

# Cours Machine Learning

## Chapitre 01 Fondamentaux Mathématiques

### Objectifs d'apprentissage :

- Maîtriser les concepts d'algèbre linéaire essentiels (vecteurs, matrices, décompositions)
- Comprendre les probabilités et statistiques nécessaires au ML
- Appréhender le calcul différentiel et les techniques d'optimisation
- Savoir appliquer ces outils mathématiques aux algorithmes de ML

**Prérequis :** Mathématiques niveau Licence (algèbre, analyse)

**Durée estimée :** 5-7 heures

**Notebooks :** 01\_demo\_\*.ipynb

## Table des matières

<b>I Algèbre Linéaire</b>	<b>3</b>
<b>1 Vecteurs et Espaces Vectoriels</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions Fondamentales . . . . .	3
1.2 Opérations sur les Vecteurs . . . . .	4
1.3 Produit Scalaire (Dot Product) . . . . .	4
1.4 Norme Vectorielle . . . . .	5
1.5 Distance entre Vecteurs . . . . .	6
<b>2 Matrices</b>	<b>6</b>
2.1 Définitions et Notation . . . . .	6
2.2 Opérations Matricielles . . . . .	7
2.3 Multiplication Matricielle . . . . .	7
2.4 Matrices Spéciales . . . . .	8
2.5 Déterminant . . . . .	8
2.6 Inverse de Matrice . . . . .	9
2.7 Trace . . . . .	9
2.8 Rang . . . . .	9
<b>3 Systèmes Linéaires et Résolution</b>	<b>10</b>
3.1 Formulation . . . . .	10
3.2 Solutions . . . . .	10
3.3 Solution des Moindres Carrés . . . . .	10
<b>4 Valeurs et Vecteurs Propres</b>	<b>11</b>
4.1 Définitions . . . . .	11
4.2 Calcul des Valeurs Propres . . . . .	11
4.3 Diagonalisation . . . . .	11
4.4 Matrices Symétriques Réelles . . . . .	12
<b>5 Décompositions Matricielles</b>	<b>12</b>
5.1 Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) . . . . .	12
5.2 Applications de la SVD . . . . .	13
5.3 Autres Décompositions . . . . .	13
<b>II Probabilités et Statistiques</b>	<b>14</b>
<b>6 Probabilités Fondamentales</b>	<b>14</b>
6.1 Concepts de Base . . . . .	14
6.2 Indépendance . . . . .	15
6.3 Théorème de Bayes . . . . .	15
<b>7 Variables Aléatoires</b>	<b>16</b>
7.1 Variable Aléatoire Discrète . . . . .	16

7.2	Variable Aléatoire Continue . . . . .	16
7.3	Espérance et Variance . . . . .	17
7.4	Loi Normale (Gaussienne) . . . . .	17
7.5	Loi Normale Multivariée . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Statistiques Descriptives</b>	<b>19</b>
8.1	Mesures de Tendance Centrale . . . . .	19
8.2	Mesures de Dispersion . . . . .	19
8.3	Covariance et Corrélation . . . . .	19
<b>III</b>	<b>Calcul Différentiel et Optimisation</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>Dérivées</b>	<b>21</b>
9.1	Dérivée d'une Fonction Scalaire . . . . .	21
9.2	Gradient . . . . .	21
9.3	Matrice Hessienne . . . . .	22
9.4	Jacobienne . . . . .	23
<b>10</b>	<b>Optimisation</b>	<b>23</b>
10.1	Conditions d'Optimalité . . . . .	23
10.2	Convexité . . . . .	23
10.3	Descente de Gradient . . . . .	24
10.4	Méthode de Newton . . . . .	25
<b>11</b>	<b>Résumé du Chapitre</b>	<b>26</b>
11.1	Points Clés . . . . .	26
11.2	Formules Essentielles . . . . .	26
<b>12</b>	<b>Exercices</b>	<b>27</b>
12.1	Algèbre Linéaire . . . . .	27
12.2	Probabilités et Statistiques . . . . .	27
12.3	Calcul Différentiel et Optimisation . . . . .	27
<b>13</b>	<b>Pour Aller Plus Loin</b>	<b>28</b>
13.1	Lectures Recommandées . . . . .	28
13.2	Outils Pratiques . . . . .	28
13.3	Prochaines Étapes . . . . .	28

## Première partie

# Algèbre Linéaire

### Pourquoi c'est important en ML

L'algèbre linéaire est **partout** en Machine Learning :

- **Vos données** : Chaque image  $28 \times 28$  pixels = un vecteur de 784 dimensions
- **Les modèles** : Un réseau de neurones = une série de multiplications matricielles
- **La réduction de dimension** : PCA pour passer de 10,000 features à 50 = décomposition SVD
- **L'entraînement** : Trouver les meilleurs poids  $\mathbf{w}$  = résoudre un système linéaire

Sans algèbre linéaire, impossible de faire du ML moderne !

## 1 Vecteurs et Espaces Vectoriels

### 1.1 Définitions Fondamentales

#### Définition

**Vecteur** Un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est un tuple ordonné de  $n$  nombres réels :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

On le représente comme un vecteur colonne par défaut. Un vecteur ligne s'écrit  $\mathbf{v}^T$ .

