

CORRECTION SÉANCE 3 (22 SEPTEMBRE)

Feuille de TD 2

Exercice 2.

1. Supposons par l'absurde l'existence d'un z_0 tel que $\exp(z_0) = 0$, on aurait dans ce cas

$$1 = \exp(0) = \exp(-z_0 + z_0) = \exp(-z_0) \exp(z_0) = 0$$

Une contradiction claire (plus généralement, $\exp(-z)$ est toujours l'inverse du nombre $\exp(z)$).

2. On sait que $\cos(0) = \operatorname{Re}(\exp(0)) = \operatorname{Re}(1) = 1$, on a ensuite

$$\cos(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$$

qui est une série alternée, qui converge en valeur absolue, on a donc

$$\begin{aligned} \cos(2) &= 1 - \frac{4}{2!} + \frac{16}{4!} - \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{2^{4k-2}}{(4k-2)!} + \frac{2^{4k}}{(4k)!} \\ &= 1 - \frac{4}{2!} + \frac{16}{4!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{4k-2}(4-4k(4k-1))}{(4k)!} \\ &< 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc cosinus change de signe sur $[0, 2]$, il existe donc des solutions à l'équation $\cos(t) = 0$ sur cet intervalle (théorème des valeurs intermédiaires), on a de plus que l'ensemble

$$\{t \in [0, 2] \mid \cos(t) = 0\}$$

est un compact (comme fermé du compact $[0, 2]$), il admet donc un minimum, autrement dit il existe un plus petit t tel que $\cos(t) = 0$, on note π le double de ce nombre (de sorte que $\pi/2$ soit le plus petit réel positif avec la propriété que $\cos(\pi/2) = 0$).

Ensuite, notons que $\sin' = \cos$, donc sur $[0, \pi/2]$, la fonction sinus est croissante, et comme $\sin(0) = 0$, on a $\sin \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$, donc

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \{\pm 1\}$, et comme \sin est positif sur $[0, \pi/2]$, $\exp(i\pi/2) = i$.

Soit ensuite $z = a + ib$ tel que $\exp(z) = 1$, on a $\exp(z) = e^a e^{ib}$ donc $|e^z| = 1 = e^a$, et comme a est un nombre réel, ceci entraîne $a = 0$, donc $z = ib$.

Montrons dès à présent que l'exponentielle est $2i\pi$ -périodique, on a

$$\exp(2i\pi) = \left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right)^4 = i^4 = 1$$

donc $\exp(z + 2i\pi) = \exp(z) \exp(2i\pi) = \exp(z)$ et \exp est $2i\pi$ -périodique.

Supposons par l'absurde que b n'est pas un multiple entier de 2π , quitte à le remplacer par $i(b + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut supposer $b \in]0, 2\pi[$, auquel cas $b/4 \in]0, \pi/2[$ et $\cos(t) \in]0, 1[$. Mais on sait par ailleurs que $(e^{ib/4})^4 = 1$, donc $e^{ib/4} \in \{1, i, -1, -i\}$, ce contredit $\cos(b/4) \in]0, 1[$.

Exercice 5.

1. On note dans un premier temps que $f_n(\pi - x) = f_n(x)$:

$$\begin{aligned} f_n(\pi - x) &= f_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n}{n!} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (a - a + bx)^n}{n!} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n b^n x^n}{n!} \\ &= \frac{(a - bx)^n x^n}{n!} = f_n(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a donc $f'_n(x) = -f'_n(\pi - x)$, $f''_n(x) = f''_n(\pi - x)$, et $F_n(x) = F_n(\pi - x)$, il suffit donc pour conclure de montrer que $F_n(0) \in \mathbb{Z}$.

En développant la formule donnant $f_n(x)$, on obtient :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n c_k x^{k+n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} c_{k-n} x^k$$

où $c_k = \binom{k}{n} (-b)^k a^{n-k}$ est un entier. Le terme constant de la dérivée p -ème de f_n est alors donné par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ \frac{k!}{n!} c_k & \text{si } p \in [n, 2n] \\ 0 & \text{si } p > 2n \end{cases}$$

il s'agit dans tous les cas d'un entier, donc $f_n^{(p)}(0)$ est toujours un entier, donc $F_n(0)$ est un entier, ce qui termine la démonstration.

