Correction Examen (session 1 2022-2023)

Exercice 1.
a) Si $|z| < 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|z|^{n!} \leqslant |z|^n$, donc

$$f(|z|) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$$

qui est fini, la série définissant $f(z)$ est donc convergente. De même, si $|z| > 1$, on a $|z|^{n!} \geqslant |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$f(|z|) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = +\infty$$

la série définissant $f(z)$ est donc non convergente. Le rayon de convergence de la série définissant f est donc égal à 1.

b.1) Soit $U \subset D$ un ouvert contenant z. La fonction g se restreint en une fonction holomorphe sur U. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 1 avec $r_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour n assez grand, on a $r_n e^{i\varphi} \in U$ car U est un voisinage de z (définition d'une suite convergente). Pour n assez grand, on a donc $f(r_n e^{i\varphi}) = g(r_n e^{i\varphi})$. Cette dernière suite converge vers $g(z)$ par continuité de g. Ceci étant vrai quelle que soit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} f(re^{i\varphi}) = g(z)$$

la limite est en particulier bien définie.

b.2) On sait que l'application

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \partial B_1(0)\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ x & \longmapsto & e^{2i\pi x} \end{array}$$

est continue. L'ensemble E est l'image de $\mathbb{Q}$ par s. Si F est un fermé contenant E, $s^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$: on a $F = \mathbb{R}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \partial B_1(0)$, d'où le résultat.

On montre ensuite que $D \cap \partial B_1(0)$ est non vide. Par hypothèse, il existe $x \in D \cap B_1(0)$, et $y \in D \setminus B_1(0)$. Comme D est un ouvert de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, sa connexité entraîne sa connexité par arc : il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to D$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Comme $t \mapsto |\gamma(t)|$ est une fonction continue telle que $|\gamma(0)| = |x| < 1$ et $|\gamma(1)| = |y| > 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un certain $t_0 \in [0,1]$ tel que $|\gamma(t_0)| = 1$. L'élément $\gamma(t_0)$ est donc un élément de $D \cap \partial B_1(0)$ par définition.

Comme D est un ouvert, $D \cap \partial B_1(0)$ est un ouvert de $\partial B_1(0)$ (topologie induite). Comme l'ensemble E est dense, il existe un élément $re^{2i\pi\frac{\ell}{k}} \in E \cap D \cap \partial B_1(0)$ comme annoncé. On conclut alors que la limite étudiée existe en utilisant la question précédente.

Enfin, pour $r \in]0,1[$, on a

$$\left|\sum_{\nu=0}^{k-1} (re^{2i\pi\varphi})^{\nu!}\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{k-1} \left|re^{2i\pi\varphi}\right|^{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{k-1} 1^{\nu!} = k$$

b.4) Pour $\nu \geqslant k$, l'entier k divise $\nu!$, donc $\varphi\nu!$ est un entier et

$$(e^{2i\pi\varphi})^{\nu!} = e^{2i\pi(\varphi\nu!)} = 1$$

On a donc, pour $r \in]0,1[$ et $m > k$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=k}^{\infty} (re^{2i\pi\varphi})^{\nu!} &= \sum_{\nu=k}^{m} (re^{2i\pi\varphi})^{\nu!} + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (re^{2i\pi\varphi})^{\nu!} \\
&= \sum_{\nu=k}^{m} r^{\nu!} + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} r^{\nu!} \\
&\geqslant \sum_{\nu=k}^{m} r^{k!} \\
&= (m-k+1) r^{k!}
\end{aligned}$$

En passant à la lim inf quand $r \to 1$, $r < 1$, on obtient bien le résultat voulu. Ce dernier résultat étant vrai quelle que soit la valeur de $m > k$, on obtient en passant à la limite $m \to +\infty$ que

$$\liminf_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} \left(re^{2i\pi\varphi}\right)^{\nu!} \right) = +\infty$$

Ceci est en contradiction avec le fait que la limite $\lim_{r\to 1, r<1} f(re^{2i\pi\varphi})$ existe et soit finie. On en déduit qu'il n'existe pas de domaine D tel qu'annoncé.

c) Par définition, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{\nu+1} (z-a)^{\nu} = \frac{1}{1-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{\nu} (z-a)^{\nu} = \frac{1}{1-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^{\nu}$$

La dernière série obtenue étant géométrique, la première série considérée converge si et seulement si

$$\left|\frac{z-a}{1-a}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-a| < |1-a| \Leftrightarrow z \in B_{|1-a|}(a).$$

Autrement dit la série considérée a $|1-a|$ pour rayon de convergence (autour du point a).