#### Interprétations :

- **Géométrique** : Point ou flèche dans l'espace  $\mathbb{R}^n$
- **ML** : Une instance de données (sample), un vecteur de features
- **Algébrique** : Élément d'un espace vectoriel

#### Exemple

**Vecteur de features** Un appartement décrit par 3 features :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 75 \\ 3 \\ 2010 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(surface en m}^2\text{)} \\ \text{(nombre de pièces)} \\ \text{(année de construction)} \end{array} \quad (2)$$

## 1.2 Opérations sur les Vecteurs

**Addition vectorielle :**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

**Multiplication par un scalaire :**

$$\alpha \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

## 1.3 Produit Scalaire (Dot Product)

### Intuition

Imaginez deux films décrits par leurs genres :

- Film A :  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$  (Action, Romance, Comédie)
- Film B :  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

Le produit scalaire  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.9 \times 0.8 + 0.1 \times 0.3 + 0.2 \times 0.1 = 0.77$  mesure à quel point ces films sont similaires ! Plus le résultat est grand, plus ils se ressemblent.

**Application concrète :** Systèmes de recommandation Netflix, Spotify...

### Définition

Produit scalaire Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \quad (5)$$

**Propriétés :**

- Commutativité :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- Linéarité :  $(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ , égalité ssi  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

**Interprétation géométrique :**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \quad (6)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ .

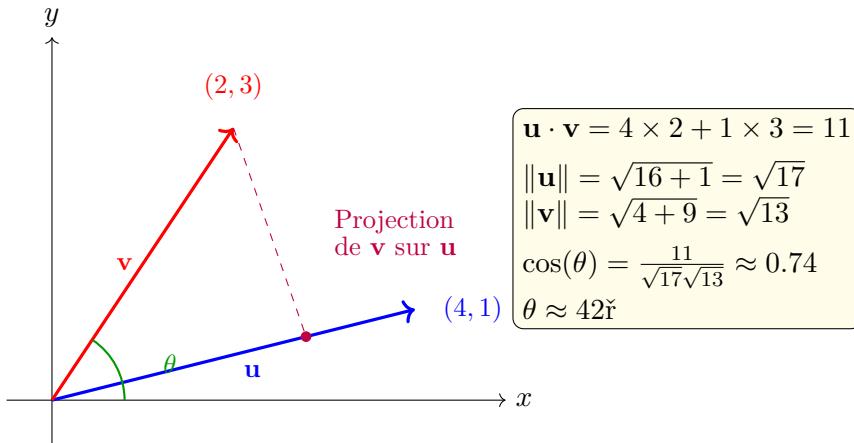


FIGURE 1 – Interprétation géométrique du produit scalaire :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  mesure à quel point les vecteurs pointent dans la même direction. L'angle  $\theta$  entre eux détermine le cosinus, donc la similarité.

### (i) Astuce

**En Machine Learning :**

- Le produit scalaire mesure la **similarité** entre vecteurs
- Deux vecteurs orthogonaux ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ) sont **non corrélés**
- Utilisé partout : régression linéaire ( $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ ), réseaux de neurones, kernels...

## 1.4 Norme Vectorielle

### Définition

Norme  $L^p$  La norme  $L^p$  d'un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est :

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} \quad (7)$$

**Normes principales :**

- **Norme  $L^1$  (Manhattan) :**

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (8)$$

Utilisée pour la régularisation Lasso, robuste aux outliers.

- **Norme  $L^2$  (Euclidienne) :**

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \quad (9)$$

La plus courante en ML. Utilisée pour mesurer des distances.

- **Norme  $L^\infty$  (Maximum) :**

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_i |v_i| \quad (10)$$

**Exemple**

Calcul de normes Pour  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$  :

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |-4| = 7 \quad (11)$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (12)$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max(|3|, |-4|) = 4 \quad (13)$$

**1.5 Distance entre Vecteurs****Définition**

Distance euclidienne La distance entre deux points  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est :

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2} \quad (14)$$

**Applications en ML :**

- K-Nearest Neighbors (KNN)
- Clustering (K-Means)
- Embeddings (mesurer similarité sémantique)

**2 Matrices****2.1 Définitions et Notation****Définition**

Matrice Une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est un tableau rectangulaire de  $m$  lignes et  $n$  colonnes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

**Notation :**

- $a_{ij}$  : élément ligne  $i$ , colonne  $j$
- $\mathbf{A}_{i:}$  :  $i$ -ème ligne (vecteur ligne)
- $\mathbf{A}_{:j}$  :  $j$ -ème colonne (vecteur colonne)

**Interprétation ML :**

- **Dataset** :  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  où  $n$  = nombre d'instances,  $d$  = nombre de features
- Chaque ligne  $\mathbf{X}_{i:} = \mathbf{x}_i^T$  est une instance
- Chaque colonne  $\mathbf{X}_{:j}$  est une feature

## 2.2 Opérations Matricielles

**Addition :**  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  (même dimension)

**Multiplication par scalaire :**  $(\alpha \mathbf{A})_{ij} = \alpha a_{ij}$

**Transposée :**

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji} \quad (16)$$

**Propriétés de la transposée :**

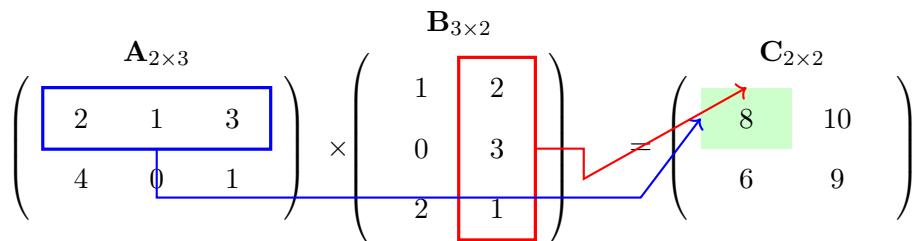
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

## 2.3 Multiplication Matricielle

### Définition

Produit matriciel Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , alors  $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  avec :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \mathbf{A}_{i:} \cdot \mathbf{B}_{:j} \quad (17)$$



**Calcul de  $c_{11}$  (élément vert) :**

Ligne 1 de  $\mathbf{A} \times$  Colonne 1 de  $\mathbf{B}$  :

$$c_{11} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 3 \times 2$$

$$c_{11} = 2 + 0 + 6 = 8$$

FIGURE 2 – Multiplication matricielle : chaque élément  $c_{ij}$  est le produit scalaire de la ligne  $i$  de  $\mathbf{A}$  et de la colonne  $j$  de  $\mathbf{B}$ . Les dimensions doivent être compatibles :  $(m \times n) \times (n \times p) = (m \times p)$ .