2. On a

$$F''_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f_n^{(2i+2)}(x) = - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f_n^{(2i)}(x) = - \sum_{i=1}^n (-1)^i f_n^{(2i)}(x)$$

car $f_n^{(2n+2)} = 0$, donc $F_n + F''_n = f_n(x)$. On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_0^\pi F''_n(x) \sin(x) dx &= [F''_n(x) \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi F'_n(x) \cos(x) dx \\ &= -F''_n(\pi) - F''_n(0) - \left(-[F'_n(x) \sin(x)]_0^\pi + \int_0^\pi F_n(x) \sin(x) dx \right) \\ &= F_n(\pi) + F_n(0) - \int_0^\pi F_n(x) \sin(x) dx \end{aligned}$$

Donc $\int_0^\pi (F''_n(x) + F_n(x)) \sin(x) dx = \int_0^\pi f_n(x) \sin(x) dx = F_n(0) + F_n(\pi)$

3. Comme π est le plus petit zéro positif de \sin , la fonction sinus est positive sur $[0, \pi]$, de même que la fonction f_n , l'intégrale du produit $f_n \sin$ sur $[0, \pi]$ doit donc être positive, et même strictement positive car le produit est une fonction continue et non identiquement nulle.

4. On va faire des majorations extrêmement violentes : on va majorer $f_n(x)$ et $\sin(x)$ par leurs maximum. On a

$$f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(a - bx)^n}{n!} + \frac{-bnx^n(a - bx)^{n-1}}{n!} = (a - 2bx)f_{n-1}(x)$$

comme $f_{n-1}(x)$ est positive sur $[0, \pi]$, la fonction $f'_n(x)$ est positive sur $[0, \pi/2]$ et négative sur $[\pi/2, \pi]$, donc f_n admet un maximum en $\pi/2$, avec

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{\frac{\pi^n}{2^n} \left(a - \frac{a}{2}\right)^n}{n!} = \frac{(a\pi)^n}{2^n n!}$$

On obtient donc

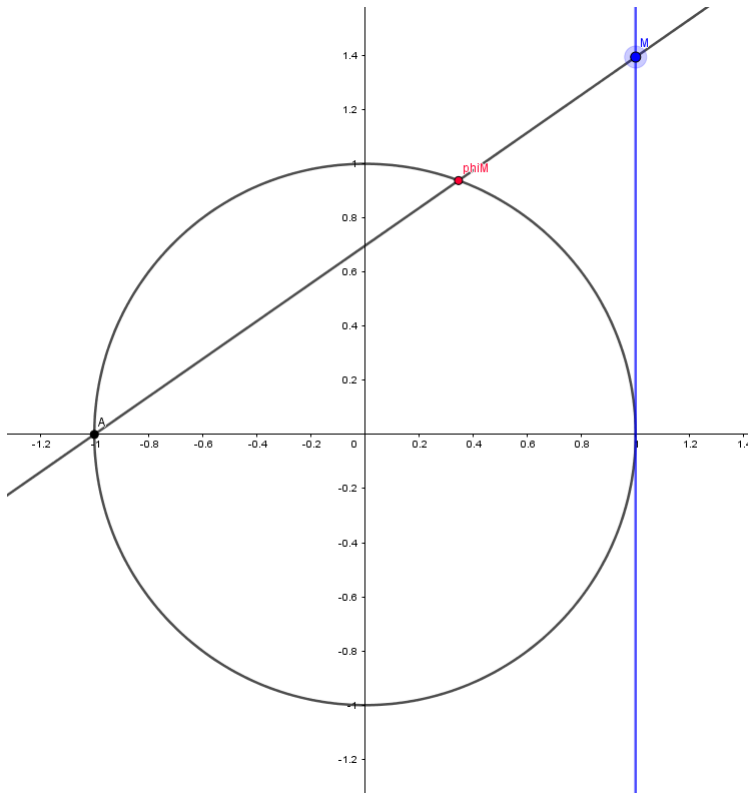
$$\int_0^\pi f_n(x) \sin(x) dx \leq \int_0^\pi \frac{(a\pi)^n}{2^n n!} dx = \pi \frac{(a\pi)^n}{2^n n!}$$

5. Par les questions précédentes, la suite $(F_n(0) + F_n(\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement positifs qui converge vers 0, c'est une contradiction immédiate.

Exercice 6.

1. La droite \mathcal{D} est paramétrée par $t \mapsto (1, t)$.

2. Analogie avec la géométrie projective :



considérons le point $A = (-1, 0)$, ayant fixé un point $M = (1, t)$ de la droite \mathcal{D} , on lui associe l'intersection $\phi(M)$ entre la droite (AM) et le cercle unité.

