

Análisis (no tan) básico de circuitos eléctricos.
Un paso más allá.

Oscar Duarte
Universidad Nacional de Colombia

16 de octubre de 2024

Índice general

I	Obtención sistematizada de ecuaciones de circuitos	1
1.	Aplicación sistematizada de las leyes de Kirchhoff	3
1.1.	Elementos para la simulación de circuitos	3
1.1.1.	Variables de estudio	5
1.1.2.	Matriz de incidencia	6
1.2.	Aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff	7
1.3.	Aplicación de la ley de tensiones de Kirchhoff	9
1.4.	Matriz de incidencia reducida	10
2.	<i>Tableau</i> de ecuaciones	13
2.1.	Planteamiento	13
2.2.	Huella de cada elemento	14
2.2.1.	Resistor	15
2.2.2.	Fuente independiente de tensión	16
2.2.3.	Fuente independiente de corriente	16
2.2.4.	Fuente de tensión controlada por tensión de rama	16
2.2.5.	Fuente de tensión controlada por corriente de rama	16
2.2.6.	Fuente de corriente controlada por tensión de rama	17
2.2.7.	Fuente de corriente controlada por corriente de rama	17
2.3.	Compendio del método	17
2.4.	Método del <i>Tableau</i> reducido	20
3.	Análisis de nodos modificado	23
3.1.	Demostración	24
3.2.	Método de análisis de nodos modificado directo	26
3.3.	Huella de cada elemento	29
3.3.1.	Resistor	29
3.3.2.	Fuente independiente de tensión	30
3.3.3.	Fuente independiente de corriente	31
3.3.4.	Fuente de tensión controlada por tensión	32
3.3.5.	Fuente de tensión controlada por corriente de rama	33
3.3.6.	Fuente de corriente controlada por tensión	34
3.3.7.	Fuente de corriente controlada por corriente de rama	35
3.4.	Compendio del método	35

II Resistores no lineales	39
4. Conceptos básicos	41
4.1. Elemento de Circuitos de Dos Terminales	41
4.2. Propiedades de los Elementos de Circuitos	42
4.2.1. Variación en el Tiempo	42
4.2.2. Memoria	45
4.2.3. Pasividad	46
4.2.4. Control por tensión o por corriente	46
4.2.5. Bilateralidad	46
4.2.6. Linealidad	48
4.3. Resistores	50
4.4. Resistores No Lineales Invariantes en el Tiempo (RNLIT)	50
5. Conexiones simples de elementos de circuitos	53
5.1. Conexión Serie	53
5.2. Conexión Paralelo	59
6. RNLIT utilitarios	63
6.1. El Diodo Ideal	63
6.1.1. Análisis de circuitos lineales con diodos ideales	64
6.1.2. El rectificador de media onda	69
6.2. Resistores cóncavos	72
6.3. Resistores convexos	78
7. Modelamiento de RNLIT	85
7.1. Ajuste de curvas	85
7.2. Modelamiento de RNLIT con resistores cóncavos y convexos	92
8. Punto de operación y análisis de pequeña señal	97
8.1. Análisis DC	98
8.1.1. Análisis Matemático	99
8.1.2. Análisis Gráfico	101
8.1.3. Análisis D.C. con RNLIT	104
8.2. Análisis de pequeña señal	106
8.2.1. Análisis de pequeña señal alrededor del punto de operación	111
9. Métodos numéricos para ecuaciones algebraicas	115
9.1. Planteamiento del problema	116
9.2. Algunos métodos	117
9.2.1. Método de fuerza bruta	117
9.2.2. Método de bisección	118
9.2.3. Método de n-sección	121
9.2.4. Métodos de la secante	124
9.2.5. Método de Newton-Raphson	129
9.3. Aplicación al análisis de circuitos	131

9.4. Solución de sistemas de ecuaciones simultáneas	136
9.5. Consideraciones para el uso de métodos numéricos	140
A. Galería de ejemplos de obtención de ecuaciones	143
A.1. Ejemplo A.01	144
A.1.1. Método del <i>Tableau</i> disperso	145
A.1.2. Método MNA	145
A.1.3. Solución	145
A.2. Ejemplo A.02	146
A.2.1. Método del <i>Tableau</i> disperso	147
A.2.2. Método MNA	147
A.2.3. Solución	147
A.3. Ejemplo A.03	148
A.3.1. Método del <i>Tableau</i> disperso	149
A.3.2. Método MNA	149
A.3.3. Solución	150
A.4. Ejemplo A.04	151
A.4.1. Método del <i>Tableau</i> disperso	152
A.4.2. Método MNA	152
A.4.3. Solución	153
A.5. Ejemplo A.05	154
A.5.1. Método del <i>Tableau</i> disperso	155
A.5.2. Método MNA	155
A.5.3. Solución	156
A.6. Ejemplo A.06	157
A.6.1. Método del <i>Tableau</i> disperso	158
A.6.2. Método MNA	158
A.6.3. Solución	159
A.7. Ejemplo A.07	160
A.7.1. Método del <i>Tableau</i> disperso	161
A.7.2. Método MNA	161
A.7.3. Solución	161
B. Ajuste de curvas a funciones (Regresiones)	163
B.1. Regresión lineal	164
B.1.1. Demostración	165
B.2. Regresión monomial	166
B.3. Regresión exponencial	167
B.4. Regresión polinomial de grado m	168

Índice de figuras

1.1. Un circuito del ejemplo 1.1 y su grafo asociado	4
1.2. Variables en un grafo de ejemplo	5
2.1. Circuito y grafo de ejemplo	18
4.1. Elemento genérico de circuitos de dos terminales.	42
4.2. Ejemplo de características $v - i$ e $i - v$	43
4.3. Característica $i - v$ de un resistor lineal	44
4.4. Característica $i - v$ de un resistor variante en el tiempo	45
4.5. Elementos pasivos y activos	47
4.6. Control por tensión o corriente	48
4.7. Bilateralidad	49
4.8. Resistores	51
4.9. Símbolo de un RNLIT	51
5.1. Conexión serie de n elementos	53
5.2. Método gráfico para obtener la característica $v - i$ de equivalentes en serie. . .	54
5.3. Características $i - v$ del ejemplo 5.1	55
5.4. Resultado del ejemplo 5.1	55
5.5. Características $i - v$ del ejemplo 5.2	56
5.6. Resultado del ejemplo 5.2	56
5.7. Características $i - v$ del ejemplo 5.3	57
5.8. Resultados del ejemplo 5.3	57
5.9. Conexión paralelo de n elementos	59
5.11. Características $i - v$ del ejemplo 5.4	59
5.10. Método gráfico para obtener la característica $v - i$ de equivalentes en paralelo .	60
5.12. Resultados del ejemplo 5.4	60
5.13. Características $i - v$ del ejemplo 5.5	61
5.14. Resultados del ejemplo 5.5	61
5.15. Características del ejemplo 5.6	62
5.16. Resultados del ejemplo 5.6	62
6.1. El diodo ideal y sus características $v - i$ e $i - v$	64
6.2. Red lineal conectada a un diodo ideal.	64
6.3. Circuito del ejemplo 6.1	65

6.4. Circuito del ejemplo 6.1 con diodo en polarización directa	65
6.5. Circuito del ejemplo 6.2	66
6.6. Circuito del ejemplo 6.2 con diodo en polarización directa	66
6.7. Circuito del ejemplo 6.2 con diodo en polarización inversa	67
6.8. Circuito del ejemplo 6.3	67
6.9. Circuito del ejemplo 6.3. Primera suposición.	68
6.10. Circuito del ejemplo 6.3. Segunda suposición.	68
6.11. Rectificador de media onda	69
6.12. Característica $v - i$ del circuito rectificador de media onda	69
6.13. Análisis del circuito rectificador de media onda	70
6.14.	71
6.15. Característica de la serie diodo y resistor en el ejemplo 6.4	71
6.16. Curva $i(t)$ vs t en el ejemplo 6.4	72
6.17. Símbolo y características $v - i$ e $i - v$ de un Resistor cóncavo	73
6.18. Características $v - i$ e $i - v$ de un resistor cóncavo con conductancia negativa	74
6.19. Red equivalente de un resistor cóncavo de conductancia positiva	74
6.20. Circuito del ejemplo 6.5	75
6.21. Circuito equivalente del ejemplo 6.5	75
6.22. Circuito equivalente del ejemplo 6.5. Primera suposición	75
6.23. Característica $v - i$ del ejemplo 6.6	76
6.24. Primer equivalente del ejemplo 6.6	76
6.25. Equivalente del elemento A en el ejemplo 6.6	77
6.26. Equivalente del elemento B en el ejemplo 6.6	77
6.27. Equivalente total del ejemplo 6.6	78
6.28. Símbolo y características $v - i$ e $i - v$ de un Resistor convexo	79
6.29. Características $v - i$ e $i - v$ de un resistor convexo con resistencia negativa	79
6.30. Red equivalente de un resistor convexo de resistencia positiva	80
6.31. Circuito del ejemplo 6.7	81
6.32. Circuito equivalente del ejemplo 6.7	81
6.33. Circuito equivalente del ejemplo 6.7. Primera suposición	81
6.34. Característica $i - v$ del ejemplo 6.8	82
6.35. Primer equivalente del ejemplo 6.8	82
6.36. Equivalente del elemento A en el ejemplo 6.8	83
6.37. Equivalente del elemento B en el ejemplo 6.8	83
6.38. Equivalente total del ejemplo 6.8	84
7.1. Aproximación de una característica a tramos de líneas rectas	92
7.2. Característica $v - i$ del ejemplo 7.5	92
7.3. Característica $v - i$ aproximada del ejemplo 7.5	93
7.4. Primer equivalente del ejemplo 7.5	93
7.5. Equivalente total del ejemplo 7.5	94
7.6. Característica $v - i$ del ejemplo 7.6	94
7.7. Característica $v - i$ aproximada del ejemplo 7.6	94
7.8. Equivalente del ejemplo 7.6	95
7.9. Característica $v - i$ del ejemplo 7.7	95

7.10. Circuito equivalente del ejemplo 7.7	96
8.1. Circuito de amplificación	97
8.2. Separación de un circuito en dos redes	98
8.3. Características $i - v$ del ejemplo 8.4	102
8.4. Características $i - v$ del ejemplo 8.4	102
8.5. Características $i - v$ del ejemplo 8.5	103
8.6. Características $i - v$ del ejemplo 8.6	103
8.7. Circuito del ejemplo 8.7	104
8.8. Circuito equivalente del ejemplo 8.7	105
8.9. Circuito equivalente del ejemplo 8.7 con la polarización de los diodos	105
8.10. Circuito del ejemplo 8.8	106
8.11. Circuito equivalente del ejemplo 8.8	107
8.12. Circuito DC del ejemplo 8.8	107
8.13. Máximos efectos de la fuente variable en el ejemplo 8.8	107
8.14. Circuito del ejemplo 8.9	108
8.15. Circuito equivalente del ejemplo 8.9	108
8.16. Circuito DC del ejemplo 8.9	109
8.17. Máximos efectos de la fuente variable en el ejemplo 8.9	109
8.18. Circuito del ejemplo 8.10	110
8.19. Circuito equivalente del ejemplo 8.10	110
8.20. Circuito DC del ejemplo 8.10	110
8.21. Máximos efectos de la fuente variable en el ejemplo 8.10	111
8.22. Circuito del ejemplo 8.11	112
8.23. Análisis gráfico en el ejemplo 8.11	112
8.24. Circuito equivalente del ejemplo 8.11	113
9.1. Funciones e^{-x} (en azul) y $\arctan(x)$ (en rojo)	116
9.2. Función $f(x) = e^{-x} - \arctan(x)$	119
9.3. Método de bisección para el ejemplo 9.2. Primeras iteraciones.	122
9.4. Método de n -sección ($n = 10$) para el ejemplo 9.3. Primeras iteraciones.	124
9.5. Métodos de la secante	126
9.6. Métodos de la secante para el ejemplo 9.4.	128
9.7. Método de Newton-Raphson	129
9.8. Métodos de Newton-Raphson para el ejemplo 9.5.	130
9.9. Rectificador de media onda	131
9.10. Característica $v - i$ del diodo del ejemplo 9.6	132
9.11. Resultados del ejemplo 9.6	133
9.12. Resultados del ejemplo 9.7 con $V_p = 1V$	135
9.13. Resultados del ejemplo 9.7 para varios valores de V_p	136
9.14. Resultados del ejemplo 9.9	140
A.1. Circuito y grafo del ejemplo A.01	144
A.2. Circuito y grafo del ejemplo A.02	146
A.3. Circuito y grafo del ejemplo A.03	148
A.4. Circuito y grafo del ejemplo A.04	151

A.5. Circuito y grafo del ejemplo A.05	154
A.6. Circuito y grafo del ejemplo A.06	157
A.7. Circuito y grafo del ejemplo A.07	160

Índice de tablas

1.1. Tabla para la construcción de la matriz de incidencia	6
2.1. Huella de cada tipo de elemento en el método del <i>Tableau</i> reducido	15
2.2. Representación tabular del circuito de ejemplo.	19
2.3. Construcción iterativa de las matrices <i>Tableau</i> . Circuito de ejemplo 2.1	21
3.1. Huellas de los elementos en el método MNA	28
3.9. Construcción iterativa de las matrices MNA. Circuito de ejemplo.	38
7.1. Funciones prototipo usuales para ajuste de curvas	86
7.2. Datos para el ejemplo 7.1	87
7.3. Cálculos intermedios del ejemplo 7.1	87
7.4. Datos para el ejemplo 7.2	89
7.5. Cálculos intermedios del ejemplo 7.2	89
7.6. Datos para el ejemplo 7.3	90
7.7. Datos para el ejemplo 7.4	91
7.8. Cálculos intermedios del ejemplo 7.4	91
9.1. Método de fuerza bruta aplicado al ejemplo 9.1	118
9.2. Método de bisección aplicada al ejemplo 9.2. Primeras iteraciones.	121
9.3. Método de n-sección ($n = 10$) aplicada al ejemplo 9.3	125
9.4. Método de la cuerda aplicado al ejemplo 9.4	127
9.5. Método de la rotación de puntos aplicado al ejemplo 9.4	127
9.6. Método de los mejores puntos aplicado al ejemplo 9.4	128
9.7. Método de Newton-Raphson aplicado al ejemplo 9.5	130
9.8. Resultados del ejemplo 9.6	133
9.9. Comparación de los métodos en los ejemplos	141
A.1. Representación tabular del circuito. Ejemplo A.01	144
A.2. Construcción iterativa de las matrices <i>Tableau</i> . Ejemplo A.01	145
A.3. Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.01	145
A.4. Representación tabular del circuito. Ejemplo A.02	146
A.5. Construcción iterativa de las matrices <i>Tableau</i> . Ejemplo A.02	147
A.6. Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.02	147
A.7. Representación tabular del circuito. Ejemplo A.03	148
A.8. Construcción iterativa de las matrices <i>Tableau</i> . Ejemplo A.03	149

A.9. Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.03	149
A.10.Representación tabular del circuito. Ejemplo A.04	151
A.11.Construcción iterativa de las matrices <i>Tableau</i> . Ejemplo A.04	152
A.12.Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.04	152
A.13.Representación tabular del circuito. Ejemplo A.05	154
A.14.Construcción iterativa de las matrices <i>Tableau</i> . Ejemplo A.05	155
A.15.Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.05	155
A.16.Representación tabular del circuito. Ejemplo A.06	157
A.17.Construcción iterativa de las matrices <i>Tableau</i> . Ejemplo A.06	158
A.18.Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.06	158
A.19.Representación tabular del circuito. Ejemplo A.07	160
A.20.Construcción iterativa de las matrices <i>Tableau</i> . Ejemplo A.07	161
A.21.Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.07	161

Listado de ejemplos

Ejemplo 1.1.	Grafo de un circuito	4
Ejemplo 1.2.	Variables de un circuito en su grafo	5
Ejemplo 1.3.	Matriz de incidencia	6
Ejemplo 1.4.	Aplicación de la LCK	8
Ejemplo 1.5.	Aplicación de la LVK	10
Ejemplo 1.6.	Leyes de Kirchhoff con la matriz de incidencia reducida	11
Ejemplo 2.1.	Método del <i>Tableau</i> disperso	18
Ejemplo 2.2.	Método del <i>Tableau</i> reducido	22
Ejemplo 3.1.	Método MNA directo	36
Ejemplo 4.1.	Característica $v-i$	42
Ejemplo 4.2.	Relación $v - i$ invariante en el tiempo	44
Ejemplo 4.3.	Relación $v - i$ variante en el tiempo	44
Ejemplo 4.4.	Memoria	45
Ejemplo 5.1.	Conexión serie	55
Ejemplo 5.2.	Conexión serie indefinida	56
Ejemplo 5.3.	Conexión serie con elementos no bilaterales	57
Ejemplo 5.4.	Conexión paralelo	59
Ejemplo 5.5.	Conexión paralelo indefinida	61
Ejemplo 5.6.	Conexión paralelo con elementos no bilaterales	61
Ejemplo 6.1.	Circuito con un diodo ideal	65
Ejemplo 6.2.	Circuito con un diodo ideal	66
Ejemplo 6.3.	Circuito con dos diodos ideales	67
Ejemplo 6.4.	Rectificador de media onda con un diodo real	71
Ejemplo 6.5.	Circuito con un resistor cóncavo	75
Ejemplo 6.6.	Resistor cóncavo de conductancia negativa	76
Ejemplo 6.7.	Circuito con un resistor convexo	81
Ejemplo 6.8.	Resistor convexo de resistencia negativa	82
Ejemplo 7.1.	Ajuste de curva a línea recta	87
Ejemplo 7.2.	Ajuste de curva a monomio	89
Ejemplo 7.3.	Ajuste de curva a polinomio	90
Ejemplo 7.4.	Ajuste de curva a función exponencial	91
Ejemplo 7.5.	Aproximación con resistores cóncavos y convexos	92
Ejemplo 7.6.	Aproximación con resistores cóncavos y convexos	94
Ejemplo 7.7.	Aproximación con resistores cóncavos y convexos	95
Ejemplo 8.1.	Análisis DC matemático de un circuito lineal	99

Ejemplo 8.2.	Análisis DC matemático de un circuito no lineal	100
Ejemplo 8.3.	Análisis DC matemático. Red controlada por tensión	100
Ejemplo 8.4.	Análisis DC gráfico	101
Ejemplo 8.5.	Análisis DC gráfico mediante conexión serie	102
Ejemplo 8.6.	Análisis DC gráfico mediante conexión paralelo	103
Ejemplo 8.7.	Análisis DC de un circuito con un resitor cóncavo	104
Ejemplo 8.8.	Análisis de pequeña señal con resitores cóncavos	106
Ejemplo 8.9.	Análisis de pequeña señal con resitores cóncavos	108
Ejemplo 8.10.	Análisis de pequeña señal con resitores cóncavos	109
Ejemplo 8.11.	Análisis alrededor del punto de operación con resitores cóncavos	111
Ejemplo 9.1.	Método de fuerza bruta	118
Ejemplo 9.2.	Método de bisección	120
Ejemplo 9.3.	Método de n -sección	123
Ejemplo 9.4.	Métodos de la secante	126
Ejemplo 9.5.	Método de Newton-Raphson	130
Ejemplo 9.6.	Rectificador de media onda en DC	131
Ejemplo 9.7.	Rectificador de media onda en AC	132
Ejemplo 9.8.	Varios rectificadores de media onda en AC	135
Ejemplo 9.9.	Aplicación de Newton-Raphson multidimensional	138
Ejemplo 9.10.	Velocidad de convergencia	141

Introducción

El análisis de circuitos eléctricos es uno de los temas clásicos de estudio en el área de la ingeniería, especialmente en programas académicos de carreras tales como los de las ingenierías eléctrica, electrónica y mecatrónica.

Existe una amplia variedad de textos guía para las asignaturas en las que se estudian los fundamentos del análisis de circuitos eléctricos. Algunos de ellos son verdaderos *best-sellers* a nivel internacional, con múltiples ediciones a lo largo del tiempo ([6] [3]). Sin temor a equivocarse, puede decirse que estos textos han orientado la formación básica en análisis de circuitos para miles de profesionales.

En el contexto colombiano varios autores han contribuido también a enriquecer el acervo bibliográfico del área de los circuitos eléctricos ([11], [5], [1], [8]). En estas condiciones, ¿Qué puede aportar un nuevo texto en un área temática tan ampliamente cubierta?

Este texto ha sido concebido como un apoyo complementario para la formación de los estudiantes que acceden a un primer curso de análisis de circuitos. Específicamente, está orientado hacia aquellos estudiantes que están aprendiendo los rudimentos del análisis de circuitos resistivos, pero que quieren ir un poco más allá de las metas de aprendizaje usuales.

Todo el texto está redactado de tal forma que brinda herramientas para intentar dar respuesta a dos preguntas orientadoras:

1. ¿Cómo se construyen automáticamente las ecuaciones que utilizan internamente los simuladores de circuitos eléctricos?
2. ¿Qué sucede si no se satisface la Ley de Ohm?

La motivación para preparar un texto que ayude a abordar estas dos preguntas no viene del azar. En relación con la primera, es claro que la utilización de herramientas de software para la simulación de circuitos es, desde hace varios años, una actividad usual en los cursos de circuitos. Sin embargo, una cosa es saber utilizar una herramienta y otra muy distinta comprender cómo funciona internamente. Los profesionales de hoy (y de mañana) están inmersos en un mundo digital que deben entender muy bien. No basta con ser usuarios de una herramienta; hay que dominarla.

Es interesante analizar cómo se ha incorporado la preocupación por el tema de los simuladores en los textos clásicos de circuitos. Consideremos el texto de Hayt ([6]). En 1977 se publicó una reseña sobre ese texto que para ese entonces ya era una referencia obligada: “Creemos que este texto es uno de los mejores disponibles para un primer curso de análisis de redes. Está relativamente libre de preocupaciones sobre temas colaterales como los programas informáticos, los gráficos de flujo de señales, las variables de estado y los giradores.”([7]). Posteriormente, en las ediciones de comienzos del siglo XXI, los ‘programas informáticos’ pasaron de ser un tema ‘colateral’ a una herramienta útil en ese mismo texto, que permite visualizar fácilmente algunos fenómenos sin entrar en engorrosos procedimientos aritméticos.

El enfoque didáctico de este texto va más allá. Esta alineado con la estrategia de *programar para aprender* ([13]), más exactamente con la de *programar para reforzar los aprendizajes*, que no es otra cosa que la aplicación del principio del *aprendizaje activo* según el cual es el uso del conocimiento el que consolida el aprendizaje. Pues bien, la idea subyacente es la de ayudar a que el estudiante pueda utilizar su conocimiento básico de circuitos eléctricos para construir un producto concreto: una pequeña pieza de software capaz de simular el comportamiento de circuitos resistivos.

La segunda pregunta orientadora busca ayudar a cerrar una brecha identificada en la formación de los estudiantes. El enfoque adoptado en los textos clásicos de circuitos básicos dista del que se aplica en los textos de electrónica básica. En otras palabras, cuando aparecen los diodos y los transistores es preferible emplear modelos y técnicas que no se suelen estudiar en los cursos introductorios de electricidad.

Sin duda, es la naturaleza no-lineal de los elementos electrónicos la que obliga a ese cambio de enfoque. Desde la perspectiva de los estudiantes este cambio es un salto al vacío difícil de afrontar ¿Dónde quedan los análisis de mallas y nodos, la separación entre respuestas transitorias y estacionarias, las técnicas de Laplace y los fasores cuando la tarea consiste en analizar un rectificador o polarizar un transistor?

Existen textos avanzados de circuitos que abordan con rigor ambas preguntas ([2],[10], [9]). Lo que diferencia este texto de aquellos es que está redactado para un público que se está iniciando en el estudio de los circuitos. No presupone conocimientos previos matemáticos avanzados. Tan solo se espera que el lector conozca las leyes de Kirchhoff, aritmética de matrices, los principios de programación y la noción de derivada.

El texto consta de 9 capítulos y 2 apéndices. Los capítulos se han agrupado en dos temas, cada uno de los cuales se enfoca en una de las preguntas orientadores. El capítulo final es el punto de encuentro entre los dos temas.

La primera parte se denomina **Obtención sistematizada de ecuaciones de circuitos** y consta de tres capítulos. En ellos se explican los algoritmos básicos para la construcción de sistemas de ecuaciones que permiten analizar circuitos resistivos lineales. El capítulo 1 se centra en las ecuaciones relacionadas con la topología del circuito, es decir, con las leyes de Kirchhoff, mientras que en los capítulos 2 y 3 se muestran tres estrategias para construir el conjunto completo de ecuaciones: a) el método del *tableau* disperso, b) el método del *tableau*

reducido y c) el método del análisis de nodos modificado.

Los tres métodos se presentan en orden de dificultad para su comprensión. Curiosamente, mientras más fácil de entender es un método, más grande es el sistema de ecuaciones resultante y por tanto más costoso computacionalmente. El apéndice A contiene una colección de ejemplos de aplicación de los tres métodos, que pueden ayudar al estudiante a contrastar los resultados de sus propias implementaciones.

La segunda parte se denomina **Resistores no lineales** y consta de 6 capítulos ¹. Los capítulos 4 y 5 son una extensión de los conceptos más elementales del análisis de circuitos resistivos lineales. De hecho, los temas de estos dos capítulos bien podrían ser estudiados *antes* de conocer la ley de Ohm. En el capítulo 6 se presentan tres elementos de circuitos útiles para modelar elementos no lineales: a) el diodo ideal, b) el resistor cóncavo y c) el resistor convexo. Estos elementos emplean trozos de líneas rectas para modelar las relaciones matemáticas entre tensión y corriente. El capítulo 7 muestra procedimientos sencillos para obtener esos modelos, que pueden ser empleados en elementos más sofisticados. Este capítulo se apoya en el apéndice B, que presenta de manera sucinta algunos procedimientos para efectuar ajustes de funciones matemáticas.

En el capítulo 8 se presentan las técnicas de análisis DC y de pequeña señal que permiten trabajar con modelos lineales simplificados. El capítulo destaca que es necesario conocer el rango de validez de los modelos para poder determinar si el análisis de pequeña señal es o no adecuado.

El capítulo 9 conecta los dos grandes temas del texto. Allí se retoma la preocupación por los modelos computacionales, incorporando ahora los modelos estáticos no lineales. Se hace una presentación descriptiva de los métodos numéricos que permiten encontrar soluciones a ecuaciones algebraicas no lineales, y se ilustra su aplicación a los circuitos eléctricos.

Espero que este texto sirva de estímulo para los estudiantes que se inician en el mundo del análisis de circuitos consoliden sus aprendizajes, y para que sus docentes diseñemos nuevas estrategias didácticas con métodos y objetivos acordes a las necesidades presentes y futuras.

Oscar Duarte

¹Los primeros cinco capítulos son una revisión ampliada de [4]

Parte I

Obtención sistematizada de ecuaciones de circuitos

Capítulo 1

Aplicación sistematizada de las leyes de Kirchhoff

El modelo matemático de un circuito eléctrico es un conjunto de ecuaciones que, una vez resueltas, permiten predecir el comportamiento de dicho circuito. En este capítulo se presentan algunos métodos para la obtención de un conjunto válido y suficiente de tales ecuaciones. Lo que tienen en común y de especial estos métodos es que son sistemáticos y, por tanto, es factible implementarlos en software.

Para facilitar la presentación de estos métodos, en este capítulo se aplican a circuitos resistivos lineales con fuentes constantes. Sin embargo, cada uno de estos métodos puede aplicarse a circuitos mucho más sofisticados.

1.1. Elementos para la simulación de circuitos

Los métodos aplicados se apoyan en algunos conceptos de la teoría de grafos. Sin entrar en formalismos, un grafo es un conjunto de *nodos* y de *ramas*. Cada rama conecta un par de nodos. Cuando esa conexión se hace en una dirección específica, se trata de un *grafo orientado*.

Es posible construir un grafo orientado a partir de un circuito. Para ello efectuamos la siguiente correspondencia:

- A cada nodo del circuito le corresponde un nodo del grafo.
- A cada elemento del circuito le corresponde una rama del grafo.
- Cada rama del grafo conectará los nodos correspondientes al elemento que representa.
- A cada rama del grafo se le asigna dirección. Esta asignación puede ser arbitraria.

Ejemplo 1.1 (Grafo de un circuito)

A manera de ejemplo, en la figura 1.1 se muestra un circuito simple y un grafo orientado que se ha construido a partir del circuito. El circuito tiene 4 nodos, y por tanto en el grafo también hay cuatro nodos que se han marcado en azul con los nombres 0, 1, 2 y 3. En el circuito hay seis elementos (un fuente de tensión, una fuente de corriente y 4 resistores) y por tanto en el grafo hay seis ramas que se han marcado en rojo con los nombres 1, 2, 3, 4, 5 y 6. La dirección asignada a cada una de las 6 ramas ha sido arbitraria.

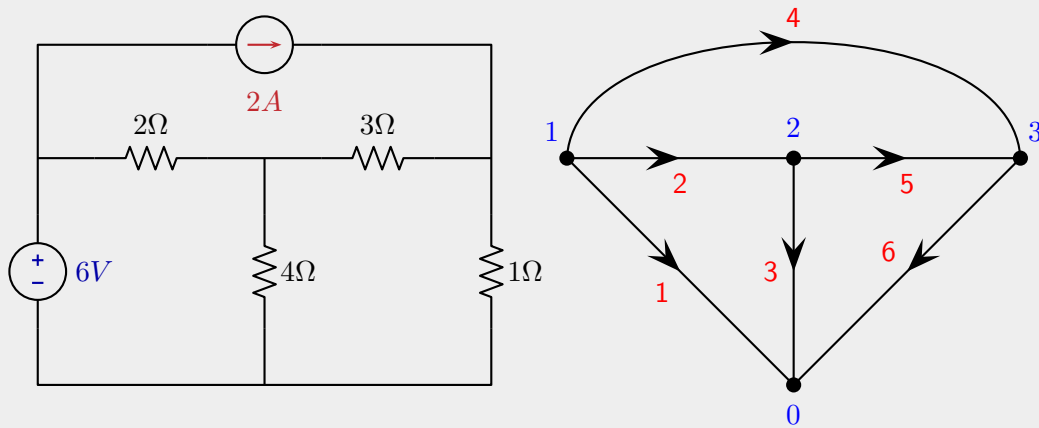


Figura 1.1: Un circuito del ejemplo 1.1 y su grafo asociado

La correspondencia entre ramas del grafo y elementos del circuito es la siguiente:

- Rama 1 \leftrightarrow Fuente de tensión de $6V$.
- Rama 2 \leftrightarrow Resistor 2Ω .
- Rama 3 \leftrightarrow Resistor 4Ω
- Rama 4 \leftrightarrow Fuente de corriente de $2A$.
- Rama 5 \leftrightarrow Resistor 3Ω
- Rama 6 \leftrightarrow Resistor 1Ω

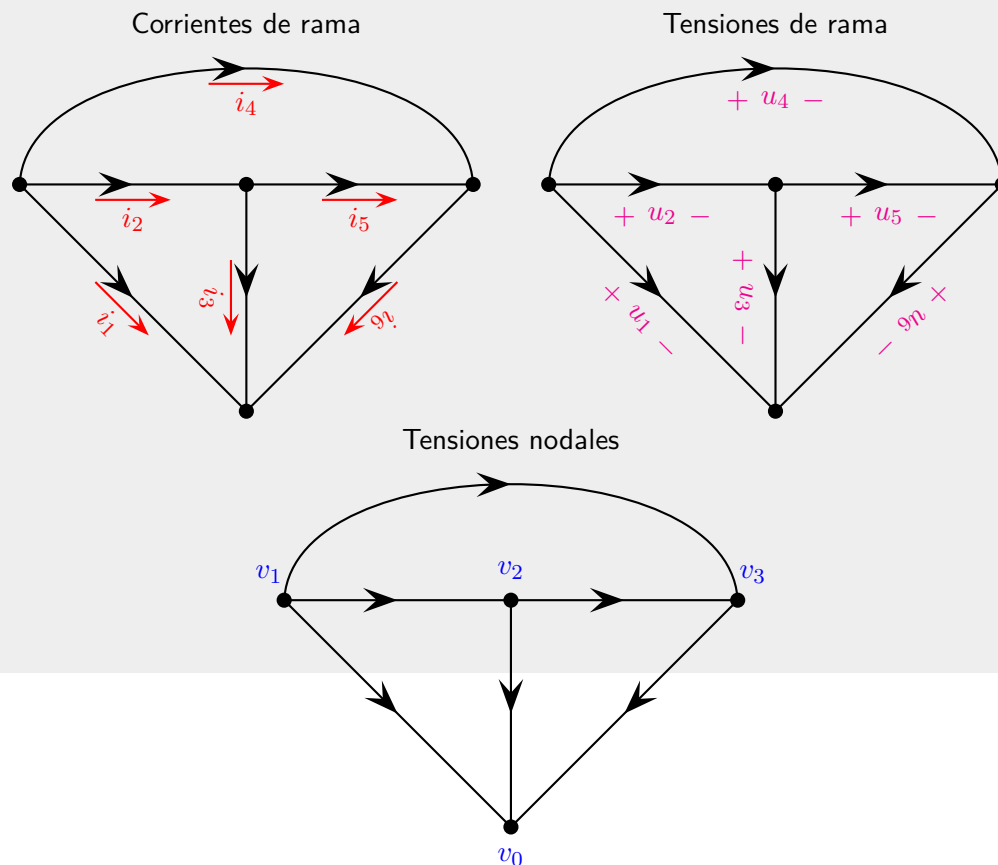
1.1.1. Variables de estudio

Los métodos de obtención de ecuaciones para el análisis de circuitos utilizan tres tipos de variables como incógnitas a obtener:

- **Corrientes de rama:** una corriente de rama es la corriente eléctrica que circula por esa rama, en la dirección asignada a la rama. Se denota por i_x , en donde el subíndice x es el número de la rama.
- **Tensiones de rama:** una tensión de rama es la diferencia de potencial entre los nodos que conecta la rama; la referencia positiva corresponde al nodo desde el que sale la corriente de rama y la referencia negativa al nodo al que llega esa corriente. Se denota por u_x , en donde el subíndice x es el número de la rama.
- **Tensiones nodales (o de nodo):** una tensión de nodo es la diferencia de potencial entre ese nodo y otro nodo del circuito que se ha seleccionado como *nodo de referencia*. Se denota por v_x , en donde el subíndice x es el número del nodo. Al nodo de referencia se le asigna el número 0, y por tanto $v_0 = 0$.