### /!\ Attention

#### Attention :

- La multiplication matricielle n'est **pas commutative** :  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$  en général
- Les dimensions doivent être compatibles :  $(m \times n) \times (n \times p) \rightarrow (m \times p)$

**Complexité :** Multiplication naïve :  $O(mnp)$  opérations

**Exemple**

Prédiction en régression linéaire Pour  $n$  instances avec  $d$  features, la prédiction vectorielle s'écrit :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{w} + b\mathbf{1} \quad (18)$$

où  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ . Une seule opération matricielle remplace  $n$  produits scalaires !

## 2.4 Matrices Spéciales

**Matrice identité :**

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (19)$$

**Matrice diagonale :**

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \quad (20)$$

**Matrice symétrique :**  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  (ex : matrices de covariance)

**Matrice orthogonale :**  $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$

## 2.5 Déterminant

**Définition**

Déterminant Pour une matrice carrée  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , le déterminant  $\det(\mathbf{A})$  mesure le « volume orienté » de la transformation linéaire associée.

**Cas  $2 \times 2$  :**

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (21)$$

**Propriétés :**

- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$
- Si  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , alors  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible (singulière)

## 2.6 Inverse de Matrice

### Définition

Matrice inverse Pour une matrice carrée  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , l'inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  (si elle existe) vérifie :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (22)$$

### Conditions d'existence :

- $\mathbf{A}$  doit être carrée
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  (matrice non-singulière)

### Cas $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (23)$$

### /!\ Attention

En pratique, on **n'inverse jamais explicitement** une matrice ! On résout plutôt le système linéaire  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  via des méthodes numériques (décomposition LU, Cholesky, etc.).

## 2.7 Trace

### Définition

Trace La trace d'une matrice carrée  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (24)$$

### Propriétés :

- $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$
- $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$  (propriété cyclique)
- $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i$  où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres

## 2.8 Rang

### Définition

Rang Le rang d'une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est le nombre maximal de colonnes (ou lignes) linéairement indépendantes.

### Propriétés :

- $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^T)$
- Si  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$  (rang plein en colonnes), alors  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  est inversible

### En ML :

- Rang faible  $\Rightarrow$  redondance dans les features
- PCA, SVD exploitent les structures de rang faible

### 3 Systèmes Linéaires et Résolution

#### 3.1 Formulation

Un système linéaire de  $m$  équations à  $n$  inconnues s'écrit :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (25)$$

où  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .

**Cas en ML :**

- **Régression linéaire** : Trouver  $\mathbf{w}$  tel que  $\mathbf{Xw} \approx \mathbf{y}$
- **Optimisation** : Résoudre  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  (gradient nul)

#### 3.2 Solutions

**Cas carré ( $m = n$ ) :**

- Si  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  : solution unique  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
- Si  $\det(\mathbf{A}) = 0$  : aucune solution ou infinité de solutions

**Cas rectangulaire ( $m \neq n$ ) :**

- $m > n$  (surdéterminé) : en général pas de solution exacte  $\Rightarrow$  solution des moindres carrés
- $m < n$  (sous-déterminé) : infinité de solutions  $\Rightarrow$  choisir celle de norme minimale

#### 3.3 Solution des Moindres Carrés

##### Théorème: Solution des moindres carrés

Pour le système surdéterminé  $\mathbf{Ax} \approx \mathbf{b}$ , la solution qui minimise  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$  est :

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (26)$$

sous réserve que  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  soit inversible.

**Application directe** : Régression linéaire ! Si  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  et  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , alors :

$$\mathbf{w}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (27)$$

##### (i) Astuce

La matrice  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$  s'appelle la **pseudo-inverse de Moore-Penrose**. En Python : `numpy.linalg.pinv(A)`.

## 4 Valeurs et Vecteurs Propres

### 4.1 Définitions

#### Définition

Valeur propre et vecteur propre Pour une matrice carrée  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une **valeur propre** et  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  est un **vecteur propre** associé si :

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \quad (28)$$

**Interprétation :** La transformation  $\mathbf{A}$  étire le vecteur  $\mathbf{v}$  par un facteur  $\lambda$ , sans changer sa direction.

### 4.2 Calcul des Valeurs Propres

Les valeurs propres sont les racines du **polynôme caractéristique** :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (29)$$

#### Exemple

Matrice  $2 \times 2$  Pour  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$= (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \times 1 \quad (31)$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \quad (32)$$

Solutions :  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

### 4.3 Diagonalisation

#### Théorème: Diagonalisation

Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  possède  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  avec valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \quad (33)$$

où  $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n]$  et  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

**Avantages de la diagonalisation :**

- Calcul de puissances :  $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$
- Exponentielle :  $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}$
- Comprendre la dynamique des systèmes linéaires

## 4.4 Matrices Symétriques Réelles

### Théorème: Théorème spectral

Toute matrice symétrique réelle  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est diagonalisable avec :

- Toutes les valeurs propres sont **réelles**
- Les vecteurs propres peuvent être choisis **orthonormaux**
- Décomposition :  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T$  où  $\mathbf{Q}$  est orthogonale

### Applications en ML :

- PCA (Principal Component Analysis)
- Matrices de covariance
- Kernel PCA

## 5 Décompositions Matricielles

### 5.1 Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

#### Intuition

Imaginez une image comme une recette de cuisine. La SVD dit : "cette image de  $1000 \times 1000$  pixels est en fait un mélange de" :

- 40% de "pattern horizontal" ( $\sigma_1 = 400$ )
- 30% de "pattern vertical" ( $\sigma_2 = 300$ )
- 20% de "pattern diagonal" ( $\sigma_3 = 200$ )
- ...
- 0.1% de bruit ( $\sigma_{999}, \sigma_{1000}$  très petits)

**L'astuce :** On peut jeter le bruit (les petites valeurs) et garder seulement les 50 premiers "patterns" essentiels. Résultat : on passe de 1,000,000 de nombres à stocker à seulement 50,000 → **compression de 95%** !

