Examen partiel (1er mars 2023)

Exercice 1. Soit E un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. On sait qu'une fonction $h : E \to \mathbb{R}$ est constante si $\partial h/\partial x(v) = \partial h/\partial y(v) = 0$ pour tout $v \in E$. Soit maintenant D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

a) Soit $f \in \mathcal{O}(D)$ telle que $f(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in D$. Utiliser les équations de Cauchy-Riemann pour montrer que f est constante.

b) Déterminer toutes les fonctions $f : D \to \mathbb{C}$ telles que $f \in \mathcal{O}(D)$ et $\overline{f} \in \mathcal{O}(D)$.

c) Si $f \in \mathcal{O}(D)$ est telle que $|f|$ est constant. Utiliser $f \cdot \overline{f} = |f|^2$ pour montrer que f est constante.

d) Soit $u(x, y) = \sin(x)\sinh(y)$ et $v(x, y) = \cos(x)\cosh(y)$. Utiliser les équations de Cauchy-Riemann pour montrer que $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2. Nous rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si elle est deux fois partiellement dérivable, ses dérivées partielles sont continues, et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0$. Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $R_{I,J} := I + iJ = \{a + ib \mid a \in I, b \in J\}$ pour deux intervalles I, J bornés et ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $u : D \to \mathbb{R}$ harmonique. On cherche à déterminer $v : D \to \mathbb{R}$ telle que $u + iv \in \mathcal{O}(D)$.

a) On sait que $f \in \mathcal{O}(D) \Rightarrow f' \in \mathcal{O}(D)$. Rappeler pourquoi les parties réelles et imaginaires de $f \in \mathcal{O}(D)$ sont harmoniques.

b) Fixons dans la suite $(x_0, y_0) \in D$. Si $u + iv \in \mathcal{O}(R_{I,J})$, montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt + h(x).$$

c) Si $u + iv \in \mathcal{O}(R_{I,J})$, montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt - h'(x)$$

et en déduire que

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = h'(x).$$

d) Trouver explicitement une fonction $v : R_{I,J} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y) \in \mathcal{O}(R_{I,J})$.

e) Montrer que $u(x, y) = xy$ est harmonique. Trouver une fonction $v(x, y)$ telle que

$$f(x + iy) = xy + iv(x, y) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$