Optimization Grand Challenge 2025

팀명: 임시개발
소속: LG CNS 최적화컨설팅담당
팀원: 임세호

전략 및 배경 (1/2)

대원칙: 쓸만한 해를 신속히 얻기 위해, 합리적 범위의 해공간 제한(축소)를 허용

해공간 제한: '위치변경' 배제

- **Why? 해품질 저하 정도 대비 모델링 난이도 감소로 얻는 이득이 크다고 판단함**
- 모델링 난이도 감소: 위치변경을 배제한다면, 상하역 순서를 모델에서 직접 고려하지 않아도 됨
- **적재 계획**이 주어지는 경우 최적의 상하역 경로 및 순서를 쉽게 얻을 수 있음

  *적재 계획: 노드마다 어떤 항구에서 선적/하역하는지, 필수 결정사항

항구별 상하역 경로 및 순서 결정 로직

- 상하역 경로: 항구별 적재 중이지 않은 노드 집합으로 제한한 그래프에서 출입구로부터의 최단경로
- 각 항구에서의 상하역 순서:
  1. 하역: 경로 길이 오름차순
  2. 선적: 경로 길이 내림차순

전략 및 배경 (2/2)

2개 모형에 대해 테스트 수행함

1. Single-commodity flow model: 항구 p에서의 상하역 경로 중 간선 ij가 포함하는 개수 f_{ij}^{p} 도입

→tightness 이슈

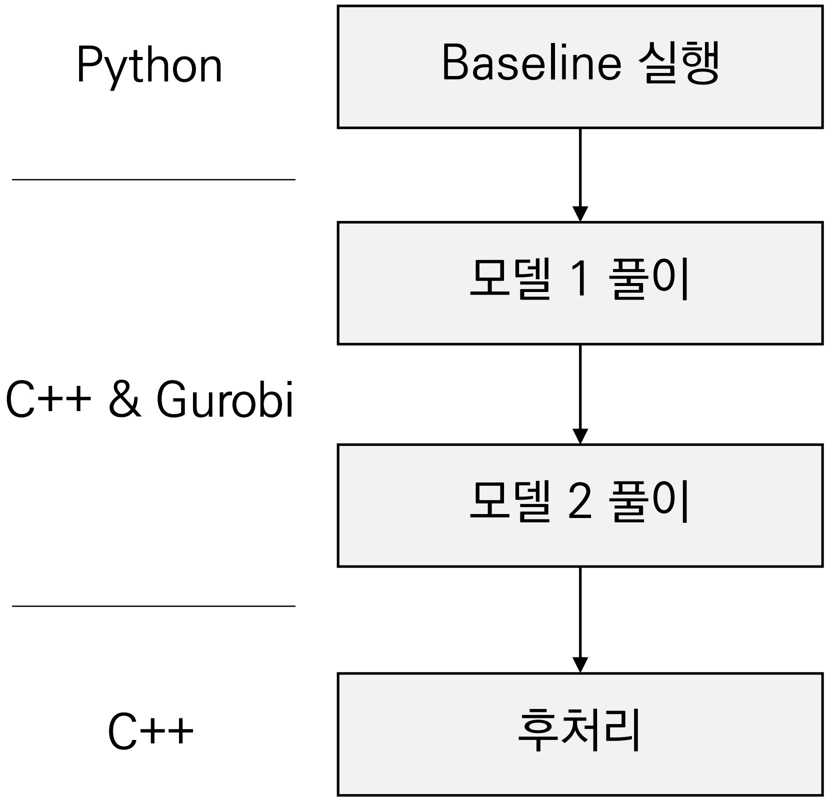
2. Multi-commodity flow model: 항구 p에서의 노드 k로의 선적 및 하역 경로에 간선 ij의 포함여부를 나타내는 l_{ij}^{pk}, u_{ij}^{pk} 도입