**C'est exactement ce que fait** : Netflix (recommandations), JPEG (compression d'images), PCA (réduction de dimension)

### Théorème: SVD (Singular Value Decomposition)

Toute matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  peut être décomposée en :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \quad (34)$$

où :

- $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  : matrice orthogonale (vecteurs singuliers gauches)
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : matrice diagonale avec valeurs singulières  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$
- $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : matrice orthogonale (vecteurs singuliers droits)

#### Propriétés :

- Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{nombre de valeurs singulières non nulles}$
- Fonctionne pour **toute** matrice (pas besoin qu'elle soit carrée ou symétrique)

**(i) Astuce****SVD en Python :**

```

1 import numpy as np
2 U, Sigma, VT = np.linalg.svd(A, full_matrices=False)
3 # Reconstruction: A_approx = U @ np.diag(Sigma) @ VT

```

**5.2 Applications de la SVD****1. Approximation de rang faible :**

On peut approximer  $\mathbf{A}$  en gardant seulement les  $k$  plus grandes valeurs singulières :

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (35)$$

C'est l'approximation de rang  $k$  optimale au sens de la norme de Frobenius.

**2. PCA (Principal Component Analysis) :**

La PCA est équivalente à une SVD des données centrées :

- Centrer :  $\mathbf{X}_c = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}$
- SVD :  $\mathbf{X}_c = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$
- Composantes principales = colonnes de  $\mathbf{V}$

**3. Compression d'images :**

Une image est une matrice. La SVD permet de compresser en ne gardant que les  $k$  premières valeurs singulières.

**4. Recommandation (Matrix Factorization) :**

Netflix Prize : décomposer la matrice utilisateurs  $\times$  films en produit de matrices de rang faible.

**5.3 Autres Décompositions**

**Décomposition LU** :  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$  (Lower-Upper), pour résoudre  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  efficacement.

**Décomposition de Cholesky** : Si  $\mathbf{A}$  est symétrique définie positive,  $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$ .

**Décomposition QR** :  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$  où  $\mathbf{Q}$  est orthogonale et  $\mathbf{R}$  est triangulaire supérieure.

**Mini-Projet: Prédire le prix des maisons**

**Objectif** : Appliquer l'algèbre linéaire pour prédire le prix d'une maison.

**Données** : Vous avez 3 maisons avec [surface m<sup>2</sup>, chambres, année] et leur prix :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 75 & 3 & 2010 \\ 50 & 2 & 2005 \\ 100 & 4 & 2015 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 300k\text{\euro} \\ 200k\text{\euro} \\ 400k\text{\euro} \end{pmatrix}$$

**À faire :**

1. Normaliser les features avec  $\mathbf{x}_{\text{norm}} = \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|_2}$
2. Calculer les poids optimaux :  $\mathbf{w}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$
3. Prédire le prix d'une nouvelle maison [80 m<sup>2</sup>, 3 chambres, 2012]
4. Calculer l'erreur :  $\|\mathbf{X}\mathbf{w}^* - \mathbf{y}\|_2$

Code complet dans : `01_demo_algebre_lineaire.ipynb`

**Deuxième partie**

# Probabilités et Statistiques

## Pourquoi c'est important en ML

Les probabilités sont le langage de l'incertitude en ML :

- **Classification** : "Il y a 87% de chances que cet email soit un spam" → Probabilité conditionnelle
- **Modèles génératifs** : ChatGPT prédit le prochain mot en calculant  $P(\text{mot} | \text{contexte})$  → Loi normale multivariée
- **Diagnostic médical** : Théorème de Bayes pour calculer  $P(\text{malade} | \text{test positif})$
- **A/B Testing** : Tester si une nouvelle feature améliore réellement votre app → Tests statistiques

**Le Machine Learning = apprendre des distributions de probabilité à partir des données !**

## 6 Probabilités Fondamentales

### 6.1 Concepts de Base

#### Définition

Probabilité Une probabilité  $P$  est une mesure sur un espace d'événements  $\Omega$  telle que :

- $0 \leq P(A) \leq 1$  pour tout événement  $A$
- $P(\Omega) = 1$
- Si  $A_1, A_2, \dots$  sont disjoints,  $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

#### Règles de base :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (36)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad (37)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{probabilité conditionnelle}) \quad (38)$$

## 6.2 Indépendance

### Définition

Indépendance Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (39)$$

Équivalent à :  $P(A | B) = P(A)$ .

## 6.3 Théorème de Bayes

### Intuition

#### Le paradoxe du test médical :

Vous faites un test pour une maladie rare (0.1% de la population). Le test est précis à 99%.

