Correction Examen session 1 2020-2021

Exercice 1.

1. On commence par rappeler que $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$ sont des groupes pour la multiplication (car $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps), et que $\mathbb{R}_+^*$ est un sous groupe de $\mathbb{R}^*$ (car le produit, et l'inverse, de nombre(s) positif(s) est encore positif). Soient (r, u) et (r', u') deux éléments de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^*$, on a

$$\mathrm{mult}((r,u)(r',u')) = \mathrm{mult}((rr', uu')) = rr'uu'$$

$$\mathrm{mult}((r,u))\mathrm{mult}((r',u')) = rur'u' = rr'uu'$$

car $\mathbb{C}$ est commutatif, on a donc bien affaire à un morphisme de groupes.
Pour montrer que mult est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une bijection, on doit donc montrer que tout élément de $\mathbb{C}^*$ admet un unique antécédent $(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^*$ (admet=surjectif, unique=injectif). En fait comme mult est un morphisme de groupes, il suffit de montrer qu'il est surjectif, et que son noyau est réduit à l'élément neutre $(1, 1)$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^*$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a $|z| > 0$ par hypothèse, donc $r := |z| \in \mathbb{R}_+^*$, et $u := \frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}^1$, on a bien-sûr

$$z = |z|\frac{z}{|z|} = ru = \mathrm{mult}\left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$$

donc mult est surjectif.
Soit ensuite $(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{mult}(r, u) = 1$, on a

$$1 = |1| = |ru| = |r||u| = |r|$$

Donc r est un réel positif dont la valeur absolue est 1, la seule possibilité est $r = 1$, on a alors

$$1 = ru = u$$

donc $(r, u) = (1, 1)$ et mult est injectif.
Ainsi, mult est bien un isomorphisme.

2. C'est une formule déjà connue : le produit des modules, c'est le module du produit : Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$, on a

$$m(zz') = |zz'| = \sqrt{zz'(\bar{z}\bar{z}')} = \sqrt{z\bar{z}z'\bar{z'}} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\bar{z'}} = |z||z'| = m(z)m(z')$$

Pour le théorème d'isomorphisme, on commence par noter que m est surjectif. En effet, tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ est l'image par m de r, vu comme nombre complexe (où de ir si ça vous amuse). Ensuite, on doit calculer le noyau de m :

$$\mathrm{Ker}\ m = m^{-1}(\{1\}) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} = \mathbb{S}^1$$

On obtient donc l'isomorphisme de groupes $\mathbb{C}^*/\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}_+^*$.

3. La rotation de centre M_0 d'angle θ admet M_0 comme point fixe, donc la similitude associée s'écrit sous la forme $a(z - z_0) + z_0$, avec $\arg a = \theta$, et $|a| = 1$, la rotation de centre M_0 et d'angle θ s'écrit donc

$$z \mapsto e^{i\theta}(z - z_0) + z_0 = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})z_0 = az + b$$

avec $a = e^{i\theta}$ et $b = (1 - e^{i\theta})z_0$

4. L'ensemble des rotations du plan n'est pas un sous-groupe des similitudes, car le produit de deux rotations peut être une translation (qui n'est pas une rotation) : Considérons les similitudes $\varphi_1 : z \mapsto iz+1$ et $\varphi_2 : z \mapsto -iz$, ce sont deux rotations d'après la question 4, et on a

$$\varphi_2 \circ \varphi_1(z) = -i(iz + 1) = z - i$$

Cette dernière similitude est une translation, pas une rotation.
En revanche, l'ensemble des translations est bien un sous-groupe des similitude : il contient bien sur l'identité (translation par le vecteur 0), il est stable par composition

$$t_a \circ t_b(z) = z + b + a = t_{a+b}(z)$$

et par passage à l'inverse

$$t_a(z) = z' \Leftrightarrow z' - a = t_{-a}(z') = z$$

5. Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ une similitude directe. On sait que, pour $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$|(az + b) - (az' + b)| = |az - az'| = |a||z - z'|$$

donc φ est une isométrie si et seulement si $|a| = 1$. On distingue ensuite deux cas

- Si $b = 0$, alors $\varphi : z \mapsto az$ admet toujours 0 comme point fixe. Il s'agit d'une rotation si et seulement si $a = e^{i\theta}$ est de module 1.
- Si $b \neq 0$, alors φ admet un point fixe si et seulement si $a \neq 1$, il s'agit donc d'une rotation si et seulement si $a \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$.