→LP solving time 이슈

다음 사항들을 고려하여, 추가적인 해공간 제한 및 formulation을 채택함 – 2개 모델

1. 추가적인 해공간 제한에 따라 예상되는 최적해 품질 저하 정도
2. formulation 크기
3. formulation tightness

알고리즘 로직



- 제공받은 baseline 알고리즘 실행
- 제한시간 내 해를 찾지 못하는 경우 또는 해품질이 나쁜 경우에 대비

- 해공간을 많이 제한한 모델
- 빠른 시간 내 충분히 괜찮은 해를 도출하는 것이 목표

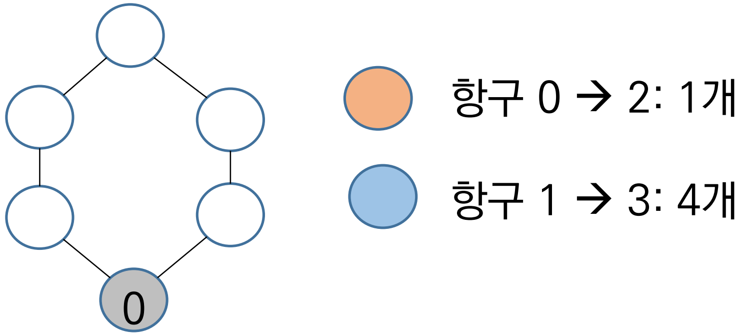
- 해공간을 덜 제한한 모델
- 제한시간 내 모델 1의 최적해를 구했다면 실행
- 모델 1의 최적해로부터 warm-start

- 상하역 경로/순서 생성
- 임시 하역/재적재를 위치변경으로 변경 가능한지 지역 탐색

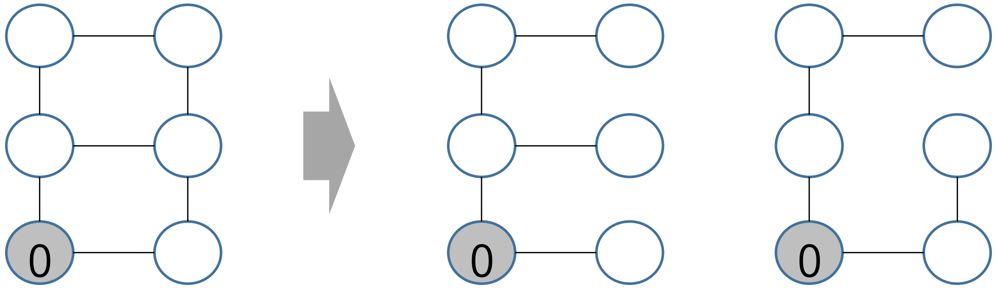
모델 1 소개

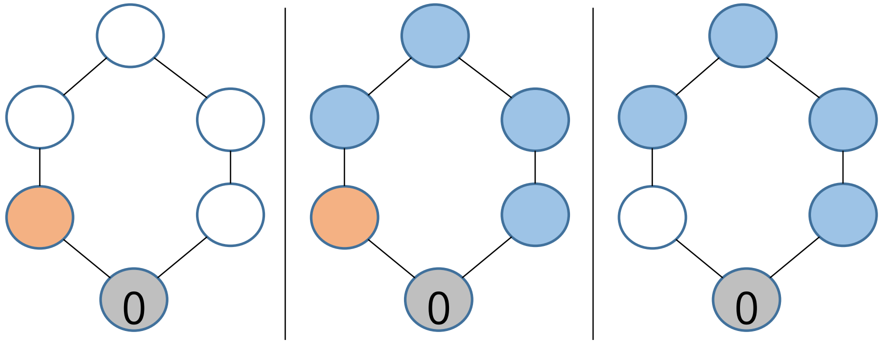
제한: 모든 상하역 경로는 그래프의 최단경로여야 함
목적: 빠른 시간 내 충분히 괜찮은 해를 도출

