Groupoïdes de Garside et groupes de tresses complexes

Colloque tournant du RT algèbre

Owen Garnier

Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée
Université de Picardie Jules Verne (Amiens)

6 mars 2025

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$.

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$.
Réflexion complexe: $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et $\dim \mathrm{Ker}(s-1) = n-1$.

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$.
Réflexion complexe: $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et $\dim \mathrm{Ker}(s-1) = n-1$.

Définition

Un groupe fini $W \leqslant \mathrm{GL}(V)$ est un **groupe de réflexions complexe** (GRC) s'il est engendré par des réflexions.

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$.
Réflexion complexe: $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et $\dim \mathrm{Ker}(s-1) = n-1$.

Définition

Un groupe fini $W \leqslant \mathrm{GL}(V)$ est un **groupe de réflexions complexe** (GRC) s'il est engendré par des réflexions.

Pour $W \leqslant \mathrm{GL}(V)$ un GRC, on définit l'**arrangement de réflexions** par

$$\mathcal{A} := \{\mathrm{Ker}(s-1) \mid s \in W \text{ est une réflexion}\}.$$

Notations pour les groupes de réflexions complexes

V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$.
Réflexion complexe: $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini et $\dim \mathrm{Ker}(s-1) = n-1$.

Définition

Un groupe fini $W \leqslant \mathrm{GL}(V)$ est un **groupe de réflexions complexe** (GRC) s'il est engendré par des réflexions.

Pour $W \leqslant \mathrm{GL}(V)$ un GRC, on définit l'**arrangement de réflexions** par

$$\mathcal{A} := \{\mathrm{Ker}(s-1) \mid s \in W \text{ est une réflexion}\}.$$

L'ensemble des **vecteurs réguliers** est $X := V \setminus \bigcup \mathcal{A}$.
L'espace des **orbites régulières** est X/W.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible.
Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible.
Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.
Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible.
Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.
Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

D'un côté, une série infinie de groupes $G(de, e, n)$ formés de :

- matrices monomiales $n \times n$,
- avec coefficients non nuls dans μ_r, $r = de$,
- dont le produit appartient à μ_d.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible.
Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.
Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

D'un côté, une série infinie de groupes $G(de, e, n)$ formés de :

- matrices monomiales $n \times n$,
- avec coefficients non nuls dans μ_r, $r = de$,
- dont le produit appartient à μ_d.

On a $G(de, e, n) \subset G(r, 1, n)$ sous-groupe normal d'indice e.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible.
Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.
Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

D'un côté, une série infinie de groupes $G(de, e, n)$ formés de :

- matrices monomiales $n \times n$,
- avec coefficients non nuls dans μ_r, $r = de$,
- dont le produit appartient à μ_d.

On a $G(de, e, n) \subset G(r, 1, n)$ sous-groupe normal d'indice e.

D'un autre côté, 34 groupes exceptionnels $G_4, \ldots, G_{37}$. Parmi eux, 19 sont de rang 2.

Classification de Shephard-Todd

W **irréductible** : $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible.
Tout GRC est produit de GRCs irréductibles.
Shephard et Todd '54: Classification des GRCs irréductibles.

D'un côté, une série infinie de groupes $G(de, e, n)$ formés de :

- matrices monomiales $n \times n$,
- avec coefficients non nuls dans μ_r, $r = de$,
- dont le produit appartient à μ_d.

On a $G(de, e, n) \subset G(r, 1, n)$ sous-groupe normal d'indice e.

D'un autre côté, 34 groupes exceptionnels $G_4, \ldots, G_{37}$. Parmi eux, 19 sont de rang 2.

Il est possible d'utiliser des preuves au cas-par-cas.

Classification de Shephard-Todd

W irréductible.

Corollaire

W peut être engendré par un ensemble de $n+1$ réflexions.

Classification de Shephard-Todd

W irréductible.

Corollaire

W peut être engendré par un ensemble de $n+1$ réflexions.

Si W peut être engendré par n réflexions, alors W est **bien-engendré**.

Classification de Shephard-Todd

W irréductible.

Corollaire

W peut être engendré par un ensemble de $n+1$ réflexions.

Si W peut être engendré par n réflexions, alors W est **bien-engendré**.

Corollaire

W admet au plus trois classes de conjugaison de réflexions (deux si W est bien-engendré).

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.
- Suite exacte courte $1 \to P \to B \to W \to 1$.

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.
- Suite exacte courte $1 \to P \to B \to W \to 1$.
- B est engendré par des **réflexions tressées** (distinguées).

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.
- Suite exacte courte $1 \to P \to B \to W \to 1$.
- B est engendré par des **réflexions tressées** (distinguées).
- Si W Coxeter, B est le **groupe d'Artin** de W.

Broué, Malle, Rouquier '98

Motivé par la théorie des représentations des groupes réductifs finis.

- Groupe de tresses $B = B(W) := \pi_1(X/W)$.
- Groupe de tresses pur $P = P(W) := \pi_1(X)$.
- Notation : $B_i = B(G_i)$ et $B(de, e, n) = B(G(de, e, n))$.
- Suite exacte courte $1 \to P \to B \to W \to 1$.
- B est engendré par des **réflexions tressées** (distinguées).
- Si W Coxeter, B est le **groupe d'Artin** de W.
- **Diagrammes de BMR**, donnant une présentation de W.

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.
- Présentation du groupe d'Artin associé à W.

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.
- Présentation du groupe d'Artin associé à W.
- Présentation des sous-groupes “paraboliques” de W, et de B.

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.
- Présentation du groupe d'Artin associé à W.
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W, et de B.

Groupes de réflexions complexes $\rightarrow$ diagrammes de BMR :

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.
- Présentation du groupe d'Artin associé à W.
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W, et de B.

Groupes de réflexions complexes $\rightarrow$ diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.
- Présentation du groupe d'Artin associé à W.
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W, et de B.

Groupes de réflexions complexes $\rightarrow$ diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓
- Présentation de B ?

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.
- Présentation du groupe d'Artin associé à W.
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W, et de B.

Groupes de réflexions complexes $\rightarrow$ diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓
- Présentation de B ?
- Présentation des sous-groupes paraboliques de B ?

Diagrammes de BMR

Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.
- Présentation du groupe d'Artin associé à W.
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W, et de B.

Groupes de réflexions complexes $\rightarrow$ diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓
- Présentation de B ?
- Présentation des sous-groupes paraboliques de B ?
- Sous-groupes paraboliques de B ?

