Correction TD4

I) Mise en jambes : rappels sur les formes linéaires et les hyperplans

Exercice 1.
1. La forme f se décompose sur la base duale : $f = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$, on a donc

$$\begin{cases} f(4,2,0) = 4a + 2b = 2 \\ f(1,2,-3) = a + 2b - 3c = -7 \\ f(0,2,5) = 2b + 5c = 1 \end{cases}$$

un système linéaire qu'il s'agit maintenant de résoudre, on inverse pour cela la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

on trouve

$$M^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 16 & -10 & -6 \\ -5 & 20 & 12 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 16 & -10 & -6 \\ -5 & 20 & 12 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 16 \\ -23 \\ 11 \end{pmatrix}$$

et $f = \frac{1}{9}(16e_1^* - 23e_2^* + 11e_3^*)$, autrement dit $f(x,y,z) = \frac{1}{9}(16x - 23y + 11z)$.

Exercice 2. Soit d'abord $f \in E^*$ une forme linéaire sur E. Si on suppose $f \neq 0$, alors l'image de f est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}$: c'est $\mathbb{K}$ lui-même. Par le théorème d'isomorphisme on a alors $E/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f = \mathbb{K}$. On a donc $\dim(E/\operatorname{Ker} f) = 1 = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$, autrement dit $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$ et $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E.
Réciproquement, soit $H \leqslant E$ un hyperplan. On considère le quotient E/H, muni de la projection canonique $\pi : E \twoheadrightarrow E/H$. Comme H est un hyperplan, E/H est un espace de dimension 1, on peut donc considérer un isomorphisme $\varphi : E/H \to \mathbb{K}$. L'application $\varphi \circ \pi$ est une forme linéaire sur E dont le noyau est égal à H :

$$\forall x \in E, \varphi(\pi(x)) = 0 \Leftrightarrow \pi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in H$$

en particulier, $\varphi \circ \pi$ est non nulle et on a le résultat.

Exercice 3. $(b) \Leftarrow (a)$ Si $\lambda\beta = \alpha$ avec $\lambda \neq 0$, alors

$$\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda\beta(x) = 0 \Leftrightarrow \beta(x) = 0$$

car $\lambda \neq 0$. D'où $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ dans ce cas.
$(a) \Rightarrow (b)$ Si $H := \operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Soit $x \notin \operatorname{Ker}\alpha$, on sait que $\operatorname{Vect} x$ est un supplémentaire de H dans E, donc tout $e \in E$ s'écrit de manière unique $e = y + \mu x$ avec $y \in \operatorname{Ker}\alpha$ et $\mu \in \mathbb{K}$. On a alors

$$\alpha(e) = \alpha(y + \mu x) = \mu\alpha(x) \quad \text{et} \quad \beta(e) = \mu\beta(x)$$

En posant $\lambda = \alpha(x)/\beta(x)$ (non nul et bien défini car $x \notin H = \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Ker}\alpha$), on obtient bien le résultat voulu.

II) Espaces (bi)duaux et bases (anté)duales

Exercice 4.
1. On montre que la famille $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une famille génératrice de E sur $\mathbb{K}$. Les éléments de l'espaces engendré par les $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont les combinaisons linéaires finies à coefficients dans $\mathbb{K}$ sur la famille $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Soit une telle combinaison

$$u := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e^{k_i}$$

Avec $k_1 < k_2 < \ldots < k_p \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \delta_{n,k_i} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } n = k_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, pour $n > k_p$, on a $u_n = 0$. La suite u est donc nulle à partir d'un certain rang et se trouve dans F. Comme F n'est pas égal à E, la famille $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une famille génératrice (sur $\mathbb{K}$) de E.