한계점 예시: 링 그래프

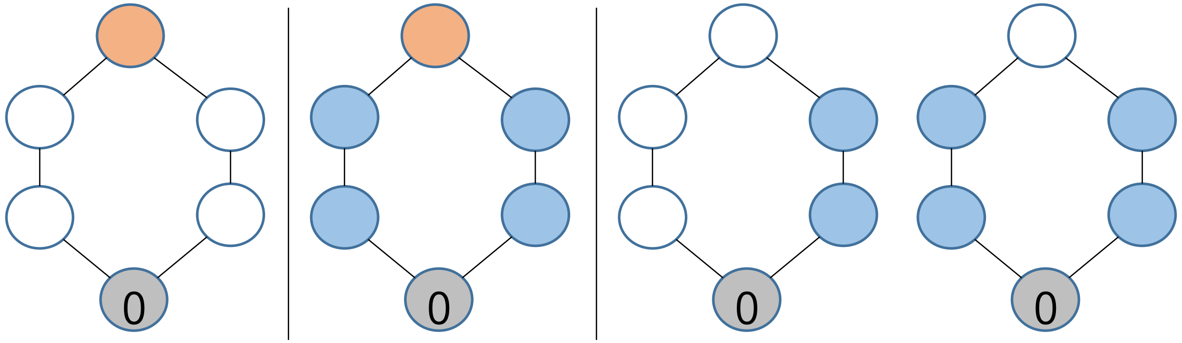


해품질이 크게 저하되지 않을 것으로 기대:
간선이 하나만 추가되더라도 충분한 상하역 경로 유연성을 가짐





원문제 최적해: 임시하역하지 않음



해공간을 제한하는 경우: 임시하역 2회 수행

모델 1 Formulation (1/2)

파라미터

P: 항구 index 집합

P_+: 항구 index 집합에서 처음/마지막 항구 제외

N: 노드 index 집합 (출입구 제외)

F: 경로 고정비

k_{pq} : $p - q$ 차량 수송 수요

d_i : deck 그래프에서 i의 depth, $0 - i$ 최단거리

$\delta^-(i)$: 노드 i와 연결된 depth가 1 더 작은 노드 집합

결정변수

x_i^{pq}: 노드 i에 p에서 선적 후 q에서 하역하는 차량이 있는지 여부에 대한 이진변수 (적재 계획)

y_i^p : 항구 p에서의 상하역 중 노드 i를 지나는지 여부에 대한 이진변수 (상하역 경로 포함 여부)

t_{pr}^q : $p - r$ 수송 수요를 만족하기 위해, 중간 항구 q에서 임시하역하는 차량의 수[1] (임시하역 계획)

1) 1–4 상하역을 위해 항구 2, 3에서 임시하역한다면 t_{14}^2 및 t_{24}^3에 +1, 또는 t_{14}^3 및 t_{13}^2에 +1로 반영됨

모델 1 Formulation (2/2)

목적함수

$$\sum_{p<q\in P, i\in N} 2\,(F + d_i)\, x_i^{pq}$$

상하역 경로 제한으로 인해, 목적함수값을 x변수로만 표현이 가능해짐

제약식

$O(NP + P^2) \times O(NP^2 + P^3)$ ← N에 대한 선형 size

$$\sum_{i\in N} x_i^{pq} = k_{pq} + \sum_{r<p} t_{rq}^{p} + \sum_{q<r} t_{pr}^{q} - \sum_{p<r<q} t_{pq}^{r}, \forall p < q \in P$$

········ **수요 만족 제약**: 적재 계획은 수요를 만족함

$$y_i^p \le \sum_{j\in\delta^-(i)} y_j^p, \forall i \in N\colon d_i > 1, \forall p \in P_+$$