Diagrammes de BMR

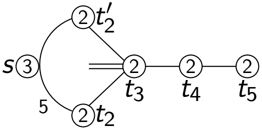
Groupes réels=groupes de Coxeter finis $\rightarrow$ diagrammes de Coxeter :

- Présentation de W.
- Présentation du groupe d'Artin associé à W.
- Présentation des sous-groupes "paraboliques" de W, et de B.

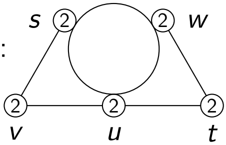
Groupes de réflexions complexes $\rightarrow$ diagrammes de BMR :

- Présentation de W ✓
- Présentation de B ?
- Présentation des sous-groupes paraboliques de B ?
- Sous-groupes paraboliques de B ?

$G(12,4,5)$:



G_{31} :



Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P.

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P. Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t}*$ induit un lacet dans X/W. Son image dans B est notée z_B.

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P. Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W. Son image dans B est notée z_B.

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P. Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W. Son image dans B est notée z_B.

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

- Le diagramme de BMR fournit-il une présentation de B ?

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P. Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t}*$ induit un lacet dans X/W. Son image dans B est notée z_B.

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

- Le diagramme de BMR fournit-il une présentation de B ?
- Le monoïde défini par la même présentation se plonge-t-il dans B ?

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P. Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W. Son image dans B est notée z_B.

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

- Le diagramme de BMR fournit-il une présentation de B ?
- Le monoïde défini par la même présentation se plonge-t-il dans B ?
- $+$ Est-ce que X/W est un $K(\pi, 1)$?

Questions soulevées par BMR

W irréductible.

- Détermination des centres de B et de P. Le chemin $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{|Z(W)|}t} *$ induit un lacet dans X/W. Son image dans B est notée z_B.

Conjecture (Broué, Malle, Rouquier '98)

$Z(B) = \langle z_B \rangle$ et $Z(P) = \langle z_P \rangle$, avec $z_P := (z_B)^{|Z(W)|}$.

- Le diagramme de BMR fournit-il une présentation de B ?
- Le monoïde défini par la même présentation se plonge-t-il dans B ?
- $+$ Est-ce que X/W est un $K(\pi, 1)$?

À la publication de BMR, ces questions sont résolues pour la plupart des GRCs sauf

$$G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{31}, G_{33}, G_{34}.$$

Le monoïde dual

W bien-engendré.

Le monoïde dual

W bien-engendré.

Théorème (Bessis '15 + Ripoll '10 and Douvropoulos '17)

- $Z(B)$ est monogène comme conjecturé par BMR.
- L'espace X/W est un $K(\pi, 1)$.
- Présentation de B, dite *présentation d'Hurwitz*.

Le monoïde dual

W bien-engendré.

Théorème (Bessis '15 + Ripoll '10 and Douvropoulos '17)

- $Z(B)$ est monogène comme conjecturé par BMR.
- L'espace X/W est un $K(\pi, 1)$.
- Présentation de B, dite *présentation d'Hurwitz*.

Cette approche s'applique en particulier à $G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{33}, G_{34}$.

Le monoïde dual

W bien-engendré.

Théorème (Bessis '15 + Ripoll '10 and Douvropoulos '17)

- $Z(B)$ est monogène comme conjecturé par BMR.
- L'espace X/W est un $K(\pi, 1)$.
- Présentation de B, dite *présentation d'Hurwitz*.

Cette approche s'applique en particulier à $G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{33}, G_{34}$.

Les questions de BMR sont toujours sans réponses à ce stade pour G_{31}.

Groupes de Garside

Soit G un groupe.

Groupes de Garside

Soit G un groupe.

Définition [Dehornoy, Paris '99]

Structure de Garside sur G : monoïde $M \subset G$ et $\Delta \in M$ tel que

- M engendre G en tant que groupe.
- M est un treillis pour la divisibilité à gauche et à droite.
- Pour $x \in M$, la longueur d'un produit $x = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans M est bornée.
- $\mathrm{Div}(\Delta) = \mathrm{Div}_D(\Delta)$ est fini et engendre M.

Groupes de Garside

Soit G un groupe.

Définition [Dehornoy, Paris '99]

Structure de Garside sur G : monoïde $M \subset G$ et $\Delta \in M$ tel que

- M engendre G en tant que groupe.
- M est un treillis pour la divisibilité à gauche et à droite.
- Pour $x \in M$, la longueur d'un produit $x = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans M est bornée.
- $\mathrm{Div}(\Delta) = \mathrm{Div}_D(\Delta)$ est fini et engendre M.

On note un *groupe de Garside* par un triplet (G, M, Δ).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
  (Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits** (Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- "Groupes de Shephard" : même monoïde qu'un groupe de Coxeter (Orlik-Solomon '88).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits** (Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- "Groupes de Shephard" : même monoïde qu'un groupe de Coxeter (Orlik-Solomon '88).
- Groupes exceptionnels de rang 2 : structures *ad hoc* (Dehornoy-Paris '99, Picantin '00).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
  (Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- "Groupes de Shephard" : même monoïde qu'un groupe de Coxeter
  (Orlik-Solomon '88).
- Groupes exceptionnels de rang 2 : structures *ad hoc*
  (Dehornoy-Paris '99, Picantin '00).
- Groupes bien-engendrés : **monoïde dual**
  (Birman-Ko-Lee '98, Bessis 03, Bessis-Corran 06, Bessis '15).

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits** (Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- "Groupes de Shephard" : même monoïde qu'un groupe de Coxeter (Orlik-Solomon '88).
- Groupes exceptionnels de rang 2 : structures *ad hoc* (Dehornoy-Paris '99, Picantin '00).
- Groupes bien-engendrés : **monoïde dual** (Birman-Ko-Lee '98, Bessis 03, Bessis-Corran 06, Bessis '15).

Cela exclut $B(de, e, n)$ pour $n \geqslant 3$ et $d \geqslant 2$ ou $e \geqslant 3$ ...

Structures de Garside pour les groupes de tresses complexes

- Groupe de Coxeter : **monoïde d'Artin-Tits**
(Deligne '72, Brieskorn-Saito '72, Dehornoy-Paris '99).
- "Groupes de Shephard" : même monoïde qu'un groupe de Coxeter
(Orlik-Solomon '88).
- Groupes exceptionnels de rang 2 : structures *ad hoc*
(Dehornoy-Paris '99, Picantin '00).
- Groupes bien-engendrés : **monoïde dual**
(Birman-Ko-Lee '98, Bessis 03, Bessis-Corran 06, Bessis '15).