Ejemplo 1.2 (Variables de un circuito en su grafo)

Continuando con el ejemplo 1.1 de la figura 1.1, se ha elaborado la figura 1.2 para mostrar todas las variables de interés en el circuito. Como el circuito tiene 6 ramas, existen 6 corrientes de rama (en color rojo) y 6 tensiones de rama (en color magenta). Como el circuito tiene 4 nodos, existen 4 tensiones nodales (en color azul), y una de ellas es conocida ($v_0 = 0$) porque el nodo 0 se define como el de referencia.



Con cada uno de los tres tipos de variables de interés se puede construir un vector que contenga las incógnitas. Por ejemplo, para las variables que se muestran en la figura 1.2 se pueden construir los vectores \mathbf{i} , \mathbf{u} , $\bar{\mathbf{v}}$ y \mathbf{v} así¹:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

1.1.2. Matriz de incidencia

Es posible asignar a cada grafo una matriz \mathbf{M} denominada *Matriz de incidencia*, que contiene la información necesaria y suficiente para construir dicho grafo.

Para un circuito de n nodos y r ramas la matriz M será de tamaño $n \times r$. En cada celda de la matriz \mathbf{M} hay uno de tres valores: 0, +1 ó -1.

El criterio de asignación para la celda $M_{k,j}$ es el siguiente:

$$M_{k,j} = \begin{cases} +1 & \text{si hay una corriente por la rama } j \text{ que sale del nodo } k \\ -1 & \text{si hay una corriente por la rama } j \text{ que entra al nodo } k \\ 0 & \text{si la rama } j \text{ no está conectada con el nodo } k \end{cases} \quad (1.2)$$

Ejemplo 1.3 (Matriz de incidencia)

Para ilustrar cómo se aplica 1.2 al ejemplo 1.1 de la figura 1.1 conviene construir primero la tabla 1.1 en la que cada fila corresponde a un nodo y cada columna a una rama. Tomemos, por ejemplo, el nodo 2: en la figura 1.1 se observa que desde el nodo 2 salen las ramas 3 y 5; por esa razón en las columnas 3 y 5 de la segunda fila aparece el valor 1. También se observa que al nodo 2 llega la rama 2; por esa razón en la columna 2 de la segunda fila aparece el valor -1.

Tabla 1.1: Tabla para la construcción de la matriz de incidencia

Nodo	Rama					
	1	2	3	4	5	6

¹La diferencia entre los vectores $\bar{\mathbf{v}}$ y \mathbf{v} es la presencia de v_0 . Utilizaremos el primer vector para derivar las expresiones matriciales de las leyes de Kirchhoff de forma general. Sin embargo, debido a que $v_0 = 0$ no tiene sentido formular ecuaciones en donde v_0 sea una incógnita y por ello se empleará el segundo vector en los métodos de formulación de ecuaciones.

0	-1	0	-1	0	0	-1
1	1	1	0	1	0	0
2	0	-1	1	0	1	0
3	0	0	0	-1	-1	1

Con la información de la tabla 1.1 se puede construir la siguiente matriz de incidencia:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

1.2. Aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff

La matriz de incidencia facilita la aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) en cada nodo. Si queremos aplicar la LCK al nodo k debemos escribir la ecuación:

$$\sum \left\{ \begin{array}{l} \text{Corrientes} \\ \text{que salen} \\ \text{al nodo } k \end{array} \right\} - \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{Corrientes} \\ \text{que entran} \\ \text{del nodo } k \end{array} \right\} = 0 \quad (1.4)$$

Si consideramos todas las corrientes de rama del circuito, para cada una de esas ramas puede darse una sólo de las siguientes tres situaciones respecto al nodo k :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la corriente de rama sale del nodo } k \\ \text{la corriente de rama entra al nodo } k \\ \text{la rama no está conectada con el nodo } k \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Por esa razón, la ecuación 1.4 también puede escribirse como:

$$M_{k,1}i_1 + M_{k,2}i_2 + \cdots M_{k,r}i_r = 0 \quad (1.6)$$

En donde $M_{k,j}$ es un coeficiente que vale 1, -1 ó 0, según las mismas reglas de la ecuación 1.2. Lo anterior se debe a que el contenido de cada una de las celdas de una fila de la matriz de incidencia indica si desde el nodo respectivo sale o entra una corriente de rama (ecuación 1.2).

Es posible aplicar la ecuación 1.6 a cada uno de los nodos:

$$\begin{cases} M_{0,1}i_1 + M_{0,2}i_2 + \cdots M_{0,r}i_r = 0 \\ M_{1,1}i_1 + M_{1,2}i_2 + \cdots M_{1,r}i_r = 0 \\ \vdots \\ M_{n,1}i_1 + M_{n,2}i_2 + \cdots M_{n,r}i_r = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

La anterior ecuación puede escribirse empleando el producto de matrices:

$$\begin{bmatrix} M_{0,1} & M_{0,2} & \cdots & M_{0,r} \\ M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \cdots & M_{n,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

O lo que es igual:

$$\mathbf{M}\mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

Ejemplo 1.4 (Aplicación de la LCK)

A manera de ejemplo, tomemos el circuito de las figuras 1.1 y 1.2, cuya matriz de incidencia está en la ecuación 1.3. La ecuación 1.9 resulta ser:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Al efectuar el producto matricial se obtiene:

$$\begin{cases} -i_1 & & -i_3 & & & -i_6 & = & 0 \\ i_1 & + & i_2 & & + & i_4 & & = & 0 \\ & - & i_2 & + & i_3 & & + & i_5 & = & 0 \\ & & & - & i_4 & - & i_5 & + & i_6 & = & 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

es decir, las cuatro ecuaciones que resultan de aplicar la LCK a cada uno de los cuatro nodos:

$$\begin{cases} \text{Nodo 0} : & -i_1 - i_3 - i_6 = 0 \\ \text{Nodo 1} : & i_1 + i_2 + i_4 = 0 \\ \text{Nodo 2} : & -i_2 + i_3 + i_5 = 0 \\ \text{Nodo 3} : & -i_4 - i_5 + i_6 = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

1.3. Aplicación de la ley de tensiones de Kirchhoff

La matriz de incidencia también facilita la aplicación de la ley de tensiones de Kirchhoff (LVK) para relacionar las tensiones de rama con las tensiones nodales. Consideremos la rama j , cuya tensión de rama es u_j . Supongamos que esa rama está conectada entre los nodos p_j y n_j , cuyas tensiones nodales son, respectivamente, v_{p_j} y v_{n_j} ; supongamos también que la referencia positiva está en el nodo p_j .

En esas condiciones, la aplicación de la LVK permite escribir la tensión de la rama j en función de las tensiones nodales así:

$$u_j = v_{p_j} - v_{n_j} \quad (1.13)$$

Recordemos que las tensiones de rama tienen como referencia positiva el nodo desde el que sale la corriente que atraviesa la rama (sección 1.1.1). Por esa razón, los signos que acompañan a las tensiones nodales en la ecuación 1.13 pueden derivarse de la matriz de incidencia.

Como consecuencia de la forma en que se construye la matriz de incidencia (ecuación 1.2), en cada columna de la matriz hay una única celda con el valor 1, una única celda con el valor -1 y los demás valores son 0.

En consecuencia, la ecuación 1.13 también puede escribirse como:

$$M_{0,j}v_0 + M_{1,j}v_1 + \cdots M_{n,j}v_n = u_j \quad (1.14)$$

En donde $M_{k,j}$ es un coeficiente que vale 1, -1 ó 0, según las mismas reglas de la ecuación 1.2.

Es posible aplicar la ecuación 1.14 a cada uno de los nodos:

$$\begin{cases} M_{0,1}v_0 + M_{1,1}v_1 + \cdots M_{n,1}v_n = u_1 \\ M_{0,2}v_0 + M_{1,2}v_1 + \cdots M_{n,2}v_n = u_2 \\ \vdots \\ M_{0,r}v_0 + M_{1,r}v_1 + \cdots M_{n,r}v_n = u_r \end{cases} \quad (1.15)$$

La anterior ecuación puede escribirse empleando el producto de matrices:

$$\begin{bmatrix} M_{0,1} & M_{1,1} & \cdots & M_{n,1} \\ M_{0,2} & M_{1,2} & \cdots & M_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{0,r} & M_{1,r} & \cdots & M_{n,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

O lo que es igual:

$$\mathbf{M}^T \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{u} \quad (1.17)$$

Ejemplo 1.5 (Aplicación de la LVK)

A manera de ejemplo, tomemos el circuito de las figuras 1.1 y 1.2, cuya matriz de incidencia está en la ecuación 1.3. La ecuación 1.17 resulta ser:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Al efectuar el producto matricial se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -v_0 + v_1 & & = u_1 \\ & + v_1 - v_2 & = u_2 \\ -v_0 & + v_2 & = u_3 \\ & + v_1 - v_3 & = u_4 \\ & + v_2 - v_3 & = u_5 \\ -v_0 & & + v_3 = u_6 \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Es decir, las seis ecuaciones que resultan de aplicar la LVK a cada uno de las seis ramas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{Rama 1} & : & -v_0 + v_1 = u_1 \\ \text{Rama 2} & : & v_1 - v_2 = u_2 \\ \text{Rama 3} & : & -v_0 + v_2 = u_3 \\ \text{Rama 4} & : & v_1 - v_3 = u_4 \\ \text{Rama 5} & : & v_2 - v_3 = u_5 \\ \text{Rama 6} & : & -v_0 + v_3 = u_6 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

1.4. Matriz de incidencia reducida

Debido a que en cada columna de la matriz de incidencia hay un único 1 y un único -1 , al sumar las filas el resultado es una fila de ceros. Esto significa que las filas de la matriz de incidencia son linealmente dependientes. En otras palabras, las ecuaciones 1.9 y 1.17 son redundantes.

Para evitar esta situación, basta con ignorar una de las filas de la matriz de incidencia. La fila que se ignora es la correspondiente al nodo 0, que es el de referencia. El resultado es la *Matriz de incidencia reducida* **A**.

Para aplicar las leyes de Kirchhoff a un circuito empleamos 1.9 y 1.17 con la matriz reducida, lo que resulta en²:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{u} \end{cases} \quad (1.21)$$

Ejemplo 1.6 (Leyes de Kirchhoff con la matriz de incidencia reducida)

A manera de ejemplo, la matriz de incidencia reducida correspondiente al circuito de las figuras 1.1 y 1.2 se puede obtener eliminando la primera fila de la matriz que se muestra en la ecuación 1.3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

La aplicación de la LCK con la matriz de incidencia reducida se convierte en:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Al efectuar el producto matricial se obtiene:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_4 = 0 \\ -i_2 + i_3 + i_5 = 0 \\ -i_4 - i_5 + i_6 = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

es decir, las tres ecuaciones que resultan son las mismas que aparecen en 1.12 para los nodos que no son el de referencia:

$$\begin{cases} \text{Nodo 1} : i_1 + i_2 + i_4 = 0 \\ \text{Nodo 2} : -i_2 + i_3 + i_5 = 0 \\ \text{Nodo 3} : -i_4 - i_5 + i_6 = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

En cuanto a la aplicación de la LVK con la matriz de incidencia reducida se tiene:

²Nótese que se ha empleado el vector \mathbf{v} en lugar del vector $\bar{\mathbf{v}}$ porque se da por sentado que $v_0 = 0$ y por tanto no tiene sentido incluir v_0 en el vector de variables desconocidas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Al efectuar el producto matricial se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_1 & & = u_1 \\ v_1 - v_2 & & = u_2 \\ & + v_2 & = u_3 \\ v_1 & - v_3 & = u_4 \\ & + v_2 - v_3 & = u_5 \\ & & + v_3 = u_6 \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Es decir, son las mismas seis ecuaciones que se muestran en 1.20, con $v_0 = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{Rama 1} & : & v_1 = u_1 \\ \text{Rama 2} & : & v_1 - v_2 = u_2 \\ \text{Rama 3} & : & v_2 = u_3 \\ \text{Rama 4} & : & v_1 - v_3 = u_4 \\ \text{Rama 5} & : & v_2 - v_3 = u_5 \\ \text{Rama 6} & : & v_3 = u_6 \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Capítulo 2

Tableau de ecuaciones

2.1. Planteamiento

El método del *Tableau* disperso combina dos tipos de información para construir un conjunto de ecuaciones válidas que permitan analizar el circuito:

- **Información de la topología del circuito:** es decir, cómo están conectados los elementos del circuito. Esta información se toma de la ecuación 1.21.
- **Información de los elementos del circuito:** es decir, la descripción de lo que sucede en cada una de las ramas del circuito. En cada una de las ramas hay un elemento específico y por tanto hay una relación específica entre la tensión y la corriente en cada rama. El conjunto de todas las relaciones de rama se expresa mediante la ecuación:

$$\mathbf{Z}\mathbf{i} + \mathbf{Y}\mathbf{u} = \mathbf{s} \quad (2.1)$$

Las ecuaciones 1.21 y 2.1 pueden reescribirse así¹:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{i} + \mathbf{0}\mathbf{u} + \mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0}\mathbf{i} - \mathbf{1}\mathbf{u} + \mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}\mathbf{i} + \mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{s} \end{cases} \quad (2.2)$$

El método del *Tableau* disperso consiste en escribir la ecuación 2.2 como una única ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{Z} & \mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

¹La matriz $\mathbf{1}$ es la matriz identidad. Hemos usado esta notación en lugar de usar \mathbf{I} para evitar que se confunda con alguna matriz de corrientes.

En donde las matrices de las variables desconocidas son:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{r \times 1} &: \text{vector de corrientes de rama} \\ \mathbf{u}_{r \times 1} &: \text{vector de tensiones de rama} \\ \mathbf{v}_{n \times 1} &: \text{vector de tensiones nodales} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para el caso de un circuito con $n + 1$ nodos y r ramas es necesario, entonces, construir las matrices:

$$\mathbf{A}_{n \times r} \quad \mathbf{Z}_{r \times r} \quad \mathbf{Y}_{r \times r} \quad \mathbf{s}_{r \times 1} \quad (2.5)$$

Para aclarar el tamaño de las matrices de ceros ($\mathbf{0}$) y la matriz identidad ($\mathbf{1}$), reescribimos la ecuación 2.3 con los subíndices de cada bloque:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n \times r} & \mathbf{0}_{n \times r} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{r \times r} & \mathbf{1}_{r \times r} & -\mathbf{A}_{r \times n}^T \\ \mathbf{Z}_{r \times r} & \mathbf{Y}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{r \times 1} \\ \mathbf{u}_{r \times 1} \\ \mathbf{v}_{n \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{r \times 1} \\ \mathbf{s}_{r \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

La ecuación matricial 2.3 que debe resolverse puede escribirse como:

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{S} \quad (2.7)$$

Al observar los tamaños de los bloques que se muestran en la ecuación 2.6 se concluye que las matrices de la ecuación 2.7 tienen los siguientes tamaños:

$$\mathbf{T}_{(2r+n) \times (2r+n)} \mathbf{x}_{(2r+n) \times 1} = \mathbf{S}_{(2r+n) \times 1} \quad (2.8)$$

2.2. Huella de cada elemento

La huella de un elemento es el efecto que ese elemento tiene en la ecuación del *Tableau*. Recordemos que las dos primeras ecuaciones en 2.2 dependen exclusivamente de la topología, es decir, no dependen de los tipos de elemento en el circuito. Por tanto, la huella de un elemento no aparecerá en esas dos ecuaciones.

En cambio, la tercera ecuación en 2.2 es un conjunto de r ecuaciones (r es el número de ramas) que sí dependen de qué tipo de elemento hay en cada rama. Al llevarla a la forma matricial 2.3 cada ecuación se reflejará como coeficientes en las matrices \mathbf{Z} , \mathbf{Y} y \mathbf{s} .

Por ello, la huella de cada elemento resulta siendo un efecto específico sobre los coeficientes de las matrices \mathbf{Z} , \mathbf{Y} y \mathbf{s} . Ese efecto dependerá del tipo de elemento que hay en cada rama. En las subsecciones siguientes se explica el efecto de cada tipo de elemento considerado en este texto; los resultados se han consignado en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Huella de cada tipo de elemento en el método del *Tableau* reducido

Elemento	Condición	Huella
Resistor	En la rama j hay un resistor de conductancia G	$\mathbf{Z}_{j,j} = 1$ $\mathbf{Y}_{j,j} = -G$ $\mathbf{s}_{j,1} = 0$
Fuente independiente de tensión	En la rama j hay una fuente independiente de tensión de valor V_f	$\mathbf{Y}_{j,j} = 1$ $\mathbf{s}_{j,1} = V_f$
Fuente independiente de corriente	En la rama j hay una fuente independiente de corriente de valor I_f	$\mathbf{Z}_{j,j} = 1$ $\mathbf{s}_{j,1} = I_f$
Fuente de tensión controlada por tensión de rama	En la rama j hay una fuente de tensión controlada por la tensión de la rama k con un factor α	$\mathbf{Y}_{j,j} = 1$ $\mathbf{Y}_{j,k} = -\alpha$ $\mathbf{s}_{j,1} = 0$
Fuente de tensión controlada por corriente de rama	En la rama j hay una fuente de tensión controlada por la corriente de la rama k con un factor α	$\mathbf{Z}_{j,k} = -\alpha$ $\mathbf{Y}_{j,j} = 1$ $\mathbf{s}_{j,1} = 0$
Fuente de corriente controlada por tensión de rama	En la rama j hay una fuente de corriente controlada por la tensión de la rama k con un factor α	$\mathbf{Z}_{j,j} = 1$ $\mathbf{Y}_{j,k} = -\alpha$ $\mathbf{s}_{j,1} = 0$
Fuente de corriente controlada por corriente de rama	En la rama j hay una fuente de corriente controlada por la corriente de la rama k con un factor α	$\mathbf{Z}_{j,j} = 1$ $\mathbf{Z}_{j,k} = -\alpha$ $\mathbf{s}_{j,1} = 0$

Para determinar las huellas de los elementos, conviene destacar que:

1. El elemento $\mathbf{Z}_{j,k}$ es el coeficiente que acompaña a i_k en la ecuación de la rama j .
2. El elemento $\mathbf{Y}_{j,k}$ es el coeficiente que acompaña a u_k en la ecuación de la rama j .
3. El elemento $\mathbf{s}_{j,1}$ es el término independiente de la ecuación de la rama j .

2.2.1. Resistor

Si en la rama j hay un resistor de resistencia R la ecuación del elemento resulta ser:

$$u_j = Ri_j \quad (2.9)$$

que en términos de la conductancia $G = 1/R$ puede escribirse como:

$$i_j - Gu_j = 0 \quad (2.10)$$

De donde se deducen que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{j,j} &= 1 \\ \mathbf{Y}_{j,j} &= -G \\ \mathbf{s}_{j,1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.2. Fuente independiente de tensión

Si en la rama j hay un fuente independiente de tensión de valor V_f la ecuación del elemento resulta ser:

$$v_j = V_f \quad (2.12)$$

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{j,j} &= 1 \\ \mathbf{s}_{j,1} &= V_f \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2.3. Fuente independiente de corriente

Si en la rama j hay un fuente independiente de corriente de valor I_f la ecuación del elemento resulta ser:

$$i_j = I_f \quad (2.14)$$

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{j,j} &= 1 \\ \mathbf{s}_{j,1} &= I_f \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2.4. Fuente de tensión controlada por tensión de rama

Si en la rama j hay una fuente de tensión controlada por la tensión de la rama k con un factor α la ecuación del elemento resulta ser:

$$u_j = \alpha u_k \quad (2.16)$$

es decir,

$$u_j - \alpha u_k = 0 \quad (2.17)$$

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{j,j} &= 1 \\ \mathbf{Y}_{j,k} &= -\alpha \\ \mathbf{s}_{j,1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.2.5. Fuente de tensión controlada por corriente de rama

Si en la rama j hay una fuente de tensión controlada por la corriente de la rama k con un factor α la ecuación del elemento resulta ser:

$$u_j = \alpha i_k \quad (2.19)$$

es decir,

$$-\alpha i_k + u_j = 0 \quad (2.20)$$

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{j,k} &= -\alpha \\ \mathbf{Y}_{j,j} &= 1 \\ \mathbf{s}_{j,1} &= 0\end{aligned}\tag{2.21}$$

2.2.6. Fuente de corriente controlada por tensión de rama

Si en la rama j hay una fuente de corriente controlada por la tensión de la rama k con un factor α la ecuación del elemento resulta ser:

$$i_j = \alpha u_k\tag{2.22}$$

es decir,

$$i_j + -\alpha u_k = 0\tag{2.23}$$

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{j,j} &= 1 \\ \mathbf{Y}_{j,k} &= -\alpha \\ \mathbf{s}_{j,1} &= 0\end{aligned}\tag{2.24}$$

2.2.7. Fuente de corriente controlada por corriente de rama

Si en la rama j hay una fuente de corriente controlada por la corriente de la rama k con un factor α la ecuación del elemento resulta ser:

$$i_j = \alpha i_k\tag{2.25}$$

es decir,

$$i_j + -\alpha i_k = 0\tag{2.26}$$

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{j,j} &= 1 \\ \mathbf{Z}_{j,k} &= -\alpha \\ \mathbf{s}_{j,1} &= 0\end{aligned}\tag{2.27}$$

2.3. Compendio del método

Gracias a que cada elemento tiene una huella específica, es posible obtener la ecuación matricial 2.3 que permite analizar un circuito siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Determinar n , el número de nodos del circuito que no son el de referencia.
2. Determinar r , el número de ramas del circuito.

3. Construir las matrices $\mathbf{A}_{n \times r}$, $\mathbf{Z}_{r \times r}$, $\mathbf{Y}_{r \times r}$ y $\mathbf{s}_{r \times 1}$ y llenarlas de ceros.
4. Para cada una de las ramas del circuito:
 - 4.1. Identificar los nodos que son conectados por la rama y la orientación.
 - 4.2. Modificar la matriz \mathbf{A} usando 1.2; el nodo de referencia no modifica la matriz.
 - 4.3. Determinar la huella del elemento que hay en la rama usando la tabla 2.1.
 - 4.4. Modificar las matrices \mathbf{Z} , \mathbf{Y} y \mathbf{s} con la huella del elemento.
5. Ensamblar la ecuación matricial 2.3

Ejemplo 2.1 (Método del *Tableau* disperso)

La figura 2.1 muestra un circuito que contiene 2 resistores, 1 fuente de corriente y una fuente de tensión. El circuito tiene 4 ramas y 3 nodos, uno de los cuales es el de referencia. Por tanto:

$$n = 2 \quad r = 4 \quad (2.28)$$

En la figura también se observa la asignación de las tensiones nodales v_1 y v_2 . Para aplicar el método del *Tableau* disperso asignamos los números que se muestran en la figura 2.1 a cada una de las ramas.

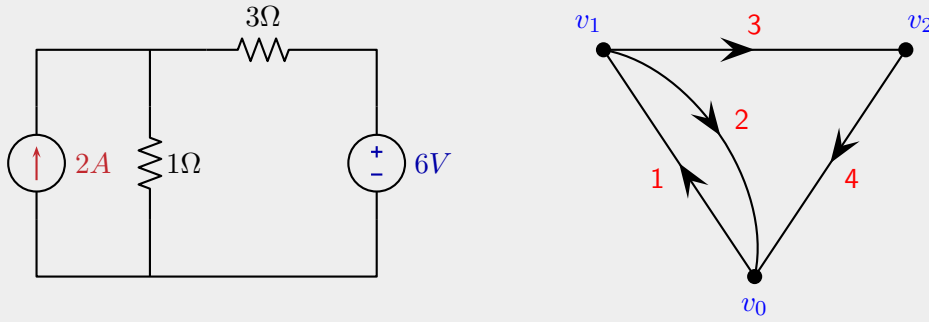


Figura 2.1: Circuito y grafo de ejemplo

La tabla 2.2 muestra una representación tabulada del circuito. Cada línea corresponde a una rama del circuito. La tabla contiene toda la información necesaria para construir las ecuaciones del circuito. El significado de cada columna es el siguiente:

- **Rama:** número de rama asignado.
- **Tipo:** tipo de elemento en la rama.

- **NodoP**: número del nodo que conecta la rama con referencia positiva.
- **NodoN**: número del nodo que conecta la rama con referencia negativa.
- **RamaAux**: esta información sólo es útil para los elementos que son fuentes controladas. Contiene el número de la rama que controla a la fuente.

Tabla 2.2: Representación tabular del circuito de ejemplo.

Rama	Tipo	NodoP	NodoN	Valor	RamaAux
1	FuenteI	0	1	2.0	0
2	Resistor	1	0	1.0	0
3	Resistor	1	2	3.0	0
4	FuenteV	2	0	6.0	0

De acuerdo con el procedimiento descrito en 2.3, las matrices de la ecuación 2.3 se llenan inicialmente con ceros y su contenido se va modificando según el contenido de cada rama. La tabla 2.3 muestra el resultado de cada paso en ese proceso: al analizar secuencialmente cada una de las ramas se modifica el contenido de las matrices **A**, **Z**, **Y** y **s**, tal como se explica a continuación:

Rama 1: en la rama 1 hay una fuente independiente de corriente de valor $2A$ conectada entre el nodo 0 y el nodo 1. De acuerdo con 1.2 y con la tabla 2.1

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{0,1} & \text{No existe por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{A}_{1,1} &= -1 \\ \mathbf{Z}_{1,1} &= 1 \\ \mathbf{s}_{1,1} &= 2 \end{cases} \quad (2.29)$$

Rama 2: en la rama 2 hay un resistor de valor 1Ω conectada entre el nodo 1 y el nodo 0. De acuerdo con 1.2 y con la tabla 2.1

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{1,2} &= 1 \\ \mathbf{A}_{0,2} & \text{No existe por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{Z}_{2,2} &= 1 \\ \mathbf{Y}_{2,2} &= -1/1 = -1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Rama 3: en la rama 3 hay un resistor de valor 3Ω conectada entre el nodo 1 y el nodo 2. De acuerdo con 1.2 y con la tabla 2.1

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{1,3} &= 1 \\ \mathbf{A}_{2,3} &= -1 \\ \mathbf{Z}_{3,3} &= 1 \\ \mathbf{Y}_{3,3} &= -1/3 = -0.33 \end{cases} \quad (2.31)$$

Rama 4: en la rama 4 hay una fuente independiente de tensión de valor $6V$ conectada entre el nodo 2 y el nodo 0. De acuerdo con 1.2 y con la tabla 2.1

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{2,4} = 1 \\ \mathbf{A}_{0,4} & \text{No existe por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{Y}_{4,4} = 1 \\ \mathbf{s}_{4,1} = 6 \end{cases} \quad (2.32)$$

Con las matrices que se obtienen al finalizar ese proceso se puede construir la ecuación 2.3, que será la ecuación matricial *tableau* del circuito, (ecuación 2.33)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0 & -1 \\ \hline 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0 & 0 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.33 & 0.00 & 0 & 0 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \hline v_1 \\ v_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 2.00 \\ 0.00 \\ \hline 0.00 \\ 6.00 \end{array} \right] \quad (2.33)$$

Finalmente, al solucionar esa ecuación se encuentran las variables del circuito:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.00 \\ -1.00 \\ -1.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3.00 \\ 3.00 \\ -3.00 \\ 6.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3.00 \\ 6.00 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

2.4. Método del *Tableau* reducido

A partir de la ecuación 2.3 se puede obtener una ecuación matricial de menor tamaño. Para ello, se despeja \mathbf{u} en la segunda ecuación y se reemplaza en la tercera:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{v} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Zi} + \mathbf{Yu} &= \mathbf{s} \\ \mathbf{Zi} + \mathbf{YA}^T \mathbf{v} &= \mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Tabla 2.3: Construcción iterativa de las matrices *Tableau*. Circuito de ejemplo 2.1

Rama número 1												
A	Z					Y					s	
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		2.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
Rama número 2												
A	Z					Y					s	
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		2.00	
	0.00	1.00	0.00	0.00		0.00	-1.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
Rama número 3												
A	Z					Y					s	
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		2.00	
	0.00	1.00	0.00	0.00		0.00	-1.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	1.00	0.00		0.00	0.00	-0.33	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
Rama número 4												
A	Z					Y					s	
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00		2.00	
	0.00	1.00	0.00	0.00		0.00	-1.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	1.00	0.00		0.00	0.00	-0.33	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	1.00		6.00	

Las incógnitas de la nueva ecuación matricial son \mathbf{i} y \mathbf{v} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{YA}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Una vez obtenidas las incógnitas \mathbf{i} y \mathbf{v} puede emplearse la ecuación 2.35 para obtener las tensiones de rama \mathbf{u} .

Ejemplo 2.2 (Método del *Tableau* reducido)

Podemos aplicar la ecuación 2.37 al circuito del ejemplo 2.1. Para ello, utilizamos las matrices \mathbf{A} , \mathbf{Z} , \mathbf{Y} y \mathbf{s} obtenidas en la última fila de la tabla 2.3. La ecuación resultante es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & -0.33 & 0.33 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 2.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 6.00 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Es interesante comparar las ecuaciones 2.33 y 2.38. Ambas ecuaciones permiten analizar el circuito, pero claramente la segunda ecuación es más simple, porque tiene menos variables incógnitas; al haber eliminado el vector de tensiones de rama \mathbf{u} se ha obtenido un sistema de ecuaciones igualmente válido pero más pequeño.

El precio (computacional) de esta simplificación consiste en que necesitamos hacer una operación matemática más (ecuación 2.35) para obtener \mathbf{u} . Este precio es bajo si se compara con el ahorro (también computacional) que significa resolver un sistema de ecuaciones de menor dimensión.

Capítulo 3

Análisis de nodos modificado

El método de análisis de nodos modificado (MNA¹) busca un sistema de ecuaciones en donde las incógnitas sean las tensiones nodales \mathbf{v} y el número más pequeño de corrientes de rama \mathbf{i} posible. Para ello, se clasifican las ramas en dos grupos, 1 y 2. En el grupo 1 quedarán todas las ramas cuyas corrientes se puedan eliminar y en el grupo 2 estarán las ramas cuyas corrientes son indispensables.

Los dos grupos de ramas se clasifican según el siguiente criterio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Grupo 2:} \\ \text{Ramas que contienen fuentes de tensión independientes o controladas.} \\ \text{Ramas que contienen corrientes de control para fuentes controladas.} \\ \text{Cualquier otra rama cuya corriente se desee conocer directamente.} \\ \\ \textbf{Grupo 1:} \\ \text{Todas las demás ramas.} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Al separar las matrices en los dos grupos, las matrices de la ecuación 2.3 quedan fraccionadas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} & \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} & \mathbf{Y} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} \end{array} \quad (3.2)$$

El signo $-$ en la separación de la matriz \mathbf{Y} es meramente convencional, es decir, se utiliza

¹Por sus siglas en inglés *Modified Node Analysis*.

para desarrollar las expresiones de las implementaciones más usuales, pero podría no usarse (y las ecuaciones resultantes tendrían unos signos distintos a las que aquí desarrollaremos).

Al mantener como incógnitas a las variables \mathbf{v} e \mathbf{i}_2 la ecuación matricial que debe resolverse tendrá la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Las submatrices deben calcularse así:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{T}_{11} & = & \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{11} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{12} \mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{T}_{12} & = & \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & = & -(\mathbf{Y}_{21} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{Y}_{22} \mathbf{A}_2^T) \\ \mathbf{T}_{22} & = & \mathbf{Z}_{22} \\ \mathbf{S}_1 & = & -\mathbf{A}_1 \mathbf{s}_1; \\ \mathbf{S}_2 & = & \mathbf{s}_2 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones, las demás variables pueden obtenerse así:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{u} & = & \mathbf{A}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_1 & = & -\mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_2 + \mathbf{Y}_{11} \mathbf{u}_1 + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{u}_2 + \mathbf{s}_1 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Por otra parte, si no hay ramas en el grupo 2 entonces \mathbf{i}_2 estaría vacío y por tanto 3.3 se reduciría a:

$$\mathbf{T}_{11} \mathbf{v} = \mathbf{S}_1 \quad (3.6)$$

3.1. Demostración

Al separar las matrices la ecuación 2.3 queda así:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & -\mathbf{Y}_{11} & -\mathbf{Y}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & -\mathbf{Y}_{21} & -\mathbf{Y}_{22} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Las condiciones con las que se construyen los grupos 1 y 2 de las ramas tienen como consecuencia que:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{11} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{Z}_{21} &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.8)$$

Para demostrar 3.8 podemos recordar que las matriz \mathbf{Z} está llena de ceros salvo en los lugares en los que un elemento deja su huella. Estas huellas están consignadas en la tabla 2.1.

