著者	つー
研究題目名	クイバーの表現という手法について

クイバーとは多重辺と有向閉路を許す有向グラフのことである。クイバーの表現論とはクイバーの表現の成す圏を調べる分野である。これは、結合代数とも呼ばれる多元環の表現を調べるために用いられる。ここではクイバーを中心として見ていくことにする。

詳しく言うとクイバーとは頂点の集合 Q_0、辺の集合 Q_1 と始点と終点を与える写像 $s, t : Q_1 \to Q_0$ からなる組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことである。このクイバーの内 Q_0 と Q_1 が有限集合の場合である有限クイバーのみを考える。クイバー Q の表現はクイバー Q から代数閉体 $\Bbbk$ による $\Bbbk$ 加群の圏 $\operatorname{mod}\Bbbk$ へのクイバー射として定義される。表現 M が任意の $x \in Q_0$ に対して $\dim(M(x)) < \infty$ であるとき M を有限次元表現と呼ぶ。そして表現 L から M への射 f は線形写像の族 $(f_x : L_x \to M_x)_{x \in Q_0}$ で $\alpha : x \to y \in Q_1$ に対して $M(\alpha) \circ f_x = f_y \circ L(\alpha)$ が成り立つものとして自然変換のように定義する。そして対象を有限次元表現、射を表現間の射とする圏を Q の表現の圏と呼び、$\operatorname{rep}_{\Bbbk} Q$ と表記する。この $\operatorname{rep}_{\Bbbk} Q$ は表現間の射において成分毎に調べるとアーベル圏であることがわかる。
今クイバー Q が有向閉路を持っていないとする。このとき各 $x \in Q_0$ の表現 P_x を次で定義する。すなわち各 $y \in Q_0$ に対して $P_x(y) = \Bbbk Q_1(x, y)$, ($Q_1(x, y) :=$ x から y への道全体)、各矢 $\alpha : y \to z$ に対して、$P_x(\alpha) : P_x(y) \to P_x(z)$ を α の左結合で定める。すると P_x は直既約射影表現になる。その為各頂点毎に直既約射影表現を簡単に求めることができる。さらにこれらによって $\operatorname{rep}_{\Bbbk} Q$ 上で射影分解を考えることができる。加えて $\operatorname{rep}_{\Bbbk} Q$ の対象の射影分解は短完全列の形に書ける。これらは入射表現に対しても双対的に言える。このことから有向閉路を持たない有限クイバー Q の任意の表現 $L, M \in \operatorname{rep}_{\Bbbk} Q$ と整数 n に対して次がわかる。

$$\operatorname{Ext}^n(L, M) = \begin{cases} \operatorname{Hom}(L, M) & (n = 0) \\ \operatorname{Ext}^1(L, M) & (n = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

次にクイバーが有向閉路を持っているとする。この場合直既約射影表現が有限次元になるとは限らない。そこでクイバーに関係を導入して $\operatorname{rep}_{\Bbbk} Q$ の充満部分圏でその関係を満たす表現を考えることをする。
そして基本多元環との対応を考えて以上のことを利用すると代数閉体上の全ての基本多元環をクイバーの表現に帰着させて表示することができる。