········ **최단경로 상하역 제약**: 노드 i가 경로에 사용된다면 i보다 출입구에 가까운 이웃 노드 중 하나도 사용되어야 함

$$\sum_{p<q} x_i^{pq} \le y_i^q, \forall i \in N, \forall q \in P_+$$

$$\sum_{q<r} x_i^{qr} \le y_i^q, \forall i \in N, \forall q \in P_+$$

········ **상하역 제약**: 노드 i에서 항구 p부터 q까지 차량을 적재한다면 i는 p와 q에서의 상하역 경로에 사용되어야 함

$$\sum_{p<q<r} x_i^{pr} \le 1, \forall i \in N, \forall q \in P$$

········ **적재 공간 제약**: 각 노드 i는 각 항구 q에서 동시에 최대 1개 차량을 적재할 수 있음

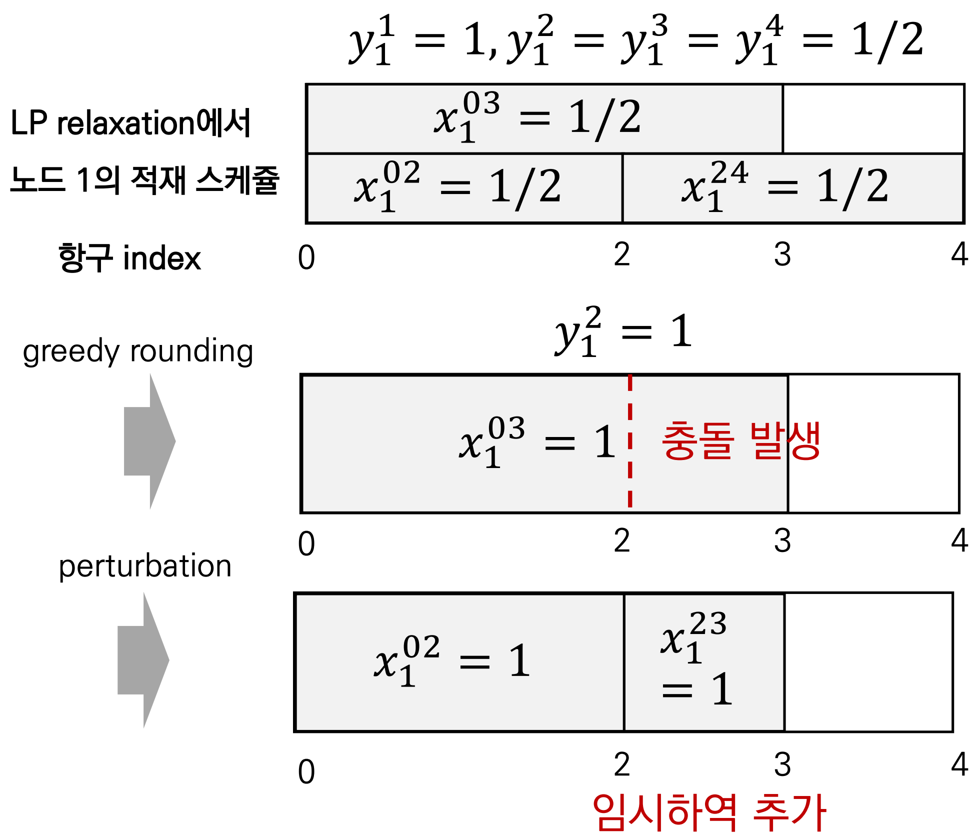
$$y_i^q + \sum_{p<q<r} x_i^{pr} \le 1, \forall i \in N\colon d_i > 1, \forall p \in P_+$$