2. On commence par montrer que $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de F. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Il existe par définition de F un rang $N \geqslant 0$ tel que $u_n = 0$ pour $n > N$. On pose $v := \sum_{i=1}^{N} u_i e^i$. Il s'agit d'une combinaison linéaire finie des (e^k), et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{i=1}^{N} u_i \delta_{n,i} = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leqslant N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$$

comme u_n est nul pour $n > N$, on obtient $v_n = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $v = u$. Tout élément de F peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire finie sur la famille $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$: il s'agit d'une famille génératrice de F.
On prouve ensuite que la famille $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans E (à fortiori dans F). Soit une combinaison linéaire finie sur les (ek).

$$v := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e^{k_i}$$

Si $v = 0$, alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $0 = v_{k_i} = \lambda_i$. Donc les coefficients de la combinaison linéaire sont tous nuls et $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre. Il s'agit donc bien d'une base de F.

3. L'idée est la suivante : comme $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de F, un élément de F^* est entièrement déterminé par ses valeurs sur cette base : autrement dit par une suite (infinie) d'éléments de $\mathbb{K}$. Maintenant pour les détails : On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F^* & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & (f(e^n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

il s'agit d'une application linéaire : pour $f, g \in F^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\varphi(\lambda f + g) = (\lambda f(e^n) + g(e^n))_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(f(e^n))_{n\in\mathbb{N}} + (g(e^n))_{n\in\mathbb{N}} = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$$

Il s'agit également d'une bijection car $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de F. Il s'agit donc d'un isomorphisme entre F^* et E.

4. Non, $F \not\simeq F^{**}$ car F est de dimension infinie.

Exercice 5.
1. Comme la famille $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ est de cardinal 3, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre pour montrer qu'il s'agit d'une base. Soit une combinaison linéaire nulle

$$0 = \lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a alors $\lambda_0 P(0) + \lambda_1 P(1) + \lambda_2 P(2) = 0$. En posant $P = (X-1)(X-2)$, on trouve $0 = -3\lambda_0$, donc $\lambda_0 = 0$. Pour $P = (X-2)$, on trouve $0 = -2\lambda_0 - \lambda_1 = -\lambda_1 = 0$. Enfin, pour $P = 1$, on trouve $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 = \lambda_2$. La famille $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ est donc libre : c'est une base de E^*.

2. Soit $\{P_0, P_1, P_2\}$ la base antéduale de $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$.

- P_0 doit être un polynôme de degré $\leqslant 2$ valant 1 en 0 et s'annulant en $1, 2$.
- P_1 doit être un polynôme de degré $\leqslant 2$ valant 1 en 1 et s'annulant en $0, 2$.
- P_2 doit être un polynôme de degré $\leqslant 2$ valant 1 en 2 et s'annulant en $0, 1$.

P_0 doit donc être un multiple du polynôme $(X-1)(X-2)$. Comme $(0-1)(0-2) = 3$, on pose $P_0 = \frac{1}{3}(X-1)(X-2)$. Le même raisonnement donne $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$.

Exercice 6.
1. La famille $\mathcal{B}_n$ est une famille de polynôme dont les degrés sont échelonnés entre 0 et n. Il s'agit donc d'une famille libre et d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. On considère la forme linéaire $\mathrm{ev}_\alpha : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}$ envoyant P sur $P(\alpha)$. On considère également la dérivation des polynômes $\partial : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$. On a

$$\mathrm{ev}_\alpha((X-\alpha)^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\partial((X-\alpha)^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ k(X-\alpha)^{k-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors

$$\mathrm{ev}_\alpha \circ \partial^i((X-\alpha)^k) = \begin{cases} \mathrm{ev}_\alpha(0) & \text{si } i > k \\ \mathrm{ev}_\alpha(k!) & \text{si } i = k \\ \mathrm{ev}_\alpha(\frac{k!}{i!}(X-\alpha)^{k-i}) & \text{si } i < k \end{cases}$$

donc

$$\frac{\mathrm{ev}_\alpha \circ \partial^i}{k!}((X-\alpha)^k) = \delta_{i,k}$$

on a donc bien là la base duale de $\mathcal{B}_n$.

