

Cours Machine Learning

Chapitre 01 Fondamentaux Mathématiques

Objectifs d'apprentissage :

- Maîtriser les concepts d'algèbre linéaire essentiels (vecteurs, matrices, décompositions)
- Comprendre les probabilités et statistiques nécessaires au ML
- Appréhender le calcul différentiel et les techniques d'optimisation
- Savoir appliquer ces outils mathématiques aux algorithmes de ML

Prérequis : Mathématiques niveau Licence (algèbre, analyse)

Durée estimée : 5-7 heures

Notebooks : 01_{demo}.*.ipynb

Table des matières

I Algèbre Linéaire	2
1 Vecteurs et Espaces Vectoriels	2
1.1 Définitions Fondamentales	2
1.2 Opérations sur les Vecteurs	2
1.3 Produit Scalaire (Dot Product)	3
1.4 Norme Vectorielle	3
1.5 Distance entre Vecteurs	4
2 Matrices	4
2.1 Définitions et Notation	4
2.2 Opérations Matricielles	5
2.3 Multiplication Matricielle	5
2.4 Matrices Spéciales	5
2.5 Déterminant	6
2.6 Inverse de Matrice	6
2.7 Trace	7
2.8 Rang	7
3 Systèmes Linéaires et Résolution	7
3.1 Formulation	7
3.2 Solutions	7
3.3 Solution des Moindres Carrés	8
4 Valeurs et Vecteurs Propres	8
4.1 Définitions	8
4.2 Calcul des Valeurs Propres	8
4.3 Diagonalisation	9
4.4 Matrices Symétriques Réelles	9
5 Décompositions Matricielles	10
5.1 Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)	10
5.2 Applications de la SVD	10
5.3 Autres Décompositions	11
II Probabilités et Statistiques	11
6 Probabilités Fondamentales	11
6.1 Concepts de Base	11
6.2 Indépendance	11
6.3 Théorème de Bayes	12
7 Variables Aléatoires	12
7.1 Variable Aléatoire Discrète	12

7.2	Variable Aléatoire Continue	13
7.3	Espérance et Variance	13
7.4	Loi Normale (Gaussienne)	14
7.5	Loi Normale Multivariée	14
8	Statistiques Descriptives	15
8.1	Mesures de Tendance Centrale	15
8.2	Mesures de Dispersion	15
8.3	Covariance et Corrélation	15
III	Calcul Différentiel et Optimisation	16
9	Dérivées	16
9.1	Dérivée d'une Fonction Scalaire	16
9.2	Gradient	17
9.3	Matrice Hessienne	17
9.4	Jacobienne	17
10	Optimisation	18
10.1	Conditions d'Optimalité	18
10.2	Convexité	18
10.3	Descente de Gradient	19
10.4	Méthode de Newton	19
11	Résumé du Chapitre	20
11.1	Points Clés	20
11.2	Formules Essentielles	20
12	Exercices	21
12.1	Algèbre Linéaire	21
12.2	Probabilités et Statistiques	21
12.3	Calcul Différentiel et Optimisation	21
13	Pour Aller Plus Loin	22
13.1	Lectures Recommandées	22
13.2	Outils Pratiques	22
13.3	Prochaines Étapes	22

Première partie

Algèbre Linéaire

1 Vecteurs et Espaces Vectoriels

1.1 Définitions Fondamentales

Définition : Vecteur

Un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est un tuple ordonné de n nombres réels :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

On le représente comme un vecteur colonne par défaut. Un vecteur ligne s'écrit \mathbf{v}^T .

Interprétations :

- **Géométrique** : Point ou flèche dans l'espace \mathbb{R}^n
- **ML** : Une instance de données (sample), un vecteur de features
- **Algébrique** : Élément d'un espace vectoriel

Exemple : Vecteur de features

Un appartement décrit par 3 features :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 75 \\ 3 \\ 2010 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(surface en m}^2\text{)} \\ \text{(nombre de pièces)} \\ \text{(année de construction)} \end{array} \quad (2)$$

1.2 Opérations sur les Vecteurs

Addition vectorielle :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Multiplication par un scalaire :

$$\alpha \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

1.3 Produit Scalaire (Dot Product)

Définition : Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \quad (5)$$

Propriétés :

- Commutativité : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- Linéarité : $(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, égalité ssi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Interprétation géométrique :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \quad (6)$$

où θ est l'angle entre \mathbf{u} et \mathbf{v} .

