf)\end{aligned}$$

□

Étape 2 : Écriture  $f = \alpha(f)\omega(f)$ .

On montre d'abord  $\alpha(f) \prec f$ , pour  $f = s_1 \cdots s_r, s_i \in S$ , par récurrence sur  $r$ . Le cas  $r = 1$  est clair, et pour  $r \geq 2$ ,  $\alpha(f) = \widehat{\alpha}(s_1, \alpha(s_2 \cdots s_r)) = s_1 z$  avec  $z \prec \alpha(s_2 \cdots s_r) \prec s_2 \cdots s_r$  par hypothèse de récurrence, d'où  $\alpha(f) \prec s_1 \cdots s_r = f$ .

On remarque ensuite que  $s \prec \widehat{\alpha}(s, t)$  pour tous  $s, t \in S$ . Ainsi, si  $f = st$  pour un  $s \in S$ , alors

$$s \prec \widehat{\alpha}(s, \alpha(t)) = \alpha(st) = \alpha(f)$$

donc  $\alpha(f)$  est le plus grand diviseur à gauche de  $f$  dans  $S$ . De ceci on va déduire que le  $g \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  tel que  $f = \alpha(f)g$  est unique, car égal à  $\omega(f)$ . Pour ce faire, on remarque d'abord que, si  $h \prec \alpha(g)$ , satisfait  $\alpha(f)h \in S$ , alors  $\alpha(f)h \prec \alpha(f)\alpha(g) \prec \alpha(f)g = f$ , donc  $\alpha(f)h \prec \alpha(f)$  par maximalité de  $\alpha(f)$ , mais alors  $h = 1$  pour d'évidentes raisons de longueur. Par définition de  $\widehat{\omega}$  cela implique  $\widehat{\omega}(\alpha(f), \alpha(g)) = \alpha(g)$ . Partant de ceci, par récurrence sur  $\ell(f)$ , on montre bien

$$\begin{aligned}\omega(f) &= \omega(\alpha(f)g) = \omega(\alpha(f)\alpha(g))\omega(g) \\ &= \widehat{\omega}(\alpha(f), \alpha(g))\omega(\alpha(f))\omega(g) \\ &= \alpha(g)\omega(g) = g\end{aligned}$$

Étape 3 : Simplifiabilité.

Soient  $f, g, h$  des morphismes de  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$  tels que  $hf = hg$ , il suffit par récurrence de traiter le cas où  $h$  est un simple, dans ce cas,

$$\alpha(hf) = \alpha(h\alpha(f)) = \widehat{\alpha}(h, \alpha(f)) = hu \text{ pour un } u \prec \alpha(f) \prec f$$

de même,  $\alpha(hg) = hv$  pour un  $v \prec \alpha(g) \prec g$ , on pose alors  $g = vg'$  et  $f = uf'$ . Comme  $hu = hv$  par hypothèse, on a  $u = v$ , et alors

$$hf = huf' = \alpha(hf)f' \text{ et } hg = hvg' = \alpha(hg)g'$$

d'où, par l'étape précédente

$$f' = \omega(hf) = \omega(hg) = g' \text{ et } f = uf' = vg' = g$$

d'où la simplifiabilité à gauche, la simplifiabilité à droite découlant d'un argument similaire (la définition de germe est symétrique, la simplifiabilité à droite est la simplifiabilité à gauche de la catégorie opposée).

Étape 4 : Pgcd et ppcm.

Soient  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ ,  $s, t \in S$ , si  $s \prec f$  et  $t \prec f$ , alors  $s, t \prec \alpha(f)$  et  $s \vee t \prec \alpha(f) \prec f$ , cela a pour conséquences que, pour tous  $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ , l'ensemble

$$E := \{h \in \mathcal{C}(\mathcal{S}) \mid h \prec f, g\}$$

satisfait les hypothèses du lemme 2.3.7, ce qui donne les pgcd à gauche.

pour les ppcm à droite, il suffit de montrer que les simples admettent des pullbacks (tous les morphismes en admettrons par composition), soient donc  $s, t \in S(-, x)$  et  $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$  tels que  $sf = tg =: m$ , on a  $s, t \prec m$ , donc  $s, t \prec \alpha(m)$ , donc  $s \vee t \prec \alpha(m) \prec m$ , ce qui montre bien que  $s \vee t$ , à priori seulement un ppcm parmi les simples, est en fait un ppcm dans  $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ . Les pgcd/ppcm à droite et à gauche s'en déduisent à nouveau par symétrie.

Ceci termine la preuve du théorème 2.3.5.

### 2.3.3 Exemple des monoïdes d'intervalles

Les catégories de Garside que nous construirons dans la suite ferons souvent (sinon systématiquement) appel à la notion de germe, nous ne manqueront donc pas d'exemples. Ceci dit, on peut dès à présent donner un autre exemple plus classique :

On fixe un groupe fini  $G$ , muni d'un ensemble  $S \subset G$  de générateurs. On va utiliser certains éléments de  $S$  comme générateurs formels pour un monoïde, qui sera de Garside sous certaines conditions. Pour éviter la confusion entre le produit dans  $G$  et le produit dans ce monoïde en devenir, on notera  $g.h$  le produit de  $g, h \in G$ .

Pour  $g \in G$ , on note  $\ell_S(g)$  le nombre  $r$  minimal dans une décomposition de la forme  $g = s_1 \cdots s_r$  avec  $s_i \in S$ . On a par construction  $\ell_S(g.h) \leq \ell_S(g) + \ell_S(h)$ .

**Lemme 2.3.10.** *Soient  $g, h, k \in G$ , Si  $\ell_S(g.h.k) = \ell_S(g) + \ell_S(h) + \ell_S(k)$ , alors  $\ell_S(g.h) = \ell_S(g) + \ell_S(h)$  et  $\ell_S(h.k) = \ell_S(h) + \ell_S(k)$ .*

*Démonstration.* On a

$$\ell_S(g.h.k) \leq \ell_S(g.h) + \ell_S(k) \leq \ell_S(g) + \ell_S(h) + \ell_S(k) = \ell_S(g.h.k)$$

donc ces inégalités sont des égalités, et  $\ell_S(g.h) = \ell_S(g) + \ell_S(h)$ , on raisonne de même pour la seconde égalité.  $\square$

On définit deux ordres partiels  $\prec$  et  $\succ$  sur  $G$  par

$$g \prec h \Leftrightarrow \ell_S(h) = \ell_S(g) + \ell_S(g^{-1}.h) \quad \text{et} \quad h \succ g \Leftrightarrow \ell_S(h) = \ell_S(h.g^{-1}) + \ell_S(g)$$

(on montre sans difficulté que ce sont bien des relations d'ordre). Ces relations sont définies de sorte que si  $\ell_S(g) + \ell_S(h) = \ell_S(gh)$ , on a  $g \prec gh$  et  $gh \succ h$ .

**Définition 2.3.11.** Un élément  $c \in G$  est dit équilibré si les ensembles  $([1, c], \prec)$  et  $([1, c], \succ)$  sont égaux, on note alors  $[1, c]$  cet ensemble.

On définit alors le **monoïde d'intervalle**  $M(c)$  associé à  $c$  et  $S$  par l'ensemble de générateurs  $[1, c]$  et les relations  $w = uv$  pour  $w = u.v$  et  $\ell_S(w) = \ell_S(u) + \ell_S(v)$ .

D'après la définition, on a un morphisme de monoïdes  $\pi : M(c) \rightarrow G$  envoyant les générateurs de  $M(c)$  sur leur homologue dans  $[1, c] \subset G$ . On en déduit que l'application naturelle  $[1, c] \rightarrow M(c)$  est injective, on peut donc identifier  $[1, c]$  à une partie de  $M(c)$ .

Nous entendons à terme montrer que certains monoïdes d'intervalles sont des monoïdes de Garside, il nous faut donc à minima construire une fonction longueur.

**Lemme 2.3.12.** On pose  $A = S \cap [1, c]$ , si  $w = s_1.s_2.\dots.s_r \in [1, c]$  est une décomposition minimale de  $w$  en produit d'éléments de  $S$ . Alors pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $s_i \in A$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $r = \ell_S(w)$ , le cas  $r = 0$  étant trivial, et pour  $r = 1$ ,  $w = s_r \in S \cap [1, c] = A$ .

Pour  $r \geq 2$ , on écrit  $w = w'.s_r$  avec  $\ell_S(w') = r - 1$ ,  $w' = s_1.\dots.s_{r-1}$ . Par hypothèse de récurrence, on a  $s_i \in A$  pour  $i < r$  car  $w' \in [1, c]$ . Comme  $w \succ s_r$ , on a également  $s_r \in [1, c]$ , donc  $s_r \in S \cap [1, c] = A$ .  $\square$

On déduit de ce lemme que  $M(c)$  est engendré par  $A$ , et qu'il s'agit d'un monoïde homogène, de fonction longueur  $\ell : M(c) \rightarrow \mathbb{N}$  donnée par  $\ell(x) = 1$  si  $x \in A \subset M(c)$ .

**Exemple 2.3.13.** Considérons  $G = \mathfrak{S}_3$ ,  $s_1 = (1\ 2)$  et  $s_2 = (2\ 3)$ ,  $S = \{s_1, s_2\}$ . La fonction  $\ell_S$  se décrit très simplement, elle vaut 2 sur les 3-cycles, et 3 sur la transposition  $(1\ 3) = s_1.s_2.s_1$ . Il est clair que  $c = (1\ 3)$  est équilibré, avec  $[1, c] = \mathfrak{S}_3$ , on montre directement que  $M(c) = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$ . La fonction longueur est donnée par la longueur des mots (longueur qui n'est pas modifiée par les relations de définitions de  $M(c)$ ).

L'identification de  $[1, c]$  à une partie de  $M(c)$  crée un léger conflit de notation : vu comme sous-ensemble de  $G$ , il hérite des deux relations d'ordre  $\prec, \succ$ , et vu comme sous-ensemble de  $M(c)$ , il hérite des relations de divisibilité  $\prec$  et  $\succ$ . En fait ce conflit est illusoire :

**Proposition 2.3.14.** (a)  $[1, c] = \{x \in M(c) \mid \pi(x) \in [1, c] \text{ et } \ell_S(\pi(x)) = \ell(x)\}$

(b) Soit  $y \in [1, c] \subset M(c)$ . Si  $x \prec y$  ou  $y \succ x$ , alors  $x \in [1, c]$

(c) Les relations  $\prec, \succ$  sur  $[1, c]$  sont les mêmes dans  $G$  et dans  $M(c)$ .

*Démonstration.* On a d'après le dernier lemme que, pour  $x \in [1, c]$ ,  $x = s_1.\dots.s_r$  avec  $r = \ell(x)$ , on a  $s_i \in A$ , donc  $\ell(s_i) = 1$  et  $\ell(x) = \ell_S(x)$ . Pour la réciproque, on procède par récurrence sur  $\ell(x)$ , le cas  $\ell(x) = 1$  étant immédiat. On suppose ensuite  $\ell(x) \geq 2$ .

On remarque d'abord que, si  $x = yz$  avec  $y, z \in M(c)$ , alors on a

$$\ell(y) + \ell(z) = \ell(x) = \ell_S(\pi(x)) = \ell_S(\pi(y).\pi(z)) \leq \ell_S(\pi(y)) + \ell(\pi(z)) \leq \ell(y) + \ell(z)$$

d'où  $\ell(y) = \ell_S(\pi(y))$  et  $\ell(z) = \ell_S(\pi(z))$ . En écrivant  $x = ya$  avec  $a \in A$ , on obtient  $\ell_S(\pi(y)) = \ell(y) = \ell(x) - 1 = \ell_S(\pi(x)) - 1$  d'où  $\pi(y) \prec \pi(x) \prec c$  et  $\pi(y) \in [1, c]$ . Par hypothèse de récurrence, cela implique  $y \in [1, c]$ . Mais alors  $ya = \pi(x)$  fait partie des relations de définition de  $M(c)$ , donc  $\pi(x) = x$ , ce qui conclut (a).

On en déduit (b) de la façon suivante : si  $u, v \in M(c)$  sont tels que  $uv \in [1, c]$ , alors  $\pi(uv) = \pi(u).\pi(v)$  et

$$\ell_S(\pi(uv)) \leq \ell_S(\pi(u)) + \ell_S(\pi(v)) \leq \ell(u) + \ell(v) = \ell(uv) = \ell_S(\pi(uv))$$

d'où  $\ell(u) = \ell_S(\pi(u))$ ,  $\ell(v) = \ell_S(\pi(v))$  et  $\pi(u) \prec \pi(uv) \prec c$ ,  $c \succ \pi(uv) \succ \pi(v)$  ce qui implique  $uv \in [1, c]$  par (a), on l'applique alors à  $y = uv$ ,  $x = u$  ou  $y = uv$ ,  $x = v$  ce qui démontre (b). Pour (c), on considère le cas de  $\prec$ , l'autre étant similaire. Il est clair que, pour  $x, y \in [1, c]$ , si  $x \prec y$  dans  $G$ , alors  $x \prec y$  dans  $M(c)$ , on montre alors la réciproque.

On suppose  $y = xm$ ,  $m \in M(c)$ , alors on a

$$y = \pi(y) = \pi(x).\pi(m) = x.\pi(m) \text{ avec } \ell_S(y) = \ell(y) = \ell(x) + \ell(m) = \ell_S(x) + \ell(m)$$

et par (b) on sait que  $m \in [1, c]$  donc  $\ell(m) = \ell_S(\pi(m))$  d'où  $x \prec y$  dans  $G$ .  $\square$

Enfin, une condition combinatoire simple assure que  $M(c)$  est un monoïde de Garside.

**Proposition 2.3.15.** *On suppose que  $c \in G$  est équilibré, et que  $([1, c], \prec), ([1, c], \succ)$  sont tous deux des treillis, alors  $M(c)$  est un monoïde de Garside d'élément de Garside  $\Delta = c$ .*

*Démonstration.* Nous montrons que  $[1, c]$ , vu comme un germe, est un germe de Garside, la fonction  $\ell$  déjà vue donne l'homogénéité. Pour la  $\mathcal{C}$ -simplifiabilité, si l'on a  $ms = mt$  avec  $s, t \in [1, c]$ , alors  $\pi(s) = \pi(m)^{-1} \cdot \pi(ms) = \pi(m)^{-1} \cdot \pi(mt) = \pi(t)$  et donc  $s = t$ , la simplifiabilité à droite relève d'un argument identique.

Comme  $[1, c]$  n'a qu'un seul sommet, les conditions restantes seront à vérifier sur le seul ensemble  $[1, c]$ , l'existence d'un maximum est évidente, et donne aussi  $\Delta = c$ .

Comme notre hypothèse assure que  $[1, c]$  est un treillis, il reste simplement à établir l'isomorphisme  $([1, c], \prec) \rightarrow ([1, c], \succ)$ . Si  $x \in [1, c]$ , alors  $x \prec c$  et  $\ell_s(c) = \ell_s(x) + \ell_s(x^{-1}c)$ , on envoie alors  $x$  sur  $x^{-1}c \in [1, c]$ . Si  $s \prec t$  dans  $[1, c]$ , alors on a une égalité  $s.u = t$  dans  $G$ , mais alors  $u.t^{-1}c = s^{-1}c$ , avec

$$\ell_S(u) + \ell_S(t^{-1}c) = \ell_S(u) + \ell_S(c) - \ell_S(t) = \ell_S(c) - \ell_S(s) = \ell_S(s^{-1}c)$$

d'où  $s^{-1}c \succ t^{-1}c$ , on raisonne de même pour la réciproque, les deux ordres sur  $[1, c]$  sont donc isomorphes, d'où le résultat.  $\square$

## 2.4 Catégorie divisée

**Définition 2.4.1.** Soit  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside, un **automorphisme** de  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est un automorphisme  $\psi$  de  $\mathcal{C}$  tel que

$$\phi\psi = \psi\phi \text{ et } \forall x \in |\mathcal{C}|, \psi(\Delta_x) = \Delta_{\psi x}$$

**Exemple 2.4.2.** Si  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est de Garside, l'automorphisme  $\phi$  est un automorphisme de Garside, il commute évidemment avec lui même, et pour  $x \in |\mathcal{C}|$ , on a par naturalité un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} x^{\phi^2} & \xrightarrow{(\Delta_x)^\phi} & x^\phi \\ \Delta_{x^\phi} \downarrow & & \downarrow \Delta_x \\ x^\phi & \xrightarrow{\Delta_x} & x \end{array}$$

et donc  $(\Delta_x)^\phi = \Delta_{x^\phi}$  par simplifiabilité.

Fixons à présent une catégorie de Garside  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  et un automorphisme de Garside  $\phi$ . On introduit les sous-catégories suivantes :

- $\mathcal{C}'$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  donnée par les objets  $\psi$ -invariants.
- $\mathcal{C}^\psi$  la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  (et de  $\mathcal{C}'$ ) formée des morphismes  $\psi$ -invariants.

Pour  $x \in |\mathcal{C}|$ , le foncteur  $\psi$  se restreint en deux applications croissantes

$$(\mathcal{C}(x, -), \prec) \rightarrow (\mathcal{C}(\psi x, -), \prec) \text{ et } (\mathcal{C}(-, x), \succ) \rightarrow (\mathcal{C}(-, \psi x), \succ)$$

Une conséquence simple est qu'un automorphisme de Garside stabilise (globalement) les morphismes simples : si  $g \prec \Delta_x$ , alors  $\psi(g) \prec \psi(\Delta_x) = \Delta_{\psi x}$  et  $\psi(g)$  est simple.

**Lemme 2.4.3.** Soient  $f, g \in \mathcal{C}^\psi$ , si l'une des relations  $f \prec g$  ou  $g \succ f$  a lieu dans  $\mathcal{C}$ , alors elle a lieu dans  $\mathcal{C}^\psi$ . En particulier, un simple de  $\mathcal{C}$  se trouvant dans  $\mathcal{C}^\psi$  est un "simple" de  $\mathcal{C}^\psi$  (et réciproquement).

*Démonstration.* Si  $fh = g$ , alors  $\psi(f)\psi(h) = \psi(g)$  et  $f\psi(h) = g$ , d'où  $h = \psi(h)$  par simplifiabilité. On raisonne de même pour  $\succ$ .  $\square$

**Lemme 2.4.4.** Pour  $f \in \mathcal{C}'$ , il existe  $P(f), Q(f) \in \mathcal{C}^\psi$  tels que

- Si  $f \in \mathcal{C}^\psi$ , alors  $P(f) = Q(f) = f$ .
- Si  $f \prec g$ , alors  $P(f) \prec P(g)$
- Si  $g \succ f$ , alors  $Q(g) \succ Q(f)$

*Démonstration.* Soit  $f : x \rightarrow y$  un morphisme de  $\mathcal{C}'$ , la subtilité principale est la construction de  $P(f)$  : par la remarque 2.2.14, il existe un entier  $m$  tel que  $f \prec \Delta^m : x^{\phi^m} \rightarrow x$ , on a alors  $\psi(f) \prec \psi(\Delta^m) = \Delta^m : \psi(x^{\phi^m}) = x^{\phi^m} \rightarrow \psi(x) = x$ , et il en va de même de tous les morphismes  $\psi^k(f)$  pour  $k \geq 0$  et même pour  $k \leq 0$ . En notant  $\psi_k(f)$  le ppcm à droite de la famille  $\{\psi^i(f) \mid i \in \llbracket -k, k \rrbracket\}$ , on a

$$f \prec \psi_1(f) \prec \dots \prec \psi_k(f) \prec \dots \prec \Delta^m$$

Cette suite croissante a une longueur bornée par  $\ell(\Delta^m)$  : elle est stationnaire, on en note  $P(f)$  le dernier terme, il est ppcm de la famille  $\{\psi^i(f) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ , clairement  $\psi$  invariante, d'où  $P(f) \in \mathcal{C}^\psi$ . On remarque au passage que  $P(f) = f$  si  $f \in \mathcal{C}^\psi$ , puisqu'alors la famille dont on prend le ppcm est  $\{f\}$ .

Ensuite, si  $f \prec g$ , alors

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \psi^i(f) \prec \psi^i(g) \prec P(g)$$

et donc  $P(f) \prec P(g)$  par définition du ppcm. La construction de  $Q$  se fait via les mêmes arguments, en remplaçant ppcm à droite par ppcm à gauche.  $\square$

**Théorème 2.4.5.** Soient  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside, et  $\psi$  un automorphisme de Garside de  $\mathcal{C}$ . La sous-catégorie  $\mathcal{C}^\psi$  de  $\mathcal{C}$  donnée par les objets/morphismes invariants sous  $\psi$ , munie des restrictions de  $\phi$  et  $\Delta$  est une catégorie de Garside.

*Démonstration.* On sait déjà que  $\mathcal{C}^\psi$  est homogène et simplifiable comme sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ , on sait aussi que  $\psi$  s'y restreint en un automorphisme par définition, enfin, l'hypothèse que  $\psi$  est de Garside nous donne que  $\psi(\Delta_x) = \Delta_{\psi(x)} = \Delta_x$ , donc  $\Delta_x$  se restreint également en une transformation naturelle dans  $\mathcal{C}^\psi$ .

Soit à présent un atome  $b$  de  $\mathcal{C}^\psi$ , il ne s'agit à priori pas d'un atome de  $\mathcal{C}$ , mais il existe à minima un atome  $a$  de  $\mathcal{C}$ , avec  $a \prec b$ . On a alors par le lemme précédent  $P(a) \prec P(b) = b$  dans  $\mathcal{C}^\psi$ , donc  $P(a) = b$  car  $b$  est un atome de  $\mathcal{C}^\psi$ . Ensuite, on voit que  $P(a)$  est un simple de  $\mathcal{C}$  comme ppcm d'une famille de morphismes simples de  $\mathcal{C}$ , il s'agit donc d'un simple de  $\mathcal{C}^\psi$  par le lemme 2.4.4 : les atomes de  $\mathcal{C}^\psi$  en sont donc des simples.

Enfin, pour les conditions de treillis, soient  $f, g \in \mathcal{C}^\psi(x, -)$ , ils admettent un ppcm à droite  $f \vee_D g$  dans  $\mathcal{C}$ , le morphisme  $P(f \vee_D g)$  est un ppcm à droite de  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}^\psi$ , on a en effet, pour  $h \in \mathcal{C}^\psi$  :

$$\begin{aligned} f, g \prec h &\Rightarrow f \vee_D g \prec h \\ &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \psi^k(f \vee_D g) \prec \psi^k h = h \\ &\Rightarrow P(f \vee_D g) \prec h \end{aligned}$$

On montre de même que  $Q(f \vee_G g)$  (resp  $Q(f \wedge_D g)$ ,  $P(f \wedge_D g)$ ) est ppcm à gauche (resp pgcd à droite, à gauche) de  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}^\psi$ , qui est alors bien une catégorie de Garside.  $\square$

Il est temps à présent de donner la construction principale de cette section : celle des catégories divisées. Partant d'une catégorie de Garside  $\mathcal{C}$ , on en déduit une famille  $(\mathcal{C}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de catégories de Garside, avec  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ . Elles sont de type fini si  $\mathcal{C}$  l'est, et si  $\mathcal{C}$  est  $k$ -cyclique, elles sont  $mk$ -cycliques (respectivement).

De plus, on verra que cette construction préserve les groupoïdes (au sens où les groupoïdes  $\mathcal{G}_m$  et  $\mathcal{G}_n$  seront équivalents, même si  $\mathcal{C}_m$  et  $\mathcal{C}_n$  ne le sont pas à priori).

Fixons dès à présent  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside, et  $m \geq 1$ .

**Définition 2.4.6.** On appelle  *$m$ -subdivision* de  $\Delta$  une suite  $f = (f_m, \dots, f_1)$  de morphismes composables tels que  $f_m \cdots f_1 = \Delta$ .

On note  $D_m(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  (où plus simplement  $D_m(\mathcal{C})$ , voire  $D_m$ ) l'ensemble des  $m$ -subdivisions de  $\Delta$ .

Si  $(f_m, \dots, f_1)$  est une  $m$ -subdivision de  $\Delta$ , alors, en notant  $x_m$  le codomaine de  $f_m$ , le domaine de  $f_1$  doit être  $x_m^\phi$ .

De plus, on remarque que tous les  $f_i$  doivent être simple : c'est clair pour  $f_1$ , pour  $f_2$ , on a vu que

$$\Delta = (f_m \cdots f_2)f_1 \Rightarrow f_1^\phi(f_m \cdots f_2) = (f_1^\phi f_m \cdots f_3)f_2 = \Delta$$

on raisonne de même pour tous les  $f_i$  suivants.

*Notation 2.4.7.* Dans la suite, quand nous serons confrontés à un  $m$ -uplet  $(a_1, \dots, a_m)$  d'objets/de morphismes de  $\mathcal{C}$ , on étendra la notation  $a_i$  à  $i \in \mathbb{Z}$  en posant récursivement  $a_{i-m} := a_i^\phi$ .

Grâce à cette convention, on pourra poser sans risque que, pour  $f = (f_m, \dots, f_1) \in D_m$ , on a  $f_i : x_{i-1} \rightarrow x_i$ , on pourra noter la subdivision  $f$  comme un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_m & \xleftarrow{f_m} & x_{m-1} & \xleftarrow{f_{m-1}} & x_{m-2} & \xleftarrow{\dots} & x_3 & \xleftarrow{f_3} & x_2 & \xleftarrow{f_2} & x_1 & \xleftarrow{f_1} & x_m^\phi \\ & & & & & & & & & & & & \Delta_{x_m} \end{array}$$

Nous allons définir la catégorie  $\mathcal{C}_m$  via le germe de ses simples, on doit donc construire un graphe orienté  $S_m$ , dont les objets seront donnés par l'ensemble  $D_m$ , et le munir d'une composition partielle.

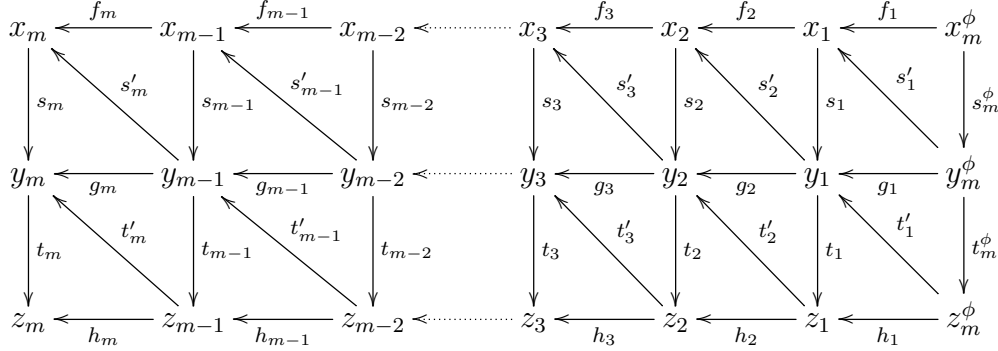
Soient  $f = (f_m, \dots, f_1)$  et  $g = (g_m, \dots, g_1)$  deux éléments de  $D_m$ , une flèche  $s \in S_m(f, g)$  sera, par définition, une suite  $s = (s_m, s'_m, s_{m-1}, s'_{m-1}, \dots, s_1, s'_1)$  de  $\mathcal{C}$ -simples, chaque  $s_i$  allant du codomaine de  $f_i$  à celui de  $g_i$ , et chaque  $s'_i$  allant du domaine de  $g_i$  à celui de  $f_{i+1}$ , le tout formant un diagramme commutatif dans  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_m & \xleftarrow{f_m} & x_{m-1} & \xleftarrow{f_{m-1}} & x_{m-2} & \xleftarrow{\dots} & x_3 & \xleftarrow{f_3} & x_2 & \xleftarrow{f_2} & x_1 & \xleftarrow{f_1} & x_m^\phi \\ \downarrow s_m & \swarrow s'_m & \downarrow s_{m-1} & \swarrow s'_{m-1} & \downarrow s_{m-2} & & \downarrow s_3 & \swarrow s'_3 & \downarrow s_2 & \swarrow s'_2 & \downarrow s_1 & \swarrow s'_1 & \downarrow s_m^\phi \\ y_m & \xleftarrow{g_m} & y_{m-1} & \xleftarrow{g_{m-1}} & y_{m-2} & \xleftarrow{\dots} & y_3 & \xleftarrow{g_3} & y_2 & \xleftarrow{g_2} & y_1 & \xleftarrow{g_1} & y_m^\phi \end{array}$$

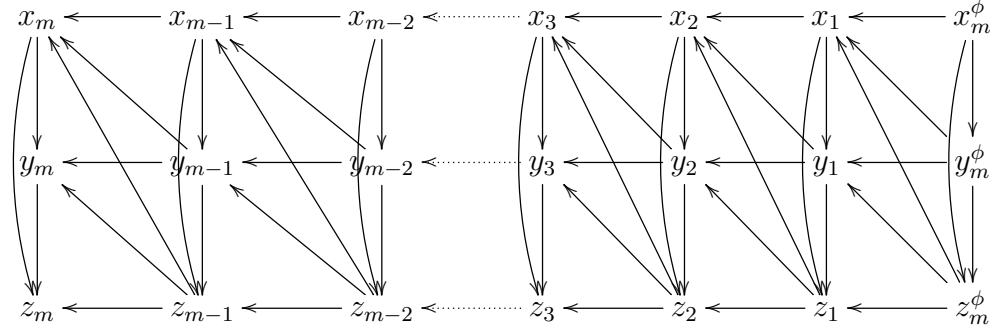
Par simplifiabilité, la donnée du  $m$ -uplet  $(s_m, s_{m-1}, \dots, s_1)$  suffit dans ce cas à retrouver toute la donnée du morphisme  $s$ .

Autrement dit, un morphisme  $s$  de  $f$  vers  $g$  consiste en des factorisations  $g_i = s_i s'_i$  avec  $f_i = s'_i s_{i-1}$  pour  $i \geq 1$ .

Soient  $f, g, h \in D_m$ ,  $s \in S_m(f, g)$  et  $t \in S_m(g, h)$ , autrement dit un diagramme commutatif de simples de la forme suivante :



On dit que  $s$  et  $t$  sont **compatible** si ce diagramme peut être complété par des simples dans  $\mathcal{C}$  pour obtenir un diagramme commutatif.



Autrement dit,  $s$  et  $t$  sont compatibles si  $t_i s_i \in S$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et si la suite  $(t_m s_m, \dots, t_1 s_1)$  fait partie d'un morphisme dans  $S_m(f, h)$ , auquel cas on définit ce morphisme comme la composée de  $s$  et  $t$ . On vérifie immédiatement que ceci induit une structure de germe sur  $S_m$ .

*Remarque 2.4.8.* Notre définition de la composition partielle permet de définir facilement un foncteur d'écrasement  $\kappa_m : \mathcal{C}(S_m) \rightarrow \mathcal{C}$ , défini sur  $S_m$  par

$$(s_m, \dots, s_1) \mapsto s_m$$

On remarque que  $\kappa_m$  restreint à  $S_m$  est injectif : si  $s, t : f \rightarrow g$  sont deux flèches telles que  $s_m = t_m$ , alors comme  $g_m = s_m s'_m = t_m t'_m$ , on a  $t'_m = s'_m$  par simplifiabilité, ensuite  $f_m = s'_m s_{m-1} = t'_m t_{m-1}$  entraîne à son tour  $s_{m-1} = t_{m-1}$ , et ainsi de suite, on obtient  $t = s$ .

**Théorème 2.4.9.** *Le germe  $S_m$  est un germe de Garside, on définit la catégorie  $\mathcal{C}_m$  comme la catégorie présentée par ce germe, c'est la  $m$ -ème catégorie divisée associée à la catégorie de Garside  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ .*

*Démonstration.* On vérifie mécaniquement les hypothèses de la définition 2.3.3. Commençons par l'homogénéité de  $S_m$ , on la déduit de celle de  $\mathcal{C}$  en posant :

$$\forall s = (s_m, s'_m, \dots, s_1, s'_1) \in S(f, g), \quad \ell_m(s) := \sum_{i=1}^n \ell(s_i)$$

notre définition de la composition partielle en fait bien un morphisme de graphes conditionnés  $\mathcal{S}_m \rightarrow (\mathbb{N}, +)$ .

La  $\mathcal{C}$ -simplifiabilité se montre grâce à notre foncteur  $\kappa_m$ , pour  $s, t \in \mathcal{S}_m$  et  $f \in \mathcal{C}_m$ ,  $fs = ts$  entraîne  $\kappa_m(f)\kappa_m(s) = \kappa_m(f)\kappa_m(t)$  et  $\kappa_m(s) = \kappa_m(t)$ , d'où  $s = t$  par la remarque précédente (la simplifiabilité à droite se montre par un argument identique).

