



Compléments sur l'homologie générale Théorie des catégories (ex)triangulées

MÉMOIRE DE MASTER 1

Owen GARNIER

Université de Picardie Jules Verne

Département de Mathématiques

Sous la direction de M. Yann PALU

2018-2019

Table des matières

| | |
|---|------------|
| Introduction | 3 |
| 1 Rappels et compléments | 4 |
| 1.1 Adjonction | 4 |
| 1.1.1 Définitions | 4 |
| 1.1.2 Unités et co-unités | 7 |
| 1.2 Quelques points d'algèbre homologique | 13 |
| 1.2.1 Compléments sur les complexes d'une catégorie abélienne | 13 |
| 1.2.2 Foncteurs dérivés | 20 |
| 1.3 Applications : classification des extensions et cohomologie des groupes . . . | 26 |
| 1.3.1 Catégories exactes, extensions et somme de Baer | 26 |
| 1.3.2 Groupe Ext^1 et classification | 32 |
| 1.3.3 Cohomologie des groupes | 35 |
| 2 Compléments sur les catégories triangulées | 40 |
| 2.1 Catégories pré-triangulées | 40 |
| 2.1.1 Définition et conséquences immédiates | 40 |
| 2.1.2 Morphismes homotopes et cônes de morphismes | 47 |
| 2.2 Définitions d'une catégorie triangulée | 53 |
| 2.3 Sous-catégorie stable par extension d'une catégorie triangulée | 66 |
| 3 Catégories extriangulées | 81 |
| 3.1 Définitions et vocabulaire | 81 |
| 3.1.1 Extensions d'une catégorie additive | 81 |
| 3.1.2 Catégories pré-extriangulées | 86 |
| 3.2 Catégories extriangulées, définition et premières propriétés | 94 |
| 3.2.1 Définitions | 94 |
| 3.2.1.1 Implication $(B, B^{op}) \Rightarrow (D, D^{op})$ | 96 |
| 3.2.1.2 Implication $(D, D^{op}) \Rightarrow (B, B^{op})$ | 99 |
| 3.2.2 Propriétés élémentaires des catégories extriangulées | 103 |
| 3.3 Lien avec les catégories exactes et triangulées | 109 |
| 3.3.1 Cas particuliers de catégories extriangulées | 109 |
| 3.3.2 Condition de Frobenius et catégorie stable d'une catégorie extriangulée | 113 |
| Références | 121 |

Introduction

Le présent travail a pour but de motiver et d'introduire la théorie des catégories extriangulées, au travers notamment de l'étude de sous-catégories pleines et stables par extensions des catégories triangulées. Inspiré par l'approche de [13], nous mettons en évidence un lien entre ce type de catégories et les catégories exactes, notamment dans les définitions de la notion de conflation, qui donne des résultats analogues dans les deux configurations.

Une structure se retrouvant dans ces deux cadres est celle d'extension d'une conflation, une démarche naturelle consiste à classer ces extensions, au moyen d'un foncteur Ext , nous détaillons cette construction pour les catégories abéliennes dans la première partie. Les catégories extriangulées sont introduites en prenant le contrepied de cette démarche, en introduisant d'abord une notion d'extension (au travers d'un foncteur imitant le Ext ¹ des catégories abéliennes), puis en construisant les conflations d'après les extensions. Cette méthode possède l'avantage de pouvoir s'appliquer assez naturellement aux contextes cités plus haut, elle donne donc une vision unificatrice et fructueuse sur ces notions.

Pour mettre en évidence l'aspect naturel et intuitif de l'introduction des catégories extriangulées, nous effectuons certains rappels sur les catégories triangulées, en exposant certains aspects des définitions que nous n'avons pas développés dans [2], tout ceci pour en venir à l'étude des sous-catégories stables par extensions des catégories triangulées, que l'on peut considérer comme l'exemple holotypique de catégorie extriangulée, cette étude nous mène à un résultat très similaire au cas des catégories exactes, à savoir la triangulation de la catégorie stable d'une catégorie de Frobenius (dans un sens à préciser), nous terminons en explicitant un tel résultat pour les catégories extriangulées en toute généralité.

Je tiens à remercier M. Yann Palu, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour sa disponibilité, son aide précieuse et éclairante. Je tiens également à remercier mon frère Arthur, pour ses références instructives et pour sa patience.

Tout au long de notre exposé, nous citons fréquemment [2], que nous considérons comme un pré-requis à ce mémoire, les définitions élémentaires de théorie des catégories sont supposées familières au lecteur, nous fixons néanmoins certaines notations et conventions qui peuvent différer de celles utilisées dans [2] :

- Les catégories considérées sont par défaut supposées localement petites.
- L'ensemble des morphismes entre deux objets X et Y d'une catégorie \mathcal{C} sera noté $\mathcal{C}(X, Y)$, où $\text{Hom}_A(X, Y)$ dans le cas où $\mathcal{C} = A - \mathfrak{Mod}$.
- Une application de la forme $\mathcal{C}(X, f)$ sera notée \tilde{f} , et une application de la forme $\mathcal{C}(f, X)$ sera notée \hat{f} en l'absence d'ambiguïté sur la catégorie \mathcal{C} considérée.
- La composition de deux morphismes f et g sera le plus souvent notée fg au lieu de $f \circ g$ par souci de concision.
- Par manque de temps, nous choisissons d'ignorer les problèmes logiques et ensemblistes posés par l'étude de certaines catégories.

Première partie

Rappels et compléments

1.1 Adjonction

1.1.1 Définitions

Une notion fondamentale dans la théorie des catégories, que nous n'avons pas développé dans [2] est la notion d'adjonction des foncteurs, nous allons donc en donner les premiers résultats, ainsi que quelques exemples fondamentaux qui nous resserviront dans la suite.

On se donne deux catégories (localement petites) \mathcal{C} et \mathcal{D} , ainsi que des foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (on notera $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$). On cherche à formaliser l'idée que pour $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{D}$, la donnée d'un morphisme $F(A) \rightarrow B$ est 'sensiblement la même' que celle d'un morphisme $A \rightarrow G(B)$: on souhaiterait transporter l'information d'un morphisme entre les deux catégories.

Définition 1.1. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} des catégories, $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ des foncteurs. On dit que F est **adjoint à gauche** de G , et G est **adjoint à droite** de F , noté $F \dashv G$ si, pour tous objets $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$, il existe une bijection $\varphi_{A,B} : \mathcal{C}(A, G(B)) \rightarrow \mathcal{D}(F(A), B)$, qui respecte les axiomes de naturalité suivants :

- Pour toute suite de morphismes composables $A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)$ dans \mathcal{C} , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & F(A) & \\ F(p) \nearrow & & \searrow \varphi_{A,B}(f) \\ F(A') & \xrightarrow{\varphi_{A',B}(f \circ p)} & B \end{array}$$

- Pour toute suite de morphismes composables $F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'$ dans \mathcal{D} , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & G(B) & \\ \varphi_{A,B}^{-1}(g) \nearrow & & \searrow G(q) \\ A & \xrightarrow{\varphi_{A,B'}^{-1}(q \circ g)} & G(B') \end{array}$$

Le choix d'une telle famille de bijection $\varphi_{-,?}$ est appelée une **adjonction** entre F et G .

Cette première définition est issue de [11], et semble quelque peu *ad hoc* en première lecture, il se trouve qu'elle peut être interprétée comme une transformation naturelle entre deux foncteurs.

On considère les catégories $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ et \mathbf{Ens} , soit $(A, B) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$, par définition on a

$$(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D})((A, B), (A', B')) = \mathcal{C}^{op}(A, A') \times \mathcal{D}(B, B') = \mathcal{C}(A', A) \times \mathcal{D}(B, B')$$

On construit un foncteur $H : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ens}$ en posant $H(A, B) := \mathcal{D}(F(A), B) \in \mathbf{Ens}$, et pour $(f, g) \in \mathcal{C}(A', A) \times \mathcal{D}(B, B')$, on pose

$$\begin{array}{ccc} H(f, g) : \mathcal{D}(F(A), B) & \longrightarrow & \mathcal{D}(F(A'), B') \\ k & \longmapsto & gkF(f) \end{array}$$

Comme F est un foncteur covariant, la correspondance H donne un foncteur covariant, en effet pour une suite de morphismes dans $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ de la forme

$$(A, B) \xrightarrow{(f, g)} (A', B') \xrightarrow{(f', g')} (A'', B'')$$

On a

$$\begin{aligned} H(f' \circ^{op} f, g' \circ g)(k) &= g' g k F(f' \circ^{op} f) \\ &= g' g k F(f) F(f') \\ &= H(f', g') \circ H(f, g)(k) \end{aligned}$$

On note alors $\mathcal{D}(F(-), ?)$ ce foncteur, on définit de manière analogue le foncteur $\mathcal{C}(-, G(?))$.

Lemme 1.1. *La donnée d'une adjonction entre F et G est équivalente à celle d'un isomorphisme naturel entre les foncteurs $\mathcal{D}(F(-), ?)$ et $\mathcal{C}(-, G(?))$.*

Démonstration. (\Rightarrow) Par définition, une adjonction est une collection de bijections

$$\varphi_{A,B} : \mathcal{D}(F(A), B) \rightarrow \mathcal{C}(A, G(B))$$

il reste à vérifier que cette collection donne un isomorphisme naturel. Comme les $\varphi_{-,?}$ sont des bijections (donc des isomorphismes dans \mathbf{Ens}), il suffit de vérifier que l'on a une transformation naturelle. Soit donc $(f, g) : (A, B) \rightarrow (A', B')$ un morphisme dans $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$, on veut montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, G(B)) & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, G(g))} & \mathcal{C}(A', G(B')) \\ \varphi_{A,B} \downarrow & & \downarrow \varphi_{A',B'} \\ \mathcal{D}(F(A), B) & \xrightarrow{\mathcal{D}(F(f), g)} & \mathcal{D}(F(A'), B') \end{array}$$

Autrement dit, que l'on a, pour $k : A \rightarrow G(B)$

$$\begin{aligned} \varphi_{A',B'}(G(g)kf) &= g\varphi_{A,B}(k)F(f) \\ \Leftrightarrow G(g)kf &= \varphi_{A',B'}^{-1}(g\varphi_{A,B}(k)F(f)) \end{aligned}$$

Or par le premier axiome de naturalité on a $\varphi_{A,B}(k)F(f) = \varphi_{A',B}(kf)$, et par le second, $\varphi_{A',B'}^{-1}(g\varphi_{A',B}(kf)) = G(g)\varphi_{A',B}^{-1}(\varphi_{A',B}(kf)) = G(g)kf$. Donc $\varphi_{-,?}$ donne bien un isomorphisme naturel.

(\Leftarrow) De même soit $\varphi_{-,?}$ donnant l'isomorphisme naturel, par hypothèse les $\varphi_{A,B}$ sont des bijections, et on a, pour tout $(f, g) : (A, B) \rightarrow (A', B')$ et $k : \mathcal{C}(A, G(B))$, la relation de commutativité suivante :

$$\varphi_{A',B'}(G(g)kf) = g\varphi_{A,B}(k)F(f)$$

En particulier, pour $g = 1_B$, on retrouve la première relation de naturalité, et pour $f = 1_A$, on retrouve la seconde, donc $\varphi_{-,?}$ donne une adjonction entre F et G . \square

Remarque. L'adjonction à gauche est duale de l'adjonction à droite : si $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ sont des foncteurs, avec $F \dashv G$, alors on a $G^{op} \dashv F^{op}$ avec les foncteurs $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \rightleftarrows \mathcal{D}^{op} : G^{op}$.

Exemple. Un exemple élémentaire d'adjonction est l'adjonction libre-oubli : Pour la majorité des structures algébriques classiques (monoïde, groupe,...) on peut considérer un foncteur dit 'foncteur d'oubli' qui associe aux objets leurs ensembles sous-jacents et aux morphismes les applications sous-jacentes. Réciproquement, on peut, à partir d'un ensemble construire un objet algébrique correspondant, dit 'libre'. Dans le cas des espaces vectoriels sur un corps K , on obtient ainsi deux foncteurs $Vect_K \rightleftarrows \mathbf{Ens}$, qui sont en fait adjoints : construisons plus précisément le foncteur libre dans ce cas :

Soit S un ensemble, on pose

$$L(S) := \{\lambda : S \rightarrow K \mid \#(\lambda^{-1}(K^*)) < \infty\}$$

l'ensemble des fonctions non nulles seulement sur un nombre fini d'éléments de S . Cet ensemble forme clairement un K -espace vectoriel, et S s'identifie naturellement à une base de $L(S)$ par $s \mapsto \mathbb{1}_{\{s\}}$. Donc une application $f : S \rightarrow S'$ donne naturellement une application linéaire $L(f) : L(S) \rightarrow L(S')$ (puisque l'image de $L(f)$ est déterminée sur une base de $L(S)$). Heuristiquement, l'adjonction libre/oubli ici nous permet de dire qu'une application linéaire $L(S) \rightarrow V$ est essentiellement la même chose qu'une application $S \rightarrow F(V)$ (où F désigne le foncteur d'oubli), ce que l'on sait déjà intuitivement : il suffit de fixer l'image d'une base, ici S , pour déterminer complètement une application linéaire.

Construisons explicitement l'adjonction : fixons $S \in \mathbf{Ens}$ et $V \in Vect_K$, pour $g \in \text{Hom}_K(L(S), V)$, on définit $\varphi_{S,V}(g) : S \rightarrow F(V)$ par $\varphi_{S,V}(g)(s) = g(s)$ pour $s \in S$. Dans l'autre sens, pour $F : S \rightarrow F(V)$, on définit $\psi_{S,V} : L(S) \rightarrow V$ par $\psi_{S,V}(f)(s) = f(s)$ pour $s \in S$ et étendu par K -linéarité. Les deux fonctions $\varphi_{S,V}$ et $\psi_{S,V}$ sont clairement des bijections réciproques, il reste à voir qu'elles donnent une adjonction : Soit $L(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'$ une suite de morphismes composables dans $Vect_K$, on a

$$\varphi_{A,B'}(q \circ g) = q \circ g(s) = q(g(s)) \quad \text{et} \quad F(q)\varphi_{A,B}(g)(s) = F(q)(g(s)) = q(s)$$

Et pour $A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} F(B')$ est une suite de morphismes dans \mathbf{Ens} , on a

$$\psi_{A,B}(f \circ p) : \sum_{s \in S} \lambda_s s \mapsto \sum_{s \in S} \lambda_s f(p(s)) \quad \text{et} \quad \psi_{A,B}(f) \circ L(p) : \sum_{s \in S} \lambda_s s \mapsto \psi_{A,B}(f) \left(\sum_{s \in S} \lambda_s p(s) \right)$$

Et comme par définition $\psi_{A,B}$ est K -linéaire, on obtient bien le résultat.

Exemple. Soient A, B des ensembles, on considère $A \times B$ leur produit cartésien et $\mathbf{Ens}(A, B) \in \mathbf{Ens}$. On obtient naturellement deux foncteurs $- \times B$ et $\mathbf{Ens}(-, B)$, en fixant B . On a aussi une bijection

$$\begin{aligned} \mathbf{Ens}(A \times B, C) &\longrightarrow \mathbf{Ens}(A, \mathbf{Ens}(B, C)) \\ ((a, b) \mapsto c) &\longmapsto (a \mapsto (b \mapsto c)) \end{aligned}$$

Qui donne également une adjonction entre les deux foncteurs considérés.

Remarque. On se place dans \mathbf{Cat} , on considère $[1]$ la catégorie à un seul objet et son identité, il s'agit d'un objet terminal dans \mathbf{Cat} . Pour une catégorie \mathcal{C} , la donnée d'un foncteur $[1] \rightarrow \mathcal{C}$ correspond à celle d'un objet de \mathcal{C} . Dire d'un foncteur $F : [1] \rightarrow \mathcal{C}$ est adjoint à gauche (resp. à droite) du foncteur $\mathcal{C} \rightarrow [1]$ est équivalent à dire que $F(1)$ est un objet initial (resp. terminal) dans \mathcal{C} :

Si F est un adjoint à gauche de $\mathcal{C} \rightarrow [1]$, on a par définition une bijection entre $[1](1, 1) = \{1_1\}$

et $\mathcal{C}(F(1), B)$ pour tout objet B de \mathcal{C} , donc $\mathcal{C}(F(1), B)$ est un singleton et $F(1)$ est initial. Réciproquement si $F(1)$ est initial, on vérifie immédiatement que l'unique bijection entre $[1](1, 1)$ et $\mathcal{C}(F(1), B)$ respecte les axiomes de naturalité. Pour la seconde équivalence, on applique le même raisonnement en remplaçant \mathcal{C} par \mathcal{C}^{op} .

Lemme 1.2. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ trois catégories et des foncteurs

$$\mathcal{C}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{C}_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xleftarrow{G'} \end{array} \mathcal{C}_3$$

Si $F \dashv G$ et $F' \dashv G'$, alors $F' \circ F \dashv G \circ G'$.

Démonstration. On a des isomorphismes naturels $\varphi : \mathcal{C}_2(F(-), ?) \rightarrow \mathcal{C}_1(-, G(?))$ et $\psi : \mathcal{C}_3(F'(-), ?) \rightarrow \mathcal{C}_2(-, G'(?))$, on construit alors

$$\eta_{X,Y} : \mathcal{C}_3(F'F(-), ?) \rightarrow \mathcal{C}_1(-, GG'(?))$$

Comme $\eta_{X,Y} := \varphi_{X,G'(Y)} \circ \psi_{F(X),Y}$, on vérifie facilement que η donne la transformation naturelle voulue. \square

1.1.2 Unités et co-unités

Pour \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories, $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ des foncteurs adjoints, on a vu que l'on avait un isomorphisme naturel entre les foncteurs

$$\mathcal{D}(F(-), ?) \text{ et } \mathcal{C}(-, G(?))$$

En particulier, en remplaçant $?$ par $F(-)$, on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{D}(F(-), F(-)) \simeq \mathcal{C}(-, GF(-))$$

Donc pour tout objet $A \in \mathcal{C}$, on a une bijection $\mathcal{D}(F(A), F(A))$ et $\mathcal{C}(A, GF(A))$, on pose alors ε_A l'image de $1_{F(A)}$ par cette bijection. De même on a un isomorphisme

$$\mathcal{D}(FG(?), ?) \simeq \mathcal{C}(G(?), G(?))$$

on fixe alors η_B comme l'image de $1_{G(B)}$ par cet isomorphisme pour $B \in \mathcal{D}$.

Définition 1.2. La collection de morphisme ε est appelée l'**unité** de l'adjonction, et η sa **co-unité**.

Lemme 1.3.

- (a) L'unité ε de l'adjonction $F \dashv G$ est une transformation naturelle $1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$.
- (b) La co-unité η de l'adjonction $F \dashv G$ est une transformation naturelle $FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{C}$, on doit montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \varepsilon_A \downarrow & & \downarrow \varepsilon_B \\ GF(A) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(B) \end{array}$$

Par définition, on a $\varepsilon_A = \varphi_{A, F(A)}^{-1}(1_{F(A)})$, on a alors

$$\begin{aligned} GF(f) \circ \varphi_{A, F(A)}^{-1}(1_{F(A)}) &= \varphi_{A, F(B)}^{-1}(F(f) \circ 1_{F(A)}) \\ &= \varphi_{A, F(B)}^{-1}(1_{F(B)} \circ F(f)) \\ &= \varphi_{B, F(B)}^{-1}(1_{F(B)}) \circ f \\ &= \varepsilon_B \circ f \end{aligned}$$

Pour le cas de η , on raisonne de manière duale : la co-unité de l'adjonction $F \dashv G$ correspond à l'unité de l'adjonction $G^{op} \dashv F^{op}$. \square

Bien-sûr ε et η dépendent du choix de l'adjonction $F \dashv G$, et en général il y a plusieurs choix possibles. Par ailleurs, il existe une forme de réciproque au résultat précédent permettant de construire une adjonction entre deux foncteurs après s'être fixé son unité, ou sa co-unité

Proposition 1.4. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories, $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ deux foncteurs,

(a) Si $\varepsilon : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ est une transformation naturelle telle que

$$\forall \alpha : X \rightarrow G(Y), \exists ! \beta : F(X) \rightarrow Y \mid G(\beta)\varepsilon_X = \alpha$$

Alors il existe une adjonction $F \dashv G$ dont ε est l'unité.

(b) Si $\eta : FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ est une transformation naturelle telle que

$$\forall \alpha : F(Y) \rightarrow X, \exists ! \beta : Y \rightarrow G(X) \mid \eta_X F(\beta) = \alpha$$

alors il existe une adjonction $F \vdash G$ dont η est la co-unité.

Démonstration. On montre le premier point, dual du second. Pour $\beta \in \mathcal{D}(F(X), Y)$, on pose $\psi_{X,Y}(\beta) := G(\beta)\varepsilon_X$, on obtient une application $\mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$. Par hypothèse cette application est une bijection, on montre alors que la famille $\psi_{-,?}^{-1}$ donne une adjonction $F \dashv G$:

- Si $A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)$ est une suite de morphismes dans \mathcal{C} , on veut montrer

$$\psi_{A',B}^{-1}(f \circ p) = \psi_{A,B}^{-1}(f) \circ F(p)$$

Or on a

$$\begin{aligned} \psi_{A',B}(\psi_{A,B}^{-1}(f)F(p)) &= G(\psi_{A,B}^{-1}(f)F(p))\varepsilon_{A'} \\ &= G(\psi_{A,B}^{-1}(f))GF(p)\varepsilon_{A'} \\ &= G(\psi_{A,B}^{-1}(f))\varepsilon_{AP} \quad \text{Car } \varepsilon \text{ est une transformation naturelle} \\ &= \psi_{A,B}(\psi_{A,B}^{-1}(f))p \\ &= f \circ p \end{aligned}$$

Soit le résultat voulu.

- Si $F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'$ est une suite de morphismes dans \mathcal{D} , on veut montrer

$$\psi_{A,B'}(q \circ g) = G(q)\psi_{A,B}(g)$$

Or par définition de $\psi_{-,?}$, on a

$$\psi_{A,B'}(q \circ g) = G(q \circ g)\varepsilon_A = G(q)G(g)\varepsilon_A = G(q)\psi_{A,B}(g)$$

D'où le résultat. □

Lemme 1.5. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} des catégories, $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ des foncteurs, et $\varepsilon : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow GF$, $\eta : FG \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ des transformations naturelles. On a équivalence entre :

- (i) Les compositions $\eta_{F(-)} \circ F(\varepsilon_-)$ et $\varepsilon_{G(-)} \circ G(\eta_?)$ sont identitaires.
- (ii) On a une adjonction $F \dashv G$ avec ε (resp. η) l'unité (resp. la co-unité).

Démonstration. (\Rightarrow) On considère les applications

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{X,Y} : \mathcal{D}(FX, Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, GY) \\ f & \longmapsto & G(F)\varepsilon_X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \psi_{X,Y} : \mathcal{C}(X, GY) & \longrightarrow & \mathcal{D}(FX, Y) \\ g & \longmapsto & \eta_Y F(g) \end{array}$$

On va montrer que ces applications sont inverses l'une de l'autre. Comme η est une transformation naturelle, on a $f\eta_{F(X)} = \eta_Y FG(f)$. Donc

$$\begin{aligned} \eta_Y \circ F(Gf \circ \varepsilon_X) &= \eta_Y \circ FG(f) \circ F\varepsilon_X \\ &= f \circ \eta_{F(X)} \circ F\varepsilon_X \\ &= f \end{aligned}$$

par hypothèse, et de même

$$\begin{aligned} G(\eta_Y \circ F(g)) \circ \varepsilon_X &= G(\eta_Y) \circ GF(g) \circ \varepsilon_X \\ &= G(\eta_Y) \circ \varepsilon_Y \circ g \\ &= g \end{aligned}$$

On applique alors le lemme précédent.

(\Leftarrow) Si $F \dashv G$ avec ε et η les (co)-unités, soit

$$\varphi_{A,B} : \mathcal{D}(F(A), B) \rightarrow \mathcal{C}(A, G(B))$$

qui donne l'adjonction, le diagramme suivant est donc commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(A), B') & \xrightarrow{\mathcal{D}(F(X), f)} & \mathcal{D}(F(A), B) \\ \varphi_{A,B'} \downarrow & & \downarrow \varphi_{A,B} \\ \mathcal{C}(A, G(B')) & \xrightarrow{\mathcal{C}(A, G(f))} & \mathcal{C}(A, G(B)) \end{array}$$

pour tout $f : B' \rightarrow B$, en particulier pour $B' = F(A)$, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(f) &= \varphi_{A,B}(f \circ 1_A) = \varphi_{A,B}((F(A), f)(1_{F(A)})) \\ &= (A, G(f)) \circ \varphi_{A,F(A)}(1_{F(A)}) \\ &= G(f) \circ \varphi_{A,F(A)}(1_{F(A)}) \\ &= G(f) \circ \eta_X \end{aligned}$$

par définition. De même pour tous $g \in \mathcal{D}(A, G(B))$, on a $\varphi_{A,B}^{-1} = \varepsilon_Y \circ F(g)$, pour $A = G(B)$ et $g = 1_{G(B)}$. On a $\varphi_{G(B),B}(1_{G(B)})$ et donc

$$1_{G(B)} = \varphi_{G(B),B}(\varepsilon_B) = G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)}$$

on obtient de la même manière $1_{F(A)} = \eta_{F(A)} \circ F(\varepsilon_A)$. \square

Proposition 1.6. (*Unicité de l'adjoint*)

Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} des catégories, $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G_1, G_2$ des foncteurs, alors on a

- (a) Si $F \dashv G_1$ et $F \dashv G_2$, alors $G_1 \simeq G_2$ comme foncteur.
- (b) Si $F \vdash G_1$ et $F \vdash G_2$, alors $G_1 \simeq G_2$ comme foncteur.

Démonstration. Dans le premier cas, on a par définition

$$\mathcal{C}(-, G_2(?)) \simeq \mathcal{D}(F(-), ?) \simeq \mathcal{C}(-, G_1(?))$$

On a donc $\varphi : \mathcal{C}(-, G_1(?)) \rightarrow \mathcal{C}(-, G_2(?))$ un isomorphisme naturel. Soit $A \in \mathcal{D}$, on a

$$\varphi_{G_1(D),D} : \mathcal{C}(G_1(D), G_2(D)) \rightarrow \mathcal{C}(G_1(D), G_2(D))$$

on pose $\tau_D := \varphi_{G_1(D),D}(1_{G_2(D)})$, on montre que τ définit un isomorphisme naturel entre G_1 et G_2 .

Soit $f : A \rightarrow A'$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G_1(A), G_1(A)) & \xrightarrow{\varphi_{G_1(A),A}} & \mathcal{C}(G_1(A), G_2(A)) \\ \downarrow \mathcal{C}(G_1(A), G_1(f)) & & \downarrow \mathcal{C}(G_1(A), G_2(f)) \\ \mathcal{C}(G_1(A), G_1(A')) & \xrightarrow{\varphi_{G_1(A),A'}} & \mathcal{C}(G_1(A), G_2(A')) \end{array}$$

en suivant $1_{G_1(A)} \in \mathcal{C}(G_1(A), G_1(A))$, on obtient

$$G_2(f) \circ \tau_D = \varphi_{G_1(A),A'}(G_1(f))$$

Et de même, $\varphi_{G(A'),A'}(G(f)) = \tau_{A'} \circ G(f)$. Donc $G_2(f) \circ \tau_D = \tau_{D'} \circ G(f)$ et τ est une transformation naturelle. Ensuite, comme φ est un isomorphisme naturel, on obtient $\tau_A = \varphi_{G(A),A}(1_{G(A)})$ est un isomorphisme, donc τ est un isomorphisme naturel, on raisonne de même pour le second cas. \square

Proposition 1.7. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories, et $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ des foncteurs, avec $F \dashv G$, on a équivalence entre

- (i) F est une équivalence.
- (ii) G est une équivalence.

Démonstration. Si F est un équivalence, alors, en notant $G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ le quasi-inverse de F , on a un isomorphisme naturel $\varepsilon : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow G'F$. On a alors $F \dashv G'$ d'unité ε sous certaines conditions sur ε , qui sont remplies car ε est un isomorphisme. Donc $G \simeq G'$ par la proposition précédente, comme G' , on tient un raisonnement dual pour la réciproque. \square

En fait cette preuve nous permet de dire un peu plus :

Corollaire 1.8. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories, et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ une équivalence de quasi-inverse G , alors $F \dashv G$ et $G \dashv F$, et les unités et co-unités sont des isomorphismes.

Avant de poursuivre, nous donnons deux exemples d'adjonction pratique, issus de la théorie des représentations des groupes (cf [17]).

On se donne R et S deux anneaux, on peut considérer les catégories $\mathbf{Mod} - R$ et $\mathbf{Mod} - S$ des modules à droite sur R et S . Si B est un $R - S$ -bimodule, on obtient un foncteur covariant

$$- \otimes_R B : \mathbf{Mod} - R \rightarrow \mathbf{Mod} - S$$

et de même, on a un foncteur covariant $\mathrm{Hom}_S(B, -) : \mathbf{Mod} - S \rightarrow \mathbf{Mod} - R$.

Lemme 1.9. Pour R, S deux anneaux, B un $R - S$ -bimodule. Alors les foncteurs $- \otimes_R B$ et $\mathrm{Hom}_S(B, -)$ sont adjoints.

Démonstration. Soit A un R -module à droite et C un S -module à droite, on veut construire une bijection

$$\tau_{A,C} : \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

Soit $f : A \otimes_R B \rightarrow C$ un morphisme de S -module à droite, on pose

$$(\tau_{A,C} f) : a \mapsto (b \mapsto f(a \otimes b))$$

Commençons par montrer que $\tau_{A,C} f(a)$ est bien S -linéaire à droite : soient $s \in S$ et $b, b' \in B$, on a

$$\begin{aligned} (\tau_{A,C} f)(a)(b' + b.s) &= f(a \otimes (b' + b.s)) \\ &= f(a \otimes b + (a \otimes b').s) \\ &= f(a \otimes b) + f(a \otimes b').s \\ &= (\tau_{A,C} f(a))(b) + (\tau_{A,C} f(a))(b').s \end{aligned}$$

Donc $\tau_{A,C} f(a) \in \mathrm{Hom}_S(B, C)$, ensuite montrons que $\tau_{A,C} f$ est R -linéaire, soient $r \in R$, $a, a' \in A$ et $b \in B$:

$$\begin{aligned} \tau_{A,C} f(a + ra')(b) &= f((a + ra') \otimes b) \\ &= f(a \otimes b) + rf(a' \otimes b) \\ &= \tau_{A,C} f(a)(b) + r\tau_{A,C} f(a')(b) \end{aligned}$$

Donc $\tau_{A,C} f \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$, construisons une réciproque à $\tau_{A,C}$: on pose

$$\rho_{A,C} : g \mapsto ((a, b) \mapsto g(a)(b))$$

Comme l'application $(a, b) \mapsto g(a)(b)$ est clairement R -balancée, elle induit un morphisme $A \otimes_R B \rightarrow C$, on obtient donc une application $\sigma_{A,C}$, clairement réciproque de $\tau_{A,C}$. Montrons enfin que τ respecte les conditions de naturalité d'une adjonction :

- Soit $A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_S(B, C)$ une suite de morphismes composables, on a

$$\begin{aligned} \tau_{A',C}^{-1}(f \circ p)(a' \otimes b) &= (f \circ p)(a')(b) \\ &= f(p(a'))(b) \\ &= \tau_{A,C}^{-1}f(p(a) \otimes b) \\ &= (\tau_{A,C}^{-1}f \circ (p \otimes B))(a \otimes b) \end{aligned}$$

- Soit $A \otimes_R B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{q} C'$, on a

$$\begin{aligned}
\tau_{A,C'}(qg)(a)(b) &= q(g(a \otimes b)) \\
&= \text{Hom}_S(B, q) \circ g(a \otimes b) \\
&= \text{Hom}_S(B, Q) \circ \tau_{A,C}g(a)(b)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Cette adjonction s'applique au cas des modules induits pour prouver la réciprocity de Frobenius :

Lemme 1.10. *Soient G un groupe, $H \leq G$ un sous-groupe, R un anneau commutatif. Alors les foncteurs*

$$\uparrow_H^G: RH - \mathfrak{Mod} \rightarrow RG - \mathfrak{Mod} \quad \text{et} \quad \downarrow_H^G: RG - \mathfrak{Mod} \rightarrow RH - \mathfrak{Mod}$$

Sont adjoints l'un de l'autre.

1.2 Quelques points d'algèbre homologique

Dans [2], nous avons introduit la notion de complexes sur une catégorie abélienne, afin de motiver l'étude des catégories homotopiques et dérivée d'une catégorie abélienne. Ces différentes catégories permettent notamment l'introduction des notions d'homologies et de foncteurs dérivés, nous (ré)introduisons ces notions ici, et donnons des résultats qui porteront leurs fruits dans la section suivante, en nous appuyant principalement sur [2] et [5].

1.2.1 Compléments sur les complexes d'une catégorie abélienne

Fixons à partir d'ici deux catégories abéliennes \mathcal{A} et \mathcal{B} . Dans [2], nous avons parlé de **complexes de chaînes** : nous avons posé un complexe comme une suite de morphismes composables dans \mathcal{A} :

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_{n+1} \xrightarrow{d_n^X} X_n \xrightarrow{d_{n-1}^X} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}^X} \cdots$$

telle que $d_{n-1}^X d_n^X = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons pris la convention que les différentielles sont de degrés décroissant : $d_n^X : X_n \rightarrow X_{n-1}$. La convention duale existe également : on appellera **complexe de cochaînes** une suite de morphismes composables dans \mathcal{A} :

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}^X} X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^X} \cdots$$

telle que $d_n^X d_{n-1}^X = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Ces deux conventions illustrent surtout une différence de notation, un complexe de chaînes pouvant être facilement vu comme un complexe de cochaînes (en posant notamment $X_n := X_{-n}$ et en réindexant les différentielles).

Cette distinction reste néanmoins présente pour des raisons pratiques : il peut être désagréable et contre intuitif de modifier l'indexation sur des complexes apparaissant dans des cas concrets, on remarquera cependant qu'un complexe de cochaînes sur \mathcal{A} induit un complexe de chaînes sur \mathcal{A}^{op} , et inversement.

Étant donné un complexe de cochaînes $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on peut considérer pour $n \in \mathbb{Z}$ les objets $\text{Ker } d_n$ et $\text{Im } d_{n-1}$, dans le cas spécifique où le complexe serait une suite exacte, ces deux objets sont égaux par définition, mais dans le cas général, on a simplement une injection

$$\text{Im } d_{n-1} \hookrightarrow \text{Ker } d_n$$

On peut alors considérer le conoyau de cette injection : le quotient

$$H^n(X) := \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$$

que l'on définit comme la **n -ème cohomologie** du complexe X . De manière duale dans un complexe de chaînes, on a

$$H_n(X) := \text{Ker } d_{n+1} / \text{Im } d_n$$

la n -ème homologie telle que définie dans [2], on a les définitions suivantes

- Un complexe est donc par définition exact si et seulement si $H^n(X) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on parlera alors de complexe **acyclique**.
- Les éléments de $\text{Ker } d_n$ sont les **n -cobords**.
- Les éléments de $\text{Im } d_{n-1}$ sont les **n -cocycles**.

On a vu dans [2] que les complexes d'une catégorie pré-abélienne \mathcal{A} forment une catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, abélienne quand \mathcal{A} est abélienne, nous introduisons ici quelques notations définissant des sous catégories utiles de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

- On notera $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$ la catégories des complexes *bornés supérieurement*, i.e tels que

$$\exists n_0 \in \mathbb{Z} \mid n > n_0 \Rightarrow X_n = 0$$

- On notera $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ la catégories des complexes *bornés inférieurement*, i.e tels que

$$\exists n_0 \in \mathbb{Z} \mid n < n_0 \Rightarrow X_n = 0$$

- On notera $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ la catégories des complexes *bornés*, i.e bornés supérieurement et inférieurement.

