平成30年度卒業論文

有向閉路を持たない有限クイバーの
有限次元表現の圏におけるExt群の決定

静岡大学理学部数学科
つー

はじめに

クイバーとその表現は多元環の表現論で表示や計算などを扱いやすくするために発達した手法である。この卒業論文ではクイバーの単純表現間の Ext 群をクイバーを中心とした見方で決定する。
クイバーについては文献 [2] を参照し、ホモロジー代数については文献 [3], [4] を参照のこと。
この論文を書くにあたり、ゼミでのわかりやすいテキストの用意とこの卒業論文の添削をしてくださった指導教員の浅芝先生と発表セミナーの準備に協力していただいた先輩に感謝いたします。

準備

$\Bbbk$ は代数閉体とし、$\mathrm{mod}\,\Bbbk$ を次元が有限な左 $\Bbbk$-加群（つまり $\Bbbk$-線形空間）の圏とする。また $\mathrm{mod}\,\Bbbk$ の射 $f : V \to W$ に対して dom を定義域 V を与える写像、cod を値域 W を与える写像とする。

定義 (クイバー)
クイバーとは集合 Q_0、Q_1 と写像 $s, t : Q_1 \to Q_0$ からなる組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことである。

任意の $x, y \in Q_0$ に対して $Q_1(x, y) = \{\alpha \in Q_1 | s(\alpha) = x, t(\alpha) = y\}$ とおく。そしてその $Q_1(x, y)$ の元を頂点 x から頂点 y への矢と呼ぶ。

定義 (道)
非負整数 n に対して長さ n の道を次で定義する。:

1. 長さ 0 の道は任意の $x \in Q_0$ に対して e_x という記号である。

2. 長さ $n(n \geq 1)$ の道は $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n \in Q1$ からなる列 $\alpha_n\alpha_{n-1} \cdots \alpha_2\alpha_1$ で任意の $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$ となるものとする。

そして長さ 0 の道 e_x に対して e_x の始点を $s(e_x) = x$、終点を $t(e_x) = x$ として定義し、長さ n の道 $c = \alpha_n\alpha_{n-1} \cdots \alpha_2\alpha_1$ に対して c の始点を $s(c) = s(\alpha_1)$、終点 $t(c) = t(\alpha_n)$ と定義する。

定義 (道の積)
λ, μ を道としたとき積 $\cdot$ を次で定義する。:

1. $s(\lambda) \neq t(\mu)$ のとき、$\lambda \cdot \mu = 0$

2. $s(\lambda) = t(\mu) = x$ のとき、

    (a) λ と μ の長さが 0 のとき、$\lambda \cdot \mu = e_x$ とする。

(b) λ の長さが 0、μ の長さが $n \geq 1$ のとき $\mu = \beta_n \cdots \beta_1$ でかけるとすると、$\lambda \cdot \mu = \beta_n \cdots \beta_1$ とする。

(c) λ の長さが m、μ の長さが 0 のとき $\lambda = \alpha_m \cdots \alpha_1$ でかけるとすると、$\lambda \cdot \mu = \alpha_n \cdots \alpha_1$ とする。

(d) λ の長さが $m \geq 1$、μ の長さが $n \geq 1$ のとき $\lambda = \alpha_m \cdots \alpha_1$、$\mu = \beta_n \cdots \beta_1$ でかけるとすると、$\lambda \cdot \mu = \alpha_m \cdots \alpha_1 \beta_n \cdots \beta_1$ とする。

この道を導入するとクイバー Q に対して対象を Q の頂点、x から y への射を始点を x、終点を y とする道とし、合成を道の積とすると道圏と呼ばれる圏ができる。その圏を PQ と表記する。

定義 (クイバーの表現)

クイバー Q の表現とは各頂点に $\mathbb{k}$-線形空間を与える写像 $M_0 : Q_0 \to (\mathrm{mod}\,\mathbb{k})_0$ と各に辺 $\mathbb{k}$-線形写像を与える写像 $M_1 : Q_1 \to (\mathrm{mod}\,\mathbb{k})_1$ からなる組 $M = (M_0, M_1)$ で次の二つの図式を可換にするものをいう。:

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{M_1} & (\mathrm{mod}\,\mathbb{k})_1 \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{dom}} \\ Q_0 & \xrightarrow[M_0]{} & (\mathrm{mod}\,\mathbb{k})_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{M_1} & (\mathrm{mod}\,\mathbb{k})_1 \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cod}} \\ Q_0 & \xrightarrow[M_0]{} & (\mathrm{mod}\,\mathbb{k})_0 \end{array}$$

そして任意の $x \in Q_0$ に対して $\dim(M_0(x)) < \infty$ となる表現を有限次元表現と呼ぶ。

定義 (クイバーの表現間の射)