Si $z \in B_1(a)$, on peut utiliser la formule des sommes d'une série géométrique. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a}\right)^{\nu+1} (z-a)^{\nu} &= \frac{1}{1-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^{\nu} \\
&= \frac{1}{1-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} \qquad = \frac{1}{1-a-(z-a)} = \frac{1}{1-z}
\end{aligned}$$

On remarque que cette dernière expression ne dépend pas du point a. La série entière considérée est en fait le développement en série entière de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ autour du point a. En particulier, pour $a = 0$, on trouve la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$.

En considérant $a = -1$, on trouve la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{\nu}}{2^{\nu+1}}$$

qui converge sur le domaine $D = B_2(-1)$. Ce domaine contient strictement $B_1(0)$, et on a le résultat voulu : pour $z \in B_1(0)$, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{\nu}}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$$

Exercice 2.

a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\gamma(t) \in U$, donc il existe une boule ouverte $U_t \subset U$ qui contient $\gamma(t)$. Quitte à diviser le rayon de U_t par 2, on peut supposer que $\overline{U_t} \subset U$. La réunion $\bigcup_{t\in[0,1]} U_t$ est un recouvrement ouvert de $|\gamma|$. Comme $|\gamma|$ est compact (image du compact $[0,1]$ par l'application continue γ), il existe une famille finie $t_1, \dots, t_n \subset [0,1]$ telle que $V := U_{t_1} \cup \dots \cup U_{t_n} \supset |\gamma|$.

Comme la famille $t_1, \dots, t_n$ est finie, $\bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} \overline{U_{t_i}}$ est un fermé borné inclus dans U et qui contient V. L'adhérence $\overline{V}$ de V est donc un compact contenant $|\gamma|$ et inclus dans U.

La fonction méromorphe f s'écrit comme un quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$, où f_1, f_2 sont des fonctions holomorphes sur U. Les pôles et singularités enlevables de f sont les zéros de f_2. Comme f_2 est non nulle sur V (elle ne s'annule pas sur $|\gamma| \subset V$), ses zéros forment un ensemble de points isolés. Comme $\overline{V}$ est compact, les zéros de f_2 se trouvant dans $\overline{V}$ forment un ensemble de points isolés dans un ensemble compact : un tel ensemble est toujours fini. Soient $b_1, \dots, b_m$ les zéros de f_2 sur $\overline{V}$, la fonction $f = \frac{f_1}{f_2}$ est holomorphe sur $V \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$ comme quotient de deux fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas.

On montre de même que f_1 (donc f) admet un nombre fini de zéros sur V.

b) Si a est un zéro d'ordre k de f, la fonction f s'écrit $(z-a)^k f_1$ où f_1 est une fonction méromorphe ne s'annulant pas en a. Si $k = 1$, alors

On obtient en dérivant

$$\forall z \in V \setminus \{b_1, \dots, b_m\},\ f'(z) = k(z-a)^{k-1} f_1(z) + (z-a)^k f_1'(z)$$

On a alors, au voisinage de a (où $f_1(z)$ ne s'annule pas)

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z)\frac{kf_1(z) + (z-a)f_1'(z)}{(z-a)f_1(z)} = \frac{kg(z)}{z-a} + g(z)\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

Cette dernière fonction admet une singularité enlevable en a si $g(a) = 0$, et un pôle d'ordre 1 dans les autres cas.