Cela exclut $B(de, e, n)$ pour $n \geqslant 3$ et $d \geqslant 2$ ou $e \geqslant 3$ ... et B_{31}.

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale) (Dehornoy-Paris '99).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale) (Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale) (Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale) (Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04).
- Calcul de l'homologie de M, qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale) (Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04).
- Calcul de l'homologie de M, qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M, et donc de G (Dehornoy-Paris '99).

Produits d'une structure de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale) (Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04).
- Calcul de l'homologie de M, qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M, et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.
Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.
Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '07)

Si δ est un **élément de Garside parabolique**, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupe parabolique standard** de (G, M, Δ).

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.
Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '07)

Si δ est un **élément de Garside parabolique**, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupe parabolique standard** de (G, M, Δ).

Definition (Godelle '07)

Un groupe de la forme $gG_\delta g^{-1}$ est un **sous-groupe parabolique**.

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.
Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle^+$ et $G_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '07)

Si δ est un **élément de Garside parabolique**, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupe parabolique standard** de (G, M, Δ).

Definition (Godelle '07)

Un groupe de la forme $gG_\delta g^{-1}$ est un **sous-groupe parabolique**.

Notons que "être parabolique" dépend de (G, M, Δ) et pas que de G.
Exemple: $\langle a, b \mid aba = bab \rangle^+$ et $\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle^+$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de Garside

(G, M, Δ) groupe de Garside.
Pour $\delta \in M$, on pose $M_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta)\rangle^+$ et $G_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta)\rangle$.

Proposition (Godelle '07)

Si δ est un **élément de Garside parabolique**, alors $(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupe parabolique standard** de (G, M, Δ).

Definition (Godelle '07)

Un groupe de la forme $gG_\delta g^{-1}$ est un **sous-groupe parabolique**.

Notons que "être parabolique" dépend de (G, M, Δ) et pas que de G.
Exemple: $\langle a, b \mid aba = bab\rangle^+$ et $\langle x, y \mid x^2 = y^3\rangle^+$.

Les sous-groupes paraboliques sont-ils stables par intersection ?

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.
Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $\mathrm{PC}(x)$, sa *clôture parabolique.*

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.
Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $\mathrm{PC}(x)$, sa *clôture parabolique.*

Lemme (Godelle '07)

Les sous-groupes parabolique standards sont stables par intersection.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.
Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $\mathrm{PC}(x)$, sa *clôture parabolique.*

Lemme (Godelle '07)

Les sous-groupes parabolique standards sont stables par intersection.

On peut donc définir $\mathrm{SPC}(x)$ la *clôture parabolique standard* de x.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.
Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $\mathrm{PC}(x)$, sa *clôture parabolique.*

Lemme (Godelle '07)

Les sous-groupes parabolique standards sont stables par intersection.

On peut donc définir $\mathrm{SPC}(x)$ la *clôture parabolique standard* de x. On espère que $\mathrm{SPC}(x) = \mathrm{PC}(x)$ dans les bons cas, au moins si $x \in M$.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside avec $x \in G$.
Si les paraboliques sont stables par intersection, alors x est contenu dans un unique parabolique minimal $\mathrm{PC}(x)$, sa *clôture parabolique.*

Lemme (Godelle '07)

Les sous-groupes parabolique standards sont stables par intersection.

On peut donc définir $\mathrm{SPC}(x)$ la *clôture parabolique standard* de x. On espère que $\mathrm{SPC}(x) = \mathrm{PC}(x)$ dans les bons cas, au moins si $x \in M$.

Définition (González-Meneses, Marin '22, G. '24)

(G, M, Δ) **préserve le support** si pour tous $x, y \in M$, $\alpha \in G$, on a

$$x^\alpha = y \Rightarrow \mathrm{SPC}(x)^\alpha = \mathrm{SPC}(y).$$

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Théorème (González-Meneses, Marin '22)

Si (G, M, Δ) préserve le support, alors toutes les clôtures paraboliques existent dans G et $\mathrm{SPC}(x) = \mathrm{PC}(x)$ pour $x \in M$.
De plus, si G est homogène, alors les sous-groupes paraboliques de G sont stables par intersection.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Théorème (González-Meneses, Marin '22)

Si (G, M, Δ) préserve le support, alors toutes les clôtures paraboliques existent dans G et $\mathrm{SPC}(x) = \mathrm{PC}(x)$ pour $x \in M$.
De plus, si G est homogène, alors les sous-groupes paraboliques de G sont stables par intersection.

Remarque: En pratique, la préservation du support est très difficile à vérifier.

Préservation du support

(G, M, Δ) groupe de Garside.

Théorème (González-Meneses, Marin '22)

Si (G, M, Δ) préserve le support, alors toutes les clôtures paraboliques existent dans G et $\mathrm{SPC}(x) = \mathrm{PC}(x)$ pour $x \in M$.
De plus, si G est homogène, alors les sous-groupes paraboliques de G sont stables par intersection.

Remarque: En pratique, la préservation du support est très difficile à vérifier.

Existe-t-il des groupes de Garside qui ne préservent pas le support ?

Groupoïdes de Garside

$\mathcal{G}$ un groupoïde avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une categorie.

Groupoïdes de Garside

$\mathcal{G}$ un groupoïde avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une categorie.
$\preccurlyeq$ désigne la divisibilité à gauche : pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(u, -)$, on a

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{C} \mid fh = g.$$

Groupoïdes de Garside

$\mathcal{G}$ un groupoïde avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une categorie.
$\preccurlyeq$ désigne la divisibilité à gauche : pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(u, -)$, on a

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{C} \mid fh = g.$$

$\succcurlyeq$ désigne la divisibilité à droite : pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(-, u)$, on a

$$g \succcurlyeq f \Leftrightarrow \exists h' \in \mathcal{C} \mid g = h'f.$$

Groupoïdes de Garside

$\mathcal{G}$ un groupoïde avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une categorie.
$\preccurlyeq$ désigne la divisibilité à gauche : pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(u, -)$, on a