Soit maintenant  $g \in |\mathcal{S}_m|$ , un morphisme  $s \in \mathcal{S}_m(-, g)$  est donné par une famille de simples  $(s'_m, \dots, s_1)$  telle que

- Pour tout  $i \geq 1$ ,  $g_i = s_i s'_i$ .
- Le  $m$ -uplet  $(s'_m s_{m-1}, s'_{m-1} s_{m-2}, \dots, s'_1 s_m^\phi)$  soit une  $m$ -subdivision de  $\Delta$ .

On voit que la dernière condition est superflue, en effet on a

$$s'_m s_{m-1} \cdots s'_1 s_m^\phi = s'_m g_{m-1} \cdots g_1 s_m^\phi = \Delta$$

car  $g_m \cdots g_1 = s_m s'_m g_m \cdots g_1 = \Delta$ . Ainsi, la donnée d'une arête de codomaine  $g$  équivaut à la donnée d'une famille  $(s_m, \dots, s_1)$  telle que, pour tout  $i$ ,  $s_i \prec g_i$ .

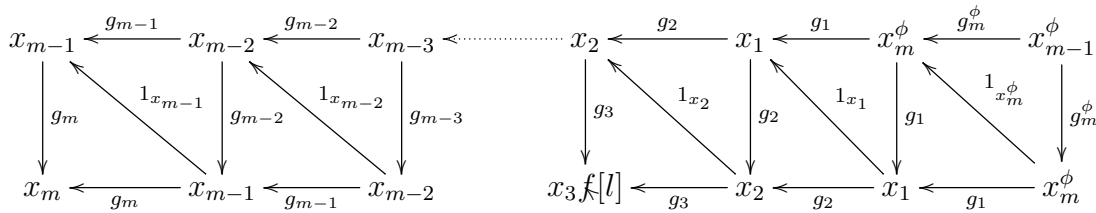
De même, on voit directement que pour  $s, t \in \mathcal{S}_m(-, g)$ , on a  $s \prec t$  si et seulement si  $s_i \prec t_i$  pour tout  $i$ , d'où un isomorphisme d'ensembles ordonnés

$$(\mathcal{S}_m(-, g), \prec) \simeq \prod_{i=1}^m ([1_{x_i}, g_i], \prec)$$

En particulier,  $\mathcal{S}_m(-, g)$  est un treillis, et admet un élément maximal

$$\Delta_g = (g_m, g_{m-1}, \dots, g_1) \in \prod_{i=1}^m ([1_{x_i}, g_i], \prec)$$

cet élément correspond à une arête  $(g_m, 1_{x_{m-1}}, g_{m-1}, 1_{x_{m-2}}, \dots, g_1, 1_{x_m^\phi})$  de  $\mathcal{S}_m$  :



Le domaine de cette arête sera par définition  $g^{\phi_m}$  :

$$g^{\phi_m} := (g_{m-1}, g_{m-2}, \dots, g_1, g_m^\phi)$$

de cette définition découle l'action de  $\phi_m$  sur les morphismes :

$$(s'_m, s_m, \dots, s'_1, s_1)^{\phi_m} := (s'_m, s_m, \dots, s'_2, s_2, s'_1, s_1, s'_m^\phi, s_m^\phi)$$

Il reste simplement pour conclure à montrer l'isomorphisme  $(\mathcal{S}_m(-, g), \prec) \simeq (\mathcal{S}_m(g^{\phi_m}, -), \succ)$ , qui est simplement donné par

$$(s_m, s'_m, s_{m-1}, s'_{m-1}, \dots, s_1, s'_1) \mapsto (s'_m, s_{m-1}, s'_{m-1}, \dots, s_1, s'_1, s_m^\phi)$$

□



Remarque 2.4.10. La définition de  $\phi_m$  nous donne que si  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  est  $k$ -cyclique, alors  $(\mathcal{C}_m, \phi_m, \Delta_m)$  est  $mk$ -cyclique.

Remarque 2.4.11. Attardons nous sur le cas  $m = 1$ , une 1-subdivision de  $\Delta$  est par définition un élément de  $\Delta$ , une arête de  $\mathcal{S}_1$  est donnée par un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} x & \xleftarrow{\Delta_x} & x^\phi \\ s \downarrow & \swarrow s' & \downarrow s^\phi \\ y & \xleftarrow{\Delta_y} & y^\phi \end{array}$$

et deux morphismes  $(s, s'), (t, t')$  sont composable si et seulement si le produit  $st$  existe et est un simple : le germe  $\mathcal{S}_1$  est en fait le germe des simples de  $\mathcal{C}$ , d'où  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$  comme annoncé. De plus, le foncteur  $\kappa_m$  peut se définir plus intuitivement au niveau des germes  $\mathcal{S}_m$ , par

$$(s_m, s'_m, \dots, s_1, s'_1) \mapsto (s_m, s'_m \cdots s_1 s'_1)$$

À présent, il reste à montrer que les groupoïdes  $\mathcal{G}_m$  sont équivalents, on compte pour cela montrer qu'ils sont tous équivalents à  $\mathcal{G}$ , on a déjà un foncteur  $\kappa_m : \mathcal{C}_m \rightarrow \mathcal{C}$ , on va en construire un quasi-inverse  $\Theta_m : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_m$ .

Pour  $x \in \mathcal{C}$ , on considère l'objet de  $\mathcal{C}_m$  donné par

$$\Theta_m(x) := x \xleftarrow{1_x} x \xleftarrow{1_x} x \cdots x \xleftarrow{1_x} x \xleftarrow{\Delta_x} x^\phi$$

à présent, si  $s : x \rightarrow y$  est un  $\mathcal{C}$ -simple, on considère dans  $\mathcal{C}_m$  le morphisme  $\Theta_m(s)$  donné par la composition (de haut en bas) du diagramme suivant (notons que  $\Theta_m(s)$  n'est pas un simple à priori!)

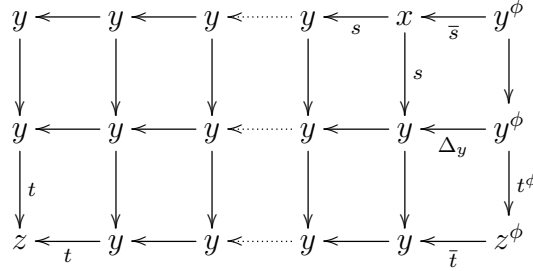
$$\begin{array}{cccccc} x & \xleftarrow{1} & x & \xleftarrow{1} & x & \cdots & x & \xleftarrow{1} & x & \xleftarrow{\Delta_x} & x^\phi \\ \downarrow s & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow s^\phi \\ y & \xleftarrow{s} & x & \xleftarrow{1} & x & \cdots & x & \xleftarrow{1} & x & \xleftarrow{\bar{s}} & y^\phi \\ \downarrow 1 & & \downarrow s & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ y & \xleftarrow{1} & y & \xleftarrow{s} & x & \cdots & x & \xleftarrow{1} & x & \xleftarrow{\bar{s}} & y^\phi \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y & \xleftarrow{1} & y & \xleftarrow{1} & y & \cdots & x & \xleftarrow{1} & x & \xleftarrow{\bar{s}} & y^\phi \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow s & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ y & \xleftarrow{1} & y & \xleftarrow{1} & y & \cdots & y & \xleftarrow{s} & x & \xleftarrow{\bar{s}} & y^\phi \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow s & & \downarrow 1 \\ y & \xleftarrow{1} & y & \xleftarrow{1} & y & \cdots & y & \xleftarrow{1} & y & \xleftarrow{\Delta_y} & y^\phi \end{array}$$

Il convient à présent de montrer que  $\Theta_m$  est bien un foncteur, comme  $\mathcal{C}$  est engendrée par son germe des simples, il suffit de montrer que, si l'on a une équation de simples  $ts = u$  dans  $\mathcal{C}$ , alors  $\Theta_m(t)\Theta_m(s) = \Theta_m(u)$ . Ce calcul est sans surprise, mais va nécessiter des notations

(et certaines libertés) : on notera  $s_i$  tout morphisme dans  $\mathcal{C}_m$  donné par des identité en toute position, sauf un  $s$  en  $i$ -ème position, de sorte que

$$\Theta_m(s) = s_1 \cdots s_m$$

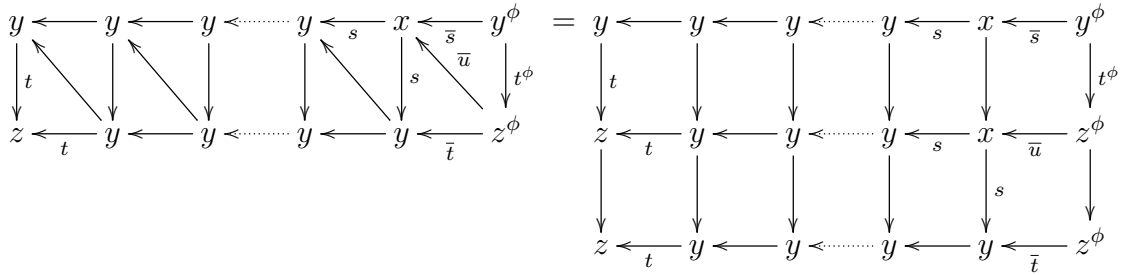
on omettra volontairement les domaines/codomains de tels morphismes Pour calculer la composée  $\Theta_m(t)\Theta_m(s)$ , on commence par considérer la composée  $t_ms_1$  :



Cette composée est un simple, en effet on a

$$ts = u \Rightarrow ts\bar{u} = \Delta \Rightarrow s\bar{u} = \bar{t}$$

d'où un diagramme commutatif



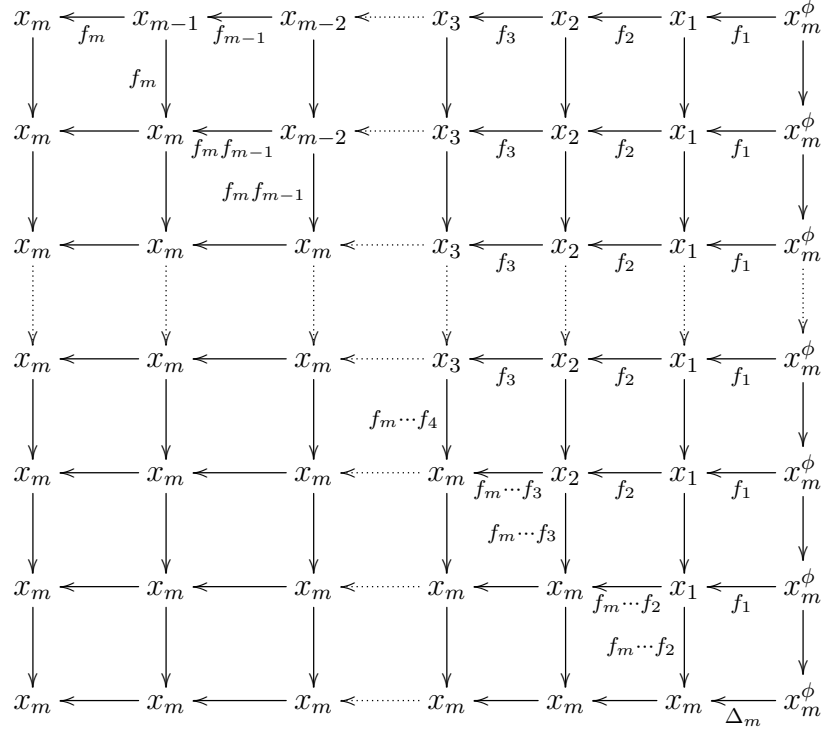
autrement dit, on a  $t_ms_1 = s_1t_m$ , on obtient de même  $t_js_i = s_it_j$  pour  $i \neq j$ , et  $t_is_i = u_i$  par définition de  $u$ , ce qui donne bien la fonctorialité de  $\Theta_m$ .

Notre abus de notations n'est pas couteux : ayant fixé un  $m$ -uplet  $(s_m, \dots, s_1)$  dont on sait qu'il donne un simple de  $\mathcal{C}_m$ , la connaissance de son domaine permet de déduire son codomaine, toutes les permutations que nous avons effectué n'ont pas modifié l'objet de départ  $(1, \dots, 1, \Delta_x)$ , on en déduit le codomaine de  $u_1$ , et récursivement que toute la suite  $u_m, \dots, u_1$  fait bien intervenir les sommets attendus.

**Proposition 2.4.12.** *Les foncteurs  $\kappa_m$  et  $\Theta_m$  induisent des équivalences entre  $\mathcal{G}_m$  et  $\mathcal{G}$ , quasi-inverses l'une de l'autre.*

*Démonstration.* La preuve proposée dans [Bes2] repose sur de lourds arguments topologiques, auxquels nous préférons la preuve plus directe de [DDGKM, chapter XIV, proposition 1.6]. Par construction, nous avons déjà  $\kappa_m\Theta_m = 1_{\mathcal{C}}$ , pour la réciproque, nous construisons une transformation naturelle  $\text{Dil}_m : \Theta_m\kappa_m \rightarrow 1_{\mathcal{C}_m}$  : soit  $f = (f_m, \dots, f_1) \in |\mathcal{C}_m|$  avec  $f_m \in$

$\mathcal{C}(-, x)$ , on définit  $\text{Dil}_m$  comme la composition (de haut en bas) suivante :



Il suffit bien-sûr de montrer la naturalité de  $\text{Dil}_m$  par rapport aux simples, naturalité qui découle de manipulations similaires à celles effectuées pour montrer la functorialité de  $\Theta_m$ . On a donc une transformation naturelle  $1_{\mathcal{C}_m} \rightarrow \Theta_m \kappa_m$ , qui devient un isomorphisme naturel dans  $\mathcal{G}_m$  (dans lequel tous les morphismes  $\text{Dil}_m$  sont inversibles par définition).  $\square$

## 2.5 Interlude simplicial

Les ensembles simpliciaux prennent une importance croissante dans l'étude des catégories (un parachèvement de cette importance est la théorie moderne des  $\infty$ -catégories), et les catégories de Garside n'échappent pas à la règle, et à nouveau les morphismes simples joueront un rôle prépondérant.

### 2.5.1 Ensembles simpliciaux, nerfs et revêtements

Nous ne ferons pas de rappels techniques sur les ensembles/complexes simpliciaux ([Val] donne une excellente introduction à ces notions, et contient tout ce que nous utiliserons ici), on gardera quand même en mémoire que l'on a des paires adjointes

$$\Delta \mathbf{Cpx} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \Delta \mathbf{Ens} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \mathbf{Top}$$

La paire de droite étant donnée par la réalisation géométrique, et par les simplexes singuliers. Ceci nous permet de dire que la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est homéomorphe à la réalisation géométrique du complexe simplicial donné par ses simplexes non dégénérés.

Considérons une catégorie  $\mathcal{C}$ , on pose  $\mathcal{NC}_n$  l'ensemble des suites de  $n$  morphismes composables dans  $\mathcal{C}$ , autrement dit les suites  $(f_n, \dots, f_1)$  de morphismes donnant un diagramme

$$x_n \xleftarrow{f_n} x_{n-1} \xleftarrow{f_{n-1}} x_{n-2} \xleftarrow{\dots} x_2 \xleftarrow{f_2} x_1 \xleftarrow{f_1} x_0$$

avec la convention que  $\mathcal{NC}_0 = |\mathcal{C}|$  l'ensemble des objets de  $\mathcal{C}$ .

On munit les  $\mathcal{NC}_n$  d'une structure d'ensemble simplicial en posant :

- La  $i$  ème face est donnée en 'supprimant' le  $i$ -ème objet et en composant/supprimant les morphismes touchés :
  - \*  $d_0(f_n, \dots, f_1) = (f_n, \dots, f_2)$
  - \*  $d_i(f_n, \dots, f_1) = (f_n, \dots, f_{i+2}, f_{i+1}f_i, f_{i-1}, \dots, f_1)$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$
  - \*  $d_n(f_n, \dots, f_1) = (f_{n-1}, \dots, f_1)$ .
- Les dégénérescences sont données en insérant des identités a une position donnée.
  - \*  $s_0(f_n, \dots, f_1) = (f_n, \dots, f_1, 1_{x_0})$
  - \*  $s_i(f_n, \dots, f_1) = (f_n, \dots, f_{i+1}, 1_{x_i}, f_i, \dots, f_1)$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$
  - \*  $s_n(f_n, \dots, f_1) = (1_{x_n}, f_n, \dots, f_1)$

*Remarque 2.5.1.* Le nerf d'une catégorie contient la donnée d'une présentation de cette dernière. En effet, les éléments de  $\mathcal{NC}_1$  sont les morphismes de  $\mathcal{C}$ , dont les faces  $d_1$  et  $d_0$  donnent respectivement le domaine et le codomaine, la donnée de  $\mathcal{NC}_0$  et  $\mathcal{NC}_1$  est donc celle d'un graphe, le graphe sous-jacent à  $\mathcal{C}$ .

À présent, considérant un 2-simplexe  $z \xleftarrow{g} y \xleftarrow{f} x$  de  $\mathcal{NC}$ , les faces en sont respectivement

$$d_0 : z \xleftarrow{g} y \quad d_1 : z \xleftarrow{gf} x \quad d_2 : y \xleftarrow{f} x$$

ainsi, toutes les relations de la forme  $gf = g.f$  (qui suffisent à donner une présentation de  $\mathcal{C}$ ) sont encodées dans les 2-simplexes, moralement avec la formule ' $d_1 = d_0 \circ d_2'$ '

Il est bien connu que la réalisation géométrique du nerf d'un groupe (vu comme un groupoïde) fournit un modèle pour le classifiant de ce groupe. On a un résultat similaire pour les groupoïdes, et surtout, dans le cas d'un groupoïde de Garside, on donnera un sous-ensemble simplicial du nerf, possédant la même propriété. Pour ce faire, on adoptera un point de vue motivé par la théorie des revêtements.

**Définition 2.5.2.** Soit  $X$  un ensemble simplicial, on appelle **groupoïde 0-squelettique fondamental** de  $X$  le groupoïde dont les objets sont les sommets de  $X$ , et les morphismes les classes d'homotopies de chemin dans  $|X|$ .

Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde, un  $K(\mathcal{G}, 1)$  **simplicial** est un ensemble simplicial  $X$ , munit d'une bijection  $|\mathcal{G}| \simeq X_0$ , qui induit un isomorphisme entre  $\mathcal{G}$  et le groupoïde 0-squelettique fondamental de  $X$ , et tel que les groupes d'homotopie supérieure de  $X$  soient triviaux.

On remarque que cette définition garde un sens même quand  $\mathcal{G}$  n'est pas connexe.

**Lemme 2.5.3.** Soient  $\mathcal{G}$  un groupoïde connexe,  $a \in |\mathcal{G}|$ ,  $X$  un ensemble simplicial tel que

- $|X|$  est contractile.
- Le groupe d'automorphisme  $\mathcal{G}_a$  agit librement (et simplicialement) sur  $X$ .

Alors le quotient  $|X/\mathcal{G}_a|$  est un  $K(\mathcal{G}, 1)$  simplicial.

*Remarque 2.5.4.* On rappelle que le nerf est une construction fonctorielle, et que le foncteur envoyant une petite catégorie sur la réalisation géométrique de son nerf est un foncteur de 2-catégories : il envoie transformation naturelle sur homotopie entre applications continues.

On fixe un groupoïde  $\mathcal{G}$ , et  $a \in |\mathcal{G}|$  (on pense à  $a$  comme à un 'point base' pour  $\mathcal{G}$ ). On considère  $\tilde{\mathcal{G}}_a$  la catégorie au-dessus de  $a$ , ses objets sont les éléments de  $\mathcal{G}(-, a)$ , et tout couple  $f, g$  possède un unique morphisme  $f \rightarrow g$ , donné par  $g^{-1}f$ .

Cette catégorie vient naturellement équipée d'un foncteur d'oubli  $p : \tilde{\mathcal{G}}_a \rightarrow \mathcal{G}$  envoyant un objet  $f \in \mathcal{G}(x, a)$  sur son domaine  $x$ , un morphisme  $g^{-1}f : f \rightarrow g$  sur  $g^{-1}f$  vu comme morphisme de  $\mathcal{G}$ .

Cette construction ne 'voit' que la composante connexe de  $a$  dans  $\mathcal{G}$ , en effet un objet de  $\tilde{\mathcal{G}}_a$  ne peut avoir comme domaine qu'un élément de cette composante connexe.

**Lemme 2.5.5.** *La réalisation géométrique de  $\mathcal{N}\tilde{\mathcal{G}}_a$  est contractile.*

*Démonstration.* Par construction,  $\tilde{\mathcal{G}}_a$  est équivalente au groupe trivial, on conclut par la remarque 2.5.4 :  $|\mathcal{N}\tilde{\mathcal{G}}_a|$  est homotopiquement équivalent à la réalisation du nerf du groupe trivial : le point.  $\square$

Soit  $f : x_n \rightarrow a$  un objet de  $\tilde{\mathcal{G}}_a$ , et  $g := (g_n, \dots, g_1)$  un  $n$ -simplexe de  $\mathcal{N}\mathcal{G}$  tel que le but de  $g_n$  soit  $x_n$  :

$$a \xleftarrow{f} x_n \xleftarrow{g_n} x_{n-1} \xleftarrow{g_{n-1}} x_{n-2} \xleftarrow{\dots} x_2 \xleftarrow{g_2} x_1 \xleftarrow{g_1} x_0$$

il existe un unique  $n$ -simplexe  $(h_n, \dots, h_1)$  de  $\mathcal{N}\tilde{\mathcal{G}}_a$  tel que  $h_i = g_i$ , et tel que le départ de  $h_1$  dans  $\tilde{\mathcal{G}}_a$  soit  $f$  ( $h_i$  est donné comme l'unique morphisme dans  $\mathcal{N}\tilde{\mathcal{G}}_a$  de  $f g_n \dots g_{i+1}$  vers  $f g_n \dots g_i$ ).

Le simplexe  $(h_n, \dots, h_1)$  sera noté  $f[g_n] \dots [g_1]$ , ceci permet de définir une action de  $\mathcal{G}_a$  sur  $\mathcal{N}\tilde{\mathcal{G}}_a$  en posant

$$g \cdot f[g_n] \dots [g_1] = g f[g_n] \dots [g_1]$$

cette action est libre. De plus, on a un isomorphisme  $f[g_n] \dots [g_1] \mapsto (g_n, \dots, g_1)$  entre  $\mathcal{N}\tilde{\mathcal{G}}_a/\mathcal{G}_a$  et  $\mathcal{N}\mathcal{G}$ , faisant par le lemme 2.5.3 de  $\mathcal{N}\mathcal{G}$  un  $K(\mathcal{G}, 1)$  simplicial.

## 2.5.2 Nerf de Garside

Après ces quelques généralités, nous pouvons en venir au rapport(s) qu'entretiennent les structures de Garside avec les ensembles simpliciaux.

On pose  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside,  $\mathcal{G}$  son groupoïde de Garside associé.

Nous avons en particulier vu que le nerf d'une catégorie en donne une présentation et un classifiant dans le cas d'un groupoïde. Bien-sûr, ces informations sont standards et ne font pas appel aux structures de Garside. En revanche, dans ce cas particulier, on peut considérer des ensembles simpliciaux 'plus petits' que le nerf tout entier, et qui possèdent les même propriété.

Nous avons besoin de fixer certaines notations : on utilisera dans cette section, pour des raisons de chiralité, la forme normale droite plutôt que la forme normale gauche : pour  $f \in \mathcal{C}$ , on définit  $\beta(f) := f \wedge_D \Delta$ , on peut alors, comme à la section 2.2, définir une forme normale  $f = f_r \dots f_1$ , où  $f_1 = \beta(f)$ . De même si  $f \in \mathcal{G}$ , il existe un unique couple  $(g, m) \in \mathcal{C} \times \mathbb{Z}$  tel que  $f = g\Delta^m$  avec  $g \not\sim \Delta$ .

On commence par voir que  $\tilde{\mathcal{G}}_a$  est un groupoïde de Garside : posons  $\tilde{\mathcal{C}}$  la sous catégorie de  $\tilde{\mathcal{G}}_a$  formée des morphismes dont l'image par le foncteur  $p$  se trouve dans  $\mathcal{C}$ , et  $\tilde{\mathcal{S}}$  les morphismes envoyés dans  $\mathcal{S}$  par  $p$ .

On voit sans peine que  $\tilde{\mathcal{S}}$  forme un germe de Garside, induisant une structure de Garside sur  $\tilde{\mathcal{C}}$ , avec

- Pour  $f : x \rightarrow a \in |\tilde{\mathcal{C}}|$ ,  $f^{\tilde{\phi}} := f\Delta_x$
- Pour  $g^{-1}f : f \rightarrow g$  un  $\tilde{\mathcal{C}}$ -morphisme, on pose  $(g^{-1}f)^{\tilde{\phi}} := (g^{\tilde{\phi}})^{-1}f^{\tilde{\phi}}$ .
- Pour  $f : x \rightarrow a \in |\tilde{\mathcal{C}}|$ ,  $\tilde{\Delta}_f = f\Delta_x \xrightarrow{\Delta_x} f$

On considère à présent  $\Gamma$  le graphe défini comme suit :

- Les sommets de  $\Gamma$  sont les éléments de  $\mathcal{G}(-, a)$ .
- Les arêtes correspondent à la composition à droite par les simples : pour deux morphismes  $f, g$ , il y a une arête de  $f$  vers  $g$  si et seulement si  $g = fs$  où  $s$  est un simple, autrement dit si  $f^{-1}g$  est un simple.

Dans le graphe non orienté associé à  $\Gamma$ , il y a une arête entre  $f$  et  $g$  si et seulement si  $f^{-1}g$  ou  $g^{-1}f$  est simple.

Ce graphe nous intéresse moins que son complexe de drapeau : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathcal{X}_n$  l'ensemble des  $(n+1)$ -uplets de sommets de  $\Gamma$  formant dans  $\Gamma$  un graphe complet  $K_n$ ,  $\mathcal{X}_0$  est ainsi formé des sommets de  $\Gamma$ ,  $\mathcal{X}_1$  de ses arêtes,  $\mathcal{X}_2$  des 'triangles' dans  $\Gamma$  etc...

Soit  $\{f_0, \dots, f_n\} \in \mathcal{X}_n$ , pour  $i \neq j$ , l'un des morphismes  $f_i^{-1}f_j, f_j^{-1}f_i$  est simple, et un seul, en effet ils sont inverses l'un de l'autre, et ne peuvent être dans  $\mathcal{C}$  simultanément, car  $\mathcal{C}$  n'a pas d'inversibles non triviaux. On a donc  $f_i \prec f_j$  si  $f_i^{-1}f_j \in \mathcal{S}$ , et  $f_j \prec f_i$  dans le cas contraire, autrement dit la relation  $\prec$  donne un ordre total sur  $\{f_0, \dots, f_n\}$ , on peut alors réordonner les  $f_i$  de sorte à avoir  $f_i \prec f_j$  si et seulement si  $i \leq j$  : un  $n$ -simplexe est alors donné par une suite  $\{f_0 \prec \dots \prec f_{n-1} \prec f_n\}$ , de plus, comme  $f_n$  et  $f_0$  sont reliés par une arête, on a  $f_0^{-1}f_n \in \mathcal{S}$  ou  $f_n^{-1}f_0 \in \mathcal{S}$ , mais  $f_0 \prec f_n$  force le second cas : donc si  $f_{i+1} = f_i s_i$ , alors le produit  $s_0 \dots s_{n-1}$  est lui même simple, et on a  $f_n \prec f_0 \Delta$ .

Cet notion d'ordre total sur les simplexes permet de munir  $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'une structure de complexe simplicial : c'est le complexe de drapeau associé au graphe  $\Gamma$ . On rappelle que, de façon générale, un complexe de drapeau (et sa réalisation géométrique) sont uniquement déterminés par leur 1-squelette (= le graphe associé, on identifiera donc un graphe au 1-squelette de son complexe de drapeaux).

**Proposition 2.5.6.** *La réalisation géométrique de  $\mathcal{X}$  est contractile.*

Le théorème 3.1 de [CMW] prouve le résultat dans le cas d'un groupe, on peut adapter la preuve sans difficulté au cas des groupoïdes :

Pour  $f \in \mathcal{G}(-, a)$ , on note  $G(f)$  la forme normale droite de  $f$ , retranchée des puissances de  $\Delta$ , de sorte que le corollaire 2.2.15 (ou plutôt la version adaptée aux formes normales droites) affirme l'existence d'un unique  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $f = G(f)\Delta^m$  et  $g \not\sim \Delta$ .

**Lemme 2.5.7.** *Soit  $s_n \dots s_1$  une forme normale droite dans  $\mathcal{C}$ , où  $s_1 \neq \Delta$ . Pour  $t \in \mathcal{S}$ , la forme normale gloutonne de  $s_n \dots s_1 t$  se termine par au plus  $\Delta^1$ .*

*Démonstration.* Il est clair que la composition par  $t$  ne peut introduire que  $\Delta^0$  ou  $\Delta^1$ , il suffit donc de montrer que  $s_1 \dots s_n t \not\sim \Delta^2$ . Si  $s_1 \dots s_n t \succ \Delta^2$ , alors il existe un  $b$  tel que

$$b\Delta^2 = s_n \dots s_1 t \Leftrightarrow \Delta b^\phi \Delta = s_n \dots s_1 t \Leftrightarrow \Delta \phi(b)\hat{t} = s_1 \dots s_n$$

donc  $\Delta \prec s_n \dots s_1$  et  $s_n \dots s_1 \succ \Delta$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $s_n \dots s_1$  est une forme normale gloutonne.  $\square$

Pour montrer la proposition 2.5.6, on montre que la réalisation géométrique de  $\mathcal{X}$  peut s'écrire comme un produit de deux espaces, produit qui est d'ailleurs la réalisation géométrique d'un autre complexe de drapeaux.

On considère le sous-complexe simplicial de  $\mathcal{X}$ , noté  $\check{\mathcal{X}}$ , induit par les sommets de  $\Gamma$  ne faisant pas apparaître  $\Delta$  dans leur forme normale, autrement dit les  $f \in \mathcal{G}(-, a)$  tels que  $G(f)$  est la forme normale de  $f$ . Les arêtes du graphe associés correspondent à la composition à droite par des éléments de  $S \setminus \Delta$ .

Ainsi, un  $n + 1$ -simplexe de  $\check{\mathcal{X}}$  est une suite  $\{f_0 \prec \cdots f_{n-1} \prec f_n\}$  avec  $f_i \not\prec \Delta$  et  $f_n \prec f_0\Delta$ .

**Lemme 2.5.8.** *La réalisation géométrique  $|\mathcal{X}|$  est homéomorphe à  $|\check{\mathcal{X}}| \times \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* On munit  $\mathbb{R}$  de la structure simpliciale où le sommets sont les entiers (et les arêtes sont les segments  $[n, n + 1]$ ).

Soit  $f$  un sommet de  $\mathcal{X}$ , il s'écrit en forme normale  $f = G(f)\Delta^m$ , on définit  $\pi_\Delta := m$  et  $\pi_+(f) := G(f)$ , ce sont respectivement des sommets de  $\check{\mathcal{X}}$  et de  $\mathbb{R}$ . Comme  $\mathcal{X}$ ,  $\check{\mathcal{X}}$  et  $\mathbb{R}$  sont des complexes de drapeaux, pour montrer que  $\pi_\Delta$  et  $\pi_+$  induisent des applications continues  $|\mathcal{X}| \rightarrow |\check{\mathcal{X}}|$  et  $|\mathcal{X}| \rightarrow \mathbb{R}$ , il suffit de montrer qu'elles envoient les arêtes de  $\mathcal{X}$  sur des arêtes ou des sommets de leurs buts. On fixe donc une arête  $e = \{a\Delta^n, a\Delta^n s\}$  où  $a \in \mathcal{C}$ ,  $a \not\prec \Delta$  et  $s \in \mathcal{S}$ , on distingue deux cas (selon le lemme 2.5.7) :

- Si  $a\phi^{-1}(s) \not\prec \Delta$ , alors la forme normale de  $a\Delta^n s$  est  $a\phi^{-1}(s)\Delta^n$ , auquel cas  $\pi_\Delta(a\Delta^n s) = n$  et  $\pi_+(a\Delta^n s) = a\phi^{-1}(s)$ , et l'arête  $e$  est envoyée sur un sommet de  $\mathbb{R}$  et une arête de  $\check{\mathcal{X}}$  respectivement.
- Si  $a\phi^{-1}(s) \succ \Delta$ , alors  $a \succ \widehat{\phi^{-1}(s)}$  et  $a = b\widehat{\phi^{-1}(s)}$  et la forme normale de  $a\Delta^n s$  est donnée par  $b\Delta^{n+1}$ , on a alors  $\pi_\Delta(a\Delta^n s) = n + 1$  et  $\pi_+(a\Delta^n s) = b$ , et l'arête  $e$  est envoyée sur un sommet de  $\mathbb{R}$  et une arête de  $\mathcal{X}$  (sauf si  $s = \Delta$ ).