Astuce

En Machine Learning :

- Le produit scalaire mesure la **similarité** entre vecteurs
- Deux vecteurs orthogonaux ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$) sont **non corrélés**
- Utilisé partout : régression linéaire ($\mathbf{w}^T \mathbf{x}$), réseaux de neurones, kernels...

1.4 Norme Vectorielle

Définition : Norme L^p

La norme L^p d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} \quad (7)$$

Normes principales :

- **Norme L^1 (Manhattan) :**

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (8)$$

Utilisée pour la régularisation Lasso, robuste aux outliers.

- **Norme L^2 (Euclidienne) :**

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \quad (9)$$

La plus courante en ML. Utilisée pour mesurer des distances.

- **Norme L^∞ (Maximum) :**

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_i |v_i| \quad (10)$$

Exemple : Calcul de normes

Pour $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |-4| = 7 \quad (11)$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (12)$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max(|3|, |-4|) = 4 \quad (13)$$

1.5 Distance entre Vecteurs**Définition : Distance euclidienne**

La distance entre deux points $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est :

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2} \quad (14)$$

Applications en ML :

- K-Nearest Neighbors (KNN)
- Clustering (K-Means)
- Embeddings (mesurer similarité sémantique)

2 Matrices**2.1 Définitions et Notation****Définition : Matrice**

Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Notation :

- a_{ij} : élément ligne i , colonne j
- $\mathbf{A}_{i:}$: i -ème ligne (vecteur ligne)
- $\mathbf{A}_{:j}$: j -ème colonne (vecteur colonne)

Interprétation ML :

- **Dataset** : $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ où n = nombre d'instances, d = nombre de features
- Chaque ligne $\mathbf{X}_{i:} = \mathbf{x}_i^T$ est une instance
- Chaque colonne $\mathbf{X}_{:j}$ est une feature

2.2 Opérations Matricielles

Addition : $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (même dimension)

Multiplication par scalaire : $(\alpha \mathbf{A})_{ij} = \alpha a_{ij}$

Transposée :

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji} \quad (16)$$

Propriétés de la transposée :

- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

2.3 Multiplication Matricielle

Définition : Produit matriciel

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, alors $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ avec :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \mathbf{A}_{i:} \cdot \mathbf{B}_{:j} \quad (17)$$

Attention

Attention :

- La multiplication matricielle n'est **pas commutative** : $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ en général
- Les dimensions doivent être compatibles : $(m \times n) \times (n \times p) \rightarrow (m \times p)$

Complexité : Multiplication naïve : $O(mnp)$ opérations

Exemple : Prédiction en régression linéaire

Pour n instances avec d features, la prédiction vectorielle s'écrit :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{w} + b\mathbf{1} \quad (18)$$

où $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$, $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$. Une seule opération matricielle remplace n produits scalaires !

2.4 Matrices Spéciales

Matrice identité :

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \quad (19)$$

Matrice diagonale :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \quad (20)$$

Matrice symétrique : $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ (ex : matrices de covariance)

Matrice orthogonale : $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$

2.5 Déterminant

Définition : Déterminant

Pour une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le déterminant $\det(\mathbf{A})$ mesure le volume orienté par la transformation linéaire associée.

Cas 2×2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (21)$$

Propriétés :

- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$
- Si $\det(\mathbf{A}) = 0$, alors \mathbf{A} n'est pas inversible (singulière)

2.6 Inverse de Matrice

Définition : Matrice inverse

Pour une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'inverse \mathbf{A}^{-1} (si elle existe) vérifie :

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (22)$$

Conditions d'existence :

- \mathbf{A} doit être carrée
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ (matrice non-singulière)

Cas 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (23)$$

Attention

En pratique, on **n'inverse jamais explicitement** une matrice! On résout plutôt le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ via des méthodes numériques (décomposition LU, Cholesky, etc.).