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{C} \mid fh = g.$$

$\succcurlyeq$ désigne la divisibilité à droite : pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathcal{C}(-, u)$, on a

$$g \succcurlyeq f \Leftrightarrow \exists h' \in \mathcal{C} \mid g = h'f.$$

Pour $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, on pose

$$\mathrm{Div}(\Delta) = \{s \in \mathcal{C} \mid \exists u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), s \preccurlyeq \Delta(u)\},$$
$$\mathrm{Div}_R(\Delta) = \{s \in \mathcal{C} \mid \exists u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \Delta(u) \succcurlyeq s\}.$$

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur $\mathcal{G}$: catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur $\mathcal{G}$: catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$

- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur $\mathcal{G}$: catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$

- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{G}$ en tant que groupoïde.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur $\mathcal{G}$: catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$

- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{G}$ en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preccurlyeq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succcurlyeq)$ sont des treillis.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur $\mathcal{G}$: catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$

- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{G}$ en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preccurlyeq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succcurlyeq)$ sont des treillis.
- Pour $f \in \mathcal{C}$, la longueur d'une composition $f = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans $\mathcal{C}$ est bornée.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur $\mathcal{G}$: catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$

- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{G}$ en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u,-), \preccurlyeq)$ et $(\mathcal{C}(-,u), \succcurlyeq)$ sont des treillis.
- Pour $f \in \mathcal{C}$, la longueur d'une composition $f = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans $\mathcal{C}$ est bornée.
- $\mathrm{Div}(\Delta) = \mathrm{Div}_R(\Delta)$ est fini et engendre $\mathcal{C}$.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur $\mathcal{G}$: catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$

- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{G}$ en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preccurlyeq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succcurlyeq)$ sont des treillis.
- Pour $f \in \mathcal{C}$, la longueur d'une composition $f = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans $\mathcal{C}$ est bornée.
- $\mathrm{Div}(\Delta) = \mathrm{Div}_R(\Delta)$ est fini et engendre $\mathcal{C}$.

Δ est une **application de Garside**. $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ est un **groupoïde de Garside**.

Groupoïdes de Garside

Définition

Structure de Garside sur $\mathcal{G}$: catégorie $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ et $\Delta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$

- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\Delta(u) \in \mathcal{C}(u, -)$.
- $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{G}$ en tant que groupoïde.
- Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}(u, -), \preccurlyeq)$ et $(\mathcal{C}(-, u), \succcurlyeq)$ sont des treillis.
- Pour $f \in \mathcal{C}$, la longueur d'une composition $f = s_1 \cdots s_r$ avec $s_i \neq 1$ dans $\mathcal{C}$ est bornée.
- $\mathrm{Div}(\Delta) = \mathrm{Div}_R(\Delta)$ est fini et engendre $\mathcal{C}$.

Δ est une **application de Garside**. $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ est un **groupoïde de Garside**.

Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u, u)$ est un **groupe de Garside faible**.

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupe de Garside (G, M, Δ) donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale) (Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M, qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M, et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur G (forme normale) (Dehornoy-Paris '99).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M, qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M, et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur $\mathcal{G}$ (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans $G \longrightarrow$ étude de $Z(G)$ (Picantin '01, Gebhardt-González-Meneses '10).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M, qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M, et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur $\mathcal{G}$ (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans $\mathcal{G}$. (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(G, 1)$ fini (nerf de Garside) (Charney-Meier-Whittlesey '04) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M, qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M, et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur $\mathcal{G}$ (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans $\mathcal{G}$. (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(\mathcal{G}, 1)$ fini (nerf de Garside) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de M, qui coïncide avec celle de G (Dehornoy-Lafont '03).
- Les atomes de M donnent une présentation de M, et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur $\mathcal{G}$ (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans $\mathcal{G}$. (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(\mathcal{G}, 1)$ fini (nerf de Garside) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de $\mathcal{C}$, qui coïncide avec celle de $\mathcal{G}$ (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15) (G. '24).
- Les atomes de M donnent une présentation de M, et donc de G (Dehornoy-Paris '99).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur $\mathcal{G}$ (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans $\mathcal{G}$. (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(\mathcal{G}, 1)$ fini (nerf de Garside) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de $\mathcal{C}$, qui coïncide avec celle de $\mathcal{G}$ (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15) (G. '24).
- Les atomes de $\mathcal{C}$ donnent une présentation de $\mathcal{C}$, et donc de $\mathcal{G}$ (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Notion de sous-groupe parabolique de G (Godelle '07).

Produits d'une structure de groupoïde de Garside

Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ donne les informations suivantes :

- Solution du problème du mot sur $\mathcal{G}$ (forme normale) (Digne-Michel '06).
- Solution au problème de conjugaison dans $\mathcal{G}$. (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Construction explicite d'un $K(\mathcal{G}, 1)$ fini (nerf de Garside) (Bessis '07).
- Calcul de l'homologie de $\mathcal{C}$, qui coïncide avec celle de $\mathcal{G}$ (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15) (G. '24).
- Les atomes de $\mathcal{C}$ donnent une présentation de $\mathcal{C}$, et donc de $\mathcal{G}$ (Dehornoy, Digne, Godelle, Krammer, Michel '15).
- Notion de sous-groupoïde parabolique de $\mathcal{G}$ (Godelle '10) (G. '24).

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.
Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.
Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.
Pour $\delta : E \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{C}_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle^+$ et $\mathcal{G}_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle$.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.
Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.
Pour $\delta : E \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{C}_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle^+$ et $\mathcal{G}_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '10)

Si δ est une **application de Garside parabolique**, alors $(\mathcal{G}_\delta, \mathcal{C}_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupoïde parabolique standard** de $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.
Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.
Pour $\delta : E \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{C}_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle^+$ et $\mathcal{G}_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '10)

Si δ est une **application de Garside parabolique**, alors $(\mathcal{G}_\delta, \mathcal{C}_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupoïde parabolique standard** de $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$.

Définition (Godelle '10)

Un groupe de la forme $G_\delta(u, u)$ est appelé **sous-groupe parabolique standard** de $\mathcal{G}(u, u)$. Pour $g \in \mathcal{G}(v, u)$, un groupe de la forme $gG_\delta(u, u)g^{-1}$ est appelé un **sous-groupe parabolique** de $\mathcal{G}(v, v)$.

Sous-groupoïdes paraboliques des groupoïdes de Garside

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside.
Les éléments de Garside paraboliques sont remplacés par des applications.
Pour $\delta : E \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{C}_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle^+$ et $\mathcal{G}_\delta := \langle \mathrm{Div}(\delta) \rangle$.