M, N をクイバー Q の表現とする。このとき f が M から N の射であるとは $\mathbb{k}$-線形写像 $f_x : M_0(x) \to N_0(x)$ の族 $f = (f_x)_{x \in Q_0}$ で、任意の $\alpha \in Q_1(x, y)$ に対して次の図式を可換にするものをいう。:

$$\begin{array}{ccc} M_0(x) & \xrightarrow{f_x} & N_0(x) \\ {\scriptstyle M_1(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_1(\alpha)} \\ M_0(y) & \xrightarrow[f_y]{} & N_0(y) \end{array}$$

この表現間の写像は各成分ごとに合成を考えるとで合成を定義することができる。

定義 (クイバーの表現の圏)

クイバーとして Q を取る。このとき対象をクイバーの有限次元表現、射を表現間の射、恒等射として各成分が恒等射からなる表現間の射、合成を表現間の射の合成とするとこれらは圏となる。これをクイバー Q の表現の圏と呼び $\mathrm{rep}_{\mathbb{k}}\, Q$ と書く。

合成と同様に、表現間の射に対して核、余核、像、余像、積（直積)、余積（直和)、和を各成分ごとに考えることでそれぞれ定義できる。さらにそれぞれ圏論でいう普遍性を満たしていることも確認できる。加えて零対象として全てが 0 の表現 (零表現)、零射としてすべてが 0 の表現間の写像を考えることができる。
これらの定義と同様に各成分毎に考えていくことで $\mathrm{rep}_{\Bbbk} Q$ がアーベル圏であることが言える。アーベル圏については文献 [5] を参照のこと。

以下では Q_0 と Q_1 が有限で有向閉路を持たないクイバー Q を考える。

定義 (単純表現、射影表現、入射表現)

1. 頂点 $x \in Q$ における単純表現 S_x は
$$\begin{aligned} S_{x,0}(y) &= \begin{cases} \Bbbk e_x & (\text{if } y = x) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \\ S_{x,1}(\alpha) &= 0 \quad (\alpha \in Q_1) \end{aligned}$$
の $S_{x,0}$、$S_{x,1}$ の組みからなる表現 $(S_{x,0}, S_{x,1})$ のことである。

2. $\cdot$ を道の積だとすると頂点 $x \in Q$ における射影表現 P_x は
$$\begin{aligned} P_{x,0}(y) &= (PQ(x,y) \text{ から自由生成される} \Bbbk\text{-線形空間}) \\ P_{x,1}(\alpha)(\sum_{c \in PQ(x,y)} \lambda_c c) &= \sum_{c \in PQ(x,y)} \lambda_c (\alpha \cdot c) \quad (\alpha \in Q_1) \end{aligned}$$
の $P_{x,0}$、$P_{x,1}$ の組みからなる表現 $(P_{x,0}, P_{x,1})$ のことである。

3. 頂点 $x \in Q$ における入射表現 I_x は $\alpha : z \to y$ in Q に対して $f_\alpha : PQ(y,x) \to PQ(z,x)$ を
$$f_\alpha(\beta_s \dots \beta_2 \beta_1) = \begin{cases} \beta_s \dots \beta_2 & (\text{if } \beta_1 = \alpha) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
と置いたとき
$$\begin{aligned} I_{x,0}(y) &= (PQ(y,x) \text{ から自由生成される} \Bbbk\text{-線形空間}) \quad (y \in Q_0) \\ I_{x,1}(\alpha)(\sum_{c \in PQ(y,x)} \lambda_c c) &= \sum_{c \in PQ(y,x)} \lambda_c f_\alpha(c) \quad (\alpha \in Q_1) \end{aligned}$$
の $I_{x,0}$、$I_{x,1}$ の組みからなる表現 $(I_{x,0}, I_{x,1})$ のことである。

このようにして定義された射影表現と入射表現は圏論的な意味でそれぞれ射影的、入射的である。さらにこれらは直既約的である。

文献 [1] によると $\mathrm{rep}_{\Bbbk} Q$ ではこれらに対して次のことが成り立つ。

定理

$M \in \mathrm{rep}_{\Bbbk} Q$ に対して次が成り立つ。

1. M の射影分解が次の形で取れる。

$$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

2. M の入射分解として次の形で取れる。

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to 0$$

これらを標準分解と呼ぶ。

この定理により $\mathrm{rep}_{\Bbbk} Q$ は充分射影的であり、充分入射的であることがわかる。そしてこの定理と Ext 関手の定義、一般論から次が言える。

定理
任意の表現 $L, M \in \mathrm{rep}_{\Bbbk} Q$ と整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ。

$$\mathrm{Ext}^n(L, M) = \begin{cases} \mathrm{Hom}(L, M) & (n = 0) \\ \mathrm{Ext}^1(L, M) & (n = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Ext 群の決定

単純表現間の Ext 群については次の定理を用いて直接求めることができる。

定理
任意の表現 $M \in \mathrm{rep}_{\Bbbk} Q$ と頂点 $x \in Q$ に対する射影表現 P_x に対して $\mathrm{Hom}(P_x, M) \cong M_0(x)$ が成り立つ。