On obtient donc une application  $\pi = (\pi_\Delta, \pi_+) : |\mathcal{X}| \rightarrow \mathbb{R} \times |\check{\mathcal{X}}|$ , pour y construire une réciproque, on va exposer  $\mathbb{R} \times |\check{\mathcal{X}}|$  comme la réalisation géométrique d'un complexe de drapeaux. Les cellules de  $\mathbb{R} \times |\check{\mathcal{X}}|$  sont de la forme  $\sigma \times I$ , où  $\sigma$  est un  $k$ -simplexe de  $\check{\mathcal{X}}$  et  $I$  est une arête ou un sommet de  $\mathbb{R}$ , le simplexe  $\sigma$  correspond à une suite  $\{f_0 \prec \cdots f_{k-1} \prec f_k\}$ , avec  $f_i \not\prec \Delta$  et  $f_k \prec f_0\Delta$ , si  $I = [n, n + 1]$ , on associe à la cellule  $\sigma \times I$  le  $k + 1$  simplexe formel donné par

$$\{\{f_0\Delta^n \prec \cdots \prec f_k\Delta^n \prec f_0\Delta^{n+1}\}, \dots, \{f_k\Delta^n \prec f_0\Delta^{n+1} \prec \cdots \prec f_{k-1}\Delta^{n+1} \prec f_k\Delta^{n+1}\}\}$$

Ceci donne un complexe de drapeau, que l'on notera  $\check{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}$ , un sommet de ce complexe provient d'une 0-cellule de  $|\check{\mathcal{X}}| \times \mathbb{R}$  autrement dit est formellement de la forme  $\{\{f\Delta^n\}\}$  : il y a une bijection entre les 0 simplexe de  $\check{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}$  et ceux de  $\mathcal{X}$  (dont la réciproque nous a servi à définir  $\pi$ ), on cherche à prolonger cette bijection en une application  $\omega : |\check{\mathcal{X}}| \times \mathbb{R} \rightarrow |\mathcal{X}|$ . On utilise que  $\check{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}$  est un complexe de drapeau, dans ce complexe, il y a une arête entre  $(f, n)$  et  $(g, m)$  si  $|m - n| \leq 1$  et  $f\Delta^n \prec g\Delta^m \prec f\Delta^{n+1}$  ou  $g\Delta^m \prec f\Delta^n \prec g\Delta^{m+1}$ . Comme ces deux cas sont symétriques, on peut supposer être dans le premier cas, on a alors  $m = n$  ou  $m = n + 1$ .

- Si  $m = n$  alors on a  $f \prec g \prec f\Delta$  et  $g = fs$  pour un  $s \in \Delta$ , ainsi  $(g, m)$  est envoyé sur le sommet associé à  $as\Delta^n = a\Delta^n s^{\phi^n}$ , qui est relié au sommet  $a\Delta^n$  par  $s^{\phi^n}$ .
- Si  $m = n + 1$  alors on a  $f \prec g\Delta \prec f\Delta$ , donc  $g = fs^{-1}$  pour un  $s \in \mathcal{S}$ , donc  $g\Delta = f\bar{s}$ , et  $(g, m)$  est envoyé sur le sommet  $a\bar{s}\Delta^n$ , qui est bien relié à  $a\Delta^n$ .

Ainsi,  $\omega$  donne bien une application continue  $\mathbb{R} \times |\check{\mathcal{X}}| \rightarrow |\mathcal{X}|$  et on a bien l'homéomorphisme voulu.  $\square$

Il reste, pour montrer la proposition 2.5.6 à montrer le lemme suivant :

**Lemme 2.5.9.** *La réalisation géométrique  $|\check{\mathcal{X}}|$  est contractile.*

*Démonstration.* On donne la preuve suggérée par [Best, remarque 3.10] : Soit  $f = f_r \cdots f_1$  un sommet de  $\check{\mathcal{X}}$  écrit en forme normale droite (avec donc  $f_1 \neq \Delta$ ), on définit  $\phi(f) := f_r \cdots f_2 = f\beta(f)^{-1}$  (et  $\phi(1_a) := 1_a$ ). On montre que  $\phi(f)$  s'étend en une application simpliciale : on considère une arête  $\{f, fs\}$  de  $\check{\mathcal{X}}$ , on a

$$\phi(fs) = fs\beta(fs)^{-1} = \phi(f)\beta(f)s\beta(\beta(f)s)^{-1}$$

on montre donc que  $\beta(f)s\beta(\beta(f)s)^{-1}$  est simple, on pose  $f_1 := \beta(f)$  et  $t = \beta(f_1s)$ , on a

$$f_1st^{-1}\widehat{t^{-1}\phi^{-1}(s)f_1} = f_1s\Delta^{-1}\widehat{\phi^{-1}(s)f_1} = f_1\Delta^{-1}\phi^{-1}(s)\widehat{\phi^{-1}(s)f_1} = \Delta$$

Donc  $\phi$  induit bien une application  $|\check{\mathcal{X}}| \rightarrow |\check{\mathcal{X}}|$ , homotope à l'identité car  $\phi(f)$  et  $f$  sont toujours reliés par une arête, on constate de plus que tout sous-graphe fini de  $\check{\mathcal{X}}$  est envoyé sur  $\{1_a\}$  par une itérée assez grande de  $\phi$ , ce qui suffit pour conclure.  $\square$

On a ainsi obtenu que  $|\mathcal{X}| \simeq \mathbb{R} \times |\check{\mathcal{X}}|$  est contractile, ce qui va nous permettre de construire un classifiant agréable d'un groupoïde de Garside :

**Définition 2.5.10.** Soit  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside, un simplexe  $(f_n, \dots, f_1) \in \mathcal{NC}$  est dit **simple** si le produit  $f_n \cdots f_1$  est simple.

L'ensemble des simplexes simples forme un sous-ensemble simplicial de  $\mathcal{NC}$ , noté  $\mathcal{NS}$  et appelé **nerf de Garside** de  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$ .

Le nerf de Garside forme bien un ensemble simplicial car la définition de simplexe simple est conservée par les faces et dégénérescences du nerf  $\mathcal{NC}$ .

On constate que le nerf  $\mathcal{NS}$  forme un sous- $\mathcal{G}_a$  ensemble de  $\mathcal{NG}_a$

**Théorème 2.5.11.** *La réalisation géométrique du nerf de Garside  $\mathcal{NS}$  est contractile. Par conséquent,  $\mathcal{NS}$  est un  $K(\mathcal{G}, 1)$  simplicial.*

*Démonstration.* On considère l'application  $f[g_n] \cdots [g_1] \mapsto \{f, fg_n, fg_ng_{n-1}, \dots, fg_n \cdots g_1\}$ , elle donne une bijection entre les simplexes non dégénérés de  $\mathcal{NS}$  et les  $n$  simplexes de  $\mathcal{X}$ . Cette bijection est compatible aux faces et aux dégénérescences, et induit donc un homéomorphisme entre les réalisations géométriques de  $\mathcal{NS}$  et de  $\mathcal{X}$ .

L'isomorphisme  $\mathcal{NG} \simeq \mathcal{NG}_a/\mathcal{G}_a$  se restreint en un isomorphisme  $\mathcal{NS} \simeq \mathcal{NS}/\mathcal{G}_a$ , ce qui donne le résultat souhaité.  $\square$

Enfin, pour étudier la question des présentations de catégories de Garside, on introduit la notion d'ensemble de Garside, qui dans un sens est synonyme du nerf des simples, mais dont l'écriture sera plus agréable pour décrire les catégories divisées.

**Définition 2.5.12.** Soit  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside,  $\mathcal{S}$  l'ensemble de ses éléments simples. L'**ensemble de Garside** de  $\mathcal{C}$  est la collection

$$D(\Delta) := (D_n(\Delta))_{n \in \mathbb{N}^*}$$

où

$$D_n(\Delta) := \{(f_n, \dots, f_1) \in \mathcal{S}^n \mid f_n \cdots f_1 = \Delta\}$$



**Lemme 2.5.13.** (*Application de Kreweras*)

Pour  $n \geq 1$ , l'application

$$\begin{aligned} (\mathcal{NS})_{n-1} &\longrightarrow D_n(\Delta) \\ (f_{n-1}, \dots, f_1) &\longmapsto (f_{n-1}, \dots, f_1, (f_{n-1} \cdots f_1)^{-1} \Delta) \end{aligned}$$

est bijective.

Ce lemme permet d'induire à  $D(\Delta)$  une structure d'ensemble simplicial (translaté) :

- La  $i$ -ème face  $D_n(\Delta) \rightarrow D_{n-1}(\Delta)$  (qui correspond à la  $i - 1$ -ème face  $\mathcal{NS}_{n-1} \rightarrow \mathcal{NS}_{n-2}$ ) est donné comme suit
  - \*  $d_1(f_n, \dots, f_1) = (f_n, \dots, f_3, f_2 f_1)$
  - \*  $d_i(f_n, \dots, f_1) = (f_n, f_{n-1}, \dots, f_{i+1} f_i, \dots, f_1)$  pour  $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$
  - \*  $d_n(f_n, \dots, f_1) = (f_n, f_{n-1}, \dots, f_1 f_n^\phi)$
- La  $i$ -ème dégénérescence  $D_n(\Delta) \rightarrow D_{n+1}(\Delta)$  (qui correspond à la  $i - 1$ -ème dégénérescence  $\mathcal{NS}_{n-1} \rightarrow \mathcal{NS}_n$ ) est donnée comme suit :
  - \*  $s_1(f_n, \dots, f_1) = (f_n, \dots, 1, f_1)$
  - \*  $s_i(f_n, \dots, f_1) = (f_n, \dots, f_{i+1}, 1, f_i, \dots, f_1)$  pour  $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$
  - \*  $s_n(f_n, \dots, f_1) = (1, f_n, f_{n-1}, \dots, f_1)$

L'ensemble  $D(\Delta)$  est également équipé d'une application remarquable, dite 'de vissage' :

$$\rho : (f_n, \dots, f_1) \mapsto (f_{n-1}, \dots, f_1, f_n^\phi)$$

Cette application possède des compatibilités remarquables avec les faces et les dégénérescences de  $D$ , que nous ne développerons pas plus avant ici.

*Remarque 2.5.14.* La structure de  $\mathcal{C}$  peut se déduire de l'ensemble de Garside  $D$ , plus précisément, celui-ci contient la donnée du germe des simples de  $\mathcal{C}$  :

- L'ensemble  $D_1(\Delta)$  est littéralement la famille  $\Delta$ , en bijection avec les objets de  $\mathcal{C}$
- L'ensemble  $D_2(\Delta)$  est en bijection avec  $\mathcal{NS}_1 = \mathcal{S}$ . Les faces  $d_1$  et  $d_2$  donnent l'arrivée et le départ (respectivement) de chaque simple : soit  $s : x \rightarrow y$  et  $\bar{s} : y^\phi \rightarrow x$  tel que  $s\bar{s} = \Delta$ , de sorte que  $(s, \bar{s}) \in D_2(\Delta)$ , on a

$$d_1(s, \bar{s}) = s\bar{s} = \Delta_y \quad \text{et} \quad d_2(s, \bar{s}) = \bar{s}s^\phi = \Delta_x$$

- L'ensemble  $D_3(\Delta)$  nous donne les relations définissant le germe : si  $s, t$  sont deux simples dont le produit  $ts = u$  est lui même simple, on a  $(t, s, \bar{u}) \in D_3(\Delta)$ , avec

$$d_1(t, s, \bar{u}) = (t, s\bar{u}) = (t, \bar{t}) \quad d_2(t, s, \bar{u}) = (ts, \bar{u}) = (u, \bar{u}) \quad d_3(t, s, \bar{u}) = (s, \bar{u}t^\phi) = (s, \bar{s})$$

autrement dit, la relation  $ts = u$  est encodée dans  $(t, s, \bar{u})$  (et ses faces), avec le slogan ' $d_2 = d_1 \circ d_3$ ' (qui rappelle commodément la remarque 2.5.1).

Bien-sûr, tout 3-simplexe exprime une relation de définition du germe  $\mathcal{S}$ .

Cette dernière remarque pourrait passer pour un simple tour de passe-passe simplicial sans grand intérêt : on sait après tout déjà que le germe présente la catégorie  $\mathcal{C}$ . La vraie nouveauté est qu'il est facile de déterminer les ensembles de Garside des catégories divisées associées à  $\mathcal{C}$  à partir de  $D(\Delta)$ .

**Proposition 2.5.15.** Soit  $(\mathcal{C}, \phi, \Delta)$  une catégorie de Garside et  $m \geq 1$ , l'ensemble de Garside de  $\mathcal{C}_m$  est donné par

$$\forall n \geq 1, D_n(\Delta_m) = \sqrt[m]{D_n}(\Delta) = D_{nm}(\Delta)$$

la structure simpliciale étant donnée par

- Pour  $n \geq 2$ , la face  $\sqrt[m]{d}_i : D_{nm}(\Delta) \rightarrow D_{nm-m}(\Delta)$  est donnée par la composition

$$\sqrt[m]{d}_i = d_i d_{i+n} \cdots d_{i+(m-1)n}$$

- Pour  $n \geq 1$ , la dégénérescence  $\sqrt[m]{s}_i : D_{nm}(\Delta) \rightarrow D_{nm+m}(\Delta)$  est donnée par la composition

$$\sqrt[m]{s}_i = s_i s_{i+n} \cdots s_{i+(m-1)n}$$

- L'application de vissage est la restriction de celle de  $D(\Delta)$ .

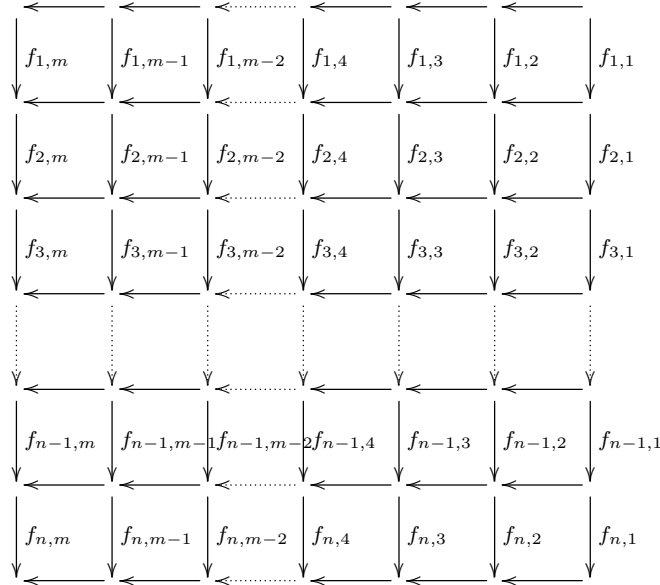
*Démonstration.* Le point principal est simplement une réinterprétation de notre définition de catégorie divisée via les ensembles de Garside : On a défini un objet de  $\mathcal{C}_m$  comme un élément de  $D_m(\Delta)$  (c'est à dire une  $m$ -subdivision de  $\Delta$ ), on sait de plus qu'un tel  $m$ -uplet, vu comme morphisme simple dans  $\mathcal{C}_m$ , est un élément de  $\Delta_m$ . Notons un élément de  $D_{nm}(\Delta)$  de la façon suivante :

$$([f_{n,m}, f_{n-1,m}, \cdots, f_{1,m}], \cdots, [f_{n,1}, \cdots, f_{1,1}])$$

on lui associe l'élément de  $D_n(\Delta_m)$  suivant :

$$([f_{n,m}, f_{n,m-1}, \cdots, f_{n,1}], \cdots, [f_{1,m}, \cdots, f_{1,1}])$$

qu'on peut visualiser dans le diagramme suivant



on s'aperçoit que l'on a bien un élément de  $D_n(\Delta_m)$  : il s'agit d'une suite de  $n$  simples de  $\mathcal{C}_m$ , dont la composition est un élément de  $\Delta_m$  (justement car on part d'un élément de  $D_{nm}(\Delta)$ , c'est cette association qui donne l'isomorphisme souhaité entre  $\sqrt[m]{D_n}(\Delta)$  et  $D_n(\Delta_m)$ , les vérifications que les faces et les dégénérescences sont bien compatibles sont des calculs immédiats.  $\square$

De cet isomorphisme on déduit la valeur de  $\phi_m$  sur les éléments de  $D_m, D_{2m}$  :

$$(f_m, \cdots, f_1)^{\phi_m} = (f_{m-1}, \cdots, f_1, f_m^\phi) \text{ et } (f_{2m}, \cdots, f_1)^{\phi_m} = (f_{2m-2}, f_{2m-3}, \cdots, f_1, f_{2m}^\phi, f_{2m-1}^\phi)$$

## Troisième partie

# Groupes de tresses complexes

Jusqu'ici, nous avons mis en place une grande quantité de prérequis techniques, qui ne doivent pas nous éloigner du but de ce travail : établir par des techniques de Garside la conjecture de [BMR] et [BM] concernant la présentation du groupe de tresse de Borchardt  $B_{31}$ . Il est donc temps à présent d'entrer dans le monde des groupes de réflexions complexes et de leurs groupes de tresses.

### 3.1 Groupes de réflexions complexes, invariants, degrés et codegrés

Cette section est avant tout présente dans un souci d'auto-suffisance de ce travail, elle est essentiellement tirée de [Mar] et [Mic], et la plupart des preuves y seront omises.

**Définition 3.1.1.** Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

On dit que  $s \in \text{Gl}(V)$  est une (pseudo-) **réflexion** si  $s$  est d'ordre fini et  $\text{Ker}(s - 1)$  est un hyperplan<sup>10</sup> de  $V$ .

Un sous-groupe fini  $W \leq \text{Gl}(V)$  est un **groupe de réflexions complexes** s'il est engendré par l'ensemble  $R := \text{Ref}(W)$  des réflexions qu'il contient.

Un groupe de réflexions  $W \leq \text{Gl}(V)$  est dit **irréductible** si l'inclusion  $W \rightarrow \text{Gl}(V)$ , vue comme représentation de  $W$ , est irréductible.

*Remarque 3.1.2.* En remplaçant  $\mathbb{C}$  par un corps  $k$ , on obtient la notion de groupe de réflexions sur un le corps  $k$ . Dans le cas particulier  $k = \mathbb{R}$ , on obtient la notion de groupe de réflexions réelles, intimement liée à la notion de groupe de Coxeter (fini).

Si l'on a  $W \leq \text{Gl}(V)$  un groupe de réflexions réelles, on peut par extension des scalaires en déduire un groupe de réflexions complexes, dit **complexifié** du groupe de réflexions réelles. Les groupes de réflexions complexes obtenus de cette manière possèdent certaines propriétés remarquables.

**Proposition 3.1.3.** Soit  $W \leq \text{Gl}(V)$  un groupe de réflexions complexes. Alors il existe une décomposition en somme directe  $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  de sous-espaces  $W$ -stables et des groupes de réflexions complexes irréductibles  $W_i \leq \text{Gl}(V_i)$  tels que

$$W = 1_{V_0} \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

*Cette décomposition est unique à permutation près des facteurs.*

Ce comportement "semi-simple" des groupes de réflexions complexes ouvre la porte à la classification des groupes de réflexions complexes : si l'on connaît "tous" les groupes de réflexions irréductibles, alors on peut en déduire le comportement de tous les groupes de réflexions complexes.

Bien-sûr, cette classification a déjà été constituée par Shephard et Todd, et on ne la reproduira pas ici.

---

10. Pour alléger certains énoncés, on s'autorisera aussi à considérer l'identité  $1_V$  comme une réflexion

**Définition 3.1.4.** Un sous-groupe  $W_0 \leq W$  est dit *parabolique* s'il existe  $E \subset V$  dont  $W_0$  est le fixateur :

$$W_0 = \{w \in W \mid w|_E = 1_E\}$$

**Théorème 3.1.5.** (Steinberg, [LT, théorème 9.44])

Si  $W_0 \leq W$  est un sous-groupe parabolique, alors  $W_0$  est engendré par  $W_0 \cap R$ , en particulier, il s'agit d'un groupe de réflexions complexes.

Dans la suite, on adoptera un point de vue issu de la géométrie algébrique, ce qui entraînera un certain nombre de constructions formelles et de résultats techniques, la plupart ne seront pas démontrés, on pourra consulter notamment [LePo].

Commençons par fixer certaines notations :

- Si  $A$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre, on notera  $\text{Spm } A$  l'ensemble de ses idéaux maximaux. De sorte que  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n = \text{Spm } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$
- Réciproquement, si  $X$  est une variété algébrique affine, on notera  $\mathcal{O}(X)$  l'algèbre de ses fonctions polynômiales sur  $X$ .
- Si  $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  est une sous-variété algébrique affine, on note  $V(X)$  l'idéal de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  formé des fonctions s'annulant sur  $X$ .
- Si  $I \triangleleft \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  est un idéal, on note  $V(I)$  la sous-variété algébrique affine de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  formée des points sur lesquels  $I$  s'annule.

On a alors, pour  $X$  une variété algébrique affine,  $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/V(X)$ .

Plus généralement, considérons  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, le choix d'une base nous donne un isomorphisme vectoriel  $V \simeq \mathbb{C}^n$  permettant de munir  $V$  d'une structure de variété algébrique, mais il existe un moyen plus intrinsèque de procéder :

On a un foncteur évident associant une  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative à son  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel sous-jacent, ce foncteur admet un adjoint à gauche, qui à un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  associe son *algèbre symétrique*.

**Lemme 3.1.6.** On a une identification naturelle entre  $V$  et  $\text{Spm } S^*$  où  $S^*$  est l'algèbre symétrique sur le dual  $V^*$  de  $V$ .

*Démonstration.* Un idéal maximal de  $S^*$  est noyau d'un morphisme d'anneaux surjectif  $S^* \rightarrow k$  où  $k$  est un corps. Un tel morphisme munit  $k$  d'une structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini, d'où  $k = \mathbb{C}$  par le Nullstellensatz. Un idéal maximal de  $S^*$  est donc représenté par un morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres surjectif  $S^* \rightarrow \mathbb{C}$ , quitte à post-composer par un automorphisme de  $\mathbb{C}$ , un idéal maximal de  $S^*$  est représenté par un unique morphisme d'algèbre  $S^* \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\mathbb{C}$  est muni de sa structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre canonique, on a donc

$$\text{Spm } S^* \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(S^*, \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^*, \mathbb{C}) = V$$

□

On utilisera donc volontiers les notations  $\mathcal{O}(V)$  pour  $S^*$  et  $\mathcal{O}(V^*)$  pour  $S$ . D'un point de vue plus calculatoire, une base  $x_1, \dots, x_n$  de  $V$  donne un isomorphisme entre  $S$  et  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , on a en effet

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, A) &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\text{Vect}(x_1, \dots, x_n), A) \\ &= \mathbf{Ens}(\{x_1, \dots, x_n\}, A) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], A) \end{aligned}$$

Si  $W \leq \text{Gl}(V)$  est un groupe de réflexions complexes, son action induit une action sur l'algèbre symétrique  $S$  de  $V$ , on peut alors considérer  $S^W$  les invariants dans  $S$  sous cette action.

Notons  $V^*$  le dual de  $V$ ,  $W$  agit sur  $V^*$  par l'action contragrédiente :  $w.\varphi(x) = \varphi(w^{-1}.x)$  cette action fait également de  $W$  un groupe de réflexions sur  $V^*$ .

**Lemme 3.1.7.** *Notons  $W^*$  le groupe  $W$  vu comme agissant sur  $V^*$ , il s'agit d'un groupe de réflexions complexes. Et si  $W$  est le complexifié d'un groupe de réflexion réel, les représentations  $V$  et  $V^*$  du groupe  $W$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* Soit  $s \in \text{Ref}(W)$ , on a  $s(x) = x - \check{r}(x)r$  où  $\check{r}$  est une forme linéaire sur  $V^*$  de noyau  $H_s = \text{Ker}(s - 1_V)$ . Pour  $\varphi, x \in V^* \times V$ , on a

$$\begin{aligned} \langle s.\varphi, x \rangle &= \langle \varphi, s^{-1}.x \rangle \\ &= \langle \varphi, x + \check{r}(s^{-1}(x))r \rangle \\ &= \langle \varphi, x \rangle + \langle \check{r}, s^{-1}(x) \rangle \langle \varphi, r \rangle \\ &= \langle \varphi, x \rangle + \langle s\check{r}, x \rangle \langle \varphi, r \rangle \\ &= \langle \varphi + s\check{r} \langle \varphi, r \rangle, x \rangle \end{aligned}$$

l'action de  $s$  sur  $V^*$  est donc celle d'une réflexion complexe, d'hyperplan  $\text{Ker } ev_r$ , et  $W^*$  est un groupe de réflexions complexes.

Ensuite, si  $W$  est un groupe de réflexions réelles, on peut le voir comme agissant sur  $E$  un espace vectoriel réel, il existe alors un produit scalaire  $W$  invariant sur cet espace, qui fournit un isomorphisme de  $W$ -modules  $E \simeq E^*$ , qui s'étend en  $V \simeq V^*$  par tensorisation.  $\square$

De manière générale, si  $W$  est un groupe de réflexions complexes sur  $V$ , son action s'étend en une action sur l'algèbre symétrique  $S$ , on peut donc s'intéresser aux invariants  $S^W$  sous cette action. Cette sous-algèbre a une structure remarquable et possède un sens géométrique, néanmoins, le lemme 3.1.6 nous invite à nous intéresser plutôt à l'algèbre  $S^{*W}$  des invariants pour l'action contragrédiente, mais il s'agit également d'une algèbre d'invariants d'un groupe de réflexions complexes.

**Théorème 3.1.8.** *(Chevalley, Shephard, Todd, [Mic, théorème 2.7] et [LT, Section 3.3.5]) Soient  $f_1, \dots, f_n$  des éléments homogènes algébriquement indépendants de  $\mathcal{O}(V)^W$  de degrés  $d_1, \dots, d_n$  tels que  $d_1 \cdots d_n$  soit minimal. Alors on a toujours  $|W| \leq d_1 \cdots d_n$ , et on a équivalence entre*

- (i)  $|W| = d_1 \cdots d_n$
- (ii)  $W$  est un groupe de réflexions complexes.
- (iii)  $\mathcal{O}(V)^W = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$

*Et, si ces conditions sont vérifiées, alors  $|\text{Ref}(W)| = \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$*

**Définition 3.1.9.** Dans le théorème précédent, quitte à réordonner les  $f_i$ , on peut supposer que la suite  $(d_i)$  est croissante, cette suite ne dépend pas du choix des  $f_i$  et on l'appelle la **suite des degrés** de  $W$ .

**Exemple 3.1.10.** Les matrices de permutations donnent une application  $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ , faisant de  $\mathfrak{S}_n$  un groupe de réflexions complexes (groupe de réflexions réelles complexifié). Son action sur  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  est l'action par permutation des variables, dont une famille d'invariant bien connue est la famille des polynômes symétriques. On en déduit que les degrés de  $\mathfrak{S}_n$  sont  $1, \dots, n$  et on retrouve  $|\mathrm{Ref}(\mathfrak{S}_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$  et  $|\mathfrak{S}_n| = n!$ .

Le choix d'un système d'invariants fondamentaux  $f_1, \dots, f_n$  donne une identification  $\mathcal{O}(V)^W \simeq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  (cette identification joue également un rôle au niveau des graduations, ce la réinterviendra à la section 3.3.2).

**Lemme 3.1.11.** *Deux sous-variétés affines irréductibles  $X, X' \subset V$  sont dans la même  $W$ -orbite si et seulement si  $f_i(X) = f_i(X')$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .*

*Démonstration.* Notons que l'évaluation  $\mathcal{O}(V) \times V \rightarrow \mathbb{C}$  est l'évaluation des polynômes sur les coordonnées (après choix d'une base), on a donc des fonctions polynômiales  $f_i : V \rightarrow \mathbb{C}$  qui donnent  $(f_1, \dots, f_n) : V \rightarrow \mathbb{C}^n \simeq \mathrm{Spm} \mathcal{O}(V)^W$ , c'est le morphisme donné par l'inclusion  $\mathcal{O}(V)^W \rightarrow \mathcal{O}(V)$ , la seconde condition se retraduit alors par "les idéaux  $I(X), I(X')$ , premier par irréductibilité, on même intersection avec  $\mathcal{O}(V)^W$ ".

Soient  $p, p'$  deux idéaux premiers de  $\mathcal{O}(V)$ , de même intersection avec  $\mathcal{O}(V)^W$ , s'il n'existe aucun  $w \in W$  tel que  $p' = wp$ , alors  $p' \not\subset \bigcup_{w \in W} wp$  donc

$$\exists x \in p' \mid \forall w \in W, wx \notin p$$

donc  $\prod_{w \in W} wx \in p' \setminus p$ , mais cet élément est dans  $\mathcal{O}(V)^W$ , d'où une contradiction.

La réciproque est immédiate : si  $p' = wp$ , alors pour  $x \in p \cap S^w$ , on a  $wx = x \in p'$  donc  $p \cap \mathcal{O}(V)^W \subset p' \cap \mathcal{O}(V)^W$ , on raisonne de même pour l'inclusion inverse.  $\square$

**Corollaire 3.1.12.** *On a une bijection entre  $\mathrm{Spm} \mathcal{O}(V)^W$  et  $V/W$ , qui munit ce dernier d'une structure de variété algébrique affine, isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ .*

*Démonstration.* On avait déjà une application  $V = \mathrm{Spm} \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathrm{Spm} \mathcal{O}(V)^W$ , on a vu que deux points sont dans la même image si et seulement si ils sont dans la même orbite sous l'action de  $W$  par le lemme précédent.  $\square$

Le théorème de Chevalley Shephard Todd nous donne de précieuses informations sur la structure des fonctions polynômiales invariantes, il est également possible d'obtenir des résultats similaires à propos de champs de vecteurs et de formes différentielles invariants.

On introduit deux  $\mathcal{O}(V)$ -modules, respectivement des dérivations et des 1-formes différentielles régulières sur  $V$  (on ne précisera pas en quoi ces modules sont des représentations raisonnables des champs de vecteurs et des formes différentielles)

$$\mathrm{Der} \mathcal{O}(V) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(V), \mathcal{O}(V)) \mid \forall f, g \in \mathcal{O}(V), \varphi(fg) = f\varphi(g) + \varphi(f)g\}$$

et, pour  $x_1, \dots, x_n$  une base de  $V$ , on pose

$$\Omega^1[V] = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(V)[dx_i]$$

Comme l'anneau  $\mathcal{O}(V)$  est gradué (c'est une algèbre de polynômes), le module  $\Omega^1[V]$  hérite d'une notion de graduation, en fait de deux notions de graduation :

- Un élément  $\omega \in \Omega^1[V]$  est dit homogène de **degré polynômial**  $q$  si son coefficient en tout  $dx_i$  est lui même homogène de degré  $q$  dans  $\mathcal{O}(V)$ .
- Un élément  $\omega \in \Omega^1[V]$  homogène de degré polynômial  $q$  sera dit de **degré total**<sup>11</sup>  $q + 1$ .

---

11. On peut considérer  $\Omega^p$  le module des  $p$ -formes différentielles, auquel cas le degré total serait  $p + q$

Pour  $v \in V$ , on pose  $D_v \in \text{Der } \mathcal{O}(V)$  la dérivation définie par

$$\forall x \in V^*, D_v x := \langle x, v \rangle = ev_v(x) \in \mathbb{C} \subset \mathcal{O}(V)$$

cette formule s'étend à  $\mathcal{O}(V)$  en une unique dérivation. En particulier, pour  $x_1, \dots, x_n$  une base de  $V$ , on obtient  $n$  dérivations  $D_i = D_{x_i}$ , par ailleurs, on a un isomorphisme  $\mathcal{O}(V) \simeq \mathbb{C}[x_1^*, \dots, x_n^*]$  et, pour  $f \in \mathcal{O}(V)$

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i^*}$$

on montre alors que les  $D_i$  forment une  $\mathcal{O}(V)$ -base de  $\text{Der } \mathcal{O}(V)$ , grâce à cette base, on peut définir une graduation sur  $\text{Der } \mathcal{O}(V)$

- Un élément  $\varphi \in \text{Der } \mathcal{O}(V)$  est dit homogène de **degré polynômial**  $q$  si son coefficient en tout  $D_i$  est lui même homogène de degré  $q$  dans  $\mathcal{O}(V)$ .
- On définit le degré total comme le degré polynômial  $-1$ , de sorte qu'un élément de degré total  $r$  envoie la composante homogène de  $\mathcal{O}(V)$  de degré  $q$  sur celle de degré  $r+q$  (ainsi,  $D_i$  est de degré  $-1$ , ce qui correspond à l'intuition de la dérivation par rapport à une variable).