Proposition (Godelle '10)

Si δ est une **application de Garside parabolique**, alors $(\mathcal{G}_\delta, \mathcal{C}_\delta, \delta)$ est de Garside, et appelé **sous-groupoïde parabolique standard** de $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$.

Définition (Godelle '10)

Un groupe de la forme $G_\delta(u, u)$ est appelé **sous-groupe parabolique standard** de $\mathcal{G}(u, u)$. Pour $g \in \mathcal{G}(v, u)$, un groupe de la forme $gG_\delta(u, u)g^{-1}$ est appelé un **sous-groupe parabolique** de $\mathcal{G}(v, v)$.

On peut poser la question de l'intersection et des clôtures paraboliques dans les groupoïdes de Garside.

Bancs

Problème : Les sous-groupoïdes paraboliques standards ne sont pas toujours stables par intersection !

Bancs

Problème : Les sous-groupoïdes paraboliques standards ne sont pas toujours stables par intersection !

Définition (G. '24)

Banc: famille $\mathcal{T}$ de sous-groupoïdes paraboliques standards telle que

- $\mathcal{G} \in \mathcal{T}$ et $\{1_u\}_{u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})} \in \mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ est stable par l'automorphisme de Garside (conjugaison par Δ).
- L'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$, si non vide, appartient à $\mathcal{T}$.

Bancs

Problème : Les sous-groupoïdes paraboliques standards ne sont pas toujours stables par intersection !

Définition (G. '24)

Banc: famille $\mathcal{T}$ de sous-groupoïdes paraboliques standards telle que

- $\mathcal{G} \in \mathcal{T}$ et $\{1_u\}_{u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})} \in \mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ est stable par l'automorphisme de Garside (conjugaison par Δ).
- L'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$, si non vide, appartient à $\mathcal{T}$.

Définition (G. '24)

Pour $\mathcal{G}_\delta \in \mathcal{T}$, $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G}_\delta)$, le groupe $\mathcal{G}_\delta(u,u) \subset \mathcal{G}(u,u)$ est appelé un sous-groupe parabolique $\mathcal{T}$-**standard**. Les sous-groupes $\mathcal{T}$-**paraboliques** de $\mathcal{G}(u,u)$ sont les conjugués des sous-groupes paraboliques $\mathcal{T}$-standards.

Clôture $\mathcal{T}$-parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$.

Clôture $\mathcal{T}$-parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u,u)$ admet une clôture parabolique $\mathcal{T}$-standard notée $\mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Clôture $\mathcal{T}$-parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u, u)$ admet une clôture parabolique $\mathcal{T}$-standard notée $\mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Définition (G. '24)

$\mathcal{T}$ **préserve le support** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathcal{G}$, on a

$$x^{\alpha} = y \Rightarrow \mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)^{\alpha} = \mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(y)$$

Clôture $\mathcal{T}$-parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u,u)$ admet une clôture parabolique $\mathcal{T}$-standard notée $\mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Définition (G. '24)

$\mathcal{T}$ **préserve le support** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathcal{G}$, on a

$$x^{\alpha} = y \Rightarrow \mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)^{\alpha} = \mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(y)$$

Théorème (G. '24)

Si $\mathcal{T}$ préserve le support, alors les clôtures $\mathcal{T}$-paraboliques existent dans $\mathcal{G}$, et $\mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x) = \mathrm{PC}_{\mathcal{T}}(x)$ pour $x \in \mathcal{C}$ endomorphisme.

Clôture $\mathcal{T}$-parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u, u)$ admet une clôture parabolique $\mathcal{T}$-standard notée $\mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Définition (G. '24)

$\mathcal{T}$ **préserve le support** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathcal{G}$, on a

$$x^\alpha = y \Rightarrow \mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)^\alpha = \mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(y)$$

Théorème (G. '24)

Si $\mathcal{T}$ préserve le support, alors les clôtures $\mathcal{T}$-paraboliques existent dans $\mathcal{G}$, et $\mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x) = \mathrm{PC}_{\mathcal{T}}(x)$ pour $x \in \mathcal{C}$ endomorphisme.

- Pas encore d'argument général pour l'intersection des sous-groupes $\mathcal{T}$-paraboliques.

Clôture $\mathcal{T}$-parabolique

$(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \Delta)$ groupoïde de Garside et $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Par définition, tout $x \in \mathcal{G}(u,u)$ admet une clôture parabolique $\mathcal{T}$-standard notée $\mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)$.

Définition (G. '24)

$\mathcal{T}$ **préserve le support** si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathcal{G}$, on a

$$x^{\alpha} = y \Rightarrow \mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x)^{\alpha} = \mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(y)$$

Théorème (G. '24)

Si $\mathcal{T}$ préserve le support, alors les clôtures $\mathcal{T}$-paraboliques existent dans $\mathcal{G}$, et $\mathrm{SPC}_{\mathcal{T}}(x) = \mathrm{PC}_{\mathcal{T}}(x)$ pour $x \in \mathcal{C}$ endomorphisme.

- Pas encore d'argument général pour l'intersection des sous-groupes $\mathcal{T}$-paraboliques.
- Comment construire des bancs avec des bonnes propriétés ?

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S.
$\mathcal{G} := \langle S \mid R \rangle$ groupoïde présenté.
Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u,u)$ est un groupe.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S.
$\mathcal{G} := \langle S \mid R \rangle$ groupoïde présenté.
Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u, u)$ est un groupe.

Définition

Une **transversale de Schreier** est une famille $T = \{t_v\}_{v \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})}$ stable par préfixe et telle que pour tout $v \in \mathrm{Ob}(S)$, $t_v : u \to v$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S.
$\mathcal{G} := \langle S \mid R \rangle$ groupoïde présenté.
Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u, u)$ est un groupe.

Définition

Une **transversale de Schreier** est une famille $T = \{t_v\}_{v \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})}$ stable par préfixe et telle que pour tout $v \in \mathrm{Ob}(S)$, $t_v : u \to v$.

Pour une telle transversale, et $s \in S(v, v')$, $\gamma(s) := t_v s (t_{v'})^{-1} \in \mathcal{G}(u, u)$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes

S un graphe orienté. R un ensemble de couples de chemins dans S.
$\mathcal{G} := \langle S \mid R \rangle$ groupoïde présenté.
Pour $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(u,u)$ est un groupe.