c) Si $g(a) = 0$, la fonction $g\frac{f'}{f}$ admet une singularité enlevable en 0, le résidus de $g\frac{f'}{f}$ en cette singularité est donc $0 = kg(a)$. Autrement, comme a est un pôle simple, le résidus de $g\frac{f'}{f}$ en a est donné par la valeur de $(z-a)g\frac{f'}{f}$ en a. D'après la question précédente, cette valeur est $kg(a)$.

d) Comme dans la question précédente, si b est un pôle d'ordre k de f, alors au $f(z)$ s'écrit $f_2(z)(z-b)^{-k}$, où $f_2(z)$ est une fonction holomorphe sur $(V \setminus \{b_1, \dots, b_m\}) \cup \{b\}$ qui ne s'annule pas en b. On a alors, au voisinage de b

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z)\left(\frac{f_2'(z)}{f_2(z)} - \frac{k}{z-b}\right)$$

cette fonction a une singularité enlevable en b si $g(b) = 0$, et un pôle simple en b sinon. On calcule le résidus de $g\frac{f'}{f}$ en b comme dans la question c) pour obtenir le résultat voulu.

e) C'est une application immédiate du théorème des résidus et des deux questions précédentes (U est simplement connexe).

f) La fonction $\gamma : [0,1] \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Comme f est holomorphe au voisinage de $|\gamma|$ (car $|\gamma|$ ne contient aucun pôle de f, et ces derniers sont isolés), elle est de classe $\mathcal{C}^1$, la composée $f \circ \gamma$ est donc aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus, comme $|\gamma|$ ne contient aucun zéro de f, $f \circ \gamma$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Ensuite, par définition de l'indice et de l'intégrale curviligne, on a

$$\mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

On obtient le résultat en appliquant la formule de la question précédente pour la fonction $g = 1$.

g) Si γ est le bord d'un disque (parcourus une fois), les indices des points intérieurs de γ sont tous égaux à 1, on obtient alors

$$\inf_{f\circ\partial B_r(z_0)}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial B_r(z_0)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^m \sigma_{a_k}(f) - \sum_{j=1}^n \nu_{b_j}(f)$$

où $\{a_1, \dots, a_m\}$ sont les zéros de f dans $B_r(z_0)$, et $\{b_1, \dots, b_n\}$ sont les pôles de f sur $B_r(z_0)$.

Considérons la fonction f, définie par

$$f(z) = (z-1)^n + \frac{1}{(z+1)^n} = \frac{(z-1)^n(z+1)^n + 1}{(z+1)^n} = \frac{(z^2-1)^n + 1}{(z+1)^n}$$

On étudie d'abord les zéros et les pôles de f. On pose $f_1(z) := (z^2-1)^n + 1$ et $f_2(z) = (z+1)^n$. Comme la f_1 ne s'annule pas en -1, la fonction f admet un unique pôle, d'ordre n, en -1.

Ensuite, la fonction f s'annule en z si et seulement le polynôme f_1 s'annule en z. On montre que f_1 admet $2n$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$. On calcule $f_1'(z) = 2nz(z^2-1)^{n-1}$. Ce dernier polynôme admet trois racines (sans multiplicité) : $0, 1$ et -1. On constate immédiatement qu'aucune de ces trois valeurs n'est une racine de $f_1(z)$. Autrement dit, $f_1(z)$ n'a aucune racine commune avec sa dérivée $f_1'(z)$. Les racines de f_1 sont donc simples, il y en a $2n$ car $f_1 \in \mathbb{C}[z]$ est de degré $2n$.

On montre maintenant que les racines de $f_1(z)$ (autrement dit, les zéros de f) se trouvent toutes dans $B_3(0)$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f_1(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2-1)^n = -1 \Rightarrow |z^2-1| = |z-1||z+1| = 1$$

Soit z une racine de f_1 :

- Si $|z-1| \leqslant 1$, alors $z \in B_1(1) \subset B_2(0) \subset B_3(0)$.
- Si $|z-1| > 1$, alors $|z+1||z-1| = 1$ entraîne $|z+1| = |z-(-1)| < 1$, donc $z \in B_1(-1) \subset B_3(0)$.

D'après la question précédente, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial B_3(0)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{2n} 1 - \sum_{v=1}^{1} n = 2n - n = n$$