Analicemos primero la diagonal de la matriz \mathbf{Z} . Nótese que $\mathbf{Z}_{j,j}$ siempre será 1 salvo cuando en la rama j hay una fuente de tensión, en cuyo caso será 0. Como las fuentes de tensión están en el grupo 2, se deduce que:

$$\mathbf{Z}_{11,j,j} = 1 \quad (3.9)$$

Analicemos ahora los elementos fuera de la diagonal de la matriz \mathbf{Z} : si $j \neq k$ la única posibilidad para que $\mathbf{Z}_{j,k} \neq 0$ sucede si la rama k contiene una corriente de control. Como las ramas que tienen corrientes de control están en el grupo 2, se deduce que:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{11,j,k} &= 1 & j \neq k \\ \mathbf{Z}_{21,j,k} &= 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Al combinar las ecuaciones 3.9 y 3.10 se obtiene 3.8. Ahora bien, al aplicar 3.8 en 3.7 se obtienen cinco ecuaciones:

$$\begin{cases} \textcircled{1}: & \mathbf{A}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{i}_2 &= \mathbf{0} \\ \textcircled{2}: & \mathbf{u}_1 - \mathbf{A}_1^T \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \textcircled{3}: & \mathbf{u}_2 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \textcircled{4}: & \mathbf{i}_1 + \mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_2 - \mathbf{Y}_{11} \mathbf{u}_1 - \mathbf{Y}_{12} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{s}_1 \\ \textcircled{5}: & \mathbf{Z}_{22} \mathbf{i}_2 - \mathbf{Y}_{21} \mathbf{u}_1 - \mathbf{Y}_{22} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{s}_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

Al despejar \mathbf{i}_1 en $\textcircled{4}$ y reemplazarla en $\textcircled{1}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= -\mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_2 + \mathbf{Y}_{11} \mathbf{u}_1 + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{u}_2 + \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{i}_1 &= -\mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{11} \mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{12} \mathbf{u}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{s}_1 = -\mathbf{A}_2 \mathbf{i}_2 \\ &\quad -\mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{11} \mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{12} \mathbf{u}_2 = -\mathbf{A}_1 \mathbf{s}_1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se pueden emplear $\textcircled{2}$ y $\textcircled{3}$ para despejar \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 en función de \mathbf{v} :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{v} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2^T \mathbf{v} \quad (3.13)$$

y obtener

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{11} \mathbf{A}_1^T \mathbf{v} + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{12} \mathbf{A}_2^T \mathbf{v} &= -\mathbf{A}_1 \mathbf{s}_1 \\ \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{11} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{12} \mathbf{A}_2^T \right) \mathbf{v} + (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_{12}) \mathbf{i}_2 &= -\mathbf{A}_1 \mathbf{s}_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

que en forma matricial se escribe así:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{11} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{12} \mathbf{A}_2^T) & (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_{12}) \\ \mathbf{Z}_{22} \mathbf{i}_2 - \mathbf{Y}_{21} \mathbf{A}_1^T \mathbf{v} - \mathbf{Y}_{22} \mathbf{A}_2^T \mathbf{v} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Por otra parte, si se introducen los valores de la ecuación 3.13 en (5) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{22} \mathbf{i}_2 - \mathbf{Y}_{21} \mathbf{A}_1^T \mathbf{v} - \mathbf{Y}_{22} \mathbf{A}_2^T \mathbf{v} &= \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{Z}_{22} \mathbf{i}_2 - (\mathbf{Y}_{21} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{Y}_{22} \mathbf{A}_2^T) \mathbf{v} &= \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

que en forma matricial se escribe así:

$$\begin{bmatrix} -(\mathbf{Y}_{21} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{Y}_{22} \mathbf{A}_2^T) & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

La combinación de las ecuaciones 3.15 y 3.17 resulta en

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{11} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{12} \mathbf{A}_2^T) & (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_{12}) \\ -(\mathbf{Y}_{21} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{Y}_{22} \mathbf{A}_2^T) & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La ecuación 3.18 es la misma ecuación 3.3 con las definiciones de 3.4, con lo que concluye la demostración.

3.2. Método de análisis de nodos modificado directo

Es posible derivar la ecuación 3.3 a partir de la descripción del circuito, sin acudir a las expresiones de la ecuación 3.4. Para ello, conviene entender el sentido del método.

El método de análisis de nodos modificado parte de la aplicación de la LCK en cada uno de los nodos que no son el de referencia. Utiliza como incógnitas todas las tensiones nodales y la menor cantidad de corrientes de rama posible. Estas *corrientes incógnitas* son las que forman parte del vector \mathbf{i}_2 .

La ecuación 3.3 puede verse también como dos ecuaciones:

$$\mathbf{T}_{11} \mathbf{v} + \mathbf{T}_{12} \mathbf{i}_2 = \mathbf{S}_1 \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{T}_{21} \mathbf{v} + \mathbf{T}_{22} \mathbf{i}_2 = \mathbf{S}_2 \quad (3.19b)$$

Mientras que la ecuación 3.19a es la aplicación de la LCK en cada uno de los nodos, la ecuación 3.19b es la colección de las ecuaciones de rama para las corrientes incógnitas.

La aplicación de la LCK en un determinado nodo es la suma algebraica de las corrientes de las ramas conectadas a dicho nodo. Por esa razón, cada una de las variables involucradas (tensiones nodales, corrientes incógnitas y corrientes de fuentes de corriente) puede incidir en más de una ocasión en la ecuación.

Dicho de otra forma: el coeficiente que acompaña a cada una de las variables involucradas en 3.19a puede depender de más de una rama. Debido a que todas las relaciones que se consideran en este capítulo son lineales, ese coeficiente será la acumulación algebraica (suma o resta) de la huella que genera cada rama por separado.

Esta es una diferencia importante entre la huella que deja un elemento en las ecuaciones del método del *Tableau* disperso y la huella que deja en las ecuaciones del método MNA: en el primero cada elemento deja una huella independiente de los demás elementos (Tabla 2.1) y en el segundo la huella es acumulativa.

Para denotar la acumulación, en este texto utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{array}{ll} X \oplus y & \text{significa: sumar a } X \text{ la cantidad } y \\ X \ominus y & \text{significa: restar a } X \text{ la cantidad } y \end{array} \quad (3.20)$$

En la ecuación 3.19b la situación es diferente. Como cada ecuación corresponde a una rama específica, en general el aporte de cada variable involucrada es independiente, no acumulativo. La excepción a esta regla se da en la fuentes de tensión controladas por tensión, porque un mismo nodo puede estar conectado tanto a la rama de la fuente como a la rama de control (sección 3.3.4).

La tabla 3.1 resume la huella de cada tipo de elemento en la ecuación 3.3. El contenido de esa tabla se desarrolla en la sección 3.3 para cada elemento por separado².

²Para simplificar la notación, tanto en la tabla como en la explicación se ha ignorado el hecho de que el nodo de referencia no aparece en las ecuaciones.

Tabla 3.1: Huellas de los elementos en el método MNA

Tipo	Rama				Rama de control				T_{11}			T_{12}			T_{21}			T_{22}			S_1			S_2		
	Gr	R	P	N	Gr	R	P	N	fila	col	H	fila	col	H	fila	col	H	fila	col	H	fila	col	H	fila	col	H
Resistor	1	j_1	p	n					p	p	$\oplus G$															
	2	j_2	p	n					n	n	$\ominus G$	p	j_2	$\oplus 1$	j_2	p	$-G$	j_2	j_2	1						
FuenteV	2	j_2	p	n								p	j_2	$\oplus 1$	j_2	p	1							j_2	1	V_f
FuenteI	1	j_1	p	n																p	1	$\ominus I_f$				
	2	j_2	p	n								p	j_2	$\oplus 1$	j_2	j_2	1							j_2	1	I_f
FuenteVControlV	2	j_2	p	n	1, 2	j_{a1}	p_a	n_a				p	j_2	$\oplus 1$	j_2	p	1									
												n	j_2	$\ominus 1$	j_2	n	-1									
												j_2	p_a	$\ominus \alpha$	j_2	p_a	$\oplus \alpha$									
FuenteVControlI	2	j_2	p	n	2	j_{a2}	p_a	n_a				p	j_2	$\oplus 1$	j_2	p	1	j_2	j_{a2}	$-\alpha$						
												n	j_2	$\ominus 1$	j_2	n	-1									
FuenteIControlV	1	j_1	p	n	1, 2	j_{a1}	p_a	n_a	p	p_a	$\oplus \alpha$															
	2	j_2	p	n	1, 2	j_{a1}	p_a	n_a	n	n_a	$\ominus \alpha$				j_2	p_a	$-\alpha$	j_2	j_2	1						
											$\oplus \alpha$				j_2	n_a	$+\alpha$									
FuenteIControlI	1	j_1	p	n	2	j_{a2}	p_a	n_a				p	j_{a2}	$\oplus \alpha$												
	2	j_2	p	n	2	j_{a2}	p_a	n_a				p	j_2	$\oplus 1$				j_2	j_{a2}	1						
												n	j_2	$\ominus 1$				j_2	j_{a2}	$-\alpha$						

3.3. Huella de cada elemento

3.3.1. Resistor

Supongamos un resistor de conductancia G que está conectado entre los nodos p y n . La huella de ese resistor en las ecuaciones MNA puede hallarse así:

Huella MNA de un resistor	
Grupo 1	Grupo 2
<p>La corriente que circula por la rama del resistor aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK:</p> $\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : G(v_p - v_n) \\ \text{Ec. nodo } n & : G(v_n - v_p) \end{cases} \quad (3.21)$ <p>Como los coeficientes de las tensiones nodales en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{11}, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{T}_{11,p,p} & \oplus G \\ \mathbf{T}_{11,p,n} & \ominus G \\ \mathbf{T}_{11,n,p} & \ominus G \\ \mathbf{T}_{11,n,n} & \oplus G \end{cases} \quad (3.22)$	<p>Supongamos que la posición de la rama del resistor en el vector \mathbf{i}_2 es j_2. En esas condiciones, la corriente que circula por la rama del resistor aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK:</p> $\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : i_{j_2} \\ \text{Ec. nodo } n & : -i_{j_2} \end{cases} \quad (3.23)$ <p>Como los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{12}, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{T}_{12,p,j_2} & \oplus 1 \\ \mathbf{T}_{12,n,j_2} & \ominus 1 \end{cases} \quad (3.24)$ <p>El resistor también aporta la siguiente ecuación de rama:</p> $\begin{cases} \text{Ec. rama } j_2 & : i_{j_2} - G(v_p - v_n) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$ <p>Como los coeficientes de las tensiones nodales en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{21}, y los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{22}, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{T}_{22,j_2,j_2} & = 1 \\ \mathbf{T}_{21,j_2,p} & = -G \\ \mathbf{T}_{21,j_2,n} & = G \end{cases} \quad (3.26)$

3.3.2. Fuente independiente de tensión

Supongamos una fuente independiente de tensión de valor V_f que está conectado entre los nodos p y n . La rama de esa fuente está, necesariamente, en el grupo 2. Supongamos que la posición de la rama en el vector \mathbf{i}_2 es j_2 . En esas condiciones, la huella de la fuente de tensión en las ecuaciones MNA puede hallarse así:

Huella MNA de una fuente independiente de tensión

Grupo 2

La corriente que circula por la rama de la fuente de tensión aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK:

$$\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : i_{j_2} \\ \text{Ec. nodo } n & : i_{j_2} \end{cases} \quad (3.27)$$

Como las corrientes incógnitas en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{12} , lo anterior significa que

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{12_{p,j_2}} & \oplus & 1 \\ \mathbf{T}_{12_{n,j_2}} & \ominus & 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

La fuente también aporta la siguiente ecuación de rama:

$$\begin{cases} \text{Ec. rama } j_2 & : v_p - v_n = V_f \end{cases} \quad (3.29)$$

Como los coeficientes de las tensiones nodales en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{21} , y los términos independientes de las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{S}_2 , lo anterior significa que

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{21_{j_2,p}} & = & 1 \\ \mathbf{T}_{21_{j_2,n}} & = & -1 \\ \mathbf{S}_{2_{j_2,1}} & = & V_f \end{cases} \quad (3.30)$$

3.3.3. Fuente independiente de corriente

Supongamos una fuente independiente de corriente de valor I_f que está conectado entre los nodos p y n . La huella de esa fuente en las ecuaciones MNA puede hallarse así:

Huella MNA de una fuente independiente de corriente	
Grupo 1	Grupo 2
<p>La corriente que circula por la fuente de corriente aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK como términos independientes:</p> $\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : -I_f \\ \text{Ec. nodo } n & : I_f \end{cases} \quad (3.31)$ <p>Como los términos independientes en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{S}_1, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{S}_{1p,1} & \ominus I_f \\ \mathbf{S}_{1n,1} & \oplus I_f \end{cases} \quad (3.32)$	<p>Supongamos que la posición de la rama de la fuente en el vector \mathbf{i}_2 es j_2. En esas condiciones, la corriente que circula por la rama de la fuente aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK:</p> $\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : i_{j_2} \\ \text{Ec. nodo } n & : -i_{j_2} \end{cases} \quad (3.33)$ <p>Como los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{12}, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{T}_{12p,j_2} & \oplus 1 \\ \mathbf{T}_{12n,j_2} & \ominus 1 \end{cases} \quad (3.34)$ <p>La fuente también aporta la siguiente ecuación de rama:</p> $\begin{cases} \text{Ec. rama } j_2 & : i_{j_2} = I_f \end{cases} \quad (3.35)$ <p>Como los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{22}, y los términos independientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{S}_2, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{T}_{22j_2,j_2} & = 1 \\ \mathbf{S}_{2j_2,1} & = -I_f \end{cases} \quad (3.36)$

3.3.4. Fuente de tensión controlada por tensión

Supongamos una fuente de tensión controlada por tensión que está conectada entre los nodos p y n . La rama de esa fuente está, necesariamente, en el grupo 2. Supongamos también que la tensión que controla a la fuente corresponde a la diferencia de potencial entre los nodos p_a y n_a y que el factor de control es α .

En esas condiciones, la huella de la fuente en las ecuaciones MNA puede hallarse así:

Huella MNA de una fuente de tensión controlada por tensión	
Grupo 2	
La corriente que circula por la rama de la fuente de tensión aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK:	
$\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : i_{j_2} \\ \text{Ec. nodo } n & : i_{j_2} \end{cases} \quad (3.37)$	
Como los corrientes incógnitas en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{12} , lo anterior significa que	
$\begin{cases} \mathbf{T}_{12p,j_2} & \oplus 1 \\ \mathbf{T}_{12n,j_2} & \ominus 1 \end{cases} \quad (3.38)$	
La fuente también aporta la siguiente ecuación de rama:	
$\begin{cases} \text{Ec. rama } j_2 & : v_p - v_n = \alpha(v_{p_a} - v_{n_a}) \end{cases} \quad (3.39)$	
Como los coeficientes de las tensiones nodales en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{21} . Además, es posible que alguno de los nodos de la rama de control sea también un nodo de la rama de la fuente. lo anterior significa que si se consideran primero los nodos de la rama de la fuente (p, n) y después los de la rama de control (p_a, n_a) se tiene:	
$\begin{cases} \mathbf{T}_{21j_2,p} & = 1 \\ \mathbf{T}_{21j_2,n} & = -1 \\ \mathbf{T}_{21j_2,p_a} & \ominus \alpha \\ \mathbf{T}_{21j_2,n_a} & \oplus \alpha \end{cases} \quad (3.40)$	

3.3.5. Fuente de tensión controlada por corriente de rama

Supongamos una fuente de tensión controlada por corriente que está conectada entre los nodos p y n . La rama de esa fuente está, necesariamente, en el grupo 2. Supongamos que la posición de la rama en el vector \mathbf{i}_2 es j_2 . Supongamos también que la corriente que controla a la fuente corresponde a una rama que tiene la posición j_{a2} en el vector \mathbf{i}_2 y que el factor de control es α .

En esas condiciones, la huella de la fuente en las ecuaciones MNA puede hallarse así:

Huella MNA de una fuente de tensión controlada por corriente Grupo 2

La corriente que circula por la rama de la fuente de tensión aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK:

$$\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : i_{j_2} \\ \text{Ec. nodo } n & : i_{j_2} \end{cases} \quad (3.41)$$

Como los corrientes incógnitas en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{12} , lo anterior significa que

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{12p,j_2} & \oplus & 1 \\ \mathbf{T}_{12n,j_2} & \ominus & 1 \end{cases} \quad (3.42)$$

La fuente también aporta la siguiente ecuación de rama:

$$\begin{cases} \text{Ec. rama } j_2 & : v_p - v_n = \alpha i_{j_{a2}} \end{cases} \quad (3.43)$$

Como los coeficientes de las tensiones nodales en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{21} y los coeficientes de las corrientes incógnita en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{22} lo anterior significa que

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{21j_2,p} & = & 1 \\ \mathbf{T}_{21j_2,n} & = & -1 \\ \mathbf{T}_{22j_2,j_{a2}} & = & -\alpha \end{cases} \quad (3.44)$$

3.3.6. Fuente de corriente controlada por tensión

Supongamos una fuente de corriente controlada por tensión que está conectada entre los nodos p y n . Supongamos también que la tensión que controla a la fuente corresponde a la diferencia de potencial entre los nodos p_a y n_a y que el factor de control es α .

En esas condiciones, la huella de la fuente en las ecuaciones MNA puede hallarse así:

Huella MNA de una fuente de corriente controlada por tensión	
Grupo 1	Grupo 2
<p>La corriente que circula por la fuente de corriente aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK como términos independientes:</p> $\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : \alpha(v_{p_a} - v_{n_a}) \\ \text{Ec. nodo } n & : -\alpha(v_{p_a} - v_{n_a}) \end{cases} \quad (3.45)$ <p>Como los coeficientes de las tensiones nodales /en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{11}, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{T}_{11,p,p_a} & \oplus & \alpha \\ \mathbf{T}_{11,p,n_a} & \ominus & \alpha \\ \mathbf{T}_{11,n,p_a} & \ominus & \alpha \\ \mathbf{T}_{11,n,n_a} & \oplus & \alpha \end{cases} \quad (3.46)$	<p>Supongamos que la posición de la rama de la fuente en el vector \mathbf{i}_2 es j_2. En esas condiciones, la corriente que circula por la rama de la fuente aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK:</p> $\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : i_{j_2} \\ \text{Ec. nodo } n & : -i_{j_2} \end{cases} \quad (3.47)$ <p>Como los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{12}, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{T}_{12,p,j_2} & \oplus & 1 \\ \mathbf{T}_{12,n,j_2} & \ominus & 1 \end{cases} \quad (3.48)$ <p>La fuente también aporta la siguiente ecuación de rama:</p> $\begin{cases} \text{Ec. rama } j_2 & : i_{j_2} = \alpha(v_{p_a} - v_{n_a}) \end{cases} \quad (3.49)$ <p>Como los coeficientes de las tensiones nodales en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{21}, y los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{22}, lo anterior significa que</p> $\begin{cases} \mathbf{T}_{21,j_2,p_a} & = & -\alpha \\ \mathbf{T}_{21,j_2,n_a} & = & \alpha \\ \mathbf{T}_{22,j_2,j_2} & = & 1 \end{cases} \quad (3.50)$

3.3.7. Fuente de corriente controlada por corriente de rama

Supongamos una fuente de corriente controlada por corriente que está conectada entre los nodos p y n . Supongamos que la corriente que controla a la fuente corresponde a una rama que tiene la posición j_{a2} en el vector \mathbf{i}_2 y que el factor de control es α .

En esas condiciones, la huella de la fuente en las ecuaciones MNA puede hallarse así:

Huella MNA de una fuente de corriente controlada por corriente	
Grupo 1	Grupo 2
La corriente que circula por la fuente de corriente aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK como términos independientes:	La corriente que circula por la rama de la fuente aporta dos términos a las ecuaciones de la LCK:
$\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : \alpha i_{j_{a2}} \\ \text{Ec. nodo } n & : -\alpha i_{j_{a2}} \end{cases} \quad (3.51)$	$\begin{cases} \text{Ec. nodo } p & : i_{j_2} \\ \text{Ec. nodo } n & : -i_{j_2} \end{cases} \quad (3.53)$
Como los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{12} , lo anterior significa que	Como los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de nodo están en la matriz \mathbf{T}_{12} , lo anterior significa que
$\begin{cases} \mathbf{T}_{12p,j_{a2}} & \oplus \alpha \\ \mathbf{T}_{12n,j_{a2}} & \ominus \alpha \end{cases} \quad (3.52)$	$\begin{cases} \mathbf{T}_{12p,j_2} & \oplus 1 \\ \mathbf{T}_{12n,j_2} & \ominus 1 \end{cases} \quad (3.54)$
	La fuente también aporta la siguiente ecuación de rama:
	$\begin{cases} \text{Ec. rama } j_2 & : i_{j_2} = \alpha i_{j_{a2}} \end{cases} \quad (3.55)$
	Como los coeficientes de las corrientes incógnitas en las ecuaciones de rama están en la matriz \mathbf{T}_{22} , lo anterior significa que
	$\begin{cases} \mathbf{T}_{22j_2,j_2} & = 1 \\ \mathbf{T}_{22j_2,j_{a2}} & = -\alpha \end{cases} \quad (3.56)$

3.4. Compendio del método

Gracias a que cada elemento tiene una huella específica, es posible obtener la ecuación matricial 3.3 que permite analizar un circuito siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Determinar n , el número de nodos del circuito.

2. Determinar r , el número de ramas del circuito.
3. Clasificar las ramas en los grupos 1 y 2 siguiendo el criterio de la ecuación 3.1
4. Determinar r_1 y r_2 , el número de ramas en los grupos 1 y 2 respectivamente.
5. Construir las matrices $\mathbf{T}_{11_{n \times n}}$, $\mathbf{T}_{12_{n \times r_2}}$, $\mathbf{T}_{21_{r_2 \times n}}$, $\mathbf{T}_{22_{r_2 \times r_2}}$, $\mathbf{S}_{1_{n \times 1}}$, $\mathbf{S}_{2_{r_2 \times 1}}$ y llenarlas de ceros.
6. Para cada una de las ramas del circuito:
 - 6.1. Identificar a qué grupo pertenece la rama.
 - 6.2. Identificar los nodos que son conectados por la rama y la orientación.
 - 6.3. Determinar la huella del elemento que hay en la rama usando la tabla 3.1
 - 6.4. Modificar las matrices \mathbf{T}_{11} , \mathbf{T}_{12} , \mathbf{T}_{21} , \mathbf{T}_{22} , \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 con la huella del elemento.
7. Ensamblar la ecuación matricial 3.3

Ejemplo 3.1 (Método MNA directo)

Analicemos ahora el circuito de los ejemplos 2.1 y 2.2.

En ese circuito solo hay una fuente independiente de tensión. De acuerdo con la ecuación 3.1 la rama de esa fuente debe formar parte del grupo 2. De acuerdo con ese mismo criterio, ninguna otra rama debe estar en el grupo 2. Por esta razón el vector \mathbf{i} de corrientes de rama se separa en

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i}_2 = [i_4] \quad (3.57)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en 3.4, las matrices de la ecuación 3.3 se llenan inicialmente con ceros y su contenido se va modificando según el contenido de cada rama. La tabla 3.9 muestra el resultado de cada paso en ese proceso: al analizar secuencialmente cada una de las ramas se modifica el contenido de las matrices \mathbf{T}_{11} , \mathbf{T}_{12} , \mathbf{T}_{21} , \mathbf{T}_{22} , \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 , tal como se explica a continuación:

Rama 1: La rama 1 está en el grupo 1 y contiene una fuente independiente de corriente de valor $2A$ conectada entre el nodo 0 y el nodo 1. De acuerdo con la tabla 3.1

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{10,1} & \text{No aparece por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{S}_{11,1} \oplus 2 \end{cases} \quad (3.58)$$

Rama 2: La rama 2 está en el grupo 1 y contiene un resistor de valor 1Ω conectada entre el nodo 1 y el nodo 0. De acuerdo con la tabla 3.1

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{110,0} & \text{No aparece por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{T}_{110,1} & \text{No aparece por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{T}_{111,0} & \text{No aparece por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{T}_{111,1} \oplus 1/1 \end{cases} \quad (3.59)$$

Rama 3: La rama 3 está en el grupo 1 y contiene un resistor de valor 3Ω conectada entre el nodo 1 y el nodo 2. De acuerdo con la tabla 3.1

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{11,1} & \oplus & 1/3 \\ \mathbf{T}_{11,2} & \ominus & 1/3 \\ \mathbf{T}_{12,1} & \ominus & 1/3 \\ \mathbf{T}_{12,2} & \oplus & 1/3 \end{cases} \quad (3.60)$$

Rama 4: La rama 4 está en el grupo 2 y contiene una fuente independiente de tensión de valor $6V$ conectada entre el nodo 2 y el nodo 0. La posición de la rama en el vector \mathbf{i}_2 es la primera, es decir, $j_2 = 1$. De acuerdo con la tabla 3.1

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{12,1} & \oplus & 1 \\ \mathbf{T}_{12,0} & & \text{No aparece por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{T}_{21,2} & = & 1 \\ \mathbf{T}_{21,0} & & \text{No aparece por ser nodo de referencia} \\ \mathbf{S}_{21,1} & = & 6 \end{cases} \quad (3.61)$$

Con las matrices que se obtienen al finalizar ese proceso se puede construir la ecuación 3.3, que será la ecuación matricial MNA del circuito:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1.33 & -0.33 & 0.00 & \\ -0.33 & 0.33 & 1.00 & \\ \hline 0.00 & 1.00 & 0.00 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ i_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2.00 \\ 0.00 \\ 6.00 \end{array} \right] \quad (3.62)$$

Es interesante comparar la ecuación 3.62 con las ecuaciones 2.33 y 2.38 que se obtienen con los métodos del *Tableau*. Claramente, el sistema de ecuaciones del método MNA es más simple.

Sin embargo, mediante el método MNA no obtenemos todas las variables del circuito. Las variables \mathbf{i}_1 y \mathbf{u} siguen siendo incógnitas. Estas variables pueden obtenerse mediante las ecuaciones 1.21 y 3.12:

$$\begin{cases} \mathbf{u} & = & \mathbf{A}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_1 & = & -\mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_2 + \mathbf{Y}_{11} \mathbf{u}_1 + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{u}_2 + \mathbf{s}_1 \end{cases} \quad (3.63)$$

Nótese que para aplicar 3.63 se necesitaría tener a disposición las matrices \mathbf{A} , \mathbf{Z}_{12} , \mathbf{Y}_{11} , \mathbf{Y}_{12} y \mathbf{s}_1 . Estas matrices no se utilizan en el método MNA directo y por tanto no se suelen construir.

Es por esa razón que, según el criterio 3.1, deben incluirse de antemano en el grupo 2 todas aquellas ramas cuyas corrientes se deseen conocer. De esta forma se asegura que todas las variables de interés sean calculadas.

En el apéndice A se muestran los resultados de la aplicación de los tres métodos (*tableau*

Tabla 3.9: Construcción iterativa de las matrices MNA. Circuito de ejemplo.

Rama número 1									
\mathbf{T}_{11}			\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2		
0.00	0.00		0.00	$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	2.00		$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	
0.00	0.00		0.00			0.00			
Rama número 2									
\mathbf{T}_{11}			\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2		
1.00	0.00		0.00	$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	2.00		$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	
0.00	0.00		0.00			0.00			
Rama número 3									
\mathbf{T}_{11}			\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2		
1.33	-0.33		0.00	$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	2.00		$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	
-0.33	0.33		0.00			0.00			
Rama número 4									
\mathbf{T}_{11}			\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2		
1.33	-0.33		0.00	$\begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	2.00		$\begin{bmatrix} 6.00 \end{bmatrix}$	
-0.33	0.33		1.00			0.00			

disperso, *tableau* reducido y MNA) en una colección de ejemplos formados por circuitos simples. Si el lector está interesado en preparar sus propias rutinas para la implementación de los tres métodos (¡debería estarlo!) esos ejemplos pueden ser de utilidad para contrastar sus resultados.

Parte II

Resistores no lineales

Capítulo 4

Conceptos básicos

Es común que se inicie el estudio de los circuitos eléctricos empleando redes que incluyen resistores pasivos no lineales e invariantes en el tiempo y fuentes de tensión y corriente independientes y de valor constante; sin embargo, también es común que las propiedades de tales resistores y fuentes no sean especificadas claramente, y por tanto no se identifiquen. Este capítulo tiene por objetivo principal delimitar el tipo de circuitos no lineales con los que se trabajará en el texto, identificando las propiedades de los elementos de circuitos que se emplearán.

4.1. Elemento de Circuitos de Dos Terminales

Para efectos de la teoría de Circuitos, un elemento de circuitos de dos terminales es un dispositivo genérico con dos puntos de conexión (también llamados terminales) entre los cuales puede existir una tensión eléctrica $v(t)$ y a través de los cuales puede circular una corriente $i(t)$. Si bien es cierto que un elemento de circuitos puede tener más de dos terminales, en este texto limitaremos el análisis al caso elemental de dos terminales, y al referirnos a un elemento de circuitos, estaremos hablando en realidad de un *elemento de circuitos de dos terminales*.

En la figura 4.1 se muestra el símbolo que se usará en este texto para identificar uno de tales elementos, incluyendo la nomenclatura usada para la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$. Es indispensable insistir en la convención de signos implícita en la figura: se asume que la corriente está entrando por el terminal marcado como positivo.

Usando esta convención se puede calcular la potencia instantánea consumida por el elemento $p_c(t)$ como

$$p_c(t) = v(t) \times i(t) \tag{4.1}$$

y la potencia instantánea entregada por el elemento $p_e(t)$ como

$$p_e(t) = -v(t) \times i(t) \tag{4.2}$$

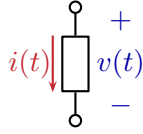


Figura 4.1: Elemento genérico de circuitos de dos terminales.

En esencia, lo que diferencia un elemento de circuitos de otro, es la relación que existe entre la tensión presente entre sus terminales y la corriente que lo atraviesa, es decir su relación tensión-corriente. Dicha relación está caracterizada por ciertas propiedades, que resultan ser las mismas propiedades de los elementos de circuitos, según se explica en la sección 4.2.

4.2. Propiedades de los Elementos de Circuitos

De lo anterior se desprende que un elemento de circuitos está caracterizado por su relación tensión-corriente; algunos elementos tienen una relación tensión-corriente tal, que puede trazarse en una gráfica de tensión contra corriente; dicha gráfica se conoce como la característica $v-i$ del elemento. En ocasiones se invierten los ejes para trazar una gráfica de corriente contra tensión, resultando entonces la característica $i-v$ del elemento (ver figura 4.2).

Ejemplo 4.1 (Característica v-i)

Un elemento cuya relación tensión corriente sea de la forma

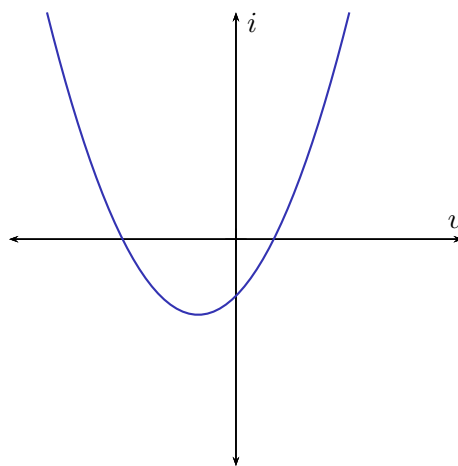
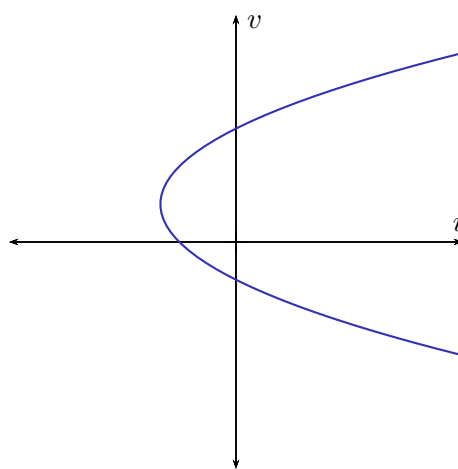
$$v(t) = \frac{di(t)}{dt} \quad (4.3)$$

no tiene una característica v-i que lo defina, porque un determinado valor de corriente no tiene asignado un único valor de tensión, sino que éste depende de la forma de la señal de corriente.

