# Correction DM (mars 2021)

**Exercice 1.**
a) Comme $f$ est holomorphe au voisinage de $z_0$, elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $z_0$. Par composition, la fonction $f\circ\gamma$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $t_0$. Le vecteur tangent à la courbe $f\circ\gamma$ en $(f\circ\gamma)(t_0) = f(z_0)$ est donnée par $(f\circ\gamma)'(t_0)$. Par dérivation des fonctions composées, on a

$$(f\circ\gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0).$$

b) Soient $\gamma_1, \gamma_2$ deux courbes de classes $\mathcal{C}^1$ avec $z_0 = \gamma(t_1) = \gamma_2(t_2)$, et telles que $v_1 := \gamma_1'(t_1) \neq 0$ et $v_2 := \gamma_2'(t_2) \neq 0$. Pour montrer que $f$ est conforme, on doit montrer que l'angle entre les angles $\sphericalangle(f'(z_0)v_1, f'(z_0)v_2)$ et $\sphericalangle(v_1, v_2)$ sont égaux.

On décompose $v_1 = a_1 + ib_1, v_2 = a_2 + ib_2$ et $f'(z_0) = x + iy$. On a

$$f'(z_0)v_1 = xa_1 - yb_1 + i(xb_1 + ya_1) \text{ et } f'(z_0)v_2 = xa_2 - yb_2 + i(xb_2 + ya_2)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\langle f'(z_0)v_1, f'(z_0)v_2\right\rangle &= \Re\mathrm{e}(f'(z_0)v_1)\Re\mathrm{e}(f'(z_0)v_2) + \Im\mathrm{m}(f'(z_0)v_1)\Im\mathrm{m}(f'(z_0)v_2)\\
&= (xa_1 - yb_1)(xa_2 - yb_2) + (xb_1 + ya_1)(xb_2 + ya_2)\\
&= x^2a_1a_2 - xya_1b_2 - xyb_1a_2 + y^2b_1b_2 + x^2b_1b_2 + xyb_1a_2 + xya_1b_2 + y^2a_1a_2\\
&= (x^2 + y^2)(a_1a_2 + b_1b_2)\\
&= |f'(z_0)|^2 \langle v_1, v_2\rangle
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\langle f'(z_0)v_1, f'(z_0)v_2\rangle}{|f'(z_0)v_1||f'(z_0)v_2|} = \frac{|f'(z_0)|^2 \langle v_1, v_2\rangle}{|f'(z_0)|^2|v_1||v_2|} = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{|v_1||v_2|}$$

La fonction $f$ est donc conforme en $z_0$.

Par ailleurs, si $f'(z_0) = 0$, alors les vecteurs tangents en $(f\circ\gamma_1)$ et $(f\circ\gamma_2)$ en $f(z_0)$ sont tous les deux nuls par la question précédent. L'angle entre ces vecteurs n'est donc pas défini, et $f$ n'est pas conforme en $z_0$.

c) Dans tous les cas, $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est donc conforme exactement aux points où $f'$ ne s'annule pas.
Si $n = 0$, la fonction $f(z) = 1$ est constante, elle n'est alors conforme en aucun point car sa dérivée est identiquement nulle.
Si $n = 1$, la fonction $f(z) = z$ est conforme en tout point de $\mathbb{C}$, car sa dérivée est constante égale à 1.
Si $n > 1$, alors $f'(z) = nz^{n-1}$ s'annule uniquement en 0. Elle est donc conforme sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

d) Par la question précédente, on sait que $f$ est conforme sur $\mathbb{C}^*$. Il reste simplement à montrer que $f$ envoie $\{z\in\mathbb{C} \mid \Re\mathrm{e}(z) > 0\}$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Soit d'abord $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}(z) > 0$. On doit montrer que $f(z) \notin \mathbb{R}_-$. On a $f(z) = a^2 - b^2 + 2iab$ et

- Si $b \neq 0$, alors $2ab \neq 0$ car $a > 0$ par hypothèse, on a donc $f(z) \notin \mathbb{R}$ et $f(z) \notin \mathbb{R}_-$ en particulier.
- Si $b = 0$, alors $\Re\mathrm{e}(f(z)) = a^2 > 0$, donc $f(z) \notin \mathbb{R}_-$.