Exercice 7.
Soient $a_1 < \ldots < a_n$ des réels tous différents. On a une famille de n formes linéaires ev_{a_i} sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension n. Il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$ (ce qu'on peut prouver en utilisant l'exercice 10), la base antéduale est formée par les polynômes élémentaires de Lagrange : P_i est tel que $P_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Le fait que les P_i forment une base exprime le fait qu'un polynôme de degré au plus $n-1$ est entièrement déterminé par ses valeurs sur les a_i.

Exercice 8.
1. L'espace E est de dimension n^2. Une base de E est donnée par les matrice $E_{i,j}$, dont les coefficients sont 0, sauf le i, j-ème, égal à 1.

2. C'est une vérification immédiate : la trace et la multiplication matricielle sont linéaires, et la symétrie est une formule connue : le i-ème coefficient diagonal du produit AB est $\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,i}$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{j,i}a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{j,i}a_{i,j} = \mathrm{tr}(BA) \end{aligned}$$

Pour montrer que f est non dégénérée, il faut montrer que, pour tout $A \in E$, non nulle, la forme linéaire $f_A : B \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est non nulle. Supposons donc qu'un coefficient a_{i_0,j_0} de A est non nul, on considère la matrice $E_{j_0,i_0} = (e_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ ayant un seul coefficient non nul égal à 1 en $i = j_0, j = i_0$. On a alors

$$\mathrm{tr}(AE_{j_0,i_0}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}e_{j,i} = a_{i_0,j_0} \neq 0$$

donc f_A est non nulle et f est non dégénérée.

3. Une forme bilinéaire non dégénérée $f : E \times E \to k$ induit un isomorphisme φ entre E et son dual, donné par $\varphi(A) := f_A : B \mapsto f(A, B)$, en particulier, tout élément de E^* s'écrit f_A pour un certain A, ce qui est exactement le résultat souhaité ici.

Exercice 9. Par définition, on a $f = 2e_1^* + 4e_2^* + 3e_3^*, g = e_2^* + e_3^*, h = 2e_1^* + 2e_2^* - e_3^*$, la matrice de passage de la famille (f, g, h) à la base canonique duale e_i^* est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est inversible (son déterminant est -4), donc (f, g, h) forme bien une base de E^*.
Soit $e \in E$, on sait que $(f_1(e), f_2(e), f_3(e))$ est donné par Me, où

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(attention, c'est la transposée de la précédente matrice). Trouver la base antéduale revient à trouver a, b, c tels que $Ma = (1, 0, 0), Mb = (0, 1, 0), Mc = (0, 0, 1)$, autrement dit, a, b, c sont les colonnes de M^{-1} on calcule donc

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

la base antéduale de f_i est donc $a = \frac{1}{4}(3, -2, 2), b = \frac{1}{4}(-10, 8, -4)$ et $c = \frac{1}{4}(-1, 2, -2)$.

Exercice 10. $(a) \Rightarrow (b)$ Supposons que φ est surjective, et soit une combinaison linéaire nulle

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i = 0$$

On pose $\alpha : \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i^* \in (\mathbb{K}^p)^*$, on a par définition, pour $x \in E$

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i(x) = 0 = \alpha(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x)) = \alpha \circ \varphi(x)$$

comme φ est surjective, cela entraîne $\alpha = 0$. Comme les e_i^* sont une base de $(\mathbb{K}^p)^*$, $\alpha = 0$ entraîne $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Les φ_i forment donc une famille libre.
$(b) \Leftarrow (a)$ Réciproquement, on raisonne par contraposée. Si $\operatorname{Im} \varphi \neq \mathbb{K}^p$, alors $\operatorname{Im} \varphi$ est contenue dans un certain hyperplan H, noyau d'une forme linéaire α, on a donc $\alpha \circ \varphi = 0$, ce qui donne une combinaison linéaire nulle en les φ_i, et comme $\alpha \neq 0$, cette combinaison linéaire est non triviale : les φ_i ne forment donc pas une famille libre.