Las siguientes son propiedades de las relaciones tensión corriente de los elementos de circuitos, algunas de las cuales sólo tienen sentido para aquellos elementos que poseen una característica v-i.

4.2.1. Variación en el Tiempo

Una relación tensión corriente es invariante en el tiempo si es la misma para cada instante de tiempo. En caso contrario, la relación será variante en el tiempo.

(a) Característica $v - i$ (b) Característica $i - v$ Figura 4.2: Ejemplo de características $v - i$ e $i - v$

Ejemplo 4.2 (Relación $v - i$ invariante en el tiempo)

Supóngase un elemento de circuitos cuya relación tensión corriente es de la forma

$$v(t) = 10 \times i(t) \quad (4.4)$$

su característica $i - v$ se muestra en la figura 4.3 y corresponde a un resistor lineal (m es la pendiente de la recta).

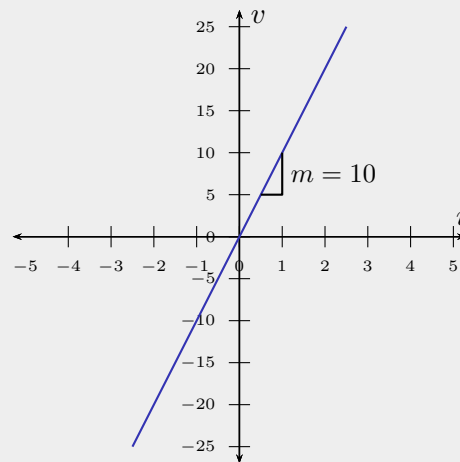


Figura 4.3: Característica $i - v$ de un resistor lineal

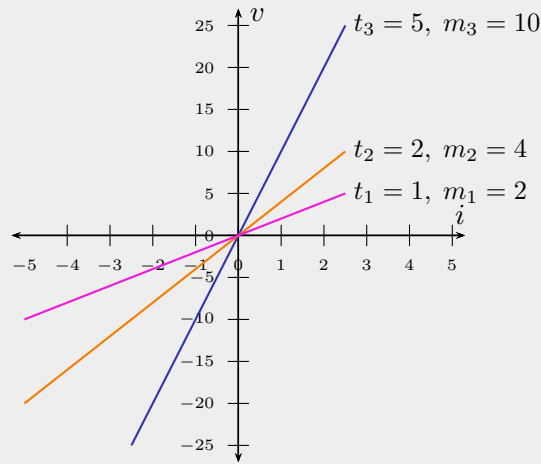
Aún cuando $i(t)$ puede ser una corriente variante en el tiempo, la relación que existe entre la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$ es fija. Tal relación es invariante en el tiempo.

Ejemplo 4.3 (Relación $v - i$ variante en el tiempo)

Supóngase un elemento de circuitos cuya relación tensión corriente es de la forma

$$v(t) = 2 \times t \times i(t) \quad (4.5)$$

dicha relación correspondería a un resistor variante en el tiempo. La figura 4.4 muestra como su característica $i - v$ es distinta para cada instante de tiempo. Nótese que a cada instante de tiempo t_1, t_2, t_3, t_4 le corresponde una recta de pendiente m_1, m_2, m_3, m_4 . Tal relación es variante en el tiempo.

Figura 4.4: Característica $i - v$ de un resistor variante en el tiempo

4.2.2. Memoria

Un elemento de circuitos tiene memoria si su relación tensión corriente está determinada por sucesos pasados. Expresado en otra forma, si a un determinado estímulo (corriente o tensión) la respuesta producida (tensión o corriente) depende de las condiciones previas del elemento dicho elemento posee memoria. Por su naturaleza, un elemento de circuitos con memoria no tiene una característica $v - i$ que lo defina.

Ejemplo 4.4 (Memoria)

Supóngase un elemento de circuitos cuya relación tensión corriente sea de la forma

$$v(t) = \int_0^t i(t) dt \quad (4.6)$$

Supónganse también dos posibles estímulos:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 2 \\ i_2(t) &= t \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para el instante de tiempo $t = 2s$ los estímulos de corriente valen ambos $i_1(2) = i_2(2) = 2A$, pero las respuestas de tensión de tensión son distintas

$$\begin{aligned} v_1(2) &= 4V \\ v_2(2) &= 2V \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tal elemento tiene memoria, porque su comportamiento depende de sus estados previos.

4.2.3. Pasividad

Un elemento de circuitos es pasivo si la única potencia instantánea positiva que puede entregar es parte de aquella que previamente ha almacenado. Un elemento de circuitos que no sea pasivo es un elemento activo.

Para los elementos sin memoria la definición anterior puede simplificarse, ya que su comportamiento no está condicionado por el pasado. Diremos entonces que un elemento de circuitos sin memoria es pasivo si no puede entregar potencia instantánea positiva¹.

Si un elemento de circuitos es pasivo y además posee una característica $v - i$ que lo defina, ésta debe estar en el primer y tercer cuadrante de la curva $v - i$, ya que en estos cuadrantes los signos de la corriente y la tensión son iguales, y por lo tanto su producto (que es la potencia instantánea consumida) será mayor o igual a cero (ver figura 4.5).

4.2.4. Control por tensión o por corriente

Se dice que un elemento de circuitos está controlado por tensión si su relación tensión-corriente es tal que a cada valor de tensión le corresponde un único valor de corriente. En términos matemáticos podríamos decir que un elemento de circuitos está controlado por tensión si la relación R de tensión a corriente es una función

$$v \xrightarrow{R} i \quad (4.9)$$

En forma análoga, se dice que un elemento de circuitos está controlado por corriente si su relación tensión-corriente es tal que a cada valor de corriente le corresponde un único valor de tensión. En términos matemáticos podríamos decir que un elemento de circuitos está controlado por corriente si la relación R de corriente a tensión es una función (ver figura 4.6).

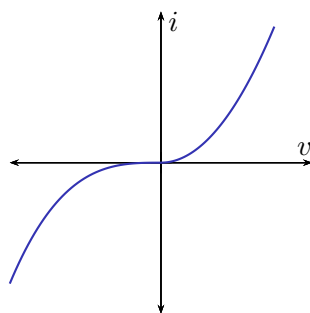
$$i \xrightarrow{R} v \quad (4.10)$$

4.2.5. Bilateralidad

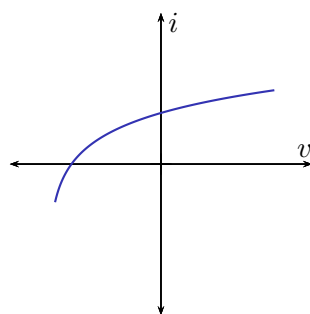
Un elemento de circuitos es bilateral si su característica $v-i$ es tal que posee simetría con respecto al origen, es decir, si al rotar la característica 180° se obtiene la misma característica original.

Esta definición de bilateralidad es equivalente a decir: Un elemento de circuitos tiene una relación tensión corriente bilateral si para toda pareja (v, i) que forme parte de dicha relación, es decir que esté sobre la curva de la característica $v - i$, la pareja $(-v, -i)$ también forma parte de la relación (ver figura 4.7).

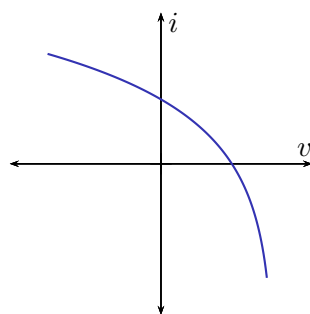
¹o lo que es igual, si sólo puede consumir potencias positivas o cero.



(a) Pasivo



(b) Activo



(c) Activo

Figura 4.5: Elementos pasivos y activos

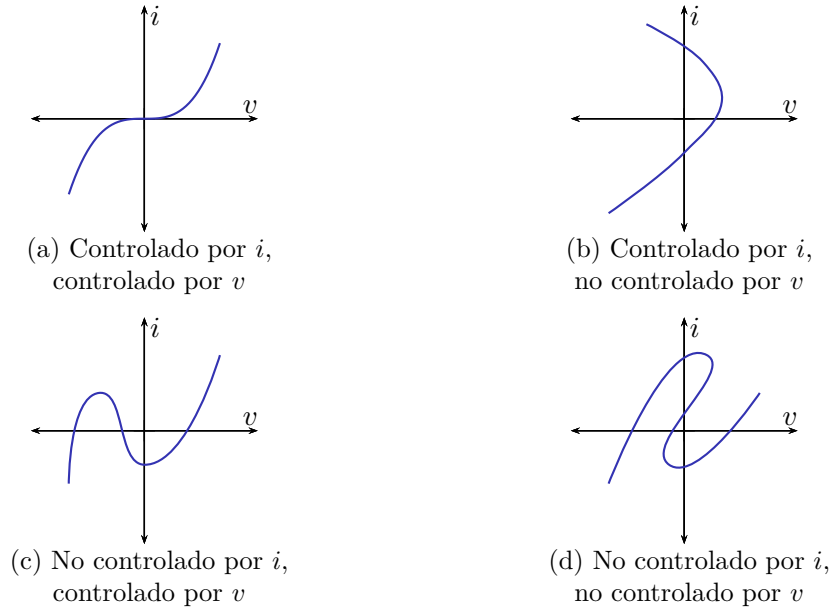


Figura 4.6: Control por tensión o corriente

4.2.6. Linealidad

Un elemento de circuitos es lineal si su relación tensión-corriente es una función lineal. Es decir, que si la relación tensión-corriente es de la forma

$$v(t) = f(i(t)) \quad (4.11)$$

con f una función, entonces deben cumplirse dos condiciones:

1. para toda pareja de corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$

$$f(i_1(t)) + f(i_2(t)) = f(i_1(t) + i_2(t)) \quad (4.12)$$

2. para toda corriente $i(t)$ y para todo escalar K

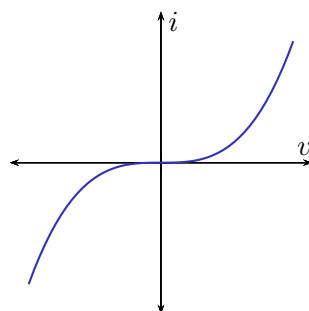
$$K \times f(i(t)) = f(K \times i(t)) \quad (4.13)$$

1)

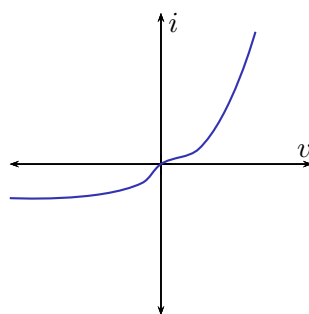
La anterior definición de linealidad puede aplicarse también a un elemento de circuitos cuya relación tensión corriente sea de la forma

$$i(t) = g(v(t)) \quad (4.14)$$

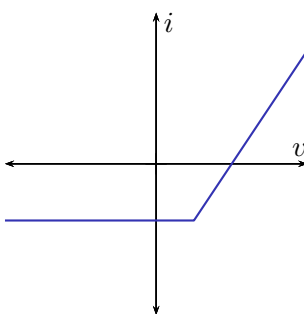
De las dos condiciones necesarias para que un elemento de circuitos sea lineal, se desprenden dos propiedades aplicables a circuitos lineales: Superposición y Proporcionalidad.



(a) Bilateral



(b) No bilateral



(c) No bilateral

Figura 4.7: Bilateralidad

4.3. Resistores

Definimos aquí un Resistor como un elemento de circuitos de dos terminales sin memoria, y cuya característica $v-i$ pasa por el origen² (ver figura 4.8).

Nótese que al usar esta definición:

1. Se admite que un resistor puede ser Variante o Invariante en el tiempo.
2. Se admite que un resistor pueda ser pasivo o activo.
3. Se admite que un resistor puede tener una característica $v-i$ bilateral o no bilateral.
4. Se admite que un resistor pueda ser controlado por tensión o por corriente.
5. Se admite que un resistor pueda o no ser lineal.
6. Se deduce que todo resistor puede representarse por una característica $v-i$; si el resistor es variante en el tiempo, su característica también lo será.
7. Se evidencia que los resistores aquí referidos son elementos teóricos de circuitos que no deben ser confundidos con el elemento físico generalmente denominado de igual forma.

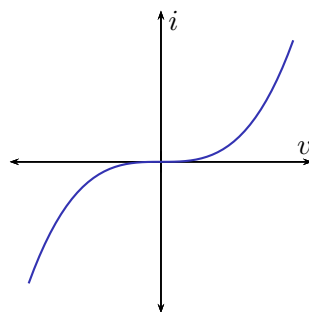
4.4. Resistores No Lineales Invariantes en el Tiempo (RNLIT)

Un caso particular de los resistores son aquellos que no varían en el tiempo, y que pueden o no ser lineales; como la no linealidad es un caso más general que la linealidad, este grupo de resistores los denominaremos aquí *Resistores No Lineales Invariantes en el Tiempo*, o **RNLIT**. La figura 4.9 muestra el símbolo utilizado para representar un RNLIT y su convención de signos.

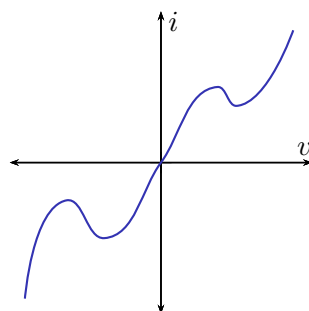
Además de las propiedades ya anotadas de los resistores, de los RNLIT puede decirse también que:

1. Tienen una única característica $v-i$ que los define completamente.
2. Tienen un subconjunto especial que son los *Resistores Pasivos Lineales Bilaterales*, que obedecen la ley de Ohm.

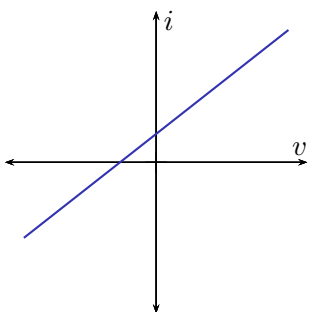
²Esta definición no coincide con la utilizada en [2], ya que allí se consideran las fuentes independientes de voltaje y corriente como resistores, y su característica $v-i$ no necesariamente pasa por el origen.



(a) Resistor



(b) Resistor



(c) No resistor

Figura 4.8: Resistores

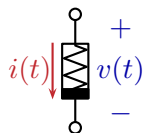


Figura 4.9: Símbolo de un RNLIT

Capítulo 5

Conexiones simples de elementos de circuitos

A partir de este momento, limitaremos nuestro análisis a los circuitos que incluyen elementos que tienen una característica $v - i$ que los define (esencialmente elementos sin memoria). En primera instancia estudiaremos como se pueden remplazar algunos elementos interconectados por otros más sencillos de comportamiento equivalente.

5.1. Conexión Serie

Por definición, dos o más elementos de circuitos están conectados en serie si por ellos circula la misma corriente. Supóngase el caso genérico de la figura 5.1 en el que n elementos están conectados en serie entre los terminales a y b . La tensión total entre los terminales a y b es la suma de las tensiones individuales de cada elemento (Ley de tensiones de Kirchhoff), lo que se puede escribir como

$$v_T(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t) \quad (5.1)$$

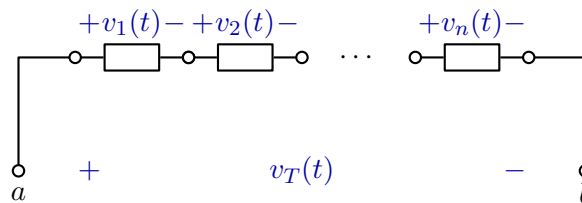


Figura 5.1: Conexión serie de n elementos

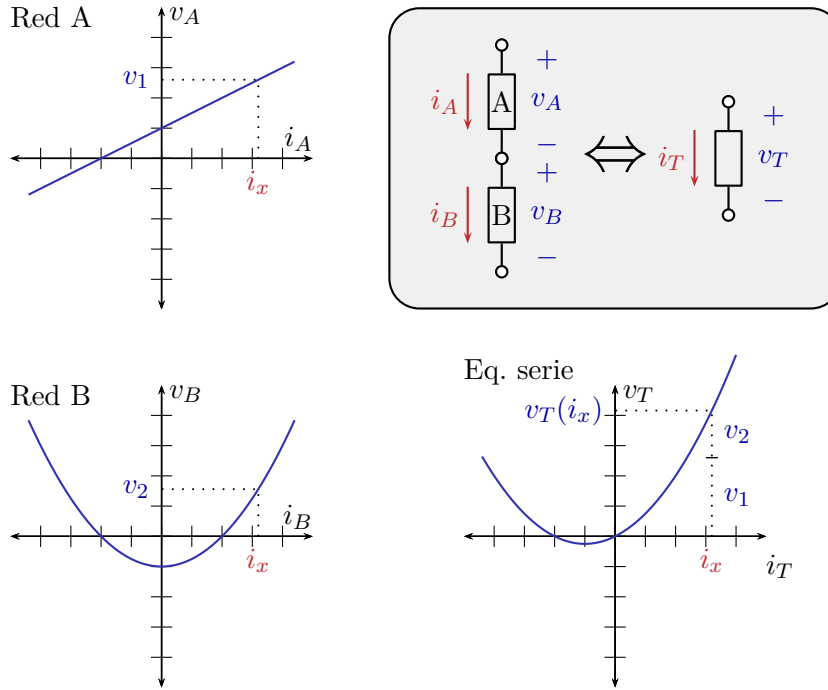


Figura 5.2: Método gráfico para obtener la característica $v - i$ de equivalentes en serie.

Si cada uno de los elementos posee una característica $i - v$, es posible encontrar la característica $i - v$ de un elemento equivalente a la serie, es decir, de un elemento cuyo comportamiento sea tal, que ninguna red que se conecte a la izquierda de los terminales a y b pueda distinguir si a la derecha de dichos terminales está la serie o el elemento equivalente. *falta: revisar la redacción*

La característica del elemento equivalente puede obtenerse sumando punto a punto los valores individuales de tensión de cada elemento de la serie, para todos los valores de corriente, tal como se muestra en la figura 5.2. El resultado de la suma puede no ser obvio para el caso de elementos no controlados por corriente, bien sea porque la respuesta de tensión sea multivaluada, o porque no este definida, como se explica en los ejemplos 5.1 y 5.2. Debe anotarse también que para elementos no bilaterales es imprescindible observar la polaridad de la conexión, antes de efectuar la suma (ver ejemplo 5.3).

Ejemplo 5.1 (Conexión serie)

Obtenga la característica $i - v$ del elemento equivalente a la serie de los elementos A y B, cuyas características son las que se muestran en la figura 5.3:

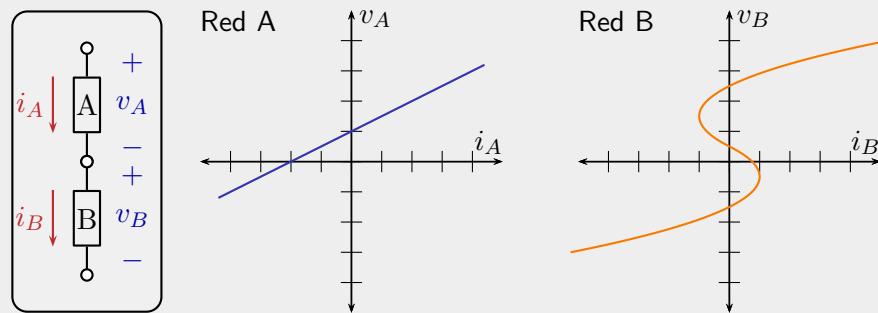


Figura 5.3: Características $i - v$ del ejemplo 5.1

Respuesta (figura 5.4): El elemento equivalente tiene una característica $i-v$ que es la suma punto a punto de las dos características, pero B es multivaluado para algunos valores de corriente (Por ejemplo, para $i_B = 0$). Por lo tanto, el elemento equivalente también será multivaluado.

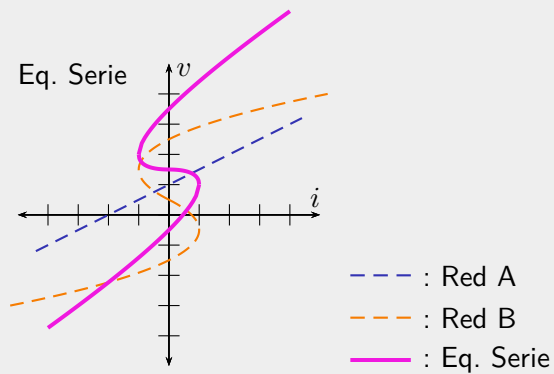


Figura 5.4: Resultado del ejemplo 5.1

Ejemplo 5.2 (Conexión serie indefinida)

Repetir el Ejemplo 5.1 pero con las características que se muestran en la figura 5.5

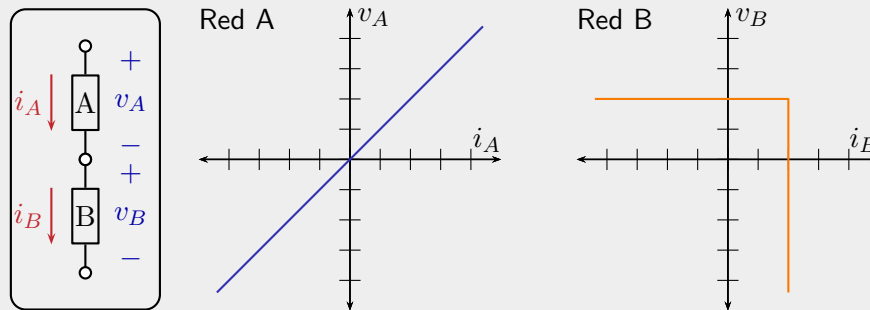


Figura 5.5: Características $i - v$ del ejemplo 5.2

Respuesta (figura 5.6): B no está definido para corrientes mayores que i_o por lo tanto el equivalente tampoco

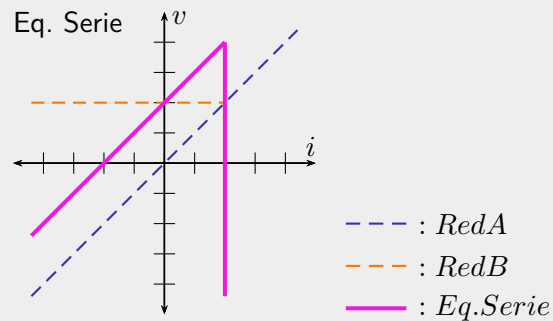


Figura 5.6: Resultado del ejemplo 5.2

Ejemplo 5.3 (Conexión serie con elementos no bilaterales)

Los resistores A y B tienen las características que se muestran en la figura 5.7. Cuál es la característica del equivalente mostrado en a y en b?

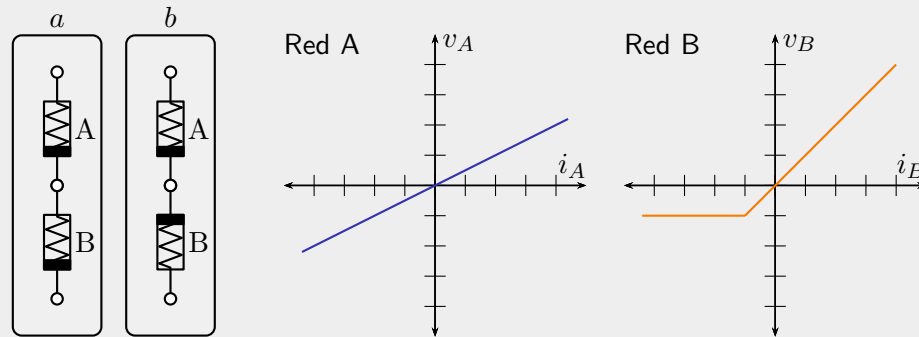


Figura 5.7: Características $i-v$ del ejemplo 5.3

Respuesta (figura 5.8): Usando la convención de signos de la figura 4.9 se encuentra que para obtener el equivalente en el caso b) debe invertirse primero la característica del resistor B (espejo vertical y horizontal) antes de sumar las gráficas.

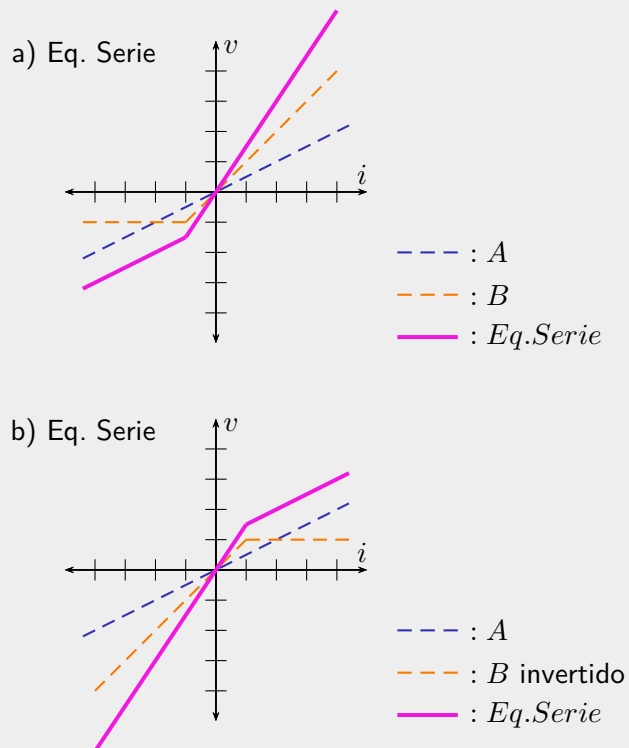
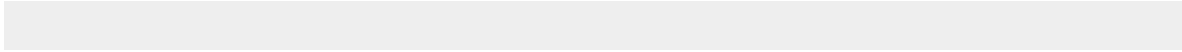
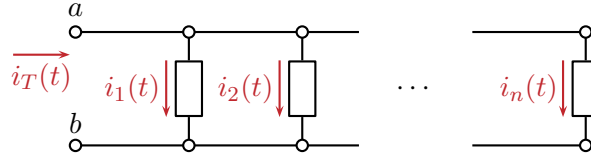


Figura 5.8: Resultados del ejemplo 5.3



Figura 5.9: Conexión paralelo de n elementos

5.2. Conexión Paralelo

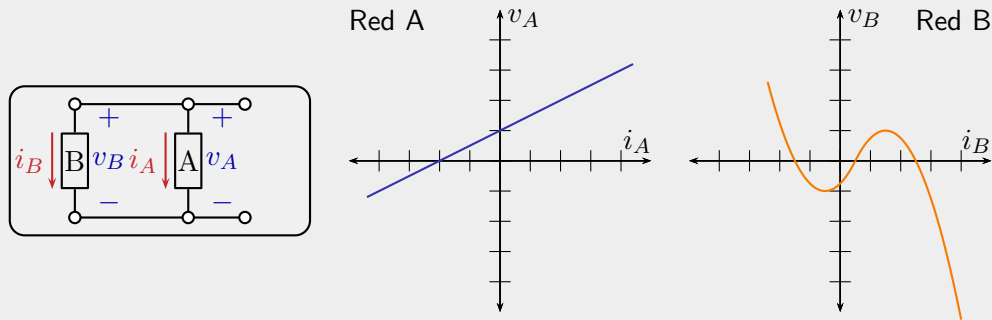
Por definición, dos o más elementos están conectados en paralelo si están conectados entre el mismo par de nodos, o lo que es igual, si entre sus terminales existe la misma tensión. En el caso genérico de la figura 5.9 n elementos están conectados en paralelo entre los terminales a y b . La corriente total que entra por el terminal a es la suma de las corrientes individuales que atraviesan a los n elementos (Ley de corrientes de Kirchhoff). Es decir,

$$i_T(t) = \sum_{j=1}^n i_j(t) \quad (5.2)$$

En forma análoga al caso serie, es posible obtener la característica de un elemento equivalente al paralelo. En este caso, es necesario sumar punto a punto los valores de individuales de corriente de cada elemento del paralelo, para todos los valores de tensión, tal como se muestra en la figura 5.10. Si alguno de los elementos no es controlado por tensión, es posible que se presenten confusiones en la suma, bien sea porque la respuesta de corriente es multivaluada, o no está definida, como se muestra en los ejemplos 5.4 y 5.4. Nuevamente, es necesario revisar la polaridad de los elementos no bilaterales antes de efectuar la suma (ver ejemplo 5.6).

Ejemplo 5.4 (Conexión paralelo)

Obtenga la característica $i - v$ del elemento equivalente al paralelo de los elementos A y B, cuyas características son las que se muestran en la figura 5.11.

Figura 5.11: Características $i - v$ del ejemplo 5.4

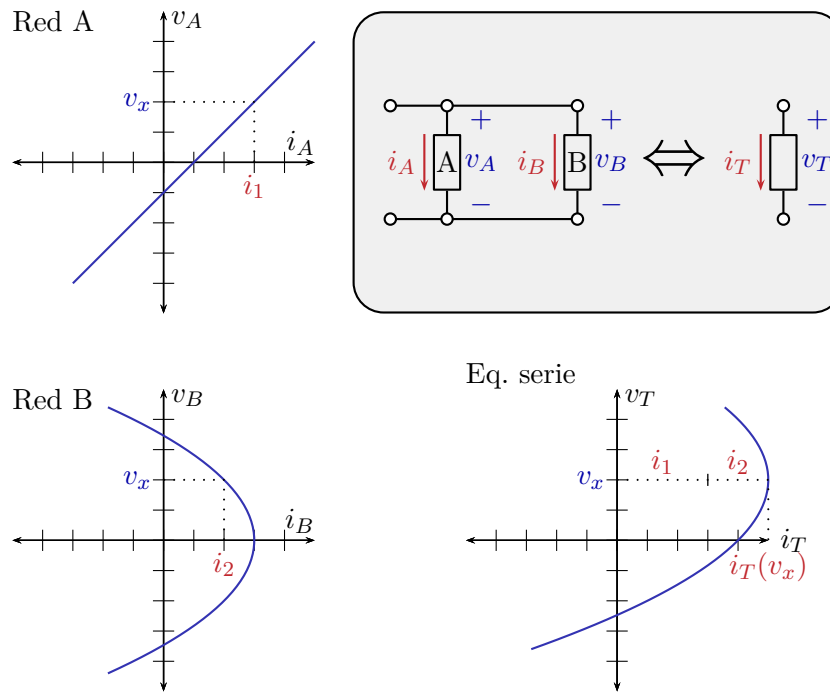


Figura 5.10: Método gráfico para obtener la característica $v-i$ de equivalentes en paralelo

Respuesta (Figura 5.12): El elemento equivalente tiene una característica $i-v$ que es la suma punto a punto de las dos características, pero B es multivaluado para algunos valores de tensión (por ejemplo en $v = 0$). Por lo tanto, el elemento equivalente también será multivaluado.

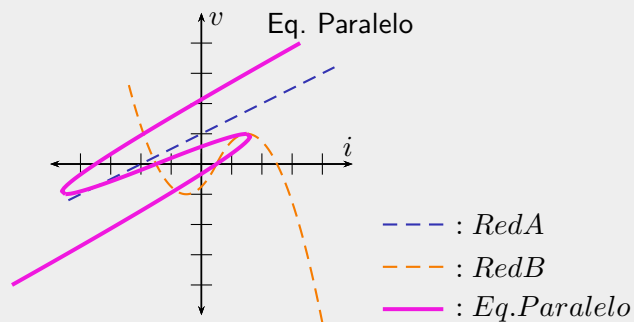


Figura 5.12: Resultados del ejemplo 5.4

Ejemplo 5.5 (Conexión paralelo indefinida)

Repetir el ejemplo 5.4 pero con las siguientes características que se muestran en la figura 5.13:

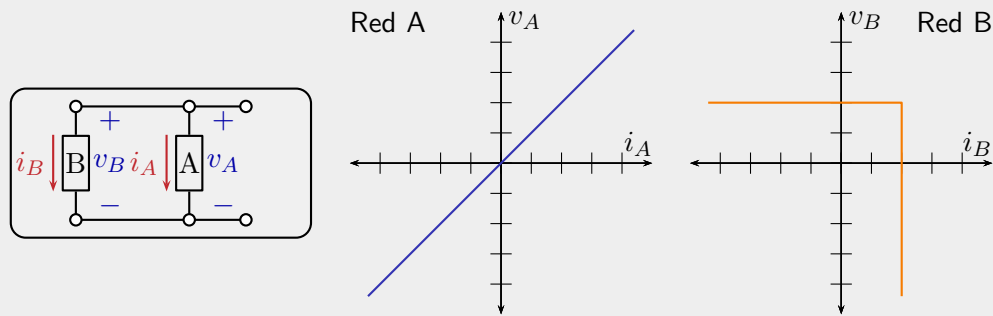


Figura 5.13: Características $i - v$ del ejemplo 5.5

Respuesta (Figura 5.14): B no está definido para tensiones mayores que v_0 por lo tanto el equivalente tampoco

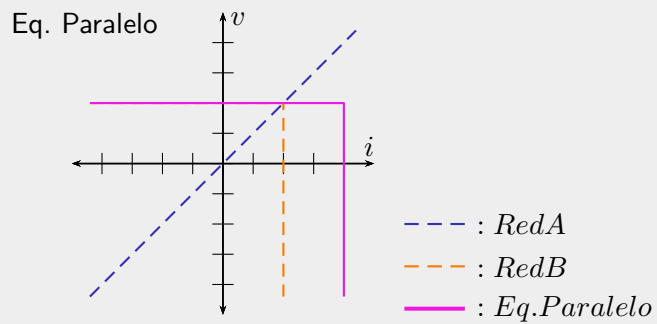


Figura 5.14: Resultados del ejemplo 5.5

Ejemplo 5.6 (Conexión paralelo con elementos no bilaterales)

Los resistores A y B tienen las características que se muestran en la figura 5.15.Cuál es la característica del equivalente mostrado en a y en b?