Les  $\mathcal{O}(V)$ -bases de  $\text{Der } \mathcal{O}(V)$  et  $\Omega^1[V]$  permettent de les identifier comme duaux l'un de l'autre, via la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Der } \mathcal{O}(V) \times \Omega^1[V] \rightarrow \mathcal{O}(V)$  définie par

$$\langle D_i, dx_j \rangle = \delta_{i,j}$$

étendue par linéarité. On a également une application  $d : \mathcal{O}(V) \rightarrow \Omega^1[V]$  définie par

$$df := \sum_{i=1}^n D_i f dx_i$$

de sorte que la notation  $dx_i$  ne soit pas conflictuelle, et que

$$\forall \varphi \in \text{Der } \mathcal{O}(V), f \in \mathcal{O}(V), \langle \varphi, df \rangle = \varphi(f)$$

L'action de  $W$  sur  $\mathcal{O}(V)$  induit des structures de  $W$ -modules sur  $\text{Der } \mathcal{O}(V)$  et  $\Omega^1[V]$  : pour  $w \in W, \varphi \in \text{Der } \mathcal{O}(V), f \in \mathcal{O}(V), \theta \in \Omega^1[V]$

- $w \cdot \varphi$  envoie  $f$  sur  $w(\varphi(w^{-1}f)) \in \mathcal{O}(V)$
- $w \cdot \theta$  est défini sur  $\text{Der } \mathcal{O}(V)$  par  $\langle \varphi, w \cdot \theta \rangle := w \langle w^{-1} \cdot \varphi, \theta \rangle$

**Lemme 3.1.13.** Pour  $w \in W, \varphi \in \text{Der } \mathcal{O}(V), f \in \mathcal{O}(V), \theta \in \Omega^1[V], v \in V$ , on a

- (a)  $w(D_v f) = D_{wv}(wf)$
- (b)  $d(wf) = w \cdot df$
- (c)  $w \cdot D_v = D_{wv}$
- (d)  $w \cdot (f\varphi) = (wf)(w \cdot \varphi)$
- (e)  $w \cdot (f\theta) = (wf)(w \cdot \theta)$
- (f)  $\langle w \cdot \varphi, w \cdot \theta \rangle = w \langle \varphi, \theta \rangle$

*Démonstration.* (a), comme  $D_v$  est une dérivation, on peut prendre  $f = x \in V^*$  pour avoir

$$w(D_v x) = w \langle x, v \rangle = \langle x, v \rangle = \langle wx, wv \rangle = D_{wv}(wx)$$

(b) on a vu que  $\langle \theta, df \rangle = \varphi(f)$ , donc

$$\begin{aligned} \langle D_v, w \cdot df \rangle &= w \langle w^{-1} \cdot D_v, df \rangle \\ &= w((w^{-1} \cdot D_v)(f)) \\ &= w(w^{-1}(D_v(wf))) \\ &= D_v(wf) = \langle D_v, d(wf) \rangle \end{aligned}$$

(c) Par le point (a), on a

$$(w \cdot D_v)(f) = w(D_v(w^{-1}f)) = D_{wv}(ww^{-1}f) = D_{wv}(f)$$

(d) Soit  $g \in \mathcal{O}(V)$ , on a

$$\begin{aligned} w.(f\varphi)(g) &= w(f\varphi(w^{-1}g)) \\ &= (wf)w(\varphi(w^{-1}g)) \\ &= (wf)(w.\varphi)(g) \end{aligned}$$

L'argument pour (e) est similaire, et (f) découle directement des définitions.  $\square$

**Définition 3.1.14.** On définit  $\text{Der}_V^W = (\text{Der } \mathcal{O}(V))^W$  le  $\mathcal{O}(V)^W$  module des **dérivations invariantes** et  $\Omega_V^W = (\Omega^1[V])^W$  le  $\mathcal{O}(V)^W$  module des **formes différentielles invariantes**.

Ces modules héritent des graduations respectives de  $\text{Der } \mathcal{O}(V)$  et  $\Omega^1[V]$ .

**Lemme 3.1.15.** ([OT, Lemme 6.45])

Soient  $W \subset \text{Gl}(V)$  un groupe de réflexions complexes, et  $M$  un  $W$ -module de dimension  $r$ . Le  $\mathcal{O}(V)^W$  module  $(\mathcal{O}(V) \otimes M)^W$  est libre de rang  $r$ .

Par le lemme 3.1.13, les applications  $v \mapsto D_v$  et  $x \mapsto d_x$  induisent des isomorphismes  $W$ -équivariants  $\mathcal{O}(V) \otimes V \simeq \text{Der } \mathcal{O}(V)$  et  $\mathcal{O}(V) \otimes V^* \simeq \Omega^1[V]$ , ces isomorphismes induisent des isomorphismes de  $\mathcal{O}(V)^W$  modules  $(\mathcal{O}(V) \otimes V)^W \simeq \text{Der}_V^W$  et  $(\mathcal{O}(V) \otimes V^*)^W \simeq \Omega_V^W$ , ces deux modules sont donc libres par le lemme ci dessus.

Si  $f = (f_1, \dots, f_n)$  est un système d'invariants fondamentaux, on admet que  $df = (df_1, \dots, df_n)$  est une  $\mathcal{O}(V)^W$ -base de  $(\mathcal{O}(V) \otimes V^*)^W = \Omega_V^W$ . De plus, comme  $(\mathcal{O}(V) \otimes V)^W$  est homogène, il admet une base homogène :

**Définition 3.1.16.** Une  $\mathcal{O}(V)^W$ -base homogène  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $(\mathcal{O}(V) \otimes V)^W = \text{Der}_V^W$  est un **système de dérivations fondamentales**.

La suite  $(d_1^*, \dots, d_n^*)$  des degrés des  $\xi_n$  (dans l'ordre décroissant) ne dépend pas du choix de  $\xi$ , on l'appelle la **suite des codegrés** de  $W$ .

*Remarque 3.1.17.* Si  $W$  est un groupe de réflexions réelles complexifié, par le lemme 3.1.7, on a  $V \simeq V^*$  comme  $W$ -module, donc si  $f$  est un système d'invariants fondamentaux,  $df$  est aussi un système de dérivations fondamentales, on a alors  $d_i^* = d_{n-i+1} - 2$ . En effet, si  $g \in \mathcal{O}(V)^W$  est homogène de degré  $m$ ,  $df$  est de degré polynômial  $m - 1$ , donc de degré total  $m - 2$  vu dans  $\text{Der}_V^W$ .

Le champ de vecteur d'Euler sur  $V$ , donné par  $\sum_{i=1}^n x_i D_i$  est de degré total 0 et  $W$ -invariant, donc  $d_n^* = 0$ . En particulier dans le cas d'un groupe réel complexifié, on retrouve un résultat connu, à savoir l'existence d'un degré minimal égal à 2.



On a vu que  $\mathcal{O}(V)^W$  s'identifie à l'algèbre  $\mathcal{O}(V/W)$  : les fonctions polynômiales invariantes s'identifient aux fonctions polynômiales sur la variété quotient. De même, les champs de vecteurs invariants s'identifient à des champs de vecteurs sur la variété quotient : Soit  $\varphi \in \text{Der}_V^W$  et  $f \in \mathcal{O}(V/W) = \mathcal{O}(V)^W$ , on a

$$w(\varphi(f)) = w(\varphi(w^{-1}f)) = (w.\varphi)(f) = \varphi(f)$$

donc  $\varphi$  se restreint bien en une dérivation de  $\mathcal{O}(V/W)$ .

Si  $f = (f_1, \dots, f_n)$  est un système d'invariants fondamentaux, la famille  $(D_{f_1}, \dots, D_{f_n})$  est une  $\mathcal{O}(V/W)$  base de  $\text{Der } \mathcal{O}(V/W)$ . Donc pour  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  un système de dérivations fondamentales, le système  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$  de dérivations de  $\mathcal{O}(V/W)$  associé se décompose sur la base  $D_{f_i}$  :

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} D_{f_i}$$

**Définition 3.1.18.** La matrice  $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est appelée **matrice discriminante** (par rapport à  $f$  et  $\xi$ ) de  $W$ . Il s'agit par construction d'une matrice de  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n] \simeq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ .

On note  $\mathcal{A}$  l'arrangement des hyperplans de réflexions de  $W$ , on définit

$$V^{\text{reg}} := V \setminus \bigcup \mathcal{A}$$

Le sous-ensemble de  $V$  constitué des éléments qui ne sont fixés par aucune réflexion de  $W$ . On remarque que, comme les hyperplans complexes sont de codimension réelle 2,  $V^{\text{reg}}$  est connexe par arcs.

**Lemme 3.1.19.** *L'action de  $W$  sur  $V^{\text{reg}}$  est libre.*

*Démonstration.* Soit  $x \in V^{\text{reg}}$ , et  $W_0 \leq W$  le fixateur de  $\{x\}$ , par le théorème de Steinberg,  $W_0$  est engendré par les réflexions qui fixent  $x$ . Il n'y a par hypothèse aucune telle réflexion, donc  $W_0 = \{1\}$  et l'action est libre.  $\square$

**Définition 3.1.20.** Soient  $W \leq \text{Gl}(V)$  un groupe de réflexions complexes et  $\zeta$  une racine de l'unité. Un élément  $w \in W$  est dit  **$\zeta$ -régulier** si  $\text{Ker}(w - \zeta) \cap X \neq \emptyset$ , on dit alors que  $\zeta$  est une **valeur propre régulière** de  $W$  et son ordre est un **nombre régulier** pour  $W$ .

Notons que, comme l'action de  $W$  sur  $V^{\text{reg}}$  est libre, un élément  $\zeta$ -régulier doit avoir le même ordre que  $\zeta$ . De plus, le fait qu'une racine  $\zeta$  soit régulière ne dépend que de son ordre, étant donné que la puissance  $k$ -ème d'un élément  $\zeta$ -régulier est  $\zeta^k$  régulier.

Le théorème suivant compile une grande quantité d'informations sur les éléments réguliers :

**Théorème 3.1.21.** (*[Bes1, Théorème 1.9]*)

Soit  $W \subset \text{Gl}(V)$  un groupe de réflexions complexes irréductible, de degrés  $d_1, \dots, d_n$  et de codegrés  $d_1^*, \dots, d_n^*$ .

(a) Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$A(d) := \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid d \mid d_i\} \quad \text{et} \quad B(d) := \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid d \mid d_i^*\}$$

Alors  $|A(d)| \leq |B(d)|$  et  $d$  est régulier si et seulement si  $|A(d)| = |B(d)|$ .

(b) Soient  $w$  un élément  $\zeta$ -régulier d'ordre  $d$ , et  $V' = \text{Ker}(w - \zeta)$ . Le centralisateur  $W' := C_W(w)$ , vu comme sous-groupe de  $\text{Gl}(V')$ , est un groupe de réflexions complexes de degrés  $(d_i)_{i \in A(d)}$  et de codegrés  $(d_i^*)_{i \in B(d)}$

(c) Soit  $w$  un élément  $\zeta$ -régulier d'ordre  $d$ . Alors  $V'/W' \simeq (V/W)^{\mu_d}$  et  $V'^{\text{reg}}/W' \simeq (V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$  (où l'action de  $\mu_d$  est le quotient de la multiplication scalaire sur  $V$ ).

**Exemple 3.1.22.** Ce résultat est capital dans l'étude du groupe  $G_{31}$  : considérons le groupe  $\overline{W} = \overline{G_{37}}$ , complexifié du groupe de Coxeter  $E_8$ , il s'agit d'un groupe de réflexions complexes, dont les degrés sont

$$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$$

Par la remarque 3.1.17, ses codegrés sont

$$0, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28$$

En particulier l'entier 4 est régulier : le centralisateur  $W'$  d'un élément  $i$ -régulier est un groupe de réflexions complexes de type  $G_{31}$ , ses degrés/codegrés sont

$$8, 12, 20, 24 \quad \text{et} \quad 0, 12, 16, 28$$

Tout l'intérêt dans le fait de plonger  $G_{31}$  dans  $G_{37}$  est que ce dernier est un groupe de réflexions "bien-engendré", ce qui rendra nettement plus simple l'étude de son groupe de tresses :

**Théorème 3.1.23.** (*[Bes1, théorème 2.4]*)

Soit  $W \subset \text{Gl}(V)$  un groupe de réflexions complexe irréductible, on a équivalence entre

- (i)  $W$  est **bien-engendré** (i.e  $W$  admet un système de générateur à  $\dim V$  réflexions)
- (ii) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $d_i + d_i^* = d_n$
- (iii) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $d_i + d_i^* \leq d_n$
- (iv) Pour tout système  $f$  d'invariants fondamentaux, il existe un système  $\xi$  de dérivations fondamentales telle que la matrice discriminante associée se décompose sous la forme  $M = M_0 + X_n M_1$ , où  $M_0, M_1$  sont à coefficients dans  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ , et  $M_1$  est triangulaire inférieure sans éléments nuls sur sa diagonale.

Sous ces conditions, pour un système  $f$  d'invariants fondamentaux, il existe un système  $\xi$  de dérivations fondamentales dit **plat**, tel que la matrice discriminante se décompose sous la forme  $M = M_0 + X_n I_n$ , avec  $M_0$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ .

On voit immédiatement par conséquence de ce théorème que  $G_{37}$  est bien-engendré et que  $G_{31}$  ne l'est pas.

## 3.2 Groupes fondamentaux et hypersurfaces algébriques

Si les structures de Garside nous permettront d'obtenir une remarquable quantité d'informations combinatoires sur les groupes de tresses, il ne faut pas pour autant oublier leur origine hautement géométrique et topologique. On commence donc par introduire les aspects topologiques des groupes de tresses, que nous relierons ensuite aux structures de Garside.

### 3.2.1 Groupes fondamentaux et point base épais

Nous ne ferons pas de rappels sur la construction classique des groupes fondamentaux, on rappelle néanmoins que notre convention de concaténation des chemins se fait de droite à gauche : si  $\gamma$  est un chemin de  $x$  vers  $y$ , et  $\gamma'$  un chemin de  $y$  vers  $z$ , leur concaténation sera un chemin de  $x$  vers  $z$ , noté  $\gamma'\gamma$ .

Soit pour le moment  $X$  un espace topologique, pour un point  $x \in X$ , on peut considérer le groupe fondamental  $\pi_1(X, x)$ , mais on peut plus globalement considérer  $\pi_1(X)$  le **groupoïde fondamental** de  $X$ , défini comme suit :

- Ses objets sont les points de  $X$ .
- Les morphismes  $x \rightarrow y$  sont les classes d'homotopie de chemins  $x \rightarrow y$ .

*Remarque 3.2.1.* Cette définition n'est pas sans rappeler la définition 2.5.2 : le groupoïde 0-squelettique fondamental d'un ensemble simplicial  $X$  est simplement la sous-catégorie pleine de  $\pi_1(|X|)$  dont les objets sont les 0-cellules de  $|X|$ .

Le groupoïde fondamental est intéressant en ceci qu'il ne nécessite pas de choisir un point-base. Le groupe fondamental de  $X$  se voit au sein du groupoïde fondamental via

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(X)(x, x)$$

On sait que la classe d'isomorphie de ce groupe ne dépend que de la composante connexe par arc de  $x$  dans  $X$  (qui s'identifie à la composante connexe de  $x$  dans  $\pi_1(X)$ ), cependant on n'obtient pas ainsi d'isomorphisme canonique entre deux groupes fondamentaux de deux points distincts : tout morphisme  $g : x \rightarrow y$  dans  $\pi_1(X)$  donne un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \phi_g : \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, y) \\ \gamma & \longmapsto & g\gamma g^{-1} \end{array}$$

on n'a pas de moyen à priori de faire un choix cohérent (transitif) de chemins entre les points de  $X$  pour pouvoir parler du groupe fondamental de  $X$  sans faire référence à un point base. Cependant, on peut quand même "améliorer" cette situation : considérons  $A \subset X$ , on a un foncteur naturel  $\iota : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$ .

**Lemme 3.2.2.** *Si  $A$  est simplement connexe, alors,*

$$(\phi_{\iota(g)})_{g \in \pi_1(A)}$$

*est un système d'isomorphismes transitifs pour la sous catégorie pleine  $(\pi_1(X, a))_{a \in A}$*

*Démonstration.* Comme  $A$  est simplement connexe, le groupoïde  $\pi_1(A)$  est équivalent à la catégorie triviale : entre deux points il existe un unique morphisme, le système  $(\phi_g)_{g \in \pi_1(A)}$  est donc transitif, d'où le résultat par fonctorialité.  $\square$

Ce lemme permet de définir le groupe fondamental d'un espace topologique par rapport à un sous-ensemble simplement connexe, non plus par rapport à un point :

**Définition 3.2.3.** (Point base épais)

Le groupe fondamental de  $E$  sur un sous-ensemble simplement connexe  $A$  est la limite

$$\pi_1(E, A) := \lim_{a \in A} \pi_1(E, a)$$

pour le système transitif d'isomorphismes  $(\phi_{\iota(g)})_{g \in \pi_1(A)}$ .

En pratique,  $\pi_1(E, A)$  consistera en des classes d'homotopie de chemins de  $E$ , dont les points de départs et d'arrivée se trouvent dans  $A$  : notre définition nous apporte que ce groupe s'identifie naturellement à tout  $\pi_1(E, a)$  avec  $a \in A$ .

On peut un peu généraliser cette procédure : si  $A \subset X$  est une union disjointe de sous-ensembles simplement connexes (i.e si les composantes connexes par arcs de  $A$  sont simplement connexes), on peut considérer un groupoïde fondamental de  $E$  relativement à  $A$  :

- Ses objets sont les composantes connexes par arcs de  $A$ .
- Si  $C, C'$  sont deux telles composantes, un morphisme  $C \rightarrow C'$  sera la classe d'homotopie d'un chemin partant d'un point de  $C$  vers un point de  $C'$  (à nouveau, la simple connexité de  $C, C'$  fait que ceci forme bien une catégorie).

### 3.2.2 Complémentaires d'hypersurfaces algébriques

Les groupes de tresses étant défini comme groupe fondamentaux de complémentaire d'hypersurfaces algébriques, on énonce ici sans démonstration certaines généralités issues de [Mar]

**Définition 3.2.4.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , on note  $V(P)$  l'hypersurface de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n$  correspondante, et  $C(P)$  le complémentaire de cette hypersurface.

Par définition,  $C(P)$  est un ouvert de Zariski de l'espace affine  $\mathbb{C}^n$ .

Comme  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  est factoriel, on peut écrire  $P = \prod_{i=1}^r P_i^{n_i}$  avec les  $P_i$  irréductibles, 2 à 2 premiers entre eux, et  $n_i \geq 1$ . On a

$$V(P) = V(P_1 \cdots P_r) = V(P_1) \cup \cdots \cup V(P_r)$$

et comme les idéaux  $(P_i)$  sont premiers, il s'agit là de la décomposition de  $V(P)$  en sous-variétés irréductibles.

**Proposition 3.2.5.**

- (a) Pour tout  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , l'ouvert  $C(P)$  est connexe par arcs.
- (b) Pour tout  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  irréductible, et  $X \subset \mathbb{C}^n$  une sous-variété affine, si  $V(P) \setminus X \neq \emptyset$ , alors cet ensemble est connexe par arcs.

Le second point de cette proposition est nettement plus ardu que le premier (qui repose essentiellement sur le théorème de D'Alembert-Gauss).

Une sous-variété algébrique de  $\mathbb{C}^n$  se décompose en une **partie lisse** et un fermé complémentaire, la **partie singulière**.

Dans le cas d'une variété  $V(I)$ , avec  $I = (Q_1, \dots, Q_r)$ , la partie singulière de  $V(I)$  est le lieu des  $x \in \mathbb{C}^n$  en lesquels la matrice des  $\frac{\partial Q_i}{\partial z_j}$  est de rang non maximal, il s'agit bien d'un fermé Zariski de  $V(I)$ , de dimension strictement inférieure à celle de  $V(I)$ . On définit alors la partie lisse  $V_s(I)$  comme le complémentaire de ce fermé dans  $V(I)$ .

En itérant cette décomposition, il vient :

**Proposition 3.2.6.** *Toute sous-variété algébrique affine de  $\mathbb{C}^n$  est l'union d'une collection finie de variétés différentielles lisses.*

Dans le cas d'une hypersurface, la partie lisse de  $V(P_i)$  est

$$V_s(P_i) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid P_i(x) = 0 \text{ et } \nabla P_i(z) \neq 0\}$$

On pose alors

$$V_i(P) := V_s(P_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} V(P_j)$$

C'est un ouvert dense de  $V(P_i)$ . Soient  $x_0 \in C(P)$ , et  $x_i \in Z_i(P)$ , au voisinage de  $x_i$ , on a  $P_j \neq 0$  pour  $j \neq i$ . Comme  $\nabla P_i(x_i) \neq 0$ ,  $P_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une submersion en  $x_i$ , par changement de carte,  $P_i$  autour de  $x_i$  se réécrit comme  $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $x_i$  est identifié à  $(0, 0)$ .

On considère dans  $V$  un voisinage convenable (par exemple ouvert convexe) suffisamment petit de  $x_i$ , et  $\gamma_0$  un lacet dans ce voisinage d'image  $t \mapsto (0, \varepsilon e^{2i\pi t})$  dans le changement de carte précédent, si l'on a pris un voisinage convenable de  $x_i$ , deux tels lacets sont homotopes.

**Définition 3.2.7.** Soit  $x_0 \in C(P)$ , avec les notations précédentes considérons dans  $C(P) \cup \{x_i\}$  un lacet  $\gamma : x_0 \rightarrow x_i$ , note  $\gamma_\varepsilon$  le chemin  $\gamma$ , parcouru jusqu'à un point d'arrivée dans  $V \setminus \{x_i\}$ .

Comme  $V$  est contractile, on définit bien un élément de  $\pi_1(C(P), x_0)$  par  $\gamma_\varepsilon^{-1} \gamma_0 \gamma_\varepsilon$ , un élément de  $\pi_1(C(P), x_0)$  admettant un représentant s'écrivant sous cette forme est un **méridien autour de  $V(P_i)$** .

Par construction, le conjugué d'un méridien dans  $\pi_1(C(P), x_0)$  est lui aussi un méridien, autour de la même composante, en fait on a la réciproque :

**Proposition 3.2.8.** *Les méridiens autour d'une composante irréductible fixée forment une classe de conjugaison de  $\pi_1(C(P), x_0)$ .*

**Proposition 3.2.9.** *Soit  $P = Q_0 Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  avec  $Q_0$  irréductible premier avec  $Q$ , et  $x_0 \in C(P)$ .*

*Alors l'inclusion  $C(P) \subset C(Q)$  induit un épimorphisme  $\pi_1(C(P), x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(C(Q), x_0)$  dont le noyau est engendré par l'ensemble des méridiens de  $C(P)$  autour de  $V(Q_0)$ .*

**Corollaire 3.2.10.** *Pour tout  $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  et  $x_0 \in C(P)$ , le groupe  $\pi_1(C(P), x_0)$  est engendré par l'ensemble des méridiens autour des composantes irréductibles de  $V(P)$*

### 3.2.3 Groupe de tresses et groupe de tresses pures

Il est temps à présent de définir les groupes de tresses complexes. On considère  $W \leq \text{Gl}(V)$  un groupe de réflexions complexes, on reprend les notations  $R = \text{Ref}(W)$ ,  $\mathcal{A}$  l'ensemble des hyperplans de réflexions,  $X := V^{\text{reg}} = V \setminus \bigcup \mathcal{A}$ .

Comme  $W$  préserve un produit scalaire sur  $V$  (théorème de Maschke), il agit sur  $V$ , donc sur  $V^{\text{reg}}$ , par isométrie, et comme l'action de  $W$  sur  $X$  est libre, on obtient que la projection canonique  $p : X \rightarrow X/W$  est un revêtement.

**Définition 3.2.11.** Soit  $* \in X$ , on définit le **groupe de tresses pures** de  $W$  comme  $P(W) := \pi_1(X, *)$ , et le **groupe de tresses** de  $W$  par  $B(W) := \pi_1(X/W, p(*))$ .

Plus tard, on remplacera pour  $B(W)$  le point base par un sous-ensemble simplement connexe de  $X/W$ .

La théorie des revêtements nous donne une suite exacte courte de groupes :

$$1 \rightarrow P(W) \rightarrow B(W) \rightarrow W \rightarrow 1$$

Le morphisme  $P(W) \rightarrow B(W)$  est simple à décrire : un chemin  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  est envoyé sur  $p\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow X/W$ , le morphisme  $B(W) \rightarrow W$  est défini grâce à la théorie des revêtements : soit  $\gamma : p(*) \rightarrow p(*)$  un chemin dans  $X/W$ , il se relève en un unique chemin  $\tilde{\gamma} : * \rightarrow x$  où  $x$  se trouve dans l'orbite de  $*$  sous l'action de  $W$ . Par liberté de l'action, il existe un unique  $w \in W$  tel que  $w.* = x$ ,  $w$  est alors défini comme l'image de  $\gamma$  par le morphisme  $B(W) \rightarrow W$ .

On remarque que  $\bigcup \mathcal{A}$  est une hypersurface algébrique, dont les composantes irréductibles sont les hyperplans eux-mêmes, on admet que  $p(\bigcup \mathcal{A})$  est une hypersurface dans  $V/W \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ , on trouve donc que le groupe de tresse (pure) est groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface algébrique, il s'agit maintenant d'en donner des générateurs :

**Définition 3.2.12.** Soit  $s \in R$  d'hyperplan  $H = \text{Ker}(s - 1)$ .

Considérons un  $x_0 \in H \setminus \bigcup (\mathcal{A} \setminus H)$ , et un voisinage  $U$  de  $x_0$  suffisamment petit pour qu'il n'intersecte pas d'autre hyperplans que  $H$ . On prend ensuite un chemin  $\gamma : * \rightarrow x_1$  avec  $x_1 \in x_0 + H^\perp \cap U$ , en identifiant  $x_0 + H^\perp$  à  $\mathbb{C}$ , l'action de  $s$  s'identifie à une rotation, on peut donc considérer dans  $x_0 + H^\perp$  un chemin  $\gamma_{x_1} : x_1 \rightarrow s.x_1$  correspondant à un arc de cercle dans cette identification (un tel chemin ne passe pas par  $x_0$  donc est bien un chemin dans  $X$ ).

On obtient ainsi un chemin  $(s.\gamma)^{-1}\gamma_{x_1}\gamma : * \rightarrow s.*$ .

La classe dans  $B(W)$  d'un chemin ainsi construit est appelé **réflexion tressée** associée à  $s$ .

Comme l'ensemble des réflexions de  $W$  est stable par conjugaison, une conséquence immédiate de la définition est que tout conjugué par un élément de  $B$  d'une réflexion tressée est une réflexion tressée (associée à la même réflexion si le conjuguant est dans  $P(W)$ ).

**Proposition 3.2.13.** Soit  $s \in R$  et  $\sigma$  une réflexion tressée associée à  $s$ . Si  $\exp(2i\pi/n)$  est une valeur propre de  $s$ , alors  $\sigma^n \in P$  est un méridien autour de  $H$  dans  $X$ .

*Démonstration.* Comme l'image de  $\sigma$  dans  $W$  est  $s$  d'ordre  $n$ , on a  $\sigma^n \in \text{Ker}(B(W) \rightarrow W) = P$ . Par construction,  $\sigma$  est représentable par un chemin de la forme  $(s.\gamma)^{-1}\gamma_{x_1}\gamma$  avec  $\gamma : * \rightarrow x_1 \in x_0 + H^\perp$  et  $\gamma_{x_1} : t \mapsto x_0 + e^{i\theta t}(x_1 - x_0)$  avec  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ . Dans ce cas,  $\sigma^n$  est représenté par

$$(s^n.\gamma^{-1} \circ s^{n-1}.\gamma_{x_1} \circ s^{n-1}.\gamma) \circ \dots \circ (s^2.\gamma^{-1} \circ s.\gamma_{x_1} \circ s.\gamma) \circ ((s.\gamma)^{-1}\gamma_{x_1}\gamma)$$

qui est homotopiquement équivalent à

$$s^n \cdot \gamma^{-1} \circ (s^{n-1} \cdot \gamma_{x_1} \cdots s \cdot \gamma_{x_1} \gamma_{x_1}) \circ \gamma$$

le terme central étant donné par  $t \mapsto x_0 + e^{2i\pi t}(x_1 - x_0)$ , la classe de  $\sigma^n$  est donc bien celle d'un méridien autour de  $H$ .  $\square$

Fixons  $H \in \mathcal{A}$  un hyperplan de réflexion, le sous-groupe  $W_H := \{w \in W \mid \forall x \in H, wx = x\}$  est un sous-groupe parabolique de  $W$ , donc engendré par l'ensemble des réflexions qu'il contient (i.e les réflexions admettant  $H$  comme hyperplan invariant).

Restreindre l'action de  $W_H$  à  $H^\perp$  donne un monomorphisme  $W_H \rightarrow \text{Gl}(H^\perp) \simeq \mathbb{C}^*$ , comme  $W_H$  est fini, il est cyclique comme sous-groupe des inversibles d'un corps, il existe donc une unique  $s_H \in R \cap W_H$  dont  $\exp(2i\pi/n_H)$  est valeur propre (où  $n_H = |W_H|$ ), on appelle  $s_H$  la **réflexion distinguée** associée à  $H$  (c'est par définition la réflexion de plus grand ordre admettant  $H$  comme invariant).

On note  $R^*$  l'ensemble des réflexions distinguées, comme  $R$  engendre  $W$  et  $\langle s_H \rangle = W_H$  contient toutes les réflexions d'invariant  $H$ ,  $R^*$  engendre  $W$ , on en déduit :

**Proposition 3.2.14.** *Le groupe de tresses de  $W$  est engendré par l'ensemble de ses réflexions tressées (distinguées).*

*Démonstration.* Soit  $b \in B(W)$  d'image  $w$  dans  $W$ . On sait que  $w$  est produit de réflexions distinguées et de leurs inverses. On déduit qu'il existe des réflexions tressées (distinguées)  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  telles que  $\sigma_1^{\pm 1} \cdots \sigma_r^{\pm 1}$  ait  $w$  pour image dans  $W$ .

Quitte à remplacer  $b$  par  $b\sigma_1^{\mp 1} \cdots \sigma_r^{\mp 1}$ , on peut donc supposer  $b \in P(W) = \pi_1(X)$ , avec  $X$  le complémentaire de l'hypersurface algébrique donnée par la réunion de  $\mathcal{A}$ , chaque hyperplan étant (de degré 1 donc) irréductible, on sait que  $P$  est engendré par les méridiens autour des hyperplans.

Il suffit donc de montrer qu'un tel méridien est produit de réflexions tressées, on suppose donc que  $b$  est un méridien autour de  $H \in \mathcal{A}$ .

Soit  $\sigma$  une réflexion tressée associée à  $s_H$ , d'ordre  $n_H$ , alors  $\sigma^{n_H}$  est un méridien autour de  $H$ , donc il existe  $d \in P$  tel que  $b = d^{-1}\sigma^{n_H}d$  (proposition 3.2.8). Soit  $\delta$  représentant  $d$ , et  $s\gamma^{-1}\gamma_{x_1}\gamma$  représentant  $\sigma$ , alors  $\tau := \delta^{-1}s\gamma^{-1}\gamma_{x_1}\gamma\delta$  est également une réflexion tressée (distinguée) comme conjugué, et  $b = \tau^{n_H} \in B(W)$ , cela conclut.  $\square$

Enfin, on montre l'existence d'une fonction longueur  $B(W) \rightarrow \mathbb{Z}$ , condition nécessaire au fait que  $B(W)$  soit un groupe de Garside : On sait que  $W$  agit sur  $\mathcal{A}$  l'ensemble des hyperplans, pour  $\mathcal{H}$  l'orbite d'un hyperplan  $H \in \mathcal{A}$  sous cette action, on note  $n_{\mathcal{H}}$  l'ordre de  $|W_H|$  et on pose

$$\delta_{\mathcal{H}} := \left( \prod_{H \in \mathcal{H}} \alpha_H \right)^{n_{\mathcal{H}}} \in \mathcal{O}(X)$$

cet élément est  $W$  invariant, donc induit une fonction continue  $X/W \rightarrow \mathbb{C}^*$  et un morphisme de groupes  $\pi_1(\delta_{\mathcal{H}}) : B(W) \rightarrow \mathbb{Z}$

**Proposition 3.2.15.** *([BMR, proposition 2.16])*

*Pour  $H \in \mathcal{A}$ , l'image par  $\pi_1(\delta_{\mathcal{H}})$  d'une réflexion tressée associée à  $H$  est 1 si  $H \in \mathcal{H}$  et 0 sinon.*

Ainsi, le morphisme  $\pi_1(\delta)$  induit par  $\delta = \prod_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}/W} \delta_{\mathcal{H}}$  est un morphisme  $B(W) \rightarrow \mathbb{Z}$  valant 1 sur les réflexions tressées : c'est notre fonction longueur, que l'on notera bien-sûr  $\ell$ .