On peut aussi considérer des définitions analogues sur la cohomologie, un complexe sera dit de *cohomologie bornée supérieurement* si

$$\exists n_0 \in \mathbb{Z} \mid n > n_0 \Rightarrow H_n(X) = 0$$

et de même pour un complexe de *cohomologie bornée* et de *cohomologie bornée inférieurement*, on notera respectivement $\mathcal{C}^{?,+}(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^{?,-}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{C}^{?,b}(\mathcal{A})$ les catégories formées de ces complexes.

En toute généralité, on considèrera les catégories de la forme $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ pour $x, y \in \{\emptyset, +, -, b\}$, ces catégories sont toutes abéliennes quand \mathcal{A} est abélienne.

Remarque. On a de manière analogue les notations pour les catégories $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$.

On a vu que si \mathcal{A} admet suffisamment de projectifs, tout objet $X \in \mathcal{A}$ admet une résolution projective :

$$\cdots \xrightarrow{d_2} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0$$

Qui donne un complexe de chaînes d'objets projectifs P :

$$\cdots \xrightarrow{d_2} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \longrightarrow 0$$

Exact en tous degrés sauf en 0 avec

$$H_0(P) = \text{Ker } P_0 \rightarrow 0 / \text{Im } d_0 \simeq P_0 / \text{Ker } \varepsilon = X$$

Notation. (Diagramme total d'un morphisme)

On a vu dans [2] que tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ au sein d'une catégorie abélienne induit un diagramme commutatif contenant son noyau, conoyau, image et coimage. Nous redonnons ce diagramme ici, afin de fixer les notations des morphismes de ce diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{Im } f & & & \\
 & \curvearrowright & & \uparrow & & \curvearrowright & \\
 \text{Ker } f & \xrightarrow{f^i} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f^j} & \text{Coker } f \\
 & \curvearrowleft & & \downarrow & & \curvearrowleft & \\
 & & & \text{Coim } f & & &
 \end{array}$$

Les morphismes $f^i, f^j, f^k, f^\ell, f^\alpha, f^\beta, f^\gamma$ sont définis par :

- $f^i : \text{Ker } f \rightarrow X$ (injection)
- $f^j : Y \rightarrow \text{Coker } f$ (surjection)
- $f^k : \text{Im } f \rightarrow Y$ (injection)
- $f^\ell : X \rightarrow \text{Coim } f$ (surjection)
- $f^\alpha : \text{Coim } f \rightarrow Y$ (injection)
- $f^\beta : X \rightarrow \text{Im } f$ (injection)
- $f^\gamma : \text{Im } f \rightarrow \text{Coim } f$ (surjection)

Les courbes \curvearrowright et \curvearrowleft sont des morphismes nuls (0).

Lemme 1.11. *Soient deux complexes acycliques*

$$P : \cdots \xrightarrow{d_4} P_4 \xrightarrow{d_3} P_3 \xrightarrow{d_2} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$$

$$X : \cdots \xrightarrow{f_4} X_4 \xrightarrow{f_3} X_3 \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0 \xrightarrow{\varepsilon'} A \longrightarrow 0$$

où P est une résolution projective de B .

Tout morphisme $\alpha : B \rightarrow A$ se relève alors en un morphisme de complexes $X \rightarrow P$.

Démonstration. On a un morphisme $\alpha\varepsilon : P_0 \rightarrow A$ et $\varepsilon' : X_0 \twoheadrightarrow A$ un épimorphisme. Comme P_0 est projectif, il existe $\alpha_0 : P_0 \rightarrow X_0$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & B \\ \alpha_0 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ X_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A \end{array}$$

Ensuite, on construit les autres α_n récursivement : on pose, pour $n > 0$, $C_n = \text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n-1}$ (égalité par acyclicité de X). Si α_i est construit pour $i \leq n$, construisons α_{n+1} : on a

$$f_{n-1}\alpha_n d_n = \alpha_{n-1}d_{n-1}d_n = 0$$

Donc $\alpha_n d_n$ se factorise sur $\text{Ker } f_{n-1} = C_n$ par

$$\begin{array}{ccc} P_{n+1} & & \\ \exists! c_n \downarrow & \searrow \alpha_n d_n & \\ C_n & \xrightarrow{f_{n-1}^i} & X_n \end{array}$$

Comme $f_n^\beta : X_{n+1} \rightarrow C_n$ est un épimorphisme et P_{n+1} est projectif, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & P_{n+1} & \\ \exists \alpha_{n+1} \swarrow & \downarrow c_n & \\ X_{n+1} & \xrightarrow{f_n^\beta} & C_n \end{array}$$

On a alors

$$f_n \alpha_{n+1} = f_n^k f_n^\beta \alpha_{n+1} = f_n^k c_n = f_{n-1}^i c_n = \alpha_n d_n$$

Donc α_{n+1} respecte la relation de commutativité voulue, d'où le résultat. \square

Lemme 1.12. Soient $X, Y \in \mathcal{A}$, P et Q des résolutions projectives respectives de X et Y . Le morphisme $0 : X \rightarrow Y$ se relève en un morphisme de complexes, homotope à 0, et tout relèvement du morphisme nul est un morphisme homotope à 0.

Démonstration. Le lemme 1.11 nous donne l'existence d'un relèvement :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_3} & P_3 & \xrightarrow{d_2} & P_2 & \xrightarrow{d_1} & P_1 & \xrightarrow{d_0} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \xrightarrow{f_3} & Q_3 & \xrightarrow{f_2} & Q_2 & \xrightarrow{f_1} & Q_1 & \xrightarrow{f_0} & Q_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Il nous reste à montrer que ce relèvement est homotope à 0 (on aura le résultat car notre relèvement est arbitraire).

On pose $C_{n+1} := \text{Ker } f_n$ et $C_0 := \text{Ker } \varepsilon'$, on a

$$\varepsilon' \alpha_0 = 0$$

on en déduit un unique morphisme $\delta_0 : P_0 \rightarrow C_0$ tel que $\alpha_0 = (\varepsilon')^i \delta_0$, comme P_0 est projectif et $f_0^\beta : Q_1 \rightarrow \text{Im } f_0 = C_0$ est un épimorphisme, on a

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ \swarrow \exists h_0 & \downarrow \delta_0 & \\ Q_1 & \xrightarrow{f_0^\beta} & C_0 \end{array}$$

On pose $\gamma_1 = \alpha_1 - h_0 d_0 : P_1 \rightarrow Q_1$, on a

$$\begin{aligned} f_0 \gamma_1 &= f_0 \alpha_1 - f_0 h_0 d_0 \\ &= \alpha_0 d_0 - f_1^k f_1^\beta h_0 d_0 \\ &= \alpha_0 d_0 - f_1^k \delta_0 d_0 \\ &= \alpha_0 d_0 - (\varepsilon')^i \delta_0 d_0 \\ &= (\alpha_0 - \alpha_0) d_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc γ_1 se factorise sur $\text{Ker } f_0 = C_1$ par un morphisme γ'_1 , on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & P_1 & \\ \swarrow \exists h_1 & \downarrow \gamma'_1 & \\ Q_2 & \xrightarrow{f_1^\beta} & C_1 \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= f_0^i \gamma'_1 \\ &= f_0^i (f_1^\beta h_1) \\ &= f_1^k f_1^\beta h_1 \\ &= f_1 h_0 \end{aligned}$$

On obtient $\alpha_1 = h_0 d_0 + f_1 h_1$.

On construit les autres h_i donnant l'homotopie récursivement : soit $i \geq 1$ et supposons les morphismes $h_j : P_j \rightarrow Q_{j+1}$ construits pour $j \leq i$, soit $\gamma_{i+1} := \alpha_{i+1} - h_i d_i$. On a $f_i \gamma_{i+1} = 0$ par hypothèse de récurrence.

Donc γ_{i+1} se factorise sur C_{i+1} par un γ'_{i+1} , on a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & P_{i+1} & \\ \exists h_{i+1} \swarrow & \downarrow \gamma'_{i+1} & \\ Q_{i+2} & \xrightarrow[f_{i+1}^\beta]{} & C_{i+1} \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} f_{i+1} h_i &= f_i^k \gamma'_{i+1} \\ &= \gamma_{i+1} \end{aligned}$$

Donc $\alpha_{i+1} = h_i d_i + f_{i+1} h_{i+1}$, on a construit un morphisme h_{i+1} donnant une homotopie entre le relèvement de 0 et le morphisme nul. \square

Proposition 1.13. Soient $X, Y \in \mathcal{A}$ deux objets isomorphes. Deux résolutions projectives respectives de X et Y sont isomorphes dans $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$.

Démonstration. Soient $\varphi : X \rightarrow Y$ un isomorphisme et deux résolutions projectives de X et Y :

$$\begin{array}{ccccccc} P : & \cdots & \xrightarrow{d_3} & P_3 & \xrightarrow{d_2} & P_2 & \xrightarrow{d_1} & P_1 & \xrightarrow{d_0} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & & & \downarrow \varphi & & \\ Q : & \cdots & \xrightarrow{f_3} & Q_3 & \xrightarrow{f_2} & Q_2 & \xrightarrow{f_1} & Q_1 & \xrightarrow{f_0} & Q_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par le lemme 1.11, φ se relève en un morphisme $\alpha : P \rightarrow Q$, de même φ^{-1} se relève en $\beta : Q \rightarrow P$, le morphisme $\beta\alpha - 1_P$ relève donc le morphisme nul $X \rightarrow X$, et de même pour $\alpha\beta - 1_Q$, donc $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ sont homotopes à l'identité, d'où le résultat. \square

Corollaire 1.14. Deux résolutions projectives d'un même objet sont isomorphes dans $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$.

On a vu dans [2] qu'un morphisme de complexes induit des application sur les cohomologies (définition 47), et que deux morphismes de complexes homotopes induisent la même application en cohomologie, on a également :

Lemme 1.15. Soient $X, Y \in \mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ deux complexes isomorphes dans $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$H^n(X) \simeq H^n(Y)$$

Démonstration. Soient $\alpha : X \rightarrow Y$ un isomorphisme d'inverse β dans $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$. Montrons que le morphisme

$$H^n(\alpha) : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$$

est un isomorphisme. On a

$$H^n(\alpha)H^n(\beta) - 1_{H^n(Y)} = H^n(\alpha\beta) - H^n(1_Y) = H^n(\alpha\beta - 1_Y)$$

Comme $\alpha\beta - 1_Y$ est homotope à 0, les deux induisent la même application sur l'homologie ([2], proposition 3.17), donc nul ici, on obtient l'autre sens de même. \square

Lemme 1.16. (*Lemme du fer à cheval*)

Étant donnés

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans \mathcal{A} , et P^X, P^Y des résolutions projectives de X et Z , on a un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2^X & \xrightarrow{d_1^X} & P_1^X & \xrightarrow{d_0^X} & P_0^X \xrightarrow{\varepsilon^X} X \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \iota & & \\ & & & & Y & & \\ & & & & \downarrow \pi & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2^Z & \xrightarrow{d_1^Z} & P_1^Z & \xrightarrow{d_0^Z} & P_0^Z \xrightarrow{\varepsilon^Z} Z \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

On peut alors construire P^Y une résolution projective de Y donnant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & P_2^X & \xrightarrow{d_1^X} & P_1^X & \xrightarrow{d_0^X} & P_0^X \xrightarrow{\varepsilon^X} X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \iota \\ \cdots & \longrightarrow & P_2^Y & \xrightarrow{d_1^Y} & P_1^Y & \xrightarrow{d_0^Y} & P_0^Y \xrightarrow{\varepsilon^Y} Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_0 & & \downarrow \pi \\ \cdots & \longrightarrow & P_2^Z & \xrightarrow{d_1^Z} & P_1^Z & \xrightarrow{d_0^Z} & P_0^Z \xrightarrow{\varepsilon^Z} Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

et telle que la suite

$$0 \longrightarrow P^X \xrightarrow{\alpha} P^Y \xrightarrow{\beta} P^Z \longrightarrow 0$$

soit exacte et scindée dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})^1$.

Démonstration. Pour $n \geq 0$, on pose $P_n^Y := P_n^X \oplus P_n^Z$, $\alpha_n := \iota_{P_n^X} : P_n^X \rightarrow P_n^Y$, et $\beta_n := \pi_{P_n^Z} : P_n^Y \rightarrow P_n^Z$.

Comme P_0^Z est projectif, on a un relèvement

$$\begin{array}{ccc} & P_0^Z & \\ \swarrow \exists \zeta & \downarrow \varepsilon^Z & \\ Y & \xrightarrow{\pi} & Z \end{array}$$

1. On remarque que l'on ne fait pas d'hypothèses du type suffisamment de projectifs sur \mathcal{A} , on construit P^Y pour ainsi dire gratuitement à partir de P^X et P^Z

On pose alors $\varepsilon^Y := \iota \varepsilon^X \zeta$, on a en degré 0 un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} P_0^X & \xrightarrow{\alpha_0} & P_0^X \oplus P_0^Z & \xrightarrow{\beta_0} & P_0^Z \\ \downarrow \varepsilon^Y & & \downarrow \varepsilon^Y & \nearrow \zeta & \downarrow \varepsilon^Z \\ X & \xrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \end{array}$$

Par le lemme du serpent ([2], théorème 3), on a $\text{Coker } \varepsilon^Y = 0$, donc ε^Y est un épimorphisme. Nous devons maintenant définir la différentielle de P^Y , on va poser

$$d_n^Y := \begin{pmatrix} d_n^X & (-1)^n e_n \\ 0 & d_n^Z \end{pmatrix} : P_{n+1}^X \oplus P_{n+1}^Z \rightarrow P_n^X \oplus P_n^Z$$

En construisant les e_n par récurrence.

- Par définition de ζ et comme P^Z est un complexe on a

$$\pi \zeta d_0^Z = \varepsilon^Z d_0^Z = 0$$

donc $\zeta d_0^Z : P_1^Z \rightarrow Y$ se factorise. De plus, P^X étant une résolution projective de X , $\varepsilon^X : P_0^X \rightarrow X$ est un épimorphisme et P_1^Z étant projectif, on a un relèvement e_0 dans

$$\begin{array}{ccc} & P_0^X & \\ \nearrow e_0 & \downarrow \varepsilon^Z & \\ P_1^Z & \longrightarrow & X \\ \searrow \zeta d_0^Z & & \downarrow \iota \\ & & Y \end{array}$$

- Si $e_{n-1} : P_n^Z \rightarrow P_{n-1}^X$ est construit, par hypothèse de récurrence on a

$$d_{n-2}^X e_{n-1} d_n^Z = \begin{cases} d_0^Z d_1^Z & \text{si } n = 1 \\ e_{n-2} d_{n-1}^Z d_n^Z & \text{si } n \geq 2 \end{cases} = 0$$

Donc $e_{n-1} d_n^Z$ se factorise sur $\text{Ker } d_{n-2}^X = \text{Im } d_{n-1}^X$. De plus, $d_{n-1}^{X,\beta} : P_n^X \rightarrow \text{Im } d_{n-1}^X$ est un épimorphisme, et P_{n+1}^Z est projectif, on peut donc choisir un relèvement

$$\begin{array}{ccc} & P_n^X & \\ \nearrow e_n & \downarrow & \\ P_{n+1}^Z & \longrightarrow & \text{Im } d_{n-1}^X \\ \searrow e_{n-1} d_n^Z & & \downarrow \\ & & P_{n-1}^Y \end{array}$$

On vérifie

$$d_n^Y d_{n+1}^Y = \begin{pmatrix} d_n^X d_{n+1}^Y & (-1)^n (e_n d_{n+1}^Z - d_n^X e_{n+1}) \\ 0 & d_n^Z d_{n+1}^Z \end{pmatrix} = 0$$

par définition des e_n . On a donc bien un complexe et une suite exacte courte scindée (scindée par construction et car les P_n^Z sont projectifs).

Il reste à voir que P^Y est une résolution projective de Y . Par la suite exacte longue d'homologie ([2], théorème 9), on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_{n-1}(P^Y) \longrightarrow H_{n-1}(P^Z) \xrightarrow{\delta} H_n(P^X) \longrightarrow H_n(P^Y) \longrightarrow \cdots$$

Comme P^X et P^Z sont des résolutions projectives, leurs homologies sont nulles, donc $H_n(P^Y) = 0$ en degré $n \geq 1$. Pour le degré 0, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow H_0(P^Y) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

toujours par suite exacte longue d'homologie, par définition de $H_0(P^Y)$ comme quotient d'un sous-objet de Y , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & H_0(P^Y) & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

et on conclut par le lemme des 3. □

1.2.2 Foncteurs dérivés

Dans [2], nous avons très rapidement donné une définition de foncteurs dérivés à l'aide des résolutions projectives, on peut également introduire les foncteurs dérivés en passant par les catégories dérivées, les résolutions de Cartan Eilenberg et la théorie des suites spectrales (comme dans [3] et [4]) mais cette construction nous emmènerai trop loin dans la théorie par rapport à notre objectif initial, nous utiliserons plutôt l'approche de [5, Partie 4] [16, chapitre 2].

Reprenons la définition de foncteur exacts : Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur covariant et $\mathcal{S} = 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ une suite exacte courte dans \mathcal{A} .

- F est dit **exact à droite** si il envoie \mathcal{S} sur une suite exacte

$$F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z) \longrightarrow 0$$

- F est dit **exact à gauche** si il envoie \mathcal{S} sur une suite exacte

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z)$$

- F est dit **exact** si il est exact à gauche et à droite.

De même si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur contravariant et $\mathcal{S} = 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ une suite exacte courte dans \mathcal{A} .

- F est dit **exact à droite** si il envoie \mathcal{S} sur une suite exacte

$$F(Z) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(X) \longrightarrow 0$$

- F est dit **exact à gauche** si il envoie \mathcal{S} sur une suite exacte

$$0 \longrightarrow F(Z) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(X)$$

- F est dit **exact** si il est exact à gauche et à droite.

On veut pouvoir mesurer le "défaut d'exactitude" d'un foncteur de cette nature, on a pour cela passer par l'homologie, on distingue plusieurs cas :

F est contravariant et exact à gauche : On suppose que \mathcal{A} possède suffisamment de projectifs, pour $X \in \mathcal{A}$ on peut considérer une résolution projective de X :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_3 & \xrightarrow{d_2} & P_2 & \xrightarrow{d_1} & P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \searrow \varepsilon \\ & & & & & & X \nearrow \end{array}$$

En appliquant F à cette résolution, on obtient un complexe de cochaînes

$$\begin{array}{ccccccc} & & F(X) & & & & \\ & \nearrow & & \searrow F(\varepsilon) & & & \\ 0 & \longrightarrow & F(P_0) & \xrightarrow{F(d_0)} & F(P_1) & \xrightarrow{F(d_1)} & F(P_2) \xrightarrow{F(d_2)} F(P_3) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Définition 1.3. Le n -ème espace de cohomologie du complexe ci dessus définit la valeur du n -ème **foncteur dérivé à droite** de F :

$$\mathcal{R}^n F(X) := H^n(F(P)) = \text{Ker } F(d_n) / \text{Im } F(d_{n-1})$$

Remarque. En particulier, on a

$$\mathcal{R}^0 F(X) = \text{Ker } F(d_0) / \text{Im } 0 \rightarrow F(P_0) = \text{Ker } F(d_0) = F(X)$$

Car F est exact à gauche.

Proposition 1.17. Notre définition de foncteur dérivé ne dépend pas de la résolution projective choisie, et induit une famille de foncteurs contravariants

$$\mathcal{R}^n F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

Démonstration. Soient P et Q deux résolutions projectives de $X \in \mathcal{A}$, par le corollaire 1.14 elles sont isomorphes dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, donc leurs images par F sont isomorphes dans $\mathcal{K}(\mathcal{B})$, donc leurs cohomologies sont isomorphes (lemme 1.15). Ensuite, $\mathcal{R}^n F = H^n(F(P))$ est contravariant car H^n est un foncteur contravariant sur $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. \square

Donc notre définition est sensée (à un isomorphisme près).

Proposition 1.18. Une suite exacte courte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ dans \mathcal{A} induit par F et ses dérivés une suite exacte longue dans \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(Z) & \longrightarrow & F(Y) & \longrightarrow & F(X) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \mathcal{R}^1 F(X) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \mathcal{R}^2 F(X) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Démonstration. On choisit P^X et P^Z des résolutions projectives respectives de X et Z . Par le lemme du fer à cheval (lemme 1.16), on a une résolution projective P^Y de Y telle que la suite

$$0 \longrightarrow P^X \longrightarrow P^Y \longrightarrow P^Z \longrightarrow 0$$

soit exacte et scindée dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Comme F est un foncteur, la suite

$$0 \longrightarrow F(P^Z) \longrightarrow F(P^Y) \longrightarrow F(P^X) \longrightarrow 0$$

est scindée dans $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, donc exacte et on obtient une suite exacte longue de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^0(F(P^Z)) \longrightarrow H^0(F(P^Y)) \longrightarrow H^0(F(P^X)) \longrightarrow H^1(F(P^Z)) \longrightarrow \dots$$

qui est exactement la suite voulue. \square

Cette proposition nous permet de montrer que notre définition satisfait notre première motivation : si le foncteur F est tout à fait exact, ses dérivés s'annulent.

Corollaire 1.19. *Le foncteur F est exact si et seulement si*

$$\forall n \geq 1, \mathcal{R}^n F = 0$$

Démonstration. La condition est suffisante par la proposition précédente. Réciproquement, si F préserve les suites exactes, il envoie une résolution projective de $X \in \mathcal{A}$ sur un complexe acyclique, donc de cohomologie nulle, d'où $\mathcal{R}^n F(X) = 0$ pour tous $X \in \mathcal{A}, n \geq 1$. \square

Nous pouvons à présent définir les foncteurs dérivés d'autres types de foncteurs, en nous ramenant à ce premier cas :

F est covariant et exact à gauche : On suppose que \mathcal{A} admet suffisamment d'injectifs, on considère le foncteur $F' : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}$ induit par F , il est contravariant et envoie une suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ sur

$$0 \longrightarrow F'(Z) \longrightarrow F'(Y) \longrightarrow F'(X)$$

il est donc contravariant exact à gauche, et \mathcal{A}^{op} admet suffisamment de projectifs, on définit alors les **dérivés à droite** de F comme les dérivés à droite de F' :

$$\mathcal{R}^n F(X) := H^n(F(I))$$

où I est une résolution injective de X dans \mathcal{A}

Proposition 1.20. *Notre définition ne dépend pas de la résolution injective choisie, induit une famille de foncteurs covariants*

$$\mathcal{R}^n F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

Une suite exacte courte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ dans \mathcal{A} induit une suite exacte longue dans \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(X) & \longrightarrow & F(Y) & \longrightarrow & F(Z) \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \mathcal{R}^1 F(X) \longrightarrow \mathcal{R}^1 F(Y) \longrightarrow \mathcal{R}^1 F(Z) \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \mathcal{R}^2 F(X) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Démonstration. Découle immédiatement de notre définition et du cas précédent. \square

F est contravariant et exact à droite : On suppose que \mathcal{A} admet suffisamment d'injectifs, on considère le foncteur $F' : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$ induit par F , il est contravariant et envoie une suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ sur

$$0 \longrightarrow F'(Z) \longrightarrow F'(Y) \longrightarrow F'(X)$$

il est donc contravariant exact à gauche, et \mathcal{A}^{op} admet suffisamment de projectifs, on définit alors les **dérivés à gauche** de F comme les dérivés à droite de F' :

$$\mathcal{L}_n F(X) := H_n(F(I))$$

où I est une résolution injective de X dans \mathcal{A}

Proposition 1.21. *Notre définition ne dépend pas de la résolution injective choisie, induit une famille de foncteurs contravariants*

$$\mathcal{L}_n F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

Une suite exacte courte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ dans \mathcal{A} induit une suite exacte longue dans \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 F(X) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \mathcal{L}_1 F(Z) \longrightarrow \mathcal{L}_1 F(Y) \longrightarrow \mathcal{L}_1 F(X) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & F(Z) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Démonstration. Découle immédiatement de notre définition et du premier cas. \square

F est covariant et exact à droite : On suppose que \mathcal{A} admet suffisamment de projectifs, on considère le foncteur $F' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$ induit par F , il est contravariant et envoie une suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ sur

$$0 \longrightarrow F'(Z) \longrightarrow F'(Y) \longrightarrow F'(X)$$

il est donc contravariant exact à gauche, et \mathcal{A} admet suffisamment de projectifs, on définit alors les **dérivés à gauche** de F comme les dérivés à droite de F' :

$$\mathcal{L}_n F(X) := H_n(F(P))$$

où P est une résolution injective de X dans \mathcal{A}

Proposition 1.22. *Notre définition ne dépend pas de la résolution projective choisie, induit une famille de foncteurs covariants*

$$\mathcal{L}_n F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

Une suite exacte courte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ dans \mathcal{A} induit une suite exacte longue dans \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 F(Z) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \mathcal{L}_1 F(X) \longrightarrow \mathcal{L}_1 F(Y) \longrightarrow \mathcal{L}_1 F(Z) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Démonstration. Découle immédiatement de notre définition et du premier cas. \square

Une fois passées ces définitions, nous allons les appliquer aux foncteurs $\mathcal{A}(?, -)$ et au produit tensoriel pour construire les foncteurs Ext et Tor , nous avons besoin pour ce faire de l'exactitude de ces foncteurs.

Lemme 1.23. *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne, alors pour $M \in \mathcal{A}$, le foncteur*

$$\mathcal{A}(M, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ab}$$

est covariant exact à gauche.

Démonstration. Soit

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans \mathcal{A} , on doit montrer que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(M, X) \xrightarrow{f \circ -} \mathcal{A}(M, Y) \xrightarrow{g \circ -} \mathcal{A}(M, Z)$$

est exacte.

Soit $\alpha \in \mathcal{A}(M, X)$, on a

$$f \circ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

car f est un monomorphisme, donc $f \circ -$ est un monomorphisme. Ensuite, $gf = (g \circ -)(f \circ -) = 0$, il reste à montrer que

$$\text{Ker}(g \circ -) \supset \text{Im}(f \circ -)$$

Soit $\beta : M \rightarrow Y$ tel que $g\beta = 0$, mais donc β se factorise par f qui donne le noyau de g , d'où le résultat. \square

Remarque. Comme $\mathcal{A}(X, M) = \mathcal{A}^{op}(M, X)$, le foncteur $\mathcal{A}(-, M)$ est contravariant exact à gauche.

Il existe une forme de réciproque à ce dernier résultat, qui dépend de la notion de plongement de Yoneda (cf [16] 1.6.11).

Lemme 1.24. *Soit $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$ une suite de morphismes composables dans \mathcal{A} . Si, pour tout $M \in \mathcal{A}$, la suite*

$$\mathcal{A}(M, X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{A}(M, Y) \xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathcal{A}(M, Z)$$

est exacte, alors la suite $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$ est exacte.

Démonstration. Pour $M = A$, on obtient $\beta\alpha = \tilde{\beta}(\tilde{\alpha}(1_A)) = 0$.

Pour $M = \text{Ker } \beta$, on a $\beta^i : \text{Ker } \beta \rightarrow Z$ donne $\tilde{\beta}(\beta^i) = \beta\beta^i = 0$, donc il existe $\sigma : M \rightarrow \mathcal{A}$ tel que $\beta^i = \tilde{\alpha}(\sigma) = \alpha\sigma$, on en déduit que $\text{Im } \alpha$ respecte la propriété universelle de $\text{Ker } \beta$. \square

Une façon commode de montrer l'exactitude à gauche ou à droite d'un foncteur et de le réaliser comme faisant partie d'une paire adjointe :

Proposition 1.25. Soient $F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : G$ une paire de foncteurs avec $F \dashv G$. Alors F est exact à droite et G est exact à gauche.

Démonstration. On note $\tau : \mathcal{B}(F(-), ?) \rightarrow \mathcal{A}(-, G(?))$ l'isomorphisme naturel donnant l'adjonction. Soit

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans \mathcal{B} . Comme τ est un isomorphisme naturel, on a, pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(F(A), B') & \longrightarrow & \mathcal{B}(F(A), B) & \longrightarrow & \mathcal{B}(F(A), B'') \\ & & \downarrow \tau_{A, B'} & & \downarrow \tau_{A, B} & & \downarrow \tau_{A, B''} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(A, G(B')) & \longrightarrow & \mathcal{A}(A, G(B)) & \longrightarrow & \mathcal{A}(A, G(B'')) \end{array}$$

La première ligne est exacte par le lemme 1.23, comme les $\tau_{X, Y}$ sont des isomorphismes, la seconde ligne est également exacte, et ce pour tout A , donc par le lemme 1.24, la suite

$$0 \longrightarrow G(B') \longrightarrow G(B) \longrightarrow G(B'')$$

est exacte, donc G est exact à gauche.

Ainsi, $F^{op} : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}^{op}$ est adjoint à droite de G , donc exact à gauche, et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est exact à droite. \square

Exemple. Cette dernière proposition, associée au lemme 1.9, nous indique que le foncteur $- \otimes_R B$ est exact à droite, on peut alors définir

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) := \mathcal{L}_n(- \otimes_R B)(A)$$

le n -ème dérivé à gauche du foncteur $- \otimes_R B$, on obtient donc les groupes Tor , qui dans ce cas sont aussi des S -module à droite.

1.3 Applications : classification des extensions et cohomologie des groupes

Nous verrons dans la suite que la définition de catégorie extriangulées fait intervenir en premier lieu la notion d'extension sur une catégorie additive, cette notion est motivée comme imitant le foncteur Ext^1 dans une catégorie abélienne ou triangulée. Ce foncteur, introduit comme un foncteur dérivé, permet de classer les classes d'équivalences d'extension d'une suite exacte courte dans un sens à préciser.

1.3.1 Catégories exactes, extensions et somme de Baer

Dans un premier temps, nous allons nous placer dans le cadre d'une catégorie exacte \mathcal{E} (telle que définie dans [1] ou [2]), en effet les résultats que nous allons utiliser dans le cas abélien restent vrais dans ce contexte sans perdre de généralité. Tous les résultats que nous donnons s'adaptent naturellement au cas abélien, en considérant les conflations comme les suites exactes courtes.

Étant donnés deux objets $X, Z \in \mathcal{E}$, on appellera *extension* de Z par X un triplet (Y, ι, π) donnant une conflation dans \mathcal{E}

$$X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Z$$

Pour commencer, il est clair que tout objet isomorphe à Y induit lui aussi une extension, qui ne nous apporte pas d'information supplémentaire par rapport à la première, nous devons définir une certaine relation d'équivalence sur les extensions :

Définition 1.4. Soient $X, Z \in \mathcal{E}$ et deux conflations

$$X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Z \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{\iota'} Y' \xrightarrow{\pi'} Z$$

On dit que ces conflations sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme $\varphi : Y \rightarrow Y'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ \parallel & & \downarrow \varphi & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota'} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z \end{array}$$

Remarque. Le fait que $\varphi : Y \rightarrow Y'$ soit un isomorphisme nous permet de montrer que nous avons bien défini une relation d'équivalence.

Nous allons munir les classes d'équivalence d'extensions d'une loi interne qui, dans le cas où les classes d'équivalences forment un ensemble, munira ce dernier d'une structure de groupe abélien : la *somme de Baer*.

Dans un premier temps, nous donnons quelques résultats sur les catégories exactes qui nous serviront dans cette construction :

Proposition 1.26. *Soit dans \mathcal{E} un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ X' & \xrightarrow{\iota'} & Y' \end{array}$$

Dans lequel les morphismes horizontaux sont des inflations, les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) *Le carré est un pushout.*
- (ii) *La suite*

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\iota \\ x \end{pmatrix}} Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & \iota' \end{pmatrix}} Y'$$

est une conflation.

- (iii) *Le carré est bicartésien (i.e à la fois un pushout et un pullback).*
- (iv) *Le carré s'inscrit dans un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ x \downarrow & & y \downarrow & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{\iota'} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z \end{array}$$

dont les lignes sont des conflations.

Démonstration. Les équivalences (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) sont déjà montrées dans [2], proposition 2.22.

(i) \Rightarrow (iv) Soit π le conoyau de ι , on a

$$\pi \iota = 0 = 0 \circ x$$

donc par propriété universelle du pushout, il existe un unique morphisme $\pi' : Y' \rightarrow Z$ tel que

$$\pi' \iota' = 0 \quad \text{et} \quad \pi' y = \pi$$

On remarque que $\pi' y = \pi$ entraîne que π' est un épimorphisme, montrons que π' réalise $\text{Coker } \iota'$: soit $g : Y' \rightarrow A$ tel que $g \iota' = 0$, on a

$$g y \iota = g \iota' x = 0$$

Donc $g y = h \pi$ pour un unique $h : Z \rightarrow A$, par propriété universelle de $\pi = \text{Coker } \iota$. On affirme que $h \pi' = g$, ceci découle de la propriété universelle du pushout, car

$$h \pi' y = h \pi = g y \quad \text{et} \quad h \pi' \iota' = 0 = g \iota'$$

Comme π' est un épimorphisme, la factorisation h de g est unique d'où le résultat.

(iv) \Rightarrow (ii) On fait le pullback de

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow \pi & \\ Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z \end{array}$$

pour obtenir le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \xlongequal{\quad} & X \\
 & & \downarrow j & & \downarrow \iota \\
 X' & \xrightarrow{j'} & M & \xrightarrow{q'} & Y \\
 \parallel & & \downarrow q & & \downarrow \pi \\
 X' & \xrightarrow{\iota'} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z
 \end{array}$$

(les colonnes et les lignes sont exactes par le dual de l'implication précédente). Comme on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xlongequal{\quad} & Y \\
 \downarrow y & & \downarrow \pi \\
 Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z
 \end{array}$$

il existe un unique morphisme $k : Y \rightarrow M$ tel que $q'k = 1_Y$ et $qk = y$. Comme $q'(1_M - kq') = 0$, il existe un unique $\ell : M \rightarrow X'$ tel que

$$j'\ell = 1_M - kq'$$

Notons que $\ell k = 0$ car $j'\ell k = (1_M - kq')k = 0$ et j' est un monomorphisme, de même, on a

$$j'\ell j' = (1_M - kq')j' = j'$$

donc $\ell j' = 1_X$ toujours car j' est un monomorphisme. Ensuite :

$$\begin{aligned}
 \iota'\ell j &= (qj')\ell j \\
 &= q(1_M - kq')j \\
 &= qj - qk\iota \\
 &= -y\iota \\
 &= -\iota'x
 \end{aligned}$$

donc $\ell j = -f$ car ι' est un monomorphisme. On a enfin un isomorphisme

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{(-\iota \quad x)} & Y \oplus X' & \xrightarrow{(x' \quad \iota')} & Y' \\
 \downarrow -1_X & & \downarrow (k \quad j') & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{q} & Y'
 \end{array}$$

où $(k \quad j')$ admet $\begin{pmatrix} q' \\ \ell \end{pmatrix}$ comme inverse. □

En aura également besoin du résultat dual :

Proposition 1.27. *Soit dans \mathcal{E} un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ y \downarrow & & \downarrow z \\ Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z' \end{array}$$

Dans lequel les morphismes horizontaux sont des deflations, les assertions suivantes s'équivalent :

- (i) *Le carré est un pullback.*
- (ii) *La suite*

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\iota \\ x \end{pmatrix}} Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & \iota' \end{pmatrix}} Y'$$

est une conflation.

- (iii) *Le carré est bicartésien (i.e à la fois un pushout et un pullback).*
- (iv) *Le carré s'inscrit dans un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ \parallel & & y \downarrow & & \downarrow z \\ X & \xrightarrow{\iota'} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z' \end{array}$$

dont les lignes sont des conflations.

Corollaire 1.28. *Soit $X, Z \in \mathcal{E}$ et (Y, ι, π) une extension de Z par X .*

- (a) *Tout morphisme $z : Z \rightarrow Z'$ dans \mathcal{E} induit une extension de Z' par X par un diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ \parallel & & y \downarrow & & \downarrow z \\ X & \xrightarrow{\iota'} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z' \end{array}$$

On note $z^(Y', \iota, \pi)$ cette extension.*

- (b) *Tout morphisme $x : X \rightarrow X'$ dans \mathcal{E} induit une extension de Z par X' par un diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ x \downarrow & & y \downarrow & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{\iota'} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z \end{array}$$

On note $x_(Y, \iota, \pi)$ cette extension.*

Démonstration. Les deux points découlent immédiatement respectivement des propositions 1.26 et 1.27, en formant les pullbacks/pushout respectifs des morphismes donnés. \square

Corollaire 1.29. (*Troisième théorème d'isomorphisme de Noether* $Z/Y \simeq (Z/X)/(Y/X)$)
 Considérons dans \mathcal{E} un diagramme de conflations

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{\iota} & Y & \twoheadrightarrow^{\pi} & Z \\ \parallel & & \downarrow u & & \\ X & \xhookrightarrow{\iota'} & Y' & \twoheadrightarrow^{\pi'} & Z' \\ & & \downarrow v & & \\ & & Y'' & \equiv & Y'' \end{array}$$

Il existe alors une conflation $Z \xhookrightarrow{u'} Z' \twoheadrightarrow^{v'} Z''$ qui complète ce diagramme en un diagramme commutatif, elle est entièrement déterminée par cette condition, et le carré

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z' \end{array}$$

est bicartésien.