········ **적재 노드 경로 사용 불가 제약**: 적재 중인 노드는 상하역 경로에 포함될 수 없음

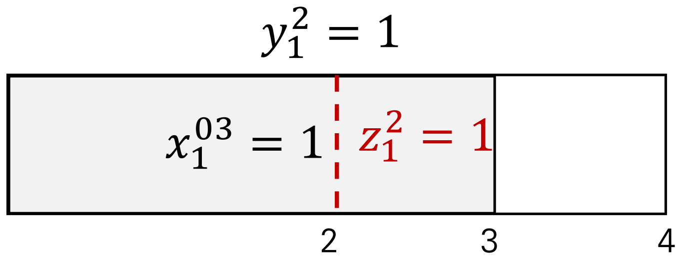
모델 1 Formulation 개선

큰 문제에 대해 1~2분 내에 해를 찾지 못하는 안정성 문제가 있었고,
Solver가 LP rounding 기반 휴리스틱 해를 잘 찾도록 slack 결정변수 z를 도입함

LP rounding 휴리스틱 idea



결정변수 z 도입



z_i^q: 항구 q의 노드 i에서 임시하역 및 재적재를 추가 수행하는 경우에 대한 이진변수

$$y_i^q + \sum_{p<q<r} x_i^{pr} \le 1 + z_i^q, \forall i \in N: d_i > 1, \forall p \in P_+$$

수정된 적재 노드 경로 사용 불가 제약:

적재 중인 노드는 상하역 경로에 포함한다면, 임시하역이 필요함

대응하는 목적함수 항 추가: $\sum_{q \in P, i \in N} 2\,(F + c(i))\, z_i^q$

Trade-off: 해를 훨씬 일찍 찾게 되었으나, 최적해임을 증명하기까지의 시간이 길어짐 (symmetry issues)

모델 2 소개

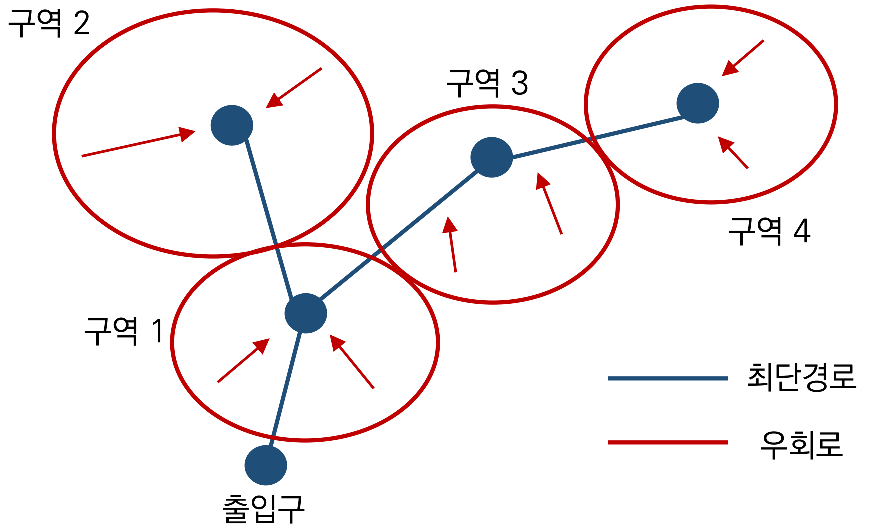
제한: 모든 상하역 경로는 적재 위치 근처에서 우회만 할 수 있음
목적: 남은 계산시간을 활용하여 추가 개선을 꾀함, 모델 1의 결과로부터 warm-start가 용이해야 함

해공간 제한사항

모델 1과 비교했을 때, 적재 위치 근처에서 연속적인 우회 허용

선적 경로	출입구에서 멀어지는 간선만 사용	출입구에서 멀어지지 않는 간선만 사용
하역 경로	출입구에서 가까워지지 않는 간선만 사용	출입구에서 가까워지는 간선만 사용

해품질 기대



가설: Hub-and-spoke 모델처럼, 상하역 흐름이 집중되는 경로를 최단경로로 제한하더라도 해품질이 충분히 괜찮음

모델 2 Formulation (1/2)

추가 파라미터 (모델 1 대비)