La droite (AM) est paramétrée par ¹

$$x \mapsto (-1, 0) + x \overrightarrow{AM} = (-1 + x(1 + 1), xt) = (2x - 1, xt)$$

l'intersection de cette droite et du cercle \mathbb{S}^1 est définie par l'équation

$$(2x - 1)^2 + (xt)^2 = 1 \Leftrightarrow (4 + t^2)x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x((4 + t^2)x - 4) = 0$$

On a donc deux solutions : $x = 0$ (qui donne le point $A = (-1, 0)$, qui se trouve bien dans \mathbb{S}^1), et $x = \frac{4}{4+t^2}$, qui donne le point

$$\phi(M) = \left(\frac{8}{4+t^2} - 1, \frac{4t}{4+t^2} \right) = \left(\frac{4-t^2}{4+t^2}, \frac{4t}{4+t^2} \right)$$

3. La paramétrisation de la question précédente nous donne une application $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$, dont on construit la bijection réciproque ψ : Étant donné un point $N = (a, b)$ du cercle unité, la droite (AN) est paramétrée par

$$x \mapsto A + x \overrightarrow{AN} = (-1, 0) + x(a + 1, b) = (x(a + 1) - 1, xb)$$

1. Lors de son passage à l'oral, Paul avait utilisé une autre paramétrisation de cette droite : $y = \frac{t}{2}x + \frac{t}{2}$, bien-sûr cela revient au même

si $A \neq N$, on a $a + 1 \neq 0$, et on peut dire que l'intersection de cette droite avec \mathcal{D} est donnée pour $x = \frac{2}{a+1}$ par $\psi(N) = \left(1, \frac{2b}{a+1}\right)$.

Les applications ϕ et ψ sont des bijections réciproques, continues de surcroît (leurs coordonnées sont des fonctions continues) : ce sont des homéomorphismes !

Topologiquement, un homéomorphisme préserve de façon exacte toutes les informations topologiques, par exemple, dans le cas d'un homéomorphisme, l'image de l'adhérence est l'adhérence de l'image. Autrement dit, une partie dense (i.e dont l'adhérence est l'espace entier), a pour image une partie dense. Dans notre exemple, l'image de \mathbb{Q} par ϕ est une partie dense de $\mathbb{S}^1 \setminus \{A\}$.

Par ailleurs, on remarque que $\phi(\mathbb{Q})$ est donné par des points à coordonnées rationnelles (car si t est rationnel, les coordonnées de ϕ le sont), donc les points à coordonnées rationnelles sont dense dans $\mathbb{S}^1 \setminus \{A\}$, comme image d'une partie dense par un homéomorphisme.

4. Considérons l'ensemble \mathbb{C}^* muni de la multiplication, on montre qu'il s'agit d'un groupe topologique abélien. La multiplication complexe est bien-sûr associative, commutative, admet un élément neutre (le nombre complexe 1) et admet des inverses :

$$z = a + ib \mapsto \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Les applications de multiplications et de passage à l'inverse sont continues : ceci peut se voir sur les coordonnées

$$((a, b), (a', b')) \mapsto (aa' - bb', ab' + a'b) \quad \text{et} \quad (a, b) \mapsto \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

On a donc un groupe topologique. On montre maintenant que \mathbb{S}^1 est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) : on a $1 \in \mathbb{S}^1$, ensuite, pour $z, z' \in \mathbb{S}^1$, on a

$$|zz'^{-1}| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{1}{1} = 1$$

donc $zz'^{-1} \in \mathbb{S}^1$, qui est donc bien un sous-groupe (abélien) de \mathbb{C}^* . L'aspect « groupe topologique » est immédiat, puisque les applications de multiplication et passage à l'inverse sont continues par restriction.

5. C'est un fermé borné de \mathbb{R}^2 .

6. On sait déjà que les points rationnels sont denses dans \mathbb{S}^1 , il reste seulement à montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe, ce qui découle immédiatement des formules de μ et ι : si a, b, a', b' sont rationnels, c'est aussi le cas des coordonnées de $\mu((a, b), (a', b'))$ et de $\iota(a, b)$: donc le produit et l'inverse de points à coordonnées rationnelles sont aussi à coordonnées rationnelles : comme 1 est évidemment à coordonnées rationnelles, on a bien affaire à un sous-groupe.

7. On montre directement que $\mu_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de \mathbb{S}^1 :

- $1 \in \mu_n(\mathbb{C})$ car $1^n = 1$.
- Pour $z, z' \in \mu_n(\mathbb{C})$, on a $(zz')^n = z^n z'^n = 1 \times 1 = 1$, donc $zz' \in \mu_n(\mathbb{C})$.
- Pour $z \in \mu_n(\mathbb{C})$, on a $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$, donc $\frac{1}{z} \in \mu_n(\mathbb{C})$.