2.7 Trace

Définition : Trace

La trace d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (24)$$

Propriétés :

- $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$
- $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ (propriété cyclique)
- $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i$ où λ_i sont les valeurs propres

2.8 Rang

Définition : Rang

Le rang d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est le nombre maximal de colonnes (ou lignes) linéairement indépendantes.

Propriétés :

- $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^T)$
- Si $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ (rang plein en colonnes), alors $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est inversible

En ML :

- Rang faible \Rightarrow redondance dans les features
- PCA, SVD exploitent les structures de rang faible

3 Systèmes Linéaires et Résolution

3.1 Formulation

Un système linéaire de m équations à n inconnues s'écrit :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (25)$$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Cas en ML :

- **Régression linéaire** : Trouver \mathbf{w} tel que $\mathbf{Xw} \approx \mathbf{y}$
- **Optimisation** : Résoudre $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (gradient nul)

3.2 Solutions

Cas carré ($m = n$) :

- Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$: solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
- Si $\det(\mathbf{A}) = 0$: aucune solution ou infinité de solutions

Cas rectangulaire ($m \neq n$) :

- $m > n$ (surdéterminé) : en général pas de solution exacte \Rightarrow solution des moindres carrés
- $m < n$ (sous-déterminé) : infinité de solutions \Rightarrow choisir celle de norme minimale

3.3 Solution des Moindres Carrés

Théorème : Solution des moindres carrés

Pour le système surdéterminé $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}$, la solution qui minimise $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$ est :

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (26)$$

sous réserve que $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ soit inversible.

Application directe : Régression linéaire ! Si $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\mathbf{w}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (27)$$

Astuce

La matrice $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ s'appelle la **pseudo-inverse de Moore-Penrose**. En Python : `numpy.linalg.pinv(A)`.

4 Valeurs et Vecteurs Propres

4.1 Définitions

Définition : Valeur propre et vecteur propre

Pour une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ est un **vecteur propre** associé si :

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v} \quad (28)$$

Interprétation : La transformation \mathbf{A} étire le vecteur \mathbf{v} par un facteur λ , sans changer sa direction.

4.2 Calcul des Valeurs Propres

Les valeurs propres sont les racines du **polynôme caractéristique** :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (29)$$

Exemple : Matrice 2×2

Pour $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$= (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \times 1 \quad (31)$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \quad (32)$$

Solutions : $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$.

4.3 Diagonalisation

Théorème : Diagonalisation

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possède n vecteurs propres linéairement indépendants $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ avec valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \quad (33)$$

où $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$ et $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Avantages de la diagonalisation :

- Calcul de puissances : $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$
- Exponentielle : $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}$
- Comprendre la dynamique des systèmes linéaires

4.4 Matrices Symétriques Réelles

Théorème : Théorème spectral

Toute matrice symétrique réelle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable avec :

- Toutes les valeurs propres sont **réelles**
- Les vecteurs propres peuvent être choisis **orthonormaux**
- Décomposition : $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T$ où \mathbf{Q} est orthogonale

Applications en ML :

- PCA (Principal Component Analysis)
- Matrices de covariance
- Kernel PCA

5 Décompositions Matricielles

5.1 Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

Théorème : SVD (Singular Value Decomposition)

Toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ peut être décomposée en :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \quad (34)$$

où :

- $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: matrice orthogonale (vecteurs singuliers gauches)
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$: matrice diagonale avec valeurs singulières $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$
- $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrice orthogonale (vecteurs singuliers droits)

Propriétés :

- Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{nombre de valeurs singulières non nulles}$
- Fonctionne pour **toute** matrice (pas besoin qu'elle soit carrée ou symétrique)

Astuce

SVD en Python :

```
1 import numpy as np
2 U, Sigma, VT = np.linalg.svd(A, full_matrices=False)
3 # Reconstruction: A_approx = U @ np.diag(Sigma) @ VT
```

5.2 Applications de la SVD

1. Approximation de rang faible :

On peut approximer \mathbf{A} en gardant seulement les k plus grandes valeurs singulières :

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (35)$$

C'est l'approximation de rang k optimale au sens de la norme de Frobenius.