Définition

Une **transversale de Schreier** est une famille $T = \{t_v\}_{v \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})}$ stable par préfixe et telle que pour tout $v \in \mathrm{Ob}(S)$, $t_v : u \to v$.

Pour une telle transversale, et $s \in S(v,v')$, $\gamma(s) := t_v s (t_{v'})^{-1} \in \mathcal{G}(u,u)$.

Proposition (G. '21)

Le groupe $\mathcal{G}(u,u)$ est engendré par $\gamma(s)$ pour $s \in S$, avec les relations

$$\gamma(s_1)\cdots\gamma(s_p) = \gamma(t_1)\cdots\gamma(t_q)$$

pour $s_1 \cdots s_p = t_1 \cdots t_q \in R$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$
\begin{tikzcd}
 & u \arrow[rr, "d"] \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] & & v \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g"] & \\
w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}
$$

avec $ab = c$

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] \arrow[rr, "d"] & & v \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g"] & \\
w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}$$

avec $ab = c$

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[rr, "d"] \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] & & v \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g"] & \\ w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd}$$

avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[rr, "d"] \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] & & v \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g"] & \\ w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd}$$

avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$\begin{tikzcd}
& u \arrow[ld, "a"'] \arrow[rd, "c"] \arrow[rr, "d"] & & v \arrow[ld, "e"'] \arrow[rd, "g"] & \\
w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}$$

avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$\begin{tikzcd}
& u \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] \arrow[rr, "d"] & & v \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g"] & \\
w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}$$

avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(f) = dgfe^{-1}d^{-1}$.

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[rr, "d"] \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] & & v \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g"] & \\
w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd} \qquad \text{avec } ab = c$$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(f) = dgfe^{-1}d^{-1}$.

$ab = c$ induit $\gamma(b) = \gamma(c)$ (qui se vérifie aussi directement).

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$\begin{tikzcd}
& u \arrow[rr, "d"] \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] & & v \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g"] & \\
w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}
\qquad \text{avec } ab = c$$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(f) = dgfe^{-1}d^{-1}$.

$ab = c$ induit $\gamma(b) = \gamma(c)$ (qui se vérifie aussi directement).

$$\mathcal{G}(u,u) = \langle \gamma(b), \gamma(c), \gamma(f) \rangle \simeq \langle X, Y, Z \mid X = Y \rangle = \langle X, Z \mid \varnothing \rangle.$$

Méthode de Reidemeister-Schreier pour les groupoïdes, exemple

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[rr, "d"] \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "c"] & & v \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g"] & \\
w \arrow[rr, "b"'] & & x & & z \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}$$

avec $ab = c$

- $\gamma(a) = \gamma(d) = \gamma(e) = \gamma(g) = 1_u$.
- $\gamma(b) = abe^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(c) = ce^{-1}d^{-1}$,
- $\gamma(f) = dgfe^{-1}d^{-1}$.

$ab = c$ induit $\gamma(b) = \gamma(c)$ (qui se vérifie aussi directement).

$$\mathcal{G}(u,u) = \langle \gamma(b), \gamma(c), \gamma(f) \rangle \simeq \langle X, Y, Z \mid X = Y \rangle = \langle X, Z \mid \varnothing \rangle.$$

Cette méthode requiert de lourdes simplifications.

Le groupoïde de Springer

Le groupoïde de Springer

Theorem (Bessis '15)

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde de Springer

Theorem (Bessis '15)

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés.

Le groupoïde de Springer

Theorem (Bessis '15)

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés. Ici, on utilise $G_{31} \hookrightarrow G_{37} \simeq E_8$ comme centralisateur d'un élément 4-régulier.

Le groupoïde de Springer

Theorem (Bessis '15)

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés. Ici, on utilise $G_{31} \hookrightarrow G_{37} \simeq E_8$ comme centralisateur d'un élément 4-régulier. Beaucoup des résultats présentés plus bas sont des cas particuliers de résultats généraux sur les groupoïdes de Springer.

Le groupoïde de Springer

Theorem (Bessis '15)

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés. Ici, on utilise $G_{31} \hookrightarrow G_{37} \simeq E_8$ comme centralisateur d'un élément 4-régulier. Beaucoup des résultats présentés plus bas sont des cas particuliers de résultats généraux sur les groupoïdes de Springer.

Corollary (Bessis '15)

L'espace des orbites régulières pour G_{31} est un classifiant pour B_{31}.

Le groupoïde de Springer

Theorem (Bessis '15)

B_{31} est un groupe de Garside faible pour un groupoïde $(\mathcal{B}_{31}, \mathcal{C}_{31}, \Delta)$, le **Groupoïde de Springer**.

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ est construit en général pour les centralisateurs d'éléments réguliers de Springer dans les groupes bien-engendrés. Ici, on utilise $G_{31} \hookrightarrow G_{37} \simeq E_8$ comme centralisateur d'un élément 4-régulier. Beaucoup des résultats présentés plus bas sont des cas particuliers de résultats généraux sur les groupoïdes de Springer.

Corollary (Bessis '15)

L'espace des orbites régulières pour G_{31} est un classifiant pour B_{31}.

Corollary (Bessis '15)

Le centre de B_{31} est monogène et engendré par $z_{B_{31}}$.

Présentation de B_{31}

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ admet une présentation

$$\mathcal{B}_{31} = \langle \text{atomes} \mid \text{carrés commutatifs d'atomes} \rangle .$$

Présentation de B_{31}

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ admet une présentation

$$\mathcal{B}_{31} = \langle \text{atomes } (660) \mid \text{carrés commutatifs d'atomes } (4230) \rangle.$$

Présentation de B_{31}

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ admet une présentation

$$\mathcal{B}_{31} = \langle \text{atomes } (660) \mid \text{carrés commutatifs d'atomes } (4230) \rangle.$$

En appliquant la méthode de Reidemeister-Schreier, on obtient

Théorème (G. '21)

Le groupe B_{31} admet (entre autres) la présentation suivante

$$\left\langle s, t, u, v, w \;\middle|\; \begin{array}{l} st = ts, \;\; vt = tv, \;\; wv = vw, \\ suw = uws = wsu, \\ svs = vsv, \;\; vuv = uvu, \;\; utu = tut, \;\; twt = wtw \end{array} \right\rangle.$$

Présentation de B_{31}

Le groupoïde $\mathcal{B}_{31}$ admet une présentation

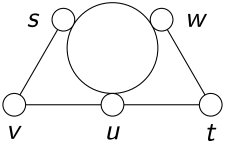
$$\mathcal{B}_{31} = \langle \text{atomes (660)} \mid \text{carrés commutatifs d'atomes (4230)} \rangle.$$

En appliquant la méthode de Reidemeister-Schreier, on obtient

Théorème (G. '21)

Le groupe B_{31} admet (entre autres) la présentation suivante

$$\left\langle s, t, u, v, w \;\middle|\; \begin{array}{l} st = ts,\; vt = tv,\; wv = vw, \\ suw = uws = wsu, \\ svs = vsv,\; vuv = uvu,\; utu = tut,\; twt = wtw \end{array} \right\rangle.$$



Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31}.