6. On peut raisonner de façon brutale (montrer que $\mathcal{R}$ contient 1, est stable par composition et passage à l'inverse, puis montrer qu'il est stable par conjugaison...), mais on peut être un peu plus subtil : Considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{Sim}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ az + b & \longmapsto & a \end{array}$$

Il s'agit d'un morphisme de groupe : si $\varphi_1(z) = az + b$ et $\varphi_2(z) = cz + d$, alors

$$\varphi_2(\varphi_1(z)) = c(az + b) + d = caz + cb + d$$

donc $f(\varphi_2\varphi_1) = ac = f(\varphi_2)f(\varphi_1)$ et f est bien un morphisme. Ensuite, on considère à nouveau le morphisme m de la question 2, et la composition $m \circ f$, qui est un morphisme de groupes qui envoie $az + b$ sur $|a|$, on a

$$\mathrm{Ker}\ m \circ f = \{\varphi : z \mapsto az + b \mid |a| = 1\} = \mathcal{R}$$

Donc $\mathcal{R}$ est un sous-groupe distingué, comme noyau d'un morphisme de groupes.
Le sous-groupe $\mathcal{R}$ n'est pas abélien, car, en posant $\varphi_1(z) = iz$ et $\varphi_2(z) = iz + 1$, on a

$$\varphi_2\varphi_1(z) = i(iz) + 1 = -z + 1 \ \text{ et } \ \varphi_1\varphi_2(z)i(iz + 1) = -z + i$$

7. L'application ψ considérée est simplement la restriction à $\mathcal{R}$ du morphisme f introduit à la question précédente, il s'agit donc d'emblée d'un morphisme de groupes, dont il reste à montrer qu'il est surjectif (et à valeur dans $\mathbb{S}^1$, mais ce dernier point est évident par définition de $\mathcal{R}$). Soit $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, la similitude $z \mapsto e^{i\theta}z$ se trouve dans $\mathcal{R}$ et est un antécédent de $e^{i\theta}$ dans $\mathcal{R}$.
Déterminons le noyau de ψ : soit $\varphi : z \mapsto e^{i\theta}z + b \in \mathcal{R}$, on a $\varphi \in \mathrm{Ker}\ \psi$ si et seulement si $e^{i\theta} = 1$, autrement dit si et seulement si φ est de la forme $z \mapsto z + b$, autrement dit une translation. En notant $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations, on obtient l'isomorphisme

$$\mathcal{R}/\mathcal{T} \simeq \mathbb{S}^1$$

8. Soit $\varphi : z \mapsto az + b$ une similitude directe, on distingue deux cas

- Si $a = 1$, autrement dit φ est une translation, dans ce cas on a

$$z + b = i(-iz) + b$$

donc φ est composition des rotation $z \mapsto iz + b$ et $z \mapsto -iz$.

- Si $a \neq 1$, alors $\varphi(z) = a(z - z_0) + z_0$ où $z_0 = \frac{b}{1-a}$, φ est alors de la composée de la rotation $z \mapsto e^{i \arg a}(z - z_0) + z_0$ par l'homothétie $z \mapsto |a|z$.

Dans tous les cas φ est une composition d'homothétie et de translations.

Exercice 2.

1. Si q est un quaternion pur, alors $\overline{q} = -q$, donc $N(q) = q\overline{q} = -qq = -q^2$, donc $q^2 = -N(q)$ est un réel négatif.
Réciproquement, tout quaternion $q = a + ib + jc + kd$ s'écrit $a + q'$ où a est un réel, et q' est un quaternion pur, on a alors

$$q^2 = (a + q')(a + q') = a^2 + q'^2 + 2aq'$$

avec $a^2 + q'^2$ la partie réelle de q^2 et $2aq'$ sa "partie quaternionique".
Le nombre q^2 est réel si et seulement si $2aq' = 0$, on a donc soit $a = 0$ (et $q = q'$ est un quaternion pur), soit $q' = 0$ (et $q = a$ est un nombre réel).
Si $q = a$ est réel, on n'a bien-sûr pas que q^2 est un réel négatif, donc q^2 est un réel négatif si et seulement si c'est un quaternion pur.
Ensuite, si q^2 est un réel positif, alors à nouveau q est soit un quaternion pur, soit un réel, mais il ne peut être un quaternion pur (car son carré serait alors négatif) : les quaternions dont le carré est un réel positif sont donc exactement les nombres réels.