2. PCA (Principal Component Analysis) :

La PCA est équivalente à une SVD des données centrées :

- Centrer : $\mathbf{X}_c = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}$
- SVD : $\mathbf{X}_c = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$
- Composantes principales = colonnes de \mathbf{V}

3. Compression d'images :

Une image est une matrice. La SVD permet de compresser en ne gardant que les k premières valeurs singulières.

4. Recommandation (Matrix Factorization) :

Netflix Prize : décomposer la matrice utilisateurs \times films en produit de matrices de rang faible.

5.3 Autres Décompositions

Décomposition LU : $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ (Lower-Upper), pour résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ efficacement.

Décomposition de Cholesky : Si \mathbf{A} est symétrique définie positive, $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$.

Décomposition QR : $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ où \mathbf{Q} est orthogonale et \mathbf{R} est triangulaire supérieure.

Deuxième partie

Probabilités et Statistiques

6 Probabilités Fondamentales

6.1 Concepts de Base

Définition : Probabilité

Une probabilité P est une mesure sur un espace d'événements Ω telle que :

- $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement A
- $P(\Omega) = 1$
- Si A_1, A_2, \dots sont disjoints, $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

Règles de base :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (36)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad (37)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{probabilité conditionnelle}) \quad (38)$$

6.2 Indépendance

Définition : Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (39)$$

Équivalent à : $P(A | B) = P(A)$.

6.3 Théorème de Bayes

Théorème : Théorème de Bayes

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (40)$$

Terminologie :

- $P(A)$: probabilité a priori
- $P(A | B)$: probabilité a posteriori
- $P(B | A)$: vraisemblance (likelihood)
- $P(B)$: évidence

Forme étendue :

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{\sum_i P(B | A_i) \cdot P(A_i)} \quad (41)$$

Astuce

Applications en ML :

- Naive Bayes Classifier
- Inférence bayésienne
- Filtres bayésiens (spam, Kalman)

7 Variables Aléatoires

7.1 Variable Aléatoire Discrète

Définition : Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire X prend des valeurs dans un ensemble discret (fini ou dénombrable).

Sa distribution est caractérisée par la **fonction de masse** :

$$p_X(x) = P(X = x) \quad (42)$$

avec $\sum_x p_X(x) = 1$.

Distributions classiques :

- **Bernoulli** : $X \in \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad (43)$$

- **Binomiale** : $X \sim \text{Bin}(n, p)$ (nombre de succès en n essais)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (44)$$

- **Poisson** : $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (événements rares)

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (45)$$

7.2 Variable Aléatoire Continue

Définition : Variable aléatoire continue

Une variable continue X est caractérisée par une **fondction de densité** $f_X(x)$ telle que :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (46)$$

avec $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

Distributions classiques :

- **Uniforme** : $X \sim \text{Uniform}(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (47)$$

- **Normale (Gaussienne)** : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (48)$$

- **Exponentielle** : $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ (temps entre événements)

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0) \quad (49)$$

7.3 Espérance et Variance

Définition : Espérance

L'espérance (moyenne) d'une variable aléatoire X est :

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_x x \cdot p_X(x) & \text{(discret)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx & \text{(continu)} \end{cases} \quad (50)$$

Propriétés :

- Linéarité : $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$

Définition : Variance

La variance mesure la dispersion autour de la moyenne :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \quad (51)$$

L'écart-type est $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Propriétés :

- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

- Si X, Y indépendants : $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Exemples :

Loi	Espérance	Variance
Bernoulli(p)	p	$p(1-p)$
Binomiale(n, p)	np	$np(1-p)$
Poisson(λ)	λ	λ
Uniforme(a, b)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normale(μ, σ^2)	μ	σ^2

7.4 Loi Normale (Gaussienne)

La loi normale est **fondamentale** en ML et statistiques.

