

Outils Mathématiques

Session I 2017-2018

Janvier 2018

Les calculatrices, téléphones portables et ordinateurs sont interdits durant l'épreuve

Exercice 1 (11.5/20)

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$$

- 1) Le trinôme $x^2 + 2x + 2$ admet-il des racines réelles ? (0.5pt)
Quel est le domaine de définition de la fonction f (0.5pt)
- 2) Donner le domaine de dérivabilité de f (0.5pt)
Ainsi que l'expression de sa fonction dérivée de f (1pt)
- 3) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ (0.5pt)
- 4) Donner le tableau des variations de f (0.5pt)
- 5) Pour un réel x quelconque, montrer que $f(-2-x) = f(x)$ (1pt).
Que peut-on déduire ? (0.5pt)
- 6) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+2x+2)}{x}$ on pourra factoriser x^2 dans l'expression à l'intérieur du logarithme. Que peut-on en déduire ? Que pouvez-vous du comportement asymptotique en $-\infty$ (1pt + 0.5pt+0.5pt)
- 7) Donner l'expression de la dérivée seconde de f . (1pt)
- 8) Etudier la convexité de f (1pt)
S'il y a des points d'inflexion donner une équation des tangentes au graphe de f en ces points (1pt)
- 9) Donner l'allure du graphe de f (2pts) On tracera sur ce graphe les tangentes aux points d'inflexion et aux extréma locaux

Exercice 2 (5/20)

Soit (E) l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = \sin(x)$$

- 1) Quelle est l'équation homogène (EH) associée à (E) ? (0.5pt)
- 2) Quelle est l'équation caractéristique (EC) associée à (EH) ? (0.5pt)
- 3) Résoudre (EH) (0.5pt)
- 4) Chercher parmi les fonctions de la forme $f(x) = a.\sin(x) + b.\cos(x)$ avec a et b des réels une solution de (E). (1,5 pt)
- 5) Quelles sont les solutions de (E)? (1pt)
- 6) Donner, s'il en existe, toutes les solutions de (E) satisfaisant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ (1pt)

Exercice 3 (3.5/20)

- 1) Calculer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto xe^x$ (intégrer par partie) (1.5pt)
- 2) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation linéaire du premier ordre (EH) : $y' - xe^x y = 0$ (1pt)
- 3) Chercher une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) : $y' - xe^x y = xe^x$ (0.5pt)
- 4) Quelles sont les solutions sur \mathbb{R} de (E)? (0.5pt)