Réciproquement, on doit montrer que tout point $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ admet un antécédent par la fonction $f$. On sait que tout point de $\mathbb{C}^*$ admet deux racines carrées distinctes et opposées. Soient $\alpha, -\alpha$ ces racines. Si $\Re\mathrm{e}(\alpha) = 0$, alors $\alpha^2 \in \mathbb{R}_-$ et ne peut être égal à $z$. On a donc $\Re\mathrm{e}(\alpha) \neq 0$. Si $\Re\mathrm{e}(\alpha) > 0$, alors $\alpha$ est bien un antécédent de $z$ par $f$ se trouvant dans $\{z\in\mathbb{C} \mid \Re\mathrm{e}(z) > 0\}$. Si $\Re\mathrm{e}(\alpha) < 0$, alors $\Re\mathrm{e}(-\alpha) > 0$ et $-\alpha$ est l'antécédent recherché.

e) Pour $z = x + iy$, on a $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Donc, si $f = u + iv$, on a $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$. En identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, on a alors

$$H_c = \{x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = d\}$$

On reconnaît une équation d'hyperbole. On a également

$$K_d = \{(x+iy) = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy = d\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{d}{2x}\right\}$$

Ce graphe de fonction est à nouveau une hyperbole (fonction inverse). Ensuite, on a par définition

$$H_c \cap K_d = \{z \in \mathbb{C} \mid u(z) = c \text{ et } v(z) = d\} = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = c + id\}$$

C'est l'ensemble des antécédents de $c+id$ par la fonction $f$, cet ensemble contient deux points (s'il $c+id \neq 0$). L'angle entre $H_c$ et $K_d$ est préservé par $f$ car cette dernière est conforme, or, $H_c$ est envoyée par $f$ sur la droite verticale $x = c$, et $K_d$ est envoyée par $f$ sur la droite horizontale $y = d$. Ces deux droites sont orthogonales, d'où le résultat.

f)1. La fonction $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. On calcule sa dérivée

$$f'(z) = 1 - \frac{e^{i\alpha}}{z^2}$$

La dérivée de $f$ s'annule en $z \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si $1 = \frac{e^{i\alpha}}{z^2}$, autrement dit $z^2 = e^{i\alpha}$ et $z$ est une racine carrée de $e^{i\alpha}$. La fonction $f$ est donc conforme sur $\mathbb{C} \setminus \{0, e^{i\alpha/2}, -e^{i\alpha/2}\}$.

2. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et soit $z = e^{i\theta} \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. On a

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + e^{i(\alpha-\theta)} &= e^{i\alpha/2}\left(e^{i(\theta-\alpha/2)} + e^{i(\alpha/2-\theta)}\right) \\ &= e^{i\alpha/2}\left(e^{i(\theta-\alpha/2)} + \overline{e^{i(\theta-\alpha/2)}}\right) \\ &= 2e^{i\alpha/2}\Re\mathrm{e}\left(e^{i(\theta-\alpha/2)}\right) \\ &= 2e^{i\alpha/2}\cos(\theta-\alpha/2) \end{aligned}$$

Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $\cos(\theta - \alpha/2) \in [-1, 1]$ (et toutes les valeurs sont atteintes). L'image par $f$ de $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est donc le segment entre les points $2e^{i\alpha/2}$ et $-2e^{i\alpha/2}$.

g)1. Comme $T$ est $\mathbb{R}$-linéaire, elle est différentiable, et égale à sa propre différentielle en tout point. Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une courbe, avec $z_0 := \gamma(t_0)$ pour un $t_0 \in ]0,1[$, le vecteur tangent à $T \circ \gamma$ en $T(z_0)$ est $T(\gamma'(z_0))$. On obtient que $T$ est conforme sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elle préserve les angles entre les vecteurs.