Théorème : Théorème Central Limite (TCL)

Soit X_1, \dots, X_n des variables i.i.d. d'espérance μ et variance σ^2 . Alors :

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1) \quad (52)$$

où $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Conséquence : Beaucoup de phénomènes naturels suivent approximativement une loi normale grâce au TCL.

Propriétés de la loi normale :

- Somme de gaussiennes = gaussienne
- 68% des valeurs dans $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95% dans $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99.7% dans $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

7.5 Loi Normale Multivariée

Définition : Loi normale multivariée

Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ suit une loi normale multivariée $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ si sa densité est :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right) \quad (53)$$

où $\mu \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur moyenne et $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est la matrice de covariance.

Utilisations en ML :

- Gaussian Mixture Models (GMM)
- Analyse discriminante linéaire (LDA)
- Processus gaussiens

8 Statistiques Descriptives

8.1 Mesures de Tendance Centrale

Moyenne empirique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (54)$$

Médiane : Valeur centrale quand les données sont triées. Robuste aux outliers.

Mode : Valeur la plus fréquente.

8.2 Mesures de Dispersion

Variance empirique :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (55)$$

Écart-type : $s = \sqrt{s^2}$

Intervalle interquartile (IQR) : $IQR = Q_3 - Q_1$ (robuste)

8.3 Covariance et Corrélation

Définition : Covariance

La covariance entre deux variables X et Y mesure leur variation conjointe :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \quad (56)$$

Version empirique :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (57)$$

Définition : Coefficient de corrélation de Pearson

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1, 1] \quad (58)$$

Interprétation :

- $\rho = 1$: corrélation linéaire positive parfaite
- $\rho = -1$: corrélation linéaire négative parfaite
- $\rho = 0$: pas de corrélation linéaire

Matrice de covariance : Pour un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T] \quad (59)$$

avec $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$.

Astuce

En Python (NumPy/Pandas) :

```

1 # Matrice de covariance
2 cov_matrix = np.cov(X, rowvar=False) # colonnes = variables
3
4 # Matrice de corrélation
5 corr_matrix = np.corrcoef(X, rowvar=False)
6 # ou avec pandas:
7 corr_matrix = df.corr()

```

Troisième partie**Calcul Différentiel et Optimisation****9 Dérivées****9.1 Dérivée d'une Fonction Scalaire****Définition : Dérivée**

La dérivée de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en x est :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (60)$$

Interprétation : Pente de la tangente à la courbe en x .

Règles de dérivation :

$$(cf)' = cf' \quad (61)$$

$$(f + g)' = f' + g' \quad (62)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{règle du produit}) \quad (63)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{règle du quotient}) \quad (64)$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad (\text{règle de la chaîne}) \quad (65)$$

Dérivées usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

9.2 Gradient

Définition : Gradient

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, le gradient est le vecteur des dérivées partielles :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (66)$$

Interprétation géométrique :

- Le gradient pointe dans la direction de **plus forte croissance**
- Sa norme $\|\nabla f\|$ mesure le taux de croissance
- $-\nabla f$ pointe vers la plus forte décroissance

Exemple : Gradient de fonctions courantes

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \sum_i a_i x_i \Rightarrow \nabla f = \mathbf{a} \quad (67)$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \Rightarrow \nabla f = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} \quad (68)$$

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \Rightarrow \nabla f = 2\mathbf{x} \quad (69)$$

9.3 Matrice Hessienne

Définition : Hessienne

Pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable, la matrice hessienne est la matrice des dérivées secondes :

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (70)$$

Propriétés :

- Si f est C^2 , alors \mathbf{H} est symétrique (théorème de Schwarz)
- La hessienne mesure la **courbure** de f
- Utilisée dans les méthodes d'optimisation du second ordre (Newton)

9.4 Jacobienne

Définition : Jacobienne

Pour une fonction vectorielle $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la jacobienne est la matrice des dérivées

partielles :

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (71)$$

Application en Deep Learning : La backpropagation utilise la règle de la chaîne avec des jacobienes pour calculer les gradients.