## 3.3 Morphisme de Lyashko-Looijenga

Jusqu'ici nous n'avons fait qu'énoncer des généralités sur les groupes de réflexions complexes et leurs groupes de tresses, et nous n'avons pas encore vu de propriété particulières du cas bien-engendré. Après avoir spécifié certaines notations concernant les groupes de tresses usuels, on définit l'application de Lyashko-Looijenga dans le cas d'un groupe de réflexions bien-engendré.

### 3.3.1 Groupe de tresse usuel

On a vu précédemment que le groupe  $\mathfrak{S}_n$ , vu comme sous-groupe de  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$  via les matrices de permutation, est un groupe de réflexions complexes. Cette représentation de réflexion n'est pas irréductible : l'espace  $\mathrm{Vect}((1, \dots, 1))$  est  $\mathfrak{S}_n$ -stable, le supplémentaire  $H := \{(x_i) \mid \sum x_i = 0\}$  est lui aussi un  $\mathfrak{S}_n$ -module, irréductible et sur lequel  $\mathfrak{S}_n$  agit comme un groupe de réflexions complexes.

On note  $X_1, \dots, X_n$  la base duale de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , de sorte que  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  sur lequel  $\mathfrak{S}_n$  agit aussi par permutation des variables. Si  $p_1, \dots, p_n$  sont les polynômes symétriques élémentaires de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , on a  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$  et  $\mathcal{O}(H)^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]/p_1$ . On pose

$$\overline{E}_n := \mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n = \mathrm{Spm} \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n] \quad \text{et} \quad E_n := H / \mathfrak{S}_n = \mathrm{Spm} \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n] / p_1$$

Ces espaces nous resserviront dans la suite, et se décrivent de façon agréable via des multi-ensembles :

On définit un multi-ensemble comme un ensemble  $S$  (dit support du multi-ensemble) et une application  $m : S \rightarrow \mathbb{N}^*$  (dite de multiplicité), on pense moralement à un multi-ensemble  $(S, m)$  comme un ensemble où un élément peut apparaître plusieurs fois. On peut réaliser des unions disjointes de multi-ensembles, ou mêmes des unions "usuelles" dans le cas où les supports sont sous ensemble d'un ensemble ambiant. On notera  $\{x_1, \dots, x_n\}$  le multi-ensemble donné par la réunion des multi-ensembles  $(\{x_i\}, 1)$ , les racines du polynôme  $(X - \alpha)^n$  sont donc données par le multi-ensemble  $\{\alpha, \alpha, \dots, \alpha\}$  à  $n$  termes.

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ , l'orbite de ce point sous  $\mathfrak{S}_n$  est déterminée par le multi-ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , cela identifie  $\overline{E}_n$  avec l'ensemble des multi-ensembles de cardinal  $n$  à support dans  $\mathbb{C}$  (de tels multi-ensembles sont les **configurations de  $n$  points dans  $\mathbb{C}$** )

La sous-variété  $E_n$  de  $\overline{E}_n$ , définie par  $p_1 = 0$  forme alors les **configurations centrées**, les configurations  $\{x_1, \dots, x_n\}$  telles que  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ .

L'injection naturelle  $E_n \subset \overline{E}_n$  admet une rétraction  $\rho$  définie par

$$\rho(\{x_1, \dots, x_n\}) := \left\{ x_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \dots, x_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

algébriquement, ceci correspond à l'identification de  $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]/p_1$  avec  $\mathbb{C}[p_2, \dots, p_n]$ , on se permettra donc de dire qu'un élément de  $\overline{E}_n$  se trouve dans  $E_n$ , en travaillant implicitement avec son image par  $\rho$ .

On considère sur  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  l'ordre lexicographique : pour  $z, z' \in \mathbb{C}$ , on pose

$$z \leq z' \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) < \Re(z') \\ \Re(z) = \Re(z') \text{ et } \Im(z) \leq \Im(z') \end{cases} \quad \text{ou}$$



**Définition 3.3.1.** Le **support ordonné** d'un élément de  $\overline{E_n}$  est l'unique tuple  $(x_1, \dots, x_k)$  tel que l'ensemble  $\{x_1, \dots, x_k\}$  soit le support de cet élément, et  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ .

On peut ainsi représenter canoniquement un élément de  $\overline{E_n}$  par son support ordonné  $(x_1, \dots, x_k)$  et la suite  $(n_1, \dots, n_k)$  des multiplicités en  $x_1, \dots, x_k$ .

L'identification entre  $H/\mathfrak{S}_n$  et  $E_n$  permet de voir  $H^{\text{reg}}/\mathfrak{S}_n$  comme  $E_n^{\text{reg}}$  l'ensemble des multi-ensembles dont le support est de cardinal  $n$  (autrement dit ceux dont tous les éléments sont de multiplicité 1).

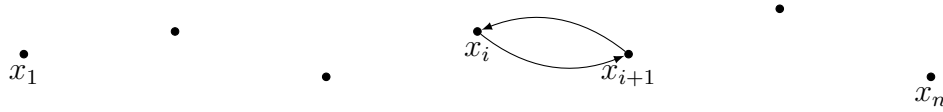
On peut alors définir le groupe de tresses sur  $\mathfrak{S}_n$  comme le groupe de tresses de  $E_n^{\text{reg}}$ , mais on veut être plus précis concernant le choix du point base : définissons  $E_n^{\text{gen}}$  comme le sous-ensemble de  $E_n^{\text{reg}}$  formé des configurations de  $n$ -points de parties réelles distinctes.

L'ensemble  $E_n^{\text{gen}}$  est contractile : pour  $\{x_1, \dots, x_n\}$  dans  $E_n^{\text{gen}}$ , on peut par translation envoyer  $x_1$  sur 0, puis envoyer les autres  $x_i$  sur leur partie réelle, il reste juste à redimensionner pour obtenir la configuration  $\{0, \dots, n-1\}$ .

On peut donc prendre  $E_n^{\text{gen}}$  comme point base épais de notre groupe de tresses, et poser

$$B_n := \pi_1(E_n^{\text{reg}}, E_n^{\text{gen}})$$

Ce groupe admet une présentation connue, que nous ne remontrons pas (on pourra consulter [Mar]), les générateurs sont des réflexions tressées  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  définies comme suit : si  $(x_1, \dots, x_n)$  est le support ordonné d'un point de  $E_n^{\text{gen}}$ ,  $\sigma_i$  est représentée par le déplacement suivant du support :



On obtient la présentation suivante :

$$B_n = B(\mathfrak{S}_n) = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \forall i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| > 1 \end{array} \right. \right\rangle$$

### 3.3.2 Interlude géométrique

Nous allons suivre l'exposition donnée dans [Dou], qui donne un peu plus de détails que celle de [Bes1]. On commence donc par quelques résultats de géométrie.

L'anneau  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  est gradué "par défaut" en déclarant que les  $X_i$  sont de degré 1. Cependant, quand on considère l'algèbre des invariants d'un groupe de réflexions complexes, on a également affaire à une algèbre de polynômes  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$  mais où les  $f_i$  sont de degré  $d_i$ , pour faire de l'isomorphisme  $\mathcal{O}(V)^W \simeq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  un isomorphisme d'algèbres graduées, on doit munir  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  de la graduation obtenue en déclarant que  $X_i$  est de degré  $d_i$ , un polynôme homogène pour cette graduation<sup>12</sup> sera dit **quasi-homogène** (sous entendu, dans la graduation classique).

Algébriquement, un morphisme  $F : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  est donné par un morphisme d'algèbre  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , autrement dit par un ensemble de  $n$  éléments de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , le morphisme  $F$  sera dit **quasi-homogène** s'il est donné par des polynômes quasi-homogènes.

**Exemple 3.3.2.** Par définition, la projection  $V \rightarrow V/W$  est donnée algébriquement par l'isomorphisme  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \simeq \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$  qui est quasi-homogène.

12. ou plus généralement, pour tout autre graduation de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$

**Définition 3.3.3.** Un morphisme  $F : X \rightarrow Y$  entre variétés algébriques affines est dit **fini** si l'algèbre  $\mathcal{O}(X)$  est une  $\mathcal{O}(Y)$ -algèbre finie (i.e finie comme  $\mathcal{O}(Y)$ -module)

*Remarque 3.3.4.* Bien-sûr la plupart des notions que nous manipulons ici sont spécifiées au cas affine pour alléger les écritures et les démonstrations.

**Proposition 3.3.5.** *Un morphisme quasi-homogène  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est fini si et seulement si  $F^{-1}(0) = 0$ .*

*Démonstration.* Considérons que  $F$  est donné par des polynômes quasi-homogènes  $g_1, \dots, g_n$ . Le point donné par l'idéal  $\sqrt{(g_1, \dots, g_n)}$  est envoyé sur 0 par  $F$ , on a

$$F^{-1}(0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(g_1, \dots, g_n)} = (X_1, \dots, X_n) \Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n)^N \subset (g_1, \dots, g_n)$$

Pour des  $N$  assez grand, ce qui est équivalent à demander que les  $g_i$  soient quasi-homogènes, et équivalent à ce que  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  soit un  $\mathbb{C}[g_1, \dots, g_n]$  module fini.  $\square$

On rappelle qu'un morphisme d'anneaux  $F : A \rightarrow B$  est dit **plat** s'il fait de  $B$  un  $A$ -module plat. Cette définition se transporte évidemment aux morphismes de variétés affines.

**Proposition 3.3.6.** (*[Dou, proposition 47]*)

*Les morphismes finis entre des variétés affines lisses sont plat*

Ces versions algébriques des notions de morphismes plats et finis nous seront utiles pour montrer que le morphisme de Lyashko-Looijenga est effectivement plat et fini. Néanmoins, on est en réalité motivé par les propriétés de Lyashko-Looijenga au niveau de la topologie usuelle, ce qui va nécessiter un passage de géométrie algébrique vers géométrie analytique.

**Définition 3.3.7.** Soit  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  un morphisme entre deux espaces analytiques.

- On dit que  $f$  est **fini** (en  $x \in X$ ) si l'application induite  $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  fait de  $\mathcal{O}_{X,x}$  un  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module de type fini.

Un tel morphisme est toujours fermé et admet des fibres finies autour de  $x$ .

- On dit de même que  $f$  est **plat** si  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module plat.

En particulier, un morphisme fini dans ce sens est propre sur un voisinage de  $x$ .

**Proposition 3.3.8.** (*[Dou, remarque 50]*)

*Pour un morphisme  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  quasi-homogène, les définitions analytiques et algébriques de finitude ou de platitude sont équivalentes.*

### 3.3.3 L'application $LL$

On considère  $W$  un groupe de réflexions complexes irréductible, muni d'un système d'invariants fondamentaux  $f$  et d'un système plat de dérivations fondamentales  $\xi$ . La matrice discriminante s'écrit alors  $M_0 + X_n I_n$ , et son déterminant est donné par

$$X_n^n + \alpha_2 X_n^{n-2} + \alpha_3 X_n^{n-3} + \dots + \alpha_n$$

où  $\alpha_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ . On a en fait un résultat plus fin sur les  $\alpha_i$ , à savoir leur quasi-homogénéité. Rappelons que les coefficients de  $M$  sont définis par l'équation

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} D_{f_i}$$

ce qui entraîne que  $m_{i,j}$  est quasi-homogène de degré  $d_i + d_j^*$ , et comme  $W$  est supposé bien-engendré, on a  $d_i + d_j^* = d_i + d_n - d_j$ . En développant la formule générale du déterminant, on obtient que celui-ci est quasi-homogène de degré

$$\sum_{i=1}^n d_i + d_i^* = n d_n$$

car  $W$  est bien-engendré (théorème 3.1.23), dans la suite, on notera  $h$  le plus haut degré de  $W$ , on obtient alors que les  $\alpha_i$  sont quasi-homogènes de degré  $ih$ .

**Définition 3.3.9.** Le *morphisme de Lyashko-Looijenga* est défini comme le morphisme  $LL : Y = \text{Spm } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}] \rightarrow E_n \simeq \text{Spm } \mathbb{C}[p_2, \dots, p_n]$  défini par  $p_i \mapsto (-1)^i \alpha_i$ .

Cette définition abstraite nous apprend seulement que  $LL$  est un morphisme quasi-homogène, mais ce morphisme peut aussi être vu plus géométriquement : par le choix d'un système d'invariants fondamentaux, on a un isomorphisme

$$V/W \simeq Y \times \mathbb{C}$$

Soit  $v \in V$ , son orbite  $\bar{v} \in V/W$  est représentée par un couple  $(y, z) \in Y \times \mathbb{C}$  où  $z = f_n(v)$  et  $y \in Y$  est le point de coordonnées  $(f_1(v), \dots, f_{n-1}(v))$ .

On entend étudier  $V/W \simeq Y \times \mathbb{C}$  grâce aux fibres de la projection 'canonique'  $\pi : V/W \rightarrow Y$ , pour  $y \in Y$ , on notera  $L_y$  la fibre de cette projection :

$$L_y = \{(y, z) \in Y \times \mathbb{C}\} \simeq \{\bar{v} \in V/W \mid (f_1(v), \dots, f_{n-1}(v)) = y\} \approx \{z \in \mathbb{C} \mid (y, z) \in V/W\}$$

Pour  $y \in Y$ , la droite affine (complexe)  $L_y$  intersecte la surface discriminante  $\mathcal{H}$  en  $n$ -points (comptés avec multiplicité) dont les coordonnées sont

$$(y, x_1), \dots, (y, x_n)$$

on a alors  $LL(y) := \{x_1, \dots, x_n\}$  (en réalité un élément de  $\overline{E_n}$ , dont on prend l'image par  $\rho$ ).

*Remarque 3.3.10.* Bien-sûr, pour que nos deux définitions coïncident, on admet que le déterminant de la matrice discriminante est le polynôme discriminant.

**Théorème 3.3.11.** (*[Dou, théorèmes 51, 52, 53]*)

- (a) On a  $LL^{-1}(0) = 0$ , le morphisme de Lyashko-Looijenga est donc fini et plat.
- (b) Le morphisme  $LL$  vu comme application continue entre deux copies de  $\mathbb{C}^n$ , est propre.
- (c) Le morphisme  $LL$  est surjectif, de plus tout chemin continu de  $E_n$  se relève en un chemin (pas unique à priori) de  $Y$  par  $LL$ .

**Corollaire 3.3.12.** (*[Dou, cor 59]*)

On pose  $Y^{\text{reg}} := LL^{-1}(E_n^{\text{reg}})$  (et  $\mathcal{K}$  son complémentaire dans  $Y$ ).

La restriction  $LL : Y^{\text{reg}} \rightarrow E_n^{\text{reg}}$  est un revêtement, dont le degré est le **nombre d'Hurwitz**  $\frac{n!h^n}{|W|}$

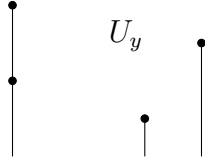
### 3.4 Tunnels, étiquettes et action d'Hurwitz

On reprend  $W$  un groupe de réflexions complexes irréductible et bien-engendré, on conserve les notations de la section précédente. On précise également que la plupart des figures de cette section sont indirectement extraites de [Bes1].

Pour  $y \in Y$ , on pose  $U_y$  le complémentaire dans  $L_y$  des demi-droites verticales descendant des points du support de  $LL(y)$ , plus formellement :

$$U_y := \{(y, z) \in L_y \mid \forall x \in LL(y), \Re(z) = \Re(x) \Rightarrow \Im(z) > \Im(x)\}$$

**Exemple 3.4.1.** Ici le support de  $LL(y)$  est constitué de 4 points, et  $U_y$  est le complémentaire de 3 demi-droites :



La forme "générique" d'un élément de  $E_n$  est une configuration de  $n$ -points distincts, (au sens où tout point de  $E_n$  est proche d'un tel point). De même, la forme "générique" d'un  $U_y$  est un complémentaire de  $n$  demi-droites verticales, mais il faut déjà que  $LL(y)$  soit formé de  $n$  points distincts, autrement dit  $LL(y) \in E_n^{\text{reg}}$ , mais il faut aussi que ces points soient de parties réelles distinctes, autrement dit  $LL(y) \in E_n^{\text{gen}}$  : on pose alors  $Y^{\text{gen}} := LL^{-1}(E_n^{\text{gen}})$ .

Ainsi,  $Y^{\text{gen}}$  est la "fibre" par le revêtement  $LL$  du "point-base"  $E_n^{\text{gen}}$ , il est alors équipé d'une action de  $B_n := \pi_1(E_n^{\text{reg}}, E_n^{\text{gen}})$ .

**Définition 3.4.2.** Le *point base épais* de  $V^{\text{reg}}/W$  est le sous-ensemble  $\mathcal{U}$  défini par

$$\mathcal{U} := \bigcup_{y \in Y} U_y = \{(y, z) \in Y \times \mathbb{C} \mid \forall x \in LL(y), \Re(z) = \Re(x) \Rightarrow \Im(z) > \Im(x)\}$$

Pour faire de  $\mathcal{U}$  un point-base épais, on doit d'abord montrer qu'il est simplement connexe, on montre en fait qu'il est contractile : on définit une fonction continue  $\beta : Y \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\beta(y) := \max\{\Im(x) \mid x \in LL(y)\} + 1$$

Les points de  $V/W$  sont représentés par des couples  $(y, z) \in Y \times \mathbb{C}$ , ou de manière équivalente par des triplets  $(y, a, b) \in Y \times R \times R$ . Pour  $t \in [0, 1]$ , on définit  $\phi_t : V/W \rightarrow V/W$  par

$$\phi_t(y, a, b) := \begin{cases} (y, a, b) & \text{si } b \geq \beta(y) \\ (y, a, b + t(\beta(y) - b)) & \text{si } b \leq \beta(y) \end{cases}$$

tous les  $\phi_t$  préservent  $\mathcal{U}$  et l'homotopie  $\phi$  donne un rétracte par déformation de  $\mathcal{U}$  sur

$$\bigcup_{y \in Y} \{(y, z) \in L_y \mid \Im(z) \geq \beta(y)\}$$

ce dernier est un fibré localement trivial sur l'espace  $Y$ , contractile, dont les fibres (des demi-plans) sont contractiles, il est donc contractile.

**Définition 3.4.3.** On définit le **groupe de tresses** de  $W$  comme  $B(W) := \pi_1(V^{\text{reg}}/W, \mathcal{U})$ .

Nous allons expliciter un peu pourquoi cette définition ne rentre pas en conflit avec la définition précédente, on doit pour cela faire un choix cohérent de point base dans  $V^{\text{reg}}$ . Soit donc  $u \in \mathcal{U}$  et une préimage  $\tilde{u}$  de  $u$  dans  $V^{\text{reg}}$ , pour un autre  $u' \in \mathcal{U}$  et un chemin  $\gamma : u \rightarrow u'$ , on a un unique relèvement  $\tilde{\gamma}$  partant de  $\tilde{u}$  (l'application  $V \rightarrow V/W$  est toujours un revêtement), son point d'arrivée ne dépend pas du choix de  $\gamma$ .

Autrement dit, le choix d'une préimage d'un point de  $\mathcal{U}$  induit une section naturelle  $\tilde{\mathcal{U}}$  de  $\mathcal{U}$  dans  $V^{\text{reg}}$ , ainsi qu'un système transitif d'isomorphismes entre les  $(\pi_1(V^{\text{reg}}, \tilde{u}))_{\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}}$ .

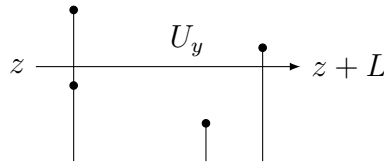
À partir de maintenant, on suppose avoir fait un tel choix, et on (re)définit le groupe de tresses pures par  $P(W) := \pi_1(V^{\text{reg}}, \tilde{\mathcal{U}})$ , cela induit également un morphisme  $B(W) \rightarrow W$ , qui redonne une suite exacte courte

$$1 \rightarrow P(W) \rightarrow B(W) \rightarrow W \rightarrow 1$$

**Définition 3.4.4.** On appelle **semi-tunnel** un triplet  $T = (y, z, L) \in Y \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$  tel que  $(y, z) \in \mathcal{U}$  et le segment affine  $[(y, z), (y, z + L)]$  se trouve dans  $V^{\text{reg}}/W$  (autrement dit ne contient pas de points de  $LL(y)$ ).

Un semi-tunnel  $T$  est un **tunnel** si de plus  $(y, z + L) \in \mathcal{U}$ .

**Exemple 3.4.5.** Comme un (semi-)tunnel parcourt une seule fibre  $L_y$ , on peut le représenter dans un plan :



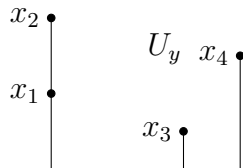
Par définition, un tunnel  $T$ , assimilé au chemin  $\gamma_T$  qui le parcourt, représente un élément  $b_T$  de  $B(W)$ . Les éléments de  $B(W)$  représentés par des tunnels sont dits **simples**<sup>13</sup>, on notera  $S$  l'ensemble des éléments simples de  $B(W)$ .

Soient  $y \in Y$ , et  $(x_1, \dots, x_k)$  le support ordonné de  $LL(y)$ , le sous-ensemble de  $L_y$  dont  $U_y$  est le complémentaire est formé de  $LL(y)$  et de  $k$  segments (ou demi-droites) ouvertes  $I_1, \dots, I_k$  où

$$I_j := \begin{cases} ]x_j - i\infty; x_j[ & \text{si } j = 1 \text{ ou } (j > 1 \text{ et } \Re(x_{j-1}) < \Re(x_j)) \\ ]x_{j-1}; x_j[ & \text{sinon} \end{cases}$$

on désigne par  $]x_i; x_i - i\infty[$  la demi-droite verticale descendant à partir de  $x_i$ . Dans le premier cas (celui où  $I_j$  n'est pas borné), on dit que  $x_j$  est **profond**.

**Exemple 3.4.6.** Il y a dans cet exemple trois points profonds :  $x_1, x_3$  et  $x_4$  :



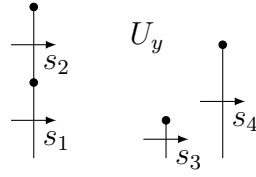
13. Bien-sûr cette terminologie n'est pas innocente, et préfigure la structure de Garside de  $B(W)$ .

On remarque qu'un tunnel dans  $L_y$  est non trivial si et seulement si il traverse au moins un des  $I_j$ , et que le fait de traverser un des  $I_j$  fixé est invariant par homotopie. On peut alors définir :

**Définition 3.4.7.** Un tunnel  $(y, z, L)$  est dit *élémentaire* s'il ne traverse qu'un seul des intervalles  $I_j$  associés à  $y$ .

Si, pour  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on a  $s_i = b_{T_i}$  un tunnel élémentaire associé à  $I_j$ , on dit que  $\text{lbl}(y) := (s_k, \dots, s_1)$  est l'*étiquette* de  $y$ , et si  $j_1, \dots, j_l$  sont les indices des points profonds de  $LL(y)$ , on dit que l'*étiquette profonde* de  $y$  est la sous-suite  $(s_{j_l}, \dots, s_{j_1})$ .

**Exemple 3.4.8.** Dans l'exemple précédent, les tunnels élémentaires sont donnés par



L'étiquette profonde de  $y$  est ici donnée par  $(s_4, s_3, s_1)$

La longueur de l'étiquette de  $y$  est égale à  $n$  si et seulement si  $y \in Y^{\text{reg}}$ , et dans ce cas, l'étiquette profonde coïncide avec l'étiquette si et seulement si  $y \in Y^{\text{gen}}$ .

Si  $y \in Y^{\text{gen}}$ , l'étiquette  $\text{lbl}(y)$  est un  $n$ -uplet de réflexions tressées. En effet un tunnel élémentaire pour un point de  $LL(y)$  est homotope à un cercle autour de ce point, et les points de  $LL(u)$  correspondent à des points (lisses) de la surface du discriminant.

**Définition 3.4.9.** On a vu que  $0$  est le seul point de  $Y$  tel que  $LL(0) = \{0, \dots, 0\}$ , on note  $\delta$  l'élément simple tel que  $\text{lbl}(0) = (\delta)$ .

On prend  $v \in V^{\text{reg}}$  tel que l'orbite  $\bar{v}$  se trouve dans la fibre  $L_0$ , comme  $LL^{-1}(0) = 0$ , on a  $f_n(v) \neq 0$ . On considère un chemin dans  $V^{\text{reg}}$ , donné par  $t \mapsto v \exp(2i\pi t)$  (c'est bien un chemin de  $V^{\text{reg}}$ , car contenu dans la droite  $\text{Vect}(v)$ ), on note  $\tau \in P(W)$  cet élément.

On peut de même considérer le chemin  $t \mapsto v \exp(2i\pi/h)$ , il est envoyé dans  $B(W)$  sur

$$t \mapsto (f_1(v \exp(2i\pi/h)), \dots, f_n(v \exp(2i\pi/h))) = \exp(2i\pi)(0, f_n(v))$$

car  $f_n$  est homogène de degré  $h$ . Ce dernier chemin représente  $\delta$ , ce qui donne dans  $B(W)$  l'équation  $\delta^h = \tau$ , de plus, par construction, on remarque que l'image de  $\delta$  dans  $W$  est  $\zeta_h$ -régulier (car  $v$  en est par définition un vecteur propre pour  $\zeta_h$  dans  $V^{\text{reg}}$ ).

Par définition, un tunnel fixé se trouve dans une unique fibre  $L_y$ , on a une notion convenable de voisinage qui permet de comparer des tunnels se trouvant dans différentes fibres. L'intuition en est que, comme 'être un tunnel' est une condition ouverte, on peut perturber  $y$  sans modifier l'élément de  $B(W)$  représenté.

**Définition 3.4.10.** Soit  $T = (y, z, L)$  un tunnel, on appelle un  $T$ -voisinage de  $y$  un voisinage connexe par arcs  $\Omega$  de  $y$  dans  $Y$  tel que

$$\forall y' \in \Omega, \quad T' := (y', z, L) \text{ est un tunnel}$$

De tels voisinages existent pour tout tunnels, il suffit de prendre une boule centrée en  $y$  suffisamment petite. De plus, comme on choisit  $\Omega$  connexe par arcs, les deux tunnels  $T, T'$  sont homotopes, et donc représentent le même élément de  $B(W)$  :

**Lemme 3.4.11.** (*Règle d'Hurwitz*)

Soit  $T = (y, z, L)$  un tunnel, représentant un  $s \in B(W)$ . Si  $\Omega$  est un  $T$ -voisinage de  $y$ , alors pour  $y' \in \Omega$ , le tunnel  $T' = (y', z, L)$  représente également  $s$ .

*Remarque 3.4.12.* Si  $T_1, \dots, T_k$  est un système de tunnels élémentaires pour  $y$ , et  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  des  $T_i$ -voisinages de  $y$ , on considère  $\Omega$  un voisinage connexe par arcs inclus dans  $\bigcap_{i=1}^k \Omega_i$ . Une conséquence de la règle d'Hurwitz est que l'étiquette de  $y$  peut-être retrouvée à partir de celle de n'importe quel  $y' \in \Omega$ , en particulier pour un  $y'$  se trouvant dans l'intersection (non vide)  $\Omega \cap Y^{\text{gen}}$ .

Le reste de cette section est essentiellement constitué de conséquences de la règle d'Hurwitz.

**Corollaire 3.4.13.** Soient  $y \in Y$ ,  $(x_1, \dots, x_k)$  le support ordonné de  $LL(y)$ , et  $(n_1, \dots, n_k)$  les multiplicités associées. Pour tout  $i$ , la longueur de l'élément simple  $s_i$  (représenté par le tunnel élémentaire  $T_i$ ) est donnée par

$$\ell(s_i) = \sum_{\{j \mid \operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_j) \text{ et } \operatorname{Im}(x_i) \leq \operatorname{Im}(x_j)\}} n_j$$

*Démonstration.* Grâce à la règle d'Hurwitz, il suffit de régler le cas  $y \in Y^{\text{gen}}$ . Dans ce cas le corollaire affirme seulement que les éléments de l'étiquette de  $y$  sont des réflexions tressées.  $\square$

**Corollaire 3.4.14.** Soient  $y \in Y$ , et  $(s_{j_1}, \dots, s_{j_l})$  son étiquette profonde, on a

$$s_{j_l} \cdots s_{j_1} = \delta$$

*Démonstration.* Par définition de l'étiquette profonde, les  $s_{j_k}$  peuvent être représentés par des tunnels arbitrairement profonds, par conséquent tout tunnel  $T$  suffisamment profond et suffisamment long représente le produit  $s_{j_l} \cdots s_{j_1}$ , et l'origine  $0 \in Y$  se trouve alors dans un  $T$ -voisinage de  $y$ , on conclut par la règle d'Hurwitz.  $\square$

**Définition 3.4.15.** Soient  $G$  un groupe et  $B_n$  le groupe de tresse usuel à  $n$  brins. On a une action, dite **action d'Hurwitz** de  $B_n$  sur les  $n$  simplexes de  $\mathcal{N}G$  donnée, sur les générateurs  $\sigma_i$  par

$$\sigma_i \cdot (g_n, \dots, g_1) := (g_n, \dots, g_{i+2}, g_{i+1}g_i g_{i+1}^{-1}, g_{i+1}, g_{i-1}, \dots, g_1)$$

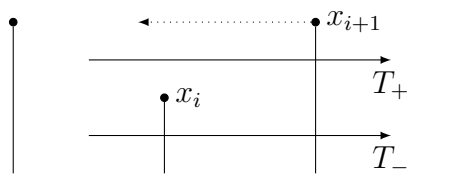
On a vu que le morphisme de Lyashko-Looijenga induit un revêtement  $Y^{\text{reg}} \rightarrow E_n^{\text{reg}}$ , et donc une action du groupe de tresse  $B_n = \pi_1(E_n^{\text{reg}}, x)$  sur  $LL^{-1}(x)$ .

**Corollaire 3.4.16.** Soient  $x \in E_n^{\text{gen}}$ ,  $\beta \in \pi_1(E_n^{\text{reg}}, x) \simeq B_n$ ,  $y \in LL^{-1}(x)$ ,  $y' := \beta \cdot y$ . Si  $(b_n, \dots, b_1) = \text{lbl}(y)$  et  $(b'_n, \dots, b'_1) = \text{lbl}(y')$ , alors

$$(b'_n, \dots, b'_1) = \beta \cdot (b_n, \dots, b_1)$$

pour l'action d'Hurewitz. Autrement dit l'application  $y \mapsto \text{lbl}(y)$  définie de  $LL^{-1}(x)$  vers  $B(W)^n$  est un morphisme de  $B_n$ -ensembles.

*Démonstration.* Il suffit bien-sûr de montrer le résultat pour les générateurs  $\sigma_i$  de  $B_n$ . Soit  $(x_n, \dots, x_1)$  le support ordonné de  $x$ . Par la règle d'Hurwitz, on peut modifier les parties imaginaires sans modifier l'étiquette, on peut en particulier supposer que  $\Im m(x_i) < \Im m(x_{i+1})$ . On peut considérer deux tunnels  $T_- = (y, z_-, L)$  et  $T_+ = (y, z_+, L)$  représentant respectivement  $b_{i+1}b_i$  et  $b_i$  :



Le chemin de  $E_n^{\text{reg}}$  déplaçant  $x_{i+1}$  le long de la flèche en pointillés représente  $\sigma_i$ . En appliquant la règle d'Hurwitz à  $T_+$  et  $T_-$ , on obtient  $b'_i = b_{i+1}$  et  $b_{i+1}b_i = b'_{i+1}b'_i$ , soit l'égalité voulue.  $\square$

**Corollaire 3.4.17.** *Soit  $y \in Y^{\text{gen}}$ , le cardinal de l'orbite de Hurwitz  $B_n.\text{lbl}(y)$  est inférieur à  $n!h^n/|W|$ , et on a équivalence entre*

- (i)  $|B_n.\text{lbl}(y)| = n!h^n/W$
- (ii) Les orbites  $B_n.y$  et  $B_n.\text{lbl}(y)$  sont isomorphes comme  $B_n$ -ensembles.
- (iii) L'application  $Y^{\text{gen}} \rightarrow E_n \times B(W)^n$  envoyant  $y$  sur  $(LL(y), \text{lbl}(y))$  est injective.