Démonstration. On a $\pi' u = \pi' \iota' = 0$ donc il existe un unique $u' : Z \rightarrow Z'$ tel que $u' \pi = \pi' u$. On a $v \iota' = v u = 0$ donc il existe un unique $v' : Z' \rightarrow Y''$ tel que $v' \pi' = v$. Par la proposition 1.27 le carré

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z' \end{array}$$

est bicartésien, donc u' est une inflation. La proposition 1.26 donne un autre morphisme $Z' \rightarrow Y''$ faisant commuter le diagramme, il est par unicité égal à v' , ce qui donne le diagramme voulu, unique par construction. \square

Remarque. L'analogie entre ce résultat et le troisième théorème d'isomorphisme dans les groupes apparaît avec la notation $Z = Y/X$ dans les suites exactes courtes (adaptée du cas des modules)

Proposition 1.30. *Tout morphisme de conflations*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z \\ X' & \xhookrightarrow{\iota'} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z' \end{array}$$

induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ \downarrow x & BC & \downarrow y' & & \parallel \\ X' & \xhookrightarrow{\iota'} & M & \xrightarrow{g} & Z \\ \parallel & f & \downarrow y'' & BC & \downarrow z \\ X' & \xhookrightarrow{\iota'} & Y' & \xrightarrow{\pi'} & Z' \end{array}$$

où les carrés comportant un BC sont bicartésiens, en particulier on a un isomorphisme canonique entre $X' \sqcup_X Y$ et $Y' \times_{Z'} Z$.

Démonstration. On considère le pushout du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y \\ x \downarrow & & \\ X' & & \end{array}$$

qui donne, par la proposition 1.26 un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ \downarrow x & BC & \downarrow y' & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Comme le carré

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ X' & \xrightarrow{\iota'} & Y' \end{array}$$

est commutatif, on a un unique morphisme $y'' : M \rightarrow Y'$ tel que $y''y' = y$ et $y''f = \iota'$. On conclut car le dernier carré est commutatif (z est entièrement déterminé par f et y'', y' par des propriété universelles). \square

Notation. Pour $X \in \mathcal{E}$, on notera $\Delta_X := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : X \rightarrow X \oplus X$ et $\nabla_X := (1 \ 1) : X \oplus X \rightarrow X$ (ces notations tiennent encore dans une catégorie additive quelconque).

Proposition 1.31. (*Somme de Baer*)

Soient $X, Z \in \mathcal{E}$, (Y, ι, π) et (Y', ι', π') des extensions de Z par X . On a alors une extension $(Y \oplus Y', \iota \oplus \iota', \pi \oplus \pi')$ de $Z \oplus Z$ par $X \oplus X$.

La **somme de Baer** des extensions (Y, ι, π) et (Y', ι', π') est définie par

$$(\nabla_X)_*(\Delta_Z)^*(Y \oplus Y', \iota \oplus \iota', \pi \oplus \pi')$$

Démonstration. Conséquence du corollaire 1.28, on vérifie immédiatement que la classe d'équivalence de la somme ne dépend que de la classe d'équivalence des extensions de départ. \square

Plus explicitement, la somme de Baer est définie par la première ligne du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & S & \xrightarrow{g} & Z \\ \uparrow \nabla_X & BC & \uparrow y' & & \parallel \\ X \oplus X & \xrightarrow{\tilde{f}} & M & \xrightarrow{\tilde{g}} & Z \\ \parallel & & \downarrow y'' & BC & \downarrow \Delta_Z \\ X \oplus X & \xrightarrow{\iota \oplus \iota'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{\pi \oplus \pi'} & Z \oplus Z \end{array}$$

Donné par le corollaire 1.28

1.3.2 Groupe Ext^1 et classification

En revenant au cas du foncteur $\mathcal{A}(-, M)$ sur une catégorie abélienne possédant suffisamment de projectifs, on peut définir ses dérivées à droite :

Définition 1.5. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne admettant suffisamment de projectifs et $M \in \mathcal{A}$. On définit le n -ème **foncteur** Ext associé à N comme le n -ème dérivé à droite du foncteur $\mathcal{A}(-, N)$: on note

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, N) := \mathcal{R}^n(\mathcal{A}(-, N))(M)$$

On a donc un foncteur $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(-, N) : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ab}$

Remarque. On aurait également pu considérer les dérivés du foncteur $\mathcal{A}(N, -)$ quand \mathcal{A} admet suffisamment d'injectifs, on peut montrer (cf [16], théorème 2.7.6) que ces deux définitions des groupes Ext coïncident. On peut donc voir les Ext comme des bifoncteurs

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ab}$$

de surcroît additifs, dans la suite, on utilisera librement l'une ou l'autre de ces définitions, on supposera donc que \mathcal{A} admet suffisamment de projectifs ou d'injectifs selon les cas.

Dans le cas où \mathcal{A} est une catégorie de modules, elle admet suffisamment de projectifs, la définition du Ext comme foncteur dérivé permet de retrouver un résultat connu d'algèbre homologique :

Lemme 1.32. *Une suite exacte courte de module*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

induit pour $X \in \mathcal{A}$ une suite exacte longue de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(P, X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(N, X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(M, X) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(P, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, X) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(P, X) \longrightarrow \dots \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(M, X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(N, X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(P, X) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, X) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(P, X) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(M, X) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Démonstration. Application directe des définitions et des propositions 1.18 et 1.16 □

Remarque. Bien-sûr ce résultat se transpose identiquement au cas d'une catégorie abélienne ou les Ext sont définis.

Nous allons maintenant montrer que, pour $X, Z \in \mathcal{A}$, le groupe $\text{Ext}^1(Z, X)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalences d'extensions de Z par X (qui est dans ce cas effectivement un ensemble), on a même un isomorphisme en munissant ce dernier ensemble de la somme de Baer :

Lemme 1.33. *Soient $X, Z \in \mathcal{A}$, si $\text{Ext}^1(Z, X) = 0$, alors toute suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

est scindée.

Démonstration. Soient une telle suite exacte courte, on a une suite exacte de groupes abéliens

$$\mathcal{A}(Y, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{A}(X, X) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}^1(Z, X)$$

Donc 1_X , qui est par hypothèse dans le noyau de δ , induit un morphisme $\sigma : X \rightarrow Y$, qui est une rétraction de $f : X \rightarrow Y$ d'où le résultat par le lemme de scindage ([2], lemme 2.6). \square

On a utilisé dans la démonstration précédente qu'une suite exacte courte

$$\xi : 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

induit un morphisme $\delta_\xi : \mathcal{A}(X, X) \rightarrow \text{Ext}^1(Z, X)$.

Théorème 1.1. *La correspondance $\Theta : \xi \mapsto \delta_\xi(1_X)$ donne une application de l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de Z par X dans $\text{Ext}^1(Z, X)$, qui est de surcroît un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. On considère que \mathcal{A} admet suffisamment de projectifs, on peut considérer une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} P \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

où P est projectifs. En appliquant $\mathcal{A}(-, Z)$, on obtient une suite exacte

$$\mathcal{A}(P, X) \xrightarrow{\tilde{j}} \mathcal{A}(M, X) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}^1(Z, X) \longrightarrow \text{Ext}^1(P, X) = 0$$

car P est projectif (caractérisations des objets projectifs : tous les épimorphismes de codomaine P sont scindés).

Donc le morphisme δ est surjectif. Pour $x \in \text{Ext}^1(Z, X)$, on a un morphisme $\beta : M \rightarrow X$ tel que $\delta(\beta) = x$, on peut faire le pushout du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{j} & P \\ \beta \downarrow & & \\ & & X \end{array}$$

et on obtient, par la proposition 1.26 un diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \beta \downarrow & & \downarrow \sigma & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & A & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par naturalité de δ , on a que $\Theta((A, i,)) = x$, donc Θ est surjectif.

En fait cette construction donne une application ψ de $\text{Ext}^1(Z, X)$ dans l'ensemble des classes d'équivalences d'extensions, en effet si $\beta' \in \mathcal{A}(M, X)$ est un autre relèvement de x par δ , on a $f \in \mathcal{A}(P, X)$ tel que $\beta' = \beta + fj$. Si X' est le pushout

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{j} & P \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X' \end{array}$$

alors le carré

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{j} & P \\ \beta + fj \downarrow & & \downarrow \sigma + if \\ X & \xrightarrow{i} & A \end{array}$$

est aussi un pushout, d'où un isomorphisme qui donne une équivalence.

Réciproquement si (Y, f, g) est une extension de Z par X on a, comme P est projectif, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \gamma \downarrow & & \downarrow \tau & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

mais le carré est aussi un pushout (par proposition 1.26), donc $\psi(\Theta((Y, f, g))) = (Y, f, g)$ et Θ est injective.

On montre à présent que Θ est un morphisme de groupes, on considère (Y, f, g) et (Y', f', g') deux extensions et (S, ι, π) leur somme de Baer, on doit montrer que $\Theta(S) = \Theta(Y) + \Theta(Y')$. La construction précédente donne deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \gamma \downarrow & & \downarrow \tau & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \gamma' \downarrow & & \downarrow \tau' & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & Z \\ (\tau, \tau') \downarrow & & \downarrow \Delta_Z \\ Y \oplus Y' & \longrightarrow & Z \oplus Z \end{array}$$

donc un unique morphisme $P \rightarrow Z \times_{Z \oplus Z} Y \oplus Y' =: M$ (cf construction de la somme de Baer), on compose ce morphisme avec $y' : M \rightarrow S$ pour obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \gamma + \gamma' \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

Donc $\Theta(S) = \delta(\gamma + \gamma') = \delta(\gamma) + \delta(\gamma') = \Theta(Y) + \Theta(Y')$ d'où le résultat. \square

1.3.3 Cohomologie des groupes

Dans [19] et [17], nous avons introduit "naïvement" les groupes H^1 et H^2 de cohomologie des groupes, nous allons donner une définition de ces objets issue de [5], plus homologique, avant de faire le lien avec la définition plus concrète.

On se donne R un anneau, G un groupe, RG l'anneau de groupe associé. Un élément général de RG est de la forme

$$\sum_{g \in G} r_g \cdot g$$

en identifiant G à un sous-groupe de (RG, \times) . On définit alors le **morphisme d'augmentation** de RG par

$$\begin{aligned} \varepsilon : \quad RG &\longrightarrow R \\ \sum_{g \in G} r_g \cdot g &\longmapsto \sum_{g \in G} r_g \end{aligned}$$

Son noyau $\text{Ker } \varepsilon =: I(RG)$ est appelé **idéal d'augmentation** de RG . On remarque que

$$\begin{aligned} x = \sum_{g \in G} r_g \cdot g \in I(RG) &\Leftrightarrow x = x - \left(\sum_{g \in G} r_g \right) \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = \sum_{g \in G} r_g \cdot (g - 1) \\ &\Leftrightarrow x \in (\{g - 1 \mid g \in G\}) \end{aligned}$$

Définition 1.6. Soient G un groupe et M un $\mathbb{Z}G$ -module. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le n -ème **espace de cohomologie** du groupe G à coefficients dans M par

$$H^n(G, M) := \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, M)$$

où \mathbb{Z} désigne le $\mathbb{Z}G$ -module trivial.

Comme annoncé, nous allons maintenant décrire plus explicitement ces groupes pour $n = 0, 1, 2$.

Commençons par noter que dans [19], nous avons donné une définition dépendant d'un morphisme $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(M)$ et $M \in \mathfrak{Ab}$. Un tel morphisme donne en fait une action de G sur M qui en fait un $\mathbb{Z}G$ -module et on retrouve le cadre de la définition précédente. Dans le cas d'un groupe G agissant sur un groupe abélien M par automorphisme, on notera $H_\alpha^*(G, M)$ les espaces de cohomologie.

Cas $n = 0$: On rappelle que pour $M \in \mathbb{Z}G - \mathfrak{Mod}$, on définit

$$M^G := \{m \in M \mid gm = m \ \forall g \in G\}$$

l'ensemble des points fixes de M sous l'action de G . On a alors

$$H^0(G, M) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(\mathbb{Z}, M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$$

et un morphisme $f : \mathbb{Z} \rightarrow M$ est déterminé par le choix de $f(1)$, qui doit être un élément $m \in M$ invariant sous l'action de G car \mathbb{Z} est le $\mathbb{Z}G$ module trivial. On montre facilement que la bijection que nous avons construit est un isomorphisme d'où

$$H^0(G, M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G$$

Cas $n = 1$: Nous avons déjà quelques calculs à effectuer : on voudrait une résolution projective de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Z}G - \mathfrak{Mod}$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(comme $\mathbb{Z}G$ est libre : il a une base formée par G , il est projectif : tout épimorphisme admet une section qu'il suffit de fixer sur une base).

On définit les **dérivations** de G dans M par

$$\Delta(G, M) := \{f \in \mathfrak{Ens}(G, M) \mid \forall g, h \in G, f(gh) = gf(h) + f(g)\}$$

et les **dérivations intérieures** par

$$\Delta_0(G, M) := \{f \in \mathfrak{Ens}(G, M) \mid \exists m \in M \mid \forall g \in G, f(g) = gm - m\}$$

On remarque que $\Delta_0(G, M) \subset \Delta(G, M)$ et ce sont des groupes abéliens pour l'addition naturelle des applications.

Proposition 1.34. *Sous ces notations et hypothèses, on a un isomorphisme*

$$H^1(G, M) \simeq \Delta(G, M) / \Delta_0(G, M)$$

Démonstration. Soit

$$\dots \xrightarrow{d_2} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

une résolution projective de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Z}G - \mathfrak{Mod}$. On a

$$\text{Coker } d_1 = P_1 / \text{Im } d_1 = P_1 / \text{Ker } d_0 = \text{Im } d_0 = \text{Ker } \varepsilon = I(\mathbb{Z}G)$$

et si $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, M)$ est tel que $\varphi d_1 = 0$, ie $\varphi \in \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_1, M))$, par propriété universelle de $I(\mathbb{Z}G) = \text{Coker}(d_1)$, il existe un unique $d_\varphi : I(\mathbb{Z}G) \rightarrow M$ tel que $d_\varphi \circ d_1^j = \varphi$. Réciproquement pour $\delta : I(\mathbb{Z}G) \rightarrow M$, $\varphi_\delta := \delta d_1^j : P_1 \rightarrow M$ vérifie $\varphi_\delta \circ d_1 = 0$ d'où un isomorphisme

$$\text{Ker } \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_1, M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)$$

Ensuite, on a une injection triviale

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(I(\mathbb{Z}G), M)$$

Réciproquement, pour que $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(I(\mathbb{Z}G), M)$ soit aussi dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)$, il faut et il suffit que pour $x \in I(\mathbb{Z}G)$ et $g \in G$, on ait

$$\varphi(gx) = g\varphi(x)$$

ce qui est équivalent à la condition

$$\varphi(g(h-1)) = g\varphi(h-1)$$

pour tous $g, h \in G$, car $I(\mathbb{Z}G)$ est engendré par les éléments de la forme $h - 1$ pour $h \in G$.
Donc

$$\begin{aligned} \text{Ker Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_1, M) &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M) \\ &= \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(I(\mathbb{Z}G), M) \mid \varphi(g(h-1)) = g\varphi(h-1) \forall g, h \in G\} \\ &= \{f \in \mathfrak{Ens}(G, M) \mid gf(h) = f(gh) - f(g)\} \\ &= \Delta(G, M) \end{aligned}$$

Ensuite, en notant $\iota : I(\mathbb{Z}G) \rightarrow \mathbb{Z}G$ l'injection canonique, on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \text{Im Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_0, M) & \longrightarrow & \text{Im Hom}_{\mathbb{Z}G}(\iota, M) \\ \varphi d_0 & \longmapsto & \varphi \iota \end{array}$$

d'où

$$\text{Im Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_0, M) = \{d \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M) \mid \exists \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \mid f = \varphi \iota\}$$

et on a

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \simeq M$$

par $\varphi \mapsto \varphi(1)$. Ainsi pour $f \in \text{Im Hom}_{\mathbb{Z}G}(\iota, M)$, on trouve

$$f(g-1) = \varphi \iota(g-1) = \varphi(g-1) = (g-1)\varphi(1) = g\varphi(1) - \varphi(1)$$

par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \text{Im Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_0, M) &= \{d \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M) \mid f = \varphi \iota\} \\ &= \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M) \mid \exists m \in M \mid f(g-1) = gm - m \forall g \in G\} \\ &= \Delta_0(G, M) \end{aligned}$$

d'où le résultat par définition du $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(\mathbb{Z}, M)$. □

Cas $n = 2$: Ce degré va nous demander davantage de calculs, on doit trouver explicitement une résolution projective de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Z}G - \mathfrak{Mod}$, qui fonctionnerait pour tout groupe G .
En utilisant que

$$0 \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte et $\mathbb{Z}G$ est libre donc projectif, on cherche P projectif et un épimorphisme $P \twoheadrightarrow I(\mathbb{Z}G)$. On pose

$$P := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$$

où l'action de $\mathbb{Z}G$ porte sur le terme de gauche. On a vu dans [17] que

$$P \simeq \mathbb{Z}(G \times G)$$

il s'agit donc d'un module libre et projectif.

Pour faciliter les notations, on pose

$$\mathbb{Z}G^{\otimes n} := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}(G \times \cdots \times G)$$

avec action de $\mathbb{Z}G$ sur le terme de gauche, on dit que $\mathbb{Z}G^{\otimes n}$ est la n -ème *puissance tensorielle* de $\mathbb{Z}G$. On pose

$$\begin{aligned} \delta : \quad \mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}G \\ \left(\sum_{g \in G} r_g g, \sum_{g' \in G} s_{g'} g' \right) &\longmapsto \sum_{g \in G} \sum_{g' \in G} r_g s_{g'} g(g' - 1) \end{aligned}$$

il s'agit clairement d'une application \mathbb{Z} -balancée, et qui envoie (g_1, g_2) sur $g_1(g_2 - 1)$, on obtient $d_0 : P \rightarrow \mathbb{Z}G$ bien définie et $\text{Im } d_0 = I(\mathbb{Z}G)$ car ce dernier est engendré par les $g - 1$ pour $g \in G$.

On pose ensuite

$$Q := \mathbb{Z}G^{\otimes 3} = \mathbb{Z}(G \times G \times G)$$

lui même projectif, on peut définir comme précédemment

$$\begin{aligned} d_1 : \quad \mathbb{Z}(G^3) &\longrightarrow \mathbb{Z}(G \times G) \\ (g, h, k) &\longmapsto gh \otimes k - g \otimes hk + g \otimes h \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_2 : \quad \mathbb{Z}(G^4) &\longrightarrow \mathbb{Z}(G^3) \\ (g_1, g_2, g_3, g_4) &\longmapsto g_1 g_2 \otimes g_3 \otimes g_4 - g_1 \otimes g_2 g_3 \otimes g_4 + g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 g_4 - g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 \end{aligned}$$

on vérifie $d_1 d_2 = 0$ et $d_0 d_1 = 0$ sur la base.

On définit trois applications \mathbb{Z} -linéaires par

$$\begin{aligned} h_0 : \quad \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}G^{\otimes 2} & h_1 : \quad \mathbb{Z}G^{\otimes 2} &\longrightarrow \mathbb{Z}G^{\otimes 3} & h_2 : \quad \mathbb{Z}G^{\otimes 3} &\longrightarrow \mathbb{Z}G^{\otimes 4} \\ g &\longmapsto 1 \otimes g & g \otimes h &\longmapsto 1 \otimes g \otimes h & g \otimes h \otimes k &\longmapsto 1 \otimes g \otimes h \otimes k \end{aligned}$$

(nous avons seulement donné leurs définitions sur des bases, on les étends ensuite par linéarité). On observe que

$$\begin{cases} d_1 h_1 + h_0 d_0 = 1_{\mathbb{Z}G^{\otimes 2}} \\ d_2 h_2 + h_1 d_1 = 1_{\mathbb{Z}G^{\otimes 3}} \end{cases}$$

Ensuite, pour $u \in \text{Ker } d_0$, on a

$$d_1 h_1(u) = -h_0 d_0(u) + u = u \Rightarrow u \in \text{Im } d_1$$

et de même, $v \in \text{Ker } d_1 \Rightarrow v \in \text{Im } d_2$, ainsi la suite

$$\mathbb{Z}G^{\otimes 4} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}G^{\otimes 3} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}G^{\otimes 2} \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est exacte et donne le début d'une résolution projective de \mathbb{Z} .

On remarque que les applications $\mathbb{Z}G$ -linéaires sont déterminées par leurs actions sur les éléments de la forme $1 \otimes g \otimes \dots$: il suffit de multiplier par g_0 , la multiplication portant sur les membres de gauche.

Par définition du Ext^2 , on a

$$H^2(G, M) = \text{Ker Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_1, M) / \text{Im Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_1, M)$$

Donc l'ensemble des 2-cocycles est donné par les morphismes $\varphi : \mathbb{Z}G^{\otimes 3} \rightarrow M$ tels que $\varphi d_2 = 0$. Comme φ est $\mathbb{Z}G$ -linéaire, il suffit de tester sur $1 \otimes g \otimes h \otimes k$:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi d_2(1 \otimes g \otimes h \otimes k) \\ &= \varphi(g \otimes h \otimes k) - \varphi(1 \otimes gh \otimes k) + \varphi(1 \otimes g \otimes hk) - \varphi(1 \otimes g \otimes h) \\ &= g\varphi(1 \otimes h \otimes k) - \varphi(1 \otimes gh \otimes k) + \varphi(1 \otimes g \otimes hk) - \varphi(1 \otimes g \otimes h) \end{aligned}$$

En posant $f(g, h) := \varphi(1 \otimes g \otimes h)$ on obtient $f : G \otimes G \rightarrow M$, qui représente un 2-cocycle si et seulement si

$$gf(h, k) - f(gh, k) + f(g, hk) - f(g, h) = 0 \Leftrightarrow gf(h, k) + f(g, hk) = f(gh, k) + f(g, h)$$

Ensuite, les 2-cobords sont donnés par les morphismes $\varphi \mathbb{Z}G^{\otimes 3} \rightarrow M$ tels qu'il existe $\psi : \mathbb{Z}G^{\otimes 2} \rightarrow M$ avec $\varphi = \psi d_1$, on a

$$\begin{aligned} \psi d_1(1 \otimes g \otimes h) &= \psi(g \otimes h) - \psi(1 \otimes gh) - \psi(1 \otimes g) \\ &= g\psi(1 \otimes h) - \psi(1 \otimes gh) - \psi(1 \otimes g) \end{aligned}$$

avec la même astuce, on obtient que les 2-cobords sont donnés par les applications $f : G \rightarrow M$ telles que

$$\forall g, h \in G, gf(h) - f(g) = f(gh)$$

On retrouve bien les définitions de 2-cocycles et 2-cobords données dans [19].

On pourrait continuer avec des méthodes similaires pour calculer $H^3(G, M)$ etc... mais ceci devient rapidement lourd en calcul et peu instructif.

Pour terminer cette section, nous rappelons un résultat issu de [19]

Proposition 1.35. *Soient H un groupe et N un $\mathbb{Z}G$ -module, on a une action de H sur N par automorphisme : $\alpha : H \rightarrow \text{Aut}(N)$, et avec ces notations :*

- a) $H_\alpha^2(H, N)$ paramétrise les groupes N avec $N \trianglelefteq G$ et $H \simeq G/N$ et tels que l'action de H sur N par conjugaison d'une préimage soit égale à l'action par α .
- b) La correspondance se fait par choix de représentant des classes à gauche et $g(h_1)g(h_2) = f(h_1, h_2)g(h_1h_2)$ et ainsi $f \in Z_\alpha^2(H, N)$.
- c) Le choix de deux systèmes de représentants g et g' correspond à deux choix de représentants de deux cocycles de la même classe d'éléments de $H_\alpha^2(H, N)$.
- d) La classe triviale de $H_\alpha^2(H, N)$ correspond au produit semi-direct $N \rtimes_\alpha H$.

Deuxième partie

Compléments sur les catégories triangulées

Dans [2], nous avons abordé le vaste sujet des catégories triangulées, notamment pour étudier les catégories homotopique et dérivées associées à une catégorie abélienne. Nous sommes néanmoins restés assez superficiels sur les aspects théoriques et sur la (les) définitions de ce concept. Nous donnons donc ici quelques compléments à ce sujet, afin de pouvoir mettre en évidence les similitudes entre les structures des sous-catégories stables par extension des catégories abéliennes et triangulées.

2.1 Catégories pré-triangulées

Un point non abordé dans [2], est la disjonction entre les trois premiers axiomes des catégories triangulées et le quatrième : à proprement parler, TR3 est tout simplement remplacé par TR4. Ce remplacement est logiquement valide car TR3 est en effet conséquence de TR4 (et ce assez directement comme nous allons le voir), mais ce remplacement nous oblige à passer outre le formalisme des catégories pré-triangulées, et nous empêche de donner une justification à l'introduction de l'axiome TR4, sans cela assez incongrue en première lecture.

Nous reprenons l'exposition très instructive de [14].

2.1.1 Définition et conséquences immédiates

On fixe \mathcal{T} une catégorie additive et une auto-équivalence $[1] : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, on appellera **triangle** dans \mathcal{T} une suite de morphismes composables de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

On notera parfois (f, g, h) un tel triangle si il n'y a pas d'ambiguïté sur les domaines et codomaines des morphismes (que l'on notera par défaut X, Y et Z).

Pour deux triangles

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \quad \text{et} \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1]$$

on appellera **morphisme de triangles** la donnée de trois morphismes

- $x : X \rightarrow X'$
- $y : Y \rightarrow Y'$
- $z : Z \rightarrow Z'$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \end{array}$$

Définition 2.1. On dit que le triangle (f, g, h) est un **pré-triangle** si pour tout $U \in \mathcal{T}$, le foncteur $\mathcal{T}(U, -)$ induit une suite exacte de groupes abéliens

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{T}(U, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{T}(U, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{T}(U, Z) \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{T}(U, X[1]) \xrightarrow{\widetilde{f[1]}} \mathcal{T}(U, Y[1]) \longrightarrow \cdots$$

en notant $\tilde{f} := \mathcal{T}(U, f)$.

Lemme 2.1. Si (f, g, h) est un triangle dans \mathcal{T} , il suffit, pour montrer que (f, g, h) est un pré-triangle, de montrer que la suite

$$\mathcal{T}(U, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{T}(U, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{T}(U, Z) \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{T}(U, X[1]) \xrightarrow{\widetilde{f[1]}} \mathcal{T}(U, Y[1])$$

est exacte.

Démonstration. Par définition, un couple de morphismes consécutifs de la suite donnée par $\mathcal{T}(U, -)$ est d'une des formes suivantes :

- $\widetilde{f[n]}, \widetilde{g[n]}$
- $\widetilde{h[n]}, \widetilde{g[n]}$
- $\widetilde{f[n+1]}, \widetilde{h[n]}$

pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Soit $A : U \rightarrow Y[n]$, on a

$$\begin{aligned} a \in \text{Ker } \widetilde{g[n]} &\Leftrightarrow g[n]a = 0 \\ &\Leftrightarrow (g \circ a)[n] = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists b : U[-n] \rightarrow X \mid fb = a[-n] \\ &\Leftrightarrow \exists b : U[-n] \rightarrow X \mid f[n]b[n] = a \\ &\Leftrightarrow a \in \text{Im } \widetilde{f[n]} \end{aligned}$$

On raisonne de même pour les autres cas. □

Lemme 2.2. Soient deux triangles (f, g, h) et (f', g', h') , on peut définir leur **somme directe** $(f, g, h) \oplus (f', g', h')$ par

$$X \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} Y \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} Z \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} X[1] \oplus X'[1]$$

On a alors équivalence entre

- (i) (f, g, h) et (f', g', h') sont des pré-triangles.
- (ii) $(f, g, h) \oplus (f', g', h')$ est un pré-triangle.

Démonstration. Un morphisme $U \rightarrow X \oplus X'$ est de la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a : U \rightarrow X$ et $b : U \rightarrow X'$, on a alors

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ga & 0 \\ 0 & g'b \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} ga & 0 \\ 0 & g'b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ga = 0 \\ g'b = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix} = \text{Im} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ker } \tilde{g} = \text{Im } \tilde{f} \\ \text{Ker } \tilde{g}' = \text{Im } \tilde{f}' \end{cases}$$

Et on raisonne de la même manière pour les autres termes. \square

Lemme 2.3. Soient $X \in \mathcal{T}$ et f, g, h un triangle, on a

- (a) $(0, 1_X, 0)$ est un pré-triangle.
- (b) Si (f, g, h) est un pré-triangle, alors $gf = 0$.
- (c) (f, g, h) est un pré-triangle si et seulement si $(-g, -h, -f[1])$ est un pré-triangle.

Démonstration. (a) On considère la suite

$$1 \xrightarrow{0} \mathcal{T}(U, X) \xrightarrow{\widetilde{1_X}} \mathcal{T}(U, X) \xrightarrow{0} 1 \longrightarrow \mathcal{T}(U, X[1])$$

Qui est bien exacte car $\widetilde{1_X} = 1_{\mathcal{T}(U, X)}$ est un isomorphisme.

(b) Clair par définition : on a une suite exacte

$$\mathcal{T}(X, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{T}(X, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{T}(X, Z)$$

donc $gf1_X = gf = 0$.

(c) Comme la composition est bilinéaire, le résultat est immédiat. On note que les deux derniers points entraînent également $hg = 0$. \square

Proposition 2.4. (Lemme des 3 pré-triangles)

Soit $[x, y, z]$ un morphisme de triangles entre des pré-triangles. Si deux des trois morphismes qui composent $[x, y, z]$ sont des isomorphismes, alors il en va de même du troisième.

Démonstration. Supposons que x, y sont des isomorphismes. Pour tout $U \in \mathcal{T}$, on a le diagramme suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{T}(U, X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{T}(U, Y) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathcal{T}(U, Z) & \xrightarrow{\tilde{h}} & \mathcal{T}(U, X[1]) & \xrightarrow{\widetilde{f[1]}} & \mathcal{T}(U, Y[1]) \\ \downarrow \tilde{x} & & \downarrow \tilde{y} & & \downarrow \tilde{z} & & \downarrow \widetilde{x[1]} & & \downarrow \widetilde{y[1]} \\ \mathcal{T}(U, X') & \xrightarrow{\tilde{f}'} & \mathcal{T}(U, Y') & \xrightarrow{\tilde{g}'} & \mathcal{T}(U, Z') & \xrightarrow{\tilde{h}'} & \mathcal{T}(U, X'[1]) & \xrightarrow{\widetilde{f'[1]}} & \mathcal{T}(U, Y'[1]) \end{array}$$

On conclut par le lemme des 5 dans les catégories abéliennes (cf [2] Lemme 2.12) que \tilde{z} est un isomorphisme. Pour $U = Z'$ on a alors qu'il existe $z' : Z' \rightarrow Z$ tel que $zz' = 1_{Z'} \in \mathcal{T}(Z', Z')$ par définition d'un isomorphisme de groupes abéliens. Pour $U = Z$, on a $z(1_Z - z'z) = 0$, donc $1_Z - z'z = 0$ et $1_Z = z'z$ donc z est un isomorphisme d'inverse z' . On applique le dernier point du lemme précédent pour régler les autres cas. \square

Définition 2.2. On considère une collection fixée de triangles dans \mathcal{T} , que l'on suppose stable par isomorphisme de triangles. On appelle *triangles exacts* ou distingués les éléments de cette collection.

On dit que \mathcal{T} muni de cette collection est une *catégorie pré-triangulée* si

- (TR0) Tout triangle de la forme $(0, 1_X, 0)$ est exact pour $X \in \mathcal{T}$.
- (TR1) Tout morphisme f s'inscrit dans un triangle exact (f, g, h) .
- (TR2) Un triangle (f, g, h) est exact si et seulement si $(-g, -h, -f[1])$ est exact.
- (TR3) Si (f, g, h) et (f', g', h') sont des triangles exacts, alors tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow x & & \downarrow y & & & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \end{array}$$

peut être complété en un morphisme de triangles.

On suppose désormais que \mathcal{T} est pré-triangulée.

Lemme 2.5. *Tout triangle exact est un pré-triangle.*

Démonstration. On commence par montrer que $\mathcal{T}(U, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{T}(U, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{T}(U, Z)$ est exacte. Voyons que $gf = 0$, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow 1_X & & \downarrow f & & & & \downarrow 1_{X[1]} \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X'[1] \end{array}$$

en appliquant TR3 on obtient que f est annulateur de g , donc $\text{Im } \tilde{f} \subset \text{Ker } \tilde{g}$. Soit ensuite $\theta : U \rightarrow Y$ dans $\text{Ker } \tilde{g}$, on a $g\theta = 0$. Par TR0 et TR2, les triangles $(-1_U, 0, 0)$ et $(0, 0, 1_{U[1]})$ sont exacts, on applique alors TR3 au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & U[1] & \longrightarrow & U[1] \\ \downarrow \theta & & \downarrow & & & & \downarrow \theta[1] \\ Y & \xrightarrow{-g} & Z & \xrightarrow{-h} & X[1] & \xrightarrow{-f[1]} & Y[1] \end{array}$$

On obtient $v : U[1] \rightarrow X[1]$ tel que $-f[1]v = \theta[1]$, et donc $f(-v[-1]) = \theta$ d'où $\theta \in \text{Im } \tilde{f}$. Donc la suite est bien exacte. Pour les autres termes de la suite, on utilise TR2 pour translater et se ramener au cas précédent (l'ajout de signe n'a pas d'incidence sur l'exactitude de la suite puisque la composition est bilinéaire). \square

Lemme 2.6. *Soient (f, g, h) et (f', g', h') deux triangles dans \mathcal{T} , on a équivalence entre :*

- (i) (f, g, h) et (f', g', h') sont des triangles exacts.
- (ii) $(f, g, h) \oplus (f', g', h')$ est un triangle exact.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii), par TR1 on complète $f \oplus f'$ en un triangle distingué $(f \oplus f', c, d)$. On complète par TR3 le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{c} & C & \xrightarrow{d} & X[1] \oplus X'[1] \\ \downarrow (1 \ 0) & & \downarrow (1 \ 0) & & & & \downarrow (1 \ 0) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \end{array}$$

en un morphisme de triangles par $z : C \rightarrow Z$, en raisonnant de même sur (f', g', h') , on obtient $z' : C \rightarrow Z'$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{c} & C & \xrightarrow{d} & X[1] \oplus X'[1] \\ \downarrow 1_{X \oplus X'} & & \downarrow 1_{Y \oplus Y'} & & \downarrow z \oplus z' & & \downarrow 1_{X[1] \oplus X'[1]} \\ X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{h \oplus h'} & X[1] \oplus X'[1] \end{array}$$

Les deux lignes de ce diagramme sont des pré-triangles, donc le lemme des 3 pour les pré-triangles nous donne que ces deux triangles sont isomorphes, donc la seconde ligne est un triangle distingué (par stabilité des triangles distingués par isomorphisme).