10 Optimisation

10.1 Conditions d'Optimalité

Théorème : Condition nécessaire du premier ordre

Si \mathbf{x}^* est un minimum local de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, alors :

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (72)$$

Théorème : Condition suffisante du second ordre

Si $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ et la hessienne $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^*)$ est **définie positive** (toutes les valeurs propres > 0), alors \mathbf{x}^* est un minimum local strict.

Cas de la hessienne :

- Définie positive \Rightarrow minimum local
- Définie négative \Rightarrow maximum local
- Indéfinie \Rightarrow point-selle

10.2 Convexité

Définition : Fonction convexe

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tous \mathbf{x}, \mathbf{y} et $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}) \quad (73)$$

Critère différentiel :

- Si $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$ est semi-définie positive partout, alors f est convexe
- Si $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$ est définie positive partout, alors f est strictement convexe

Propriété fondamentale : Pour une fonction convexe, **tout minimum local est global**.

Exemple : Fonctions convexes courantes

- Fonctions linéaires/affines : $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$
- Norme L^2 au carré : $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2$
- Exponentielle : $f(x) = e^x$
- Logarithme négatif : $f(x) = -\ln(x)$ pour $x > 0$

10.3 Descente de Gradient

Algorithm 1 Descente de Gradient

Require : Fonction f , point initial \mathbf{x}_0 , learning rate $\alpha > 0$, tolérance ϵ

Ensure : Minimum approximatif \mathbf{x}^*

- 1 : $k \leftarrow 0$
 - 2 : **repeat**
 - 3 : Calculer le gradient : $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$
 - 4 : Mettre à jour : $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \mathbf{g}_k$
 - 5 : $k \leftarrow k + 1$
 - 6 : **until** $\|\mathbf{g}_k\| < \epsilon$
 - 7 : **return** \mathbf{x}_k
-

Intuition : On se déplace itérativement dans la direction opposée au gradient (plus forte descente).

Paramètres :

- **Learning rate α** : Trop grand \Rightarrow divergence ; trop petit \Rightarrow convergence lente
- **Critère d'arrêt** : $\|\nabla f\| < \epsilon$ ou nombre max d'itérations

Astuce

Variantes modernes (Deep Learning) :

- SGD (Stochastic Gradient Descent)
- Momentum
- Adam, RMSprop, AdaGrad

Voir Chapitre 06 pour les détails.

10.4 Méthode de Newton

L'idée est d'utiliser l'information du second ordre (hessienne) :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (74)$$

Avantages :

- Convergence quadratique (très rapide près du minimum)
- Pas besoin de tuner le learning rate

Inconvénients :

- Coût : calcul et inversion de la hessienne ($O(n^3)$)
- Ne fonctionne que si \mathbf{H} est définie positive
- Rarement utilisé en Deep Learning (trop coûteux)

Compromis : Méthodes quasi-Newton (L-BFGS) qui approximent la hessienne.

11 Résumé du Chapitre

11.1 Points Clés

Algèbre Linéaire :

- Vecteurs et matrices sont omniprésents en ML (données, poids, transformations)
- Produit scalaire \Rightarrow similarité ; norme \Rightarrow distance
- SVD = décomposition universelle (PCA, compression, recommandation)
- Systèmes linéaires \Rightarrow régression linéaire (moindres carrés)

Probabilités et Statistiques :

- Loi normale = fondamentale (TCL, modèles génératifs)
- Théorème de Bayes = base de l'inférence bayésienne
- Covariance/corrélation \Rightarrow dépendance entre variables
- Espérance, variance = résument une distribution

Calcul Différentiel et Optimisation :

- Gradient = direction de plus forte croissance
- Descente de gradient = algorithme d'optimisation de base en ML
- Convexité \Rightarrow minimum local = global
- Hessienne = courbure (méthodes du second ordre)

11.2 Formules Essentielles

Formules à retenir

Algèbre linéaire :

$$\text{Produit scalaire : } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i \quad (75)$$

$$\text{Norme } L^2 : \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_i v_i^2} \quad (76)$$

$$\text{Moindres carrés : } \mathbf{w}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (77)$$

$$\text{SVD : } \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (78)$$

Probabilités :

$$\text{Bayes : } P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (79)$$

$$\text{Loi normale : } \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (80)$$

$$\text{Variance : } \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \quad (81)$$