**Question** : Si votre test est positif, quelle est la probabilité que vous soyiez vraiment malade ?

**Intuition naïve** : "Le test est précis à 99%, donc j'ai 99% de chances d'être malade!"  
[FAUX]

**Réalité avec Bayes** : Seulement 9% de chances d'être malade !

**Pourquoi** ? Parmi 10,000 personnes :

- 10 sont vraiment malades  $\rightarrow$  9.9 tests positifs (99% de précision)
- 9,990 sont saines  $\rightarrow$  99.9 faux positifs (1% d'erreur)
- Total tests positifs :  $\approx 110$
- Vraiment malades : seulement 9.9 sur 110 = 9%

**Morale** : Les tests sur maladies rares donnent beaucoup de faux positifs, même s'ils sont précis !

### Théorème: Théorème de Bayes

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (40)$$

#### Terminologie :

- $P(A)$  : probabilité a priori
- $P(A | B)$  : probabilité a posteriori
- $P(B | A)$  : vraisemblance (likelihood)
- $P(B)$  : évidence

#### Forme étendue :

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{\sum_i P(B | A_i) \cdot P(A_i)} \quad (41)$$

### (i) Astuce

#### Applications en ML :

- Naive Bayes Classifier

- Inférence bayésienne
- Filtres bayésiens (spam, Kalman)

## 7 Variables Aléatoires

### 7.1 Variable Aléatoire Discrète

#### Définition

Variable aléatoire discrète Une variable aléatoire  $X$  prend des valeurs dans un ensemble discret (fini ou dénombrable). Sa distribution est caractérisée par la **fonction de masse** :

$$p_X(x) = P(X = x) \quad (42)$$

avec  $\sum_x p_X(x) = 1$ .

**Distributions classiques :**

- **Bernoulli** :  $X \in \{0, 1\}$ ,  $P(X = 1) = p$

$$p_X(x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad (43)$$

- **Binomiale** :  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  (nombre de succès en  $n$  essais)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (44)$$

- **Poisson** :  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  (événements rares)

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (45)$$

### 7.2 Variable Aléatoire Continue

#### Définition

Variable aléatoire continue Une variable continue  $X$  est caractérisée par une **fonction de densité**  $f_X(x)$  telle que :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (46)$$

avec  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ .

**Distributions classiques :**

- **Uniforme** :  $X \sim \text{Uniform}(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (47)$$

- **Normale (Gaussienne)** :  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (48)$$

- **Exponentielle** :  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  (temps entre événements)

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0) \quad (49)$$

### 7.3 Espérance et Variance

#### Définition

Espérance L'espérance (moyenne) d'une variable aléatoire  $X$  est :

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_x x \cdot p_X(x) & \text{(discret)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx & \text{(continu)} \end{cases} \quad (50)$$

#### Propriétés :

- Linéarité :  $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$

#### Définition

Variance La variance mesure la dispersion autour de la moyenne :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \quad (51)$$

L'écart-type est  $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

#### Propriétés :

- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
- Si  $X, Y$  indépendants :  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

#### Exemples :

Loi	Espérance	Variance
Bernoulli( $p$ )	$p$	$p(1-p)$
Binomiale( $n, p$ )	$np$	$np(1-p)$
Poisson( $\lambda$ )	$\lambda$	$\lambda$
Uniforme( $a, b$ )	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normale( $\mu, \sigma^2$ )	$\mu$	$\sigma^2$

### 7.4 Loi Normale (Gaussienne)

La loi normale est **fondamentale** en ML et statistiques.

### Théorème: Théorème Central Limite (TCL)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables i.i.d. d'espérance  $\mu$  et variance  $\sigma^2$ . Alors :

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1) \quad (52)$$

où  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

**Conséquence :** Beaucoup de phénomènes naturels suivent approximativement une loi normale grâce au TCL.

#### Propriétés de la loi normale :

- Somme de gaussiennes = gaussienne
- 68% des valeurs dans  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95% dans  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99.7% dans  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

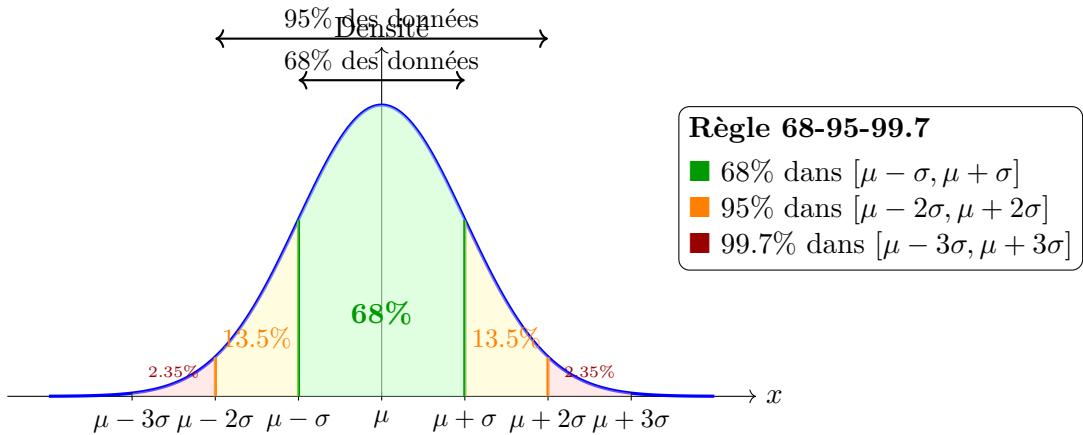


FIGURE 3 – Loi normale (Gaussienne) : la règle 68-95-99.7 permet de quantifier rapidement les probabilités. Environ 68% des données se trouvent à moins d'un écart-type de la moyenne, 95% à moins de deux, et 99.7% à moins de trois.

## 7.5 Loi Normale Multivariée

### Définition

Loi normale multivariée Un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$  suit une loi normale multivariée  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  si sa densité est :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right) \quad (53)$$

où  $\mu \in \mathbb{R}^d$  est le vecteur moyenne et  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$  est la matrice de covariance.