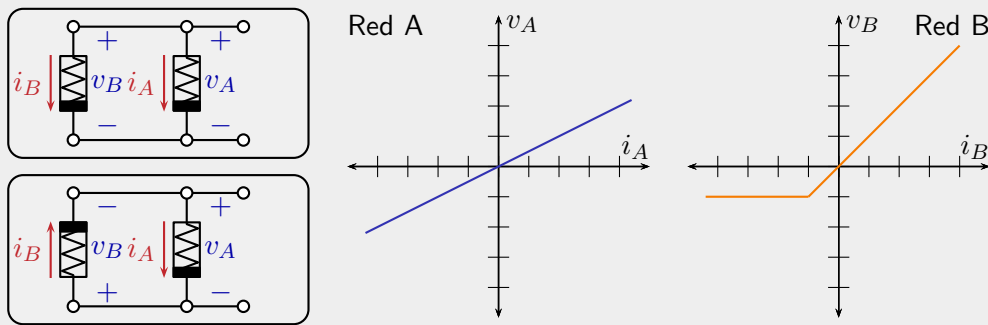


Figura 5.15: Características del ejemplo 5.6

Respuesta (Figura 5.16): Usando la convención de signos de la figura 4.9 se encuentra que para obtener el equivalente en el caso b debe invertirse primero la característica del resistor B (espejo vertical y horizontal) antes de sumar las gráficas.

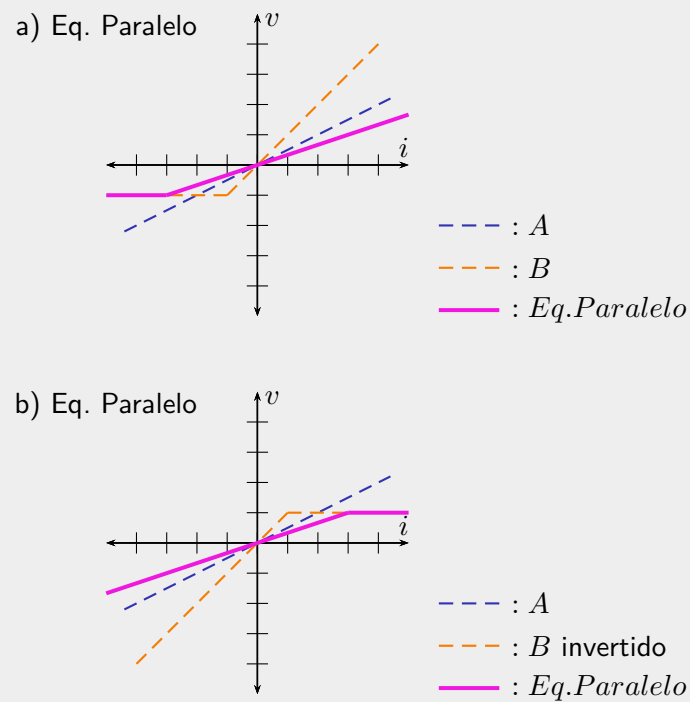


Figura 5.16: Resultados del ejemplo 5.6

Capítulo 6

RNLIT utilitarios

En este capítulo se presentan unos elementos de circuitos que servirán para representar RNLIT más sofisticados.

6.1. El Diodo Ideal

El símbolo del diodo ideal, y sus características $v - i$ e $i - v$ se presentan en la figura 6.1.

De estas características se pueden concluir varios puntos sobre el comportamiento del diodo ideal:

1. No es un elemento bilateral.
2. No es controlado por corriente.
3. No es controlado por tensión.
4. No admite tensiones positivas, y para tensiones negativas presenta una conductancia cero (resistencia infinita).
5. No admite corrientes negativas, y para corrientes positivas presenta una conductancia infinita (resistencia cero).
6. Según las dos conclusiones anteriores, el diodo se comporta como un circuito abierto para tensiones negativas, y como un cortocircuito para corrientes positivas.

Se dice que un diodo ideal está *polarizado en inversa* cuando se comporta como un circuito abierto, es decir, cuando entre sus terminales se presenta una tensión negativa. Por otra parte, se dice que un diodo está *polarizado en directa* cuando se comporta como un corto circuito, es decir, cuando lo atraviesa una corriente positiva.

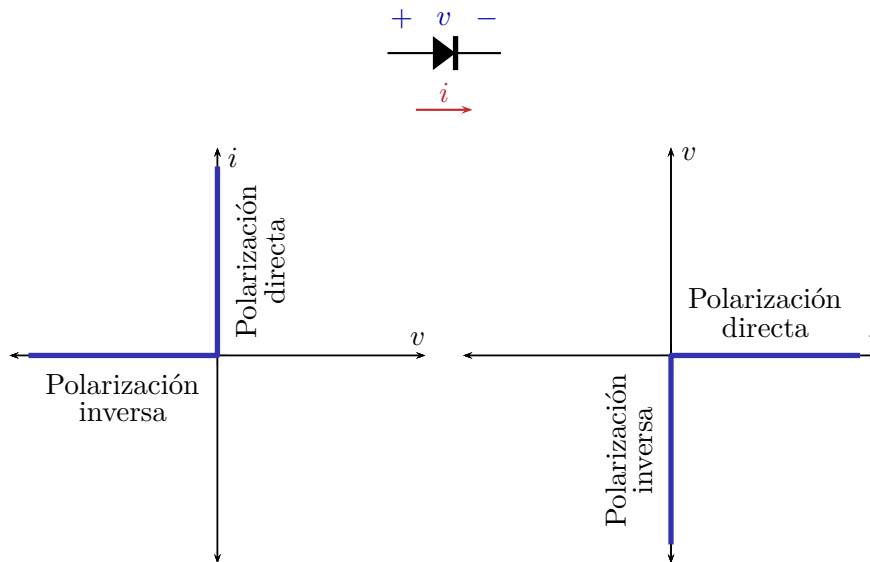


Figura 6.1: El diodo ideal y sus características $v - i$ e $i - v$

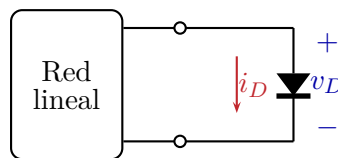


Figura 6.2: Red lineal conectada a un diodo ideal.

6.1.1. Análisis de circuitos lineales con diodos ideales

Supóngase un circuito cuyo único elemento no lineal es un diodo ideal, como el mostrado en el figura 6.2.

Dicho diodo ideal sólo tiene dos opciones: comportarse como un circuito abierto, o como un corto circuito. De esta propiedad puede derivarse la siguiente metodología de análisis para un circuito como el de la figura 6.2:

- Supóngase que el diodo está operando como un circuito abierto.
- Análcese el circuito lineal resultante con la técnica que se desee, hasta obtener la tensión entre los terminales del diodo ideal ahora representado como un circuito abierto.
- Si esta tensión es negativa (con la polaridad de la figura 4.5) la suposición inicial es correcta; si la tensión es positiva, resulta ser una condición imposible para el diodo ideal, y por tanto la suposición inicial es falsa.

- Si la suposición inicial es falsa, el diodo está operando como cortocircuito. Puede ahora reanalizarse el circuito con esta nueva condición. A manera de verificación, puede hallarse la corriente en el diodo, y ésta debe ser positiva.

Por supuesto, en la metodología descrita anteriormente puede tomarse como suposición inicial que el diodo está operando como cortocircuito y verificar si la corriente que lo atraviesa es positiva o negativa.

Si en un circuito existen dos o más diodos ideales, es necesario suponer un estado para cada uno de ellos, analizar el circuito, y verificar las condiciones de todos ellos. En los ejemplos 6.1 y 6.2 se presentan algunos circuitos lineales con un diodo ideal, y en el ejemplo 6.3 con más de un diodo ideal.

Es posible que en circuitos con más de un diodo existan varias combinaciones de polarización válidas; en este caso, un análisis de estado estacionario como el planteado en este texto no es suficiente para determinar el punto de operación: se requiere conocer la estabilidad de cada posible punto de operación (punto de equilibrio), lo cual implica modelar las ecuaciones dinámicas del circuito (esencialmente inductancias y capacitancias no necesariamente lineales). Este tópico se sale del alcance del presente texto, y por lo tanto no se abordará.

Ejemplo 6.1 (Circuito con un diodo ideal)

Obtégase el valor de tensión marcado como v_x en el circuito de la figura 6.3

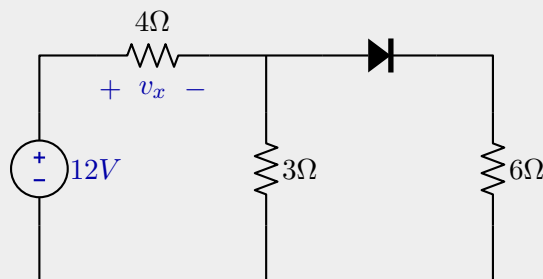


Figura 6.3: Circuito del ejemplo 6.1

Respuesta: como el circuito incluye un diodo ideal, suponemos un estado para éste, por ejemplo lo suponemos en polarización directa (como un cortocircuito) y analizamos el circuito resultante (figura 6.4):

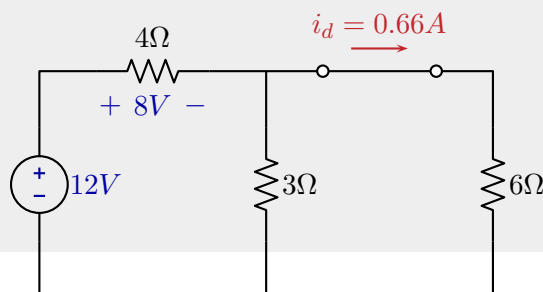


Figura 6.4: Circuito del ejemplo 6.1 con diodo en polarización directa

La corriente que circula por el diodo (ahora representado como un cortocircuito) es positiva, y por lo tanto la suposición inicial fue correcta. Se concluye entonces que el valor de tensión buscado es

$$v_x = 8V \quad (6.1)$$

Ejemplo 6.2 (Circuito con un diodo ideal)

Obtégase el valor de tensión marcado como v_x en el circuito de la figura 6.5

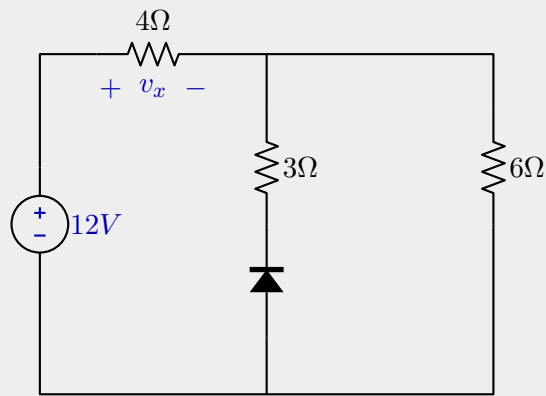


Figura 6.5: Circuito del ejemplo 6.2

Respuesta: como el circuito incluye un diodo ideal, suponemos un estado para éste, por ejemplo lo suponemos en polarización directa (como un cortocircuito) y analizamos el circuito resultante (figura 6.6):

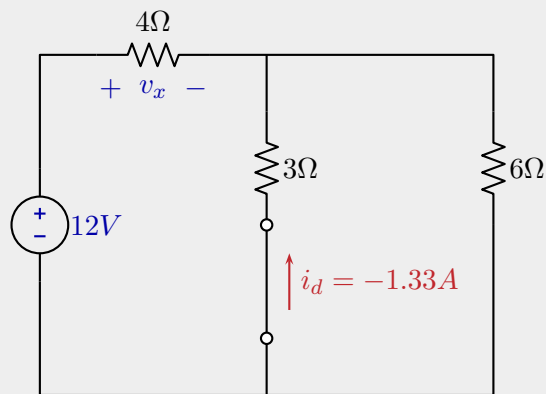


Figura 6.6: Circuito del ejemplo 6.2 con diodo en polarización directa

La corriente que circula por el diodo (ahora representado como un cortocircuito) es negativa, y por lo tanto la suposición inicial fue incorrecta. Debemos entonces suponer que el diodo está

polarizado en inversa (como un circuito abierto), en cuyo caso el circuito resultante es (figura 6.7):

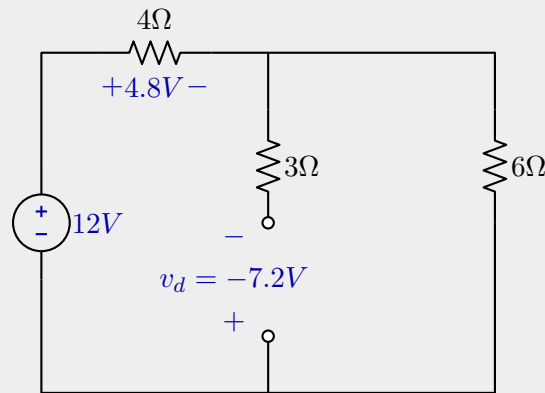


Figura 6.7: Circuito del ejemplo 6.2 con diodo en polarización inversa

La tensión presente en el diodo (ahora representado como un circuito abierto) es negativa. Se concluye entonces que el valor de tensión buscado es:

$$v_x = 4.8V \quad (6.2)$$

Ejemplo 6.3 (Circuito con dos diodos ideales)

Obtégase el valor de tensión marcado como v_x en el circuito de la figura 6.8

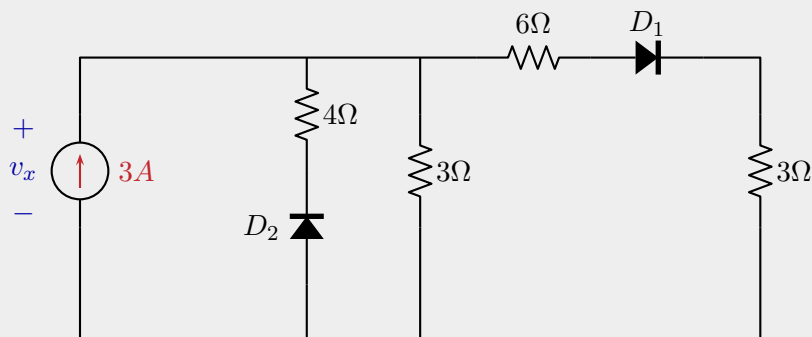


Figura 6.8: Circuito del ejemplo 6.3

Respuesta: como el circuito incluye dos diodos ideales, suponemos un estado para cada uno de ellos, por ejemplo lo suponemos en polarización directa (como un cortocircuito) y analizamos el circuito resultante (Figura 6.9):

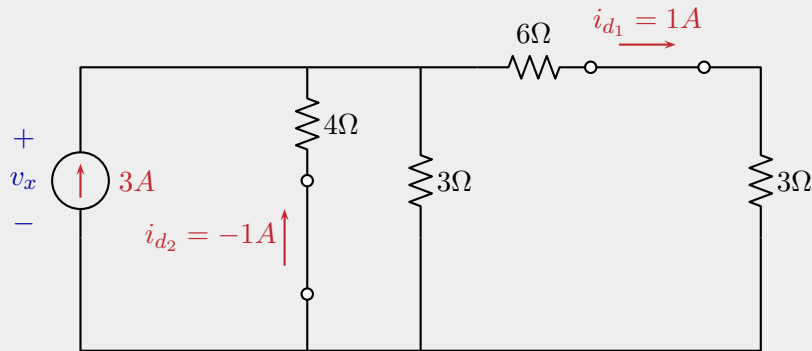


Figura 6.9: Circuito del ejemplo 6.3. Primera suposición.

La corriente que circula por el diodo 1 es positiva, pero la del diodo 2 es negativa, por lo tanto es necesario cambiar la suposición inicial. Al suponer el diodo 1 en polarización directa, y el diodo 2 en polarización inversa el circuito resultante es (Figura 6.10):

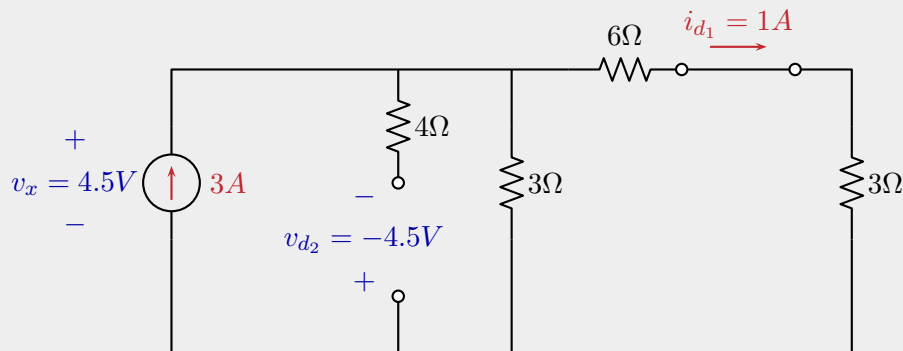


Figura 6.10: Circuito del ejemplo 6.3. Segunda suposición.

La corriente que circula por el diodo 1 es positiva y la tensión presente en el diodo 2 es negativa, por lo tanto las suposiciones ahora son correctas. Al analizar las otras dos posibles condiciones de los diodos se encuentran que éstas no son posibles, y por lo tanto se concluye entonces que el valor de tensión buscado es

$$v_x = 4.5V \quad (6.3)$$

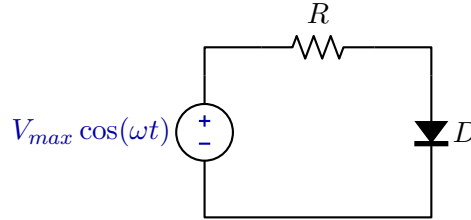
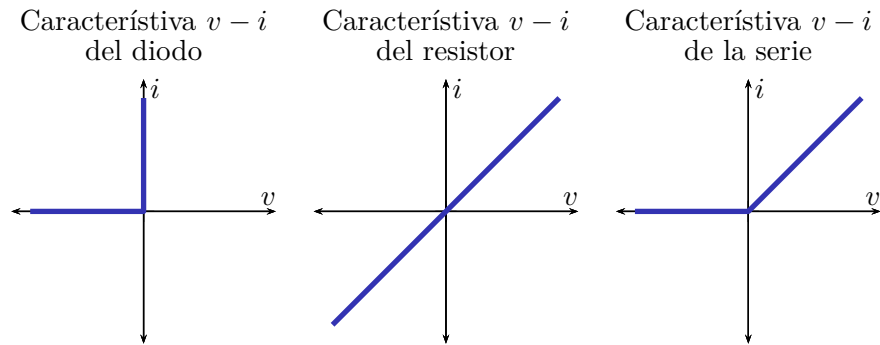


Figura 6.11: Rectificador de media onda

Figura 6.12: Característica $v - i$ del circuito rectificador de media onda

6.1.2. El rectificador de media onda

En este numeral presentaremos un circuito especial cuyo estudio no consiste en un análisis D.C., debido a que cuenta con una fuente de tensión de valor variable. El circuito se muestra en la figura 6.11 y consta de : una fuente independiente de tensión, un diodo ideal y un resistor lineal de carga.

La tensión de la fuente es de la forma

$$v_f(t) = V_{max} \cos(\omega t) \quad (6.4)$$

En la figura 6.12 se muestran las características $v - i$ del diodo ideal, del resistor lineal, y de la serie de los dos. En la figura 6.13 se ha tomado la curva $v_f(t)$ vs t y la característica de la serie para obtener la curva $i(t)$ vs t .

Nótese que la presencia del diodo ha eliminado la posibilidad de que circulen corrientes negativas por la carga; esta característica hace que se denomine el circuito de la figura 6.11 un *rectificador*. Este rectificador en particular se llama *de media onda* porque elimina medio ciclo; otro tipo de rectificador de media onda se muestra en el ejemplo 6.4.

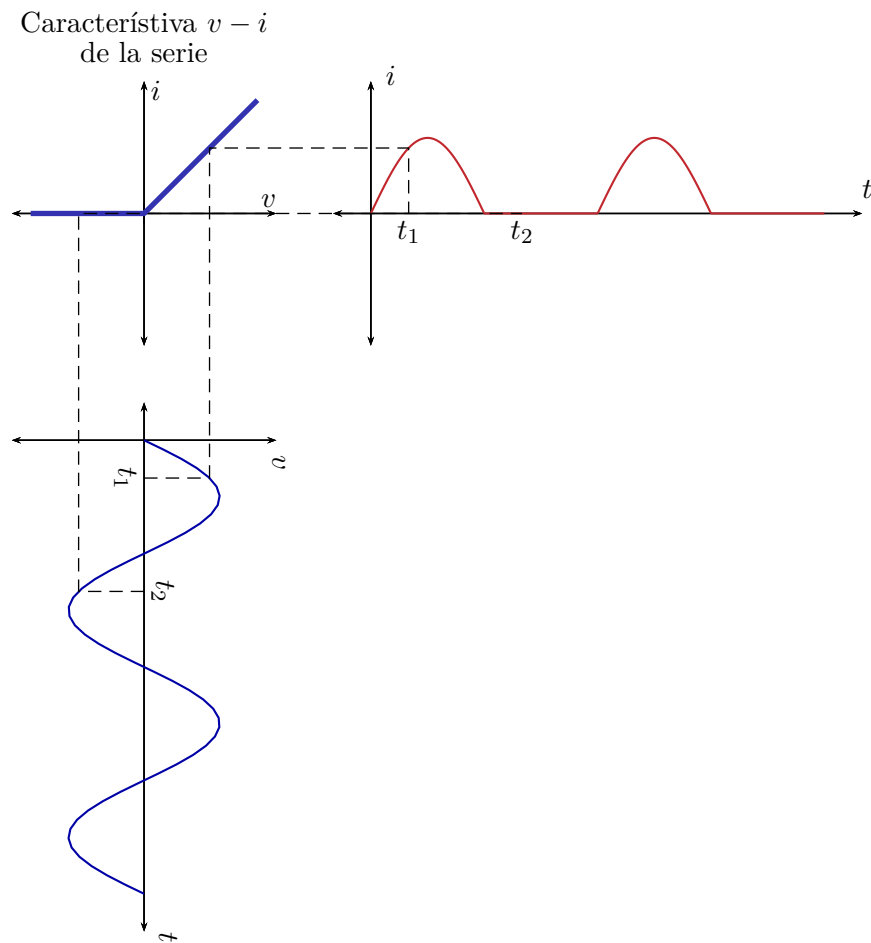


Figura 6.13: Análisis del circuito rectificador de media onda

Ejemplo 6.4 (Rectificador de media onda con un diodo real)

Obtégase la curva $i(t)$ vs t para un circuito como el de la figura 6.11 en donde el diodo ideal se ha sustituido por un diodo pn cuya característica $v - i$ es la que se muestra en la figura 6.14

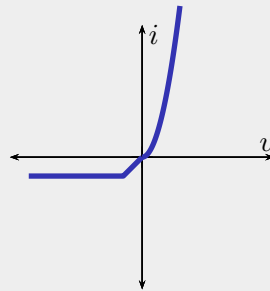


Figura 6.14:

Respuesta: la característica $v - i$ de la serie diodo pn y resistor lineal se muestra en la figura 6.15

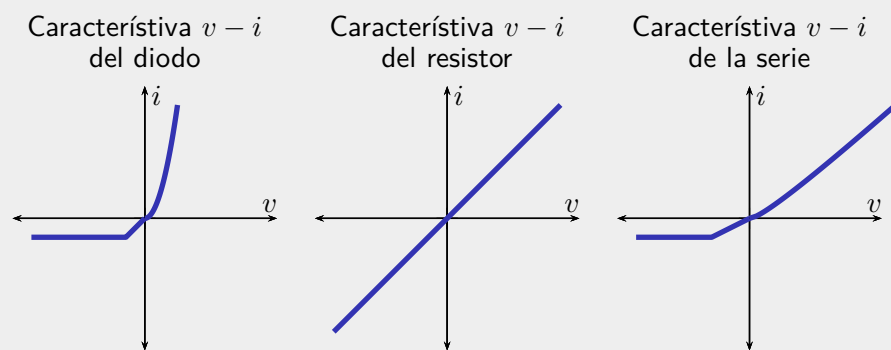
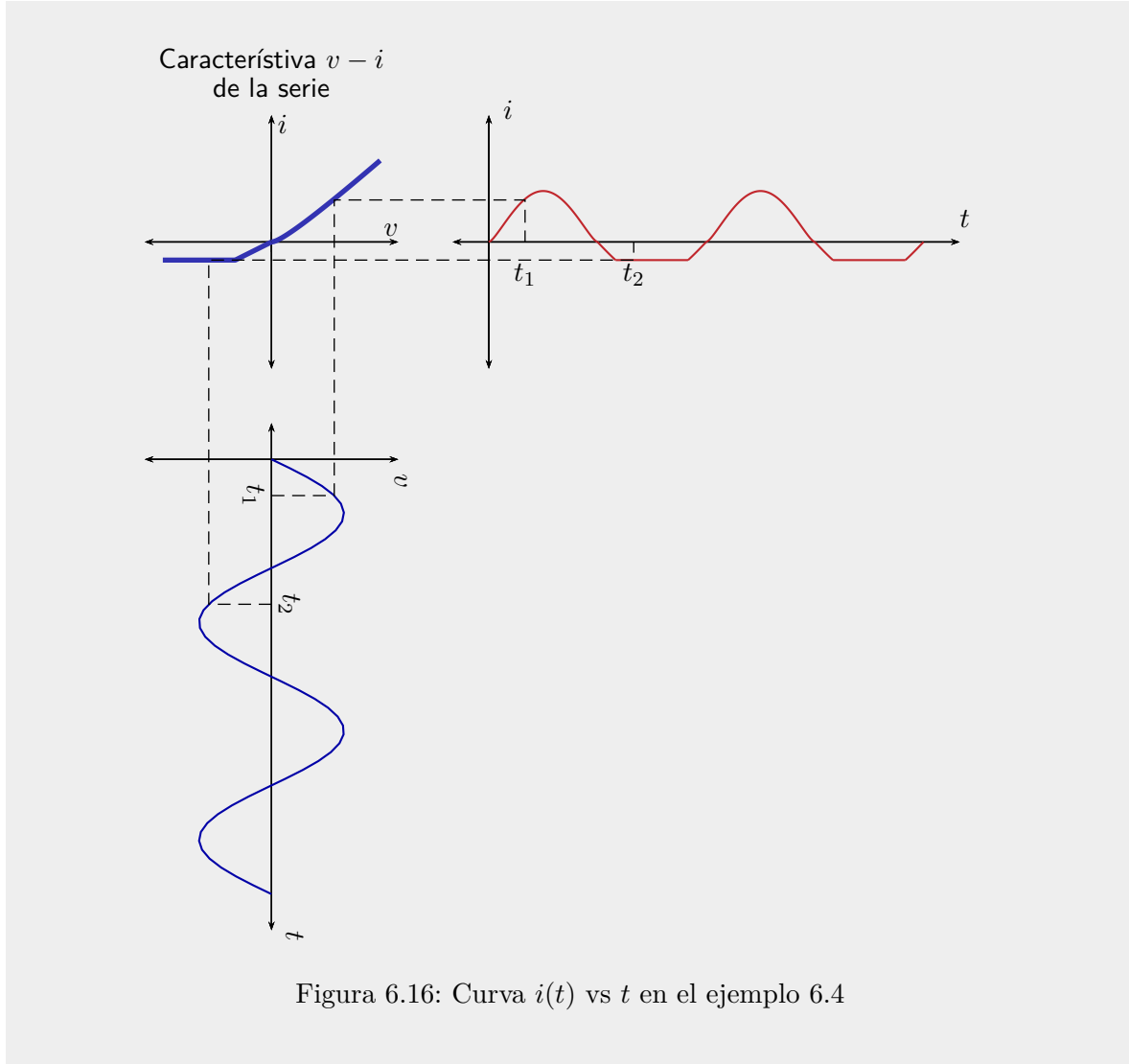


Figura 6.15: Característica de la serie diodo y resistor en el ejemplo 6.4

La curva de corriente puede obtenerse en forma similar a como se obtuvo la del rectificador de media onda con diodo ideal. El resultado se muestra en la figura 6.16



6.2. Resistores cóncavos

Definimos un resistor cóncavo como un RNLIT, cuyas características $v - i$ e $i - v$ son como las mostradas en la figura 6.17 (en la misma figura se muestra el símbolo que representa a un resistor cóncavo), es decir, cuya relación tensión-corriente es de la forma

$$i = \begin{cases} G(v - v_c) & \text{si } v > v_c \\ 0 & \text{si } v \leq v_c \end{cases} \quad (6.5)$$

o lo que es igual,

$$i = \frac{1}{2}G \left(|v - v_c| + (v - v_c) \right) \quad (6.6)$$

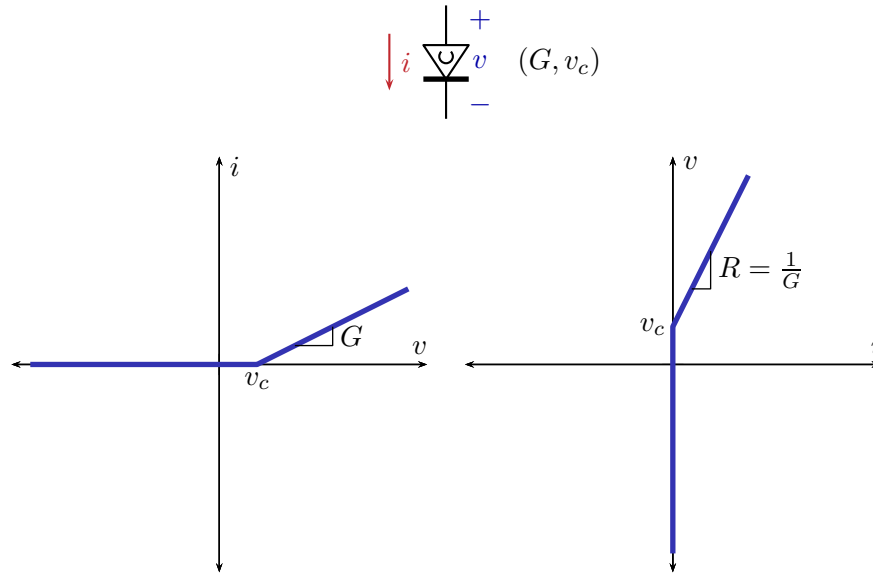


Figura 6.17: Símbolo y características $v - i$ e $i - v$ de un Resistor cóncavo

en donde G es la conductancia, y v_c la tensión de corte del resistor cóncavo.

La conductancia de un resitor cóncavo puede ser negativa, en cuyo caso sus características $v - i$ e $i - v$ tiene la forma que se muestra la figura 6.18.

Puede verse fácilmente que el circuito que se muestra en la figura 6.19 tiene una característica $v - i$ igual a la de los resistores cóncavos con conductancia positiva, por tanto pueden considerarse como equivalentes de éstos.

Esta equivalencia puede usarse para analizar circuitos que incluyan resistores cóncavos, como se muestra en el ejemplo 6.5. Nótese que el equivalente planteado en la figura 6.19 no es válido para resistores cóncavos con conductancia negativa. El ejemplo 6.6 muestra un equivalente válido para tales casos.

