Précision exercice 11 TD1

Exercice 11. (Algèbres)
Soit R un anneau et S un R-module, on dit que S est une R-***algèbre*** (associative, commutative et unitaire) s'il existe une loi interne $\times_S : S \times S \to S$ respectant les conditions suivantes :

- Associativité : pour $s_1, s_2, s_3 \in S$, on a $s_1 \times_S (s_2 \times_S s_3) = (s_1 \times_S s_2) \times_S s_3$.
- Commutativité : pour $s_1, s_2 \in S$, on a $s_1 \times_S s_2 = s_2 \times_S s_1$
- Unitarité : il existe un $1_S \in S$ tel que pour tout $s \in S$, on ait $1_S \times_S s = s$.
- R-bilinéarité : on a les égalités suivantes ($s_i, s' \in S, r \in R$)
  - $r.(s \times_S s') = (r.s) \times_S s' = s \times_S (r.s')$
  - $(s_1 + s_2) \times_S s_3 = s_1 \times_S s_3 + s_2 \times_S s_3$
  - $s_1 \times_S (s_2 + s_3) = s_1 \times_S s_2 + s_1 \times_S s_3$.

1. a) Montrer que $(S, +, \times_S)$ est un anneau commutatif unitaire.
   b) Montrer que l'application $f : R \to S$ définie par $r \mapsto r.1_S \in S$ est un morphisme d'anneaux.
2. Réciproquement, si $(S, +, \times)$ est un anneau et $f : R \to S$ un morphisme d'anneaux, montrer que l'on munit S d'une structure de R-module en posant :
$$\forall r \in R, s \in S, \quad r.s := f(r)s$$
   Montrer que l'on fait ainsi de S une R-algèbre.
3. Montrer que $R[X]$, vu comme R-module, est en fait une R-algèbre. Quel est le morphisme d'anneau $R \to R[X]$ associé ?
4. Montrer que $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, et une $\mathbb{Q}$-algèbre, quels sont les morphismes $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ associés ?
5. Montrer que pour tout anneau R, il existe un unique morphisme d'anneau $\mathbb{Z} \to R$. En déduire que tout anneau est muni d'une structure canonique de $\mathbb{Z}$-algèbre.

Correction :

1.a) C'est immédiat : on a une loi interne associative unitaire et commutative, et la distributivité a droite et à gauche est conséquence de la R-bilinéarité.
b) On a $f(1) = 1.1_S = 1_S$ car S est un R-module, ensuite on a

$$f(r+r') = (r+r').1_S = r.1_S + r'.1_S = f(r)+f(r') \quad \text{et} \quad f(rr') = (rr').1_S = (rr').(1_S \times 1_s) = (r.1_S \times r'.1_S) = f(r)f(r')$$

et f est bien un morphisme d'anneaux.

2. Pour $r, r' \in R$ et $s, s' \in S$, on a

- $1.s = f(1)s = 1s = s$
- $(rr').s = f(rr')s = f(r)f(r')s = r.(r'.s)$
- $(r + r').s = f(r + r')s = (f(r) + f(r'))s = f(r)s + f(r')s = r.s + r'.s$
- $r.(s + s') = f(r)(s + s') = f(r)s + f(r)s' = r.s + r.s'$.

Donc S est bien un R-module. Le produit de S est déjà par hypothèse associatif, commutatif, et unitaire, il reste seulement à vérifier le premier axiome de la R-bilinéarité, qui découle directement des axiomes de R-modules.

3. On sait que $R[X]$ est un anneau, son produit est une loi interne associative commutative et unitaire, il reste à montrer la R-bilinéarité : soit $r \in R$, on a

$$r.(P(X)Q(X)) = rP(X)Q(X) = Q(X)rP(X)$$

les deux autres conditions pour la R-bilinéarité viennent de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Le morphisme d'anneau associé est $r \mapsto r.1_{R[X]} = r$ vu comme un polynôme constant : le morphisme associé est l'inclusion $R \subset R[X]$.

4. Même raisonnement, $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel, aussi bien sur $\mathbb{Q}$ que sur $\mathbb{R}$, le produit de $\mathbb{C}$ étant $\mathbb{Q}$-bilinéaire (et $\mathbb{R}$-bilinéaire), on a bien des structures d'algèbres sur $\mathbb{C}$ (les morphismes associés sont les inclusions canoniques $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

5. Soit R un anneau et $\mathbb{Z}$ un anneau, si $f : \mathbb{Z} \to R$ est un morphisme d'anneau, on a $f(1) = 1$, ensuite, soit $n \in \mathbb{Z}$

- Si $n = 0$, on doit avoir $f(0) = 0$
- Si $n > 0$, on a $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ (somme à n termes), on a alors

$$f(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = n.1$$

- Si $n < 0$, alors $-n > 0$, et on a $f(-n) = (-n).1 = -(n.1)$

Donc les valeurs de f sont entièrement déterminées, on vérifie facilement que l'on a là un morphisme d'anneau. Alternativement, ceci revient à dire que le produit dans un anneau est toujours $\mathbb{Z}$-bilinéaire.