(ii) \Rightarrow (i) On sait que (f, g, h) (et (f', g', h')) sont des pré-triangles. Par TR1, on complète f en (f, c, d) un triangle exact. Par TR3, on complète le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & C & \xrightarrow{d} & X[1] \\ \downarrow \binom{1}{0} & & \downarrow \binom{1}{0} & & & & \downarrow \binom{1}{0} \\ X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{h \oplus h'} & X[1] \oplus X'[1] \end{array}$$

en un morphisme de triangles par $\binom{\alpha}{\beta} : C \rightarrow Z \oplus Z'$ on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & C & \xrightarrow{d} & X[1] \\ \downarrow 1_X & & \downarrow 1_Y & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1_{X[1]} \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \end{array}$$

dont les lignes sont des pré-triangles, on conclut par le lemme des 3 comme précédemment et de même pour (f', g', h') . \square

Lemme 2.7. *Supposons avoir un triangle exact de la forme*

$$X \xrightarrow{\binom{a}{f}} A \oplus Y \xrightarrow{\binom{\alpha \ \beta}{\gamma \ \delta}} A \oplus Z \xrightarrow{(c \ h)} X[1]$$

Si $\alpha \in \text{Aut}(A)$, alors ce triangle est isomorphe à la somme directe

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0 \oplus X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

où $g := \delta - \gamma\alpha^{-1}\beta$. En particulier (f, g, h) est exact.

Démonstration. Comme un triangle exact est en particulier un prétriangle, la composition de deux morphismes consécutifs est nulle, donc

$$\begin{cases} \alpha a + \beta f = 0 \\ c\alpha + h\gamma = 0 \end{cases}$$

On a ensuite $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \oplus Y \rightarrow A \oplus Y$ est un isomorphisme, d'inverse $\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} : A \oplus Z \rightarrow A \oplus Z$ est un isomorphisme, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite, en posant $g := \delta - \gamma\alpha^{-1}\beta$.

- $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta f \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta - \gamma\alpha^{-1}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$
- $(0 \ h) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} = (-h\gamma\alpha^{-1} \ h) = (c \ h).$

Donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ f \end{pmatrix}} & A \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} & A \oplus Z & \xrightarrow{(c \ h)} & X[1] \\ \downarrow 1_X & & \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow 1_{X[1]} \\ X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}} & A \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & A \oplus Z & \xrightarrow{(0 \ h)} & X[1] \end{array}$$

est un isomorphisme de triangles comme annoncé. \square

Jusqu'ici nous n'avons pas abordé la nature de la catégorie opposée d'une catégorie pré-triangulée. Contrairement à la définition de catégorie abélienne, qui est intrinsèque et dont on peut dire qu'elle est auto-duale, les catégories triangulées demandent une structure supplémentaire : on doit fixer $[1]$ et la classe des triangles exacts. On cherche donc un tel choix naturel sur \mathcal{T}^{op} qui la munisse d'une structure de catégorie triangulée.

Proposition 2.8. *Soit \mathcal{T} une catégorie pré-triangulée, on définit $[1] : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$ par*

- $[1]X := X[-1]$ pour $X \in \mathcal{T}^{op}$.
- $[1]f = f[-1] : Y \rightarrow X$ pour $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{T} .

Cette correspondante est une auto-équivalence sur \mathcal{T}^{op} .

Démonstration. Pour faciliter la lecture, on notera \square la loi de composition dans \mathcal{T}^{op} . On a

$$\begin{aligned} [1](f \square g) &= (g \circ f)[-1] \\ &= g[-1] \circ f[-1] \\ &= f[-1] \square g[-1] \\ &= [1]f \square [1]g \end{aligned}$$

Donc $[1]$. définit un foncteur $\mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$, pleinement fidèle et dense car $[1]$ est pleinement fidèle et dense, d'où le résultat. \square

Un triangle dans \mathcal{T}^{op} de la forme $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h} [1]Z$ correspond dans \mathcal{T} au triangle

$$Z[-1] \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

que l'on sait être distingué si et seulement si $X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h[1]} Z[1]$. On dira donc qu'un triangle (g, f, h) dans \mathcal{T}^{op} est distingué si et seulement si $(-f, -g, -h[1])$ est distingué dans \mathcal{T} , si et seulement si (h, f, g) est distingué.

Proposition 2.9. *La catégorie \mathcal{T}^{op} munie de cette classe de triangles est une catégorie pré-triangulée.*

Démonstration. Les isomorphismes de triangles dans \mathcal{T} induisent des isomorphismes de triangle dans \mathcal{T}^{op} , donc les triangles exacts sont stables par isomorphismes. Le triangle $(0, 1_X, 0)$ est distingué dans \mathcal{T} , donc dans \mathcal{T}^{op} . L'axiome TR2 est clair par définition : si (g, f, h) est exact dans \mathcal{T}^{op} , alors (h, f, g) est exact dans \mathcal{T} par définition, donc $(-g[1], -h, -f)$ est exact dans \mathcal{T} par TR2, donc $(-f, -h, -[1]g)$ est exact dans \mathcal{T}^{op} . Pour TR3, soit dans \mathcal{T}^{op} un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{h} & [1]Z \\ \downarrow z & & \downarrow y & & & & \downarrow [1]z \\ Z' & \xrightarrow{g'} & Y' & \xrightarrow{f'} & X' & \xrightarrow{h'} & [1]Z' \end{array}$$

on a dans \mathcal{T} un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} Z'[-1] & \xrightarrow{h} & X' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & Z' \\ \downarrow z[-1] & & & & \downarrow y & & \downarrow z \\ Z[-1] & \xrightarrow{h'} & X & \xrightarrow{f'} & Y & \xrightarrow{g'} & Z \end{array}$$

On applique TR2 et TR3 dans \mathcal{T} pour obtenir un morphisme de triangles dans \mathcal{T} qui induit un morphisme de triangles dans \mathcal{T}^{op} .

Pour TR1, soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme dans \mathcal{T}^{op} , on le complète dans \mathcal{T} en un triangle exact (f, g, h) , par TR2 les triangles $(-h[-1], -f, -g)$ et $(g[-1], h[-1], f)$ sont exacts dans \mathcal{T} , donc le triangle $(f, [1]h, [1]g)$ est exact dans \mathcal{T}^{op} . \square

2.1.2 Morphismes homotopes et cônes de morphismes

Définition 2.3. Un triangle (f, g, h) dans \mathcal{T} sera dit de *composée nulle* si $gf = 0$ et $hg = 0$.

Soit dans \mathcal{T} un morphisme de triangles de composée nulle :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \end{array}$$

Alors le triangle

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ y & f' \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ z & g' \end{pmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f[1] & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} Y[1] \oplus X'[1]$$

est un triangle de composée nulle, appelé le *cône de morphisme* de $[x, y, z]$.

Cette notion de cône de morphisme est au cœur de la définition de catégorie triangulée, nous allons chercher à savoir si le cône d'un morphisme entre triangles exacts est lui-même exact, pour cela nous avons besoin de connaître plus précisément le cône d'un morphisme, qui sera paramétré par la notion d'homotopie de morphisme de triangles :

Définition 2.4. Soient (f, g, h) et (f', g', h') deux triangles dans \mathcal{T} , et $[x, y, z], [x', y', z']$ deux morphismes entre ces triangles. On dit que $[x, y, z]$ et $[x', y', z']$ sont *homotopes* si il existe $\theta : Y \rightarrow X', \phi : Z \rightarrow Y'$ et $\psi : X[1] \rightarrow Z'$ tels que

- $x - x' = \theta f + (h' \psi)[-1]$
- $y - y' = \phi g + f' \theta$
- $z - z' = \psi h + g' \phi$

La situation de la définition d'homotopie est donnée par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & Z' & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow x & \nearrow \theta & \downarrow y & \nearrow \phi & \downarrow z & \nearrow \psi & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \end{array}$$

mais il faut garder à l'esprit que ce diagramme n'est pas commutatif (on aurait $[x, y, z] = [x', y', z']$ donc la définition dégénère).

Lemme 2.10. L'homotopie est une relation d'équivalence entre les morphismes liant deux triangles fixés.

Démonstration. En notant \sim l'homotopie, on a

- $[x, y, z] \sim [x, y, z]$ en prenant $\theta = \phi = \psi = 0$.
- Si $[x, y, z] \sim [x', y', z']$ par θ, ϕ, ψ , on a $[x', y', z'] \sim [x, y, z]$ par $-\theta, -\phi, -\psi$.

- Si $[x, y, z] \sim [x', y', z']$ par θ, ϕ, ψ , et $[x', y', z'] \sim [x'', y'', z'']$ par θ', ϕ', ψ' . On a

$$\begin{aligned}
x - x'' &= x - x' + x' - x'' \\
&= \theta f + (h'\psi)[-1] + \theta f' + (h'\psi')[-1] \\
&= (\theta + \theta')f + (h'(\psi + \psi'))[-1] \\
y - y'' &= y - y' + y' - y'' \\
&= \phi g + f'\theta + \phi'g + f'\theta' \\
&= (\phi + \phi')g + f'(\theta + \theta') \\
z - z'' &= z - z' + z' - z'' \\
&= \psi h + g'\phi + \psi'h + g'\phi' \\
&= (\psi + \psi')h + g'(\phi + \phi')
\end{aligned}$$

Donc $[x, y, z] \sim [x', y', z']$ par $\theta + \theta', \phi + \phi', \psi + \psi'$.

□

Lemme 2.11. *Deux morphismes de triangles de composée nulle homotopes ont des cônes de morphismes isomorphes : le cône de morphisme est déterminé à isomorphisme près par la classe d'homotopie du morphisme.*

Démonstration. Le diagramme ci-dessous est commutatif et donne le résultat :

$$\begin{array}{ccccccc}
Y \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ y & f' \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ z & g' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f[1] & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1] \\
\downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta[1] & 1 \end{pmatrix} \\
Y \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ y' & f' \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ z' & g' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f[1] & 0 \\ x'[1] & h' \end{pmatrix}} & Y[1] \oplus X'[1]
\end{array}$$

et les morphismes verticaux sont clairement des isomorphismes.

□

Lemme 2.12. *Soient (f, g, h) et (f', g', h') deux triangles, $[x, y, z]$ et $[x', y', z']$ deux morphismes homotopes entre ces triangles.*

Alors pour tous morphismes de triangles $[a, b, c] : (u, v, w) \rightarrow (f, g, h)$ et $[\alpha, \beta, \gamma] : (f', g', h') \rightarrow (u', v', w')$, les morphismes

$$[\alpha x a, \beta y b, \gamma z c] \quad \text{et} \quad [\alpha x' a, \beta y' b, \gamma z' c]$$

sont homotopes.

Démonstration. La situation est donnée dans le diagramme (non commutatif) ci dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{u} & & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & A[1] \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow a[1] \\
 X' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & Z' & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 \downarrow x & \searrow \theta & \downarrow y & \searrow \phi & \downarrow z & \searrow \psi & \downarrow x[1] \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha[1] \\
 A & \xrightarrow{u'} & B & \xrightarrow{v'} & C & \xrightarrow{w'} & A'[1]
 \end{array}$$

On pose alors $\theta' = \alpha\theta b$ et $\phi' = \beta\phi c$ et $\psi' = \gamma\psi a[1]$ et on obtient

$$\begin{aligned}
 \alpha x a - \alpha x' a &= \alpha(x - x')a \\
 &= \alpha\theta f a + \alpha((h'\psi)[-1])a \\
 &= \alpha\theta b u + (\alpha[1]h'\psi a[1])[-1] \\
 &= \alpha\theta b u + (w'\gamma\psi a[1])[-1] \\
 &= \theta' u + (w'\psi')[-1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta y b - \beta y' b &= \beta(y - y')b \\
 &= \beta\phi g b + \beta f'\theta b \\
 &= \beta\phi c v + u'\alpha\theta b \\
 &= \phi' v + u'\theta' \\
 \gamma z c - \gamma z' c &= \gamma(z - z')c \\
 &= \gamma\psi h c + \gamma g'\phi c \\
 &= \gamma\psi a[1]w + v'\beta\phi c \\
 &= \psi' w + v'\phi'
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Définition 2.5. Un triangle (f, g, h) est dit **contractile** si l'identité $[1, 1, 1]$ est homotope au morphisme nul $[0, 0, 0]$.

Lemme 2.13. Un morphisme de triangle ayant pour domaine ou codomaine un triangle contractile est homotope au morphisme nul.

Démonstration. Si $[x, y, z]$ est de domaine un triangle contractile, on a

$$\begin{aligned}
 [x, y, z] &= [x, y, z] \circ [1, 1, 1] \\
 &\sim [x, y, z] \circ [0, 0, 0] \\
 &= [0, 0, 0]
 \end{aligned}$$

Par le lemme précédent, on raisonne de même si $[x, y, z]$ a pour codomaine un triangle contractile. □

Lemme 2.14. *Un triangle de composée nulle et contractile est un pré-triangle.*

Démonstration. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ un tel triangle. L'homotopie entre l'identité et le morphisme nul donne θ, ϕ, ψ tels que

$$1_X = \theta f + (h\psi)[-1] \quad 1_Y = \phi g + f\theta \quad 1_Z = \psi h + g\phi$$

On considère la suite de groupes abéliens

$$\mathcal{T}(U, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{T}(U, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{T}(U, Z) \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{T}(U, X[1]) \xrightarrow{\tilde{f}[1]} \mathcal{T}(U, Y[1])$$

Soit $a : U \rightarrow Y$ appartenant à $\text{Ker } \tilde{g}$, on a

$$a = 1_Y a = \phi g a + f \theta a = f \theta a$$

par hypothèse, donc $a \in \text{Im } \tilde{f}$, l'inclusion réciproque provient de l'hypothèse de composée nulle, on traite les autres cas de manière similaire. \square

Lemme 2.15. *Le cône d'un morphisme entre deux pré-triangles est lui-même un pré-triangle.*

Démonstration. On a deux suites exactes

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(U, X) &\xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{T}(U, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{T}(U, Z) \xrightarrow{\tilde{h}} \mathcal{T}(U, X[1]) \xrightarrow{\tilde{f}[1]} \mathcal{T}(U, Y[1]) \\ \mathcal{T}(U, X') &\xrightarrow{\tilde{f}'} \mathcal{T}(U, Y') \xrightarrow{\tilde{g}'} \mathcal{T}(U, Z') \xrightarrow{\tilde{h}'} \mathcal{T}(U, X'[1]) \xrightarrow{\tilde{f}'[1]} \mathcal{T}(U, Y'[1]) \end{aligned}$$

On doit montrer que la suite

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(U, Y \oplus X') &\xrightarrow{\begin{pmatrix} -\widetilde{g} & 0 \\ y & f' \end{pmatrix}} \mathcal{T}(U, Z \oplus Y') \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\widetilde{h} & 0 \\ z & g' \end{pmatrix}} \mathcal{T}(U, X[1] \oplus Z') \\ &\xrightarrow{\begin{pmatrix} -\widetilde{f}[1] & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} \mathcal{T}(U, Y[1] \oplus X'[1]) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\widetilde{g}[1] & 0 \\ y[1] & f'[1] \end{pmatrix}} \mathcal{T}(U, Z[1] \oplus Y'[1]) \end{aligned}$$

est exacte. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : U \rightarrow Z \oplus Y'$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Ker } \begin{pmatrix} -\widetilde{h} & 0 \\ z & g' \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -ha \\ za + g'b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \in \text{Ker } \tilde{h} \\ za + g'b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha : U \rightarrow Y \mid g\alpha = a \\ zg\alpha + g'b = 0 = g'y\alpha + g'b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha : U \rightarrow Y \mid g\alpha = a \\ y\alpha + b \in \text{Ker } \tilde{g}' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha : U \rightarrow Y \mid g\alpha = a \\ \exists \beta : U \rightarrow X' \mid f'\beta = y\alpha + b \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} : U \rightarrow Y \oplus X'$ donne l'exactitude et on raisonne de même pour les autres termes. \square

Cependant le cône d'un morphisme entre deux triangles n'a pas de raisons d'être un triangle distingué, même pour un morphisme entre deux triangles distingués, c'est ceci-dit le cas pour le morphisme nul

Lemme 2.16. *Le cône du morphisme nul entre deux triangles exacts est un triangle exact.*

Démonstration. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \end{array}$$

Son cône est donné par

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f[1] & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} Y[1] \oplus X[1]$$

qui est en fait la somme directe des triangles

$$Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1] \oplus X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1]$$

qui sont des triangles distingués. □

Comme corollaire immédiat de la proposition précédente, nous avons qu'un morphisme entre deux triangles exacts homotope à 0 possède un cône exact, mais on ne peut pas à priori aller plus loin sans hypothèses supplémentaires.

Gardons en tête que notre exposé a pour but d'introduire les catégories extriangulées, nous allons mettre en évidence une structure proche de la structure de catégorie exacte (telle que développée dans [1]). En particulier, nous aurons besoins de pullbacks et pushouts, nous allons donc exposer une structure similaire dans les catégories triangulées.

Définition 2.6. Dans une catégorie pré-triangulée, on considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ y \downarrow & & \downarrow z \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

On dit qu'il s'agit d'un **carré homotopique** si il existe un morphisme $\delta : Z' \rightarrow Y[1]$ tel que

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & f' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} Y[1]$$

soit un triangle exact, le morphisme δ est appelé la **différentielle** du carré.

Cette notion de carré homotopique va nous être des plus utile : dans [2] nous avons donné une caractérisation des pulbacks/pushout dans les catégories exactes : un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

est un pullback si et seulement si il est un pushout si et seulement si la suite correspondante $A \longrightarrow B \oplus C \longrightarrow B$ est un conflation. C'est cette caractérisation qui nous servira de point de départ dans la suite (bien sur les triangles exacts joueront le rôle des conflations).

Définition 2.7. Si on a un carré homotopique

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ y \downarrow & & \downarrow z \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

Alors on dit que

(Y, f, y) est le **pullback homotopique** de (Z', f', z) est le **pushout homotopique** de

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow z & \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ y \downarrow & & \\ Y' & & \end{array}$$

Lemme 2.17. Dans une catégorie pré-triangulée \mathcal{T} tout diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow z & \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ y \downarrow & & \\ Y' & & \end{array}$$

admet un pullback homotopique, respectivement un pushout homotopique.

Démonstration. Dans le second cas, on obtient un morphisme $Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}} Y' \oplus Z$, que l'on complète par TR1 en un triangle distingué

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \longrightarrow Z \longrightarrow Y[1]$$

qui donne un pushout homotopique.

Réciproquement, on obtient un morphisme $Z \oplus Y' \xrightarrow{(z \ f')} Z'$, que l'on complète en un triangle exact

$$Z \oplus Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow Y[1] \longrightarrow Z[1] \oplus Y'[1]$$

et on conclut en appliquant TR2. □

Bien-sûr toutes les propriétés des pushout et pullback authentiques ne seront pas respectées : les pushouts/pullbacks homotopiques sont des pushouts/pullbacks faibles : on a également factorisation et même unicité à isomorphisme près, à cette différence que ces factorisations et isomorphismes ne sont pas uniques. Soient

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ y \downarrow & & \downarrow z \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ y \downarrow & & \downarrow a \\ Y' & \xrightarrow{b} & P \end{array}$$

deux carrés commutatifs où le premier est un carré homotopique (on ne demande pas que le second le soit). D'après [2] (corollaire 3.11) le foncteur $\mathcal{T}(-, P)$ envoie le triangle exact

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ g \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} g' & f' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} Y[1]$$

sur une suite exacte de groupes abéliens, en particulier, la suite

$$\mathcal{T}(Z', P) \xrightarrow{\widetilde{\begin{pmatrix} -f \\ g \end{pmatrix}}} \mathcal{T}(Z \oplus Y', P) \xrightarrow{\widetilde{\begin{pmatrix} g' & f' \end{pmatrix}}} \mathcal{T}(Y, P)$$

est exacte, donc le morphisme $Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}} P$ s'écrit comme composée $\alpha \circ \begin{pmatrix} g' & f' \end{pmatrix}$ avec $\alpha : Z' \rightarrow P$. Dans le cas particulier où les deux carrés sont des carrés homotopiques, l'isomorphisme $Z' \simeq P$ découle simplement de l'axiome TR3 et du lemme des 3 pré-triangulé. Pour le cas des pullback, on applique un raisonnement similaire dans \mathcal{T}^{op} .

2.2 Définitions d'une catégorie triangulée

Le passage d'une catégorie pré-triangulée à une catégorie triangulée se fait par l'adjonction d'un axiome supplémentaire, historiquement cet axiome est l'axiome de l'octaèdre, issu de [15], que nous avons énoncé dans [2]. Cet axiome semble impénétrable et peu pratique en premier lieu, nous donnons ici plusieurs choix d'axiomes distincts dont nous montrons qu'ils sont équivalents à l'axiome de l'octaèdre, cet exposé est issu de [8].

Notre premier axiome est une restriction de l'axiome TR3 des catégories pré-triangulées, qui répond à notre interrogation précédente : nous cherchons à compléter un diagramme commutatif en un morphisme de triangles et tel que son cône de morphisme soit un triangle exact :

Axiome A. *Pour tout diagramme de la forme*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow x & & \downarrow y & & & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{y'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \end{array}$$

dont les lignes sont des triangles exacts, il existe un morphisme de triangles $[x, y, z]$ dont le cône est un triangle exact.

Les deux axiomes suivants nous donnent l'existence de carrés homotopiques, mais avec une condition supplémentaire sur leur différentielle.

Axiome B. *Pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \end{array}$$

dont les lignes sont des triangles exacts, il existe $z : Z \rightarrow Z'$ faisant de $[1_X, y, z]$ un morphisme de triangles, tel que

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{f[1]h'} Y[1]$$

soit un triangle exact.

Axiome B'. *Pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & & & \downarrow z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \end{array}$$

dont les lignes sont des triangles exacts, il existe $y : Y \rightarrow Y'$ faisant de $[1_X, y, z]$ un morphisme de triangles, tel que

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{f[1]h'} Y[1]$$

soit un triangle exact.

L'axiome suivant donne une forme de réciproque aux axiomes B et B' : partant d'un carré homotopique, on souhaite construire un morphisme de triangles exacts.

Axiome C. *Pour tout triangle exact de la forme*

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} Y[1]$$

il existe un diagramme commutatif dont les lignes sont des triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & \downarrow z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \end{array}$$

avec $\delta = f[1]h'$, de plus, on peut fixer au préalable le triangle (f, g, h) ou (f', g', h') .

L'axiome D est l'axiome de l'octaèdre classique (qui nous sera d'ailleurs utile sous cette forme dans la suite de notre exposé).

Axiome D. *Un diagramme composé de trois triangles exacts de la forme suivante*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{y} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow u & & & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \\
 & & \downarrow v & & & & \\
 & & W & & & & \\
 & & \downarrow w & & & & \\
 & & Y[1] & & & &
 \end{array}$$

Peut être complété par un triangle exact $Z \xrightarrow{u'} Z' \xrightarrow{v'} W \xrightarrow{w'} Z[1]$ en le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{y} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow u & & \downarrow u' & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \\
 & & \downarrow v & & \downarrow v' & & \\
 & & W & \xlongequal{\quad} & W & & \\
 & & \downarrow w & & \downarrow w' & & \\
 & & Y[1] & \xrightarrow{g[1]} & Z[1] & &
 \end{array}$$

avec $f[1]h' = wv'$. De plus, le triangle

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} Y[1]$$

est exact, avec $\delta := f[1]h' = wv'$

Enfin notre dernier axiome nous donne une réciproque à l'axiome D :

Axiome E. *Pour tout triangle exact de la forme*

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} Y[1]$$

Il existe un diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont des triangles exacts :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{y} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
\parallel & & \downarrow u & & \downarrow u' & & \parallel \\
X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \\
& & \downarrow v & & \downarrow v' & & \\
& & W & \xlongequal{\quad} & W & & \\
& & \downarrow w & & \downarrow w' & & \\
& & Y[1] & \xrightarrow{g[1]} & Z[1] & &
\end{array}$$

avec $f[1]h' = wv' = \delta$. Et de plus, on peut fixer au préalable

- (f, g, h) ou (f', g', h')
- (u, v, w) ou (u', v', w') .

Il nous faut à présent montrer l'équivalence de tous ces différents axiomes, nous allons montrer :

$$\begin{array}{c}
D \Longleftrightarrow B \Longleftrightarrow C \Longleftrightarrow E \\
\updownarrow \\
B' \Longleftrightarrow A
\end{array}$$

$A \Rightarrow B$: Par hypothèse, on peut supposer l'existence de $z : Z \rightarrow Z'$ tel que le cône du morphisme obtenu soit exact :

$$Y \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ y & f' \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ z & g' \end{pmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f[1] & 0 \\ 1 & h \end{pmatrix}} Y[1] \oplus X[1]$$

Par l'axiome TR2, le triangle suivant est exact :

$$Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ -z & -g' \end{pmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f[1] & 0 \\ -1 & -h \end{pmatrix}} Y[1] \oplus X[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} g[1] & 0 \\ -y[1] & -f'[1] \end{pmatrix}} Z[1] \oplus Y'[1]$$

Par l'isomorphisme $\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, le triangle suivant est exact

$$Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ -z & -g' \end{pmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & -h \\ f[1] & 0 \end{pmatrix}} X[1] \oplus Y[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & g[1] \\ -f'[1] & -y[1] \end{pmatrix}} Z[1] \oplus Y'[1]$$

Comme $-1_{X[1]} \in \text{Aut}(X[1])$ (il s'admet lui même comme inverse) on peut appliquer le lemme 2.7, on obtient que le triangle suivant est distingué

$$Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -z & -g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{-f[1]h'} Y[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} g[1] \\ -y[1] \end{pmatrix}} Z[1] \oplus Y'[1]$$

En appliquant TR2, on obtient

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{f[1]h'} Y[1]$$

Qui est donc bien un triangle exact comme souhaité.

$B \Rightarrow A$: On considère l'isomorphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc}
X \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & f' \end{pmatrix}} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1] \\
\downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x[1] & 1 \end{pmatrix} \\
X \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} yf & f' \end{pmatrix}} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1]
\end{array}$$

La première ligne est exacte comme somme directe de (f, g, h) et $(0, 0, -1_{X[1]})$, donc la deuxième ligne également, on a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
X \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \end{pmatrix}} & Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1] \\
\parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} y & f' \end{pmatrix} & & & & \parallel \\
X \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} yf & f' \end{pmatrix}} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1]
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes (la première ligne est la somme directe $(f, g, h) \oplus (1_{X'}, 0, 0)$). On peut donc appliquer l'axiome B , pour obtenir $\begin{pmatrix} a \\ z \end{pmatrix} : Z \rightarrow X[1] \oplus Z'$ donnant un morphisme de triangles, et rendant le triangle suivant exact :

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ y & f' \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & 0 \\ z & g' \end{pmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f[1] & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} Y[1] \oplus X'[1]$$

Comme $\begin{pmatrix} a \\ z \end{pmatrix}$ donne un morphisme de triangles, on obtient

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ x[1]a + h'b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $-a = h$ d'où le résultat.

$A \Rightarrow B'$: Par l'axiome TR2, on peut considérer le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} Z[-1] & \xrightarrow{-h[-1]} & X & \xrightarrow{-f} & Y & \xrightarrow{-g} & Z \\ \downarrow z[-1] & & \parallel & & & & \downarrow z \\ Z'[-1] & \xrightarrow{-h'[-1]} & X' & \xrightarrow{-f'} & Y' & \xrightarrow{-g'} & Z' \end{array}$$

Par hypothèse, on peut supposer l'existence de $y : Y \rightarrow Y'$ tel que le cône du morphisme obtenu soit exact :

$$X \oplus Z'[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & -h'[-1] \end{pmatrix}} Y \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ y & -f' \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ z & -g' \end{pmatrix}} X[1] \oplus Z'$$

Par l'axiome TR2, le triangle suivant est exact :

$$Z[-1] \oplus Y'[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h[-1] & 0 \\ -z[-1] & g'[-1] \end{pmatrix}} X \oplus Z'[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f & 0 \\ -1 & h'[-1] \end{pmatrix}} Y \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ -y & f' \end{pmatrix}} Z \oplus Y'$$

Par l'isomorphisme $\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, le triangle suivant est exact

$$Z[-1] \oplus Y'[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h[-1] & 0 \\ -z[-1] & g'[-1] \end{pmatrix}} X \oplus Z'[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & h'[-1] \\ -f & 0 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -g \\ f' & -y \end{pmatrix}} Z \oplus Y'$$

Comme $-1_{X[1]} \in \text{Aut}(X[1])$ (il s'admet lui même comme inverse) on peut appliquer le lemme 2.7, on obtient que le triangle suivant est distingué

$$Z[-1] \oplus Y'[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -z[-1] & g'[-1] \end{pmatrix}} Z'[-1] \xrightarrow{-fh'[-1]} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ -y \end{pmatrix}} Z \oplus Y'$$

En appliquant TR2, on obtient

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ -y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{-f[1]h'} Y[1]$$

Isomorphe, par $\left(1, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right)$, au triangle souhaité, qui est donc bien un triangle exact.

$B' \Rightarrow A$: On considère l'isomorphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc}
X \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & f' \end{pmatrix}} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1] \\
\downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x[1] & 1 \end{pmatrix} \\
X \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} yf & f' \end{pmatrix}} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1]
\end{array}$$

La première ligne est exacte comme somme directe de (f, g, h) et $(0, 0, -1_{X[1]})$, donc la deuxième ligne également, on a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
X \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \end{pmatrix}} & Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1] \\
\parallel & & & & \downarrow \begin{pmatrix} -h \\ z \end{pmatrix} & & \parallel \\
X \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} yf & f' \end{pmatrix}} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} & X[1] \oplus X'[1]
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes (la première ligne est la somme directe $(f, g, h) \oplus (1_{X'}, 0, 0)$). On peut donc appliquer l'axiome B , pour obtenir $(y \ a) : Y \oplus X' \rightarrow Y'$ donnant un morphisme de triangles, et rendant le triangle suivant exact :

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ y & a \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ z & g' \end{pmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f[1] & 0 \\ x[1] & h' \end{pmatrix}} Y[1] \oplus X'[1]$$

Comme $(y \ a)$ donne un morphisme de triangles, on obtient

$$(y \ a) \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (fy \ a) = (yf \ f')$$

Donc $a = f'$ d'où le résultat.

$B \Rightarrow C$: Fixons (f, g, h) distingué, on a par hypothèse que le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} & Z' & \xrightarrow{\delta} & Y[1] \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{-g} & Z & \xrightarrow{-h} & X[1] & \xrightarrow{-f[1]} & Y[1] \end{array}$$

est à lignes exactes, par l'axiome B on obtient un morphisme $-h' : Z' \rightarrow X[1]$ donnant un morphisme de triangles et rendant le triangle suivant exact :

$$Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -z & -g' \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} Z' \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h' & -h \end{pmatrix}} X[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} g[1]f[1] \\ -y[1]f[1] \end{pmatrix}} Z[1] \oplus Y'[1]$$

On note que comme $-h'$ donne un morphisme de triangles, on a $\delta = f[1]h'$ et $h = h'z$, par isomorphisme et TR2, on obtient que le triangle suivant est exact

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -gf \\ yf \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ z & g' \end{pmatrix}} Z \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & h' \end{pmatrix}} X[1]$$

On peut appliquer le lemme 2.7 pour obtenir que le triangle suivant est distingué

$$X \xrightarrow{yf} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X[1]$$

on pose alors $f' = yf$ et on obtient le diagramme voulu.

Dans le cas où nous aurions fixé (f', g', h') , on sait par TR1 qu'il existe un triangle distingué (\bar{f}, g, \bar{h}) , le premier cas nous donne alors (\bar{f}', g', \bar{h}') satisfaisant la conclusion de l'axiome C. En appliquant TR3, et le lemme des 3 pour les pré-triangles, on obtient $x \in \text{Aut}(X)$ tel que $[x, 1, 1] : (\bar{f}', g', \bar{h}') \rightarrow (f', g', h')$ est un isomorphisme de triangles. On pose alors (f, g, h) comme l'image de (\bar{f}, g, \bar{h}) par $[x^{-1}, 1, 1]$. On obtient le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow x^{-1} & & \parallel & & \parallel & & \downarrow x^{-1}[1] \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\bar{h}} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & \downarrow z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\bar{f}'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{\bar{h}'} & X[1] \\ \downarrow x & & \parallel & & \parallel & & \downarrow x[1] \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \end{array}$$

Donc le morphisme $[1, y, z] : (f, g, h) \rightarrow (f', g', h')$ donne le résultat.

$C \Rightarrow B$: Soit un diagramme tel que donné dans B , par TR1 on a un triangle distingué

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}} C \xrightarrow{c} Y[1]$$

En fixant (f, g, h) on applique C pour avoir

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & \downarrow a & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{d} & X[1] \end{array}$$

avec $c = f[1]d$. Par TR3, on peut choisir $\theta : C \rightarrow Z'$ donnant un morphisme de triangles $[1, 1, \theta] : (f', b, d) \rightarrow (f', g', h')$, isomorphisme par le lemme des 3, de plus on a

$$\theta b = y' \quad \theta a = z \quad c\theta^{-1} = f[1]d\theta^{-1} = f[1]h'$$

Donc le diagramme suivant est un isomorphisme de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}} & C & \xrightarrow{c} & Y[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \theta & & \parallel \\ y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} & Z' & \xrightarrow{f[1]h'} & Y[1] \end{array}$$

Donc la seconde ligne est un triangle exact comme souhaité.

$B \Leftrightarrow D$: Supposons avoir B et trois triangles exacts liés comme dans l'axiome D'. On applique B au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow u & & & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \end{array}$$

Pour obtenir un morphisme de triangles $(1, u, u')$ et un triangle exact

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} u' & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{f[1]h'} Y[1]$$

On applique alors B au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} u' & g' \end{pmatrix}} & Z' & \xrightarrow{f[1]h'} & Y[1] \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & & & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & W & \xrightarrow{w} & Y[1] \end{array}$$

On obtient $[1, (0 \ 1), v']$ un morphisme de triangle et un triangle exact

$$Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -u' & -g' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} Z' \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} v' & v \end{pmatrix}} W \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g[1]w \\ u[1]w \end{pmatrix}} Z[1] \oplus Y'[1]$$

Par TR2, et l'isomorphisme $\left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, on obtient un triangle exact

$$W[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -uw[-1] \\ gw[-1] \end{pmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ g' & u' \end{pmatrix}} Y' \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -v & -v' \end{pmatrix}} W$$

Par le lemme 2.7 et TR2, on déduit que le triangle suivant est exact

$$Z \xrightarrow{-u'} Z' \xrightarrow{v'} W \xrightarrow{-w'} Z[1]$$

avec $w' = -g[1]w$, isomorphe au triangle $Z \xrightarrow{u'} Z' \xrightarrow{v'} W \xrightarrow{w'} Z[1]$ par $(-1, 1, 1)$, et on a $xv' = f[1]h'$, donc l'axiome D comme souhaité.

L'implication $D \Rightarrow B$ est immédiate.

$C \Rightarrow E$: Soit un triangle

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix}} Z \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} u' & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} Y[1]$$

On peut appliquer C pour obtenir un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow u & & \downarrow u' & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \end{array}$$

avec $\delta = f[1]h$. De plus on peut fixer (f, g, h) ou (f', g', h') . De même, en appliquant l'isomorphisme $\left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1\right)$, le triangle suivant est exact

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} u \\ g \end{pmatrix}} Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} g' & -u' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} Y[1]$$

on peut lui appliquer C pour obtenir le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} W[-1] & \xrightarrow{-w[-1]} & Y & \xrightarrow{-u} & Y' & \xrightarrow{-v} & W \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow g' & & \parallel \\ W[-1] & \xrightarrow{-w'[-1]} & Z & \xrightarrow{-u'} & Z' & \xrightarrow{-v'} & W \end{array}$$

avec $\delta = wv'$, de plus, on peut fixer (u, v, w) ou (u', v', w') d'où E . L'implication $E \Rightarrow C$ est immédiate.

À présent que nous avons montré que nos différents axiomes additionels sont équivalents, nous pouvons affirmer que la définition suivante est consistante :

Définition 2.8. Une catégorie pré-triangulée \mathcal{T} est dite **triangulée** si elle respecte l'un des axiomes A,B,B',C,D ou E.

Proposition 2.18. Si la catégorie \mathcal{T} est triangulée, alors la catégorie \mathcal{T}^{op} , munie des triangles distingués définis dans la proposition 2.9, est aussi une catégorie triangulée. Autrement dit, la définition de catégorie triangulée est auto-duale.