8. Si $z = e^{it} \in \mu_n(\mathbb{C})$, on a par hypothèse $z^n = e^{int} = 1$, par l'exercice 2, on sait alors que $nt = 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Donc $z = \exp\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2\pi}{n}\right)^k$. Autrement dit $\mu_n(\mathbb{C})$ est cyclique (monogène) engendré par $\zeta_n := \exp\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Il reste alors à calculer la plus petite puissance de ζ_n égale à 1 (l'ordre de ζ_n), comme $\zeta_n^n = 1$ par hypothèse, on sait que l'ordre de ζ_n est plus petit que n (ça pourrait être strictement plus petit !). Pour $k \in [1, n]$, on a

$$\zeta_n^k = \exp\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2k\pi}{2n\pi} = \frac{k}{n} \in \mathbb{Z}$$

ce qui n'est possible que pour $k = n$, l'ordre de ζ_n est donc bien égal à n , ce qui clos la démonstration.

9. On a une application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ donnée par $t \mapsto e^{2i\pi t}$ (qui est un morphisme de groupes continu, de noyau \mathbb{Z}). On montre que $\varphi(\mathbb{Q}) \subset \mu(\mathbb{C})$, en effet, si $t = \frac{p}{q}$ est rationnel, on a

$$\left(e^{2i\pi \frac{p}{q}}\right)^q = e^{2i\pi p} = 1$$

donc $\varphi(t) \in \mu_q(\mathbb{C}) \subset \mu(\mathbb{C})$.

Soit ensuite $z \in \mathbb{S}^1$, il existe t tel que $e^{2i\pi t} = z$, comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , on peut choisir une suite de rationnels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers t , la suite $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de $\mu(\mathbb{C})$ qui converge vers z .

Feuille de TD 1

Exercice 5. On utilise que le vecteur \overrightarrow{AB} est représenté par le nombre complexe $b - a$ ('la fin moins le début').

1.(a) Géométriquement, le point M est sur la droite (AB) si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} sont colinéaires. On a donc la suite de propriétés équivalentes suivantes

- $M \in (AB)$.
- \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} sont colinéaires.
- Il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM}$.
- Il existe un réel λ tel que $z - a = \lambda(z - b)$.
- $\frac{z-a}{z-b} = \lambda \in \mathbb{R}$ (cette dernière propriété est équivalente car on suppose $z \neq b$, pour pouvoir diviser).

Or, on a

$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{b})}{(z-b)(\bar{z}-\bar{b})} = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{b})}{|z-b|^2}$$

donc $\frac{z-a}{z-b}$ est réel si et seulement si $(z-a)(\bar{z}-\bar{b})$ est réel.

(b) Compte tenu de la première question, on va en fait construire β et γ (et pas seulement montrer l'existence, oui c'est différent). On rappelle qu'un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, or on sait que

$$\text{Im}(x) = \frac{x - \bar{x}}{2i} = \frac{-i}{2}(x - \bar{x})$$

Donc le nombre x est réel si et seulement si $i(x - \bar{x}) = 0$. On va appliquer ce critère à l'expression $(z-a)(\bar{z}-\bar{b})$: on a

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{b}) = z\bar{z} - a\bar{z} - z\bar{b} + a\bar{b} = -a\bar{z} - \bar{b}z + a\bar{b} + |z|^2$$

et donc $(z-a)(\bar{z}-\bar{b})$ est réel si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= i(-a\bar{z} - \bar{b}z + a\bar{b} + |z|^2 - \overline{-a\bar{z} - \bar{b}z + a\bar{b} + |z|^2}) = i(-a\bar{z} - \bar{b}z + a\bar{b} + |z|^2 + \bar{a}z + b\bar{z} - \bar{a}b - |z|^2) \\ &= i(z(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{z}(b - a) + a\bar{b} - \bar{a}b) \\ &= z\overline{i(b-a)} + \bar{z}i(b-a) + 2\text{Im}(a\bar{b}) \end{aligned}$$

En posant $\beta = i(b-a)$ et $\gamma = 2\text{Im}(a\bar{b})$, on obtient bien le résultat voulu.

2. Une équation caractéristique de D est de la forme $ax + by + c = 0$, où les paramètres a, b, c sont des nombres réels (a et b ne sont plus les affixes des points A et B de la question précédente). Soit $M = (x, y)$ un point de P , d'affixe $z = x + iy$, on sait que

$$x = \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad y = \text{Im}(z) = \frac{-i(z - \bar{z})}{2}$$

On a donc que M est dans D si et seulement si

$$0 = a \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + b \left(\frac{-i(z - \bar{z})}{2} \right) + c = \left(\frac{a - ib}{2} \right) z + \left(\frac{a + ib}{2} \right) \bar{z} + c$$

On retrouve la caractérisation précédente pour $\beta = \frac{a+ib}{2}$ et $\gamma = c$.