### Utilisations en ML :

- Gaussian Mixture Models (GMM)
- Analyse discriminante linéaire (LDA)
- Processus gaussiens

## 8 Statistiques Descriptives

### 8.1 Mesures de Tendance Centrale

**Moyenne empirique :**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (54)$$

**Médiane** : Valeur centrale quand les données sont triées. Robuste aux outliers.

**Mode** : Valeur la plus fréquente.

### 8.2 Mesures de Dispersion

**Variance empirique :**

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (55)$$

**Écart-type** :  $s = \sqrt{s^2}$

**Intervalle interquartile (IQR)** :  $IQR = Q_3 - Q_1$  (robuste)

### 8.3 Covariance et Corrélation

#### Définition

Covariance La covariance entre deux variables  $X$  et  $Y$  mesure leur variation conjointe :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \quad (56)$$

Version empirique :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (57)$$

#### Définition

Coefficient de corrélation de Pearson

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1, 1] \quad (58)$$

**Interprétation :**

- $\rho = 1$  : corrélation linéaire positive parfaite
- $\rho = -1$  : corrélation linéaire négative parfaite
- $\rho = 0$  : pas de corrélation linéaire

**Matrice de covariance** : Pour un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$  :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T] \quad (59)$$

avec  $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$ .

**(i) Astuce**

En Python (NumPy/Pandas) :

```

1 # Matrice de covariance
2 cov_matrix = np.cov(X, rowvar=False) # colonnes = variables
3
4 # Matrice de corrélation
5 corr_matrix = np.corrcoef(X, rowvar=False)
6 # ou avec pandas:
7 corr_matrix = df.corr()

```

**Mini-Projet: Classifier des emails (spam ou non)**

**Objectif :** Utiliser le théorème de Bayes pour détecter les spams.

**Données :** Sur 1000 emails :

- 300 sont des spams (30%)
- Le mot "gratuit" apparaît dans 80% des spams
- Le mot "gratuit" apparaît dans 10% des emails normaux

**Questions :**

1. Calculer  $P(\text{spam} | \text{"gratuit"})$  avec Bayes
2. Si un email contient "gratuit" ET "urgent", quelle est la probabilité que ce soit un spam ?
3. Simuler 1000 emails avec une loi de Bernoulli et calculer la précision du classifieur
4. Tracer la courbe ROC (taux de vrais positifs vs faux positifs)

**Indice :**

$$P(\text{spam} | \text{mot}) = \frac{P(\text{mot} | \text{spam}) \cdot P(\text{spam})}{P(\text{mot})}$$

Code complet dans : `01_demo_probabilites.ipynb`

## Troisième partie

# Calcul Différentiel et Optimisation

### Pourquoi c'est important en ML

L'optimisation est **LE CŒUR** du Machine Learning :

- **Entraîner un modèle** = Minimiser une fonction de perte (loss function)
- **Gradient descent** = L'algorithme qui fait tout fonctionner (réseaux de neurones, régression, etc.)
- **Backpropagation** = Calcul automatique des gradients via la règle de la chaîne

**Exemple concret :**

- Vous avez un modèle qui fait 30% d'erreur sur vos données

- Le gradient vous dit : "Change ce poids de +0.5, cet autre de -0.2..."
- Après des millions d'itérations → Erreur tombe à 2% !

**Sans gradient descent, pas de deep learning moderne !**

## 9 Dérivées

### 9.1 Dérivée d'une Fonction Scalaire

#### Définition

Dérivée La dérivée de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $x$  est :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (60)$$

**Interprétation :** Pente de la tangente à la courbe en  $x$ .

**Règles de dérivation :**

$$(cf)' = cf' \quad (61)$$

$$(f + g)' = f' + g' \quad (62)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{règle du produit}) \quad (63)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{règle du quotient}) \quad (64)$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad (\text{règle de la chaîne}) \quad (65)$$

**Dérivées usuelles :**

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$nx^{n-1}$
$e^x$	$e^x$
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

### 9.2 Gradient

#### Intuition

Imaginez que vous êtes perdu en montagne dans le brouillard et voulez descendre :

- La **fonction**  $f(\mathbf{x})$  = votre altitude à la position  $\mathbf{x}$
- Le **gradient**  $\nabla f$  = une flèche qui pointe vers la montée la plus rapide
- **Descente de gradient** = Suivre la direction opposée  $(-\nabla f)$  pour descendre

**En ML :**

- $f(\mathbf{w})$  = l'erreur de votre modèle avec les poids  $\mathbf{w}$
- Vous voulez minimiser l'erreur (descendre)

- Le gradient vous dit comment ajuster chaque poids pour réduire l'erreur !

### Définition

Gradient Pour une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , le gradient est le vecteur des dérivées partielles :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (66)$$

### Interprétation géométrique :

- Le gradient pointe dans la direction de **plus forte croissance**
- Sa norme  $\|\nabla f\|$  mesure le taux de croissance
- $-\nabla f$  pointe vers la plus forte décroissance

### Exemple

Gradient de fonctions courantes

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \sum_i a_i x_i \Rightarrow \nabla f = \mathbf{a} \quad (67)$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \Rightarrow \nabla f = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} \quad (68)$$

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \Rightarrow \nabla f = 2\mathbf{x} \quad (69)$$

## 9.3 Matrice Hessienne

### Définition

Hessienne Pour  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois différentiable, la matrice hessienne est la matrice des dérivées secondes :

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (70)$$

### Propriétés :

- Si  $f$  est  $C^2$ , alors  $\mathbf{H}$  est symétrique (théorème de Schwarz)
- La hessienne mesure la **courbure** de  $f$
- Utilisée dans les méthodes d'optimisation du second ordre (Newton)

## 9.4 Jacobienne

### Définition

Jacobienne Pour une fonction vectorielle  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la jacobienne est la matrice des dérivées partielles :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (71)$$

**Application en Deep Learning :** La backpropagation utilise la règle de la chaîne avec des jacobienes pour calculer les gradients.