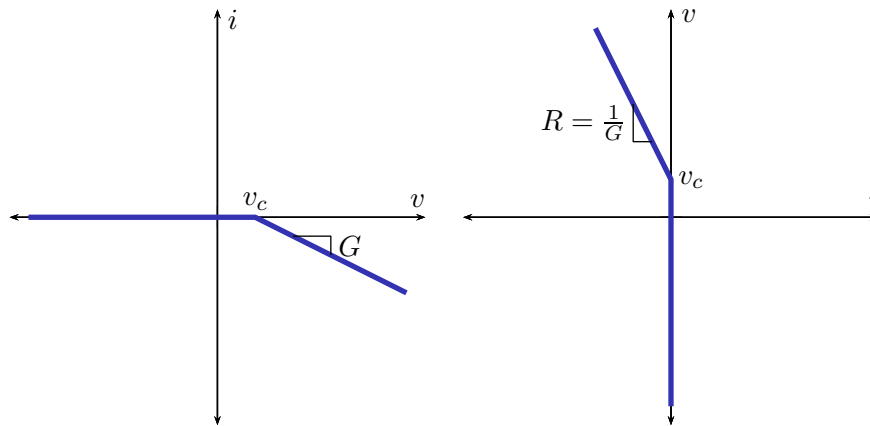


Figura 6.18: Características $v - i$ e $i - v$ de un resistor cóncavo con conductancia negativa

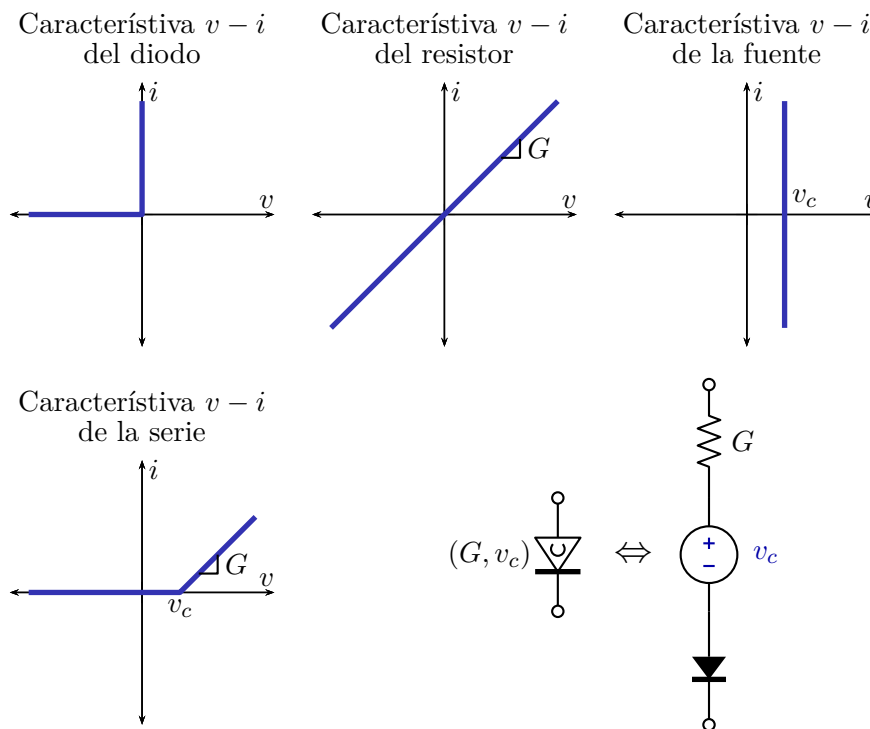


Figura 6.19: Red equivalente de un resistor cóncavo de conductancia positiva

Ejemplo 6.5 (Circuito con un resistor cóncavo)

Obtégase el valor de tensión marcado como v_x en el circuito de la figura 6.20:

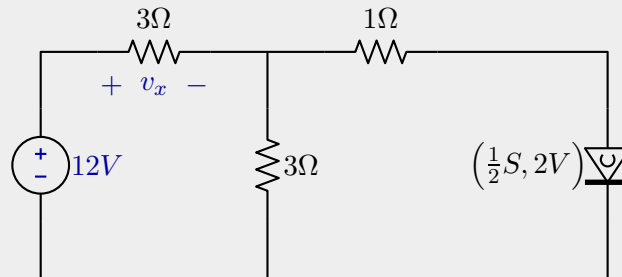


Figura 6.20: Circuito del ejemplo 6.5

Respuesta: como el circuito incluye un resistor cóncavo, lo remplazamos por su equivalente. El circuito resultante se muestra en la figura 6.21:

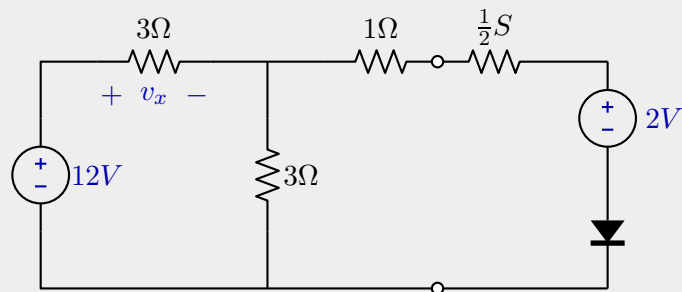


Figura 6.21: Circuito equivalente del ejemplo 6.5

Este nuevo circuito incluye elementos lineales y un único diodo ideal; para analizarlo, suponemos un estado para éste, por ejemplo suponemos que está en polarización directa (como un cortocircuito) y analizamos el circuito resultante que se muestra en la figura 6.22:

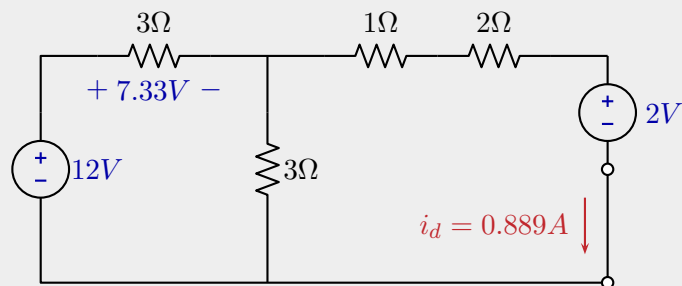


Figura 6.22: Circuito equivalente del ejemplo 6.5. Primera suposición

La corriente que circula por el diodo (ahora representado como un cortocircuito) es positiva, y por lo tanto la suposición inicial fue correcta. Se concluye entonces que el valor de tensión

buscado es

$$v_x = 7.33V \quad (6.7)$$

Ejemplo 6.6 (Resistor cóncavo de conductancia negativa)

La figura 6.23 muestra la característica $v - i$ de un resistor cóncavo cuya conductancia es negativa. Se desea construir un modelo de ese RNLIT con fuentes ideales, resistores lineales y diodos ideales.

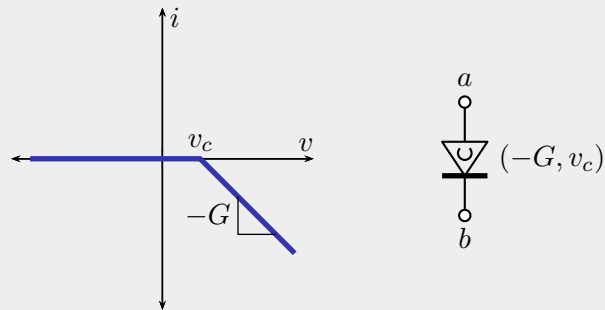


Figura 6.23: Característica $v - i$ del ejemplo 6.6

Respuesta: La característica $v - i$ del resistor cóncavo puede obtenerse a partir de la combinación en paralelo de dos elementos A y B con características $v - i$ como las que se muestran en la figura 6.24.

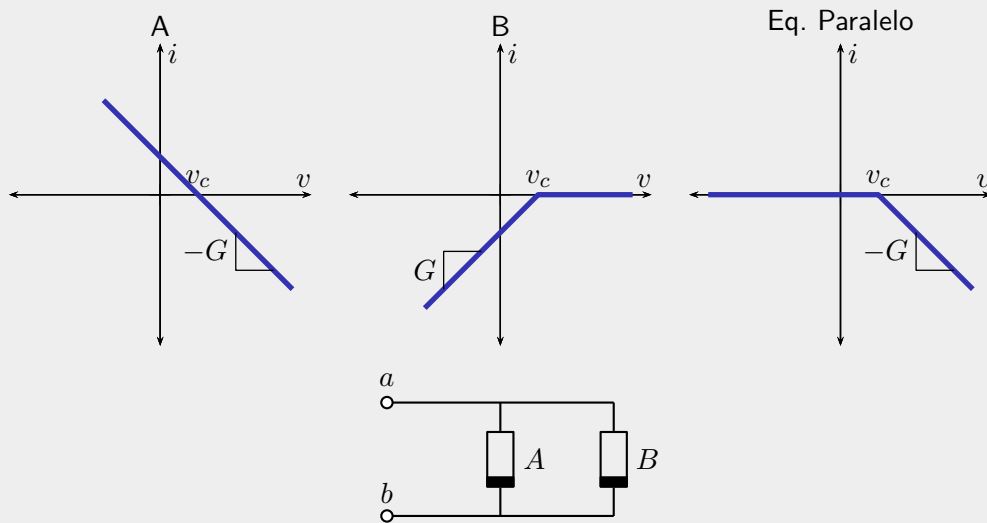


Figura 6.24: Primer equivalente del ejemplo 6.6

El elemento A puede modelarse por una combinación en serie de una fuente ideal de tensión y un resistor lineal de conductancia negativa, como se muestra en la figura 6.25.

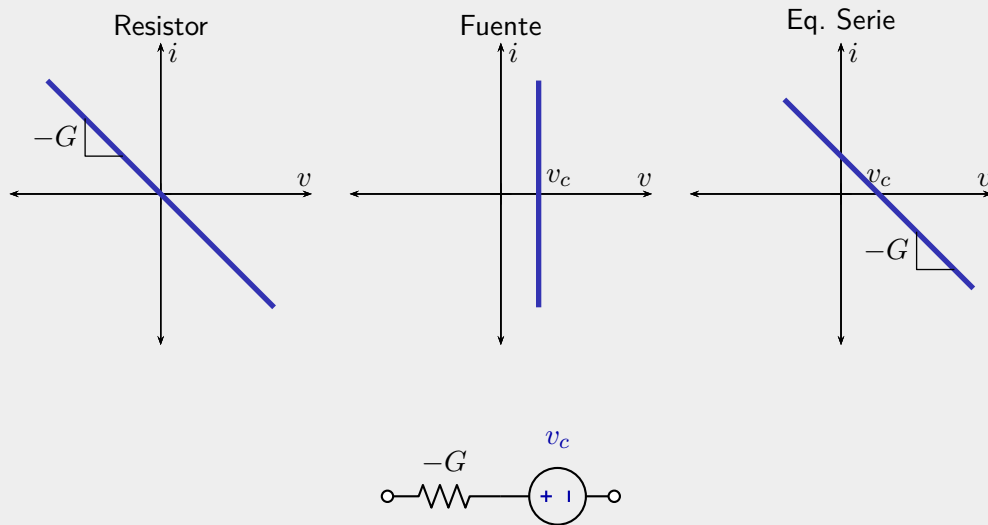


Figura 6.25: Equivalente del elemento A en el ejemplo 6.6

Por su parte, el elemento B puede modelarse por una combinación en serie de un resistor lineal, una fuente ideal de tensión y un diodo ideal:

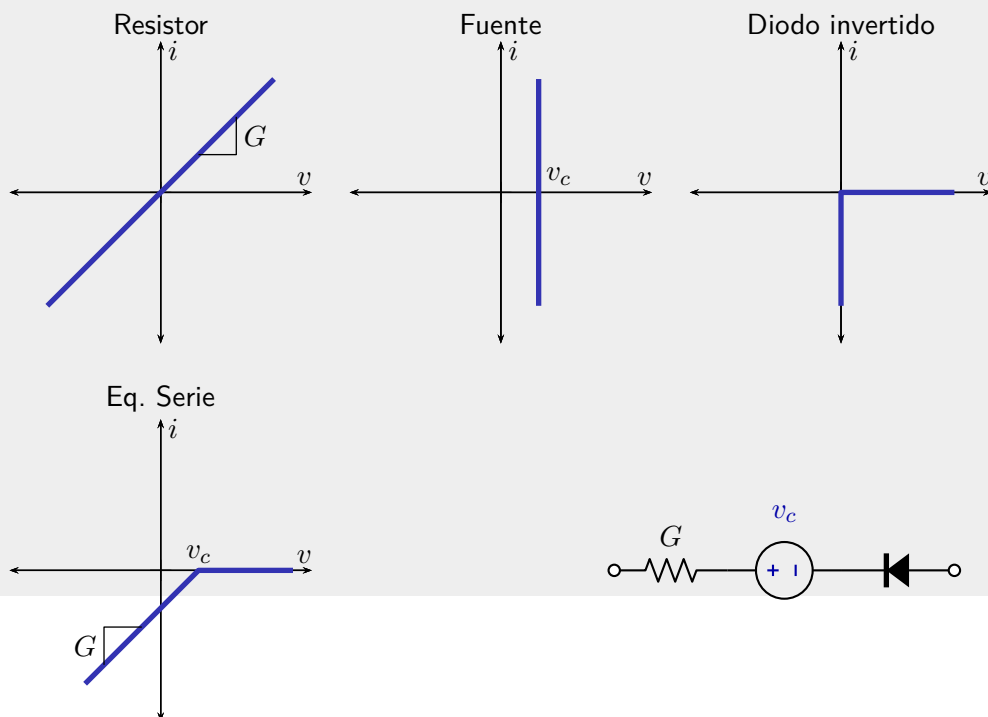


Figura 6.26: Equivalente del elemento B en el ejemplo 6.6

Por lo tanto el circuito de la figura 6.27 es un posible modelo del resistor cóncavo de conductancia negativa:

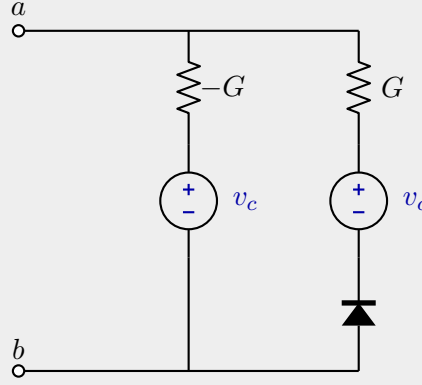


Figura 6.27: Equivalente total del ejemplo 6.6

6.3. Resistores convexos

Definimos un resistor convexo como un RNLIT, cuyas características $v - i$ e $i - v$ son como las mostradas en la figura 6.28 (en la misma figura se muestra el símbolo que representa a un resistor convexo), es decir, cuya relación tensión-corriente es de la forma

$$v = \begin{cases} R(i - i_c) & \text{si } i > i_c \\ 0 & \text{si } i \leq i_c \end{cases} \quad (6.8)$$

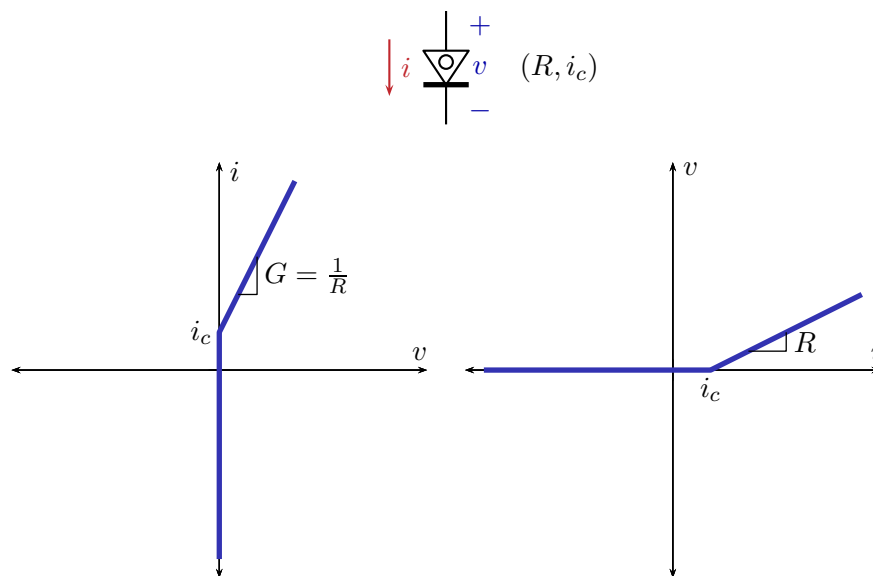
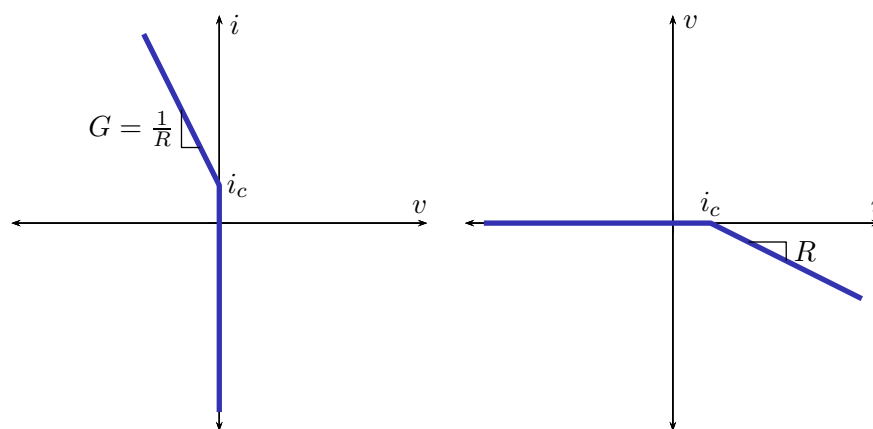
o lo que es igual,

$$v = \frac{1}{2}R(|i - i_c| + (i - i_c)) \quad (6.9)$$

en donde R es la conductancia, e i_c la tensión de corte del resistor convexo.

La resistancia de un resistor convexo puede ser negativa, en cuyo caso sus características $v - i$ e $i - v$ tiene la forma que se muestra la figura 6.29.

Puede verse fácilmente que el circuito que se muestra en la figura 6.30 tiene una característica $v - i$ igual a la de los resistores convexos con conductancia positiva, por tanto pueden considerarse como equivalentes de éstos. Esta equivalencia puede usarse para analizar circuitos que incluyan resistores convexos, como se muestra en el ejemplo 6.7. Nótese que el equivalente planteado en la figura 6.30 no es válido para resistores convexos con resistancia negativa. El ejemplo 6.8 muestra un equivalente válido para tales casos.

Figura 6.28: Símbolo y características $v-i$ e $i-v$ de un Resistor convexoFigura 6.29: Características $v-i$ e $i-v$ de un resistor convexo con resistencia negativa

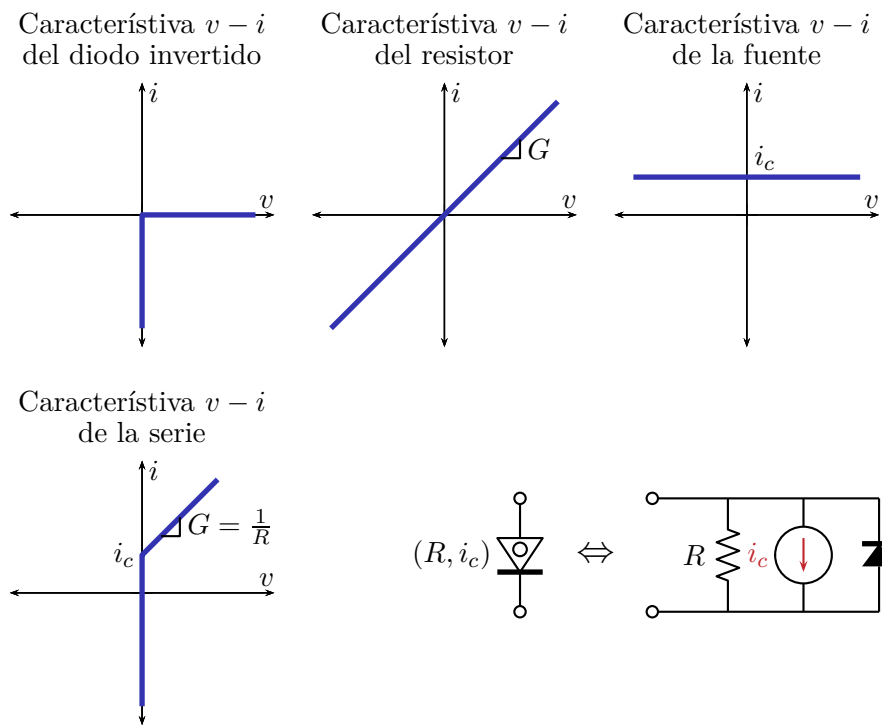


Figura 6.30: Red equivalente de un resistor convexo de resistencia positiva

Ejemplo 6.7 (Circuito con un resistor convexo)

Obtégase el valor de tensión marcado como v_x en el circuito de la figura 6.31:

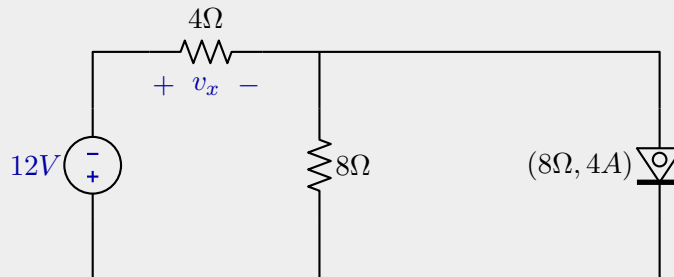


Figura 6.31: Circuito del ejemplo 6.7

Respuesta: como el circuito incluye un resistor convexo, lo remplazamos por su equivalente. El circuito resultante se muestra en la figura 6.32:

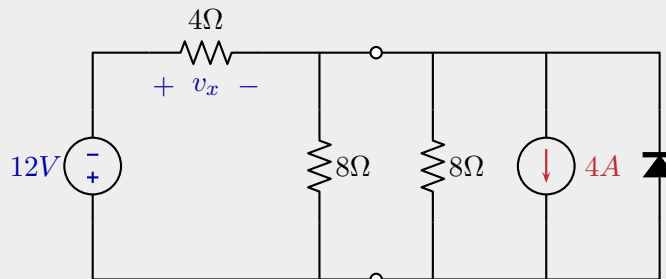


Figura 6.32: Circuito equivalente del ejemplo 6.7

Este nuevo circuito incluye elementos lineales y un único diodo ideal; para analizarlo, suponemos un estado para éste, por ejemplo lo suponemos en polarización directa (como un cortocircuito) y analizamos el circuito resultante que se muestra en la figura 6.33:

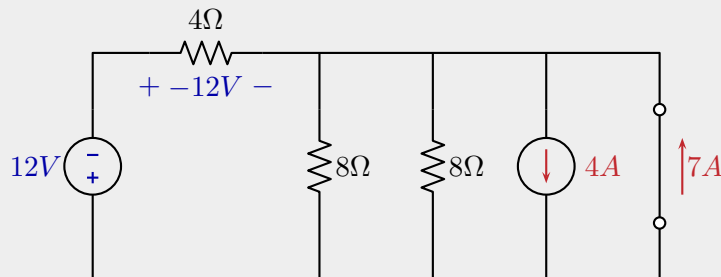


Figura 6.33: Circuito equivalente del ejemplo 6.7. Primera suposición

La corriente que circula por el diodo (ahora representado como un cortocircuito) es positiva, y por lo tanto la suposición inicial fue correcta. Se concluye entonces que el valor de tensión

buscado es

$$v_x = -12V \quad (6.10)$$

Ejemplo 6.8 (Resistor convexo de resistencia negativa)

La figura 6.34 muestra la característica $i - v$ de un resistor convexo cuya resistencia es negativa. Se desea construir un modelo de ese RNLIT con fuentes ideales, resistores lineales y diodos ideales.

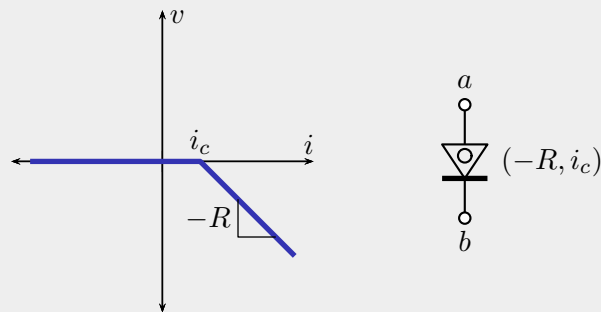


Figura 6.34: Característica $i - v$ del ejemplo 6.8

Respuesta: La característica $i - v$ del resistor convexo puede obtenerse a partir de la combinación en serie de dos elementos A y B con características $i - v$ como las que se muestran en la figura 6.35.

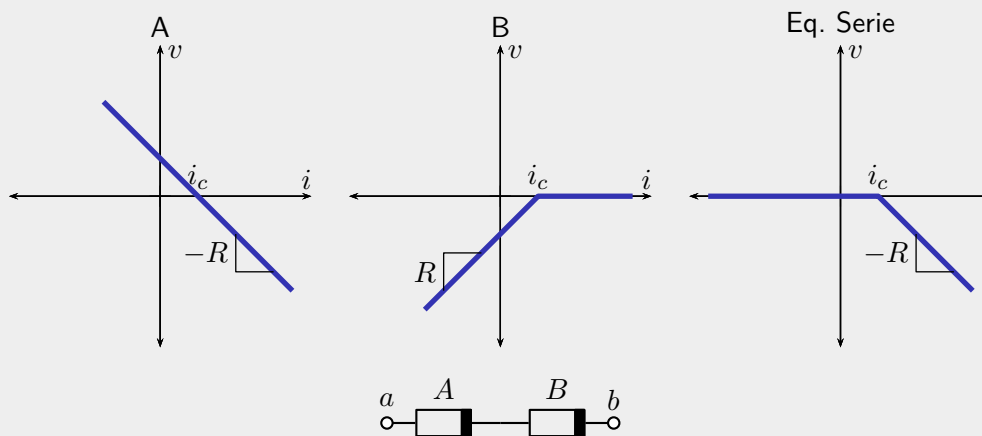
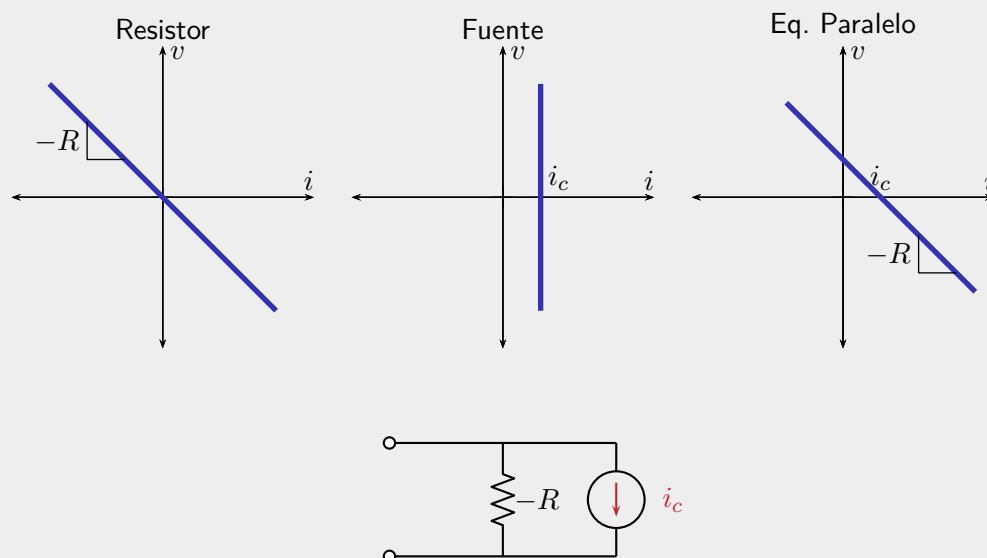
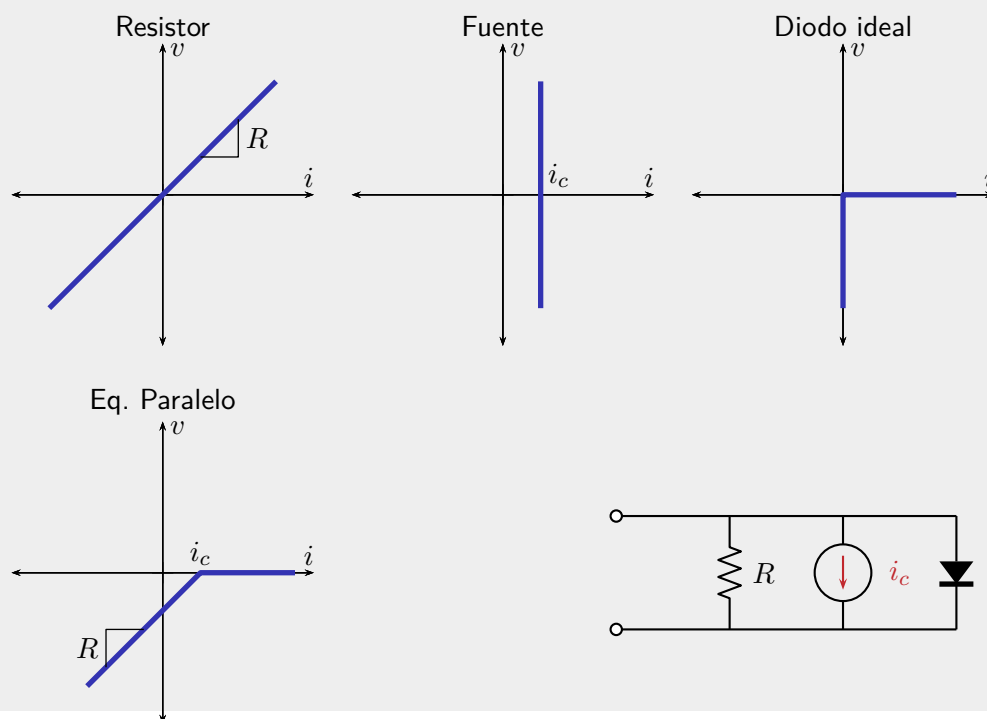


Figura 6.35: Primer equivalente del ejemplo 6.8

El elemento A puede modelarse por una combinación en paralelo de una fuente ideal de corriente y un resistor lineal de resistencia negativa, como se muestra en la figura 6.36.

Figura 6.36: Equivalente del elemento A en el ejemplo 6.8

Por su parte, el elemento B puede modelarse por una combinación en paralelo de un resistor lineal, una fuente ideal de corriente y un diodo ideal:

Figura 6.37: Equivalente del elemento B en el ejemplo 6.8

Por lo tanto el circuito de la figura 6.38 es un posible modelo del resistor convexo de resistencia negativa:

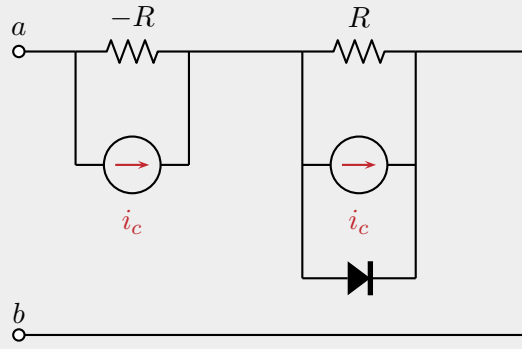


Figura 6.38: Equivalente total del ejemplo 6.8

Capítulo 7

Modelamiento de RNLIT

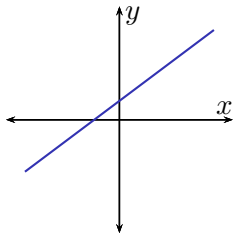
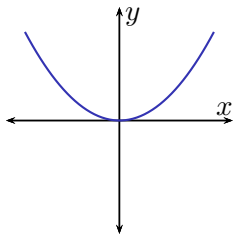
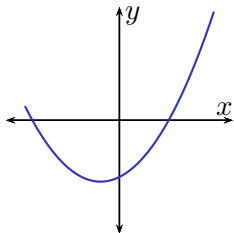
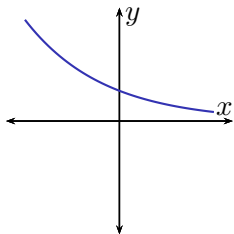
En este capítulo se pretende mostrar algunas técnicas para representar el comportamiento de un RNLIT genérico del cual se conoce su característica $v - i$, mediante modelos que tengan una expresión matemática. A lo largo del capítulo se hará uso intensivo de métodos numéricos para efectuar ajustes de curvas; se recomienda al lector que no esté familiarizado con estos temas remitirse al Apéndice B

7.1. Ajuste de curvas

Al contar con la característica $v - i$ de un RNLIT, se cuenta con una información gráfica sobre la relación tensión-corriente de dicho elemento. Es factible intentar ajustar algún tipo de expresión matemática que represente esa característica, al menos en algún tramo de la curva. Si bien es cierto que se cuenta con herramientas matemáticas para efectuar dicho ajuste, también es cierto que su utilidad y exactitud dependen en buena medida de la habilidad del modelador para seleccionar el tipo de expresión matemática que desea ajustar, y el tramo de curva a modelar.

En la tabla 7.1 se muestran algunas de las expresiones matemáticas más usadas para ajustar tramos de curvas. En los ejemplos 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4 se muestran distintos casos de ajustes de características $v - i$ a ese tipo de expresiones.

Tabla 7.1: Funciones prototipo usuales para ajuste de curvas

Modelo	Ecuación	Gráfico
Línea recta	$y = ax + b$	
Monomio	$y = ax^b$	
Polinomio	$y = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_mx^m$	
Exponencial	$y = ae^{bx}$	

Ejemplo 7.1 (Ajuste de curva a línea recta)

A partir de la característica $i - v$ de un cierto elemento de circuitos se obtuvieron las parejas (i, v) que aparecen en la Tabla 7.2. Se desea efectuar un ajuste de línea recta con esos puntos.

Tabla 7.2: Datos para el ejemplo 7.1

$i(A)$	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
$v(V)$	-29.8	-15.2	0.9	15.1	30.1

Respuesta: Para efectuar una regresión lineal aplicamos la expresión B.7 con los datos anteriores y se obtiene la siguiente ecuación que describe la gráfica (ver sección B.1):

$$v = 15.01i + 0.22 \quad (7.1)$$

con una correlación del 99.98 %.