*Démonstration.* Si  $G$  est un groupe,  $\Omega, \Omega'$  deux  $G$ -ensembles, et  $\rho : \Omega \rightarrow \Omega'$  un  $G$ -morphisme. Si  $\Omega'$  est transitif, alors  $\rho$  est surjectif. Si de plus  $\Omega$  est fini, alors  $\Omega'$  l'est également,  $|\Omega'| \leq |\Omega|$  et

$$|\Omega'| = |\Omega| \Leftrightarrow \rho \text{ est injectif} \Leftrightarrow \rho \text{ est un isomorphisme}$$

On peut appliquer ceci aux  $B_n$ -ensembles  $B_n.y$  et  $B_n.\text{lbl}(y)$ , comme on a  $y \in Y^{\text{reg}}$ , on a

$$|LL^{-1}(LL(y))| = |B_n.y| = \frac{n!h^n}{|W|}$$

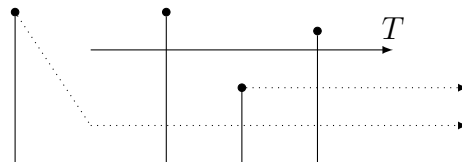
par le théorème 3.3.12, on obtient donc (i)  $\Leftrightarrow$  (ii).

L'assertion (iii) équivaut à dire que, pour tout  $y \in Y^{\text{gen}}$ ,  $\text{lbl}$  est injective sur la fibre de  $LL$  contenant  $y$ , cette fibre étant l'orbite  $B_n.y$ , cette reformulation donne clairement (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii).  $\square$

**Corollaire 3.4.18.** *Soit  $s \in B(W)$  un élément simple. Il existe  $y \in Y^{\text{gen}}$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $s = s_i \cdots s_1$ , où  $(s_n, \dots, s_1)$  est l'étiquette de  $y$ . Autrement dit tout élément simple s'écrit comme produit du début de l'étiquette d'un certain  $y \in Y^{\text{gen}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $T$  un tunnel représentant  $s$ , tout  $T$ -voisinage de  $y$  contient des points génériques, on peut donc assumer (quitte à le perturber) que  $y \in Y^{\text{gen}}$ .

On peut alors facilement construire un chemin dans  $E_n^{\text{reg}}$  se terminant dans une configuration convenable, en déplaçant vers le bas puis la droite les points ne se trouvant pas au dessus de  $T$  :



Ce chemin dans  $E_n^{\text{reg}}$  se relève par LL (théorème ) en un chemin dans un  $T$ -voisinage de  $y$  dont l'arrivée  $y'$  satisfait les conditions du corollaire.  $\square$



## 3.5 Monoïde de Bessis

On en vient (enfin) à montrer le résultat fondamental de cette troisième partie : le groupe de tresses d'un groupe de réflexions complexes bien-engendré est un groupe de Garside.

On reprend  $W$  un groupe de réflexions complexes bien-engendré, et on conserve les notations des sections précédentes, notamment pour l'ensemble  $S$  des éléments simples de  $B(W)$ .

On aborde le problème par deux côtés : on construit un monoïde d'intervalle Garside, que l'on relie par ailleurs au groupe de tresses  $B(W)$  via l'ensemble des éléments simples.

**Définition 3.5.1.** Soit  $W$  un groupe de réflexions complexes irréductible et bien-engendré. Un élément  $c \in W$  est un **élément de Coxeter (généralisé)** s'il est  $\zeta_h$  régulier. Plus généralement si  $W$  est un groupe de réflexions complexes bien-engendré se décomposant comme  $W := \bigoplus_i W_i$ , un élément de Coxeter de  $W$  est un produit  $c := \prod_i c_i$  d'éléments de Coxeter de  $W_i$ .

*Remarque 3.5.2.* La théorie des groupes de Coxeter assure que les éléments de Coxeter (au sens classique) sont bien des éléments de Coxeter pour le groupe complexifié (on pourra consulter [Hum, section 3.16]).

**Lemme 3.5.3.** ([Bes1, lemme 7.2])

*Si  $W$  est irréductible, un élément de Coxeter de  $W$  n'a pas de point fixe.*

Avec cette définition, on obtient que l'élément  $\delta$  de la définition 3.4.9 donne  $c := \pi(\delta)$  un élément de Coxeter de  $W$ , c'est à partir d'un élément de cette forme que l'on va construire un monoïde d'intervalle.

On considère  $R = \text{Ref}(W)$  l'ensemble des réflexions, il constitue un système de générateurs de  $W$ , qui de plus est stable par conjugaison, la longueur  $\ell_R$  est donc constante sur les classes de conjugaison, en particulier tout élément est équilibré : notons  $\prec_R$  et  $\succ_R$  les ordres partiels induits par  $R$  sur  $W$ . Pour  $g, h \in W$ , on a

$$g \prec h \Leftrightarrow \ell_R(g) + \ell_R(g^{-1}h) = \ell_R(h)$$

mais  $g^{-1}h = g(g^{-1}hg)g^{-1}$ , donc  $\ell_R(g^{-1}h) = \ell_R(hg^{-1})$  et  $g \prec h$  équivaut à  $h \succ g$ .

Soient  $y \in Y^{\text{gen}}$ , et  $(s_n, \dots, s_1) = \text{lbl}(y)$ , on a vu que les  $s_i$  sont des réflexions tressées, et que le produit  $s_n \cdots s_1$  est égal à  $\pi$ . En projetant ceci dans  $W$ , on obtient  $(r_n, \dots, r_1)$  un  $n$ -uplet de réflexions (comme image de réflexions tressées) dont le produit est égal à  $\pi(\delta) = c$ . Cette décomposition est de longueur minimale : comme  $c$  n'admet pas de point fixe, il ne peut s'écrire comme produit de moins de  $n$  réflexions : Si  $W' \subset W$  est engendré par  $n - 1$  réflexions, c'est un sous-groupe parabolique propre, qui s'exprime alors comme fixateur d'un sous ensemble non vide de  $V$ .

**Théorème 3.5.4.** (*[Bes1, théorème 7.5 et proposition 7.6]*)

Soient  $W$  un groupe de réflexions complexes irréductible bien-engendré, et  $c \in W$  un élément de Coxeter.

- (a) L'action de Hurwitz est transitive sur  $\text{Red}_R(c)$  l'ensemble des  $R$ -décompositions réduites de  $c$ , et on a  $|\text{Red}_R(c)| = \frac{n!h^n}{|W|}$ .
- (b) Pour  $y \in Y^{\text{gen}}$ , les applications

$$B_n \cdot y \xrightarrow{\text{lbl}} B_n \cdot \text{lbl}(y) \xrightarrow{\pi^n} B_n \cdot \pi^n(\text{lbl}(y))$$

sont des isomorphismes de  $B_n$ -ensembles entre l'orbite de  $y$  pour l'action de revêtement de  $B_n$ , et les orbites de  $\text{lbl}(y)$  et  $\pi^n(\text{lbl}(y))$  pour l'action d'Hurwitz.

La preuve proposée dans [Bes1] repose sur des calculs direct au cas par cas suivant la classification des groupes irréductibles. On obtient en particulier que les conditions équivalentes du corollaire 3.4.17 sont vérifiées.

**Lemme 3.5.5.** Soit  $y \in Y^{\text{gen}}$ , d'étiquette  $(s_n, \dots, s_1)$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\ell_R(\pi(s_k \cdots s_1)) = k$$

*Démonstration.* Comme  $y \in Y^{\text{gen}}$ , les  $s_i$  sont des réflexions tressées, envoyée par  $\pi$  sur une réflexion  $r_i \in R$ . D'où  $\ell_R(\pi(s_k \cdots s_i)) \leq i$  et  $\ell_R(\pi(s_n \cdots s_{k+1})) \leq n - i$ .

Mais  $\pi(s_n \cdots s_{k+1})\pi(s_{i+1} \cdots s_n) = \pi(\delta)$  est un élément de Coxeter, donc de longueur  $n$ , ce qui force les deux inégalités à être des égalités.  $\square$

**Proposition 3.5.6.** La restriction de  $\pi$  à l'ensemble  $S$  des éléments simples est injective. En particulier,  $S$  est fini.

*Démonstration.* Soient  $s, s'$  des simples tels que  $\pi(s) = \pi(s')$ , on choisit par le corollaire 3.4.18  $y$  et  $y' \in Y^{\text{gen}}$  tels que  $s = s_i \cdots s_1$  (resp  $s' = s'_j \cdots s'_1$ ) soit produit des  $i$  (resp.  $j$ ) premiers termes de l'étiquette de  $y$  (resp. de  $y'$ ). Les images de  $y$  et  $y'$  par  $LL$  sont formées de  $n$  points distincts de parties réelles distinctes, le chemin affine de  $LL(y)$  vers  $LL(y')$  se relève en un chemin  $y \rightarrow y''$  dans  $Y^{\text{reg}}$  tel que  $LL(y'') = LL(y')$  et, grâce à la règle d'Hurwitz,  $\text{lbl}(y) = \text{lbl}(y'')$ . Donc quitte à remplacer  $y$  par  $y''$ , on peut supposer que  $LL(y) = LL(y')$ . Par le lemme précédent, on a  $i = j$ .

Par le théorème 3.5.4, on peut trouver  $\beta \in B_i$  et  $\beta' \in B_{n-i}$  tels que

$$\beta \cdot (\pi(s_1), \dots, \pi(s_i)) = (\pi(s'_1), \dots, \pi(s'_i)) \quad \text{et} \quad \beta' \cdot (\pi(s_{i+1}), \dots, \pi(s_n)) = (\pi(s'_{i+1}), \dots, \pi(s'_n))$$

En voyant  $B_i \times B_{n-i}$  comme sous-groupe de  $B_n$  (faisant agir  $B_i$  sur les  $i$  premiers brins et  $B_{n-i}$  sur les  $n - i$  derniers), et en posant  $\beta'' = (\beta, \beta')$ , on a  $\beta'' \cdot \pi^n(\text{lbl}(y)) = \pi^n(\text{lbl}(y'))$  et à nouveau par le théorème 3.5.4,  $\beta'' \cdot \text{lbl}(y) = \text{lbl}(y')$ , et comme  $\beta''$  ne modifie pas le produit des  $i$  premiers termes de l'étiquette, on a  $s = s'$ .  $\square$

C'est à partir de l'ensemble  $S$  que nous développons le résultat, on pose  $M$  le sous-monoïde de  $B(W)$  engendré par  $S$ . Le reste de cette section est dédié à la preuve de

**Théorème 3.5.7.** Le monoïde  $M$  a une structure de monoïde d'intervalle Garside pour  $c = \pi(\delta)$  et le système de générateur  $S$ .

Le monoïde  $M$  engendre  $B(W)$  comme groupe, ce dernier est donc un groupe de Garside.

On introduit une relation  $\supseteq$  sur  $S$  définie comme suit : pour  $s, s' \in S$ , on pose  $s' \supseteq s$  si il existe  $(y, z) \in V^{\text{reg}}/W$ ,  $L, L' \in \mathbb{R}_+$  avec  $L \leq L'$  tel que  $(y, z, L)$  soit un tunnel représentant  $s$  et  $(y, z, L')$  un tunnel représentant  $s'$ .

**Proposition 3.5.8.** *Pour  $s \in S$ , on a  $\ell(s) = \ell_R(\pi(s))$ , de plus pour  $s, s' \in S$ , on a équivalence entre*

- (i)  $s' \supseteq s$
- (ii)  $s' \succ s$  au sens de la divisibilité dans  $S \subset M$ .
- (iii)  $\pi(s') \succ_R \pi(s)$  dans  $W$ .

*Démonstration.* Soit  $s \in S$ , on a vu que  $s$  s'exprime comme produit des  $i$  premiers termes de l'étiquette d'un  $y \in Y^{\text{gen}}$  (corollaire 3.4.18), on conclut alors par le lemme 3.5.5.

Pour les équivalences, (i)  $\Rightarrow$  (ii) est clair (le tunnel  $(y, z + L, L' - L)$  convient).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : en notant  $s' = s''s$  dans  $M$ , on a  $\ell(s') = \ell(s'') + \ell(s)$  et donc  $\ell_R(\pi(s')) = \ell_R(\pi(s'')) + \ell_R(\pi(s))$ . Comme  $\pi(s'') = \pi(s')\pi(s)^{-1}$ , on a bien  $\pi(s') \succ_R \pi(s)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : On considère  $y, y' \in Y^{\text{gen}}$  tels que, en notant  $\text{lbl}(y) = (s_n, \dots, s_1)$  et  $\text{lbl}(y') = (s'_n, \dots, s'_1)$ , on ait  $s = s_{\ell(s)} \cdots s_1$  et  $s' = s'_{\ell(s')} \cdots s'_1$ . On pose  $w = \pi(s)$ ,  $w' = \pi(s')$ ,  $r_i = \pi(s_i)$  et  $r'_i = \pi(s'_i)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En supposant (iii), on obtient l'existence de réflexions  $r''_1, \dots, r''_{\ell(s')-\ell(s)}$  telles que

$$r''_{\ell(s')-\ell(s)} \cdots r''_1 r_{\ell(s)} \cdots r_1 = r'_{\ell(s')} \cdots r'_1$$

soient deux décompositions  $R$ -réduites de  $w'$ . En complétant ces décompositions par les  $r'_k$  pour  $k > \ell(s')$ , on obtient deux décompositions réduites de  $c$ , et par le théorème 3.5.4, il existe  $\beta \in B_n$ , ne modifiant que les  $\ell(s')$  premiers brins, envoyant l'une sur l'autre.

On pose  $y'' \in Y^{\text{gen}}$  l'élément tel que  $\text{lbl}(y'') = \beta \cdot \text{lbl}(y') =: (s''_n, \dots, s''_1)$ , comme  $\beta$  ne touche que les  $n$ -premiers brins, son action préserve le produit

$$s''_{\ell(s')} \cdots s''_1 = s'_{\ell(s')} \cdots s'_1 = s'$$

par ailleurs, on a par définition de  $\beta$ ,  $\pi(s''_i) = r_i$  pour  $i \in \llbracket 1, \ell(s) \rrbracket$ , donc  $\pi(s''_{\ell(s)} \cdots s''_1) = \pi(s_{\ell(s)} \cdots s_1) = w$ . L'injectivité de  $\pi$  sur  $S$  entraîne

$$s''_{\ell(s)} \cdots s''_1 = s_{\ell(s)} \cdots s_1 = s$$

Pour un complexe  $z$  de partie réelle/imaginaire suffisamment basse, on peut trouver  $L \leq L'$  tel que  $(y'', x, L)$  et  $(y'', x, L')$  représentent respectivement les produits

$$s''_{\ell(s)} \cdots s''_1 = s \quad \text{et} \quad s''_{\ell(s')} \cdots s''_1 = s'$$

□

**Proposition 3.5.9.** *L'application  $\pi$  se restreint en un isomorphisme  $(S, \supseteq) \simeq ([1, c], \succ_R)$ . En particulier,  $\supseteq$  est une relation d'ordre sur  $S$ , synonyme à  $\succ$ .*

*Démonstration.* La proposition précédente appliquée à  $s' = \delta$  montre que  $\pi$  envoie  $S$  dans  $[1, c]$ , et aussi que  $\pi$  se restreint à  $S$  en une application croissante, dont on sait déjà qu'elle est injective.

Pour la surjectivité, soit  $w \in [1, c]$ , il existe  $r'_n \cdots r'_1$  une décomposition réduite de  $c$  dont le produit des  $\ell_R(w)$  premiers termes est  $w$ .

Par transitivité de l'action de Hurwitz, il existe  $y \in Y^{\text{gen}}$  dont l'étiquette a  $(r'_n, \dots, r'_1)$  pour image par  $\pi^n$ , le produit des  $\ell_R(w)$  premiers termes de l'étiquette de  $y$  est dans  $\pi^{-1}(w)$  □

À ce stade,  $c = \pi(\delta)$  est un élément équilibré de  $W$ , et les ordres  $\prec_R$  et  $\succ_R$  sont synonymes sur  $W$ , il reste donc pour montrer que le monoïde  $M(c)$  est de Garside à montrer que  $[1, c]$  forme un treillis, un résultat pour lequel nous n'avons pas d'autres démonstration que des études de cas sur la classification, études notamment réalisées par calcul direct sur ordinateur (cf [Bes1, lemme 8.6]).

**Proposition 3.5.10.** *On appelle **relation de tresses duales** pour  $W$  et  $c$  les relations formelles de la forme*

$$rr' = r'r''$$

où  $r, r', r'' \in R$  sont telles que  $r \neq r'$ ,  $rr' \in [1, c]$  et on a  $rr' = r'r''$  dans  $W$ .

Le monoïde  $M(c)$  est présenté par  $R_c := R \cap [1, c]$  et les relations de tresses duales.

*Démonstration.* Les relations de tresse sont bien des relations de définition du monoïde d'intervalle : ce sont des égalités entre deux décompositions réduites d'un même élément.

Réciproquement, une relation de  $M(c)$  est une égalité entre deux décompositions réduites  $r_k \cdots r_1 = r'_k \cdots r'_1$ . Soit  $w$  la valeur de ces produits dans  $W$ , on peut compléter ces deux mots en des décompositions de  $c : (r_n, \dots, r_1)$  et  $(r_n, \dots, r_{k+1}, r'_k, \dots, r'_1)$  qui sont reliés par l'action de Hurwitz sur les  $k$  premiers termes, il suffit donc de montrer que de telles transformations préservent le produit dans  $M$  des  $k$  premiers termes.

Soit  $i < k$ , et  $\sigma_i$  le générateur associé de  $B_n$ , on a

$$\sigma_i.(r_n, \dots, r_1) = (r_n, \dots, r_{i+2}, r_{i+1}r_i r_{i+1}^{-1}, r_{i+1}, r_{i-1}, \dots, r_n)$$

En notant  $\rho_i = r_{i+1}r_i r_{i+1}^{-1}$ , on a  $\rho_i r_{i+1} = r_{i+1}r_i$  dans  $W$ , et cet élément est bien dans  $[1, c]$  par

$$c(r_{i-1} \cdots r_1) c^{-1} r_n \cdots r_{i+1} r_i = c(r_{i-1} \cdots r_1) r_1^{-1} \cdots r_{i-1}^{-1} = c$$

les produits  $r_n \cdots r_{k+1} r_k \cdots r_1$  et  $r_n \cdots r_{k+1} r_k \cdots \rho_i r_{i+1} \cdots r_1$  sont donc égaux dans  $M(c)$ , qui est simplifiable (comme monoïde d'intervalle Garside), donc  $r_k \cdots r_1 = r_k \cdots \rho_i r_{i+1} \cdots r_1 \in M(c)$ , d'où le résultat.  $\square$

À ce stade, nous avons  $M(c)$  un monoïde d'intervalle Garside, et une présentation de ce monoïde, il ne reste plus à montrer que  $M(c)$  est isomorphe au monoïde  $M$  engendré par  $S$  dans  $B(W)$ .

On a déjà une bijection  $S \rightarrow [1, c]$  entre d'un côté un système de générateurs de  $M$ , et de l'autre les éléments simples de  $M(c)$ , on commence par montrer que l'application  $\phi : [1, c] \rightarrow S$  induit un morphisme  $M(c) \rightarrow M$ .

Soient  $x, x' \in [1, c]$  tel que le produit  $xx' =: x''$  soit défini dans  $[1, c]$ , on a par définition  $x'' \succ_R x'$ , donc  $\phi(x'') \succ \phi(x')$ , l'élément  $s \in S$  tel que  $\phi(x'') = s\phi(x')$  est égal à  $\phi(x)$  puisque leurs images par  $\pi$  sont égales dans  $W$  (et  $\pi$  est injective sur  $S$ ).

On obtient donc un morphisme de monoïde  $M(c) \rightarrow M$  et un morphisme de groupes  $\Phi : G(c) \rightarrow B$ , il reste à montrer que ce morphisme est un isomorphisme. On va utiliser pour cela une présentation (abstraite) du groupe de tresses, issue de [Bes1, section 4].

On avait défini  $Y^{\text{reg}}$  comme la pré-image par  $LL$  de  $E_n^{\text{reg}}$ , il s'agit donc par définition du complémentaire dans  $Y$  de l'hypersurface  $\mathcal{K}$  définie par le résultant du discriminant de  $W$  et de sa dérivée en  $X_n$ . On pose  $p : Y \times \mathbb{C} \rightarrow Y$  la projection canonique, et  $E = p^{-1}(Y \setminus \mathcal{K}) \cap (V^{\text{reg}}/W)$ , la projection  $p$  se restreint en une fibration localement triviale  $E \rightarrow Y \setminus \mathcal{K}$ ,

dont les fibres sont des droites complexes privées de  $n$  points (distincts), cette fibration est scindée (cf [Bes1, lemme 4.3]), on a donc une suite exacte courte scindée à droite

$$1 \longrightarrow \pi_1(p^{-1}(y), (y, z)) \longrightarrow \pi_1(E, (y, z)) \longrightarrow \pi_1(Y^{\text{reg}}, y) \longrightarrow 1$$

où  $\pi_1(p^{-1}(y), (y, z))$  est un groupe libre à  $n$  générateurs. Si  $f_1, \dots, f_n$  et  $g_1, \dots, g_m$  sont des familles de générateurs de  $\pi_1(p^{-1}(y), (y, z))$  et  $\pi_1(Y^{\text{reg}}, y)$  (respectivement), le générateur  $g_i$  induit un automorphisme  $\phi_j$  de  $\pi_1(E, (y, z))$ , et on a une présentation

$$\pi_1(E, (y, z)) \simeq \langle f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \mid g_j f_i = \phi_j(f_i) g_j, \ i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ j \in \llbracket 1, m \rrbracket \rangle$$

L'inclusion  $E \rightarrow V^{\text{reg}}/W$  donne un morphisme  $\pi_1(E, (y, z)) \rightarrow B(W)$ , dont on peut montrer ([Bes1, théorème 4.4]) qu'il est surjectif et dont le noyau est engendré par les  $g_i$ , d'où

$$B(W) \simeq \langle f_1, \dots, f_n \mid f_i = \phi_j(f_i), \ i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ j \in \llbracket 1, m \rrbracket \rangle$$

Fixons à présent  $y \in Y^{\text{gen}}$ , soient  $(s_n, \dots, s_1)$  l'étiquette de  $y$ . Comme  $LL : Y^{\text{reg}} \rightarrow E_n^{\text{reg}}$  est un revêtement, le groupe fondamental  $\pi_1(Y^{\text{reg}}, y)$  s'identifie à un sous-groupe de  $B_n$ . On peut prendre les  $s_i$  comme générateurs de  $\pi_1(p^{-1}(y), (y, z))$ , et les automorphismes  $\phi_j$  sont obtenues par action d'Hurwitz sur  $s_1, \dots, s_n$ . Autrement dit, le groupe  $B(W)$  admet une présentation dont les générateurs sont les  $s_i$  et les relations sont données par des égalités entre certains mots en les  $s_i$ , reliés par l'action d'Hurwitz de  $\pi_1(Y^{\text{reg}}, y) \subset B_n$ , or on sait que de telles relations sont déjà vérifiées dans le monoïde d'intervalle  $M(c)$ , ce qui montre que le morphisme  $G(c) \rightarrow B(W)$  est un isomorphisme. En particulier  $M(c)$  s'identifie avec son image  $M$  dans  $B(W)$ , ce qui termine la preuve du théorème 3.5.7.

## Quatrième partie

# Centralisateurs d'éléments réguliers, présentation de $B_{31}$

Grâce aux relations de tresses duales, on a obtenu une présentation du groupe de tresses d'un groupe de réflexions complexes irréductible et bien-engendré, mais ces résultats ne nous apprennent rien du cas d'un groupe mal engendré. On s'intéresse dans cette partie au groupe  $G_{31}$ , que l'on voit comme centralisateur d'un élément  $i$ -régulier de  $G_{37}$ . On va construire à partir du monoïde de Bessis de  $G_{37}$  une catégorie divisée, puis en prendre une sous catégorie dont le groupoïde associé est équivalent à  $B_{31} := B(G_{31})$ .

Comme ces catégories seront construites via leurs germes des simples, on pourra en déduire une présentation de  $B_{31}$ .

### 4.1 Catégorie de tresses du centralisateur d'un élément régulier

On reprend les notations de la partie précédente :  $W$  est un groupe de réflexions complexes irréductible et bien-engendré (son degré maximal est noté  $h$ ),  $d$  est un nombre régulier pour  $W$  et  $W'$  est le centralisateur dans  $W$  d'un élément  $\zeta_d$  régulier. Comme les variétés  $V^{\text{reg}}/W$  et  $Y$  sont définies par des sous-algèbres (graduées) de  $\mathcal{O}(V)$ , elles sont donc munies d'une action de  $\mathbb{C}^*$ , en particulier de  $\mu_d$ , et on sait par le théorème 3.1.21 que  $V^{\text{reg}}/W' \simeq (V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$ .

Ceci dit, le monoïde de Bessis  $M$  n'a pas forcément d'automorphisme d'ordre  $d$ , mais en remplaçant  $M$  par une catégorie divisée  $M_m$  tel que  $d|mh$ , on obtient un automorphisme  $\phi^{mh/d}$  de  $M_m$  d'ordre  $d$ , et on pourra prendre la sous catégorie de  $M_m$  invariante sous cet automorphisme.

#### 4.1.1 Notations

Nous avons au préalable besoin de quelques définitions. On commence par étendre l'application de Lyashko-Looijenga à  $Y \times \mathbb{C} = V/W$  :

Soit  $(y, z) \in V/W$ , on définit  $\overline{LL}((y, z))$  comme la configuration  $LL(y) - z$ , obtenue en translatant  $LL(y)$  par  $-z$  dans  $\mathbb{C}$ .

Notons que l'on avait défini  $LL(y)$  à valeur dans  $E_n$ , mais à priori,  $\overline{LL}((y, z))$  se trouve dans  $\overline{E_n}$  l'espace des configurations non centrées. On notera  $\overline{E_n}^\circ$  le sous-ensemble de  $\overline{E_n}$  des configurations ne contenant pas 0.

Ces définitions nous permettent déjà d'uniformiser certains points précédents : on avait défini  $\mathcal{U}$  le point base de  $V^{\text{reg}}/W$  en demandant à  $(y, z)$  que  $z$  ne soit en dessous d'aucun point de  $LL(y)$ , ce qui revient en fait à demander que  $\overline{LL}((y, z))$  soit d'intersection vide avec la demi-droite  $i\mathbb{R}_+$ . De même on a  $(y, z) \in V^{\text{reg}}/W$  si et seulement si  $\overline{LL}((y, z)) \in \overline{E_n}^\circ$ .

On a une action naturelle de  $\mathbb{C}^\times$  sur  $E_n$  et  $\overline{E_n}^\circ$ , définie par

$$\lambda\{x_1, \dots, x_n\} := \{\lambda x_1, \dots, \lambda x_n\}$$

La graduation de  $\mathcal{O}(V/W)$  donne immédiatement que  $\overline{LL}(\lambda(y, z)) = \lambda^h \overline{LL}((y, z))$ .

Dans l'exemple de  $G_{31}$ , on n'a pas  $d|h$  (d'ailleurs si tel était le cas, le groupe  $W'$  serait encore

bien-engendré) on pose  $h'$  et  $d'$  les nombres  $h$  et  $d$  divisé par leur  $\text{pgcd}$ , on a en particulier  $h'd = hd' = h'd'(h \wedge d) = h \vee d$ .

**Lemme 4.1.1.** *On a  $d'|n$ .*

*Démonstration.* Comme  $d$  est régulier,  $(V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$  est non vide (c'est l'espace des orbites  $V^{\text{reg}}/W'$ ). Soit  $(y, z) \in (V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$ , on a

$$\overline{LL}((y, z)) = \overline{LL}(\zeta_d(y, z)) = \zeta_d^h \overline{LL}((y, z))$$

donc  $\overline{LL}((y, z))$  est  $\zeta_d^h$ -invariant. Comme  $\zeta_d^h$  est une racine primitive  $d'$ -ème de l'unité, les orbites sous la multiplication par  $\zeta_d^h$  sont soit de cardinal  $d'$ , soit réduite à  $\{0\}$ , le second cas est impossible car  $\overline{LL}((y, z)) \in \overline{E}_n$ , donc  $n$ , le cardinal de  $\overline{L}$ , est un multiple de  $d'$ .  $\square$

*Remarque 4.1.2.* Cette preuve nous apprend aussi que, pour  $(y, z) \in (V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$ , le barycentre de  $\overline{LL}((y, z)) = LL(y) - z$  doit être  $-z = 0$ , donc  $(V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$  peut être identifié à son image dans  $Y$ .

Comme expliqué ci-dessus, nous allons utiliser une catégorie divisée du monoïde de Bessis de  $G_{37}$ , si cette section est avant tout de nature théorique, on ne doit pas négliger les aspects plus pratiques : on finira par calculer effectivement une présentation de catégorie, et il est souvent plus efficace de calculer avec un groupe de réflexions qu'avec un monoïde, fut-il de Garside ! Par chance le monoïde de Bessis est en premier lieu un monoïde d'intervalle : ses simples sont donc décrits par des éléments de  $W$ . On pourra donc décrire les simples de la catégorie divisée (et plus tard de la sous catégorie de tresses) uniquement en termes de décomposition dans  $W$  d'un élément de Coxeter  $c$  :

Soit  $c \in W$  un élément de Coxeter (qui nous suivra le reste de cette partie), on définit

$$D(c) := (D_n(c))_{n \in N^*}$$

où

$$D_n(c) = \left\{ (c_n, \dots, c_1) \in W^k \mid c_n \cdots c_1 = c \text{ et } \sum_{i=1}^n \ell_R(c_i) = \ell_R(c) \right\}$$

Ceci n'est qu'une répétition de la définition 2.5.12 dans le cas d'un monoïde d'intervalle, ainsi, on peut décrire l'ensemble de Garside associé à la catégorie divisée  $M_{d'}$  :

$$\left( \sqrt[d']{D}(c) \right) = \left( \sqrt[d']{D}_n(c) \right)_{n \in N^*}$$

où  $\sqrt[d']{D}_n(c) = D_{d'n}(c)$ . On a vu que l'automorphisme structural  $\phi_{d'}$  agit sur  $\sqrt[d']{D}_n(c)$  par

$$(c_{nd'}, \dots, c_1)^{\phi_{d'}} = (c_{(n-1)d'}, \dots, c_1, c_{nd'}^c, \dots, c_{nd'-d'+1}^c)$$

Comme  $c$  est d'ordre  $h$ , l'automorphisme  $\phi_{d'}$  est d'ordre  $d'h = dh'$  donc divisible par  $d$  : l'automorphisme  $\phi_{d'}^{h'}$  est donc un automorphisme de Garside de  $M_{d'}$  d'ordre  $d$ .

**Définition 4.1.3.** On définit la **catégorie de tresses** (de Bessis) pour  $W$  (par rapport à  $W'$ ) comme la sous-catégorie invariante

$$(M', \phi', \Delta') = (M_{d'})^{\phi_{d'}^{h'}}$$

On note  $G'$  son groupoïde libre associé. L'ensemble de Garside de  $M'$  est donné par

$$D'(c) = \left( \sqrt[d']{D}(c) \right)^{\phi_{d'}^{h'}}$$

À ce stade, on a le diagramme de foncteurs suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 M' & \hookrightarrow & M_{d'} & \xrightarrow{\kappa_m} & M \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G' & \longrightarrow & G_{d'} & \xrightarrow{\sim} & G \\
 & & & & \downarrow \simeq \\
 & & & & B
 \end{array}$$

Les monomorphismes désignant des foncteurs fidèles, et les épimorphismes les foncteurs pleins. Le foncteur  $G_{d'} \rightarrow G$  est une équivalence, et le morphisme  $G \rightarrow B$  est un isomorphisme de groupes (comme vu à la section précédente).

### 4.1.2 Lien combinatoire $\leftrightarrow$ topologie

Nous sommes dans une situation similaire à ce que l'on avait au niveau du monoïde de Bessis : on a d'un côté une structure de Garside, que l'on veut relier à un objet essentiellement topologique : un groupe fondamental. Toute cette sous-section est dédiée à la preuve de

**Théorème 4.1.4.** *Le groupoïde  $G'$  est équivalent au groupe de tresses  $B(W')$ .*

Pour montrer ceci, on va introduire deux groupoïdes  $B'$  et  $B_{d'}$  pour compléter la dernière ligne du diagramme fonctoriel précédent. On commence par introduire les ensembles qui nous serviront de point-base épais.