Démonstration. On sait déjà que \mathcal{T}^{op} est pré-triangulée, il suffit donc de montrer que \mathcal{T}^{op} suit l'axiome B. On considère donc un diagramme à lignes exactes dans \mathcal{T}^{op} :

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{h} & [1]Z \\ \parallel & & \downarrow y & & & & \parallel \\ Z & \xrightarrow{g'} & Y' & \xrightarrow{f'} & X' & \xrightarrow{h'} & [1]Z' \end{array}$$

qui donne dans \mathcal{T} un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} Z'[-1] & \xrightarrow{h'} & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ \parallel & & & & \downarrow y & & \parallel \\ Z[-1] & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

On applique l'axiome B' dans \mathcal{T} pour obtenir $x : X' \rightarrow X$ tel que

$$X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f' \\ x \end{pmatrix}} Y' \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & f \end{pmatrix}} Y \xrightarrow{h'[1]g} X'[1]$$

est un triangle exact, par TR2, le triangle suivant est exact

$$Y[-1] \xrightarrow{-h'g[-1]} X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f' \\ -x \end{pmatrix}} Y' \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & -f \end{pmatrix}} Y$$

par l'isomorphisme $\left(1, -1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, le triangle

$$Y[-1] \xrightarrow{h'g[-1]} X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ f' \end{pmatrix}} Y' \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f & y \end{pmatrix}} Y$$

est distingué dans \mathcal{T} , donc induit dans \mathcal{T}^{op} un triangle distingué

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ y \end{pmatrix}} X \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & f' \end{pmatrix}} X' \xrightarrow{[1]h'} [1]Y$$

Ce qui est exactement le résultat voulu. □

À partir d'ici, on considère que \mathcal{T} est une catégorie triangulée.

Lemme 2.19. (*Lemme de Scindage*)

Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ un triangle distingué dans \mathcal{T} , on a équivalence entre

- (i) f est un monomorphisme scindé.
- (ii) g est un épimorphisme scindé.
- (iii) $h = 0$.
- (iv) $Y \simeq X \oplus Z$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (iii) : D'après [2], corollaire 3.5, on peut choisir un triangle exact de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{0} X[1]$$

Par TR3 et le lemme des 3 pour les pré-triangles, on a un isomorphisme $\varphi : Z' \rightarrow Z$ donnant une morphisme de triangles $[1, 1, \varphi]$. Par [2] proposition 3.4, le morphisme g' est un épimorphisme scindé, on note α sa section. On a alors

$$g\alpha\varphi^{-1} = \varphi g' \alpha \varphi^{-1} = 1_Z$$

donc g est un épimorphisme scindé, la preuve de $(ii) \Rightarrow (iii)$ est duale.

$(iii) \Rightarrow (i)$ et (ii) est l'intitulé de [2] proposition 3.4.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Si $h = 0$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{0} & X[1] \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota} & X \oplus Y & \xrightarrow{\pi} & Z & \xrightarrow{0} & X[1] \end{array}$$

est un diagramme commutatif à lignes exactes auquel on applique TR3 et le lemme des 3 pour les pré-triangles.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Le diagramme commutatif suivant donne le résultat :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{0} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota} & X \oplus Y & \xrightarrow{\pi} & Z & \xrightarrow{0} & X[1] \end{array}$$

□

Nous avons parlé d'une notion de pullback homotopique et de pushout homotopique, ces constructions nous seront utiles pour imiter les structures présentes en catégorie exactes. Une structure beaucoup plus fondamentale est celle de noyau et de conoyau : les conflations présentes dans les catégories exactes sont par définition des couples noyau-conoyau, on recherche donc un homologue de ces notions dans le cas des catégories triangulées.

À priori, les noyaux-conoyaux n'existent pas dans une catégorie triangulée, néanmoins, tout morphisme se plonge dans un triangle exact, et donc possède un morphisme annulateur : on a vu que les triangles exacts sont en particulier des triangles de composée nulle.

Définition 2.9. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans \mathcal{T}

- On dit que $g : Y \rightarrow Z$ est un **conoyau homotopique** de f si il existe un triangle exact de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

- On dit que $g : Z \rightarrow Y$ est un **noyau homotopique** de f si il existe un triangle exact de la forme

$$Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z[1]$$

La structure triangulée que nous avons donné sur \mathcal{T}^{op} donne que ces définitions sont duales l'une de l'autre (comme l'étaient d'ailleurs les notions de pullback faible et de pushout faible). Les axiomes TR1 et TR2 donnent l'existence des noyaux et conoyaux homotopiques, la proposition suivante donne que ces objets sont respectivement des noyaux et conoyaux faibles (dans le même sens que pour les pushouts/pullbacks : on a une factorisation de tout morphisme annulateur, mais celle-ci n'est pas unique).

Proposition 2.20. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ un triangle exact dans \mathcal{T} ,

- Si $f' : Y' \rightarrow Y$ est un morphisme tel que $gf' = 0$, il existe un morphisme $\varphi : Y' \rightarrow X$ tel que $f' = f\varphi$.
- Si $g' : Y \rightarrow Y''$ est un morphisme tel que $g'f = 0$, il existe un morphisme $\psi : Z \rightarrow Y''$ tel que $g' = \psi g$.

La situation peut être résumée dans le diagramme commutatif suivant, dont la ligne centrale est le triangle exact de départ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Y' & & & & \\
 & \swarrow \exists \varphi & \downarrow f' & \searrow 0 & & & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 & \searrow 0 & \downarrow g' & \swarrow \exists \psi & & & \\
 & & Y'' & & & &
 \end{array}$$

Démonstration. Dans le premier cas, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y' & \xrightarrow{1_{Y'}} & Y' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y'[1] \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow & & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1]
 \end{array}$$

dont les lignes sont des triangles exacts, on le complète par TR3 en un morphisme de triangles, d'où le résultat. On raisonne de même dans le second cas. \square

2.3 Sous-catégorie stable par extension d'une catégorie triangulée

Nous savons que les catégories exactes peuvent-être définies comme des sous catégories stables par extension d'une catégorie abélienne. On souhaite utiliser la même construction sur une catégorie triangulée pour comparer les résultats obtenus, on fixe donc \mathcal{T} une catégorie triangulée, et \mathcal{C} une sous-catégorie pleine **stable par extension** de \mathcal{T} , c'est-à-dire que pour tout triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

dans \mathcal{T} , si $X, Y \in \mathcal{C}$, alors c'est aussi le cas de Z .

Commençons par noter que l'on ne sait rien de l'objet $X[1]$, il n'y a donc pas de raison de pouvoir transporter la structure triangulée de \mathcal{T} sur \mathcal{C} : on ne peut même pas transporter l'information du foncteur de translation. Comme on souhaite imiter la construction des catégories exactes, on souhaite prendre comme 'conflations' les suites de morphismes dans \mathcal{C} induites par les triangles distingués (comme les conflations classiques sont induites par les suites exactes courtes).

Cependant, cette construction ne donnera certainement pas une structure de catégorie exacte : les triangles distingués ne donnent pas des couples noyau-conoyau, mais des couples noyau-conoyau homotopiques, c'est ici que nos constructions homotopiques vont servir.

Par abus de langage, on appellera donc

- **Conflation** (f, g) dans \mathcal{C} une suite de morphismes composables $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ telle qu'il existe un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ dans \mathcal{T} .
- **Inflation** dans \mathcal{C} un morphisme f tel qu'il existe une conflation (f, g)
- **Déflation** dans \mathcal{C} un morphisme g tel qu'il existe une conflation (f, g) .

La construction qui s'ensuit est fortement calquée sur le cas des catégories exactes classiques, telles que nous l'avons développée dans [2] à partir de l'exposition de [1].

Lemme 2.21. *La catégorie \mathcal{C} est additive.*

Démonstration. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$, on a $\mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{T}(X, Y)$ car \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine, donc $\mathcal{C}(X, Y)$ est bien un \mathbb{Z} -module, et la composition est bien \mathbb{Z} -bilinéaire car il s'agit de la composition de \mathcal{T} .

Ensuite, on sait que $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ et $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow 0$ sont des triangles distingués dans \mathcal{T} , donc leur somme directe

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Y \xrightarrow{0} X[1]$$

est un triangle distingué dans \mathcal{T} , comme \mathcal{C} est stable par extension, on obtient $X \oplus Y \in \mathcal{C}$, et $X \oplus Y$ satisfait la propriété universelle du biproduit dans \mathcal{C} car il la satisfait dans \mathcal{T} . \square

Comme toujours, on souhaite examiner la structure héritée sur \mathcal{C}^{op} , qui est une sous-catégorie pleine stable par extension de la catégorie triangulée \mathcal{T}^{op} , il se trouve que les structures sont simplement duales :

Proposition 2.22. *Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée, et \mathcal{C} une sous-catégorie pleine stable par extension de \mathcal{T} , on a équivalence entre :*

- (i) (f, g) est une conflation dans \mathcal{C} .
- (ii) (g, f) est une conflation dans \mathcal{C}^{op} .

Démonstration. Premièrement, (f, g) est une conflation dans \mathcal{C} si et seulement si $(-f, -g)$ en est une, en effet, si

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

est un triangle dans \mathcal{T} donnant la conflation, l'isomorphisme $(-1, 1, -1)$ donne un triangle distingué

$$X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

donc $(-f, -g)$ est bien une conflation.

Ensuite, (g, f) est une conflation dans \mathcal{C}^{op} si et seulement si il existe un triangle distingué (g, f, h) dans \mathcal{T}^{op} , si et seulement si il existe un triangle distingué (h, f, g) dans \mathcal{T} , si et seulement si il existe un triangle $(-f, -g, -h[1])$ dans \mathcal{T} , si et seulement si $(-f, -g)$ est une conflation dans \mathcal{C} , d'où le résultat. \square

Proposition 2.23. *Les inflations et les déflations sont stables par composition.*

Démonstration. Soient $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{u} Y'$ deux inflations, on considère (f, g, h) et (u, v, w) des triangles exacts correspondants dans \mathcal{T} . Le morphisme uf peut être complété dans \mathcal{T} par un triangle distingué, la question étant si ce triangle peut-être choisi dans \mathcal{C} . On a obtenu un diagramme dans \mathcal{T} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow u & & & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{uf} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \\
 & & \downarrow v & & & & \\
 & & Y'' & & & & \\
 & & \downarrow w & & & & \\
 & & Y[1] & & & &
 \end{array}$$

On peut donc appliquer l'axiome de l'octaèdre pour compléter ce diagramme dans \mathcal{T} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow u & & \downarrow u' & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{uf} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \\
 & & \downarrow v & & \downarrow v' & & \\
 & & Y'' & = & Y'' & & \\
 & & \downarrow w & & \downarrow w' & & \\
 & & Y[1] & \xrightarrow{g[1]} & Z[1] & &
 \end{array}$$

Comme Z et Z'' sont des objets de \mathcal{C} par hypothèse sur f et u , le triangle

$$Z \xrightarrow{u'} Z' \xrightarrow{v'} Y'' \xrightarrow{w'} Z[1]$$

a son extension Z' dans \mathcal{C} , donc le triangle $X \xrightarrow{uf} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X[1]$ induit une conflation (uf, g') dans \mathcal{C} , d'où le résultat : d'après la proposition précédente, les inflations de \mathcal{C}^{op} sont exactement les déflations de \mathcal{C} . \square

Proposition 2.24. *Dans \mathcal{C} , le pushout homotopique d'un diagramme $Y' \xleftarrow{y} Y \xrightarrow{g} Z$ existe et est de la forme $Y' \xrightarrow{g'} Z' \xleftarrow{z} Z$, le pullback homotopique d'un diagramme $Y' \xrightarrow{g'} Z' \xleftarrow{z} Z$ existe et est de la forme $Y' \xleftarrow{y} Y \xrightarrow{g} Z$. On peut résumer la situation par les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc}
 Y \xrightarrow{g} Z & & Y' \xrightarrow{g'} Z' \\
 y \downarrow & \text{et} & y \downarrow \\
 Y' \xrightarrow{g'} Z' & & Y' \xrightarrow{g'} Z'
 \end{array}$$

Démonstration. Il suffit de montrer le second point, dual du premier. Soit donc dans \mathcal{C} un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow z \\ Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

Dans \mathcal{T} , il existe un pullback homotopique

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g} & Z \\ y \downarrow & & \downarrow z \\ Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

et donc un triangle

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} Y[1]$$

exact dans \mathcal{T} . On peut alors utiliser l'axiome C , en fixant le triangle (f', g', h') qui donne la conflation (f', g') , on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & \downarrow z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \end{array}$$

Et comme (f, g, h) est un triangle distingué, avec $X \in \mathcal{C}$ et $Z \in \mathcal{C}$, on conclut $Y \in \mathcal{C}$ et le résultat. \square

Nous avons montré les équivalents homotopiques des axiomes des catégories exactes, à présent nous allons pouvoir redérouler le raisonnement donné dans [2] pour atteindre un équivalent du théorème de triangulation des catégories de Frobenius.

Définition 2.10. Un objet $P \in \mathcal{C}$ est dit **\mathcal{T} -projectif** si pour toute déflation $Y \xrightarrow{g} Z$ et morphisme $P \xrightarrow{f} Z$, il existe un morphisme $P \xrightarrow{\varphi} Y$ tel que $g\varphi = f$.

Un objet $I \in \mathcal{C}$ est dit **\mathcal{T} -injectif** si pour toute inflation $X \xrightarrow{f} Y$ et morphisme $X \xrightarrow{g} I$, il existe un morphisme $Y \xrightarrow{\psi} I$ tel que $\psi f = g$.

La situation peut être résumée dans des diagrammes commutatifs,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \swarrow \exists \varphi & & \uparrow f \\ & P & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \swarrow \exists \psi \\ & I & \end{array}$$

mais comme dans le cas des catégories exactes, ces diagrammes ne traduisent pas des propriétés universelles : les morphismes φ et ψ ne sont pas uniques.

Lemme 2.25. Soient $P, I \in \mathcal{C}$, on a les paires d'équivalences suivantes :

- (ai) P est un objet \mathcal{T} -projectif.
- (aii) Toute déflation $Y \twoheadrightarrow P$ est un épimorphisme scindé.
- (bi) I est un objet \mathcal{T} -injectif.
- (bii) Toute inflation $I \hookrightarrow X$ est un monomorphisme scindé.

Démonstration. On montre la première équivalence, duale de la seconde :

(i) \Rightarrow (ii) : Soit $Y \xrightarrow{g} P$ une déflation, en considérant le morphisme $1_P : P \rightarrow P$, on obtient par définition un morphisme $\varphi : P \rightarrow Y$ tel que $g\varphi = 1_P$, φ est donc une section de g .

(ii) \Rightarrow (i) : Soit un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

on peut considérer son pullback homotopique

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & P \\ y \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

par hypothèse, g' admet une section α , le morphisme $y\alpha$ donne le résultat. \square

Lemme 2.26. Si $X, Y \in \mathcal{C}$ sont des objets \mathcal{T} -projectifs (resp. \mathcal{T} -injectifs), alors c'est aussi le cas de $X \oplus Y$.

Démonstration. Par somme directe de triangles exacts, on a (ι_X, π_Y) et (ι_Y, π_X) sont des conflations.

Soit une déflation $B \xrightarrow{g} X \oplus Y$, on a par composition des déflations $\pi_X g$ et $\pi_Y g$, qui sont des épimorphismes scindés par hypothèse, donc admettent des sections x et y , on obtient que

$X \oplus Y \xrightarrow{(x \ y)} B$ est une section de g , d'où le résultat par le lemme précédent, on raisonne de manière duale pour les objets injectifs. \square

Définition 2.11. On dit que \mathcal{C} admet **suffisamment de \mathcal{T} -projectifs** si pour tous $Z \in \mathcal{C}$, il existe une déflation $P \twoheadrightarrow Z$ où P est un objet \mathcal{T} -projectif.

On dit que \mathcal{C} admet **suffisamment de \mathcal{T} -injectifs** si pour tous $Z \in \mathcal{C}$, il existe une inflation $X \hookrightarrow I$ où I est un objet \mathcal{T} -injectif.

On dira enfin que \mathcal{C} est une catégorie de Frobenius faible si elle admet suffisamment de \mathcal{T} -projectifs et de \mathcal{T} -injectifs, et si ceux-ci coïncident.

Nous supposons désormais que \mathcal{C} est une catégorie de Frobenius faible.

Pour $X, Y \in \mathcal{C}$, on pose $P(X, Y)$ (resp. $I(X, Y)$) le sous-ensemble de $\mathcal{C}(X, Y)$ des morphismes qui se factorisent sur un objet \mathcal{T} -projectif (resp. \mathcal{T} -injectif) : un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est un élément de $P(X, Y)$ si et seulement si il existe un objet \mathcal{T} -projectif P , ainsi que des morphismes $f_1 : X \rightarrow P$ et $f_2 : P \rightarrow Y$ tels que $f = f_2 f_1$ (et de manière similaire pour $I(X, Y)$).

Lemme 2.27. Pour tout couple d'objets $X, Y \in \mathcal{C}$, les ensembles $P(X, Y)$ et $I(X, Y)$ sont des sous-groupes de $\mathcal{C}(X, Y)$.

Démonstration. Comme \mathcal{C} est une catégorie de Frobenius faible, il existe des objets \mathcal{T} -projectifs dans \mathcal{C} , donc $0 = 00 \in P(X, Y)$.

Ensuite, si $f = f_2 f_1 \in P(X, Y)$, alors $-f = -f_2 f_1$ et donc $-f \in P(X, Y)$.

Enfin, soient $f, g \in P(X, Y)$ on a des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f_1 & \nearrow f_2 \\ & P & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow g_1 & \nearrow g_2 \\ & P' & \end{array}$$

On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f+g} & Y \\ & \searrow \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} & \nearrow \begin{pmatrix} f_2 & g_2 \end{pmatrix} \\ & P \oplus P' & \end{array}$$

et $P \oplus P'$ est projectif par le lemme 2.26. □

Définition 2.12. Si \mathcal{C} une sous-catégorie pleine stable par extension d'une catégorie triangulée \mathcal{T} , on pose $\bar{\mathcal{C}}$ la **catégorie projectivement stable** de \mathcal{C} , qui possède les mêmes objets que \mathcal{C} , et dont les morphismes sont donnés par

$$\bar{\mathcal{C}}(X, Y) := \mathcal{C}(X, Y) / P(X, Y)$$

on pose alors \bar{f} la classe de $f : X \rightarrow Y$, la composition et les identités sont définies de manière évidente.

On peut de même définir $\underline{\mathcal{C}}$ la **catégorie injectivement stable**, où les espaces de morphismes sont données par le quotient $\mathcal{C}(X, Y) / I(X, Y)$.

Dans le cas où \mathcal{C} est une catégorie de Frobenius faible, les deux définitions coïncident et on appelle simplement $\bar{\mathcal{C}}$ la **catégorie stable** de \mathcal{C} .

Comme on se place dans le cas d'une catégorie de Frobenius faible, tout ce qu'on dira dans la suite à propos d'objets injectifs peut-être remplacé par des objets projectifs, et inversement.

Lemme 2.28. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$, si il existe deux projectifs I et I' tels que $X \oplus P \simeq Y \oplus P'$ dans \mathcal{C} . Alors $X \simeq Y$ dans $\bar{\mathcal{C}}$.

Démonstration. Par hypothèse on a

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : X \oplus P \rightarrow Y \oplus P' \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} : Y \oplus P' \rightarrow X \oplus P$$

tels que

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_X & 0 \\ 0 & 1_P \end{pmatrix}$$

Donc $1_X - \alpha'\alpha = \beta'\gamma$ se factorise sur l'injectif P' , donc $\overline{1_X} = \overline{\alpha'\alpha}$, de même $\overline{1_Y} = \overline{\alpha\alpha'}$ d'où X et Y sont isomorphes dans $\bar{\mathcal{C}}$. □

Comme cas particulier de lemme précédent, pour tout projectif $P \in \mathcal{C}$, on a $X \oplus P \simeq X$ dans $\overline{\mathcal{C}}$, comme $\iota_X \pi_X + \iota_P \pi_P = 1_{X \oplus P}$, on a que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \oplus P & \xrightarrow{1_{X \oplus P} - \iota_X \pi_X} & X \oplus P \\ & \searrow \pi_P \quad \nearrow \iota_P & \\ & P & \end{array}$$

commute, donc $\iota_X : X \rightarrow X \oplus P$ est un isomorphisme dans $\overline{\mathcal{C}}$, d'inverse π_X .

Lemme 2.29. (*Schanuel*)

Soient $X \xhookrightarrow{f} I \xrightarrow{g} Y$ et $X \xhookrightarrow{f'} I' \xrightarrow{g'} Y$ deux conflations, avec I et I' deux injectifs. Alors $Y \oplus I \simeq Y' \oplus I'$, en particulier $Y \simeq Y'$ dans $\overline{\mathcal{C}}$.

Démonstration. On part d'un diagramme dans \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & Y \\ f' \downarrow & & & & \\ I' & & & & \\ g' \downarrow & & & & \\ Y' & & & & \end{array}$$

On peut utiliser un pushout homotopique pour obtenir

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow \varphi & & \\ I' & \xhookrightarrow{\varphi'} & A & & \\ g' \downarrow & & & & \\ Y' & & & & \end{array}$$

et un triangle distingué $X \longrightarrow I \oplus I' \longrightarrow A \longrightarrow X[1]$ dans \mathcal{T} .

Comme (f, g) et (f', g') sont des conflations, on en tire (f, g, h) et (f', g', h') deux triangles exacts dans \mathcal{T} , et donc un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y[-1] & \xrightarrow{-h[-1]} & X & \xrightarrow{-f} & I & \xrightarrow{-g} & Y \\ \parallel & & \downarrow f' & & & & \\ Y[-1] & \xrightarrow{f'h[-1]} & I' & & & & \\ & & \downarrow g' & & & & \\ & & Y' & & & & \\ & & \downarrow h' & & & & \\ & & X[1] & & & & \end{array}$$

On applique l'axiome E qui donne un diagramme dans \mathcal{T} :

$$\begin{array}{ccccccc}
Y[-1] & \xrightarrow{-h[-1]} & X & \xrightarrow{-f} & I & \xrightarrow{-g} & Y \\
\parallel & & \downarrow f' & & \downarrow \varphi & & \parallel \\
Y[-1] & \xrightarrow{f'h[-1]} & I' & \xrightarrow{-\varphi'} & A & \xrightarrow{-\psi} & Y \\
& & \downarrow g' & & \downarrow v & & \\
& & Y' & \xlongequal{\quad} & Y' & & \\
& & \downarrow h' & & \downarrow w' & & \\
& & X[1] & \xrightarrow{f'} & X[1] & &
\end{array}$$

On conclut donc un diagramme dans \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & Y \\
\downarrow f' & & \downarrow \varphi & & \parallel \\
I' & \xrightarrow{\varphi'} & A & \xrightarrow{\psi} & Y \\
\downarrow g' & & \downarrow v & & \\
Y' & \xlongequal{\quad} & Y' & &
\end{array}$$

Comme I et I' sont injectifs, φ et φ' sont des inflations, elles sont scindées, donc $A \simeq I \oplus Y' \simeq I' \oplus Y$ par le lemme 2.19 d'où le résultat. \square

Bien-sûr cet exposé avait pour but de nous amener au résultat que la catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ est triangulée, de la même manière que la catégorie stable d'une catégorie de Frobenius (au sens classique) est triangulée. Nous voulons donc construire dans un premier temps le foncteur $\langle 1 \rangle$ de suspension sur la catégorie $\overline{\mathcal{C}}$, et ensuite fixer une classe de triangles distingués (et bien-sûr montrer que cette classe fait de $\overline{\mathcal{C}}$ une catégorie triangulée), la construction du foncteur $\langle 1 \rangle$ est fortement similaire à celle du cas classique, elle est calquée sur l'exposé de [7], la triangulation de $\overline{\mathcal{C}}$ en revanche repose sur des arguments légèrement différents (la preuve du cas classique repose fortement sur les propriétés des noyaux-conoyaux et l'unicité des morphismes donnés par propriété universelle auxquels nous n'avons pas accès ici), la deuxième partie repose donc sur des arguments issus de [9] (section 4), qui montre un résultat de triangulation similaire dans un cadre plus général que le notre.

Nous construisons $\langle 1 \rangle : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ notre foncteur de translation, on commence par construire un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ et nous montrons que ce foncteur envoie les éléments de $I(X, Y)$ sur 0 pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$, ce foncteur induira alors un foncteur $\langle 1 \rangle : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$.

Soit $X \in \mathcal{C}$, comme \mathcal{C} admet suffisamment de \mathcal{T} -injectifs, il existe un objet injectif $I(X)$ et une inflation $\iota_X : X \hookrightarrow I(X)$, autrement dit, il existe dans \mathcal{T} un triangle exact

$$X \xrightarrow{\iota_X} I(X) \xrightarrow{\pi_X} X' \xrightarrow{h_X} X[1]$$

Pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, on **choisit** un tel triangle, nous allons alors poser $X' := X\langle 1 \rangle$, ils nous reste à régler le cas des morphismes : soit $f : X \rightarrow Y$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \\
\downarrow f & & & & & & \downarrow f[1] \\
Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_Y} & Y[1]
\end{array}$$

Comme ι_X est une inflation, et $\iota_Y f : X \rightarrow I(Y)$ a pour codomaine un objet \mathcal{T} -injectif, il existe un morphisme (non unique) $f' : I(X) \rightarrow I(Y)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & & & \downarrow f[1] \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_Y} & Y[1] \end{array}$$

Par TR3, nous pouvons compléter ce diagramme en un morphisme de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' & & \downarrow f[1] \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_Y} & Y[1] \end{array}$$

Nous souhaitons poser $f\langle 1 \rangle := f''$, mais il n'y a pas unicité du morphisme f'' à priori, en fait, on n'a pas unicité de f'' dans \mathcal{C} , on aura unicité de $\overline{f''}$ dans $\overline{\mathcal{C}}$: soit en effet un autre diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'' & & \downarrow f[1] \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_Y} & Y[1] \end{array}$$

, on a $h_Y(\varphi'' - f'') = f[1]h_X - f[1]h_X = 0$, comme π_Y est un noyau faible de h_Y , on obtient un morphisme $\theta : X\langle 1 \rangle \rightarrow I(Y)$ tel que $\varphi'' - f'' = \pi_Y \theta$, donc $\varphi'' - f''$ se factorise sur l'injectif $I(Y)$, et donc $\overline{\varphi'' - f''} = 0$, d'où l'unicité de $\overline{f''}$ dans $\overline{\mathcal{C}}$. On peut donc poser $\overline{f}\langle 1 \rangle := \overline{f''}$, on a construit $\langle 1 \rangle : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ (il est clair qu'il s'agit bien d'un foncteur covariant).

Montrons que ce foncteur induit un foncteur $\overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$: soit $f : X \rightarrow Y$ se factorisant sur un injectif I , on obtient deux triangles commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & \nearrow h & \\ I & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{f''} & Y\langle 1 \rangle \\ g'' \downarrow & \nearrow h'' & \\ I\langle 1 \rangle & & \end{array}$$

avec $\overline{f''} = \overline{f}\langle 1 \rangle$, $\overline{h''} = \overline{h}\langle 1 \rangle$, et $\overline{g''} = \overline{g}\langle 1 \rangle$, pour conclure que f'' se factorise sur un injectif, il nous suffit de montrer que $I\langle 1 \rangle$ est un objet \mathcal{T} -injectif, par hypothèse, on a dans \mathcal{C} une conflation

$$I \xrightarrow{\iota_I} I(I) \xrightarrow{\pi_I} I\langle 1 \rangle$$

comme I est un injectif, le lemme de scindage nous donne que $I(I) \simeq I \oplus I\langle 1 \rangle$, donc $I\langle 1 \rangle$ est injectif : toute inflation $I\langle 1 \rangle \xrightarrow{i} Z$ donne une inflation $I \oplus I\langle 1 \rangle \rightarrow Z$, qui est alors scindée. Donc $I\langle 1 \rangle$ est injectif et $f\langle 1 \rangle = 0$, donc le foncteur $\langle 1 \rangle$ induit bien un endofoncteur $\overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$.

Proposition 2.30. *Le foncteur $\langle 1 \rangle : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ que nous avons construit est une autovalence.*

Démonstration. L'application induite par $\langle 1 \rangle$ sur les morphismes est clairement \mathbb{Z} -linéaire. On construit explicitement le quasi-inverse $\langle -1 \rangle$ de $\langle 1 \rangle$: notre construction de ce dernier ne faisait appel qu'aux objets \mathcal{T} -injectifs, en effectuant un raisonnement similaire sur les objets \mathcal{T} -projectifs, on obtient des diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X \langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_X} & P(X) & \xrightarrow{p_X} & X \\ \downarrow "f & & \downarrow 'f & & \downarrow f \\ Y \langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_Y} & P(Y) & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

et donc un foncteur $\langle -1 \rangle : \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$, et dans le cas de Frobenius faible, un foncteur $\overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$. On considère la conflation

$$X \langle -1 \rangle \hookrightarrow I(X \langle -1 \rangle) \twoheadrightarrow X \langle -1 \rangle \langle 1 \rangle$$

Par le lemme de Schanuel, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X \langle -1 \rangle & \hookrightarrow & I(X \langle -1 \rangle) & \twoheadrightarrow & X \langle -1 \rangle \langle 1 \rangle \\ \parallel & & \downarrow \gamma_X & & \downarrow \eta_X \\ X \langle -1 \rangle & \hookrightarrow & P(X) & \twoheadrightarrow & X \end{array}$$

où $\overline{\eta_X}$ est un isomorphisme dans $\overline{\mathcal{C}}$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, on obtient deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} X \langle -1 \rangle & \xrightarrow{\iota_X \langle -1 \rangle} & I(X \langle -1 \rangle) & \xrightarrow{\pi_X \langle -1 \rangle} & X \langle -1 \rangle \langle 1 \rangle \\ \parallel & & \downarrow \gamma_X & & \downarrow \eta_X \\ X \langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_X} & P(X) & \xrightarrow{p_X} & X \\ \downarrow "f & & \downarrow 'f & & \downarrow f \\ Y \langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_Y} & P(Y) & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} X \langle -1 \rangle & \xrightarrow{\iota_X \langle -1 \rangle} & I(X \langle -1 \rangle) & \xrightarrow{\pi_X \langle -1 \rangle} & X \langle -1 \rangle \langle 1 \rangle \\ \downarrow "f & & \downarrow ("f)' & & \downarrow ("f)" \\ Y \langle -1 \rangle & \xrightarrow{\iota_Y \langle -1 \rangle} & I(Y \langle -1 \rangle) & \xrightarrow{\pi_Y \langle -1 \rangle} & Y \langle -1 \rangle \langle 1 \rangle \\ \parallel & & \downarrow \gamma_Y & & \downarrow \eta_Y \\ Y \langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_Y} & P(Y) & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

Ces deux diagrammes donnent deux morphismes $f\eta_X$ et $\eta_Y("f)"$ qui sont donnés à partir de $"f : X \langle -1 \rangle \rightarrow Y \langle -1 \rangle$, donc ils sont égaux dans $\overline{\mathcal{C}}$, donc $\overline{\eta}$ donne bien un isomorphisme naturel dans $\overline{\mathcal{C}}$ entre $\langle -1 \rangle \langle 1 \rangle$ et $1_{\overline{\mathcal{C}}}$, on construit de même un isomorphisme $\langle 1 \rangle \langle -1 \rangle \rightarrow 1_{\overline{\mathcal{C}}}$ qui donne le résultat. \square

Nous pouvons à présent fixer la classe des triangles exacts dans $\overline{\mathcal{C}}$, mais avant, notons que nous avons fait un choix de conflation pour construire notre foncteur $\langle 1 \rangle$, on peut se demander quelles sont les éventuelles interactions entre un choix et un autre, soit donc pour $X \in \mathcal{C}$ un autre choix de triangle exact dans \mathcal{T} :

$$X \xrightarrow{i_X} I'(X) \xrightarrow{p_X} X\{1\} \xrightarrow{\theta_X} X[1]$$

ou $I'(X)$ est toujours un objet \mathcal{T} -injectif. Le lemme de Schanuel nous donne pour tout $X \in \mathcal{C}$ un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \\
\parallel & & \downarrow \gamma_X & & \downarrow \eta_X & & \parallel \\
X & \xrightarrow{i_X} & I'(X) & \xrightarrow{p_X} & X\{1\} & \xrightarrow{\theta_X} & X[1]
\end{array}$$

Où $\overline{\eta_X}$ est un isomorphisme dans $\overline{\mathcal{C}}$, nous allons alors montrer :

Proposition 2.31. *La classe des morphismes $\overline{\eta_X}$ donne un isomorphisme naturel dans $\overline{\mathcal{C}}$ entre les foncteurs $\langle 1 \rangle$ et $\{1\}$.*

Démonstration. Nous avons déjà montré que les $\overline{\eta_X}$ sont des isomorphismes, il reste à vérifier que $\overline{\eta}$ est bien une transformation naturelle, pour $\overline{f} \in \overline{\mathcal{C}}(X, Y)$, on a un diagramme dans \mathcal{T} dont les faces sont commutatives

$$\begin{array}{ccccccccc}
X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \\
\parallel & \searrow f & \downarrow \gamma_X & \searrow f' & \downarrow \eta_X & \searrow f'' & \parallel & \searrow f[1] \\
X & \xrightarrow{i_X} & I'(X) & \xrightarrow{p_X} & X\{1\} & \xrightarrow{\theta_X} & X[1] \\
\downarrow f & & \downarrow \phi' & & \downarrow \phi'' & & \downarrow f[1] \\
Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_Y} & Y[1] \\
\parallel & \searrow \gamma_Y & \downarrow \gamma_Y & \searrow \eta_Y & \parallel & \searrow \theta_Y & \parallel \\
Y & \xrightarrow{i_Y} & I'(Y) & \xrightarrow{p_Y} & Y\{1\} & \xrightarrow{\theta_Y} & Y[1]
\end{array}$$

Il nous faut montrer que la troisième face intérieure de ce diagramme est commutative dans $\overline{\mathcal{C}}$:

$$\begin{array}{ccc}
X\{1\} & \xleftarrow{\eta_X} & X\langle 1 \rangle \\
\phi'' \downarrow & & \downarrow f'' \\
Y\{1\} & \xleftarrow{\eta_Y} & Y\langle 1 \rangle
\end{array}$$

On a d'après le diagramme ci dessus

$$\begin{aligned}
\theta_Y \phi'' \eta_X &= f[1] \theta_X \eta_X \\
&= f[1] h_X \\
&= h_Y f'' \\
&= \theta_Y \eta_Y f''
\end{aligned}$$

Donc le morphisme $\eta_Y f'' - \phi'' \eta_X$ est annulateur de θ_Y et donc se factorise sur son noyau faible : l'objet \mathcal{T} -injectif $I'(Y)$, il s'agit donc du morphisme nul dans $\overline{\mathcal{C}}$ d'où le résultat. \square

À présent, il nous reste à fixer la classe des triangles distingués : Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans \mathcal{C} . On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) \\
\downarrow u & & \\
Y & &
\end{array}$$

Dont on peut considérer un pushout homotopique

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) \\ f \downarrow & & \downarrow a \\ Y & \xrightarrow{b} & Y' \end{array}$$

on a donc dans \mathcal{T} un triangle exact

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \iota_X \\ f \end{pmatrix}} I(X) \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}} Y' \xrightarrow{\delta} X[1]$$

avec $\overline{\begin{pmatrix} \iota_X \\ f \end{pmatrix}} = \bar{f}$ car $I(X)$ est un objet \mathcal{T} -injectif, on donc peut choisir un représentant de \bar{f} qui soit une inflation dans \mathcal{C} , on peut donc supposer que f est une inflation, il existe donc un diagramme commutatif dont les lignes sont des triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \end{array}$$

avec $Z \in \mathcal{C}$, comme $I(X)$ est un objet \mathcal{T} -injectif, il existe un morphisme $y : Y \rightarrow I(X)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \end{array}$$

Nous pouvons appliquer l'axiome B dans \mathcal{T} pour compléter ce diagramme par un pushout homotopique :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & \downarrow h' & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \end{array}$$

On appelle alors **triangle standard** dans $\bar{\mathcal{C}}$ le triangle

$$X \xrightarrow{\bar{f}} Y \xrightarrow{\bar{g}} Z \xrightarrow{\bar{h}'} X\langle 1 \rangle$$

(plus précisément, un triangle sera dit standard si les morphismes qui le composent admettent des représentants dans \mathcal{C} qui s'incluent dans un diagramme tels que nous l'avons construit).