$\delta^{+}(i)$: 노드 i와 연결된 depth가 1 더 큰 노드 집합

$\delta^{0}(i)$: 노드 i와 연결된 depth가 동일한 노드 집합

추가 결정변수 (모델 1 대비)

w_{ij}^{p}: 항구 p의 상하역에서 비최단 간선 ij의 사용 여부를 나타내는 이진변수

s_i^p : 항구 p에서 노드 i까지의 선적 경로 길이의 최단거리 대비 증가량

목적함수 변경 사항

$$\sum_{p<q\in P, i\in N} 2\,(F+d_i)x_i^{pq} + \sum_{q\in P, i\in N} 2\,(F+d_i)\,z_i^q + 2\sum_{q\in P, i\in N} s_i^q$$

우회 비용 추가

(i 에서 선적/하역이 모두 이루어지는 상황에 해당하는 비용으로, 실제보다 더 큰 비용임.

정확한 반영을 위해서는 추가 변수 및 M-제약이 필요하여, 근사하여 반영함)

모델 2 Formulation (2/2)

제약식 – 최단경로 상하역 제약만 아래 제약들로 대체

$$w_{ij}^{p} \le y_{i}^{p}, \forall p \in P_{+}, \forall i \in N, \forall j \ \in \delta^{+}(i) \cup \delta^{0}(i)$$
$$w_{ij}^{p} \le y_{j}^{q}, \forall p \in P_{+}, \forall i \in N, \forall j \ \in \delta^{+}(i) \cup \delta^{0}(i)$$

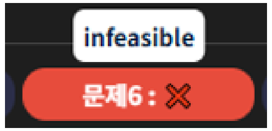
비최단 간선-활성화 노드 관계 제약: 간선 ij가 상하역 경로에 포함되면 노드 i 및 j가 경로에 포함됨

$$\sum_{j \in \delta^{+}(i) \cup \delta^{0}(i)} w_{ij}^{p} \le 1, \forall i \in N: d_i > 1, \forall p \in P_{+}$$

연결된 우회 간선 수의 상한 제약: 각 항구 p와 노드 i는 최대 1개 우회 간선을 따라 선적됨

$$x_{i}^{p} + \sum_{h \in \delta^{-}(i)} \sum_{k \in \delta^{+}(h) \cup \boldsymbol{\delta^{0}(h)}} w_{ij}^{p} \le \sum_{h \in \delta^{-}(i)} y_{h}^{p} + \sum_{k \in \delta^{+}(i) \cup \delta^{0}(i)} w_{ik}^{p}, \forall i \in N: \ d_i > 1, \forall p \in P_{+}$$

상하역 경로 제약: 상하역 경로는 모델 2의 해공간 제약사항을 만족해야 함



infeasible error 발생 원인:

제출한 코드에서 해당 항 누락

$$s_{i}^{p} + 2 \le s_{j}^{p} + M(1 - w_{ij}^{p}), \forall i \in N: d_i > 1, \forall p \in P_{+}, \forall j \ \in \delta^{+}(i)$$
$$s_{i}^{p} + 1 \le s_{j}^{p} + M(1 - w_{ij}^{p}), \forall i \in N: d_i > 1, \forall p \in P_{+}, \forall j \ \in \delta^{0}(i)$$
$$s_{i}^{p} \le s_{j}^{p} + M w_{ij}^{p}, \forall i \in N: d_i > 1, \forall p \in P_{+}, \forall j \ \in \delta^{-}(i)$$

$s - w$ 관계식 제약

특장점 및 발전 방향

특장점

- 모델 1의 formulation size가 작아 LP relaxation을 푸는 속도가 빠름

발전 방향

- 큰 문제에 대해 괜찮은 해를 구하기까지 오래 걸리는 경향이 있어 (49문제 中 7문제) tightness의 개선을 위해 row generation을 고려해볼 수 있음
- 위치변경을 제한적인 상황에서라도 활용가능하도록 발전
- 차량 수송 수요의 sparse함을 이용가능하도록 발전

Q & A

감사합니다.