Otra forma de obtener el resultado anterior consiste en partir de la ecuación deseada

$$ai + b = v \quad (7.2)$$

y escribir dos ecuaciones auxiliares a partir de ésta, para obtener las dos incógnitas

$$\begin{cases} a \sum i + bn = \sum v \\ a \sum i^2 + b \sum i = \sum vi \end{cases} \quad (7.3)$$

en donde n es el número de parejas de datos de la tabla (5), y las sumatorias se hacen sobre todas las parejas. Con los datos de la tabla puede obtenerse los valores de las sumatorias. La Tabla 7.3 muestra los valores que deben sumarse y los resultados de las sumas.

Tabla 7.3: Cálculos intermedios del ejemplo 7.1

i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	$\sum i = \mathbf{0.0}$
v	-29.8	-15.2	0.9	15.1	30.1	$\sum v = \mathbf{11.1}$
vi	59.6	15.2	0.0	15.1	60.2	$\sum vi = \mathbf{150.1}$
i^2	4.0	1.0	0.0	1.0	4.0	$\sum i^2 = \mathbf{10.0}$

y por lo tanto las ecuaciones auxiliares son

$$\begin{cases} 0.0a + 5b = 11.1 \\ 10.0a + 0.0b = 150.1 \end{cases} \quad (7.4)$$

que tienen por solución

$$\begin{cases} a = 15.01 \\ b = 0.22 \end{cases} \quad (7.5)$$

Lo que significa que la ecuación que describe la gráfica es

$$v = 15.01i + 0.22 \quad (7.6)$$

Ejemplo 7.2 (Ajuste de curva a monomio)

A partir de la característica $i - v$ de un cierto elemento de circuitos se obtuvieron las parejas (i, v) que aparecen en la Tabla 7.4. Se desea efectuar un ajuste de monomio con esos puntos.

Tabla 7.4: Datos para el ejemplo 7.2

$i(A)$	0.1	1.0	2.0	3.0	4.0
$v(V)$	0.9	3.1	4.2	5.2	6.0

Respuesta: La ecuación deseada es de la forma

$$v = ai^b \quad (7.7)$$

Para efectuar el ajuste primero aplicamos logaritmos naturales a la ecuación anterior (ver sección B.2):

$$\ln(v) = \ln(a) + b \ln(i) \quad (7.8)$$

resultando entonces la ecuación de una línea recta de $\ln(v)$ vs $\ln(i)$; se debe entonces completar la tabla de datos tal como se muestra en la Tabla 7.5:

Tabla 7.5: Cálculos intermedios del ejemplo 7.2

i	0.1	1.0	2.0	3.0	4.0
v	0.9	3.1	4.2	5.2	6.0
$\ln(i)$	-2.3	0.0	0.693	1.098	1.386
$\ln(v)$	-0.105	1.131	1.435	1.648	1.792

Efectuando una regresión lineal con los datos de las últimas dos filas (ecuación B.7) se obtiene la siguiente ecuación

$$\ln(v) = 1.0899 + 0.514 \ln(i) \quad (7.9)$$

con una correlación de 99.95 %. Lo anterior significa que

$$\begin{aligned} \ln(a) &= 1.0899 \\ a &= 2.974 \\ b &= 0.514 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Concluimos entonces que la ecuación que describe la gráfica es

$$v = 2.974 * i^{0.514} \quad (7.11)$$

Ejemplo 7.3 (Ajuste de curva a polinomio)

A partir de la característica $i - v$ de un cierto elemento de circuitos se obtuvieron las parejas (i, v) que aparecen en la Tabla 7.6. Se desea efectuar un ajuste de polinomio grado 3 con esos puntos.

Tabla 7.6: Datos para el ejemplo 7.3

$i(A)$	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
$v(V)$	-9.0	0.0	-1.0	-6.0	-9.0	-4.0

Respuesta: Para obtener el ajuste (ver sección B.4) escribimos de la ecuación deseada

$$a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 = v \quad (7.12)$$

y buscamos cuatro ecuaciones auxiliares a partir de ésta, para obtener las cuatro incógnitas

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum i + a_2 \sum i^2 + a_3 \sum i^3 = \sum v \\ a_0 \sum i + a_1 \sum i^2 + a_2 \sum i^3 + a_3 \sum i^4 = \sum vi \\ a_0 \sum i^2 + a_1 \sum i^3 + a_2 \sum i^4 + a_3 \sum i^5 = \sum vi^2 \\ a_0 \sum i^3 + a_1 \sum i^4 + a_2 \sum i^5 + a_3 \sum i^6 = \sum vi^3 \end{cases} \quad (7.13)$$

A partir de los datos de la tabla puede obtenerse:

$$\begin{array}{rclclcl} n & = & 6 & \sum i & = & 9 & \sum i^2 & = & 31 & \sum i^3 & = & 99 \\ \sum i^4 & = & 355 & \sum i^5 & = & 1299 & \sum i^6 & = & 4891 & \sum v & = & -29 \\ \sum vi & = & -47 & \sum vi^2 & = & -179 & \sum vi^3 & = & -539 & & & \end{array} \quad (7.14)$$

y por lo tanto las ecuaciones auxiliares pueden escribirse de forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 31 & 99 \\ 9 & 31 & 99 & 355 \\ 31 & 99 & 355 & 1299 \\ 99 & 355 & 1299 & 4891 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 \\ -47 \\ -179 \\ -539 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

que tienen por solución

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 3 \quad a_2 = -5 \quad a_3 = 1 \quad (7.16)$$

Lo que significa que la ecuación que describe la gráfica es

$$v = 3i - 5i^2 + i^3 \quad (7.17)$$

Ejemplo 7.4 (Ajuste de curva a función exponencial)

A partir de la característica $i - v$ de un cierto elemento de circuitos se obtuvieron las parejas (i, v) que aparecen en la Tabla 7.7. Se desea efectuar un ajuste de monomio con esos puntos.

Tabla 7.7: Datos para el ejemplo 7.4

$i(A)$	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
$v(V)$	74.0	27.0	10.0	3.7	1.4

Respuesta: La ecuación deseada es de la forma

$$v = ae^{bi} \quad (7.18)$$

Para efectuar el ajuste primero aplicamos logaritmos naturales a la ecuación anterior (ver sección B.3):

$$\ln(v) = \ln(a) + bi \quad (7.19)$$

resultando entonces la ecuación de una línea recta de $\ln(v)$ vs i ; se debe entonces completar la tabla de datos tal como se muestra en la Tabla 7.8:

Tabla 7.8: Cálculos intermedios del ejemplo 7.4

i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
v	74.0	27.0	10.0	3.7	1.4
$\ln(v)$	4.304	3.296	2.303	1.308	0.336

Efectuando una regresión lineal con los datos de las filas primera y tercera (ecuación B.7) se obtiene la siguiente ecuación

$$\ln(v) = 2.30936 - 0.9927 * i \quad (7.20)$$

con una correlación de 99.99 %

Lo anterior significa que

$$\begin{aligned} \ln(a) &= 2.30936 \\ a &= 10.67 \\ b &= -0.9927 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Concluimos entonces que la ecuación que describe la gráfica es

$$v = 10.67e^{-0.99i} \quad (7.22)$$

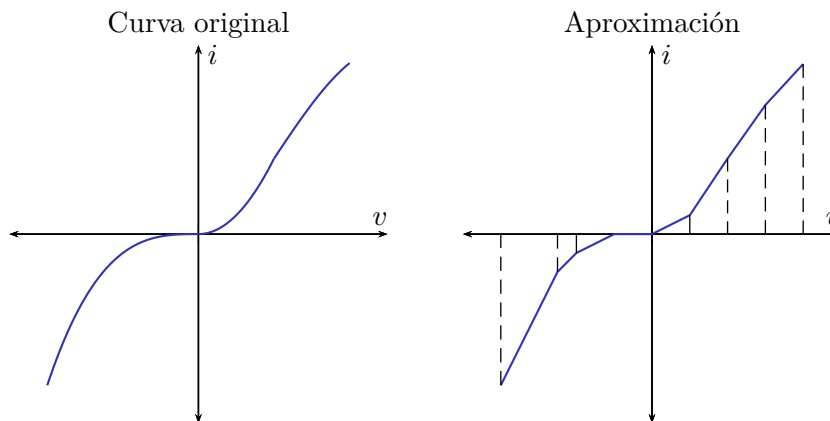


Figura 7.1: Aproximación de una característica a tramos de líneas rectas

7.2. Modelamiento de RNLIT con resistores cóncavos y convexos

La característica $v - i$ de un RNLIT genérico puede aproximarse por una sucesión de trozos de líneas rectas, tal como se muestra en la figura 7.1. A su vez, toda característica $v-i$ que sea una sucesión de trozos de líneas rectas puede obtenerse con la combinación en serie o en paralelo algunos elementos lineales y resistores cóncavos y convexos.

Si a lo anterior se suma que todo resistor cóncavo o convexo puede representarse por una combinación de fuentes ideales, resistores lineales y diodos ideales, se concluye que cualquier RNLIT puede modelarse empleando tales elementos básicos. Los ejemplos 7.5, 7.6, y 7.7 ilustran estas afirmaciones.

Ejemplo 7.5 (Aproximación con resistores cóncavos y convexos)

La figura 7.2 muestra la característica $v - i$ de un cierto RNLIT. Se necesita construir un modelo de ese elemento que sea una combinación de resistores cóncavos y convexos.

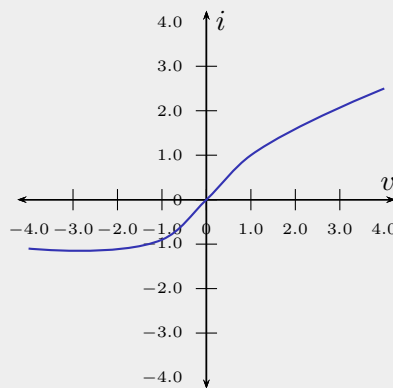


Figura 7.2: Característica $v - i$ del ejemplo 7.5

Respuesta: Inicialmente aproximamos la característica $v - i$ del RNLIT como a una sucesión de trozos de líneas rectas, tal como se muestra en la figura 7.3.

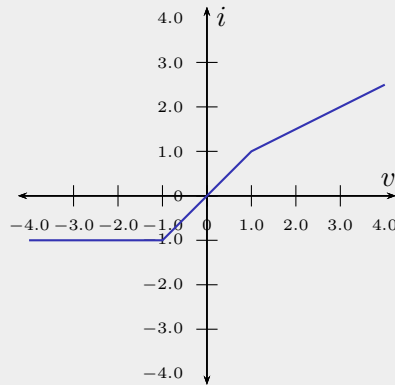


Figura 7.3: Característica $v - i$ aproximada del ejemplo 7.5

El tramo de la característica que corresponde a $v < 1V$ puede construirse mediante la combinación en paralelo de una fuente de corriente y un resistor cóncavo, tal como se muestra en la figura 7.4.

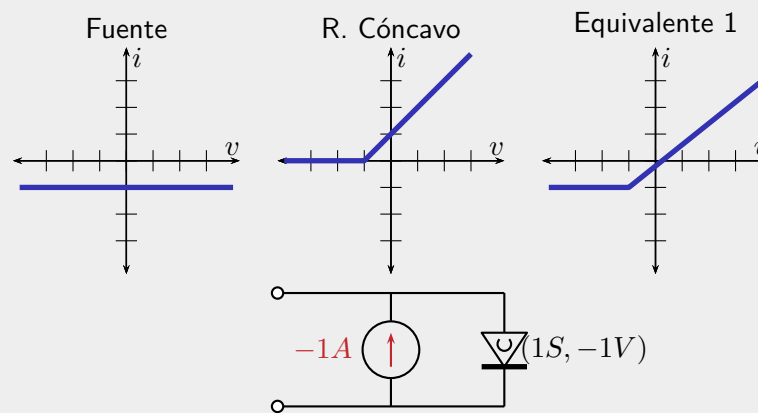


Figura 7.4: Primer equivalente del ejemplo 7.5

Para obtener la característica de la figura 7.3, podemos conectar un resistor convexo en serie, tal como se muestra en la figura 7.5. Por lo tanto el RNLIT original puede aproximarse por el circuito que se muestra en esa misma figura.

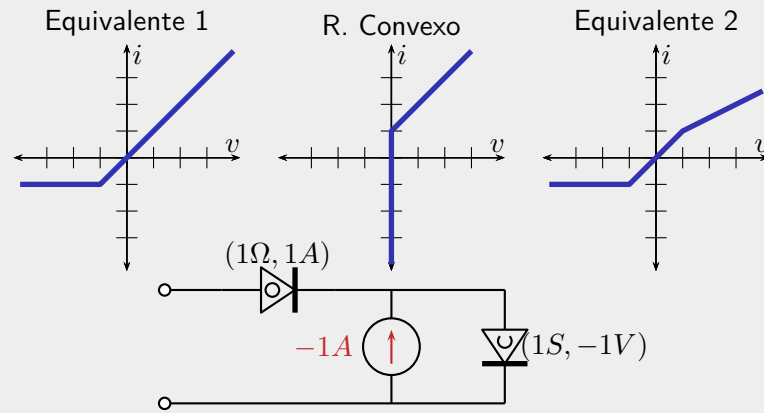
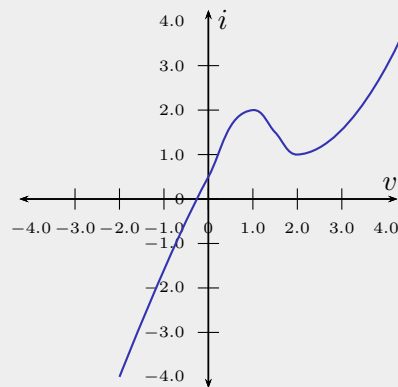


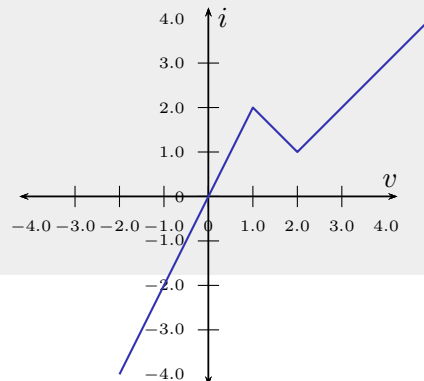
Figura 7.5: Equivalente total del ejemplo 7.5

Ejemplo 7.6 (Aproximación con resistores cóncavos y convexos)

La figura 7.6 muestra la característica $v - i$ de un cierto RNLIT. Se necesita construir un modelo de ese elemento que sea una combinación de resistores cóncavos y convexos.

Figura 7.6: Característica $v - i$ del ejemplo 7.6

Respuesta: Inicialmente aproximamos la característica $v - i$ del RNLIT como a una sucesión de trozos de líneas rectas, tal como se muestra en la figura 7.7.

Figura 7.7: Característica $v - i$ aproximada del ejemplo 7.6

Esa sucesión de trozos de líneas rectas puede obtenerse mediante la combinación en paralelo de Resistores cóncavos cuyas características $v - i$ sean las que se muestran en la figura 7.8.

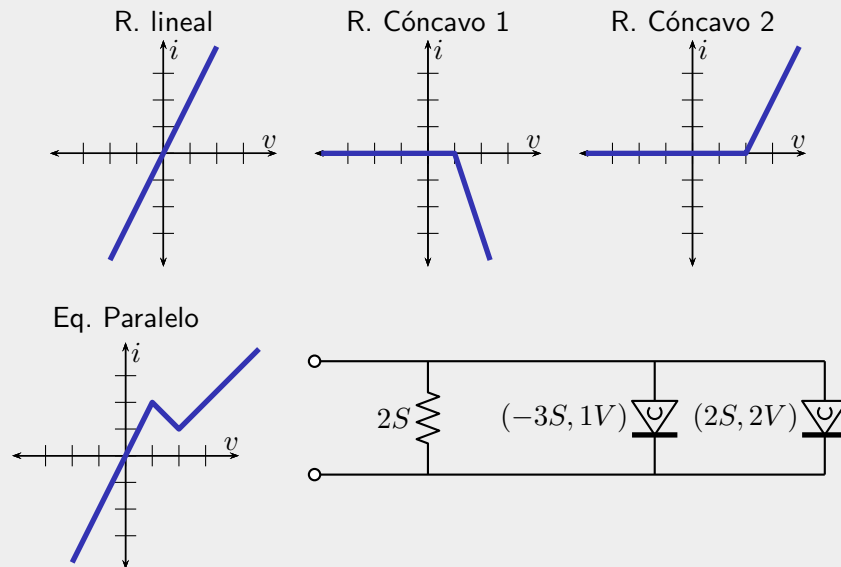


Figura 7.8: Equivalente del ejemplo 7.6

Por lo tanto el RNLIT original puede aproximarse al circuito de la figura 7.8. Nótese, sin embargo, que el modelo presentado en la figura 6.19 no sirve para construir modelos equivalentes de resistores cóncavos de conductancia negativa. En el ejemplo 6.6 se presenta un posible modelo para éste resistor.

Ejemplo 7.7 (Aproximación con resistores cóncavos y convexos)

Este ejemplo es una continuación del ejemplo 7.5. Se propone ahora obtener un modelo del mismo RNLIT como una combinación de fuentes independientes, resistores lineales y diodos ideales. La característica $v - i$ del RNLIT se presenta en la figura 7.9

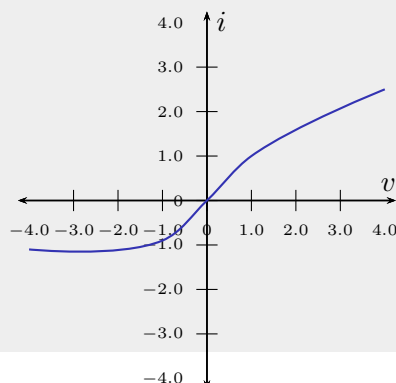


Figura 7.9: Característica $v - i$ del ejemplo 7.7

Respuesta: en la figura 7.5 se muestra una circuito equivalente que tiene una fuente ideal, un resistor cóncavo y un resistor convexo. si se rempazan estos últimos dos elementos por sus equivalentes (Figuras 6.19 y 6.30) por sus equivalentes se obtiene el circuito que se muestra en la figura 7.10.

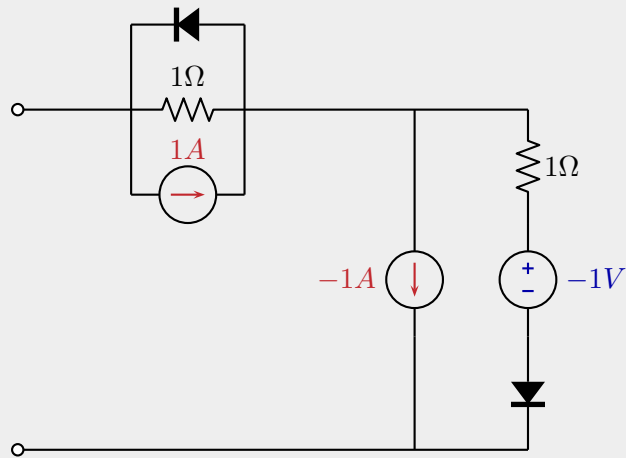


Figura 7.10: Circuito equivalente del ejemplo 7.7

Capítulo 8

Punto de operación y análisis de pequeña señal

En este capítulo se explora el análisis de circuitos estáticos en los que simultáneamente hay fuentes de valor constante (DC) y fuentes de valor variable. Esta es una situación común en circuitos cuya función es amplificar una señal: la alimentación DC se utiliza para preparar el circuito, mientras que la alimentación variable es la señal que se quiere amplificar.

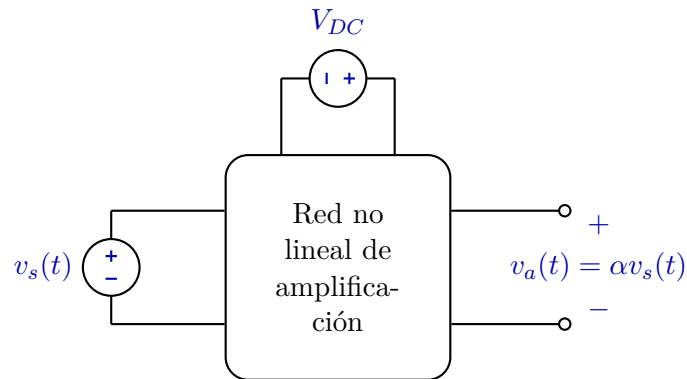


Figura 8.1: Circuito de amplificación

El esquema de amplificación se ilustra en la figura 8.1. El propósito del circuito es el de obtener una señal $v_a(t)$ que sea proporcional a una señal $v_s(t)$. En general, se supone que $v_s(t)$ toma valores pequeños y que se necesita que $v_a(t)$ tome valores más grandes, es decir $\alpha > 1.0$. La función de la fuente constante V_{DC} es la de preparar el circuito para que pueda operar

La estrategia que presentamos en este capítulo consiste en estudiar el circuito en dos etapas:

- Primero se estudia el circuito alimentado únicamente por la fuente DC para obtener un

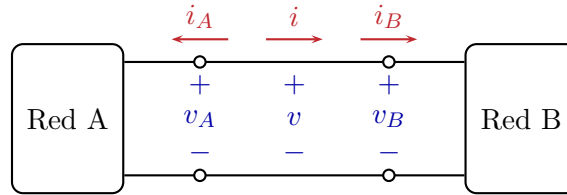


Figura 8.2: Separación de un circuito en dos redes

modelo simplificado de él. Esta etapa la denominaremos *Análisis DC*, y nos permitirá encontrar el *punto de operación*, es decir, las condiciones en las que el circuito se ha alistado para efectuar la amplificación.

- Posteriormente se utiliza el modelo del punto de operación para estudiar el comportamiento del circuito cuando se conecta la señal que se desea amplificar. Esta etapa la denominaremos *Análisis de pequeña señal*

Si los elementos del circuito fueran lineales, el análisis podría hacerse mediante superposición. Es decir, analizar por separado el efecto de cada una de las dos fuentes y sumar el resultado. Sin embargo, los elementos empleados para efectuar la amplificación (los transistores) son no lineales. Por esa razón, el procedimiento esbozado anteriormente debe complementarse con la siguiente pregunta: ¿El modelo DC sigue siendo válido cuando se aplica la pequeña señal?

8.1. Análisis DC

Entenderemos aquí por análisis DC la búsqueda de las distintas variables eléctricas (tensión, corriente, potencia) presentes en un circuito conformado por RNLIT y por fuentes independientes de corriente y tensión de valor constante exclusivamente. En otras palabras es el análisis de una red semejante a la que se ilustra en la figura 8.1, cuando no hay señal de entrada para amplificar, es decir, cuando $v_s(t) = 0$. En algunos circuitos no lineales es posible encontrar más de una solución posible, o no encontrar ninguna. En el primer caso diremos que la solución es multivaluada, y en el segundo que no existe solución.

Supóngase un circuito como a los que se refiere el párrafo anterior, que puede separarse en dos redes *A* y *B* conectadas por dos terminales, como lo muestra la figura 8.2. Supóngase también que se está interesado en averiguar los valores de tensión v y corriente i marcados en la figura.

En tal circuito, todos los elementos están definidos por su característica $v - i$, y por tanto las redes *A* y *B* también pueden definirse por alguna característica $v - i$, que llamaremos característica *A* y característica *B*.

Es indispensable subrayar que las polaridades con que se han definido dichas características son tales que la corriente se considera entrando por el terminal marcado como referencia positiva de tensión; por lo tanto en el circuito la corriente i que se desea averiguar coincide con la usada para definir la característica B , pero a su vez tiene el sentido contrario de la usada para definir la característica A .

También es importante señalar que si alguna de las dos redes es lineal, su característica $v - i$ será la de una fuente práctica de tensión o de corriente (Teoremas de Thévenin y Norton), es decir, una línea recta. Esta recta se conoce como la recta de carga del circuito.

Presentamos a continuación dos técnicas para efectuar análisis D.C. al circuito genérico anterior.

8.1.1. Análisis Matemático

Esta técnica es viable en caso de contar con alguna expresión matemática de las dos características A y B . Supóngase que en el circuito de la figura 8.2 la red A está definida por

$$v_A = f_A(i_A) \quad (\text{Es decir, } A \text{ es controlada por corriente}) \quad (8.1)$$

y que, por su parte, la Red B está definida por

$$v_B = f_B(i_B) \quad (\text{Es decir, } B \text{ es controlada por corriente}) \quad (8.2)$$

Los valores de tensión y de corriente presentes en el circuito corresponden a la pareja (v, i) que satisface

$$\begin{aligned} v &= f_A(-i) \\ v &= f_B(i) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Los ejemplos 8.1 y 8.2 muestran dos casos sencillos, el primero de los cuales corresponde a un circuito resistivo lineal, y el segundo muestra el cuidado que debe tenerse con la ecuación de la red A , debido a que la corriente i es distinta a la corriente i_A . Ahora bien, si alguna de las dos redes no es controlada por corriente sino por tensión, la situación cambia ligeramente, como se muestra en el ejemplo 8.3.

Ejemplo 8.1 (Análisis DC matemático de un circuito lineal)

Obténganse los valores de tensión y corriente solución del circuito mostrado en la figura 8.2 si las características de las redes A y B son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Red } A: \quad v_A &= 10V && (\text{Fuente de Tensión constante de 10 Voltios}) \\ \text{Red } B: \quad v_B &= 2i_B && (\text{Resistor Pasivo Lineal Bilateral de } 2\Omega) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Respuesta: Debemos igualar las dos expresiones. Omitiendo temporalmente las unidades las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} v_A &= v_B \\ 10 &= 2i_B \\ i_B &= 5 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Por lo tanto una solución se encuentra en

$$i = 5A \quad v = 10V \quad (8.6)$$

Ejemplo 8.2 (Análisis DC matemático de un circuito no lineal)

Obténganse los valores de tensión y corriente solución del circuito mostrado en la figura 8.2 si las características de las redes A y B son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Red } A: \quad v_A &= 2 - i_A \\ \text{Red } B: \quad v_B &= i_B^2 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Respuesta: Debemos igualar las dos expresiones, observando que el valor deseado de corriente tiene el sentido contrario a i_A :

$$2 + i = i^2 \quad (8.8)$$

La solución de esa ecuación arroja dos posibles resultados:

$$\begin{cases} i_1 = -1A & v_1 = 1V \\ i_2 = 2A & v_2 = 4V \end{cases} \quad (8.9)$$

Ejemplo 8.3 (Análisis DC matemático. Red controlada por tensión)

Obténganse los valores de tensión y corriente solución del circuito mostrado en la figura 8.2 si las características de las redes A y B son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Red } A: \quad v_A &= 2 + i_A \\ \text{Red } B: \quad i_B &= v_B^2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Respuesta: Como la red B está controlada por tensión, entonces la solución del circuito corresponde a la pareja (v, i) que satisface

$$\begin{aligned} v &= f_A(-i) \\ i &= f_B(v) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Por lo tanto deben solucionarse las ecuaciones

$$\begin{cases} v &= 2 - i \\ i &= v^2 \end{cases} \quad (8.12)$$

O lo que es igual

$$v = 2 - v^2 \quad (8.13)$$

La solución de esa ecuación arroja dos posibles resultados:

$$\begin{cases} v_1 &= 1V & i_1 &= 1A \\ v_2 &= -2V & i_2 &= 4A \end{cases} \quad (8.14)$$

8.1.2. Análisis Gráfico

La obtención de la pareja (v, i) solución de un circuito genérico como el de la figura 8.2 puede efectuarse también gráficamente; si no se cuenta con una expresión matemática de alguno de los elementos del circuito, esta técnica resulta ser la única viable.

La metodología consiste en trazar las características A y B sobre unos mismos ejes coordenados, y encontrar el punto de corte gráficamente, que dará la pareja $v - i$ solución del circuito. Debe notarse que la característica de la red A debe trazarse invirtiendo el sentido de la corriente para que los ejes sean los mismos (ver ejemplo 8.4).

Variaciones sobre esta metodología consisten en:

- Trazar la característica del elemento equivalente a la serie de las redes A y B y obtener la corriente i para tensión cero. Con esta corriente puede obtenerse la tensión v en cualquiera de las dos características A ó B (ver ejemplo 8.5); Nótese que para obtener la característica de la serie es necesario invertir la característica de la red A , respecto a i y respecto a v (ver sección 5.1 y ejemplo 5.3).
- Trazar la característica del elemento equivalente al paralelo de las redes A y B y obtener la tensión v para corriente cero. Con esta corriente puede obtenerse la corriente i en cualquiera de las dos características A o B (ver ejemplo 8.6). Nótese que para obtener la característica del paralelo es necesario invertir la característica de la red A , respecto a i (ver sección 5.2 y ejemplo 5.6).

Ejemplo 8.4 (Análisis DC gráfico)

En este ejemplo se resuelve el mismo problema del ejemplo 8.2, pero gráficamente.

Las características $i - v$ de las dos redes son las que se muestran en la figura 8.3.

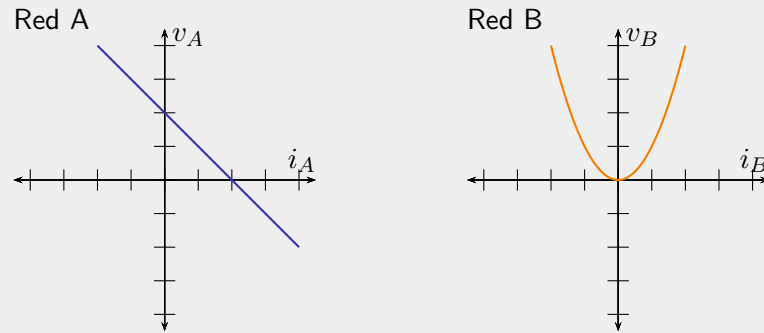


Figura 8.3: Características $i - v$ del ejemplo 8.4

Al invertir la característica de la red A, las dos características quedan como se muestra en la figura 8.4.

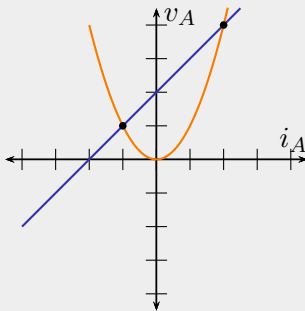


Figura 8.4: Características $i - v$ del ejemplo 8.4

Las características se cortan en dos puntos, que corresponden a:

$$\begin{cases} i_1 = -1A & v_1 = 1V \\ i_2 = 2A & v_2 = 4V \end{cases} \quad (8.15)$$

Ejemplo 8.5 (Análisis DC gráfico mediante conexión serie)

En este ejemplo se resuelve el mismo problema de los ejemplos 8.2 y 8.4 de forma gráfica, pero calculando un equivalente serie.

Para obtener la características $i - v$ del equivalente serie primero invertimos la característica de la red A. El resultado se muestra en la figura 8.5:

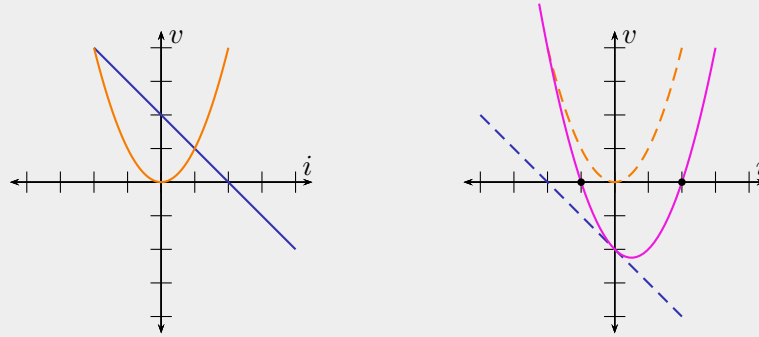


Figura 8.5: Características $i - v$ del ejemplo 8.5

En el corte del eje de corriente (tensión igual a cero) se leen dos valores:

$$i_1 = -1A \quad i_2 = 2A \quad (8.16)$$

En la característica $i - v$ de la red B se lee, para esos valores de corriente,

$$\begin{cases} i_1 = -1A & v_1 = 1V \\ i_2 = 2A & v_2 = 4V \end{cases} \quad (8.17)$$

Ejemplo 8.6 (Análisis DC gráfico mediante conexión paralelo)

En este ejemplo se resuelve el mismo problema de los ejemplos 8.2, 8.4 y 8.5 de forma gráfica, pero calculando un equivalente paralelo.

Respuesta: Para obtener la característica $i - v$ del equivalente paralelo primero se invierte la característica de la red A. El resultado se muestra en la figura 8.6:

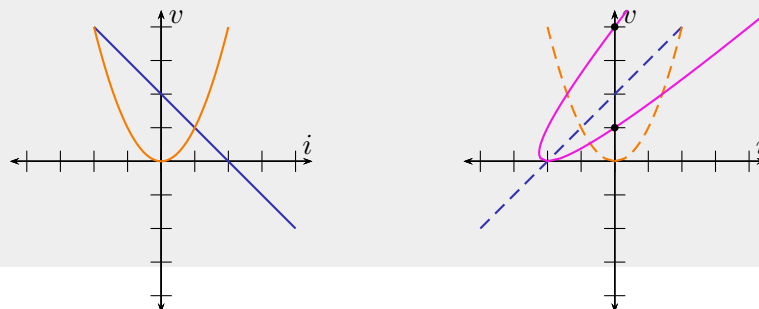


Figura 8.6: Características $i - v$ del ejemplo 8.6

En el corte del eje de tensión (corriente igual a cero) se lee:

$$v_1 = 1V \quad v_2 = 4V \quad (8.18)$$

En la característica $i - v$ de la red A invertida se lee, para esos valores de tensión,

$$\begin{cases} i_1 = -1A & v_1 = 1V \\ i_2 = 2A & v_2 = 4V \end{cases} \quad (8.19)$$

8.1.3. Análisis D.C. con RNLIT

Al modelar un RNLIT con resistores cóncavos y convexos, en realidad lo que se está haciendo es convertirlo en una red compuesta por elementos lineales y por diodos ideales, por lo tanto, el análisis D.C. de un circuito que incluya RNLIT modelados con resistores cóncavos y convexos es en realidad el análisis D.C. de un circuito lineal con diodos ideales.