Optimisation :

$$\text{Gradient : } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \quad (82)$$

$$\text{Descente de gradient : } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (83)$$

12 Exercices

12.1 Algèbre Linéaire

1. Calculer le produit scalaire de $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{v} = (4, -1, 2)$. Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?
2. Pour la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer :
 - Les valeurs propres et vecteurs propres
 - La décomposition spectrale
3. Appliquer la SVD à la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (en Python). Reconstruire \mathbf{A} à partir de la SVD.
4. Résoudre le système linéaire au sens des moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (84)$$

12.2 Probabilités et Statistiques

1. Un test médical détecte une maladie avec 99% de précision (vrai positif). La prévalence de la maladie est 0.1%. Si le test est positif, quelle est la probabilité d'être réellement malade ? (Bayes)
2. Pour $X \sim \mathcal{N}(10, 4)$, calculer $P(8 \leq X \leq 12)$.
3. Générer 1000 échantillons d'une loi normale $\mathcal{N}(5, 2)$ en Python. Calculer la moyenne et variance empiriques. Tracer l'histogramme.
4. Calculer la matrice de covariance pour les données :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (85)$$

Interpréter la corrélation entre les deux variables.

12.3 Calcul Différentiel et Optimisation

1. Calculer le gradient de $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$.
2. Montrer que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$ est convexe. Calculer son gradient.
3. Implémenter la descente de gradient pour minimiser $f(x) = (x - 3)^2 + 5$ en partant de $x_0 = 0$. Tester différents learning rates.
4. Minimiser $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ par descente de gradient. Visualiser la trajectoire.

Solutions détaillées dans 01_exercices.ipynb (solutions intégrées dans le notebook)

13 Pour Aller Plus Loin

13.1 Lectures Recommandées

Livres :

- *Linear Algebra and Its Applications* (4e éd., 2006) - Gilbert Strang
- *Probability and Statistics for Engineers* (9e éd., 2016) - Montgomery & Runger
- *Convex Optimization* (2004) - Boyd & Vandenberghe
- *Mathematics for Machine Learning* (2020) - Deisenroth, Faisal, Ong (gratuit en ligne)

Ressources en ligne :

- MIT OCW : Linear Algebra (18.06) - Gilbert Strang
- 3Blue1Brown : Essence of Linear Algebra (YouTube)
- Khan Academy : Probabilités et statistiques

13.2 Outils Pratiques

NumPy (calcul numérique) :

```

1 import numpy as np
2
3 # Algèbre linéaire
4 A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
5 eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)
6 U, Sigma, VT = np.linalg.svd(A)
7
8 # Statistiques
9 mean = np.mean(data)
10 std = np.std(data)
11 cov_matrix = np.cov(X, rowvar=False)

```

SciPy (fonctions avancées) :

```

1 from scipy import stats, optimize
2
3 # Distributions
4 rv = stats.norm(loc=0, scale=1) # N(0,1)
5 pdf_values = rv.pdf(x)
6
7 # Optimisation
8 result = optimize.minimize(f, x0, method='BFGS')

```

13.3 Prochaines Étapes

Chapitre suivant : Chapitre 02 - Métriques d'Évaluation

Ces fondamentaux seront utilisés tout au long du cours :

- Régression linéaire (Ch. 03) : moindres carrés, gradient
- PCA (Ch. 05) : SVD, valeurs propres
- Réseaux de neurones (Ch. 06) : backpropagation, descente de gradient
- Probabilités : modèles génératifs, bayésiens

Références

1. Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications* (4e éd.). Cengage Learning.
2. Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., & Ong, C. S. (2020). *Mathematics for Machine Learning*. Cambridge University Press.
3. Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
4. Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.
5. Murphy, K. P. (2022). *Probabilistic Machine Learning: An Introduction*. MIT Press.
6. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.