## 10 Optimisation

### 10.1 Conditions d'Optimalité

#### Théorème: Condition nécessaire du premier ordre

Si  $\mathbf{x}^*$  est un minimum local de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable, alors :

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (72)$$

#### Théorème: Condition suffisante du second ordre

Si  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  et la hessienne  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^*)$  est **définie positive** (toutes les valeurs propres  $> 0$ ), alors  $\mathbf{x}^*$  est un minimum local strict.

#### Cas de la hessienne :

- Définie positive  $\Rightarrow$  minimum local
- Définie négative  $\Rightarrow$  maximum local
- Indéfinie  $\Rightarrow$  point-selle

### 10.2 Convexité

#### Définition

Fonction convexe Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  et  $\lambda \in [0, 1]$  :

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \quad (73)$$

#### Critère différentiel :

- Si  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$  est semi-définie positive partout, alors  $f$  est convexe
- Si  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$  est définie positive partout, alors  $f$  est strictement convexe

**Propriété fondamentale :** Pour une fonction convexe, **tout minimum local est global**.

### Exemple

Fonctions convexes courantes

- Fonctions linéaires/affines :  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$
- Norme  $L^2$  au carré :  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2$
- Exponentielle :  $f(x) = e^x$
- Logarithme négatif :  $f(x) = -\ln(x)$  pour  $x > 0$

## 10.3 Descente de Gradient

### Algorithm 1 Descente de Gradient

**Require:** Fonction  $f$ , point initial  $\mathbf{x}_0$ , learning rate  $\alpha > 0$ , tolérance  $\epsilon$

**Ensure:** Minimum approximatif  $\mathbf{x}^*$

- 1:  $k \leftarrow 0$
- 2: **repeat**
- 3:   Calculer le gradient :  $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$
- 4:   Mettre à jour :  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \mathbf{g}_k$
- 5:    $k \leftarrow k + 1$
- 6: **until**  $\|\mathbf{g}_k\| < \epsilon$
- 7: **return**  $\mathbf{x}_k$

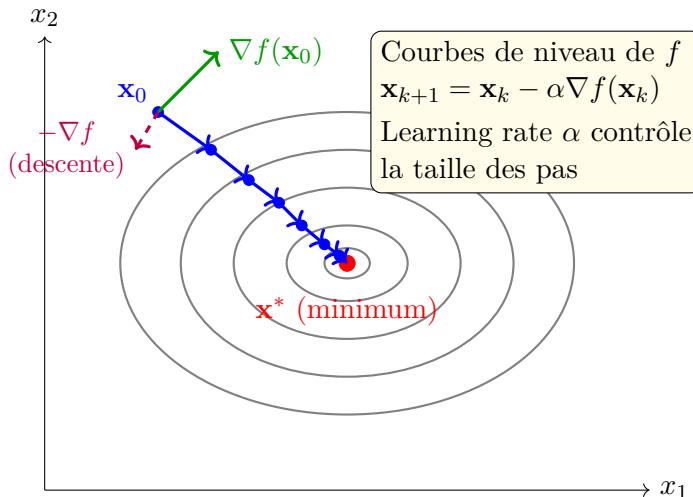


FIGURE 4 – Descente de gradient : la trajectoire suit la direction opposée au gradient ( $-\nabla f$ ) pour descendre vers le minimum. Les courbes de niveau montrent les valeurs constantes de  $f$ . À chaque itération, on se rapproche du minimum  $\mathbf{x}^*$ .

**Intuition :** On se déplace itérativement dans la direction opposée au gradient (plus forte descente).

**Paramètres :**

- **Learning rate  $\alpha$**  : Trop grand  $\Rightarrow$  divergence ; trop petit  $\Rightarrow$  convergence lente
- **Critère d'arrêt** :  $\|\nabla f\| < \epsilon$  ou nombre max d'itérations

**(i) Astuce**

**Variantes modernes (Deep Learning) :**

- SGD (Stochastic Gradient Descent)
- Momentum
- Adam, RMSprop, AdaGrad

Voir Chapitre 06 pour les détails.

## 10.4 Méthode de Newton

L'idée est d'utiliser l'information du second ordre (hessienne) :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (74)$$

**Avantages :**

- Convergence quadratique (très rapide près du minimum)
- Pas besoin de tuner le learning rate

**Inconvénients :**

- Coût : calcul et inversion de la hessienne ( $O(n^3)$ )
- Ne fonctionne que si  $\mathbf{H}$  est définie positive
- Rarement utilisé en Deep Learning (trop coûteux)

**Compromis :** Méthodes quasi-Newton (L-BFGS) qui approximent la hessienne.

### Mini-Projet: Entrainer une régression linéaire

**Objectif :** Implémenter la descente de gradient pour entraîner un modèle.

**Problème :** Prédire le salaire en fonction des années d'expérience.

**Données :** 5 personnes :

$$\text{Expérience (ans)} : [1, 2, 3, 4, 5] \quad \text{Salaire (k€)} : [30, 35, 45, 50, 60]$$

**Modèle :**  $\hat{y} = w_1x + w_0$  (régression linéaire)

**Loss function :**  $L(\mathbf{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$  (MSE)

**À faire :**

1. Calculer le gradient :  $\nabla L = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_0} \\ \frac{\partial L}{\partial w_1} \end{pmatrix}$
2. Initialiser  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. Appliquer la descente de gradient pendant 100 itérations avec  $\alpha = 0.01$
4. Tracer l'évolution de la loss et de la prédiction
5. Comparer avec la solution analytique :  $\mathbf{w}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$