On a vu que

$$\mathcal{U} = \{x \in V^{\text{reg}}/W \mid \overline{LL}(x) \cap iR_+ = \emptyset\}$$

On définit donc  $\mathcal{U}^{\mu_d}$  comme l'intersection de  $\mathcal{U}$  avec  $(V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$ , on a vu par ailleurs que si  $x$  est  $\mu_d$ -invariant, alors  $\overline{LL}(x)$  est  $\mu_d^h$ -invariant, donc  $\mu_{d'}$ -invariant, il est donc équivalent de définir

$$\mathcal{U}^{\mu_d} := \left\{ x \in (V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d} \mid \overline{LL}(x) \cap \left( \bigcup_{\zeta \in \mu_{d'}} \zeta iR_+ \right) = \emptyset \right\}$$

On pose aussi

$$\mathcal{U}_{d'} := \left\{ x \in V^{\text{reg}}/W \mid \overline{LL}(x) \cap \left( \bigcup_{\zeta \in \mu_{d'}} \zeta iR_+ \right) = \emptyset \right\}$$

On a clairement  $\mathcal{U}^{\mu_d} \subset \mathcal{U}_{d'} \subset \mathcal{U}$ .

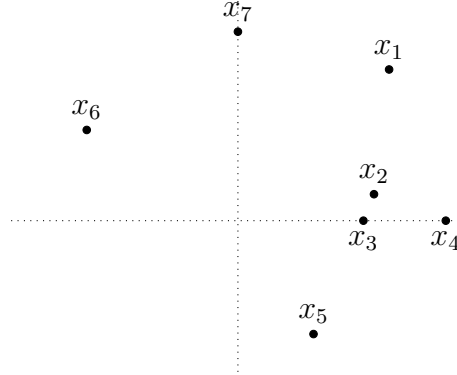
**Exemple 4.1.5.** Prenons ici  $d' = 3$ , la différence principale entre  $\mathcal{U}_{d'}$  et  $\mathcal{U}^{\mu_d}$  est que les configurations dans le second ont des propriétés de symétrie : par exemple dans les deux configurations suivantes





Seule la seconde est dans  $\mathcal{U}^{\mu_d}$  (les deux sont dans  $\mathcal{U}_{d'}$ ).

Les deux sous-ensembles  $\mathcal{U}_{d'}$  et  $\mathcal{U}^{\mu_d}$  ne sont pas connexes par arcs, mais leurs composantes connexes par arcs sont contractiles, on pourra donc les utiliser comme points base épais. Devant l'importance de l'action de  $\mu_d$ , nous sommes amenés à changer de convention pour la notation de éléments de  $\overline{E_n}^\circ$  : au lieu de les noter 'de droite à gauche', on les note de façon circulaire, en partant de la demi-droite  $i\mathbb{R}_+$  (exclue), et en tournant dans le sens horaire, deux points d'argument identiques étant numéroté du plus petit au plus grand (en module) :



**Définition 4.1.6.** Soit  $x \in \overline{E_n}^\circ$ , la suite  $(x_1, \dots, x_k)$  définie ci-dessus de points distincts de  $x$  est le **support cyclique** de  $x$ , la suite des multiplicités associée forme la **multiplicité cyclique** de  $x$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on note  $\theta_j \in ]0, 2\pi]$  l'unique nombre tel que  $e^{i\theta_j}x_j = i|x_j|$ , la suite  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$  forme l'**argument cyclique** de  $x$ .

On étend ces définitions de  $\overline{E_n}^\circ$  à  $V^{\text{reg}}/W$  en définissant le support (resp. multiplicité, argument) cyclique de  $(y, z)$  comme celui de  $\overline{LL}((y, z))$ .

À cette notion de support cyclique, on va faire correspondre une notion d'étiquette cyclique, et même plus tard de tunnel cyclique.

Soit  $x \in (V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$  de support  $(x_1, \dots, x_k)$  et d'argument cyclique  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ , et soit  $\varepsilon > 0$ , comme  $e^{i(\theta_j - \varepsilon)}\overline{LL}(x) = \overline{LL}(e^{i(\theta_j - \varepsilon)/h}x)$ , le point  $e^{i(\theta_j - \varepsilon)}x_j$  se trouve dans cette dernière configuration, et on peut donc lui associer  $s_{i,\varepsilon}$  l'élément correspondant de l'étiquette de  $e^{i(\theta_j - \varepsilon)/h}x$ . Comme mentionné plus haut, on préférera voir les simples comme des éléments de  $W$ .

Par la règle d'Hurwitz, on voit que  $s_{i,\varepsilon}$  ne dépend pas du choix d'un  $\varepsilon$  assez petit, par exemple pour  $j = 1$ ,  $0 < \varepsilon \leq \theta_1$  convient et donne le même élément simple, on a en particulier une suite bien définie

$$(c_k, \dots, c_1) := (s_{k,\varepsilon}, \dots, s_{1,\varepsilon})$$

**Définition 4.1.7.** On définit l'**étiquette cyclique** de  $(y, z) \in V^{\text{reg}}/W$  comme la suite

$$\text{clbl}(y, z) := (c_k, \dots, c_1)$$

**Lemme 4.1.8.** Pour tout  $x \in V^{\text{reg}}/W$ , l'étiquette cyclique est une décomposition de  $c$  :  $\text{clbl}(y, z) \in D(c)$ .

*Démonstration.* Considérons le chemin  $\gamma : t \mapsto e^{2i\pi/h}x$ , on a vu que ce chemin représente  $\delta \in B$ .

Ce chemin est concaténation de chemins homotopiquement triviaux et de chemins de la forme

$$\begin{aligned} \gamma_{y,j,\varepsilon} : [\theta_j - \varepsilon, \theta_j + \varepsilon] &\longrightarrow V^{\text{reg}}/W \\ t &\longmapsto e^{\frac{it}{h}}x \end{aligned}$$

chacun d'entre eux étant, par la règle d'Hurwitz, représentant de l'élément simple de  $B$  correspondant à  $c_j$ . Le produit des  $c_j$  est donc égal à  $c$  dans  $W$ .  $\square$

**Proposition 4.1.9.** (*[Bes1, proposition 11.13]*)

Une configuration  $x \in \overline{E_n}^\circ$  est dit **cycliquement compatible** avec  $(c_k, \dots, c_1) \in D(c)$  si les multiplicités cycliques de  $x$  coïncident avec  $(\ell_r(c_1), \dots, \ell_R(c_k))$ .

L'application  $x \mapsto (\overline{LL}(x), \text{clbl}(x))$  induit une bijection entre  $V^{\text{reg}}/W$  et l'ensemble des paires cycliquement compatibles.

Revenons à  $\mathcal{U}_{d'}$  et  $\mathcal{U}^{\mu_d}$ , le support d'un point  $x \in \mathcal{U}_{d'}$  se décompose naturellement en  $d'$  sous-ensembles  $A_1, \dots, A_{d'}$ , le sous ensemble  $A_j$  étant formé des points dont l'argument est compris entre  $\frac{2\pi j}{d'}$  et  $\frac{2\pi(j+1)}{d'}$ . Si  $x \in \mathcal{U}_{d'}$ , les  $A_j$  peuvent être vides, mais si  $x \in \mathcal{U}^{\mu_d}$ , ils sont tous non vides et de même cardinal.

On note  $m_j$  le cardinal de  $A_j$ , et  $x_{j,1}, \dots, x_{j,m_j}$  les points du support de  $x$  se trouvant dans  $A_j$ .

**Définition 4.1.10.** Pour  $x \in \mathcal{U}_{d'}$ , on définit le **contenu  $d'$ -cyclique** de  $x$  par

$$\text{cc}_{d'}(x) := (c_{k,m_k} \cdots c_{k,1}, \dots, c_{1,m_1} \cdots c_{1,1}) \in \sqrt[d']{D_1}(c)$$

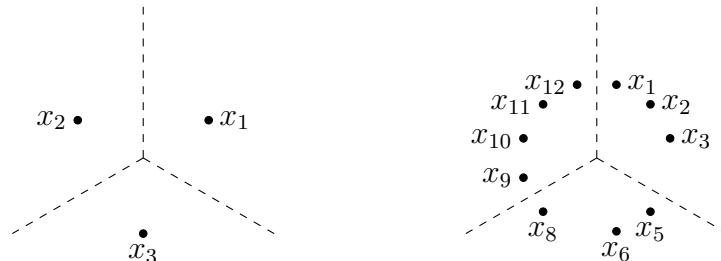
(les produits vides sont remplacés par 1).

**Lemme 4.1.11.** Soit  $x \in \mathcal{U}_{d'}$ , le chemin  $[0, 1] \rightarrow V^{\text{reg}}/W$  donné par  $t \mapsto \exp(\frac{2i\pi}{d'h}t)x$  représente dans  $B$  l'élément simple associé au premier terme de  $\text{cc}_{d'}(x)$ .

*Démonstration.* Immédiat par construction de  $\text{cc}_{d'}$ .  $\square$

**Définition 4.1.12.** Soit  $\sigma = (c_{d'k}, \dots, c_1) \in \sqrt[d']{D}(c)$  avec  $k \geq 1$ . On définit l'**image standard**  $x_\sigma$  comme l'unique<sup>14</sup> élément de  $\mathcal{U}_{d'}$  tel que, pour tout  $j$  tel que  $c_j \neq 1$ , le point  $\exp(i\pi(\frac{1}{2} - \frac{2j-1}{d'k}))$  est dans  $\overline{LL}(x_\sigma)$  et le terme correspondant de  $\text{clbl}(x_\sigma)$  est  $c_j$ .

**Exemple 4.1.13.** Voici deux exemples avec  $d' = 3$ , d'abord avec  $k = 1$ , et  $(c_3, c_2, c_1)$  ne contenant aucun terme trivial, et avec  $k = 4$  et  $c_4, c_7$  étant les termes triviaux de  $(c_{12}, \dots, c_1)$ .



14. l'existence et l'unicité de  $x_\sigma$  sont garanties par la proposition 4.1.9

**Lemme 4.1.14.** Soit  $\sigma = (c_{d'k}, \dots, c_1) \in \sqrt[d']{D}(c)$  avec  $k \geq 1$ , on a :

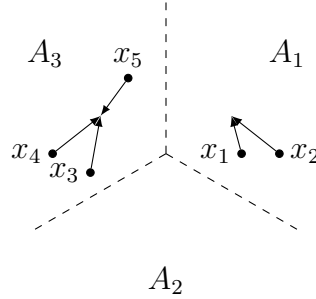
- (a)  $\text{clbl}(x_\sigma)$  est obtenu en retirant les termes triviaux de  $\sigma$
- (b)  $\text{cc}_{d'}(x_\sigma) = (c_{kd'} \cdots c_{kd'-d'+1}, \dots, c_k \cdots c_1)$ .
- (c) Si  $\sigma \in D'(c)$ , alors  $x_\sigma \in \mathcal{U}^{\mu_d}$ .

**Proposition 4.1.15.**

- (a) Deux éléments de  $\mathcal{U}_{d'}$  (resp.  $\mathcal{U}^{\mu_d}$ ) sont dans la même composante connexe par arcs si et seulement si ils ont même contenu  $d'$ -cyclique.
- (b) Les composantes connexes par arcs de  $\mathcal{U}_{d'}$  (resp.  $\mathcal{U}^{\mu_d}$ ) sont contractiles.
- (c) L'application  $\text{cc}_{d'}$  induit une bijection  $\pi_0(\mathcal{U}_{d'}) \simeq \sqrt[d']{D}_1(c)$  et  $\pi_0(\mathcal{U}^{\mu_d}) \simeq D'_1(c)$ .

*Démonstration.* (a) Soient  $x, x'$  deux points d'une même composante connexe par arcs de  $\mathcal{U}_{d'}$ , et  $\gamma : x \rightarrow x'$  un chemin, le chemin  $(t, s) \mapsto \exp(\frac{2i\pi}{d'h}t)\gamma(s)$  donne une homotopie entre deux chemins représentant respectivement le premier terme de  $\text{cc}_{d'}(x)$  et  $\text{cc}_{d'}(x')$  (cf lemme 4.1.11). Pour  $\zeta \in \mu_d$ , on peut appliquer le même argument à  $\zeta x$  et  $\zeta x'$  pour conclure que tous les termes de  $\text{cc}_{d'}(x)$  et de  $\text{cc}_{d'}(x')$  sont égaux.

Réciproquement, pour  $x \in \mathcal{U}_{d'}$ , on considère l'élément standard  $x_{\text{cc}_{d'}(x)}$ , on construit un chemin de  $x$  vers  $x_{\text{cc}_{d'}(x)}$  en translatant les points de  $A_j$  de façon affine vers le point correspondant de  $\overline{LL}(x_{\text{cc}_{d'}(x)})$  :



Cela prouve que  $x$  et  $x_{\text{cc}_{d'}(x)}$  se trouvent dans la même composante connexe de  $\mathcal{U}_{d'}$  (resp.  $\mathcal{U}^{\mu_d}$  car si  $x$  est  $\mu_d$  invariant, c'est aussi le cas de  $\gamma$ ), en particulier si  $x$  et  $x'$  ont même contenu  $d'$ -cyclique, ils sont dans la même composante connexe par arcs. Les composantes connexes par arcs sont de plus contractiles : le chemin construit entre  $x$  et  $x_{\text{cc}_{d'}(x)}$  fait partie d'un rétracte par déformation de la composante connexe par arcs de  $x$  sur le singleton  $\{x_{\text{cc}_{d'}(x)}\}$ . Enfin le point (a) prouve que  $\pi_0(\mathcal{U}_{d'})$  s'identifie à son image dans  $\sqrt[d']{D}_1(c)$ , de même pour  $\mathcal{U}^{\mu_d}$ , la surjectivité provient de l'existence des images standards.  $\square$

La première conséquence de cette proposition est que  $\mathcal{U}^{\mu_d}$  et  $\mathcal{U}_{d'}$  peuvent faire office de points base épaïs :

**Définition 4.1.16.** On définit la *catégorie de tresses* relative à la paire  $(W, W')$  comme le groupoïde

$$B' := \pi_1((V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}, \mathcal{U}^{\mu_d})$$

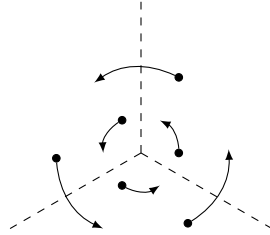
On définit également  $B_{d'} := \pi_1(V^{\text{reg}}/W, \mathcal{U}_{d'})$ .

On a par fonctorialité des foncteurs naturels  $B' \rightarrow B_{d'} \rightarrow B$ , la flèche  $B_{d'} \rightarrow B$  étant une équivalence de catégories (et pas un isomorphisme à priori).

Il reste enfin à construire les morphismes  $G' \rightarrow B'$  et  $G'_{d'} \rightarrow B_{d'}$ , on introduit pour cela la notion de tunnel circulaire :

**Définition 4.1.17.** Un *tunnel circulaire* est un élément  $T = (x, L)$  de  $\mathcal{U}_{d'} \times [0, \frac{2\pi}{d'h}]$  tel que  $e^{iL}x \in \mathcal{U}_{d'}$

Si  $T = (x, L)$  est un tunnel circulaire, comme  $\overline{LL}$  est de degré  $h$ , la rotation obtenue en parcourant le chemin donné par  $T$  est d'angle  $hL$ , voici par exemple un tunnel de longueur  $\frac{\pi}{3h}$  :



Soit  $\sigma = (c_{2d'}, \dots, c_1) \in \sqrt[d']{D_2}(c)$ , on note  $b_\sigma$  l'élément de  $B_{d'}$  représenté par le tunnel circulaire  $(x_\sigma, \frac{\pi}{d'h})$ . Si  $\sigma \in D'_2(c)$ , ce tunnel circulaire représente aussi un élément de  $B'$ , que l'on note  $b'_\sigma$ .

**Lemme 4.1.18.** (a) L'application  $\sigma \mapsto b_\sigma$  s'étend en un morphisme de groupoïdes  $\psi : G_{g'} \rightarrow B_{d'}$ .

(b) L'application  $\sigma \mapsto b'_\sigma$  s'étend en un morphisme de groupoïdes  $\psi' : G' \rightarrow B'$ .

*Démonstration.* Le groupoïde  $G_{d'}$  admet une présentation indexée par  $\sqrt[d']{D_2}(c)$  avec des relations indexées par  $\sqrt[d']{D_3}(c)$ . Un élément  $\rho = (c_{3d'}, \dots, c_1)$  correspond à la relation  $\sigma\tau = \mu$ , où

$$\begin{aligned}\sigma &= (c_{3d'}, c_{3d'-1}c_{3d'-2}, c_{3(d'-1)}, c_{3d'-1-1}c_{3d'-1-2}, \dots, c_3, c_2c_1) \\ \tau &= (c_{3d'-1}, c_{3d'-2}c_{3(d'-1)}, c_{3d'-1-1}, c_{3d'-1-2}c_{3d'-2}, \dots, c_2, c_1c_{3d'}) \\ \mu &= (c_{3d'}c_{3d'-1}, c_{3d'-2}, c_{3(d'-1)}c_{3d'-1-1}, c_{3d'-1-2}, \dots, c_3c_2, c_1)\end{aligned}$$

La relation  $b_\sigma b_\tau = b_\mu$  suit des observations suivantes :

- Le tunnel  $(x_\rho, \frac{2\pi}{3d'h})$  représente  $b_\tau$ .
- Le tunnel  $(\zeta_{3d'h}x_\rho, \frac{2\pi}{3d'h})$  représente  $b_\sigma$ .
- Le tunnel  $(x_\rho, \frac{4\pi}{3d'h})$  représente  $b_\mu$ .
- Le troisième tunnel est composition des deux premiers.

Le second point s'en déduit immédiatement : si  $\rho \in D'_3(c)$ , alors  $\sigma, \tau, \mu \in D'_2(c)$  et le même argument s'applique.  $\square$

La définition de clbl nous donne également :

**Lemme 4.1.19.** Soit  $\sigma = (c_{2d'}, \dots, c_1) \in \sqrt[d']{D_2}(c)$ , l'image de  $b_\sigma$  via  $B_{d'} \rightarrow B$  est l'élément simple correspondant à  $c_m$ , c'est aussi l'élément  $\kappa_m(\sigma)$ .

On a donc obtenu un diagramme de foncteurs :

$$\begin{array}{ccccc}
M' & \hookrightarrow & M_{d'} & \xrightarrow{\kappa_m} & M \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
G' & \longrightarrow & G_{d'} & \xrightarrow{\sim} & G \\
\downarrow \psi' & & \downarrow \psi & & \downarrow \simeq \\
B' & \longrightarrow & B_{d'} & \xrightarrow{\sim} & B
\end{array}$$

Il reste pour conclure à montrer que  $\psi'$  et  $\psi$  sont des isomorphismes de catégories.

Soient  $x, y \in |G_{d'}|$ , comme on a des équivalences  $G_{d'} \sim G$  et  $B_{d'} \sim B$ , on a un diagramme commutatif d'applications ensemblistes

$$\begin{array}{ccc}
G_{d'}(x, y) & \xrightarrow{\simeq} & G \\
\psi \downarrow & & \downarrow \simeq \\
B_{d'}(\psi(x), \psi(y)) & \xrightarrow{\simeq} & B
\end{array}$$

qui montre que  $\psi$  est une équivalence de catégories. Par la proposition 4.1.15,  $\psi$  et  $\psi'$  donnent des bijections sur les objets, donc  $\psi$  est un isomorphisme de catégories.

Pour  $\psi'$ , le carré

$$\begin{array}{ccc}
G' & \hookrightarrow & G_{d'} \\
\psi' \downarrow & & \downarrow \simeq \\
B' & \longrightarrow & B_{d'}
\end{array}$$

montre que  $\psi'$  est fidèle, il ne reste plus qu'à montrer que  $\psi'$  est plein. Soit  $b'$  un morphisme de  $B'$ , il est représenté par un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow (V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$ , on peut supposer que pour  $t \in [0, 1]$ , au plus un point de  $\overline{LL}(\gamma(t))$  se trouve dans  $i\mathbb{R}_+$  (les points ne satisfaisant pas cette condition formant un espace de codimension réelle 2 dans  $(V^{\text{reg}}/W)^{\mu_d}$ ), ce qui permet de décrire  $\gamma$  comme concaténation de chemins homotopes à des tunnels circulaires de  $B'$ .

## 4.2 Cas de $G_{31}$ et calcul effectif

On sait désormais qu'il est possible de décrire le groupe de tresses du centralisateur d'un élément régulier. On applique dans cette dernière section ces différents résultats au cas du groupe  $B_{31}$ .

Les calculs directs ont été effectués avec le package **CHEVIE** de **GAP3** (voir [GHL]).

On a vu (exemple 3.1.22) que  $G_{31}$  peut s'écrire comme centralisateur d'un élément 4-régulier dans le groupe  $G_{37}$ , en reprenant les notations de la section précédente, on a

$$h = 30 \quad d = 4 \quad h' = 15 \quad d' = 2$$

On s'intéresse donc à la catégorie 2-divisée associée au monoïde de Bessis de  $G_{37}$ , on rappelle que  $G_{37}$  est complexifié du groupe de Coxeter  $E_8$ , en particulier un élément de Coxeter est donné par produit des 8 réflexions simples, et  $\ell_R(c) = 8$ .

On a vu que les simples de  $M_2$  sont décrits par l'ensemble  $\sqrt[2]{D}(c)$ , avec

$$\sqrt[2]{D}_1(c) = D_2(c) = \{(u, v) \in W^2 \mid uv = c \text{ et } \ell_R(a) + \ell_R(b) = \ell_R(c) = 8\}$$

$$\sqrt[2]{D_2}(c) = D_4(c) = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in W^4 \mid \alpha\beta\gamma\delta = c \text{ et } \ell_R(\alpha) + \ell_R(\beta) + \ell_R(\gamma) + \ell_R(\delta) = 8\}$$

$$\sqrt[2]{D_3}(c) = \left\{ (x_6, \dots, x_1) \in W^6 \mid \prod_{i=6}^1 x_i = c \text{ et } \sum_{i=1}^6 \ell_R(x_i) = 8 \right\}$$

Les faces sont données par :

- $\sqrt{d_1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = d_1 d_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha\beta, \gamma\delta)$ , le but de la flèche  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$
- $\sqrt{d_2}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = d_2 d_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\beta\gamma, \delta\alpha^c)$ , le départ de la flèche  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ .
- $\sqrt{d_1}(x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = (x_6, x_5 x_4, x_3, x_2 x_1)$
- $\sqrt{d_2}(x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = (x_6 x_5, x_4, x_3 x_2, x_1)$
- $\sqrt{d_3}(x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = (x_5, x_4 x_3, x_2, x_1 x_6^c)$

Et les dégénérescences sont données par :

- $\sqrt{s_1}(u, v) = s_1 s_2(u, v) = (1, u, 1, v)$  l'identité de sommet  $(u, v)$
- $\sqrt{s_1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha, 1, \beta, \gamma, 1, \delta)$ , qui exprime que la composée de  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  par une identité à droite est égale à  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$
- $\sqrt{s_2}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, \alpha, \beta, 1, \gamma, \delta)$ , qui exprime que la composée de  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  par une identité à gauche est égale à  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

Bien-sûr, nous sommes en réalité moins intéressés par cette catégorie que par la sous catégorie  $M' = (M_2)^{\phi_2^{15}}$ , ce qui va beaucoup alléger les calculs : calculer effectivement les éléments de  $\sqrt[2]{D}(c)$  serait très long !

L'automorphisme  $\phi_2$  agit sur nos simplexes par :

$$(u, v)^{\phi_2} = (v, u^c) \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^{\phi_2} = (\gamma, \delta, \alpha^c, \delta^c) \quad (x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)^{\phi_2} = (x_3, x_2, x_1, x_6^c, x_5^c, x_4^c)$$

donc  $\phi_2^{15}$  agit par :

$$(u, v)^{\phi_2^{15}} = (v^{c^7}, u^{c^8}) \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^{\phi_2^{15}} = (\gamma^{c^7}, \delta^{c^7}, \alpha^{c^8}, \beta^{c^8})$$

$$(x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)^{\phi_2^{15}} = (x_3^{c^7}, x_2^{c^7}, x_1^{c^7}, x_6^{c^8}, x_5^{c^8}, x_4^{c^8})$$

on obtient donc des systèmes d'équations définissant  $D'_1(c), D'_2(c), D'_3(c)$  :

$$\begin{cases} u = v^{c^7} \\ v = u^{c^8} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \gamma^{c^7} \\ \beta = \delta^{c^7} \\ \gamma = \alpha^{c^8} \\ \delta = \beta^{c^8} \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = x_3^{c^7} \\ x_5 = x_2^{c^7} \\ x_4 = x_1^{c^7} \\ x_3 = x_6^{c^8} \\ x_2 = x_5^{c^8} \\ x_1 = x_4^{c^8} \end{cases}$$

comme  $c^{15}$  est central dans  $G_{37}$ , ces systèmes sont en fait équivalents à

$$\begin{cases} v = u^{c^8} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = \alpha^{c^8} \\ \delta = \beta^{c^8} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = x_6^{c^8} \\ x_2 = x_5^{c^8} \\ x_1 = x_4^{c^8} \end{cases}$$

Comme la conjugaison dans  $G_{37}$  conserve la longueur des éléments, on obtient les définitions suivantes :

$$D'_1(c) = \left\{ u \in W \mid uu^{c^8} = c \text{ et } \ell_R(u) = 4 \right\}$$

$$D'_2(c) = \left\{ (\alpha, \beta) \in W \mid ab(ab)^{c^8} = c \text{ et } \ell_R(a) + \ell_R(b) = 4 \right\}$$

$$D'_3(c) = \left\{ (x, y, z) \in W \mid xyz(xyz)^{c^8} = c \text{ et } \ell_R(x) + \ell_R(y) + \ell_R(z) = 4 \right\}$$

Sur lesquels les faces et dégénérescences agissent par

$$d'_1(\alpha, \beta) = \alpha\beta \quad d'_2(\alpha, \beta) = \beta\alpha^{c^8} \quad d'_1(x, y, z) = (x, yz) \quad d'_2(x, y, z) = (xy, z)$$

$$d'_3(x, y, z) = (y, zx^{c^8}) \quad s'_1(u) = (1, u) \quad s'_1(\alpha, \beta) = (\alpha, 1, \beta) \quad s'_2(\alpha, \beta) = (1, \alpha, \beta)$$

On rappelle enfin que l'on a un foncteur  $M' \rightarrow M$  donné par  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha$ , on en déduit des morphismes  $B_{31} \rightarrow B_{37}$  (en restreignant aux groupes d'automorphismes du groupoïde  $B'$ ). Ces morphismes  $B_{31} \rightarrow B_{37}$  donnant par composition des morphismes  $B_{31} \rightarrow G_{37}$  dont les images sont des copies de  $G_{31}$ .

Venons-en aux calculs effectifs, dans une optique de transparence et de répliquabilité (y compris si possible sous d'autres langages que **GAP3**), on tente de donner un maximum de détails sur notre procédure.

Pour des raisons de lisibilité, les éléments de  $W$  seront désignés comme produit des 120 réflexions de  $W$  (et non pas des réflexions simples), l'ordonnancement des réflexions est celui donné par **GAP3** : comme  $G_{37}$  est complexifié du groupe de Coxeter  $E_8$ , à toute réflexion est associé une racine positive (vecteur normal à l'hyperplan de réflexions, choisi avec une orientation cohérente), on donne en annexe l'ordre choisi par **GAP3** sur les racines, qui permet de déduire l'ordre donné sur les réflexions.

On travaille avec l'élément de Coxeter  $c := s_1 s_2 s_3 s_5 s_7 s_{15} s_{21} s_{25}$ . On trouve 88 éléments dans  $D'_1(c)$  :

$s_9 s_{14} s_{17} s_{44}$	$s_7 s_{24} s_{32} s_{58}$	$s_{11} s_{14} s_{18} s_{24}$	$s_{11} s_{18} s_{24} s_{38}$	$s_9 s_{17} s_{38} s_{44}$	$s_7 s_{24} s_{32} s_{59}$
$s_{18} s_{38} s_{42} s_{48}$	$s_{11} s_{13} s_{18} s_{38}$	$s_7 s_{23} s_{32} s_{35}$	$s_8 s_{14} s_{27} s_{44}$	$s_{11} s_{13} s_{14} s_{54}$	$s_8 s_{26} s_{27} s_{44}$
$s_{17} s_{22} s_{38} s_{48}$	$s_9 s_{39} s_{43} s_{54}$	$s_9 s_{15} s_{43} s_{54}$	$s_{12} s_{13} s_{28} s_{33}$	$s_{12} s_{28} s_{33} s_{42}$	$s_7 s_{15} s_{34} s_{35}$
$s_{12} s_{15} s_{35} s_{74}$	$s_{12} s_{29} s_{39} s_{74}$	$s_{11} s_{29} s_{34} s_{39}$	$s_8 s_{14} s_{18} s_{48}$	$s_{11} s_{13} s_{14} s_{18}$	$s_9 s_{15} s_{24} s_{58}$
$s_{11} s_{15} s_{24} s_{59}$	$s_9 s_{17} s_{43} s_{58}$	$s_9 s_{17} s_{38} s_{43}$	$s_{12} s_{17} s_{26} s_{35}$	$s_8 s_{17} s_{26} s_{35}$	$s_9 s_{14} s_{27} s_{44}$
$s_9 s_{27} s_{38} s_{44}$	$s_8 s_{14} s_{17} s_{48}$	$s_7 s_{32} s_{34} s_{35}$	$s_9 s_{14} s_{27} s_{54}$	$s_{28} s_{33} s_{42} s_{43}$	$s_{13} s_{28} s_{33} s_{43}$
$s_{12} s_{13} s_{15} s_{74}$	$s_{11} s_{13} s_{15} s_{34}$	$s_9 s_{14} s_{17} s_{78}$	$s_9 s_{15} s_{43} s_{58}$	$s_{11} s_{15} s_{23} s_{59}$	$s_{13} s_{28} s_{43} s_{54}$
$s_{11} s_{13} s_{15} s_{54}$	$s_{22} s_{27} s_{38} s_{44}$	$s_9 s_{14} s_{24} s_{54}$	$s_9 s_{15} s_{24} s_{54}$	$s_{11} s_{15} s_{24} s_{54}$	$s_{11} s_{14} s_{24} s_{54}$
$s_{12} s_{15} s_{23} s_{35}$	$s_7 s_{15} s_{23} s_{35}$	$s_8 s_{18} s_{23} s_{48}$	$s_8 s_{14} s_{18} s_{24}$	$s_8 s_{18} s_{24} s_{69}$	$s_8 s_{14} s_{17} s_{44}$
$s_7 s_{15} s_{24} s_{58}$	$s_7 s_{15} s_{24} s_{59}$	$s_8 s_{17} s_{26} s_{44}$	$s_{15} s_{34} s_{35} s_{70}$	$s_1 s_{12} s_{13} s_{33}$	$s_1 s_{12} s_{33} s_{42}$
$s_1 s_8 s_{34} s_{35}$	$s_1 s_{12} s_{35} s_{74}$	$s_{14} s_{33} s_{42} s_{78}$	$s_{13} s_{14} s_{33} s_{78}$	$s_{11} s_{23} s_{29} s_{39}$	$s_{11} s_{18} s_{23} s_{59}$
$s_7 s_{23} s_{32} s_{59}$	$s_{12} s_{13} s_{28} s_{54}$	$s_{12} s_{13} s_{15} s_{54}$	$s_1 s_8 s_{34} s_{48}$	$s_1 s_{13} s_{34} s_{48}$	$s_{17} s_{22} s_{38} s_{44}$
$s_{18} s_{24} s_{38} s_{67}$	$s_1 s_8 s_{17} s_{35}$	$s_1 s_{12} s_{17} s_{35}$	$s_{13} s_{14} s_{18} s_{67}$	$s_{13} s_{15} s_{34} s_{67}$	$s_1 s_8 s_{17} s_{48}$
$s_1 s_{32} s_{34} s_{35}$	$s_8 s_{18} s_{23} s_{59}$	$s_7 s_{15} s_{23} s_{59}$	$s_1 s_{13} s_{33} s_{43}$	$s_1 s_{33} s_{42} s_{43}$	$s_1 s_{12} s_{13} s_{74}$
$s_1 s_{13} s_{34} s_{74}$	$s_{12} s_{23} s_{29} s_{39}$	$s_{13} s_{18} s_{38} s_{67}$	$s_{29} s_{34} s_{39} s_{67}$		

On les notes respectivement (de droite à gauche)  $u_1, \dots, u_{88}$ .

Pour le cas des morphismes, on en trouve 2603 (en omettant les identités), que nous ne pourrions bien sûr pas représenter exhaustivement, on notera néanmoins qu'il existe au plus une flèche  $u_i \rightarrow u_j$  avec  $i \neq j$ , on notera donc  $f_{j,i}$  la flèche  $u_i \rightarrow u_j$  (quand elle existe).

