Correction Examen session 2 2020-2021

1. Soit $f(z) = az + b = c\overline{z} + d$ une similitude à la fois directe et indirecte, on a

$$f(0) = b = d \quad \text{et} \quad f(1) = a + b = c + d$$

Donc $b = d$ et $a = c$, on aurait donc $az + b = a\overline{z} + b$ pour $z \in \mathbb{C}$, en particulier, on aurait $ai = -ai$ et $a = 0$, donc $f = b$ est une application constante et pas une similitude (enfin ça dépend des conventions... mais pour que les similitudes forment un groupe, il faut ne pas prendre les applications constantes).

2. C'est impossible d'après la question précédente.

3. Soient $f_1(z) = a\overline{z} + b$ et $f_2(z) = c\overline{z} + d$ deux similitudes indirectes, leur composition est donnée par

$$f_1(f_2(z)) = a\overline{(c\overline{z} + d)} + b = a\overline{c}z + \overline{d} + b$$

il s'agit donc d'une similitude directe.

4. Une application affine du plan s'écrit comme $\binom{x}{y} \mapsto M\binom{x}{y} + \binom{a}{b}$ avec $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, une telle application est une similitude si et seulement si M représente un nombre complexe (i.e est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$), l'application

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est alors une application affine qui n'est pas une similitude.

5. C'est faux : soient $f_1(z) = \frac{1}{2}z + 1$ et $f_2(z) = 2z$ deux homothéties (de centres respectifs 2 et 0)), on a

$$f_2 \circ f_1(z) = z + 2$$

il s'agit d'une translation non triviale, donc pas une homothétie.

6. Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ une similitude, on constate que φ est une homothétie si et seulement si $a \in \mathbb{R}^*$, en effet :

- Si $a = 1$, alors $\varphi(z) = z + b$ et φ est une translation.
- Si $a \in \mathbb{R}^*$, φ admet un unique point fixe, il s'agit d'une homothétie de rapport a.

Autrement dit, l'ensemble des homothéties/translations est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par le morphisme de groupes $az + b \mapsto a$, il s'agit donc d'un sous-groupe de l'ensemble des similitudes directes.

7. Soit $\varphi(z) = az + b$ une similitude directe, et soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$|\varphi(z) - \varphi(z')| = |az + b - (az' + b)| = |a(z - z')| = |a||z - z'|$$

Donc φ multiplie les distances par $|a|$. Ainsi, φ n'est pas une isométrie si et seulement si $|a| \neq 1$, par exemple $z \mapsto 2z$ n'est pas une isométrie.

8. Soit f une isométrie, et φ une similitude, notons $r = |a|$ son rapport. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(f(\varphi^{-1}(z))) - \varphi(f(\varphi^{-1}(z')))| &= r|f(\varphi^{-1}(z)) - f(\varphi^{-1}(z'))| \\ &= r|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z')| \\ &= rr^{-1}|z - z'| \\ &= |z - z'| \end{aligned}$$

Donc $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est bien une isométrie, comme annoncé.