Comme les vecteurs 1 et $i$ sont orthogonaux, si $T$ est conforme, $T(1)$ et $T(i)$ doivent être orthogonaux. Autrement dit, $T(i)$ et $iT(1)$ sont colinéaires : il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $T(i) = siT(1)$. On a alors $b = a^{-1}T(i) = T(1)^{-1}T(i) = si \in i\mathbb{R}$ et $\Re\mathrm{e}(b) = 0$.

De plus, l'angle entre 1 et $1+i$ doit être égal à celui entre $T(1) = a$ et $T(1)+T(i) = T(1)(1+si) = a(1+si)$. On calcule

$$\langle 1, 1+i\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \cos(\sphericalangle(1, 1+i)) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \langle T(1), T(1+i)\rangle &= \langle T(1), T(1)(1+si)\rangle \\ &= \langle a, a(1+si)\rangle \\ &= |a|^2 \langle 1, 1+si\rangle \\ \cos(\sphericalangle(T(1), T(1+i)) &= \frac{|a|^2\langle 1, 1+si\rangle}{|a|^2\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \end{aligned}$$

Si $T$ est conforme, on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$, donc $s^2 = 1$ et $s = \pm 1$. Comme $T$ est $\mathbb{R}$-linéaire, on a

$$T(z) = T(x+iy) = xT(1) + yT(i) = xa + siya = a(x+siy)$$

Si $s = 1$, ceci est égal à $az$, si $s = -1$, ceci est égal à $a\overline{z}$.

2. D'après la question précédente, si $T$ est conforme, on a $Tz = az$ ou $Tz = a\overline{z}$ pour un nombre complexe non nul $a$. Dans le premier cas, on a

$$\forall w, z \in \mathbb{C}, \langle Tw, Tz\rangle = \langle aw, az\rangle = |a|^2 \langle w, z\rangle$$

Dans le deuxième cas, on a

$$\forall w, z \in \mathbb{C}, \langle Tw, Tz\rangle = \langle a\overline{w}, a\overline{z}\rangle = |a|^2 \langle \overline{w}, \overline{z}\rangle = |a|^2 \langle w, z\rangle$$

Réciproquement si $\langle Tw, Tz\rangle = s\langle w, z\rangle$ pour tous $w, z \in \mathbb{C}$, on doit montrer que $T$ est conforme. On a en particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Tz|^2 = \langle Tz, Tz\rangle = s\langle z, z\rangle = s|z|^2$. Comme $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{s}$ est bien défini, et on a $|Tz| = \sqrt{s}|z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a alors, pour $w, z \in \mathbb{C}$

$$\cos(\sphericalangle(Tw, Tz)) = \frac{\langle Tw, Tz\rangle}{|Tw||Tz|} = \frac{s\langle w, z\rangle}{s|w||z|} = \cos(\sphericalangle(w, z))$$

et donc $T$ est conforme.

3. Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction qui à un point $z$ de $D$ associe la Jacobienne de $f$ en $z$ est continue, de même que sa composée avec le déterminant. Comme $D$ est connexe, et qu'il existe un point de $D$ en lequel le déterminant de la Jacobienne de $f$ est strictement positif, on obtient que le déterminant jacobien de $f$ sur $D$ est toujours strictement positif.

Soit $z \in D$, la jacobienne $J$ de $f$ en $z$ est une fonction $R$-linéaire injective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ conforme. Par les questions précédentes, on a $Jz = az$ ou $Jz = a\overline{z}$ pour un certain nombre complexe $a$. En posant $a = x + iy$, on obtient dans le premier cas que la matrice de $J$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

dans le second cas, elle est donnée par

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$$

Le déterminant Jacobien est $x^2 + y^2 > 0$ dans le premier cas, et $-x^2 - y^2 < 0$ dans le second. Par hypothèse sur le déterminant jacobien, on obtient que $Jz = az$ est une fonction $\mathbb{C}$-linéaire, autrement dit $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z$. Ceci étant vrai pour tout point du domaine $D$, on obtient que $f$ est holomorphe sur $D$.