これを用いて $x, y \in Q_0$ に対する単純表現 S_x, S_y 間の Ext 群を求めていく。
まず S_x を含む複体として次を考える。

$$0 \to \bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,-)} P_{t(\alpha)} \xrightarrow{f} P_x \xrightarrow{g} S_x \to 0$$

ただし $f = (f_t)_{t \in Q_0}$ は $t = x$ で $f_t = 0$ で $t \neq x$ で $f_t = \bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,-)} (\cdot\alpha)$（$\cdot$ は矢の右結合）とし、$g = (g_t)_{t \in Q_0}$ は $t = x$ で $g_t = 1_{\Bbbk e_x}$ で $t \neq x$ で $g_t = 0$ とする。
$\alpha \in Q_1(x, -)$ に対して $P_{t(\alpha),0}(x) \neq 0$ だとするとこれは x を通る有向閉路を Q が持つことになるので矛盾することから $P_{t(\alpha),0}(x) = 0$ となり、f が定義できていることがわかる。同じく Q が有向閉路を持たないことから f がちゃんと表現間の写像になっていることがわかる。そして f が単型であることと g が表現間の写像として定義できていて全型であることは定義から自明である。また、f と g に関する完全性は道の組み合わせからわかる。ゆえにこの複体は S_x の射影分解である。

そして S_x の射影分解において S_x 以降を除いた複体に反変 Hom 関手 $\mathrm{Hom}(-,S_y)$ を適用すると

$$0 \to \mathrm{Hom}(P_x,S_y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,S_y)} \mathrm{Hom}(\bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,-)} P_{t(\alpha)},S_y) \to 0$$

ここで先程の定理と Hom 関手の直和の保存性から先の余複体は次と同型になる。

$$0 \to S_{y,0}(x) \xrightarrow{Hom(f,S_y)} \bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,-)} S_{y,0}(t(\alpha)) \to 0$$

まず $x=y$ の時を考える。
定義から $S_{y,0}(x)=S_{x,0}(x)=\Bbbk_{e_x}$ である。そして今考えているクイバー Q は有向閉路を持たないので

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,-)} S_{y,0}(t(\alpha)) &= \bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,-)} S_{x,0}(t(\alpha)) \\
&\cong \left(\bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,x)} S_{x,0}(t(\alpha))\right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,y),t(y)\neq x} S_{x,0}(y)\right) \\
&\cong \bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,x)} S_{x,0}(x) \\
&= \bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,x)} \Bbbk_{e_x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。よって $x=y$ のとき Ext 群は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^0(S_x,S_y) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(f,S_y))/0 \\
&\cong S_{y,0}(x) \\
&\cong \Bbbk_{e_x} \\
&\cong \Bbbk \\
\mathrm{Ext}^1(S_x,S_y) &= \left(\bigoplus_{\alpha\in Q_1(x,-)} S_{y,0}(t(\alpha))\right) / \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f,S_y)) \\
&\cong 0/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f,S_y)) \\
&\cong 0
\end{aligned}$$

次に $x \neq y$ のときを考える。
定義から $S_{y,0}(x) = 0$ である。そして

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,-)} S_{y,0}(t(\alpha)) &\cong \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,y)} S_{y,0}(y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,z), z \neq y} S_{y,0}(z) \right) \\
&\cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,y)} S_{y,0}(y) \\
&\cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,y)} \Bbbk_{e_y}
\end{aligned}$$

となる。よって $x \neq y$ のとき Ext 群は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^0(S_x, S_y) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(f, S_y)) / \, 0 \\
&\cong S_{y,0}(x) \\
&= 0 \\
\mathrm{Ext}^1(S_x, S_y) &= \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,-)} S_{y,0}(t(\alpha)) \right) / \, \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(f, S_y)) \\
&\cong \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,y)} \Bbbk_{e_y} \right) / \, 0 \\
&\cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,y)} \Bbbk
\end{aligned}$$

従って δ をクロネッカーのデルタとして次を得る。

定理
有向閉路を持たない有限クイバー Q において、頂点 $x, y \in Q_0$ の単純表現 $S_x, S_y \in \mathrm{rep}_{\Bbbk} Q$ に対する $\mathrm{Ext}^n(S_x, S_y)$ は次で求められる。

$$\mathrm{Ext}^n(S_x, S_y) \cong \begin{cases} \Bbbk \delta_{x,y} & (n = 0) \\ \bigoplus_{\alpha \in Q_1(x,y)} \Bbbk & (n = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

参考文献

[1] Ralf Schiffler: *Quiver Representations*, CMS Books in Mathematics, Springer (2014).

[2] 浅芝 秀人: *Representations of quivers*, `https://wwp.shizuoka.ac.jp/asashiba/1-2/`

[3] 浅芝 秀人: *Homological Algebra*, `https://wwp.shizuoka.ac.jp/asashiba/1-5/`

[4] 志甫 淳: **層とホモロジー代数**, 共立講座—数学の魅力, 共立出版 (2016).

[5] 中岡 宏行: **圏論の技法**, 日本評論社 (2015).