**Résultat attendu :**  $w_1 \approx 7.5$  (chaque année d'expérience =  $+7.5\text{k€}$ ),  $w_0 \approx 22.5$  (salaire de base)

**Code complet dans :** 01\_demo\_optimisation.ipynb

## 11 Résumé du Chapitre

### 11.1 Points Clés

#### Algèbre Linéaire :

- Vecteurs et matrices sont omniprésents en ML (données, poids, transformations)
- Produit scalaire  $\Rightarrow$  similarité ; norme  $\Rightarrow$  distance
- SVD = décomposition universelle (PCA, compression, recommandation)
- Systèmes linéaires  $\Rightarrow$  régression linéaire (moindres carrés)

#### Probabilités et Statistiques :

- Loi normale = fondamentale (TCL, modèles génératifs)
- Théorème de Bayes = base de l'inférence bayésienne
- Covariance/corrélation  $\Rightarrow$  dépendance entre variables
- Espérance, variance = résument une distribution

#### Calcul Différentiel et Optimisation :

- Gradient = direction de plus forte croissance
- Descente de gradient = algorithme d'optimisation de base en ML
- Convexité  $\Rightarrow$  minimum local = global
- Hessienne = courbure (méthodes du second ordre)

### 11.2 Formules Essentielles

Formules à retenir

#### Algèbre linéaire :

$$\text{Produit scalaire : } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i \quad (75)$$

$$\text{Norme } L^2 : \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_i v_i^2} \quad (76)$$

$$\text{Moindres carrés : } \mathbf{w}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (77)$$

$$\text{SVD : } \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (78)$$

#### Probabilités :

$$\text{Bayes : } P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (79)$$

$$\text{Loi normale : } \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (80)$$

$$\text{Variance : } \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \quad (81)$$

#### Optimisation :

$$\text{Gradient : } \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \quad (82)$$

$$\text{Descente de gradient : } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (83)$$

## 12 Exercices

### 12.1 Algèbre Linéaire

1. Calculer le produit scalaire de  $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$  et  $\mathbf{v} = (4, -1, 2)$ . Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?
2. Pour la matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , calculer :
  - Les valeurs propres et vecteurs propres
  - La décomposition spectrale
3. Appliquer la SVD à la matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (en Python). Reconstruire  $\mathbf{A}$  à partir de la SVD.
4. Résoudre le système linéaire au sens des moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (84)$$

### 12.2 Probabilités et Statistiques

1. Un test médical détecte une maladie avec 99% de précision (vrai positif). La prévalence de la maladie est 0.1%. Si le test est positif, quelle est la probabilité d'être réellement malade ? (Bayes)
2. Pour  $X \sim \mathcal{N}(10, 4)$ , calculer  $P(8 \leq X \leq 12)$ .
3. Générer 1000 échantillons d'une loi normale  $\mathcal{N}(5, 2)$  en Python. Calculer la moyenne et variance empiriques. Tracer l'histogramme.
4. Calculer la matrice de covariance pour les données :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (85)$$

Interpréter la corrélation entre les deux variables.

### 12.3 Calcul Différentiel et Optimisation

1. Calculer le gradient de  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ .
2. Montrer que  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$  est convexe. Calculer son gradient.
3. Implémenter la descente de gradient pour minimiser  $f(x) = (x - 3)^2 + 5$  en partant de  $x_0 = 0$ . Tester différents learning rates.
4. Minimiser  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$  par descente de gradient. Visualiser la trajectoire.

*Solutions détaillées dans 01\_exercices.ipynb (solutions intégrées dans le notebook)*

## 13 Pour Aller Plus Loin

### 13.1 Lectures Recommandées

Livres :

- *Linear Algebra and Its Applications* (4e éd., 2006) - Gilbert Strang
- *Probability and Statistics for Engineers* (9e éd., 2016) - Montgomery & Runger
- *Convex Optimization* (2004) - Boyd & Vandenberghe
- *Mathematics for Machine Learning* (2020) - Deisenroth, Faisal, Ong (gratuit en ligne)

Ressources en ligne :

- MIT OCW : Linear Algebra (18.06) - Gilbert Strang
- 3Blue1Brown : Essence of Linear Algebra (YouTube)
- Khan Academy : Probabilités et statistiques

### 13.2 Outils Pratiques

NumPy (calcul numérique) :

```

1 import numpy as np
2
3 # Algèbre linéaire
4 A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
5 eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)
6 U, Sigma, VT = np.linalg.svd(A)
7
8 # Statistiques
9 mean = np.mean(data)
10 std = np.std(data)
11 cov_matrix = np.cov(X, rowvar=False)

```

SciPy (fonctions avancées) :

```

1 from scipy import stats, optimize
2
3 # Distributions
4 rv = stats.norm(loc=0, scale=1) # N(0,1)
5 pdf_values = rv.pdf(x)
6
7 # Optimisation
8 result = optimize.minimize(f, x0, method='BFGS')

```

### 13.3 Prochaines Étapes

Chapitre suivant : **Chapitre 02 - Métriques d'Évaluation**

Ces fondamentaux seront utilisés tout au long du cours :

- Régression linéaire (Ch. 03) : moindres carrés, gradient
- PCA (Ch. 05) : SVD, valeurs propres
- Réseaux de neurones (Ch. 06) : backpropagation, descente de gradient
- Probabilités : modèles génératifs, bayésiens

## Références

1. Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications* (4e éd.). Cengage Learning.
2. Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., & Ong, C. S. (2020). *Mathematics for Machine Learning*. Cambridge University Press.
3. Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
4. Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.
5. Murphy, K. P. (2022). *Probabilistic Machine Learning : An Introduction*. MIT Press.
6. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.