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31}.
Argument principal :

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31}.
Argument principal :

- B a une structure de Garside (G, M, Δ).

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31}.
Argument principal :

- B a une structure de Garside (G, M, Δ).
- Les atomes de M représentent toutes les réflexions tressées à conjugaison près.

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31}.
Argument principal :

- B a une structure de Garside (G, M, Δ).
- Les atomes de M représentent toutes les réflexions tressées à conjugaison près.
- Montrer que pour s atome et $x \in G$, alors $xs^n = s^n x$ entraîne $xs = sx$.

Centre de P_{31}

Théorème (Digne, Marin, Michel '11)

Soit W un GRC irréductible, et soit $U \subset B$ d'indice fini. Alors $Z(U) \subset Z(B)$. Cela s'applique en particulier pour $U = P$.

La preuve repose sur la théorie de Garside **sauf pour** G_{31}.
Argument principal :

- B a une structure de Garside (G, M, Δ).
- Les atomes de M représentent toutes les réflexions tressées à conjugaison près.
- Montrer que pour s atome et $x \in G$, alors $xs^n = s^n x$ entraîne $xs = sx$.

Problème : comment retrouver les réflexions tressées dans le groupoïde de Springer ?

Centre de P_{31}

Soit $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}_{31})$.

Centre de P_{31}

Soit $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}_{31})$. Le monoïde $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ contient un ensemble fini bien défini de **boucles atomiques**.

Centre de P_{31}

Soit $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}_{31})$. Le monoïde $\mathcal{C}_{31}(u,u)$ contient un ensemble fini bien défini de **boucles atomiques**.

Proposition (G. '23)

Les réflexions tressées de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u,u)$ sont exactement les conjugués dans $\mathcal{B}_{31}$ des boucles atomiques. Si s est une boucle atomique dans $\mathcal{C}_{31}$, et $x \in \mathcal{B}_{31}$ est tel que $xs^n = s^n x$, alors on a $xs = sx$.

Centre de P_{31}

Soit $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}_{31})$. Le monoïde $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ contient un ensemble fini bien défini de **boucles atomiques**.

Proposition (G. '23)

Les réflexions tressées de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u, u)$ sont exactement les conjugués dans $\mathcal{B}_{31}$ des boucles atomiques. Si s est une boucle atomique dans $\mathcal{C}_{31}$, et $x \in \mathcal{B}_{31}$ est tel que $xs^n = s^n x$, alors on a $xs = sx$.

Corollaire

Soit $\sigma \in B_{31}$ une réflexion tressées. Si $x\sigma^n = \sigma^n x$, alors $x\sigma = \sigma x$.

Centre de P_{31}

Soit $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}_{31})$. Le monoïde $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ contient un ensemble fini bien défini de **boucles atomiques**.

Proposition (G. '23)

Les réflexions tressées de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u, u)$ sont exactement les conjugués dans $\mathcal{B}_{31}$ des boucles atomiques. Si s est une boucle atomique dans $\mathcal{C}_{31}$, et $x \in \mathcal{B}_{31}$ est tel que $xs^n = s^n x$, alors on a $xs = sx$.

Corollaire

Soit $\sigma \in B_{31}$ une réflexion tressées. Si $x\sigma^n = \sigma^n x$, alors $x\sigma = \sigma x$.

Remarque : Pour tout $u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}_{31})$, les boucles atomiques de $\mathcal{C}_{31}(u, u)$ engendrent $\mathcal{B}_{31}(u, u)$.

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \to \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1.
On en déduit deux B_{31}-modules :

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \to \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1.
On en déduit deux B_{31}-modules :

- $\mathbb{Z}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $(-1)^{\ell(b)}$.

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \to \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1.
On en déduit deux B_{31}-modules :

- $\mathbb{Z}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $(-1)^{\ell(b)}$.
- $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $t^{\ell(b)}$.

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \to \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1. On en déduit deux B_{31}-modules :

- $\mathbb{Z}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $(-1)^{\ell(b)}$.
- $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $t^{\ell(b)}$.

En utilisant $\mathcal{B}_{31}$, on peut calculer l'homologie de B_{31} à coefficients dans ces modules.

Calculs d'homologie

Il existe un morphisme $\ell : B_{31} \to \mathbb{Z}$ qui envoie réflexions tressées sur 1. On en déduit deux B_{31}-modules :

- $\mathbb{Z}_\varepsilon := \mathbb{Z}$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $(-1)^{\ell(b)}$.
- $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ où $b \in B_{31}$ agit par multiplication par $t^{\ell(b)}$.

En utilisant $\mathcal{B}_{31}$, on peut calculer l'homologie de B_{31} à coefficients dans ces modules.

Proposition (G. '24)

$B(G_{31})$	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_\varepsilon$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{20}$	0
$\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$	$\mathbb{Q}$	0	Φ_6	$\frac{t^{10}-1}{t+1}\Phi_{15}$	0

Où $\mathbb{Z}_n$ désigne $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $P(t)$ désigne $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]/(P(t))$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B, qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B, qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.
Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B, qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.
Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Theorem (González-Meneses, Marin '22)

On suppose W irréductible et différent de G_{31}.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B, qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.
Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Theorem (González-Meneses, Marin '22)

On suppose W irréductible et différent de G_{31}.

1. *Tout $x \in B$ est contenu dans un sous-groupe parabolique minimal* $\mathrm{PC}(x)$. *On a* $\mathrm{PC}(x^m) = \mathrm{PC}(x)$ *pour tout* $m \neq 0$.

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B, qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.
Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Theorem (González-Meneses, Marin '22)

On suppose W irréductible <u>et différent de G_{31}</u>.