Théorème 2.1. *La catégorie $\bar{\mathcal{C}}$, munie du foncteur $\langle 1 \rangle$ et de la classe des triangles isomorphes dans $\bar{\mathcal{C}}$ à un triangle standard forme une catégorie triangulée.*

Démonstration. Par définition, la classe des triangles exacts dans $\bar{\mathcal{C}}$ est stable par isomorphisme de triangles, on vérifie ensuite les axiomes un par un :

TR0 : On montre que le triangle $(1_X, 0, 0)$ est exact, on aura le résultat par TR2 et l'isomorphisme $[1, -1, 1]$ (nous n'utiliserons donc pas TR0 dans sa forme initiale pour montrer TR2 bien-sûr). On a dans \mathcal{T} un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \parallel & & \downarrow \iota_X & & \downarrow & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \end{array}$$

qui donne bien un carré homotopique car le triangle $X \xrightarrow{\iota_X} I(X) \xrightarrow{\pi_X} X\langle 1 \rangle \xrightarrow{h_X} X[1]$ est exact dans \mathcal{T} . Donc $(1_{\bar{X}}, 0, 0)$ est bien un triangle standard dans $\bar{\mathcal{C}}$.

TR1 : Soit $\bar{f} : X \rightarrow Y$ un morphisme dans $\bar{\mathcal{C}}$, on a construit un triangle standard $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}')$ dans notre définition des triangles standards.

TR2 : Par définition, il suffit de régler le cas des triangles standards, soit donc dans \mathcal{T} un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & \downarrow h' & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \end{array}$$

Tel que le carré central soit un carré homotopique, on peut construire un diagramme commutatif dans \mathcal{T} donnant un triangle standard :

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} & Z \oplus I(X) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h' & \pi_X \end{pmatrix}} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{f[1]h_X} & Y[1] \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} & & \downarrow a' & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_Y} & Y[1] \end{array}$$

On a donc

$$(a'h' \quad a'\pi_Y) = (\pi_Y p \quad \pi_Y q)$$

et $a'\pi_X = \pi_Y q$, de plus,

$$\begin{aligned} (p \quad q) \begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix} &= -pg + qy = \iota_Y \\ \Rightarrow \iota_Y f &= -pgf + qyf = 0 + q\iota_X \end{aligned}$$

en effet $gf = 0$ car (f, g, h') est un triangle exact, et $yf = \iota_X$ par définition de y , donc q et a' s'incluent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow q & & \downarrow a' & & \downarrow f[1] \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_Y} & Y[1] \end{array}$$

Et donc $\overline{a'} = \overline{f}\langle 1 \rangle$. Par définition de $\langle 1 \rangle$, on a $\overline{a'} = \overline{f}\langle 1 \rangle$, on a donc un triangle standard

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus I(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}} X\langle 1 \rangle \xrightarrow{\overline{a'}} Y\langle 1 \rangle$$

isomorphe (dans $\overline{\mathcal{C}}$) au triangle voulu.

TR3 : Comme précédemment, il suffit de réfléchir le cas des triangles standards, soit donc dans $\overline{\mathcal{C}}$ un diagramme commutatif de triangles standards

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\overline{f}} & Y & \xrightarrow{\overline{g}} & Z & \xrightarrow{\overline{h}} & X\langle 1 \rangle \\ \downarrow \overline{x} & & \downarrow \overline{y} & & & & \downarrow \overline{x}\langle 1 \rangle \\ X' & \xrightarrow{\overline{f'}} & Y' & \xrightarrow{\overline{g'}} & Z' & \xrightarrow{\overline{h'}} & X'\langle 1 \rangle \end{array}$$

on obtient dans \mathcal{T} un diagramme, non nécessairement commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\tilde{h}} & X[1] \\ \downarrow x & & \downarrow y & & & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{\tilde{h}'} & X'[1] \end{array}$$

Comme $\overline{yf} = \overline{f'x}$, $yf - f'x$ se factorise sur un objet injectif I :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{yf-f'x} & Y' \\ r \downarrow & \nearrow s & \\ I & & \end{array}$$

Comme on peut supposer que f est une inflation, il existe $t : Y \rightarrow I$ tel que $tf = r$, on remplace donc y par $y - st$, qui appartient à la même classe dans $\overline{\mathcal{C}}$, on obtient

$$f(y - st) - f'x = fy - fst - f'x = 0$$

Donc on peut supposer que le diagramme commute dans \mathcal{T} , on peut appliquer TR3 dans \mathcal{T} pour obtenir un morphisme $z : Z \rightarrow Z'$.

Par construction du foncteur $\langle 1 \rangle$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \\ \downarrow x & & \downarrow x' & & \downarrow x'' & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{\iota_{X'}} & I(X') & \xrightarrow{\pi_{X'}} & X'\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_{X'}} & X'[1] \end{array}$$

Par construction des triangles standards dans $\overline{\mathcal{C}}$, on a des diagrammes commutatifs de triangles exacts dans \mathcal{T}

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\tilde{h}} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow h & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_X} & X[1] \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{\tilde{h}'} & X'[1] \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow h' & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{\iota_{X'}} & I(X') & \xrightarrow{\pi_{X'}} & X'\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_{X'}} & X'[1] \end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned} x[1]\tilde{h}' &= \tilde{h}z \Rightarrow x[1]h_X h = h_{X'} h' z \\ &\Rightarrow h_{X'} x'' h = h_{X'} h' z \\ &\Rightarrow h_{X'} (x'' h - h' z) = 0 \end{aligned}$$

Donc le morphisme $x'' h - h' z$ se factorise sur le \mathcal{T} -injectif $I(X')$ par propriété de noyau faible de $h_{X'}$, donc $\overline{x'' h} = \overline{h' z}$ et $\overline{x\langle 1 \rangle h} = \overline{h' z}$, soit le résultat voulu.

TR4 : On montre l'axiome B dans $\overline{\mathcal{C}}$, on part d'un diagramme dans $\overline{\mathcal{C}}$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y & \xrightarrow{\bar{g}} & Z & \xrightarrow{\bar{h}} & X\langle 1 \rangle \\ \parallel & & \downarrow \bar{y} & & & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\bar{f}'} & Y' & \xrightarrow{\bar{g}'} & Z' & \xrightarrow{\bar{h}'} & X\langle 1 \rangle \end{array}$$

On a vu que l'on pouvait en déduire dans \mathcal{T} un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\tilde{h}} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow y & & & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{\tilde{h}'} & X[1] \end{array}$$

on peut le compléter par B dans \mathcal{T} pour obtenir un triangle distingué

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{f[1]\tilde{h}'} Y[1]$$

On sait par ailleurs que $\bar{f}\langle 1 \rangle$ admet dans \mathcal{C} un représentant φ tels que $h_Y \varphi = f[1]h_X$ (par construction de $\langle 1 \rangle$). On a alors

$$h_Y \varphi h' = f[1]h_X h' = f[1]\tilde{h}'$$

Et donc un diagramme commutatif dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & y \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} & Z' & \xrightarrow{f[1]\tilde{h}'} & Y[1] \\ \parallel & & & & \downarrow \varphi h' & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle & \xrightarrow{h_Y} & Y[1] \end{array}$$

Ce diagramme se complète par l'axiome B' dans \mathcal{T} en un morphisme de triangles tel que le carré central soit homotopique, on a donc un triangle standard dans $\overline{\mathcal{C}}$

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} \overline{-g} \\ \overline{y} \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} \overline{z} & \overline{g'} \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\bar{f}\langle 1 \rangle \bar{h}'} Y[1]$$

ce qui est bien le résultat recherché. \square

Troisième partie

Catégories extriangulées

La section précédente nous a permis de mettre en évidence un lien assez fort entre catégories exactes et sous-catégorie pleine et stable par extension d'une catégorie triangulée. Ce lien nous enjoint à rechercher une structure plus englobante qui contiendrait ces deux notions, une telle structure est introduite dans [13] pour étudier les paires de cotorsion : les catégories extriangulées. Nous redonnons ici les définitions et premiers résultats affiliés à ce concept, afin de faire apparaître le lien dont nous parlions plus haut.

L'idée derrière les catégories extriangulées est d'extraire la notion d'extension sur une catégorie additive : on a vu dans la section 1.3.1 que l'on pouvait formuler une notion d'extension sur une catégorie exacte, on peut d'ailleurs construire dans certain cas un foncteur Ext^1 comme pour les catégories abéliennes (construction donnée dans [1]). Nous ne l'avons pas mentionné, mais il est aussi possible de munir une catégorie triangulée d'un foncteur $\text{Ext}^1 = \mathcal{T}(-, ?[1])$ qui classe lui aussi en un sens les extensions.

3.1 Définitions et vocabulaire

3.1.1 Extensions d'une catégorie additive

À partir d'ici, on considère \mathcal{C} une catégorie additive, et

$$\mathbb{E} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Ab}$$

un foncteur biadditif, c'est ce foncteur qui va 'imiter' le foncteur Ext des cas précédents.

Définition 3.1. Soient $X, Z \in \mathcal{C}$ et $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$, le triplet (X, δ, Z) est appelé une \mathbb{E} -*extension* (de Z par X), en l'absence d'ambiguïté, on appellera simplement δ une extension.

Par le théorème 1.1, dans une catégorie abélienne, il y a une bijection entre $\text{Ext}^1(Z, X)$ et les classes d'équivalences d'extensions de Z par X , donc notre définition prend du sens dans ce contexte.

Soit (X, δ, Y) une \mathbb{E} -extension, comme \mathbb{E} est un bifoncteur, pour $f : X \rightarrow X'$ et $g : Z' \rightarrow Z$ des morphismes dans \mathcal{C} , on a des \mathbb{E} -extensions

$$\mathbb{E}(Z, f)(\delta) \in \mathbb{E}(Z, X') \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(g, Y)(\delta) \in \mathbb{E}(Z', X)$$

On notera respectivement $f_*\delta$ et $g^*\delta$ ces extensions. On a dans cette terminologie

$$\mathbb{E}(g, f)(\delta) = f_*g^*\delta = g^*f_*\delta \in \mathbb{E}(Z', X')$$

car \mathbb{E} est un bifoncteur.

Définition 3.2. Soient (X, δ, Z) et (X', δ', Z') deux \mathbb{E} -extensions. On appelle *morphisme de \mathbb{E} -extensions* de (X, δ, Z) dans (X', δ', Z') un couple $(f, g) \in \mathcal{C}(X, X') \times \mathcal{C}(Z, Z')$ tel que

$$f_*\delta = g^*\delta' \in \mathbb{E}(Z, X')$$

Lemme 3.1. *Les \mathbb{E} -extensions de \mathcal{C} , munies des morphismes que nous venons de définir, forment une catégorie (localement petite) que l'on note $\mathbb{E}\text{-ext}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. On définit la composition des morphismes comme suit : soient

- $(X_1, \delta_1, Z_1), (X_2, \delta_2, Z_2), (X_3, \delta_3, Z_3)$ des \mathbb{E} -extensions.
- $(f_1, g_1) : (X_1, \delta_1, Z_1) \rightarrow (X_2, \delta_2, Z_2)$ et $(f_2, g_2) : (X_2, \delta_2, Z_2) \rightarrow (X_3, \delta_3, Z_3)$ des morphismes de \mathbb{E} -extensions.

On définit la composition par

$$(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) := (f_2 f_1, g_2 g_1)$$

montrons que l'on définit bien ainsi un morphisme de \mathbb{E} -extensions : on a

$$\begin{aligned} (f_2 f_1)_* \delta_1 &= \mathbb{E}(Z_1, f_2 f_1)(\delta_1) \\ &= \mathbb{E}(Z_1, f_2)(\mathbb{E}(Z_1, f_1)(\delta_1)) \\ &= (f_2)_*((f_1)_* \delta_1) \\ &= (f_2)_*((g_1)^* \delta_2) \\ &= (g_1)^*((f_2)_* \delta_2) \\ &= (g_1)^*((g_2)^* \delta_3) \\ &= (g_2 g_1)^* \delta_3 \end{aligned}$$

Car \mathbb{E} est contravariant en sa première composante. Il est alors clair que la composition est associative, car issue de celle de \mathcal{C} , et que $1_{(X, \delta, Z)} := (1_X, 1_Z)$ donne bien les morphismes identités. \square

On remarque que par construction, l'ensemble $\mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})((X, \delta, Z), (X', \delta', Z'))$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(X, X') \times \mathcal{C}(Z, Z')$. La biadditivité de \mathbb{E} permet de dire plus :

Lemme 3.2. *Pour (X, δ, Z) et $(X', \delta', Z') \in \mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})$, l'ensemble*

$$\mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})((X, \delta, Z), (X', \delta', Z'))$$

est un sous-groupe de $\mathcal{C}(X, X') \times \mathcal{C}(Z, Z')$.

Démonstration. Soient (f, g) et (f', g') deux tels morphismes, on a

$$\begin{aligned} (f + f')_* \delta &= f_* \delta + f'_* \delta \\ &= g^* \delta' + g'^* \delta' \\ &= (g + g')^* \delta' \end{aligned}$$

donc $(f + f', g + g') \in \mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})((X, \delta, Z), (X', \delta', Z'))$, et

$$(-f)_* \delta = -f_* \delta = -g^* \delta' = (-g)^* \delta$$

donc $(-f, -g)$ également, il est clair que c'est aussi le cas de $(0, 0)$. \square

Comme la composition de $\mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})$ est issue de celle de \mathcal{C} , elle est clairement \mathbb{Z} -linéaire, ce qui fait de $\mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})$ une catégorie \mathbb{Z} -linéaire.

Ensuite, étant données (X, δ, Z) et (X', δ', Z') des extensions, comme \mathbb{E} est biadditif, on a que $\mathbb{E}(X \oplus X', Z \oplus Z')$ réalise dans \mathfrak{Ab} le biproduit

$$\mathbb{E}(X, Z) \oplus \mathbb{E}(X, Z') \oplus \mathbb{E}(X', Z) \oplus \mathbb{E}(X', Z')$$

on peut alors considérer $(\delta, 0, 0, \delta') \in \mathbb{E}(X \oplus X', Z \oplus Z')$, on vérifie sans peine que ceci réalise un biproduit dans $\mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})$ justement car \mathbb{E} est additif. Enfin, l'extension $(0, 0, 0)$ est un objet 0 dans $\mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})$ ², d'où :

Proposition 3.3. *La catégorie $\mathbb{E} - \text{ext}(\mathcal{C})$ est additive.*

On notera $\delta \oplus \delta'$ le biproduit de deux extensions, on remarque que notre définition du biproduit d'extensions fait que si (X, δ, Z) et (X', δ', Z') sont deux extensions, on a

$$\delta + \delta' = (\nabla_X)_*(\Delta_Z)^*(\delta \oplus \delta')$$

Ce qui n'est bien-sûr pas sans rappeler la définition de la somme de Baer de la proposition 1.31.

Lemme 3.4. *Soit (X, δ, Z) une \mathbb{E} -extension, on a*

(a) *Tout morphisme $f : X \rightarrow X'$ induit un morphisme de \mathbb{E} -extensions*

$$(f, 1_Z) : (X, \delta, Z) \rightarrow (X', f_*\delta, Z)$$

(b) *Tout morphisme $g : Z' \rightarrow Z$ induit un morphisme de \mathbb{E} -extensions*

$$(1_X, g) : (X, \delta, Z) \rightarrow (X, g^*\delta, Z')$$

Démonstration. Il suffit de tester la condition de commutativité, mais elle est claire par définition :

$$f_*\delta = 1_Y^*(f_*\delta)$$

et de même dans le second cas. □

On sait que dans les catégories abéliennes, les groupes Ext^1 déterminent les extensions de suites exactes courtes à *équivalence près*, on développe donc une notion similaire d'équivalence dans \mathcal{C} .

Définition 3.3. Soient $X, Z \in \mathcal{C}$ un couple d'objets. Deux suites de morphismes composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z$$

seront dites **équivalentes** s'il existe un isomorphisme $y : Y \rightarrow Y'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \parallel & & \downarrow y & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \end{array}$$

On notera $[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$ la classe d'équivalence de la suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

2. cette dernière remarque est nécessaire, étant donné que nous n'avons auparavant pas montré que les biproduits finis vides existent

Notation. Pour $X, Z \in \mathcal{C}$, on pose

$$0 := [X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Z \xrightarrow{\pi_Z} Z]$$

et

$$[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z] \oplus [X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'] := [X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z']$$

À présent, on cherche à reconstruire un résultat similaire au théorème 1.1, on se donne donc une correspondance \mathfrak{s} qui à une \mathbb{E} -extension (X, δ, Z) associe une classe d'équivalence de la forme

$$[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$$

Comme on souhaite faire le lien entre les \mathbb{E} -extensions de \mathcal{C} et des suites de morphismes composables, on introduit une condition naturelle à cet égard :

Définition 3.4. Soit \mathfrak{s} une correspondance définie comme précédemment. On dit que \mathfrak{s} est une **réalisation** de \mathbb{E} si elle respecte la condition suivante :

Si $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$ et $\delta' \in \mathbb{E}(Z', X')$ sont deux extensions, alors tout morphisme de \mathbb{E} -extension $(x, z) : (X, \delta, Y) \rightarrow (X', \delta', Y')$ doit pouvoir se compléter dans \mathcal{C} en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \end{array}$$

pour $[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z] = \mathfrak{s}(\delta)$ et $[X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z] = \mathfrak{s}(\delta')$.

Par définition de l'équivalence des suites, cette condition ne dépend pas du choix de représentant. Dans cette situation, on dit que le triplet $[x, y, z]$ **réalise** le morphisme (x, z) et

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ **réalise** (X, δ, Z) .

Afin d'avoir un comportement similaire à celui du Ext^1 , on doit ajouter une condition d'additivité à \mathfrak{s} :

Définition 3.5. Une réalisation \mathfrak{s} de \mathbb{E} est dite **additive** si on a

- L'extension scindée est envoyée sur la suite scindée :

$$\mathfrak{s}(0) = 0$$

pour $0 \in \text{Ext}(Z, X)$.

- La réalisation commute au biproduit : pour (X, δ, Z) et (X', δ', Z') deux extensions, on a

$$\mathfrak{s}(\delta \oplus \delta') = \mathfrak{s}(\delta) \oplus \mathfrak{s}(\delta')$$

Lemme 3.5. Si \mathfrak{s} est une réalisation additive de \mathbb{E} , alors pour tous $X, Z \in \mathcal{C}$, si

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

réalise l'extension $(X, 0, Z)$, alors

- (a) g admet une section s .
- (b) f admet une rétraction r .
- (c) Le morphisme $\begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} : Y \rightarrow X \oplus Z$ est un isomorphisme, d'inverse $(f \ s)$.

Démonstration. Par hypothèse, l'extension $(X, 0, Z)$ est réalisée par la suite

$$X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Z \xrightarrow{\pi_Z} Z$$

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & X \oplus Z & \xrightarrow{\pi_Z} & Z \end{array}$$

qui donne immédiatement le résultat. □

De plus, on remarque que pour $f : X \rightarrow Z$, la suite

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -f \end{pmatrix}} X \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 1 \end{pmatrix}} Z$$

réalise l'extension $(X, 0, Z)$.

Une fois passées ces premières définitions, nous allons pouvoir en venir à la définition de catégorie extriangulée, néanmoins nous donnons avant de poursuivre deux terminologies issues des catégories exactes/triangulées afin de permettre l'expression de certains résultats en des termes familiers :

Définition 3.6. Soit \mathfrak{s} une réalisation additive de \mathbb{E} .

- Une suite

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

sera appelée une **conflation** si elle réalise une extension $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$.

- Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} sera appelé une **inflation** s'il existe une conflation de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

- Un morphisme $g : Y \rightarrow Z$ dans \mathcal{C} sera appelé une **déflation** s'il existe une conflation de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

- Le couple formé par une conflation et une extension qu'elle réalise sera appelé un \mathbb{E} -triangle, on notera

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} X$$

un tel couple.

Dans la suite, on notera le plus souvent la notation en \mathbb{E} -triangles, cette notation permettant de spécifier l'extension réalisée par une conflation. Bien-sûr cette notation a pour but d'imiter le cas triangulé, dans lequel les extensions sont bien des morphismes $\delta \in \mathcal{T}(Z, X[1])$.

3.1.2 Catégories pré-extriangulées

Dans la suite, on reprend \mathcal{C} une catégorie additive, munie d'un foncteur biadditif \mathbb{E} et d'une réalisation additive \mathfrak{s} .

Définition 3.7. Soient deux \mathbb{E} -triangles

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \quad \text{et} \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{\delta'} \rightarrow$$

si $(x, y) : (X, \delta, Z) \rightarrow (X', \delta', Z')$ est un morphisme de \mathbb{E} -extensions réalisé par un triplet $[x, y, z]$, on dit que le triplet $[x, y, z]$ est un **morphisme de \mathbb{E} -triangles**. On représentera un tel morphisme par un diagramme 'commutatif'

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \xrightarrow{\delta'} \rightarrow \end{array}$$

Définition 3.8. Soit \mathcal{C} une catégorie additive. On dit qu'un triplet $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ forme une **catégorie pré-extriangulée** si il vérifie les axiomes suivants :

- (ET1) $\mathbb{E} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Ab}$ est un foncteur biadditif.
- (ET2) \mathfrak{s} est une réalisation additive de \mathbb{E} .
- (ET3) Tout diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \xrightarrow{\delta'} \rightarrow \end{array}$$

Peut être complété en un morphisme de \mathbb{E} -triangles $[x, y, z]$.

- (ET3)^{op} Tout diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ & & \downarrow y & & \downarrow z \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \xrightarrow{\delta'} \rightarrow \end{array}$$

Peut être complété en un morphisme de \mathbb{E} -triangles $[x, y, z]$.

On choisit ici une approche inspirée davantage de [14] que de [13] en séparant le quatrième axiome (ET4) à venir des trois premiers, en effet les catégories pré-extriangulées possèdent déjà un certain nombres de propriétés qui nous seront utiles. De plus, comme pour les catégories triangulées, on aura un certain choix d'axiomes équivalents pour (ET4).

Notons cependant que contrairement au cas triangulé, l'axiome (ET3) n'est pas équivalent à (ET3)^{op} par les autres axiomes : on a besoin de l'imposer par ailleurs pour que la définition de catégorie pré-extriangulée soit autoduale.

Toujours dans l'optique que le foncteur \mathbb{E} imite le foncteur Ext^1 , on cherche à reproduire un résultat important lié à ce foncteur, à savoir qu'il induit des suites exactes longues à partir de suites exactes courtes (conflations), c'est ce que donne le lemme 1.32 dans le cas abélien (similaire au cas exact), et le caractère (co)homologique du foncteur $\mathcal{T}(-, ?)$ dans le cas triangulé (cf [2], proposition 3.10).

Pour

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

un \mathbb{E} -triangle, et $M \in \mathcal{C}$, on souhaite avoir des suites exactes longues

$$\mathcal{C}(Z, M) \xrightarrow{\hat{g}} \mathcal{C}(Y, M) \xrightarrow{\hat{f}} \mathcal{C}(X, M) \xrightarrow{(\delta^\#)_M} \mathbb{E}(Z, M) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(Y, M) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(X, M)$$

et

$$\mathcal{C}(M, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{C}(M, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{C}(M, Z) \xrightarrow{(\delta_\#)_M} \mathbb{E}(M, X) \xrightarrow{f_*} \mathbb{E}(M, Y) \xrightarrow{g_*} \mathbb{E}(M, Z)$$

Nous allons définir les morphismes de connection $(\delta^\#)_M$ et $(\delta_\#)_M$ à l'aide du lemme de Yoneda (cf [2], lemme 1.3) : tout élément $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$ induit des transformation naturelles

$$\delta_\# : \mathcal{C}(-, Z) \Rightarrow \mathbb{E}(-, X) \quad \text{et} \quad \delta^\# : \mathcal{C}(X, -) \Rightarrow \mathbb{E}(Z, -)$$

Pour $M \in \mathcal{C}$, ces transformations naturelles sont données par

$$\begin{array}{ccc} (\delta_\#)_M : \mathcal{C}(M, Z) & \mapsto & \mathbb{E}(M, X) \\ \varphi & \mapsto & \varphi^* \delta \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} (\delta^\#)_M : \mathcal{C}(X, M) & \mapsto & \mathbb{E}(Z, M) \\ \varphi & \mapsto & \varphi_* \delta \end{array}$$

En l'absence de confusion, on notera $\delta^\#$ et $\delta_\#$ à la place de $(\delta^\#)_M$ et $(\delta_\#)_M$.

Lemme 3.6. *Si $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ est une catégorie pré-extriangulée, alors pour tout \mathbb{E} -triangle*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

on a

- (a) $gf = 0$
- (b) $f_*\delta = d^\#f = 0$
- (c) $g^*\delta = \delta_\#g = 0$

Démonstration. (a) Par (ET2), la conflation

$$X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0$$

réalise $0 \in \mathbb{E}(0, X)$, on applique (ET3) au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1} & X & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow f & & & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\delta} & \rightarrow \end{array}$$

pour obtenir un morphisme de \mathbb{E} -triangles $(1_X, f, 0)$, en particulier on conclut que $gf = 0$ par commutativité.

(b) On applique (ET3) à

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\delta} & \rightarrow \\ \downarrow f & & \parallel & & & & \\ Y & \xrightarrow{1} & Y & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \rightarrow \end{array}$$

pour obtenir $(f, 0) : (X, \delta, Z) \rightarrow (Y, 0, 0)$ un morphisme de \mathbb{E} -extensions, d'où en particulier $f_*\delta = 0^*\delta = 0$

(c) Dual du point précédent.

□

Proposition 3.7. Soit $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ un triplet satisfaisant (ET1) et (ET2). On a équivalence entre

- (i) $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ respecte (ET3) et $(ET3)^{op}$.
- (ii) Pour tout $M \in \mathcal{C}$, tout \mathbb{E} -triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

induit deux suites exactes longues

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(Z, M) &\xrightarrow{\widehat{g}} \mathcal{C}(Y, M) \xrightarrow{\widehat{f}} \mathcal{C}(X, M) \xrightarrow{(\delta^\#)_M} \mathbb{E}(Z, M) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(Y, M) \\ \mathcal{C}(M, X) &\xrightarrow{\widetilde{f}} \mathcal{C}(M, Y) \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathcal{C}(M, Z) \xrightarrow{(\delta^\#)_M} \mathbb{E}(M, X) \xrightarrow{f_*} \mathbb{E}(M, Y) \end{aligned}$$

Remarque. On n'a pas tout à fait la suite exacte attendue : il en manque le dernier terme, qui sera donné par l'adjonction de (ET4) dans la suite.

Démonstration. (\Rightarrow) On ne montre le résultat que pour la première suite, le cas de la seconde suite se traitant de façon duale. Soit $M \in \mathcal{C}$, par le lemme 3.6, la composition de deux morphismes successifs de la suite est nulle, il nous reste seulement les inclusions réciproques à montrer.

Exactitude en $\mathcal{C}(Y, M)$: Soit $y \in \mathcal{C}(Y, M)$ un morphisme tel que $\widehat{f}(y) = yf = 0$. On applique (ET3) à

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\delta} & \rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow y & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1} & M & \xrightarrow{0} & \rightarrow \end{array}$$

pour obtenir $z : Z \rightarrow M$ tel que $zg = y = \widehat{g}(z)$.

Exactitude en $\mathcal{C}(X, M)$: Soit $x : X \rightarrow M$ tel que $(\delta^\#)_M(x) = x_*\delta = 0$. On a donc $(x, 0) : \delta \rightarrow 0$ est un morphisme de \mathbb{E} -extensions. Comme \mathfrak{s} réalise \mathbb{E} , il existe $y : Y \rightarrow M$ tel que $[x, y, 0]$ réalise ce morphisme. En particulier on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\delta} & \rightarrow \\ \downarrow x & & \downarrow y & & & & \\ M & \xrightarrow{1} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \rightarrow \end{array}$$

donc $x = yf = \widehat{f}(y)$.

Exactitude en $\mathbb{E}(Z, M)$: Soit $\theta \in \mathbb{E}(Z, M)$ une extension telle que $\mathbb{E}(g, M)(\theta) = g^*\theta = 0$. On réalise ces deux extensions par des triangles

$$M \xrightarrow{a} N \xrightarrow{b} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \quad \text{et} \quad M \xrightarrow{m} P \xrightarrow{e} Y \xrightarrow{g^*\theta} \rightarrow$$

Le morphisme d'extensions $(1_M, g) : g^*\theta \rightarrow \theta$ est réalisé par un certain triplet $[1_M, e', g]$ avec un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{a} & N & \xrightarrow{b} & Z & \xrightarrow{\delta} & \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow e' & & \downarrow g & & \\ M & \xrightarrow{m} & P & \xrightarrow{e} & Y & \xrightarrow{g^*\theta} & \rightarrow \end{array}$$

La première ligne est scindée par hypothèse, donc e admet une section s par le lemme 3.5. En appliquant $(\text{ET3})^{op}$ à

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \xrightarrow{\delta} \\ & & \downarrow e's & & \parallel \\ M & \xrightarrow{a} & N & \xrightarrow{b} & Z \cdots \xrightarrow{\theta} \end{array}$$

on trouve $x : X \rightarrow M$ qui donne un morphisme $(x, 1_Z) : \delta \rightarrow \theta$ donc $\theta = x_*\delta = \delta^\#x$.

(\Leftarrow) On montre (ET3) , on montrera $(\text{ET3})^{op}$ par dualité. Soit un diagramme dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \xrightarrow{\delta} \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \cdots \xrightarrow{\delta'} \end{array}$$

Par exactitude de la suite

$$\mathcal{C}(Z, Z') \xrightarrow{(\delta'_\#)_Z} \mathbb{E}(Z, X') \xrightarrow{f'_*} \mathbb{E}(Z, Y')$$

et l'égalité

$$f'_*(x_*\delta) = y_*f_*\delta = 0$$

issue du lemme 3.5, il existe $z' \in \mathcal{C}(Z, Z')$ tel que $x_*\delta = z'^*\delta'$, donc (x, z') est un morphisme de \mathbb{E} -extensions, qui admet une réalisation $[x, y', z']$. Alors, par exactitude de

$$\mathcal{C}(Z, Y') \xrightarrow{\hat{g}} \mathcal{C}(Y, Y') \xrightarrow{\hat{f}} \mathcal{C}(X, Y')$$

et l'égalité

$$(y - y')f = f'x - f'x = 0$$

il existe $c : Z \rightarrow Y'$ tel que

$$cg = y - y'$$

on pose alors $z = z' + g'c$ qui donne

$$\begin{aligned} zg &= z'g + g'cg \\ &= g'y' + g'y - g'y' \\ &= g'y \end{aligned}$$

et

$$z^*\delta' = z'^*\delta' + c^*g'^*\delta' = x_*\delta$$

d'où le résultat voulu. □

Corollaire 3.8. Soit $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ une catégorie pré-extriangulée, et un \mathbb{E} -triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

Alors f est un noyau faible de g et g est un conoyau faible de f , au sens de la proposition 2.20

Démonstration. Soit $\varphi : M \rightarrow Y$ tel que $g\varphi = 0$, par exactitude de la suite

$$\mathcal{C}(M, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{C}(M, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{C}(M, Z)$$

on a que φ se factorise sur f . On raisonne de manière duale pour le second point. □

Corollaire 3.9. (Lemme de Scindage)

Si $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ est pré-extriangulée, et

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \xrightarrow{\delta'} \rightarrow \end{array}$$

est un morphisme de \mathbb{E} -triangles. On a équivalence entre

- (i) x se factorise sur f .
- (ii) z se factorise sur g' .
- (iii) $x_*\delta = z^*\delta' = 0$.

En particulier, si $[x, y, z] = [1_X, 1_Y, 1_Z]$ et $\delta = \delta'$, on retrouve le lemme 3.5.

Démonstration. Par définition de $\delta^\#$, on a

$$\delta_{X'}^\#(x) = x_*\delta$$

donc (i) \Leftrightarrow (iii) découle de l'exactitude de

$$\mathcal{C}(Y, X') \xrightarrow{\hat{f}} \mathcal{C}(X, X') \xrightarrow{\delta_{X'}^\#} \mathbb{E}(Z, X')$$

on peut montrer (ii) \Leftrightarrow (iii) de manière duale. □

Corollaire 3.10. (Lemme des 3)

Soient $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ est une catégorie pré-extriangulée et un morphisme de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \xrightarrow{\delta'} \rightarrow \end{array}$$

Alors si deux des trois morphismes x, y, z sont des isomorphismes, il en va de même du troisième.

Démonstration. Dans le cas où x, z sont des isomorphismes, par la proposition 3.7, on a des diagrammes commutatifs à lignes exactes dans \mathfrak{Ab} :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{C}(Y', X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{C}(Y', Y) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathcal{C}(Y', Z) & \xrightarrow{(\delta_{\#})_{Y'}} & \mathbb{E}(Y', X) \\
\downarrow \simeq \tilde{x} & & \downarrow \tilde{y} & & \downarrow \simeq \tilde{z} & & \downarrow \simeq x_* \\
\mathcal{C}(Y', X') & \xrightarrow{\tilde{f}'} & \mathcal{C}(Y', Y') & \xrightarrow{\tilde{g}'} & \mathcal{C}(Y', Z') & \xrightarrow{(\delta'_{\#})_{Y'}} & \mathbb{E}(Y', X') \\
\\
\mathcal{C}(Z', Y) & \xrightarrow{\hat{g}} & \mathcal{C}(Y', Y) & \xrightarrow{\hat{f}'} & \mathcal{C}(X', Y) & \xrightarrow{(\delta'_{\#})_Y} & \mathbb{E}(Z', Y) \\
\downarrow \simeq \hat{z} & & \downarrow \hat{y} & & \downarrow \simeq \hat{x} & & \downarrow \simeq z^* \\
\mathcal{C}(Z, Y) & \xrightarrow{\hat{g}} & \mathcal{C}(Y, Y) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{C}(X, Y) & \xrightarrow{(\delta_{\#})_{Y'}} & \mathbb{E}(Y', X')
\end{array}$$

qui montrent respectivement que y a un inverse à gauche, et à droite.

Le cas où x et y sont des isomorphismes se règle grâce au diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{C}(M, X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{C}(M, Y) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathcal{C}(M, Z) & \xrightarrow{(\delta_{\#})_M} & \mathbb{E}(M, X) & \xrightarrow{f_*} & \mathbb{E}(M, Y) \\
\downarrow \simeq \tilde{x} & & \downarrow \simeq \tilde{y} & & \downarrow \tilde{z} & & \downarrow \simeq x^* & & \downarrow \simeq y_* \\
\mathcal{C}(M, X') & \xrightarrow{\tilde{f}'} & \mathcal{C}(M, Y') & \xrightarrow{\tilde{g}'} & \mathcal{C}(M, Z') & \xrightarrow{(\delta'_{\#})_M} & \mathbb{E}(M, X') & \xrightarrow{f'_*} & \mathbb{E}(M, Y')
\end{array}$$

Le lemme des 5 appliqué dans \mathfrak{Ab} donne que \tilde{z} est toujours un isomorphisme, en particulier pour $M = Z'$, on obtient que z admet un inverse à droite, on peut de même montrer que z admet un inverse à gauche. On raisonne de manière duale pour le dernier cas. \square

Proposition 3.11. *Si $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ est une catégorie pré-extriangulée et*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

est un \mathbb{E} -triangle, alors tout couple d'isomorphismes $x : X \rightarrow X'$ et $z : Z \rightarrow Z'$ induit un \mathbb{E} -triangle

$$X' \xrightarrow{fx^{-1}} Y \xrightarrow{z^{-1}g} Z' \xrightarrow{x_*z^*\delta} \rightarrow$$

Démonstration. Posons

$$\mathfrak{s}(x_*z^*\delta) =: [X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z']$$

Comme

$$(z^{-1})^*(x_*z^*\delta) = (z^{-1})^*z^*x_*\delta = x_*\delta$$

On obtient que $(x, z^{-1}) : \delta \rightarrow x_*z^*\delta$ est un morphisme d'extensions, donc réalisé par un certain $[x, y, z^{-1}]$, y est alors un isomorphisme par le corollaire précédent. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
X' & \xrightarrow{fx^{-1}} & Y & \xrightarrow{z^{-1}g} & Z' \\
\parallel & & \downarrow y & & \parallel \\
X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z'
\end{array}$$

Donc bien le résultat annoncé par définition de l'équivalence des conflations. \square

Corollaire 3.12. Si $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ est une catégorie pré-extriangulée, et

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

est un \mathbb{E} -triangle, alors pour tout $\delta' \in \mathbb{E}(Z, X)$ on a équivalence entre

- (i) $\mathfrak{s}(\delta) = \mathfrak{s}(\delta')$
- (ii) $\delta' = x_*\delta$ pour un certain $x \in \text{Aut}(X)$ tel que $fx = f$.
- (iii) $\delta' = z^*\delta$ pour un certain $z \in \text{Aut}(Z)$ tel que $zg = g$.
- (iv) $\delta' = z^*x_*\delta$ pour un certain couple $x, z \in \text{Aut}(X) \times \text{Aut}(Z)$ tel que $fx = f$ et $zg = g$.