2. Par construction, Q_8 est stable par multiplication par -1 et contient 1. Ensuite, Q_8 est stable par passage à l'inverse, les inverses des éléments de Q_8 étant donnés par

$$\{\mp 1, \mp i, \mp j, \mp k\}$$

Il reste donc à montrer que $Q_8 = iQ_8 = jQ_8 = kQ_8$ (les stabilité par $-i, -j, -k$ découleront alors de la stabilité par -1), on a

$$iQ_8 = \{\pm i, \mp 1, \pm k, \mp j\}, \;\; jQ_8 = \{\pm j, \mp k, \mp 1, \pm i\}, \;\; kQ_8 = \{\pm k, \pm j, \mp i, \mp 1\}$$

Donc Q_8 est stable par multiplication et forme donc un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$.
L'ordre de 1 est 1 bien sûr, et celui de -1 est 2. Ensuite, on a i est d'ordre 4, en effet $i^2 = -1 \neq 1$ et $i^3 = -i \neq 1$, de même, on obtient que $\pm i, \pm j, \pm k$ sont tous d'ordre 4.
Pour les sous-groupes, on pourrait tester violemment tous les sous-ensembles, mais ça serait très long (il y en a $2^8 = 256$), on va donc être plus subtils. On commence par lister tous les sous-groupes monogènes de Q_8 :

- $\langle 1 \rangle = \{1\}$
- $\langle -1 \rangle = \{1, -1\}$
- $\langle i \rangle = \{1, i, -1, -i\} = \langle -i \rangle$
- $\langle j \rangle = \{1, j, -1, -j\} = \langle -j \rangle$
- $\langle k \rangle = \{1, k, -1, -k\} = \langle -k \rangle$

Ensuite, on montre que Q_8 ne contient pas de groupe non monogène : Par le théorème de Lagrange, un sous-groupe de Q_8 est d'ordre 1,2,4,8. Il n'y a bien sur qu'un seul sous-groupe d'ordre 8 (Q_8 lui-même), et tout groupe d'ordre 1 ou 2 est cyclique, la seule possibilité restante est que Q_8 admette un sous-groupe d'ordre 4 non cyclique (isomorphe au groupe de Klein, $\mathbb{Z}/2Z \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), mais un tel groupe contiendrait 3 éléments distincts d'ordre 2, et Q_8 n'en admet qu'un seul.

Donc Q_8 n'admet pour sous-groupe que des groupes cycliques, on a donc le treillis de sous-groupes suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Q_8 \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\langle i \rangle \arrow[dr, no head] & \langle j \rangle \arrow[d, no head] & \langle k \rangle \arrow[dl, no head] \\
 & \langle -1 \rangle \arrow[d, no head] & \\
 & \{1\} &
\end{tikzcd}$$

3. On constate que w est un quaternion pur, et de norme 1, on a donc $w^{-1} = \overline{w} = -w$. Pour déterminer la matrice de l'application Φ_w considérée, on calcule

$$\Phi_w(i) = -wiw = -\frac{1}{2}(i+j)i(i+j) = -\frac{1}{2}(i+j)(-1+k) = -\frac{1}{2}(-i-j-j+i) = j$$

$$\Phi_w(j) = -wjw = -\frac{1}{2}(i+j)j(i+j) = -\frac{1}{2}(i+j)(-k-1) = -\frac{1}{2}(j-i-i-j) = i$$

$$\Phi_w(i) = -wkw = -\frac{1}{2}(i+j)k(i+j) = -\frac{1}{2}(i+j)(j-i) = -\frac{1}{2}(k-1+1+k) = -k$$

La matrice associée à Φ_w est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une rotation, d'axe $i+j$ et d'angle π.