クイバーの表現上のホモロジー代数

つー (ogata-k)

abstract

本文書の目的は有向グラフの表現における次の事実を理解できるように説明することである。以下この文書ではグラフ理論の有向グラフと区別するために有向グラフのことをクイバーと呼ぶことにする。

- クイバーの表現は多元環という代数系の表現と対応していること
- クイバーの表現から成る圏はそのクイバーから成る加群の圏と自然同型であること
- 先程の自然同型から考える表現の圏のホモロジー代数

これらをそれぞれ一章を使って説明していく。

Contents

Chapter 1

クイバーの表現と多元環の対応

「クイバーの表現は多元環という代数系の表現と対応していること」を説明していく。そのためにまずクイバーについて説明していく。

1.1. クイバー

Definition 1.1.1 (クイバー). **クイバー**とは、集合（またはクラス）Q_0、Q_1 とそのあいだの写像 $s, t : Q_1 \to Q_0$ から成る組 $\left(Q_0, Q_1, s, t\right)$ のことである。

Definition 1.1.2 (頂点、矢、始点、終点). $Q = \left(Q_0, Q_1, s, t\right)$ をクイバーとする。このとき Q_0 の元 v を**頂点**、Q_1 の元 $e : x \to y$ を**始点** x から**終点** y への**矢**と呼ぶ。そしてそれぞれ $v \in Q$、$e : x \to y$ in Q と略記する。

Example 1.1.3 Q を $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$、$Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu\}$、$s(\alpha) = 3$、$s(\beta) = 2$、$s(\gamma) = 3$、$s(\lambda) = 1$、$s(\mu) = 1$ で、$t(\alpha) = 2$、$t(\beta) = 1$、$t(\gamma) = 3$、$t(\lambda) = 3$、$t(\mu) = 3$ のから成るクイバーとする。これを図示すると次のように成る。(画像なし)

Example 1.1.4 合成と結合法則を忘れることにより任意の圏はクイバーになる。このことから例えば代数的閉体 $\Bbbk$ にたいして左 $\Bbbk$ 加群の圏 mod$\Bbbk$ はクイバーである。

クイバーの頂点集合と矢集合がともに有限のとき有限クイバーと呼ぶ。そして以降断らない限り考えるクイバーは有限クイバーとする。

Definition 1.1.5 (クイバー準同型). $Q = \left(Q_0, Q_1, s, t\right)$ と $Q^{'} = \left(Q^{'}_0, Q^{'}_1, s^{'}, t^{'}\right)$ をクイバーとする。そして $f_0 : Q_0 \to Q^{'}_0$ と $f_1 : Q_1 \to Q^{'}_1$ の組 $f = \left(f_0, f_1\right)$ が Q から $Q^{'}$ への (準同型) 写像であるというのは次を満たすことを言う。(2 つの可換図式の画像) すなわち任意の矢 $\alpha : x \to y$ in Q に対して $f_1(\alpha) : f_0(x) \to f_0(y)$ が

成り立つことを言う。また、今後 f_0 や f_1 を f と略記する。

1.2. クイバーの表現

$Q = \left(Q_0, Q_1, s, t\right)$ をクイバーとする。そして今後クイバー Q と書いたらこのように作ったものと考えることにする。

Definition 1.2.1 (クイバーの表現). クイバー Q の表現とはクイバー準同型 $V : Q \to mod\Bbbk$ で任意の $\alpha : x \to y$ in Q に対して $V(\alpha) : V(x) \to V(y)$ が線形写像に成るものを言う。

このクイバーの表現は圏論で言う関手のようなものである。

Definition 1.2.2 (表現間の写像). 線形写像の組 $f = \left(f_x : V(x) \to V^{'}(x)\right)_{x \in Q}$ がクイバー Q の表現 V から表現 $V^{'}$ への写像であるとは任意の $\alpha : x \to y$ in Q に対して次の図式を可換にするものを言う。(可換図式の画像なし)

この表現間の写像は圏論でいう自然変換のようなものである。

Chapter 2

ある加群の圏との同型

Chapter 3

表現の圏のホモロジー代数

References

[1] Ralf Schiffler. *Quiver Representations (CMS Books in Mathematics)*. Springer, 2014.

[2] 中岡 宏行 . 圏論の技法 . 日本評論社 , 2015.