Démonstration. Les implications (ii) \Rightarrow (iv) et (iii) \Rightarrow (iv) sont immédiates (en rajoutant des identités).

(iv) \Rightarrow (i) est conséquence directe de la proposition précédente.

(i) \Rightarrow (ii) Si $\mathfrak{s}(\delta') = \mathfrak{s}(\delta) = [X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$, on applique (ET3)^{op} à

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ & & \parallel & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta'} \rightarrow \end{array}$$

pour obtenir $x : X \rightarrow X$ donnant un morphisme de \mathbb{E} -extensions $(x, 1)$. Par le corollaire 3.10, x est un isomorphisme et on a le résultat par le corollaire précédent, la dernière implication (i) \Rightarrow (iii) se montre symétriquement. \square

Lemme 3.13. Soient $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ une catégorie pré-extriangulée, (X, δ, Z) et (X', δ', Z') deux \mathbb{E} -extensions de \mathcal{C} et

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \text{et} \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'$$

deux suites de morphismes composables dans \mathcal{C} . On a alors équivalence entre

- (i) $\mathfrak{s}(\delta) = [X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$ et $\mathfrak{s}(\delta') = [X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z']$.
- (ii) $\mathfrak{s}(\delta \oplus \delta') = [X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z']$

Démonstration. L'implication (i) \Rightarrow (ii) est immédiate par définition d'une réalisation additive. Pour montrer (ii) \Rightarrow (i), considérons trois \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ X' & \xrightarrow{\alpha'} & M' & \xrightarrow{\beta'} & Z' \xrightarrow{\delta'} \rightarrow \\ X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Z \oplus Z' \xrightarrow{\delta \oplus \delta'} \rightarrow \end{array}$$

Comme \mathfrak{s} est une réalisation additive, il existe $\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : M \oplus M' \rightarrow Y \oplus Y'$ un isomorphisme d'inverse $\psi = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X \oplus X' & \xrightarrow{\alpha \oplus \alpha'} & M \oplus M' & \xrightarrow{\beta \oplus \beta'} & Y \oplus Y' \\ \parallel & & \varphi \updownarrow \psi & & \parallel \\ X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{g \oplus g'} & Y \oplus Y' \end{array}$$

On a donc les relations

$$\begin{aligned} (1) - \varphi(\alpha \oplus \alpha') &= \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha' \\ c\alpha & d\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} \\ (2) - (g \oplus g')\varphi &= \begin{pmatrix} ga & gb \\ g'c & g'q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \\ (3) - \psi(f \oplus f') &= \begin{pmatrix} a'f & b'f' \\ c'f & d'f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} \\ (4) - (\beta \oplus \beta')\psi &= \begin{pmatrix} \beta a' & \beta b' \\ \beta' c' & \beta' d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix} \\ (5) - 1_{Y \oplus Y'} &= \begin{pmatrix} 1_Y & 0 \\ 0 & 1_{Y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \\ (6) - 1_{M \oplus M'} &= \begin{pmatrix} 1_M & 0 \\ 0 & 1_{M'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & Z \\ \parallel & & \downarrow a & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{\alpha'} & M' & \xrightarrow{\beta'} & Z' \\ \parallel & & \downarrow d & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

Il nous suffit pour conclure de montrer que a et d sont des isomorphismes, par les relations (5) et (6) il nous suffit pour cela de montrer que $bc' = 0$, $cb' = 0$, $b'c = 0$ et $c'b = 0$.

On remarque que par le corollaire 3.8, $f \oplus f'$ et $g \oplus g'$ forment un couple noyau/conoyau faible, on en déduit rapidement que c'est également le cas de (f, g) et (f', g') .

- Par (1), on a $b\alpha' = 0$ donc b se factorise comme $\gamma_1\beta'$, et $\beta'c' = 0$ par (4), donc c' se factorise comme $\alpha'\gamma_2$. Donc $bc' = \gamma_1\beta'\alpha'\gamma_2 = 0$.
- Par (1), on a $c\alpha = 0$ donc c se factorise comme $\gamma_3\beta$, et $\beta b' = 0$ par (4), donc b' se factorise comme $\alpha\gamma_4$. Donc $cb' = \gamma_3\beta\alpha\gamma_4 = 0$.
- Par (3), on a $b'f' = 0$ donc b' se factorise comme γ_5g' , et $g'c = 0$ par (2), donc c se factorise comme $f'\gamma_6$. Donc $b'c = \gamma_5g'f'\gamma_6 = 0$.
- Par (3), on a $c'f = 0$ donc c' se factorise comme γ_7g , et $gb = 0$ par (2), donc b se factorise comme $f\gamma_8$. Donc $c'b = \gamma_7gf\gamma_8 = 0$.

D'où le résultat. □

3.2 Catégories extriangulées, définition et premières propriétés

3.2.1 Définitions

Comme dans le cas des catégories triangulées, on passe des catégories pré-extriangulées aux catégories extriangulées par l'adjonction d'un couple d'axiomes supplémentaire, duaux l'un de l'autre. Dans [13] ce couple est une adaptation au cas extriangulé de l'axiome de l'octaèdre, ici nous donnons un autre couple possible, adapté des axiomes B et B' de [8] que nous avons donné dans la section 2.2.

À partir d'ici, on pose $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ une catégorie pré-extriangulée. Comme dans le cas triangulé, nous utiliserons une notion de carré homotopique :

Définition 3.9. On dit qu'un carré commutatif dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Z \\ y \downarrow & & \downarrow z \\ Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

est un *carré homotopique* si il existe un \mathbb{E} -triangle de la forme

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

On dit alors que (g, Y, y) est un *pullback homotopique* de (g', Z', z) , et que (g', Z', z) est un *pushout homotopique* de (g, Y, y) .

Remarque. Par le corollaire 3.8, les pullbacks/pushout homotopiques sont des pullbacks/pushouts faibles car les inflations et déflations forment des couples noyau faible conoyau faible. Les axiomes (ET3) et (ET3)^{op} et le lemme des 3 (corollaire 3.10), on a unicité des pushouts/pullbacks homotopiques, mais à isomorphisme non canonique près.

Pour des raisons de lisibilité, on nomme nos axiomes de manière similaire à leurs analogues dans [8]. Commençons par justifier l'absence des autres axiomes de [8] : l'axiome A repose sur la notion de cône d'un morphisme de triangles, dont la définition ne s'adapte pas clairement au cas extriangulé. Les axiomes C et E peuvent s'énoncer dans le cas extriangulé, mais la preuve de l'implication $C \Rightarrow B$ reposant sur l'axiome (TR1) des catégories pré-triangulées, ne peut s'adapter directement au cas extriangulé, on verra que l'on conserve cependant l'implication réciproque.

Les axiomes B et B^{op}, comme dans le cas triangulé, peuvent s'interpréter comme affirmant l'existence de pushout (resp. de pullbacks) homotopiques sur les inflations (resp. les déflations), on note la similarité de cette affirmation avec les axiomes des catégories exactes.

Axiome B. Les inflations sont stables par composition. Soient un \mathbb{E} -triangle donné par

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

et $z : Z' \rightarrow Z$ un morphisme dans \mathcal{C} , on a un morphisme de \mathbb{E} -extensions $(1_X, z) : (X, z^*\delta, Z') \rightarrow (X, \delta, Z)$, qui doit être réalisé par un triplet $[1_X, y, z]$ donnant un \mathbb{E} -triangle

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{f'_*\delta} \rightarrow$$

Axiome B^{op}. Les déflations sont stables par composition. Soient un \mathbb{E} -triangle donné par

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

et $x : X \rightarrow X'$ un morphisme dans \mathcal{C} , on a un morphisme de \mathbb{E} -extensions $(x, 1_Z) : (X, \delta, Z) \rightarrow (X', x_*\delta, Z)$, qui doit être réalisé par un triplet $[x, y, 1_Z]$ donnant un \mathbb{E} -triangle

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ x \end{pmatrix}} Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & f' \end{pmatrix}} Y' \xrightarrow{g'_*\delta} \rightarrow$$

Axiome D. Un diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow u & & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & & \\ & & \downarrow v & & \\ & & W & & \\ & & \vdots & & \\ & & \delta' & & \end{array}$$

Doit pouvoir se compléter en un diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\delta} & \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow u & & \downarrow u' & & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{\delta''} & \rightarrow \\ & & \downarrow v & & \downarrow v' & & \\ & & W & = & W & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \delta' & & g_*\delta' & & \end{array}$$

tel que

- $(1_X, u') : (X, \delta, Z) \rightarrow (X, \delta'', Z')$ est un morphisme de \mathbb{E} -triangles, i.e $u'^*\delta'' = \delta$.
- $(f, v') : (X, \delta'', Z') \rightarrow (Y, \delta', W)$ est un morphisme de triangles, i.e $f_*\delta'' = v'^*\delta'$.

Axiome D^{op} . Un diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles de la forme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & & \downarrow u' & & \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \cdots \xrightarrow{\delta'} \\
 & & \downarrow v & & \downarrow v' \\
 & & W & = & W \\
 & & & & \downarrow \delta \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

Doit pouvoir se compléter en un diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \cdots \xrightarrow{u'^*\delta} & \\
 \parallel & & \downarrow u & & \downarrow u' & & \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \cdots \xrightarrow{\delta'} & \\
 & & \downarrow v & & \downarrow v' & & \\
 & & W & = & W & & \\
 & & \downarrow \delta'' & & \downarrow \delta & & \\
 & & Y & & Y & &
 \end{array}$$

tel que

- $(g, 1_W) : (Y, \delta'', W) \rightarrow (Z, \delta, W)$ est un morphisme de \mathbb{E} -extensions, i.e $g_*\delta'' = \delta$.
- $(f, v') : (X, \delta', Z') \rightarrow (Y, \delta'', W)$ est un morphisme de \mathbb{E} -extensions, i.e $f_*\delta' = v'^*\delta''$.

Remarque. La notation des \mathbb{E} -triangles que nous utilisons est arbitraire et introduite pour rappeler la situation des catégories triangulées, c'est ce qui fait que le diagramme de départ de D^{op} semble manquer de symétrie par rapport à celui de D (on peut résoudre ce petit problème en supprimant les flèches représentant les extensions, ou en les plaçant 'avant' les conflations).

3.2.1.1 Implication $(B, B^{op}) \Rightarrow (D, D^{op})$

Lemme 3.14. Un diagramme de \mathbb{E} -triangles de la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \cdots \xrightarrow{\delta} & \\
 \parallel & & \downarrow y & & & & \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \cdots \xrightarrow{\delta'} &
 \end{array}$$

Peut être complété en un morphisme de triangles $[1_X, y, z]$ tel que l'on ait le \mathbb{E} -triangle suivant

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} Z \cdots \xrightarrow{f_*\delta'}$$

Démonstration. On peut compléter le diagramme précédent en un morphisme de \mathbb{E} -triangles $[1_X, y, z']$ par (ET3), par l'axiome B, le morphisme de \mathbb{E} -extensions $(1_X, z')$ admet un représentant $[1, y', z']$ tel que le triangle suivant soit distingué

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y' \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} z' & g' \end{pmatrix}} Z \xrightarrow{f_*\delta'} \rightarrow$$

La condition de commutativité du diagramme nous donne $yf = y'f$ donc $y - y' = \varphi g$ pour un certain $\varphi : Z \rightarrow Y'$, on a donc un isomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y' \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} z' & g' \end{pmatrix}} & Z \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & g' \end{pmatrix}} & Z \end{array}$$

en posant $z = z' + g'\varphi$ donc la deuxième ligne forme également une conflation, d'où le résultat. \square

Considérons à présent un diagramme dans \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow u & & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & & \\ & & \downarrow v & & \\ & & W & & \\ & & \vdots & & \\ & & \delta' & & \\ & & \downarrow & & \end{array}$$

Par hypothèse, le morphisme $f' = uf$ est une inflation, on peut d'ors et déjà considérer la complétion

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow u & & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \xrightarrow{\delta''} \rightarrow \\ & & \downarrow v & & \\ & & W & & \\ & & \vdots & & \\ & & \delta' & & \\ & & \downarrow & & \end{array}$$

On applique le lemme précédent au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow u & & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \xrightarrow{\delta''} \rightarrow \end{array}$$

Pour obtenir un morphisme de \mathbb{E} -triangles, et un \mathbb{E} -triangle

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} u' & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{f_*\delta''} \rightarrow$$

On applique alors le lemme précédent au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix}} & Z \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} u' & g' \end{pmatrix}} & Z' & \xrightarrow{f_*\delta''} & \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & & & & \\ Y & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & W & \xrightarrow{\delta'} & \rightarrow \end{array}$$

Pour obtenir un morphisme $v' : Z' \rightarrow W$ un \mathbb{E} -triangle

$$Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -u' & -g' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} Z' \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} v' & v \end{pmatrix}} W \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ u \end{pmatrix} \delta'} \rightarrow$$

Par l'isomorphisme $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right)$, on a un \mathbb{E} -triangle

$$Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g' & -u' \end{pmatrix}} Y' \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} v & v' \end{pmatrix}} W \xrightarrow{\begin{pmatrix} u \\ -g \end{pmatrix} \delta'} \rightarrow$$

Donc, par l'isomorphisme $\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g' & -1 \end{pmatrix}, -1 \right)$, on obtient un \mathbb{E} -triangle

$$Y' \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -u' \end{pmatrix}} Y' \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -v' \end{pmatrix}} W \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \delta'} \rightarrow$$

Donc $Z \xrightarrow{u'} Z' \xrightarrow{v'} W \xrightarrow{g_*\delta'} \rightarrow$ est un \mathbb{E} -triangle par le lemme 3.13, soit le résultat voulu.
On raisonne de manière duale pour montrer D^{op} .

3.2.1.2 Implication $(\mathbf{D}, \mathbf{D}^{op}) \Rightarrow (\mathbf{B}, \mathbf{B}^{op})$

Proposition 3.15. *Soient $Z \in \mathcal{C}$, $\delta_1 \in \mathbb{E}(Z, X_1)$ et $\delta_2 \in \mathbb{E}(Z, X_2)$ deux extensions. Un diagramme de la forme*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_2 & & \\
 & & \downarrow f_2 & & \\
 & & Y_2 & & \\
 & & \downarrow g_2 & & \\
 X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z \cdots \delta_1 \rightarrow \\
 & & & & \downarrow \delta_2 \\
 & & & & \Downarrow
 \end{array}$$

se complète en un diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X_1 & \xlongequal{\quad} & X_2 & & \\
 & & \downarrow m_2 & & \downarrow f_2 & & \\
 X_1 & \xrightarrow{m_1} & M & \xrightarrow{e_1} & Y_2 & \cdots g_2^* \delta_1 \rightarrow & \\
 \parallel & & \downarrow e_2 & & \downarrow g_2 & & \\
 X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z & \cdots \delta_1 \rightarrow & \\
 & & \downarrow g_1^* \delta_2 & & \downarrow \delta_2 & & \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & &
 \end{array}$$

avec $(m_1)_* \delta_1 + (m_2)_* \delta_2 = 0$.

Démonstration. Par additivité de \mathfrak{s} , on a

$$\mathfrak{s}(\delta_1 \oplus \delta_2) = [X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{g_1 \oplus g_2} Z \oplus Z]$$

On pose $\mu := \Delta_Z^*(\delta_1 \oplus \delta_2)$ et

$$\mathfrak{s}(\mu) = [X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{j} M \xrightarrow{k} Z]$$

En posant $\pi_i := \pi_{X_i} : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_i$, μ satisfait

$$(\pi_1)_* \mu = \delta_1 \quad \text{et} \quad (\pi_2)_* \mu = \delta_2$$

D'où un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & \xrightarrow{\iota_1} & X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \cdots 0 \rightarrow \\
 \parallel & & \downarrow j & & \\
 X_1 & \xrightarrow{m_1} & M & & \\
 & & \downarrow k & & \\
 & & Z & & \\
 & & \downarrow \mu & & \\
 & & \Downarrow & &
 \end{array}$$

Que l'on complète par D en un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
X_1 & \xrightarrow{\iota_1} & X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \xrightarrow{0} \rightarrow \\
\parallel & & \downarrow j & & \downarrow f'_2 \\
X_1 & \xrightarrow{m_1} & M & \xrightarrow{e'_1} & Y'_2 \xrightarrow{\theta_1} \rightarrow \\
& & \downarrow k & & \downarrow g'_2 \\
& & Z & \xlongequal{\quad} & Z \\
& & \downarrow \mu & & \downarrow (\pi_2)_* \mu
\end{array}$$

avec $f'_2 \theta_1 = 0$. Comme $\mathfrak{s}((\pi_2)_* \mu) = \mathfrak{s}(\delta_2)$, il existe $y_2 : Y_2 \rightarrow Y'_2$ un isomorphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Z \\
\parallel & & \downarrow y_2 & & \parallel \\
X_2 & \xrightarrow{f'_2} & Y'_2 & \xrightarrow{g'_2} & Z
\end{array}$$

En posant $e_1 = y_2^{-1} e'_1$, on a

$$\mathfrak{s}(y_2^* \theta_1) = [X_1 \xrightarrow{m_1} M \xrightarrow{e_1} Y_2]$$

par la proposition 3.11, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
X_1 & \xrightarrow{\iota_1} & X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \xrightarrow{0} \rightarrow \\
\parallel & & \downarrow j & & \downarrow f_2 \\
X_1 & \xrightarrow{m_1} & M & \xrightarrow{e_1} & Y_2 \xrightarrow{y_2^* \theta_1} \rightarrow \\
& & \downarrow k & & \downarrow g_2 \\
& & Z & \xlongequal{\quad} & Z \\
& & \downarrow \mu & & \downarrow \delta_2
\end{array}$$

avec

$$\begin{aligned}
g_2^* \delta_1 &= y_2^* g_2'^* (\pi_1)_* \mu \\
&= y_2^* (\pi_1)_* g_2'^* \mu \\
&= y_2^* (\pi_1)_* (\iota_1)_* \theta_1 \\
&= y_2^* \theta_1
\end{aligned}$$

donc $[X_1 \xrightarrow{m_1} M \xrightarrow{e_1} Y_2]$, qui représente $y_2^* \theta_1$, représente aussi $g_2^* \delta_1$. On peut raisonner de même à partir de $X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1$ pour obtenir

$$\begin{array}{ccccc}
X_2 & \xrightarrow{\iota_2} & X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{\pi_1} & X_1 \xrightarrow{0} \rightarrow \\
\parallel & & \downarrow j & & \downarrow f_1 \\
X_2 & \xrightarrow{m_2} & M & \xrightarrow{e_2} & Y_1 \xrightarrow{g_1^* \delta_2} \rightarrow \\
& & \downarrow k & & \downarrow g_1 \\
& & Z & \xlongequal{\quad} & Z \\
& & \downarrow \mu & & \downarrow \delta_1
\end{array}$$

Et comme

$$\begin{aligned} e_2 m_1 &= e_2 j \iota_1 = f_1 \pi_1 \iota_1 = f_1 \\ e_1 m_2 &= e_1 j \iota_2 = f_2 \pi_2 \iota_2 = f_2 \\ g_2 e_1 &= k = g_1 e_2 \end{aligned}$$

le diagramme annoncé est commutatif, et

$$\begin{aligned} (m_1)_* \delta_1 + (m_2)_* \delta_2 &= j_* ((\iota_1)_* \delta_1 + (\iota_2)_* \delta_2) \\ &= j_* ((\iota_1 \pi_1)_* + (\iota_2 \pi_2)_*)(\mu) \\ &= j_* \mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par le lemme 3.6. □

De manière duale, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 3.16. *Soient $X \in \mathcal{C}$, $\delta_1 \in \mathbb{E}(Z_1, X)$ et $\delta_2 \in \mathbb{E}(Z_2, X)$ deux extensions. Un diagramme de la forme*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 \cdots \xrightarrow{\delta_1} \\ f_2 \downarrow & & & & \\ Y_2 & & & & \\ g_2 \downarrow & & & & \\ Z_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \delta_2 \downarrow & & & & \\ \downarrow & & & & \end{array}$$

se complète en un diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 \cdots \xrightarrow{\delta_1} \\ f_2 \downarrow & & \downarrow e_2 & & \parallel \\ Y_2 & \xrightarrow{e_1} & M & \xrightarrow{m_1} & Z_1 \cdots \xrightarrow{(f_2)_* \delta_1} \\ g_2 \downarrow & & \downarrow m_2 & & \\ Z_2 & \xlongequal{\quad} & Z_2 & & \\ \vdots & & \downarrow (f_1)_* \delta_2 & & \\ \delta_2 \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

avec $(m_1)_* \delta_1 + (m_2)_* \delta_2 = 0$.

Considérons à présent un morphisme de \mathbb{E} -extensions

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \cdots \xrightarrow{z^* \delta} \\ \parallel & & & & \downarrow z \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \xrightarrow{\delta} \end{array}$$

Par la proposition 3.16 on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{z^*\delta} & \\
f \downarrow & & \downarrow (h_{g'}) & & \parallel & & \\
Y & \xrightarrow{\iota_Y} & Y \oplus Z' & \xrightarrow{\pi_{Z'}} & Z' & \xrightarrow{0} & \\
g \downarrow & & \downarrow (g \ h') & & & & \\
Z & \xlongequal{\quad} & Z & & & & \\
\delta \downarrow & & \downarrow f'_*\delta & & & &
\end{array}$$

Avec $(\pi_{Z'})^* z^* \delta + (g \ h')^* \delta = 0$. En particulier, on a un \mathbb{E} -triangle

$$Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ g' \end{pmatrix}} Y \oplus Z' \xrightarrow{(g \ h')} Z \xrightarrow{f'_*\delta} \rightarrow$$

Par l'égalité précédente, on a

$$(0 \ z)^* \delta + (g \ h')^* \delta = (g \ z + h')^* \delta = 0$$

Par exactitude de la suite

$$\mathcal{C}(Z', Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{C}(Z', Z) \xrightarrow{\delta_{\#}} \mathbb{E}(Z', X)$$

il existe $\alpha : Z' \rightarrow Y$ tel que $g\alpha = z + h'$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g' \\ h \end{pmatrix}} & Z' \oplus Y & \xrightarrow{(h' \ g)} & Z \\
\parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} & & \parallel \\
Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g' \\ \alpha g' + h \end{pmatrix}} & Z' \oplus Y & \xrightarrow{(z \ g)} & Z
\end{array}$$

On obtient le résultat en posant $y := \alpha g' + h$. La stabilité des inflations par composition découle directement de D , on raisonne de manière duale pour B^{op} .

Comme dans le cas d'une catégorie pré-triangulée, nous pouvons à présent poser la définition suivante

Définition 3.10. Soit $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ une catégorie pré-triangulée, on dit que \mathcal{C} est *extriangulée* si elle respecte l'un des couples d'axiomes (B, B^{op}) ou (D, D^{op}) .

Remarque. Certains arguments utilisés dans l'équivalence des deux couples sont dérivés de [6], qui donne une généralisation du concept de catégorie extriangulée. Les axiomes qui y sont utilisés redonnent notre couple (B, B^{op}) quand on spécialise $n = 1$.

3.2.2 Propriétés élémentaires des catégories extriangulées

À partir d'ici, on considère $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ une catégorie extriangulée.

Proposition 3.17. *Soit $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ une catégorie pré-extriangulée et $M \in \mathcal{C}$, on a alors*

(a) *Si \mathcal{C} respecte D , alors tout \mathbb{E} -triangle*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \triangleright$$

induit une suite exacte de groupes abéliens

$$\mathbb{E}(M, X) \xrightarrow{f_*} \mathbb{E}(M, Y) \xrightarrow{g_*} \mathbb{E}(M, Z)$$

(b) *Si \mathcal{C} respecte D^{op} , alors tout \mathbb{E} -triangle*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \triangleright$$

induit une suite exacte de groupes abéliens

$$\mathbb{E}(Z, M) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(Y, M) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(X, M)$$

Démonstration. On montre le point (a), le second étant dual. Comme \mathbb{E} est un bifoncteur, le lemme 3.6 donne

$$\mathbb{E}(M, g) \circ \mathbb{E}(M, f) = 0$$

Soit $\theta \in \mathbb{E}(M, Y)$ réalisée par $Y \xrightarrow{a} N \xrightarrow{b} M \xrightarrow{\theta} \triangleright$. Par l'axiome D, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \triangleright \\ \parallel & & \downarrow a & & \downarrow d \\ X & \xrightarrow{h} & N & \xrightarrow{h'} & E \xrightarrow{\theta'} \triangleright \\ & & \downarrow b & & \downarrow e \\ & & M & = & M \\ & & \downarrow \theta & & \downarrow g_*\theta \end{array}$$

Donc si $g_*\theta = 0$, alors e admet une section $s : M \rightarrow E$, en posant $\rho := s^*\theta'$, on obtient

$$\mathbb{E}(f, M)(\rho) = f_*s^*\theta' = s^*f_*\theta' = s^*e^*\theta = \theta$$

□

Corollaire 3.18. *Si $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ est une catégorie extriangulée, tout \mathbb{E} -triangle*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \triangleright$$

et objet $M \in \mathcal{C}$ induisent des suites exactes longues

$$\mathcal{C}(Z, M) \xrightarrow{\hat{g}} \mathcal{C}(Y, M) \xrightarrow{\hat{f}} \mathcal{C}(X, M) \xrightarrow{(\delta^\#)_M} \mathbb{E}(Z, M) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(Y, M) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(X, M)$$

et

$$\mathcal{C}(M, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{C}(M, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{C}(M, Z) \xrightarrow{(\delta_\#)_M} \mathbb{E}(M, X) \xrightarrow{f_*} \mathbb{E}(M, Y) \xrightarrow{g_*} \mathbb{E}(M, Z)$$

Démonstration. Combinaison des propositions 3.7 et 3.17

□

Lemme 3.19. *Dans une catégorie extriangulée, un \mathbb{E} -triangle de la forme*

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ x \end{pmatrix}} Y \oplus X' \xrightarrow{(y \ f')} Y \xrightarrow{\varepsilon} \rightarrow$$

où f est une inflation peut se relever en un morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \xrightarrow{x_*\delta} \rightarrow \end{array}$$

tel que $\varepsilon = g'^\delta$.*

Démonstration. Par hypothèse, on a un \mathbb{E} -triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ x \end{pmatrix}} & Y \oplus X' & \xrightarrow{(y \ f')} & Y' \xrightarrow{\varepsilon} \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow (1 \ 0) & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \end{array}$$

Par le lemme 3.14, il existe un morphisme $h : Y' \rightarrow Z$ donnant un \mathbb{E} -triangle

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & -f' \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} Y' \oplus Y \xrightarrow{(h \ g)} Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ x \end{pmatrix}_* \delta} \rightarrow$$

l'isomorphisme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : Y' \oplus Y \rightarrow Y \oplus Y'$ donne la réalisation

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} Y \oplus Y' \xrightarrow{(0 \ -h)} Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ x_*\varepsilon \end{pmatrix}} \rightarrow$$

On obtient donc par le lemme 3.13 le diagramme voulu. □

De manière duale, on peut montrer

Lemme 3.20. *Dans une catégorie extriangulée, un \mathbb{E} -triangle de la forme*

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ y \end{pmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{(z \ g')} Z' \xrightarrow{\varepsilon} \rightarrow$$

où g' est une déflation, peut se relever en un morphisme de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \xrightarrow{z^*\delta} \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow y & & \downarrow z \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow \end{array}$$

tel que $\varepsilon = f_\delta$.*

Lemme 3.21. *Tout diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles de la forme*

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta_1 \\
 \parallel & & \downarrow u & & \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \cdots \delta_2 \\
 & & \downarrow v & & \\
 & & W & & \\
 & & \downarrow \delta_3 & &
 \end{array}$$

Peut être complété en un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta_1 \\
 \parallel & & \downarrow u & & \downarrow u' \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g_0} & Z' \cdots \delta_2 \\
 & & \downarrow v & & \downarrow v' \\
 & & W & \xlongequal{\quad} & W \\
 & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow g_* \delta_3
 \end{array}$$

Tel que $u'^ \delta_2 = \delta_1$ et $(f, v') : (X, \delta_2, Z') \rightarrow (Y, \delta_3, Y'')$ soit un morphisme d'extensions.*³

Démonstration. On peut appliquer l'axiome D au diagramme dépourvu de g' pour obtenir

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta_1 \\
 \parallel & & \downarrow u & & \downarrow u_0 \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z_0 \cdots \delta'' \\
 & & \downarrow v & & \downarrow v_0 \\
 & & W & \xlongequal{\quad} & W \\
 & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow g_* \delta_3
 \end{array}$$

avec $u_0^* \delta'' = \delta_1$ et (f, v_0) morphisme de \mathbb{E} -extensions. Par (ET3) et le lemme des 3 (corollaire 3.10), on a un isomorphisme de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g_0} & Z_0 \cdots \delta'' \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \varphi \\
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \cdots \delta_2
 \end{array}$$

en particulier $\delta'' = \varphi^* \delta_2$. On pose $u' = \varphi u_0$ et $v' = v_0 \varphi^{-1}$ qui donne bien le résultat (les vérifications de commutativité sont immédiates). \square

3. Contrairement au cas de l'axiome D, nous avons fixé δ_2 et une conflation associée

Remarque. Comme d'ordinaire, le résultat dual existe également.

Proposition 3.22. *Tout diagramme commutatif de \mathbb{E} -triangles de la forme*

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta_1 \\
 & & \downarrow y & & \parallel \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \cdots \delta_2 \\
 & & \downarrow y' & & \\
 & & Y'' & & \\
 & & \downarrow \delta_3 & & \\
 & & \downarrow & &
 \end{array}$$

se complète en un diagramme de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta_1 \\
 \downarrow x & & \downarrow y & & \parallel \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \cdots \delta_2 \\
 \downarrow x' & & \downarrow y' & & \\
 Y'' & \xlongequal{\quad} & Y'' & & \\
 \downarrow \theta & & \downarrow \delta_3 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & &
 \end{array}$$

tel que $x_*\delta_1 = \delta_2$, $f_*\theta = \delta_3$ et $y'^*\theta + g'^*\delta_1 = 0$.

Démonstration. On applique l'axiome D au diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta_1 \\
 \parallel & & \downarrow y & & \\
 X & \xrightarrow{yf} & Y' & & \\
 & & \downarrow y' & & \\
 & & Y'' & & \\
 & & \downarrow \delta_3 & & \\
 & & \downarrow & &
 \end{array}$$

Pour obtenir

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta_1 \\
 \parallel & & \downarrow y & & \downarrow b \\
 X & \xrightarrow{yf} & Y' & \xrightarrow{a} & G \cdots \mu \\
 & & \downarrow y' & & \downarrow c \\
 & & Y'' & \xlongequal{\quad} & Y'' \\
 & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow \nu \\
 & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

avec $g_*\delta_3 = \nu$, $b^*\mu = \delta_1$ et $c^*\delta_3 = f_*\mu$. Par le lemme 3.6, on a

$$\nu = g_*\delta_3 = g'_*y_*\delta_3 = 0$$

Donc l'extension (Z, ν, Y'') est scindée, on a un isomorphisme canonique $G \simeq Z \oplus Y''$, donc

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\delta_1} & \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow y & & \downarrow \iota_Z & & \\ X & \xrightarrow{yf} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} & Z \oplus Y'' & \xrightarrow{\mu} & \rightarrow \\ & & \downarrow y' & & \downarrow \pi_{Y''} & & \\ & & Y'' & \xlongequal{\quad} & Y'' & & \\ & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow 0 & & \end{array}$$

En particulier, on a

$$\begin{pmatrix} a_1 y \\ a_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (g' - a_1)y = g - g = 0$$

donc a_2 se factorise comme $a_2 = \iota y'$ et $g' - a_1$ se factorise comme zy' .

On pose $z' = \begin{pmatrix} -z \\ 1 \end{pmatrix} : Y'' \rightarrow Z \oplus Y''$, on applique le résultat dual du lemme 3.21 au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & X' & & Y'' & & \\ & & \downarrow f' & & \downarrow z' & & \\ X & \xrightarrow{yf} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} & Z \oplus Y'' & \xrightarrow{\mu} & \rightarrow \\ & & \downarrow g' & & \downarrow (1 \ z) & & \\ & & Z & \xlongequal{\quad} & Z & & \\ & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow 0 & & \end{array}$$

pour obtenir

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{x} & X' & \xrightarrow{x'} & Y'' & \xrightarrow{\theta} & \rightarrow \\ \parallel & & \downarrow f' & & \downarrow z' & & \\ X & \xrightarrow{yf} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} & Z \oplus Y'' & \xrightarrow{\mu} & \rightarrow \\ & & \downarrow g' & & \downarrow (1 \ z) & & \\ & & Z & \xlongequal{\quad} & Z & & \\ & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow 0 & & \end{array}$$

tel que $\theta = z'^*\mu$ et $x_*\mu = (1 \ z)^*\delta_3$. On obtient ainsi le diagramme commutatif annoncé. Vérifions les égalités d'extensions

-

$$\begin{aligned} x_*\delta_1 &= x_*\iota_Z^*\mu \\ &= \iota_Z^*(1 \ z)^*\delta_3 \\ &= ((1 \ z) \circ \iota_Z)^*\delta_3 \\ &= \delta_3 \end{aligned}$$

- Comme $\pi_{Y''}$ est un épimorphisme, $\mathbb{E}(\pi_{Y''}, Y)$ est un monomorphisme, donc injectif, et on a

$$\begin{aligned}
\pi_{Y''}^* f_* \theta &= \pi_{Y''}^* f_* z'^* \mu \\
&= f_* (z' \pi_{Y''})^* \mu \\
&= f_* (1 - \iota_Z(1 \ z))^* \mu \\
&= f_* \mu - f_* (1 \ z)^* \delta_1 \\
&= f_* \mu \\
&= \pi_{Y''}^* \delta_3
\end{aligned}$$

donc $f_* \theta = \delta_3$ par injectivité de $\pi_{Y''}^*$.

-

$$\begin{aligned}
y'^* \theta + g'^* \delta_1 &= y'^* z'^* \mu + g'^* \iota_Z^* \mu \\
&= \left(\begin{pmatrix} -zy' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g' \\ 0 \end{pmatrix} \right)^* \mu \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ y' \end{pmatrix}^* \mu \\
&= a^* \mu = 0
\end{aligned}$$

□

3.3 Lien avec les catégories exactes et triangulées

Une fois passées ces premières définitions, nous pouvons nous pencher sur notre objectif initial, qui était de formaliser le lien entre les catégories exactes et stables par extensions d'une catégorie triangulée.

3.3.1 Cas particuliers de catégories extriangulées

Nous commençons par voir comment les catégories que nous considérons peuvent se voir comme des catégories extriangulées, examinons dans un premier temps le cas d'une catégorie exacte $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$.

Il apparaît pour traiter ce cas une condition de petitesse : le premier pas pour construire une catégorie extriangulée est de définir le bifoncteur d'extension \mathbb{E} , celui-ci devant être à valeur dans \mathfrak{Ab} . Ce foncteur est bien-sûr le foncteur Ext^1 , que l'on peut définir par la somme de Baer quand \mathcal{C} est essentiellement petite, ou comme foncteur dérivé quand \mathcal{C} admet suffisamment de projectifs ou d'injectifs⁴. On se place donc dans un cas où il existe un foncteur $\text{Ext}^1 : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Ab}$ qui classifie les extensions de conflations (les morphismes de la forme $\text{Ext}^1(Z, x)$ et $\text{Ext}^1(z, X)$ sont définis par le corollaire 1.28), on admet que le groupe $\text{Ext}^1(Z, X)$ classifie les extensions au sens de la définition 1.4, on pose la réalisation \mathfrak{s} de $\text{Ext}^1(Z, X)$ comme la réciproque de cette classification.