1. *Tout $x \in B$ est contenu dans un sous-groupe parabolique minimal $\mathrm{PC}(x)$. On a $\mathrm{PC}(x^m) = \mathrm{PC}(x)$ pour tout $m \neq 0$.*
2. *Les sous-groupes paraboliques de B sont stables par intersection.*

Sous-groupes paraboliques des groupes de tresses

En 2022, González-Meneses et Marin introduisent pour W quelconque une notion topologique de sous-groupe parabolique de B, qui dépend uniquement de la paire topologique $(V/W, X/W)$.
Les sous-groupes paraboliques irréductibles de B forment les sommets d'un graphe Γ dans lequel B_1, B_2 sont adjacents si $B_1 \neq B_2$ et soit $B_1 \subset B_2, B_2 \subset B_1$, ou $B_1 \cap B_2 = [B_1, B_2] = \{1\}$.

Theorem (González-Meneses, Marin '22)

On suppose W irréductible et différent de G_{31}.

1. *Tout $x \in B$ est contenu dans un sous-groupe parabolique minimal $\mathrm{PC}(x)$. On a $\mathrm{PC}(x^m) = \mathrm{PC}(x)$ pour tout $m \neq 0$.*
2. *Les sous-groupes paraboliques de B sont stables par intersection.*
3. *B_1, B_2 sont adjacents dans Γ si et seulement si $z_{B_1} z_{B_2} = z_{B_2} z_{B_1}$, où $\langle z_{B_i} \rangle = Z(B_i)$.*

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B.
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B.
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B.
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Dans leur article, González-Meneses et Marin montrent la préservation du support pour

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B.
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Dans leur article, González-Meneses et Marin montrent la préservation du support pour

- Le "monoïde parachute" pour $G(e, e, n)$.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B.
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Dans leur article, González-Meneses et Marin montrent la préservation du support pour

- Le "monoïde parachute" pour $G(e, e, n)$.
- Les monoïdes duaux de type $G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{33}, G_{34}$.

Approche générale

Stratégie de preuve pour les deux premiers points :

- Avoir une structure de Garside homogène (G, M, Δ) sur B.
- Montrer que les sous-groupes paraboliques algébriques et topologiques coïncident.
- Montrer que la structure de Garside préserve le support.

Dans leur article, González-Meneses et Marin montrent la préservation du support pour

- Le "monoïde parachute" pour $G(e, e, n)$.
- Les monoïdes duaux de type $G_{24}, G_{27}, G_{29}, G_{33}, G_{34}$.

Théorème (G. '24)

Soit W un CRG irréductible et bien-engendré. La structure duale $(G(W), M(W), \Delta)$ préserve le support.

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Théorème (G. '24)

Il y a un banc $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{B}_{31}$ qui préserve le support et tel que les sous-groupes $\mathcal{T}$-paraboliques de $\mathcal{B}_{31}(u, u)$ coïncident avec les sous-groupes paraboliques topologiques de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u, u)$.

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Théorème (G. '24)

Il y a un banc $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{B}_{31}$ qui préserve le support et tel que les sous-groupes $\mathcal{T}$-paraboliques de $\mathcal{B}_{31}(u, u)$ coïncident avec les sous-groupes paraboliques topologiques de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u, u)$.

Corollaire

Les clôtures paraboliques existent dans B_{31}.

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Théorème (G. '24)

Il y a un banc $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{B}_{31}$ qui préserve le support et tel que les sous-groupes $\mathcal{T}$-paraboliques de $\mathcal{B}_{31}(u, u)$ coïncident avec les sous-groupes paraboliques topologiques de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u, u)$.

Corollaire

Les clôtures paraboliques existent dans B_{31}.

En imitant la preuve du 2ème point donnée en général par González-Meneses et Marin, on obtient aussi

Approche pour B_{31}

On veut généraliser l'approche précédente au groupoïde de Springer

Théorème (G. '24)

Il y a un banc $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{B}_{31}$ qui préserve le support et tel que les sous-groupes $\mathcal{T}$-paraboliques de $\mathcal{B}_{31}(u,u)$ coïncident avec les sous-groupes paraboliques topologiques de $B_{31} \simeq \mathcal{B}_{31}(u,u)$.

Corollaire

Les clôtures paraboliques existent dans B_{31}.

En imitant la preuve du 2ème point donnée en général par González-Meneses et Marin, on obtient aussi

Corollary

Les sous-groupes paraboliques de B_{31} sont stables par intersection.

Théorème (G. '24)

Le treillis des sous-groupes paraboliques de B_{31} à conjugaison près est donné par

Théorème (G. '24)

Le treillis des sous-groupes paraboliques de B_{31} à conjugaison près est donné par

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & \langle s,t,u,v,w\rangle \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\langle s,t,v\rangle \arrow[d] \arrow[drrrr] & & \langle s,u,v,w\rangle \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \langle t,u,v\rangle \arrow[dllll] \arrow[d] \\
\langle s,v\rangle \arrow[drr] & & \langle s,u,w\rangle \arrow[d] & & \langle t,v\rangle \arrow[dll] \\
 & & \langle s\rangle \arrow[d] & & \\
 & & \langle \varnothing\rangle & &
\end{tikzcd}
$$

Théorème (G. '24)

Le treillis des sous-groupes paraboliques de B_{31} à conjugaison près est donné par

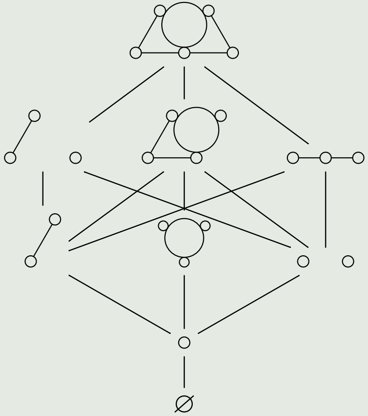
$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & \langle s, t, u, v, w\rangle \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\langle s, t, v\rangle \arrow[d] \arrow[drrrr] & & \langle s, u, v, w\rangle \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \langle t, u, v\rangle \arrow[dllll] \arrow[d] \\
\langle s, v\rangle \arrow[drr] & & \langle s, u, w\rangle \arrow[d] & & \langle t, v\rangle \arrow[dll] \\
 & & \langle s\rangle \arrow[d] & & \\
 & & \langle \varnothing\rangle & &
\end{tikzcd}$$

Corollaire (G. '24)

Le point C du théorème de González-Meneses, Marin est vrai pour G_{31}.

Corollaire

Le diagramme de BMR de G_{31} fournit des présentations des sous-groupes paraboliques.



Merci à vous !