En calculant les éléments de  $D'_3(c)$ , on trouve 11065 relations de la forme  $f_{j,i} = f_{j,k} f_{k,i}$  (en omettant les relations faisant intervenir des identités).

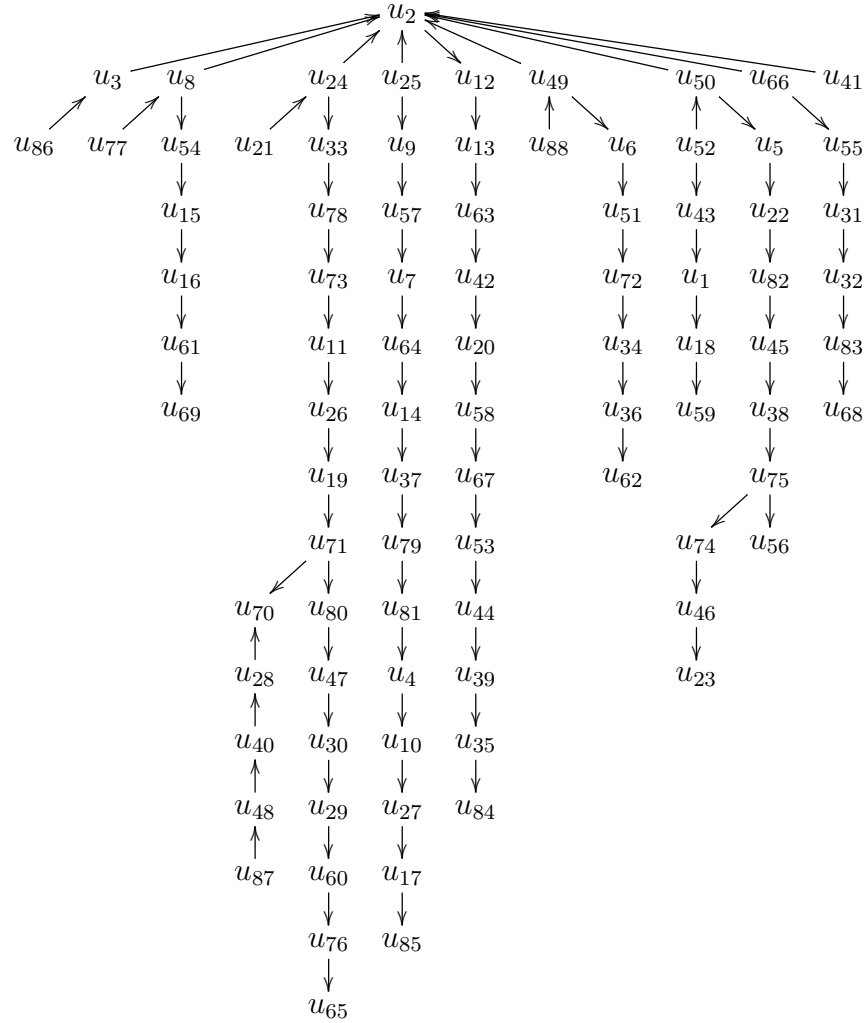
On se concentre sur  $B'(u_2, u_2) \simeq B_{31}$  (on a choisi arbitrairement le sommet  $u_2$ ), les éléments

de  $B'(u_2, u_2)$  sont donnés par des boucles contenant  $u_2$  dans le graphe (non orienté) décrit par  $D'_k(c)$ . On considère les éléments

- $s := f_{49,2}^{-1} f_{88,49}^{-1} f_{88,41} f_{41,2}$
- $u := f_{8,2}^{-1} f_{77,8}^{-1} f_{77,66} f_{66,2}$
- $w := f_{50,2}^{-1} f_{52,50}^{-1} f_{52,41} f_{41,2}$
- $v := f_{24,2}^{-1} f_{21,24}^{-1} f_{21,41} f_{41,2}$
- $t := f_{3,2}^{-1} f_{86,3}^{-1} f_{86,25} f_{25,2}$

Leurs images respectives dans  $M$  sont  $r_{26}r_{51}$ ,  $r_{58}r_{69}$ ,  $r_{24}r_{27}$ ,  $r_8r_{32}$ , et leurs images dans  $G_{37}$  y engendrent une copie de  $G_{31}$ .

On utilise à présent la proposition 1.3.1 pour déduire une présentation de  $B'(u_2, u_2)$  à partir de notre présentation de  $B'$ . Il suffit pour cela de décrire les morphismes que l'on "simplifie", ce qui revient à choisir un sous-arbre maximal du graphe décrit par  $D'_n(c)$  :





Autrement dit, on supprime les morphismes suivants dans la présentation :

$f_{1,43}$	$f_{2,3}$	$f_{2,8}$	$f_{2,24}$	$f_{2,25}$	$f_{2,41}$	$f_{2,49}$	$f_{2,50}$	$f_{2,66}$	$f_{3,86}$	$f_{4,81}$	$f_{5,50}$
$f_{6,49}$	$f_{7,57}$	$f_{8,77}$	$f_{9,25}$	$f_{10,4}$	$f_{11,73}$	$f_{12,2}$	$f_{13,12}$	$f_{14,64}$	$f_{15,54}$	$f_{16,15}$	$f_{17,27}$
$f_{18,1}$	$f_{19,26}$	$f_{20,42}$	$f_{22,5}$	$f_{23,46}$	$f_{24,21}$	$f_{26,11}$	$f_{27,10}$	$f_{28,40}$	$f_{29,30}$	$f_{30,47}$	$f_{31,55}$
$f_{32,31}$	$f_{33,24}$	$f_{34,72}$	$f_{35,39}$	$f_{36,34}$	$f_{37,14}$	$f_{38,45}$	$f_{39,44}$	$f_{40,48}$	$f_{42,63}$	$f_{43,52}$	$f_{44,53}$
$f_{45,82}$	$f_{46,74}$	$f_{47,80}$	$f_{48,87}$	$f_{49,88}$	$f_{50,52}$	$f_{51,6}$	$f_{53,67}$	$f_{54,8}$	$f_{55,66}$	$f_{56,75}$	$f_{57,9}$
$f_{58,20}$	$f_{59,18}$	$f_{60,29}$	$f_{61,16}$	$f_{62,36}$	$f_{63,13}$	$f_{64,7}$	$f_{65,76}$	$f_{67,58}$	$f_{68,83}$	$f_{69,61}$	$f_{70,28}$
$f_{70,71}$	$f_{71,19}$	$f_{72,51}$	$f_{73,78}$	$f_{74,75}$	$f_{75,38}$	$f_{76,60}$	$f_{78,33}$	$f_{79,37}$	$f_{80,71}$	$f_{81,79}$	$f_{82,22}$
$f_{83,32}$	$f_{84,35}$	$f_{85,17}$									

On note  $F$  cet ensemble de morphismes, le choix de  $F$  donne système d'isomorphismes  $(\phi_{2,i})_{i \in [1,88]}$  dans  $B'$ , et permet d'associer un générateur  $g_{j,i} = \phi_{2,j} f_{j,i} \phi_{2,i}^{-1}$  à tout générateur  $f_{j,i}$  de  $B'$ . On remarque en particulier que si  $f_{j,i} \in F$ , alors  $g_{j,i} = 1$ .

D'un point de vue formel, on obtient une présentation de  $B'(u_2, u_2)$  dont les générateurs sont les  $g_{j,i}$ , et les relations sont obtenues en remplaçant les  $f_{j,i}$  par les  $g_{j,i}$ . Les relations deviennent alors très redondantes : si  $f_{j,i} \in F$ , une relation de la forme  $f_{k,i} = f_{k,j} f_{j,i}$  donne devient  $g_{k,i} = g_{k,j}$  ce qui permet de supprimer un des générateurs de notre présentation.

Après avoir effectué toutes les suppressions de relations triviales de ce genre, on obtient un total de 198 générateurs et 1050 relations.

Le choix de  $F$  est fait de tel sorte que les générateurs  $g_{88,41}, g_{77,66}, g_{52,41}, g_{21,41}, g_{86,25}$  sont les boucles  $s, u, w, v, t$ , dont on montre qu'elles engendrent  $B'(u_2, u_2)$  : il suffit de déduire de notre présentation que les 193 autres générateurs sont engendrés par  $s, u, w, v, t$ , on obtient les mots présentés en annexe.

Enfin, en remplaçant les générateurs par leurs expressions en  $s, u, w, v, t$  dans notre présentation, on obtient une présentation (très redondante !) que l'on simplifie via **GAP3** avec les fonctions **TzSearch** et **TzSearchEqual** : la première recherche, parmi les relations, des sous-mots plus long que leur complément, et va ensuite remplacer les occurrences de ce sous-mot par son complément dans les autres relations, la seconde fait un travail similaire, en considérant des compléments de longueur égale.

Après simplification par **GAP3**, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{array}{llll} vt = tv & ts = st & wv = vw & suw = wsu = uws \\ vuv = uvu & vsv = svs & wtw = twt & utu = tut \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} tuwtuw = uwtuwt & stuvwtuv = wtsuwtvu \\ wtsutvsvuv = uvvtsuvsu & sus^{-1}tvsuvt = vstus^{-1}vstuv \\ ut^{-1}vuwtuvwstu^{-1}v = wtsuvtws & wtsuvtws = ut^{-1}vuwtuvwstu^{-1}v \\ vutvwtvstusw^{-1}v = tuwvstuwvtsu & uwv^{-1}stwvsuvt = tuwv^{-1}tsuvsuwt \\ uwvtsuvwtuwt = tvsutvwtuvtu & vwstuvwtuwtu = svtsuwtuwtu \\ usuvuwtuwtu = wtsuvtuwtuwtu^{-1}tu & tuwvtsuvu^{-1}tsuwtu = uvwtuwtuwtu \end{array}$$

Et on montre directement que les 12 dernières sont conséquences des neuf premières, ce qui conclut la preuve de :

**Théorème 4.2.1.** *Le groupe de tresse  $B_{31}$  admet la présentation suivante :*

$$B_{31} = \left\langle s, u, w, v, t \left| \begin{array}{l} suw = uws = wsu \\ vt = tv, \quad ts = st, \quad vw = wv \\ svs = vsv, \quad sus = usu, \quad utu = tut, \quad wtw = twt \end{array} \right. \right\rangle$$

# Annexe

## Mots pour les générateurs de $B'(u_2, u_2)$

On donne ici la (longue) liste des expressions des générateurs de  $B'(u_2, u_2)$  en fonction des générateurs  $s, u, w, v, t$

$$\begin{array}{lllll}
g_{55,52} = t^{-1}v^{-1}, & g_{66,52} = t^{-1}w, & g_{66,21} = t^{-1}v, & g_{86,88} = t^{-1}s, & g_{77,88} = u^{-1}s, \\
g_{49,43} = uw & g_{52,88} = w^{-1}s, & g_{8,2} = wv, & g_{25,52} = v^{-1}w, & g_{25,77} = v^{-1}u, \\
g_{21,88} = v^{-1}s, & g_{21,43} = tuw & g_{21,77} = tv^{-1}u, & g_{86,52} = t^{-1}uw, & g_{86,43} = suw, \\
g_{88,52} = s^{-1}uw, & g_{88,86} = s^{-1}vt, & g_{50,33} = vts & g_{52,8} = vtu, & g_{52,86} = w^{-1}vt, \\
g_{77,86} = u^{-1}vt, & g_{8,55} = wvt, & g_{8,5} = wvs, & g_{52,77} = w^{-1}tu & g_{24,50} = u, \\
g_{77,21} = u^{-1}sv, & g_{88,77} = s^{-1}tu, & g_{86,21} = t^{-1}sv, & g_{21,52} = v^{-1}uw, & g_{52,6} = twvs \\
g_{25,1} = tsuw, & g_{77,49} = u^{-1}wvs, & g_{49,1} = vtuw, & g_{8,12} = wvst, & g_{24,55} = ut, \\
g_{87,51} = v^{-1}u^{-1} & g_{50,21} = u^{-1}v, & g_{3,6} = v^{-1}wvs, & g_{52,1} = vtsuw, & g_{24,15} = uwtu, \\
g_{8,15} = wvstu, & g_{8,78} = wvstv & g_{24,54} = tut, & g_{87,78} = v^{-1}u^{-1}v, & g_{52,57} = vtsuuv, \\
g_{8,18} = wvstuw, & g_{21,3} = v^{-1}uvt, & g_{8,7} = wvstuv & g_{52,54} = vtsu, & g_{87,82} = uv^{-1}, \\
\\
g_{74,82} = (wvtsuw)^{-1}, & g_{52,51} = vtuwvs, & g_{8,22} = t^{-1}wvtsuw, & g_{87,77} = (wvstuv)^{-1}, & \\
g_{52,78} = vtsuuvvs, & g_{77,18} = wvstuw, & g_{74,87} = (wvtsuw)^{-1}v, & g_{87,59} = uv^{-1}w, & \\
g_{74,32} = (wvtsuw)^{-1}tu^{-1}, & g_{66,59} = uwvstuw, & g_{74,61} = t(wvstu)^{-1}, & g_{52,72} = vtsuuvts, & \\
g_{74,64} = (wtsuw)^{-1}t, & g_{74,10} = wvtsuuvt, & g_{49,18} = uvtsw, & g_{66,87} = uwvstuv, & \\
g_{74,51} = (tuwvtsuw)^{-1}, & g_{86,87} = uwvtsuuv, & g_{52,63} = vtsuuvtsu, & g_{74,48} = (wvtsuw)^{-1}vts, & \\
\\
g_{24,45} = tuwvtuuv, & g_{50,11} = wvtsuuvts, & g_{74,18} = (wvtsuw)^{-1}t(tu)^{-1}, & & \\
g_{3,16} = uwvstuv, & g_{86,59} = suwvtuuv, & g_{21,1} = v^{-1}uvtsw, & & \\
g_{52,87} = vtuwvstuv, & g_{25,48} = tuwvtuuv, & g_{25,45} = tsuwtuuv, & & \\
g_{52,59} = vtuwvstuw, & g_{50,48} = vtuwvstuv, & g_{74,36} = (wvtsuw)^{-1}twvs, & & \\
g_{87,69} = uwtu, & g_{74,54} = (wvtsuuvtsu)^{-1}, & g_{52,83} = vtsuuvtsu, & & \\
g_{52,64} = vtsuuvtsu, & g_{50,26} = vtuwvtsuuv, & g_{3,73} = t^{-1}wtsuuvts, & & \\
g_{50,38} = vtsuuvtsu, & g_{21,48} = uwvtuuvstuv, & g_{88,61} = uwvtsuuvtsu, & & \\
g_{21,45} = uwvtsuuvtsu, & g_{74,43} = (vtsuw^2vtsuw)^{-1}, & g_{3,68} = suwvtsuuvts, & & \\
g_{74,38} = vt(tuv)^{-1}, & g_{77,45} = wvstuwvtsu, & g_{77,61} = wvtsuuvtsu, & & \\
g_{86,45} = t^{-1}uwvtsuuvtsu, & g_{74,50} = (twvstuwvtsuw)^{-1}, & g_{21,36} = tuwvtsuuvtsu, & & \\
g_{37,86} = (suwvtsuuvtsu)^{-1}, & g_{41,38} = uwvstuwvtsu, & g_{49,40} = vtuwvtsuuvts, & & \\
g_{21,61} = v^{-1}uwvtsuuvtsu, & g_{49,61} = wvtsuuvtsu, & g_{52,68} = vtuwvstuwvt, & & \\
g_{77,38} = wvstuwvtsu, & g_{88,59} = s^{-1}vtsuuvtsu, & g_{77,68} = wvstuwvtsu, & & \\
g_{21,68} = uwvtsuuvtsu, & g_{88,38} = tuwvstuwvtsu, & g_{86,61} = t^{-1}suwvtsuuvtsu, & & \\
g_{88,45} = s^{-1}uwvstuwvtsu, & g_{86,20} = suwvstuwvtsu, & g_{52,69} = vtuwvstuwvtu, & & \\
g_{87,23} = v^{-1}wvtsuw^2vtsuw, & g_{77,59} = (tu)^{-1}wvtsuuvstuw, & g_{87,74} = tuwvtsuwt^{-1}, & & \\
g_{21,16} = v^{-1}wvtsuuvtsu, & g_{21,62} = uwvtsuuvtsu, & g_{21,37} = uwvtsuuvtsu, & & \\
g_{86,37} = tsuwtuuvtsu, & g_{52,62} = vtuwvstuwvtsu, & g_{49,74} = tuwvtsuw^2vtsuw, & & \\
g_{88,20} = vtsuuvtsuuvtsu, & g_{77,37} = wvstuwvtsuwtv, & g_{74,85} = vtsuwtuuvstuv, & & \\
g_{86,62} = suwvtuuvvtsu, & g_{3,56} = tsuwtuuvvtsu, & g_{25,79} = t^2suwvtsuuvtsu, & & \\
g_{41,58} = vtsuuvtsuuvtsu, & g_{52,74} = vtuwvstuwvtsu, & g_{88,37} = vtuwvtsuuvtsu, & & \\
g_{74,21} = (tuwvtsuw^2vtsuw)^{-1}v, & g_{24,46} = uwvstuwvtsu, & g_{77,62} = wvstuwvtsuwtv, & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
g_{3,71} &= suwvtsuwvtsuwvs, & g_{87,71} &= tuwvtsuwvs(uv)^{-1}v, \\
g_{74,40} &= (wvtsuw)^{-1}twvsv^{-1}uv, & g_{88,75} &= vtsuwvtsuwvtsus, \\
g_{88,69} &= s^{-1}uuvstuwvtsuwvt, & g_{86,74} &= suwvtuwvsvwvtsuw, \\
g_{74,76} &= vtsuwvtuwvstuv, & g_{25,46} &= tsuwvtuwvswvtsuw, \\
g_{41,79} &= tsvtuwvtsuwvtsu, & g_{8,56} &= svtsuwvtsuwvtsus, \\
g_{52,56} &= vtuwvsvtuwvtuwvs, & g_{77,79} &= wvstuwvtsuwvtwvs, \\
g_{8,70} &= wvstvtuwvtsuwvts, & g_{88,79} &= uwvtsuwvtsuwvstv, \\
g_{86,79} &= suwvtuwvsvtsuwvt, & g_{74,80} &= twvs, \\
g_{74,29} &= vtuwvtsuwvs(uv)^{-1}v, & g_{77,70} &= svtsuwvtsuwvtsusv, \\
g_{86,71} &= svtsuwvtsuwvtsusv, & g_{52,70} &= tsvtuwvtsuwvtsus, \\
g_{3,23} &= usvtuwvtsuwvtsus, & g_{52,46} &= vtsuwtwvstuwvtsuw, \\
g_{77,46} &= wvstuwvtsuw^2vtsuw, & g_{88,71} &= uwvtsuwvtsuwvtsv, \\
g_{50,23} &= twvstuwvtsuw^2vtsuw, & g_{41,80} &= tsvtuwvtsuwvtsusv, \\
g_{52,81} &= vtuwvsvtuwvtsuwvts, & g_{66,23} &= uwvstuwvtsuw^2vtsuw, \\
g_{3,4} &= usvtuwvtsuwvtsusv, & g_{8,53} &= wvstvtuwvtsuwvtsu, \\
g_{86,80} &= suwvtuwvsvwvtsuwvts, & g_{8,47} &= svtsuwvtsuwvtsusvts, \\
g_{50,47} &= twvstvtuwvtsuwvtsu, & g_{3,47} &= tsuwvtuwvsvwvtsuwvts, \\
g_{52,23} &= vtuwvsvtuwvtsuwvtsu, & g_{52,53} &= vtuwvsvtuwvtsuwvtsu, \\
g_{21,23} &= uwvtsuwvstvtuwvtsuw, & g_{52,4} &= vtuwvsvtuwvtsuwvtsuv, \\
g_{87,85} &= tuwvtuwvsvtuwvtsuwvs, & g_{50,30} &= vtuwvsvtuwvtsuwvtsuvs, \\
g_{74,65} &= wvtsuwvtuwvtsuwvs(uv)^{-1}v, & g_{8,60} &= svtsuwvtsuwvtsuswvtsuwvts, \\
g_{52,17} &= vtuwvsvtuwvtsvtsuwvtsuwvtsu, & g_{77,60} &= svtsuwvtsuwvtsusvtsuwvtsuwvs, \\
g_{52,60} &= vtuwvsvtuwvtsvtsuwvtsuwvtsus, & g_{3,76} &= suwvtsuwvtsuwvstuwvtsuwvts, \\
g_{21,85} &= uwvtsuwvtsuvtvtsuwvtsuwvtsu, & g_{52,85} &= vtuwvsvtuwvtuwvsvtuwvtsuwvts, \\
g_{66,76} &= usvtuwvtsuwvtsusvtsuwvtsuwvs, & g_{77,85} &= wvstuwvtsuwvtwvstuwvtsuwvtsuw, \\
g_{86,84} &= suwvtsuwvtsusvtsuwvtsuwvtsus, & g_{21,76} &= uwvtsuwvtsuvtvtsuwvtsuwvtsus, \\
g_{50,65} &= tusvtuwvtsuwvtsusvtsuwvtsuwvs, & g_{86,85} &= uwvstuwvtsuwvtwvstuwvtsuwvtsuw, \\
g_{88,84} &= vtsuwvtsuwvtsusvtsuwvtsuwvtsu, & g_{24,65} &= uwvtsuwvtsuvtvtsuwvtsuwvtsusv, \\
g_{86,65} &= uwvstuwvtsuwvtwvstuwvtsuwvtsuvs
\end{aligned}$$

## Fin de simplification de la présentation de $B_{31}$

La simplification de notre présentation obtenue par les fonctions `TzSearch` et `TzSearchEqual` n'est pas parfaite, et nous devons montrer que les 12 dernières relations que l'on obtient sont conséquences des 9 premières (les "vrais" relations de définition de  $B_{31}$ ). Cela fournira de plus des exemples de comment déduire que ces relations "superflues" sont conséquences des relations de tresses, ce que l'on pourrait en théorie faire pour toutes les relations superflues de notre présentation à 1050 relations.

$tsuwtuw = suwtuwt$	$stuvwtuvv = wwt suwtvu$	$wt sutv suvv = uvv wtsuvsu$
$twstutw = wstutwt$	$stuwtvuvv = wwt suwtvu$	$wsutvsvvv = uvv wtsuvsu$
$twstutw = wstuwtw$	$stuwtvuvv = wwt suwtvu$	$wstuvsvvv = vv wtsuvsu$
$twstu = wstuw$	$stuwtuvv = wwt suwtvu$	$stuvsvvv = vvt suvsu$
$twtsu = wtsuw$	$stuwtuu = wwt suwt$	$suvsuvv = vvsuvsu$
$wsu = suw$	$stuwtuu = wwt sut$	$wsuvsuvv = wvvsuvsu$
	$tsuwtuu = wtwtst$	$uwvsuvv = wvvsuvsu$
	$suwtuu = wtstut$	$uwvsuvv = wvvsuvsu$
	$suwtu = wtsut$	$uwvsuu = wvvsuvs$
	$sutu = tsut$	$uwvsuu = vvwsuvs$
	$utu = tut$	$uwvsuu = vvuws$
		$wsu = uws$
		$wsu = uws$

$sus^{-1}tvsuvt = vstus^{-1}vstuv$	$ut^{-1}vuwtuvwstu^{-1}v = wvtsuvtws$
$suts^{-1}vsuvt = vstuvsv^{-1}tuv$	$uvt^{-1}uwtuvwstu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsv^{-1}uvt = vstuvstv^{-1}uv$	$uvt^{-1}s^{-1}wsutuvwstu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsuvu^{-1}ts = vstuvstuvu^{-1}$	$uvs^{-1}t^{-1}wtutvwtu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsuvu^{-1}tsu = vstuvstuvv$	$uvs^{-1}t^{-1}wtuvwtwsu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsuvu^{-1}tuws = vstutvsuuv$	$uvs^{-1}t^{-1}wt suwtwsu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsuvtut^{-1}ws = vsutvsvuv$	$uvs^{-1}t^{-1}wt suvtwsu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsuvtut^{-1}ws = vsutvuvws$	$uvs^{-1}wt suvtwsu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsuvtut^{-1}ws = vsutvuvws$	$uvs^{-1}wtutvwsu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsuvtut^{-1}ws = vsutvuvws$	$uvwtuvwsu^{-1}v = vwt suvtws$
$sutvsuvtut^{-1}w = vsutvuvws$	$uvwtuvwsu^{-1}v = wtsuvtws$
$sutvsuvtut^{-1} = vsutvsuv$	$uvwtuvwsu^{-1}v = wstutvws$
$sutvsuvtu = vsutvsut$	$vtuvwsu^{-1}v = stuvws$
$sutvsutv = vsutvsut$	$vuvwu^{-1}v = suvws$
$suvsutuv = vsuvsutuv$	$vuwsu^{-1}v = wsvs$
$suvsutv = vsuvsut$	$vws = wvs$
$suvsuv = vsuvsu$	
$wsuvsuv = vwsuvsu$	
$uwvsuv = vuwvsu$	
$uwvsu = vuwvs$	
$uwvsu = vuwvs$	
$wsu = uws$	



$$vstuvuwtwsuvtu = svtsuwtswuvtus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svtuwvtsuwtvsus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svtuwvtsuwtvsus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svtuwvtsuwtvsus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svtutvwtswuvtus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svutuvwtswuvtus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svutuvwtswuvtus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svutuvwtswuvtus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svutuvwtswuvtus$$

$$wstuvuwtwsuvtu = svutuvwtswuvtus$$

$$wtut^{-1}vwtwsuvtu = vutuvwtswuvtus$$

$$wtut^{-1}utwtswuvtu = vutuvwtswuvtus$$

$$wtuvutu^{-1}wstuvtsu = vutuvwtswuvtus$$

$$wtuvutwsu^{-1}tutvsu = vutuvwtswuvtus$$

$$wtuvutwtswuvtu = vutuvwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = utuvwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$wtuvwtswuvtu = twwtwtswuvtus$$

$$twtwtswuvtu = sutwtwtswuvtus$$

$$uvtwtwtswuvtu = sutwtwtswuvtus$$

$$uvtwtwtswuvtu = sutwtwtswuvtus$$

$$vtwtwtswuvtu = wstwtwtswuvtus$$

$$vwtwtwtswuvtu = wstwtwtswuvtus$$

$$vwtwtwtswuvtu = wstwtwtswuvtus$$

$$wstwtwtswuvtu = svwtwtswuvtus$$

$$wstwtwtswuvtu = svwtwtswuvtus$$

$$wstwtwtswuvtu = svwtwtswuvtus$$



## Ordre des racines pour $G_{37}$

(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)
(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)	(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)	(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)
(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)	(1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)
(0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)	(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)
(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)	(1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)	(0, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0)
(0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)	(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0)	(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)
(1, 1, 1, 2, 1, 0, 0, 0)	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)	(1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)	(0, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0)
(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)	(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 0)
(1, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0)	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)	(1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	(0, 1, 1, 2, 2, 1, 0, 0)
(0, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 0)	(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 2, 2, 1, 1, 0, 0)	(1, 1, 1, 2, 2, 1, 0, 0)
(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 0)	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	(0, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 0)	(0, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)
(1, 1, 2, 2, 2, 1, 0, 0)	(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 0)	(1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 0)	(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)
(0, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 0)	(0, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)	(1, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 0)	(1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 0)
(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 0)	(1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)	(0, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1)
(1, 2, 2, 3, 2, 1, 0, 0)	(1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 0)	(1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 0)	(1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1)
(1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1)	(0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1)	(1, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 0)	(1, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 0)
(1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 1)	(1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1)	(1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1)	(1, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 0)
(1, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 1)	(1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0)	(1, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 1)	(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1)
(1, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 0)	(1, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 1)	(1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 1)	(1, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 1)
(1, 2, 2, 4, 3, 2, 1, 0)	(1, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1)	(1, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 1)	(1, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 1)
(1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0)	(1, 2, 2, 4, 3, 2, 1, 1)	(1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 1)	(1, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 1)
(2, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0)	(1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1)	(1, 2, 2, 4, 3, 2, 2, 1)	(1, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 1)
(2, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1)	(1, 2, 3, 4, 3, 2, 2, 1)	(1, 2, 2, 4, 3, 3, 2, 1)	(2, 2, 3, 4, 3, 2, 2, 1)
(1, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 1)	(1, 2, 2, 4, 4, 3, 2, 1)	(2, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 1)	(1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1)
(2, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1)	(1, 2, 3, 5, 4, 3, 2, 1)	(2, 2, 3, 5, 4, 3, 2, 1)	(1, 3, 3, 5, 4, 3, 2, 1)
(2, 3, 3, 5, 4, 3, 2, 1)	(2, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 1)	(2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1)	(2, 3, 4, 6, 4, 3, 2, 1)
(2, 3, 4, 6, 5, 3, 2, 1)	(2, 3, 4, 6, 5, 4, 2, 1)	(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 1)	(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2)



# Bibliographie

- [Bes1] David Bessis, FINITE COMPLEX REFLECTION ARRANGEMENTS ARE  $K(\pi, 1)$ ,  
Annals of Mathematics, Volume 181 (2015)
- [Bes2] David Bessis, GARSIDE CATEGORIES, PERIODIC LOOPS AND CYCLIC SETS,  
[arXiv:math/0610778](#) (2006)
- [Bes3] David Bessis, THE DUAL BRAID MONOID,  
Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4, Tome 36 (2003)
- [BM] David Bessis, Jean Michel, EXPLICIT PRESENTATIONS FOR EXCEPTIONAL BRAID  
GROUPS  
Experiment. Math. 13 (3) 257,266 (2004)
- [Best] Mladen Bestvina, NON-POSITIVELY CURVED ASPECTS OF ARTIN GROUPS OF FINITE  
TYPE  
Geometry & Topology. Volume 3 (1999)
- [Bor1] Francis Borceux, HANDBOOK OF CATEGORICAL ALGEBRA 1 - BASIC CATEGORY  
THEORY,  
Cambridge University Press (1994)
- [BMR] Michel Broué, Gunter Malle, Raphaël Rouquier, COMPLEX REFLECTION GROUPS,  
BRAID GROUPS, HECKE ALGEBRAS, J. reine angew. Math. 500 (1998)
- [CMW] Ruth Charney, John Meier, Kim Whittlesey, BESTVINA'S NORMAL FORM COMPLEX  
AND THE HOMOLOGY OF GARSIDE GROUPS,  
Geometriae Dedicata 105, 171–188 (2004)
- [DDGKM] Patrick Dehornoy, François Digne, Eddy Godelle, Daan Kramer, Jean Michel,  
FOUNDATIONS OF GARSIDE THEORY,  
European Mathematical Society (2015)
- [DM] François Digne, Jean Michel, GARSIDE AND LOCALLY GARSIDE CATEGORIES,  
[arXiv:math/0612652](#) (2007)
- [Dou] Theodosios Douvropoulos, APPLICATIONS OF GEOMETRIC TECHNIQUES IN  
COXETER-CATALAN COMBINATORICS,  
Retrieved from the University of Minnesota Digital Conservancy (2017)  
<https://hdl.handle.net/11299/191373>
- [Hum] James Humphreys, REFLECTION GROUPS AND COXETER GROUPS,  
Cambridge University Press
- [LePo] Joseph Le Potier, GÉOMÉTRIE ALGÈBRE,  
Cours de DEA (2001-2002)  
[https://www.imj-prg.fr/tga/jlp/coursM2\\_le\\_potier.pdf](https://www.imj-prg.fr/tga/jlp/coursM2_le_potier.pdf)
- [LT] Gustav Lehrer, Donald Taylor, UNITARY REFLECTION GROUPS,  
Cambridge University Press (2009)
- [Mar] Ivan Marin, GROUPES DE TRESSES DES GROUPES DE RÉFLEXIONS COMPLEXES,  
Cours de Master 2 (2021)

- [Mic] Jean Michel, GROUPES DE RÉFLEXIONS COMPLEXES,  
Cours de troisième cycle (2004)
- [OT] Peter Orlik, Hiroaki Terao, ARRANGEMENTS OF HYPERPLANES,  
Springer (1992)
- [Val] Bruno Vallette, HOMOTOPY THEORIES,  
Cours de Master 2 (2020).  
[https://www.math.univ-paris13.fr/~vallette/download/  
HomotopyTheories2020.pdf](https://www.math.univ-paris13.fr/~vallette/download/HomotopyTheories2020.pdf)
- [GHL] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, and G. Pfeiffer. CHEVIE – A system for  
computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl  
groups and Hecke algebras.  
*Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 7 :175–210, 1996.  
voir [https ://webusers.imj-prg.fr/ jean.michel/chevie/](https://webusers.imj-prg.fr/~jean.michel/chevie/)