Proposition 3.23. *La catégorie \mathcal{C} , munie du foncteur Ext^1 et de la réalisation \mathfrak{s} forme une catégorie extriangulée.*

Démonstration. Par définition, \mathfrak{s} est clairement une réalisation additive de Ext^1 , soit un diagramme commutatif de conflations

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{\iota} & Y & \twoheadrightarrow^{\pi} & Z \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \\ X' & \xhookrightarrow{\iota'} & Y' & \twoheadrightarrow^{\pi'} & Z' \end{array}$$

on obtient $z : Z \rightarrow Z'$ par propriété universelle de $\pi = \text{Coker } \iota$, par la proposition 1.30, le triplet $[x, y, z]$ forme un morphisme de Ext^1 -triangles. L'axiome D découle immédiatement du corollaire 1.29. \square

Une catégorie exacte peut donc se voir (à une condition de petitesse près) comme une catégorie extriangulée, dont les conflations sont des couples noyau/conoyau. Cependant, on a également une réciproque à cette dernière remarque :

Théorème 3.1. *Soit $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ une catégorie extriangulée, dans laquelle toute inflation est un monomorphisme et toute déflation est un épimorphisme.*

On note \mathcal{S} la classe des conflations données par les \mathbb{E} -triangles de \mathcal{C} . Alors la catégorie $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ est exacte.

4. Nous n'avons détaillé ces constructions que dans le cas abélien, elles se transposent naturellement au cas exact, on pourra consulter [1] pour plus de détails.

Démonstration. On vérifie directement les axiomes de [1]. Considérons dans \mathcal{C} une conflation

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Par le corollaire 3.8, le couple (f, g) est un couple noyau faible / conoyau faible : si $\varphi : Y \rightarrow Z'$ est tel que $\varphi f = 0$ alors φ se factorise sur g , mais comme g est un épimorphisme, cette factorisation est unique, d'où g réalise le conoyau de f , de même f est un noyau de g et les conflations de \mathcal{C} sont des couples noyau/conoyau.

Pour la stabilité par isomorphisme, soit un diagramme commutatif dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta \rightarrow \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

où x, y, z sont des isomorphismes. Par la proposition 3.11 on a un \mathbb{E} -triangle

$$X' \xrightarrow{fx^{-1}} Y \xrightarrow{zg} Z' \xrightarrow{(z^{-1})^*x_*\delta} \rightarrow$$

Or, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{fx^{-1}} & Y & \xrightarrow{zg} & Z' \\ \parallel & & \downarrow y & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

étant commutatif, la dernière ligne réalise également $(z^{-1})^*x_*\delta$, il s'agit donc d'une conflation. Soit $x \in \mathcal{C}$, on a $0 \in \mathbb{E}(X, 0)$ et $0 \in \mathbb{E}(0, X)$, donc 1_X est à la fois une inflation et une déflation. Les inflations et déflations sont stables par composition d'après les axiomes B et B^{op}. Considérons ensuite un diagramme dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow x & & \\ X' & & \end{array}$$

où f est une inflation, d'après l'axiome B^{op}, on obtient un morphisme de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \delta \rightarrow \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z \cdots x_*\delta \rightarrow \end{array}$$

et une conflation

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ x \end{pmatrix}} Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & f' \end{pmatrix}} Y'$$

par le premier point de la démonstration, cette conflation traduit un pushout, et f' est une inflation par le diagramme précédent. Un raisonne de manière duale pour l'existence de pullbacks de déflations. \square

Comme promis au début de cette partie, la structure de catégories extriangulée englobe également celle de catégorie triangulée, cette fois-ci sans restriction ensembliste : On se donne une catégorie \mathcal{C} additive, et munie d'une autovalence additive $[1] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. On définit le bifoncteur

$$\mathrm{Ext}^1 : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Ab}$$

comme $\mathrm{Ext}^1(Z, X) = \mathcal{C}(Z, X[1])$, il s'agit bien d'un bifoncteur additif par définition. Nous allons montrer que la donnée d'une triangulation de $(\mathcal{C}, [1])$ équivaut à celle d'une extriangulation de $(\mathcal{C}, \mathrm{Ext}^1)$.

Lemme 3.24. *Si $(\mathcal{C}, \mathrm{Ext}^1, \mathfrak{s})$ est extriangulée, alors pour tout $X \in \mathcal{C}$, l'extension $1_{X[1]} \in \mathcal{C}(X[1], X[1]) = \mathrm{Ext}^1(X[1], X)$ est réalisée par*

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1] \xrightarrow{1_{X[1]}}$$

Démonstration. Posons

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X[1] \xrightarrow{1_{X[1]}}$$

un Ext^1 -triangle. On a pour $M \in \mathcal{C}$ une suite exacte

$$\mathcal{C}(M, X) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{C}(M, Y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathcal{C}(M, X[1]) \xrightarrow{(1_{X[1]})_{\#}} \mathcal{C}(M, X[1]) \xrightarrow{\widetilde{f[1]}} \mathcal{C}(M, Y[1])$$

Pour $M = Y$, on obtient

$$((1_{X[1]})_{\#})(\tilde{g}(1_Y)) = g = 0$$

De même, $f[1] = 0$ et $f = 0$, donc la suite

$$\mathcal{C}(M, X) \xrightarrow{0} \mathcal{C}(M, Y) \xrightarrow{0} \mathcal{C}(M, X[1])$$

est exacte pour tout M , et $Y = 0$. □

Théorème 3.2. *Avec les notations précédentes, on a*

(a) *Si \mathcal{C} est triangulée, pour $h \in \mathrm{Ext}^1(Z, X)$, on considère un triangle exact*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

on pose $\mathfrak{s}(h) := [X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$.

Le triplet $(\mathcal{C}, \mathrm{Ext}^1, \mathfrak{s})$ forme alors une catégorie extriangulée.

(b) *Réciproquement, si $(\mathcal{C}, \mathrm{Ext}^1, \mathfrak{s})$ forme une catégorie extriangulée. On définit les triangles exacts comme les Ext^1 -triangles. Ceci donne une triangulation de \mathcal{C} .*

Démonstration. (a) Commençons par montrer que $\mathfrak{s}(h)$ ne dépend pas du choix de triangle exact : un autre triangle serait donné par

$$X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z \xrightarrow{\delta} X[1]$$

isomorphe au premier par (TR3) et le lemme des 3.

Montrons que \mathfrak{s} est une réalisation de Ext^1 , soient h et h' deux extensions, avec

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow x & & & & \downarrow z & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1] \end{array}$$

un morphisme d'extensions, on doit avoir

$$\begin{aligned} x_*h &= z^*h' \Leftrightarrow \text{Ext}^1(Z, x)(h) = \text{Ext}^1(z, X')(h') \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}(Z, x[1])(h) = \mathcal{C}(z, X')(h') \\ &\Leftrightarrow x[1]h = h'z \end{aligned}$$

La donnée d'un morphisme de Ext^1 -extensions est donc équivalente à celle d'un diagramme commutatif de triangles exacts, que l'on peut compléter par l'axiome (TR3). On a ensuite par (TR1) et le 2.6 un triangle exact

$$X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Z \xrightarrow{\pi_Z} Z \xrightarrow{0} X[1]$$

donc $\mathfrak{s}(0) = 0$, le lemme 2.6 donne également que \mathfrak{s} est additive. Les axiomes (ET3) et (ET3)^{op} découlent directement de (TR3) et (TR2).

On montre enfin les axiomes B et B^{op}, les inflations sont clairement stables par composition, soit ensuite un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \parallel & & & & \downarrow z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X[1] \end{array}$$

l'axiome B pour les catégories triangulées nous donne exactement le résultat recherché, on raisonne de manière duale pour montrer B^{op}.

- (b) La stabilité des triangles exacts par isomorphisme se prouve comme dans le théorème 3.1. Comme \mathfrak{s} est une réalisation additive, on a un triangle exact

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0$$

d'où (TR0). Soit ensuite $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans \mathcal{C} , comme $Y = Y[-1][1]$, f est une extension, qui admet une réalisation

$$Y[-1] \longrightarrow M \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

on aura donc (TR1) d'après (TR2).

Montrons (TR2), soit

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

un Ext^1 -triangle. Par la proposition 3.16 appliquée à $X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1] \xrightarrow{1_{X[1]}} X[1]$, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \cdots \xrightarrow{h} & \\
\downarrow & & \downarrow m' & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{e} & Z & \cdots \xrightarrow{0} & \\
\downarrow & & \downarrow e' & & & & \\
X[1] & \xlongequal{\quad} & X[1] & & & & \\
\downarrow 1_{X[1]} & & \downarrow f[1] & & & &
\end{array}$$

tel que $e^*h + e'^*1_{X[1]} = \delta e + e' = 0$. La deuxième ligne étant un Ext^1 -triangle, e est un isomorphisme, la condition précédente devient alors $e'e^{-1} = -h$. On a alors

$$\mathfrak{s}(f[1]) = Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{-h} X[1]$$

et donc un triangle exact

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{-h} X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1]$$

d'où (TR2), et (TR1).

Les axiomes (TR3) et D découlent immédiatement de leurs équivalents extriangulés. \square

3.3.2 Condition de Frobenius et catégorie stable d'une catégorie extriangulée

Nous allons à présent conclure en appliquant le résultat précédent aux catégories extriangulées de Frobenius, pour atteindre la généralisation souhaitée du théorème 2.1 et du théorème 4 de [2].

Remarque. On rappelle qu'une sous-catégorie pleine \mathcal{D} de \mathcal{C} est dite **stable par extensions** si pour toute conflation dans \mathcal{C}

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

si X et Z sont dans \mathcal{C} , c'est aussi le cas de Y . Cette condition permet clairement de restreindre \mathbb{E} et \mathfrak{s} à \mathcal{D} pour en faire une catégorie extriangulée. En particulier, les catégories que nous avons étudié dans la section 2.3 sont extriangulée, comme sous-catégories stables par extensions de catégories triangulées, donc extriangulées.

Nous pouvons à présent retracer dans le cadre extriangulé le raisonnement que nous avons suivi dans la section 2.3. Nous reprenons à la définition d'objets injectifs et projectifs.

Définition 3.11. Un objet $P \in \mathcal{C}$ est dit **projectif** si pour toute déflation $Y \xrightarrow{g} Z$ et morphisme $P \xrightarrow{f} Z$, il existe un morphisme $P \xrightarrow{\varphi} Y$ tel que $g\varphi = f$.

Un objet $I \in \mathcal{C}$ est dit **injectif** si pour toute inflation $X \xrightarrow{f} Y$ et morphisme $X \xrightarrow{g} I$, il existe un morphisme $Y \xrightarrow{\psi} I$ tel que $\psi f = g$.

La situation peut être résumée dans des diagrammes commutatifs,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \nwarrow \exists \varphi & \uparrow f \\ & & P \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \nearrow \exists \psi \\ & & I \end{array}$$

mais comme dans les cas étudiés précédemment, ces diagrammes ne traduisent pas des propriétés universelles : les morphismes φ et ψ ne sont pas uniques.

Lemme 3.25. Soient $P, I \in \mathcal{C}$, on a les triplets d'équivalences suivants :

- (ai) P est un objet projectif.
- (aii) Toute déflation $Y \twoheadrightarrow P$ est un épimorphisme scindé.
- (aiii) Pour tout $X \in \mathcal{C}$, on a $\mathbb{E}(P, X) = 0$.
- (bi) I est un objet injectif.
- (bii) Toute inflation $I \hookrightarrow X$ est un monomorphisme scindé.
- (biii) Pour tout $X \in \mathcal{C}$, on a $\mathbb{E}(X, I) = 0$.

Démonstration. On montre la première équivalence, duale de la seconde :

(ai) \Rightarrow (aii) : Soit $Y \twoheadrightarrow P$ une déflation, en considérant le morphisme $1_P : P \rightarrow P$, on obtient par définition un morphisme $\varphi : P \rightarrow Y$ tel que $g\varphi = 1_P$, φ est donc une section de g .

(aii) \Rightarrow (ai) : Soit un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

on peut considérer son pullback homotopique (axiom B^{op})

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & P \\ y \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

par hypothèse, g' admet une section α , le morphisme $y\alpha$ donne le résultat.

(aii) \Rightarrow (aiii) soit $\delta \in \mathcal{E}(P, X)$, réalisé par une conflation

$$X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow P$$

la déflation est scindée par hypothèse, donc $\delta = 0$ car \mathfrak{s} est une réalisation additive.

(aiii) \Rightarrow (aai) soit une déflation $Y \xrightarrow{g} P$, elle fait partie d'une conflation, qui réalise une extension, nulle par hypothèse, donc g est scindée par le lemme 3.5. \square

Lemme 3.26. Si $X, Y \in \mathcal{C}$ sont des objets projectifs (resp. injectifs), alors c'est aussi le cas de $X \oplus Y$.

Démonstration. Par somme directe de \mathbb{E} -triangles, on a des conflations

$$X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Y \xrightarrow{\pi_Y} Y \quad \text{et} \quad Y \xrightarrow{\iota_Y} X \oplus Y \xrightarrow{\pi_X} X$$

Soit une déflation $B \xrightarrow{g} X \oplus Y$, on a par composition des déflations $\pi_X g$ et $\pi_Y g$, qui sont des épimorphismes scindés par hypothèse, donc admettent des sections x et y , on obtient que $X \oplus Y \xrightarrow{(x \ y)} B$ est une section de g , d'où le résultat par le lemme précédent, on raisonne de manière duale pour les objets injectifs. \square

Définition 3.12. On dit que \mathcal{C} admet *suffisamment de projectifs* si pour tous $Z \in \mathcal{C}$, il existe une déflation $P \twoheadrightarrow Z$ où P est un objet projectif.

On dit que \mathcal{C} admet *suffisamment d'injectifs* si pour tous $Z \in \mathcal{C}$, il existe une inflation $X \hookrightarrow I$ où I est un objet injectif.

On dira enfin que \mathcal{C} est une catégorie de Frobenius si elle admet suffisamment de projectifs et d'injectifs, et si ceux-ci coïncident.

On note $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ les sous-catégories pleines formées des objets projectifs (resp. injectifs) de \mathcal{C} , ce sont des sous-catégories additives.

Lemme 3.27. *Soit*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \dashrightarrow^{\delta}$$

un \mathbb{E} -triangle, $i : X \rightarrow I$ un morphisme avec I un objet injectif. On a alors un triangle

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ i \end{pmatrix}} Y \oplus I \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & * \\ * & * \end{pmatrix}} Z \oplus I \dashrightarrow^{\pi_Z^* \delta}$$

Démonstration. Par l'axiome B, on a un triangle

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ i \end{pmatrix}} Y \oplus I \xrightarrow{d} D \dashrightarrow^{\nu}$$

Le dual de la proposition 3.22 nous donne un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & I & \xlongequal{\quad} & I \\ & & \downarrow \iota_I & & \downarrow e \\ X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ i \end{pmatrix}} & Y \oplus I & \xrightarrow{d} & D \dashrightarrow^{\nu} \\ \parallel & & \downarrow \pi_Y & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \dashrightarrow^{\delta} \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \theta \end{array}$$

tel que $m^* \delta = \nu$. Comme I est injectif, on a $\theta = 0$, donc un isomorphisme $n : Z \oplus I \rightarrow D$ tel que $n \iota_I = e$ et $mn = \pi_Z$. On a donc un morphisme de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ i \end{pmatrix}} & Y \oplus I & \xrightarrow{n^{-1}d} & Z \oplus I \dashrightarrow^{n^* \nu} \\ \parallel & & \downarrow \pi_Y & & \downarrow \pi_Z \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \dashrightarrow^{\delta} \end{array}$$

et donc

$$\pi_Z n^{-1} d\iota_Y = y \pi_Y \iota_Y$$

et donc est de la forme $\begin{pmatrix} g & * \\ * & * \end{pmatrix}$. □

Dans la partie précédente, nous avons construit le quotient d'une catégorie de Frobenius faible par ses objets injectifs et projectifs. Plus généralement si $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine additive de \mathcal{C} , on peut considérer $I(X, Y)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(X, Y)$ formé des morphismes se factorisant sur un objet de \mathcal{I} , la preuve du lemme 2.27 donne que $I(X, Y)$ est un sous-groupe de $\mathcal{C}(X, Y)$, nous pouvons donc former le quotient \mathcal{C}/\mathcal{I} de la même manière

Théorème 3.3. *Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine stable par isomorphisme, telle que $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{I}(\mathcal{C})$.*

Le quotient \mathcal{C}/\mathcal{I} possède une structure triangulée, induite par celle de \mathcal{C} .

Démonstration. On pose $\bar{\mathcal{C}} := \mathcal{C}/\mathcal{I}$. Le lemme précédent donne $\mathbb{E}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) = 0 = \mathbb{E}(\mathcal{C}, \mathcal{I})$, on peut donc définir

$$\bar{\mathbb{E}} : \bar{\mathcal{C}}^{op} \times \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathfrak{Ab}$$

en choisissant des représentants des classes de morphismes, le foncteur ainsi obtenu nous donne (ET1).

Pour (ET2), soit $\delta \in \bar{\mathbb{E}}(Z, X) = \mathbb{E}(Z, X)$, posons

$$\bar{\mathfrak{s}}(\delta) := \overline{\mathfrak{s}(\delta)} = [X \xrightarrow{\bar{f}} Y \xrightarrow{\bar{g}} Z]$$

avec $\mathfrak{s}(\delta) = [X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z]$, montrons que $\bar{\mathfrak{s}}$ est une réalisation additive de $\bar{\mathbb{E}}$. Soit $(\bar{x}, \bar{z}) : (X, \delta, Z) \rightarrow (X', \delta', Z')$ un morphisme de $\bar{\mathbb{E}}$ -extensions. Par définition, sa donnée est équivalente à celle de (x, z) morphisme de \mathbb{E} -extensions, celui-ci est réalisé dans \mathcal{C} par un triplet $[x, y, z]$, donc $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ réalise (\bar{x}, \bar{z}) , et $\bar{\mathfrak{s}}$ est additive car \mathfrak{s} l'est.

Pour montrer (ET3), soit dans $\bar{\mathcal{C}}$ un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y & \xrightarrow{\bar{g}} & Z \cdots \cdots \xrightarrow{\delta} \\ \downarrow \bar{x} & & \downarrow \bar{y} & & \\ X' & \xrightarrow{\bar{f}'} & Y' & \xrightarrow{\bar{g}'} & Z' \cdots \cdots \xrightarrow{\delta'} \end{array}$$

on en déduit un diagramme dans \mathcal{C} , non nécessairement commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \cdots \cdots \xrightarrow{\delta} \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \cdots \cdots \xrightarrow{\delta'} \end{array}$$

par hypothèse $yf - f'x$ est nul dans $\bar{\mathcal{C}}$, donc il se factorise comme ji où $i : X \rightarrow I$ et $j : I \rightarrow Y'$ avec $i \in \mathcal{I}$. En appliquant le lemme précédent, on a un isomorphisme de $\bar{\mathbb{E}}$ -triangles

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\begin{pmatrix} f \\ i \end{pmatrix}} & & \overline{\begin{pmatrix} g & * \\ * & * \end{pmatrix}} & & & & \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \oplus I & \xrightarrow{\quad} & Z \oplus I & \cdots \cdots \xrightarrow{\pi_Z^* \delta} & \\ \parallel & & \downarrow \pi_Y & & \downarrow \pi_Z & & \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y & \xrightarrow{\bar{g}} & Z & \cdots \cdots \xrightarrow{\delta} & \end{array}$$

(il s'agit d'un isomorphisme en adaptant le lemme 2.28). Par ailleurs, par (ET3) dans \mathcal{C} , on a un morphisme de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ i \end{pmatrix}} & Y \oplus I & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & * \\ * & * \end{pmatrix}} & Z \oplus I & \xrightarrow{\pi_Z^* \delta} & \\ \downarrow x & & \downarrow (y \ j) & & \downarrow z & & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{\delta} & \end{array}$$

Les deux diagrammes précédents donnent un morphisme de $\overline{\mathbb{E}}$ -extensions

$$(\bar{x}, \overline{z\pi_Z^{-1}}) : \delta \rightarrow \delta'$$

tel que $\overline{c\pi_Z^{-1}} \circ \bar{g} = \overline{g'y}$. On montre enfin (ET4) de la même manière, en prenant l'image de (ET4) dans \mathcal{C} , (ET3)^{op} et (ET4)^{op} se montrent de manière duale. \square

Nous allons maintenant voir que dans le cas spécifique où \mathcal{C} est une catégorie extriangulée de Frobenius, que l'on quotiente par la catégorie de ses injectifs, l'extriangulation donnée dans le théorème précédent est en fait une triangulation : c'est la généralisation que l'on recherchait. Nous supposons désormais que \mathcal{C} est une catégorie de Frobenius faible. On a $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{I}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{I}(\mathcal{C})$, il s'agit d'une sous-catégorie additive, stable par isomorphisme, on peut définir $\overline{\mathcal{C}} := \mathcal{C}/\mathcal{P}(\mathcal{C})$ la **catégorie stable** de \mathcal{C} , qui est extriangulée naturellement par le théorème précédent.

Nous voulons donc construire dans un premier temps le foncteur $\langle 1 \rangle$ de suspension sur la catégorie $\overline{\mathcal{C}}$, nous allons ensuite utiliser le théorème 3.2, en prouvant que le foncteur d'extension \mathbb{E} est naturellement isomorphe au foncteur $\mathcal{C}(-, ?\langle 1 \rangle)$.

La construction du foncteur $\langle 1 \rangle$ est identique à celle de la section 2.2, nous la reformulons ici dans le contexte extriangulé :

On commence par construire un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ et nous montrons que ce foncteur envoie les éléments de (X, Y) sur 0 pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$, ce foncteur induira alors un foncteur $\langle 1 \rangle : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$.

Soit $X \in \mathcal{C}$, comme \mathcal{C} admet suffisamment d'injectifs, il existe un objet injectif $I(X)$ et une inflation $\iota_X : X \hookrightarrow I(X)$, autrement dit, il existe dans \mathcal{C} un \mathbb{E} -triangle

$$X \xrightarrow{\iota_X} I(X) \xrightarrow{\pi_X} X' \xrightarrow{\delta_X}$$

Pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, on **choisit** un tel \mathbb{E} -triangle, nous allons alors poser $X' := X\langle 1 \rangle$, ils nous reste à régler le cas des morphismes : soit $f : X \rightarrow Y$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle \xrightarrow{\delta_X} \\ \downarrow f & & & & \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle \xrightarrow{\delta_Y} \end{array}$$

Comme ι_X est une inflation, et $\iota_Y f : X \rightarrow I(Y)$ a pour codomaine un objet injectif, il existe un morphisme (non unique) $f' : I(X) \rightarrow I(Y)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle \xrightarrow{\delta_X} \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle \xrightarrow{\delta_Y} \end{array}$$

Par (ET3), nous pouvons compléter ce diagramme en un morphisme de \mathbb{E} -triangles :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle \xrightarrow{\delta_X} \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle \xrightarrow{\delta_Y} \end{array}$$

Nous souhaitons poser $f\langle 1 \rangle := f''$, mais il n'y a pas unicité du morphisme f'' à priori, en fait, on n'a pas unicité de f'' dans \mathcal{C} , on aura unicité de $\overline{f''}$ dans $\overline{\mathcal{C}}$: soit en effet un autre morphisme de \mathbb{E} -triangles

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & I(X) & \xrightarrow{\pi_X} & X\langle 1 \rangle \xrightarrow{\delta_X} \\ \downarrow f & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'' \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & I(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & Y\langle 1 \rangle \xrightarrow{\delta_Y} \end{array}$$

on a

$$\varphi''^* \delta_Y = f_* \delta_X = f'^* \delta_Y$$

donc $(\varphi'' - f'')^* \delta_Y = 0$, par le lemme de scindage (corollaire 3.9), $\varphi'' - f''$ se factorise sur π_Y , donc sur un objet injectif, donc $\varphi'' - f'' = 0$, d'où l'unicité de $\overline{f''}$ dans $\overline{\mathcal{C}}$. On peut donc poser $\overline{f}\langle 1 \rangle := \overline{f''}$, on a construit $\langle 1 \rangle : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ (il est clair qu'il s'agit bien d'un foncteur covariant). Montrons que ce foncteur induit un foncteur $\overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$: soit $f : X \rightarrow Y$ se factorisant sur un injectif I , on obtient deux triangles commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & \nearrow h & \\ I & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X\langle 1 \rangle & \xrightarrow{f''} & Y\langle 1 \rangle \\ \downarrow g'' & \nearrow h'' & \\ I\langle 1 \rangle & & \end{array}$$

avec $\overline{f''} = \overline{f}\langle 1 \rangle$, $\overline{h''} = \overline{h}\langle 1 \rangle$, et $\overline{g''} = \overline{g}\langle 1 \rangle$, pour conclure que f'' se factorise sur un injectif, il nous suffit de montrer que $I\langle 1 \rangle$ est un objet injectif, par hypothèse, on a dans \mathcal{C} une conflation

$$I \xrightarrow{\iota_I} I(I) \xrightarrow{\pi_I} I\langle 1 \rangle$$

comme I est un injectif, le lemme de scindage nous donne que $I(I) \simeq I \oplus I\langle 1 \rangle$, donc $I\langle 1 \rangle$ est injectif : toute inflation $I\langle 1 \rangle \xrightarrow{i} Z$ donne une inflation $I \oplus I\langle 1 \rangle \rightarrow Z$, qui est alors scindée. Donc $I\langle 1 \rangle$ est injectif et $f\langle 1 \rangle = 0$, donc le foncteur $\langle 1 \rangle$ induit bien un endofoncteur $\overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$.

Proposition 3.28. *Le foncteur $\langle 1 \rangle : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ que nous avons construit est une autovalence.*

Démonstration. L'application induite par $\langle 1 \rangle$ sur les morphismes est clairement \mathbb{Z} -linéaire. On construit explicitement le quasi-inverse $\langle -1 \rangle$ de $\langle 1 \rangle$: notre construction de ce dernier ne faisait appel qu'aux objets injectifs, en effectuant un raisonnement similaire sur les objets projectifs, on obtient des diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X\langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_X} & P(X) & \xrightarrow{p_X} & X \\ \downarrow {}''f & & \downarrow 'f & & \downarrow f \\ Y\langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_Y} & P(Y) & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

et donc un foncteur $\langle -1 \rangle : \underline{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$, et sous la condition de Frobenius, un foncteur $\bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$. On considère la conflation

$$X\langle -1 \rangle \hookrightarrow I(X\langle -1 \rangle) \twoheadrightarrow X\langle -1 \rangle\langle 1 \rangle$$

Par la proposition 3.16, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X\langle -1 \rangle & \hookrightarrow & I(X\langle -1 \rangle) & \twoheadrightarrow & X\langle -1 \rangle\langle 1 \rangle \\ \parallel & & \downarrow \gamma_X & & \downarrow \eta_X \\ X\langle -1 \rangle & \hookrightarrow & P(X) & \twoheadrightarrow & X \end{array}$$

où $\bar{\eta}_X$ est un isomorphisme dans $\bar{\mathcal{C}}$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, on obtient deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} X\langle -1 \rangle & \xrightarrow{\iota_{X\langle -1 \rangle}} & I(X\langle -1 \rangle) & \xrightarrow{\pi_{X\langle -1 \rangle}} & X\langle -1 \rangle\langle 1 \rangle \\ \parallel & & \downarrow \gamma_X & & \downarrow \eta_X \\ X\langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_X} & P(X) & \xrightarrow{p_X} & X \\ \downarrow \text{"}f\text{"} & & \downarrow \text{'}f\text{'}} & & \downarrow f \\ Y\langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_Y} & P(Y) & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} X\langle -1 \rangle & \xrightarrow{\iota_{X\langle -1 \rangle}} & I(X\langle -1 \rangle) & \xrightarrow{\pi_{X\langle -1 \rangle}} & X\langle -1 \rangle\langle 1 \rangle \\ \downarrow \text{"}f\text{"} & & \downarrow \text{"}f\text{'}} & & \downarrow \text{"}f\text{'}} \\ Y\langle -1 \rangle & \xrightarrow{\iota_{Y\langle -1 \rangle}} & I(Y\langle -1 \rangle) & \xrightarrow{\pi_{Y\langle -1 \rangle}} & Y\langle -1 \rangle\langle 1 \rangle \\ \parallel & & \downarrow \gamma_Y & & \downarrow \eta_Y \\ Y\langle -1 \rangle & \xrightarrow{i_Y} & P(Y) & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

Ces deux diagrammes donnent deux morphismes $f\eta_X$ et $\eta_Y(\text{"}f\text{'})$ qui sont donnés à partir de $\text{"}f\text{"} : X\langle -1 \rangle \rightarrow Y\langle -1 \rangle$, donc ils sont égaux dans $\bar{\mathcal{C}}$, donc $\bar{\eta}$ donne bien un isomorphisme naturel dans $\bar{\mathcal{C}}$ entre $\langle -1 \rangle\langle 1 \rangle$ et $1_{\bar{\mathcal{C}}}$, on construit de même un isomorphisme $\langle 1 \rangle\langle -1 \rangle \rightarrow 1_{\bar{\mathcal{C}}}$ qui donne le résultat. \square

Il nous reste à montrer l'isomorphisme naturel

$$\mathbb{E}(-, ?) \simeq \bar{\mathcal{C}}(-, ?\langle 1 \rangle)$$

Soient $X, Y \in \bar{\mathcal{C}}$, on a une suite exacte

$$\mathcal{C}(Z, I(X)) \xrightarrow{\widetilde{\pi_X}} \mathcal{C}(Z, X\langle 1 \rangle) \xrightarrow{((\delta_X)_\#)_Z} \mathbb{E}(Z, X) \longrightarrow \mathbb{E}(Z, I(X))$$

Par le lemme 3.25, on a $\mathbb{E}(Z, I(X)) = 0$, donc $((\delta_X)_\#)_Z : \mathcal{C}(Z, X\langle 1 \rangle) \rightarrow \mathbb{E}(Z, X)$ est un épimorphisme, le noyau de ce morphisme est l'image de $\mathcal{C}(Z, \pi_X)$, c'est à dire les morphismes $Z \rightarrow X\langle 1 \rangle$ qui se factorisent sur $I(X)$.

Lemme 3.29. *Soient $X, Z \in \mathcal{C}$, les morphismes $Z \rightarrow X$ se factorisant sur $I(X)$ sont exactement ceux se factorisant sur un objet injectif quelconque.*

Démonstration. Comme $I(X)$ est un objet injectif, l'implication directe est évidente, réciproquement, soit I un objet injectif, $f : Z \rightarrow I$ et $g : I \rightarrow X$, on veut montrer que gf se factorise sur $I(X)$. Comme $I(X)$ est projectif, le morphisme g se factorise sur la déflation $I(X) \rightarrow X\langle 1 \rangle$, donc g et gf se factorisent sur $I(X)$. \square

Ce lemme et le premier théorème d'isomorphisme pour les groupes abéliens nous donne donc un isomorphisme

$$\varphi_{X,Z} : \bar{\mathcal{C}}(Z, X\langle 1 \rangle) \rightarrow \mathbb{E}(Z, X) = \bar{\mathbb{E}}(Z, X)$$

qui à \bar{f} associe $f^*\delta_X$. Il nous reste à vérifier la naturalité de $\varphi_{-,?}$, soient $X, Y, Z, Z' \in \bar{\mathcal{C}}$, $z : Z' \rightarrow Z$ et $f : X \rightarrow Y$, on doit montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{C}}(Z, X\langle 1 \rangle) & \xrightarrow{\bar{\mathcal{C}}(\bar{z}, \bar{f}\langle 1 \rangle)} & \mathcal{C}(Z', Y\langle 1 \rangle) \\ \varphi_{X,Z} \downarrow & & \downarrow \varphi_{Y,Z'} \\ \bar{\mathbb{E}}(Z, X) & \xrightarrow{\bar{E}(\bar{z}, \bar{f})} & \bar{E}(Z', Y) \end{array}$$

soit $\gamma : Z \rightarrow X\langle 1 \rangle$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{Y,Z'}(\bar{\mathcal{C}}(\bar{z}, \bar{f}\langle 1 \rangle)(\gamma)) &= \varphi_{Y,Z'}(\bar{f}\langle 1 \rangle \gamma \bar{z}) \\ &= z^* \gamma^* (\bar{f}\langle 1 \rangle)^* \delta_Y \\ &= z^* \gamma^* f_* \delta_X \\ &= z^* f_* \varphi_{X,Z}(\gamma) \end{aligned}$$

soit exactement la commutativité voulue. Par le théorème 3.2 on obtient donc

Théorème 3.4. *La structure extriangulée de la catégorie stable d'une catégorie extriangulée de Frobenius est une structure triangulée.*

Bibliographie

- [1] Theo Bühler, EXACT CATEGORIES, *Expositiones Mathematicae*, Volume 28, Issue 1 (2009).
- [2] Owen Garnier, THÉORIE DES CATÉGORIES ET INTRODUCTION À L'HOMOLOGIE, Mémoire de Licence 3, Université de Picardie Jules Verne (2018).
- [3] Arthur Garnier, INTRODUCTION À LA THÉORIE DES SUITES SPECTRALES, manuscript (2016).
- [4] Arthur Garnier, LOCALISATION ET CATÉGORIES DÉRIVÉES, manuscript (2016).
- [5] Arthur Garnier, THÉORIE DE L'HOMOLOGIE GÉNÉRALE - COHOMOLOGIE DES GROUPES ET DE HOCHSCHILD, Mémoire de Master 1, Université de Picardie Jules Verne (2016).
- [6] Martin Herschend, Yu Liu, Hiroyuki Nakaoka, n -EXANGULATED CATEGORIES.
<https://arxiv.org/abs/1709.06689>
- [7] Cody Holdaway, Kevin Zatloukal, THE STABLE CATEGORY OF A FROBENIUS CATEGORY IS TRIANGULATED, manuscript.
https://sites.math.washington.edu/~julia/teaching/581D_Fall12012/StableFrobIsTriang.pdf
- [8] Andrew Hubery, NOTES ON THE OCTAHEDRAL AXIOM (2008).
<https://pdfs.semanticscholar.org/2246/900fb2f9694d965b6b6482f76d4d3c6b1206.pdf>
- [9] Osamu Iyama, Yuji Yoshino, MUTATION IN TRIANGULATED CATEGORIES AND RIGID COHEN-MACAULEY MODULES (2007).
<https://arxiv.org/abs/math/0607736v3>
- [10] Serge Lang, ALGÈBRE, Dunod (2004).
- [11] Tom Leinster, BASIC CATEGORY THEORY, Cambridge University Press (2014).
<https://arxiv.org/abs/1612.09375>
- [12] Yu Liu, Hiroyuki Nakaoka, HEARTS OF TWIN COTORSION PAIRS ON EXTRIANGULATED CATEGORIES.
<https://arxiv.org/abs/1702.00244>
- [13] Hiroyuki Nakaoka, Yann Palu, MUTATION VIA HOVEY TWIN COTORSION PAIRS AND MODEL STRUCTURES IN EXTRIANGULATED CATEGORIES.
<https://arxiv.org/abs/1605.05607v4>
- [14] Amnon Neeman, TRIANGULATED CATEGORIES Princeton University Press (2001).
<http://hopf.math.purdue.edu/Neeman/triangulatedcats.pdf>
- [15] Jean-Louis Verdier, DES CATÉGORIES DÉRIVÉES DES CATÉGORIES ABÉLIENNES (1966).
- [16] Charles A. Weibel, AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA, Cambridge University Press (1994).
- [17] Alexander Zimmermann, REPRÉSENTATIONS DES GROUPES, Cours de Master 1, Université de Picardie Jules Verne (2019).

- [18] Alexander Zimmermann, REPRESENTATION THEORY : A HOMOLOGICAL POINT OF VIEW, Springer (2014).
- [19] Alexander Zimmermann, THÉORIE DES GROUPES, Cours de Master 1, Université de Picardie Jules Verne (2019).