III) Autour de la notion d'orthogonalité

Exercice 11.
1. Soit $A \subset E$. Pour $\varphi, \psi \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\forall x \in A, (\lambda\varphi + \psi)(x) = \lambda\varphi(x) + \psi(x) = 0$$

donc $\lambda\varphi + \psi \in A^\perp$. Ce dernier est donc stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de E^*. (on n'a en fait pas besoin que A soit un sous-espace vectoriel de E).

2. Soit $B \subset E$. On a par définition

$$B^\circ := \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\} = \bigcap_{\varphi \in B} \operatorname{Ker} \varphi.$$

B est donc un sous-espace vectoriel comme intersection de sous-espaces vectoriels. (on n'a en fait pas besoin que B soit un sous-espace vectoriel de E^*).

Exercice 12.
1. Soit $A \subset E$. Pour $\varphi \in E^*$, on a

$$\varphi \in A^\perp \Leftrightarrow A \subset \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \operatorname{Vect}(A)^\perp$$

L'égalité $A^\perp = \operatorname{Vect}(A^\perp)$ provient quant à elle du fait que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel.

2. Soit $B \subset E^*$. On a $B \subset \operatorname{Vect} B$, donc $(\operatorname{Vect} B)^o \subset B^o$. Réciproquement si $x \in B^o$, alors $\forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0$, comme les éléments de $\operatorname{Vect} B$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de B, ils valent tous 0 en x, d'où $B^o \subset \operatorname{Vect}(B)^o$ et $B^\circ = \operatorname{Vect}(B)^\circ$. L'égalité $B^\circ = \operatorname{Vect}(B^\circ)$ vient quant à elle du fait que B° est un sous-espace vectoriel.

Exercice 13.
1. On pose $n = \dim E$, et $r = \dim A$, on considère une base $(e_1, \cdots, e_r)$ de A, que l'on complète en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$ une forme linéaire sur E, on a $\varphi \in A^\perp$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, r]\!], 0 = \varphi(e_k) = \lambda_k$$

autrement dit si $\varphi \in \operatorname{Vect}(e_{r+1}^*, \cdots, e_n^*)$, d'où $A^\perp = \operatorname{Vect}(e_{r+1}^*, \cdots, e_n^*)$ est de dimension $n - r$ comme annoncé. On a également clairement

$$A^{\perp o} = (\operatorname{Vect}(e_{r+1}^*, \cdots, e_n^*))^o = \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_r) = A$$

2. Comme E est de dimension finie, le morphisme ev : $x \mapsto \operatorname{ev}_x$ de E dans E^{**} est un isomorphisme. Soit $B \leqslant E^*$ un sous-espace vectoriel. On affirme que ev envoie B° sur $B^\perp \leqslant E^{**}$. Soit $x \in E$, on a

$$x \in B^\circ \Leftrightarrow \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0 = \operatorname{ev}_x(\varphi) \Leftrightarrow \operatorname{ev}_x \in B^\perp$$

Comme E^* est de dimension finie, on a alors $\dim_{\mathbb{K}}(B^\circ) = \dim_{\mathbb{K}}(B^\perp) = n - \dim_{\mathbb{K}}(B)$ d'après la question précédente. Soit ensuite $b \in B$, pour tout $x \in B^\circ$, on a $b(x) = 0$, donc $b \in (B^\circ)^\perp$ et $B \subset (B^\circ)^\perp$, on a égalité par égalité des dimensions.

3. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E, de dimensions respectives p, q. On pose aussi $d = \dim_{\mathbb{K}} F \cap G$, de sorte que $\dim_{\mathbb{K}}(F+G) = p+q-d$. Soit $\varphi \in (F+G)^\perp$, comme $F, G \subset F+G$, on a $\varphi \in F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement, soit $\varphi \in F^\perp \cap G^\perp$. La forme linéaire φ s'annule par hypothèse sur F et sur G. Comme φ est linéaire, elle s'annule sur l'espace engendré par F et G, c'est à dire $F + G$ d'où $\varphi \in (F + G)^\perp$ et le premier résultat. Pour le second résultat, soit $\varphi \in F^\perp + G^\perp$. Par définition, on a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_1 \in F^\perp$ et $\varphi_2 \in G^\perp$. Pour $x \in F \cap G$, on a

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 0$$

d'où $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Ensuite, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)^\perp = n - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = n - d$$

$$\dim_{\mathbb{K}}(F^\perp + G^\perp) = \dim_{\mathbb{K}} F^\perp + \dim_{\mathbb{K}} G^\perp + \dim_{\mathbb{K}}(F^\perp \cap G^\perp)$$

Par le premier point, on a $\dim_{\mathbb{K}}(F^\perp \cap G^\perp) = \dim_{\mathbb{K}}(F + G)^\perp = n - \dim_{\mathbb{K}}(F + G)$, d'où

$$\dim_{\mathbb{K}}(F^\perp + G^\perp) = n - p + n - q - n + p + q - d = n - d$$

les deux espaces $(F \cap G)^\perp$ et $F^\perp + G^\perp$ sont donc égaux car de même dimension (et on a montré une inclusion).

4. Soient B, C deux sous-espaces vectoriels de E^*. D'après la question précédente, on a $(B + C)^\perp = B^\perp + C^\perp$ dans E^{**}. L'isomorphisme avec E donne alors $(B + C)^\circ = B^\circ + C^\circ$. On a de même $(B + C)^\circ = B^\circ + C^\circ$.

Exercice 14. D'après l'exercice 12, on a

$$\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i = \{f_i, i \in I\}^\circ = \operatorname{Vect}(\{f_i, i \in I\})^\circ$$

Exercice 15. La matrice de passage de la base canonique à la famille considérée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice triangulaire supérieure : son déterminant est égal à 1 et elle est inversible. La famille (v_1, v_2, v_3) considérée est donc une base. Comme dans les cas précédent, les coefficients de la base duale (v_1^*, v_2^*, v_3^*) dans la base canonique duale sont donnés par les colonnes de l'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (e_1^* - e_3^*, e_2^* - 2e_3^*, e_3^*) = (x - z, y - 2z, z)$. D'après l'exercice précédent, l'espace $F^\perp$ est de dimension 2, or par définition, v_1^*, v_2^* forme une famille libre de $F^\perp$ (par définition de la base duale, v_1^*, v_2^* s'annulent sur le générateur v_3 de F). La famille v_1^*, v_2^* forme donc une base de $F^\perp$. Comme $(F^\perp)^\circ = F$, on a

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \forall \varphi \in F^\perp, \varphi(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^*(x, y, z) = 0 \\ v_2^*(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Avec le même raisonnement, on obtient que v_1^* est une base de $G^\perp$, et que G est défini par l'équation $x - z = 0$.

Exercice 16.

1. On pose $B = \mathrm{Vect}(f_i \mid i \in I)$. La famille $(f_i)_{i \in I}$ engendre E^* si et seulement si $B = E^*$. On a

$$B = E^* \Leftrightarrow B^\circ = (E^*)^\circ \Leftrightarrow \{f_i\}_{i \in I}^\circ = \{0\} \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}\, f_i = \{0\}$$

2. Plus généralement on a

$$B = (B^\circ)^\perp = (\{f_i\}_{i \in I}^\circ)^\perp = \left(\bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}\, f_i \right)^\perp = \left\{ f \in E^* \mid \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}\, f_i \subset \mathrm{Ker}\, f \right\}$$

3. Par l'exercice 13, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(f_i \mid i \in I)) = \dim_{\mathbb{K}}(B) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim \mathbb{K}(B^\circ) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}\, f_i \right)$$