Los ejemplos y presentan algunos casos de circuitos que incluyen elementos lineales y RNLIT. Nótese que esta afirmación implica que el circuito original incluye únicamente elementos lineales y RNLIT.

Ejemplo 8.7 (Análisis DC de un circuito con un resitor cóncavo)

En el circuito que se muestra a continuación el RNLIT corresponde al del ejemplo 7.7. Obténgase el valor de tensión marcado como v_x en la figura 8.7

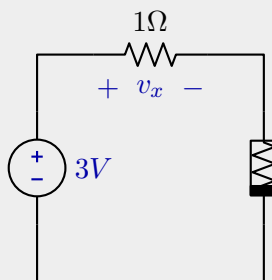


Figura 8.7: Circuito del ejemplo 8.7

Respuesta: Al sustituir en el circuito el RNLIT por su equivalente, el circuito resultante se muestra en la figura 8.8

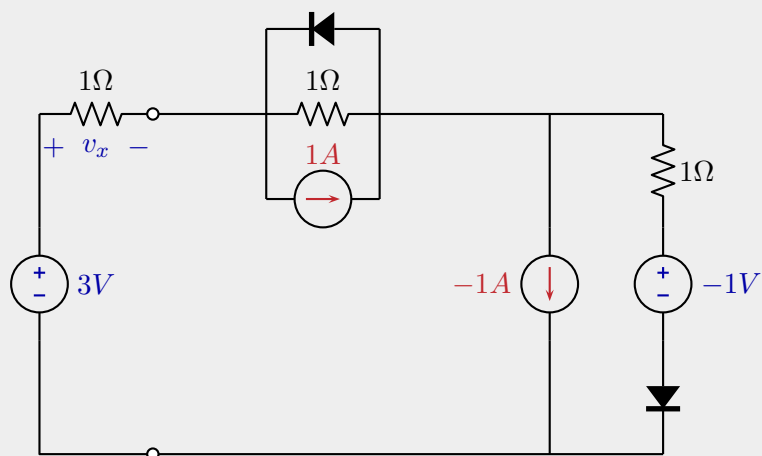


Figura 8.8: Circuito equivalente del ejemplo 8.7

El análisis de dicho circuito arroja que uno de los diodos opera en polarización inversa y el otro en polarización inversa, tal como se muestra en la figura 8.9

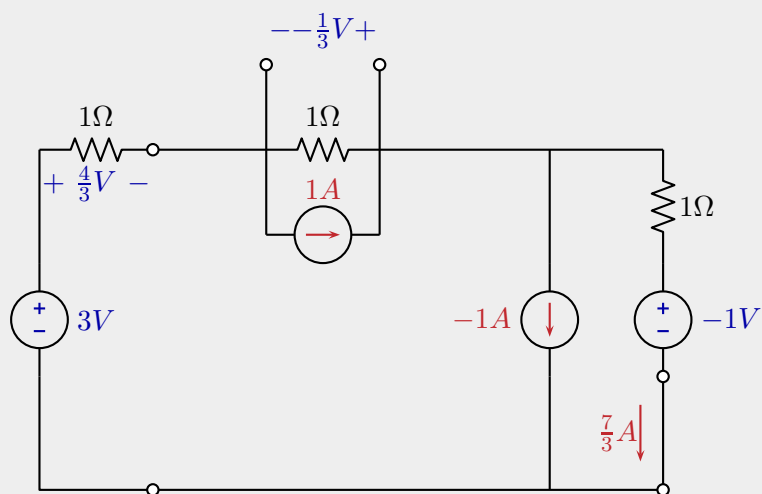


Figura 8.9: Circuito equivalente del ejemplo 8.7 con la polarización de los diodos

Siendo, entonces, el valor buscado:

$$v_x = \frac{4}{3}V \quad (8.20)$$

8.2. Análisis de pequeña señal

El análisis de pequeña señal se emplea para estudiar circuitos en donde la excitación proviene de fuentes independientes constantes y de fuentes independientes variables, cuya máxima amplitud es ‘pequeña’ en comparación con las de las fuentes constantes. El principio de análisis parte de la suposición siguiente: el efecto de las fuentes variables es suficientemente ‘pequeño’ como para suponer que no afecta en gran medida el estado del circuito. Un caso en donde esa suposición es correcta se muestra en el ejemplo 8.8, y dos casos en los cuales es falsa se muestran en los ejemplos 8.9 y 8.10.

Cuando un circuito incluye RNLIT modelados, puede considerarse que el estado del circuito no cambia en gran medida si la polarización de los diodos ideales con que se modelan los RNLIT no cambia aún con el mayor de los efectos de la fuente variable. Por lo tanto, si la suposición de pequeña señal es válida, puede utilizarse la siguiente metodología:

1. Modelar los RNLIT presentes en el circuito con una combinación de fuentes independientes, resistores lineales y diodos ideales.
2. Analizar el circuito ignorando las fuentes variables, para determinar la polarización de los diodos ideales (Análisis DC).
3. Analizar el circuito equivalente con las fuentes variables.

Ejemplo 8.8 (Análisis de pequeña señal con resistores cóncavos)

En el circuito de la figura 8.10, ¿Puede considerarse la fuente variable como una señal pequeña?

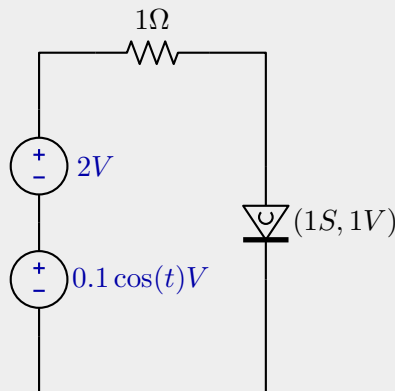


Figura 8.10: Circuito del ejemplo 8.8

Respuesta: como el circuito incluye un Resistor cóncavo, inicialmente obtenemos su equivalente y lo llevamos al circuito (Figura 8.11).

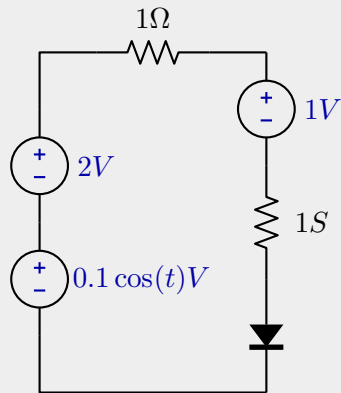


Figura 8.11: Circuito equivalente del ejemplo 8.8

Estudiamos el circuito ignorando la presencia de la fuente variable ($V_f(t) = 0$) y obtenemos que el diodo ideal está polarizado en directa, y por tanto el circuito equivalente es el siguiente:

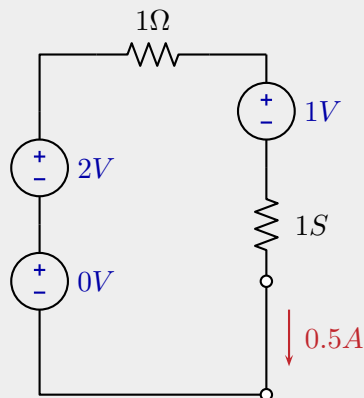


Figura 8.12: Circuito DC del ejemplo 8.8

Ahora bien, para averiguar si la fuente variable es o no pequeña, estudiamos el circuito considerando ahora los máximos efectos de la fuente tanto de signo positivo ($0.1V$) como negativo ($-0.1V$).

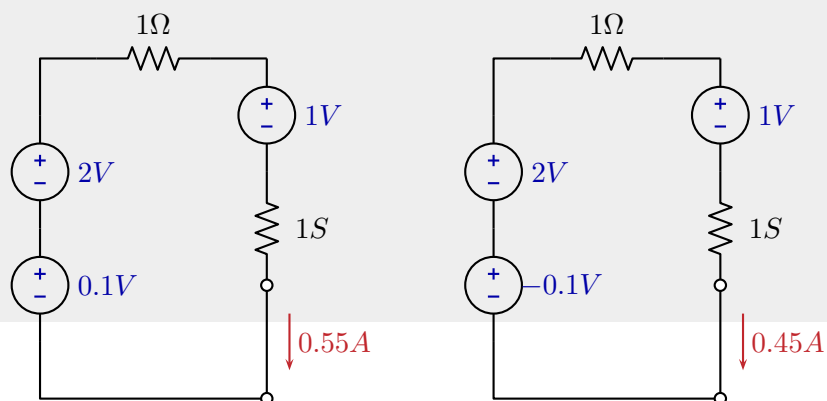


Figura 8.13: Máximos efectos de la fuente variable en el ejemplo 8.8

El resultado nos muestra que el diodo no cambia su polarización en ninguno de los casos (la corriente en el diodo es mayor que cero en los tres casos) y, por lo tanto, el circuito equivalente es el mismo. Concluimos entonces que el efecto de la fuente variable es pequeño.

Ejemplo 8.9 (Análisis de pequeña señal con resitores cóncavos)

En el circuito de la figura 8.14, ¿Puede considerarse la fuente variable como una señal pequeña?

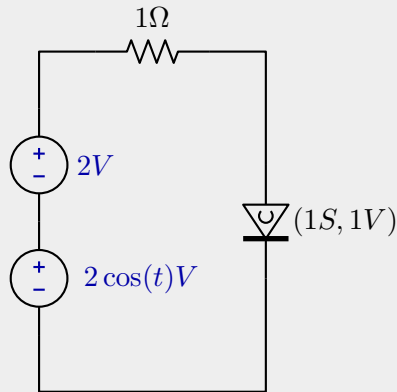


Figura 8.14: Circuito del ejemplo 8.9

Respuesta: como el circuito incluye un Resistor cóncavo, inicialmente obtenemos su equivalente y lo llevamos al circuito (Figura 8.15).

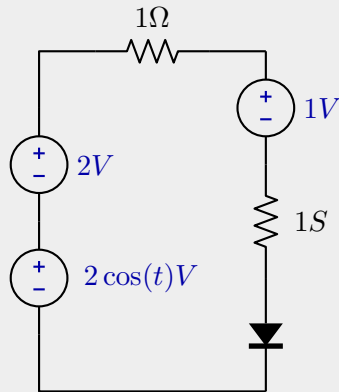


Figura 8.15: Circuito equivalente del ejemplo 8.9

Estudiamos el circuito ignorando la presencia de la fuente variable ($V_f(t) = 0$) y obtenemos que el diodo ideal está polarizado en directa, y por tanto el circuito equivalente es el siguiente:

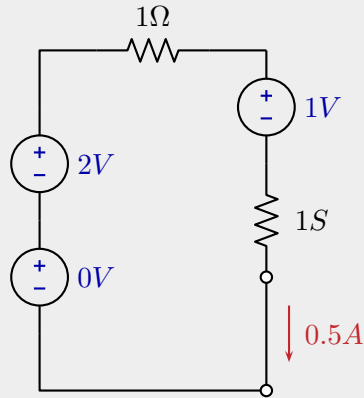


Figura 8.16: Circuito DC del ejemplo 8.9

Ahora bien, para averiguar si la fuente variable es o no pequeña, estudiamos el circuito considerando ahora los máximos efectos de la fuente tanto de signo positivo ($2V$) como negativo ($-2V$).

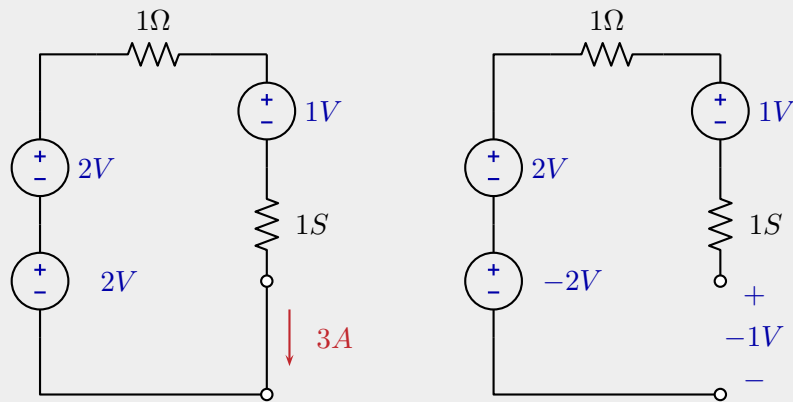


Figura 8.17: Máximos efectos de la fuente variable en el ejemplo 8.9

El resultado obtenido nos muestra que el diodo cambia su polarización cuando la fuente variable toma el máximo valor negativo: pasa a polarización inversa y por lo tanto el circuito equivalente se ha modificado. Concluimos entonces que el efecto de la fuente variable no es pequeño.

Ejemplo 8.10 (Análisis de pequeña señal con resitores cóncavos)

En el circuito de la figura 8.18, ¿Puede considerarse la fuente variable como una señal pequeña?

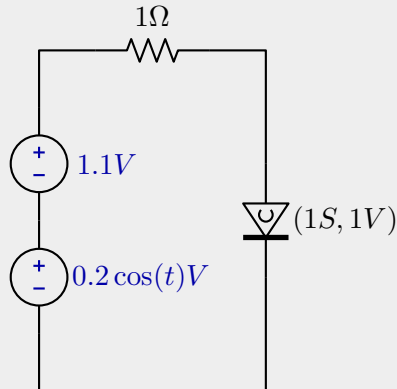


Figura 8.18: Circuito del ejemplo 8.10

Respuesta: como el circuito incluye un Resistor cóncavo, inicialmente obtenemos su equivalente y lo llevamos al circuito (Figura 8.19).

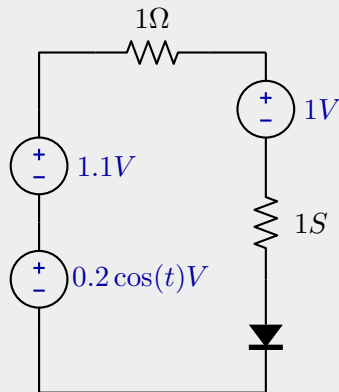


Figura 8.19: Circuito equivalente del ejemplo 8.10

Estudiamos el circuito ignorando la presencia de la fuente variable ($V_f(t) = 0$) y obtenemos que el diodo ideal está polarizado en directa, y por tanto el circuito equivalente es el siguiente:

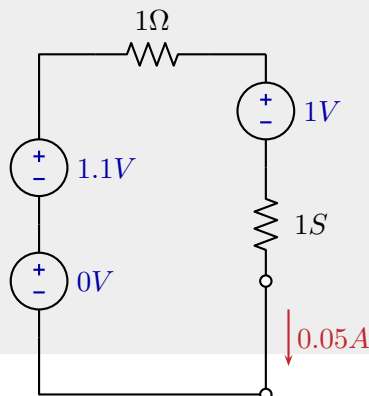


Figura 8.20: Circuito DC del ejemplo 8.10

Ahora bien, para averiguar si la fuente variable es o no pequeña, estudiamos el circuito considerando ahora los máximos efectos de la fuente tanto de signo positivo ($0.2V$) como negativo ($-0.2V$).

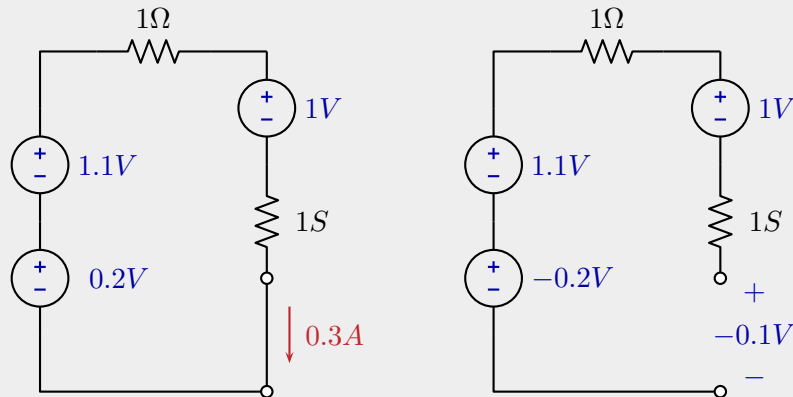


Figura 8.21: Máximos efectos de la fuente variable en el ejemplo 8.10

El resultado obtenido nos muestra que el diodo cambia su polarización cuando la fuente variable toma el máximo valor negativo: pasa a polarización inversa y por lo tanto el circuito equivalente se ha modificado. Concluimos entonces que el efecto de la fuente variable no es pequeño.

Nótese que a diferencia del ejemplo 8.9, en este caso puede atribuirse el cambio del equivalente más a un punto de operación DC inadecuado, que a un valor grande de señal variable.

8.2.1. Análisis de pequeña señal alrededor del punto de operación

Otra forma de emplear el análisis de pequeña señal consiste en modelar el RNLIT alrededor del punto de operación DC como una línea recta tangente a la característica del RNLIT en el punto de operación, según se muestra en el ejemplo 8.11. La ventaja de este método consiste en que la recta tangente puede interpretarse como la combinación serie de una fuente independiente de tensión con un Resistor Lineal Pasivo Bilateral, es decir se obtiene un modelo muy sencillo, pero que sólo es válido en cercanía del punto de operación

Ejemplo 8.11 (Análisis alrededor del punto de operación con resitores cóncavos)

Obtégase un modelo simple que contenga una fuente de tensión y un Resistor Lineal para

el RNLIT del siguiente circuito; el RNLIT tiene una característica como la que se muestra en la figura 8.22

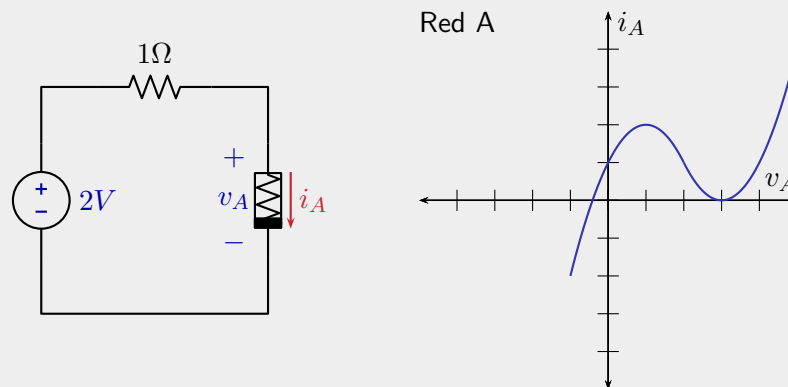


Figura 8.22: Circuito del ejemplo 8.11

Respuesta: Mediante un análisis gráfico se obtiene que el punto de operación DC es el que se muestra en la siguiente figura:

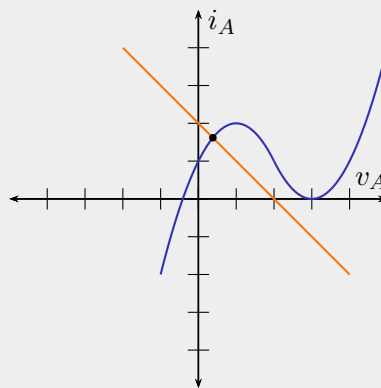


Figura 8.23: Análisis gráfico en el ejemplo 8.11

Al modelar el RNLIT como una recta tangente a la característica en el punto de operación, puede obtenerse el circuito equivalente que se muestra en la figura 8.24:

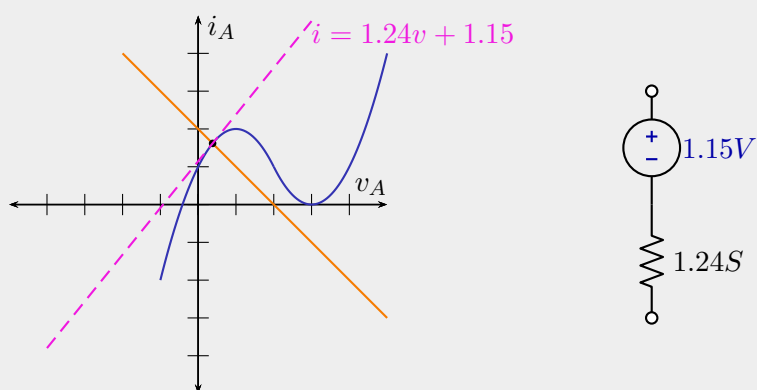


Figura 8.24: Circuito equivalente del ejemplo 8.11

Capítulo 9

Métodos numéricos para ecuaciones algebraicas

Resolver una ecuación algebraica es encontrar el valor (o los valores) que satisfacen la ecuación. Para ciertas ecuaciones es posible aplicar algún procedimiento *analítico* mediante el cual se encuentran tales soluciones. Un caso muy conocido es el del polinomio $ax^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones se encuentran completando el cuadrado o aplicando directamente la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (9.1)$$

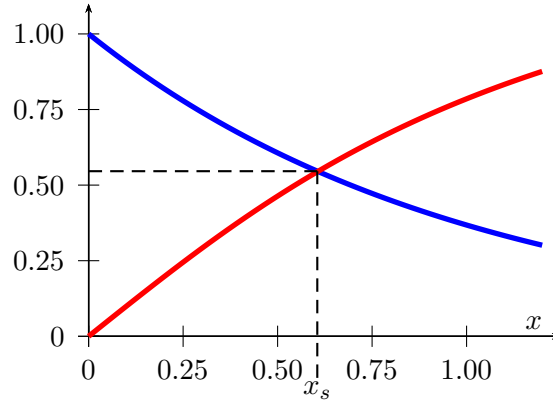
Sin embargo, no siempre contamos con un procedimiento conocido. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$e^{-x} = \arctan(x) \quad (9.2)$$

En la figura 9.1 se han dibujado las funciones que están a cada lado de la igualdad. En la gráfica se observa que hay un punto x_s en que se cruzan las respectivas curvas. Es decir, x_s es el valor que satisface la ecuación 9.2. La pregunta es: ¿cómo encontrar el valor de x_s ?

Los *métodos numéricos* son algoritmos que ayudan a determinar el valor *numérico* de las soluciones de problemas. Usualmente son procedimientos iterativos que parten de unos valores iniciales que se van mejorando iteración tras iteración.

En este capítulo se presentan algunos algoritmos sencillos que permiten encontrar la solución de ecuaciones algebraicas. El capítulo se enfoca en presentar cómo funcionan esos algoritmos, dejando de lado preguntas muy importantes como ¿por qué funcionan? ¿cuándo funcionan? ¿cuándo no funcionan? ¿qué tan bien funcionan? y ¿qué tan rápido funcionan?

Figura 9.1: Funciones e^{-x} (en azul) y $\arctan(x)$ (en rojo)

9.1. Planteamiento del problema

De forma general, el problema que se aborda en este capítulo consiste en hallar las raíces de una función $f(x)$. Es decir, encontrar los valores de x que satisfacen:

$$f(x) = 0 \quad (9.3)$$

De forma más específica, el problema puede establecerse así:

Dada una función $f(x)$, se requiere obtener al menos un valor \hat{x} tal que el valor de $f(\hat{x})$ sea suficientemente pequeño.

Para poder abordar ese problema, es necesario hacer varias precisiones:

- La variable independiente x se asume como real. La función $f(x)$ entrega también valores reales:

$$f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \quad (9.4)$$

- La variable independiente x está acotada por unos valores conocidos. En otras palabras, nos interesa encontrar raíces que estén contenidas en un cierto intervalo:

$$x \in [X_{min}, X_{max}] \quad (9.5)$$

- Se presupone que sabemos calcular $f(x)$ para cualquier valor en el intervalo $[X_{min}, X_{max}]$
- La expresión “suficientemente pequeño” puede interpretarse así: establecemos un límite positivo ϵ por debajo del cual cualquier valor es *prácticamente cero*. Ese límite puede

estar definido por condiciones prácticas; por ejemplo, por el valor más pequeño que podamos medir con nuestros instrumentos de medida (i.e. voltímetros y amperímetros). El problema consiste, entonces en encontrar al menos un valor \hat{x} tal que:

$$|f(\hat{x})| < \epsilon \quad (9.6)$$

- Otra forma de interpretar la expresión “suficientemente pequeño” es la siguiente: reformulamos el problema como el de encontrar al menos un valor \hat{x} que esté “suficientemente cerca” de una raíz x_o ; establecemos un límite positivo δ por debajo del cual cualquier valor es *prácticamente cero*. El problema consiste, entonces en encontrar al menos un valor \hat{x} tal que:

$$|\hat{x} - x_o| < \delta \text{ para un } x_o \text{ tal que } f(x_o) = 0 \quad (9.7)$$

- El propósito real no es solucionar una cierta ecuación $f(x) = 0$ sino disponer de un *método* que permita solucionar *cualquier* función $f(x)$ o, al menos, cualquier función $f(x)$ que satisfaga unas condiciones mínimas.
- Una condición mínima que se impone a $f(x)$ es que sea continua. Algunos métodos imponen también la condición de que sea derivable. La condición de continuidad permite aplicar el Teorema de Bolzano:

Teorema de Bolzano. Sea $f(x) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos contrarios, entonces hay un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

9.2. Algunos métodos

9.2.1. Método de fuerza bruta

El método de fuerza bruta consiste en calcular $f(x)$ en ‘todos’ los valores posibles de x para determinar en cuáles de ellos se hace cero. La palabra ‘todos’ está entrecomillada porque, por supuesto, es imposible cubrir todos los valores de x , porque estos son infinitos.

Para aplicar el método de la fuerza bruta primero se definen:

- Un valor positivo δ que representa la precisión con la que se desea calcular las raíces.
- El intervalo $[X_{min}, X_{max}]$ en el que se va a realizar la búsqueda de las raíces.

Posteriormente debemos calcular $f(x)$ en muchos puntos: en X_{min} , en $X_{min} + \delta$, en $X_{min} + 2\delta$, etc. hasta llegar X_{max} . Esos son ‘todos’ los valores posibles de x .

Es posible que en alguno de esos puntos la función valga 0, en cuyo caso habremos encontrado una raíz. Aún cuando eso no suceda, si se encuentran dos puntos consecutivos x_k y x_{k+1}

Tabla 9.1: Método de fuerza bruta aplicado al ejemplo 9.1

It.	x	$f(x)$
1	0.000000	1.000000
2	0.000010	0.999980
3	0.000020	0.999960
\vdots	\vdots	\vdots
60657	0.606550	0.000007
60658	0.606560	-0.000006

tales que $f(x_k)$ y $f(x_{k+1})$ tengan signos diferentes, podremos aplicar el Teorema de Bolzano para afirmar que hay una raíz en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Como el ancho de ese intervalo es δ , también podemos afirmar que hay una raíz en la mitad del intervalo, con precisión δ .

Ejemplo 9.1 (Método de fuerza bruta)

Este ejemplo ilustra el uso del método de la fuerza bruta, aplicándolo para solucionar la ecuación 9.2. Para ello, escribimos la ecuación en la forma de la ecuación 9.3:

$$f(x) = e^{-x} - \arctan(x) = 0 \quad (9.8)$$

La figura 9.2 muestra el comportamiento de $f(x)$. Se observa que hay una raíz \hat{x} en el intervalo $[0, 1]$. Para aplicar el método de la fuerza bruta hemos seleccionado una precisión $\delta_x = 10^{-5}$. Debemos calcular la función en los puntos: 0.0, 0.00001, 0.00002 hasta llegar a 1.0, es decir en 100001 puntos.

La tabla 9.1 muestra unos pocos valores calculados. Nótese que el signo de $f(x)$ cambia al pasar de $x = 0.60655$ a $x = 0.60656$. Por eso, podemos afirmar que la raíz \hat{x} está entre esos dos valores:

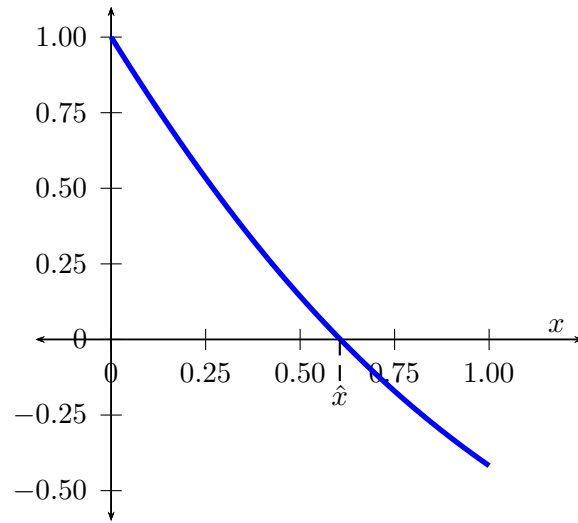
$$\hat{x} = 0.606555 \pm 5 \times 10^{-6} \quad (9.9)$$

9.2.2. Método de bisección

El método de bisección consiste en disminuir sucesivamente el ancho del intervalo hasta asegurar que la raíz esté en un intervalo pequeño. En cada paso del algoritmo el ancho se reduce a la mitad.

Para aplicar el método de bisección primero se definen:

- Un valor positivo δ que representa la precisión con la que se desea calcular las raíces.

Figura 9.2: Función $f(x) = e^{-x} - \arctan(x)$

- El intervalo $[X_{min}, X_{max}]$ en el que se va a realizar la búsqueda de las raíces. Los límites deben escogerse de tal manera que la función tenga valores diferentes en cada uno de ellos, es decir:

$$f(X_{min}) \times f(X_{max}) < 0 \quad (9.10)$$

Para reducir el tamaño del intervalo se toma el punto intermedio $X_c = \frac{X_{min} + X_{max}}{2}$ y se calcula la función allí. Si la función vale cero, se ha encontrado la raíz; si no vale cero se construye un nuevo intervalo en el que uno de los límites es X_c y el otro es el límite del intervalo cuya función es de signo contrario, de tal manera que se pueda aplicar el Teorema de Bolzano. El proceso se repite hasta que el intervalo sea menor que δ o que la función valga menos que ϵ .

¿Cuántas veces hay que repetir el proceso? Si el intervalo inicial tiene ancho I , el ancho I_k del intervalo después de haber aplicado k veces el procedimiento es:

$$I_k = I \frac{1}{2^k} \quad (9.11)$$

Por tanto, para lograr que ese intervalo sea menor que δ se requiere

$$\begin{aligned}
 I \frac{1}{2^k} &< \delta \\
 2^k &> \frac{I}{\delta} \\
 k \log 2 &> \log I - \log \delta \\
 k &> \frac{\log I - \log \delta}{\log 2}
 \end{aligned} \tag{9.12}$$

Ejemplo 9.2 (Método de bisección)

Este ejemplo ilustra el uso del método de bisección, aplicándolo para solucionar la ecuación

$$f(x) = e^{-x} - \arctan(x) = 0 \tag{9.13}$$

Para aplicar el método hemos seleccionado:

- $\delta = 10^{-5}$
- $X_{min} = 0$ y $X_{max} = 2$, que satisface:

$$f(0) \times f(2) = 1 \times -1 = -1 < 0 \tag{9.14}$$

La Tabla 9.2 muestra los cálculos del algoritmo para las primeras 8 iteraciones y la figura 9.3 muestra los valores de las primeras 4.

En la Tabla, para cada iteración se muestran 2 filas, una para x y otra para $f(x)$ y en cada una de esas líneas hay tres datos, correspondientes al límite inferior del intervalo, el punto medio y el límite superior.

Por ejemplo, para la iteración 0 el intervalo es $[0.0, 2.0]$ y el punto intermedio es 1.0. Por eso los valores que toma x son: 0.0, 1.0 y 2.0 cuyas funciones toman los valores 1.0, -0.4 y -1.0 respectivamente.

Se han escrito en color rojo los valores que pasan a ser los límites del intervalo en la siguiente iteración. Por ejemplo, en la iteración 0 se han tomado los valores de $x = 0.0$ y $x = 1.0$ que pasan a ser los valores extremos en la iteración 1. Nótese que en cada iteración se toma el valor central y el otro límite cuya función tiene signo contrario. Los dos puntos seleccionados en cada iteración son los que aparecen en rojo en la figura 9.3.

Después de repetir el proceso 18 veces se obtiene que:

$$\hat{x} \in [0.60655212, 0.60655593] \tag{9.15}$$

Tabla 9.2: Método de bisección aplicada al ejemplo 9.2. Primeras iteraciones.

It.	Puntos		
0	x	0.0000000	1.0000000
	$f(x)$	1.0000000	-0.4175187
1	x	0.0000000	0.5000000
	$f(x)$	1.0000000	-0.4175187
2	x	0.5000000	0.7500000
	$f(x)$	0.1428831	-0.1711346
3	x	0.5000000	0.6250000
	$f(x)$	0.1428831	-0.0233379
4	x	0.5000000	0.5625000
	$f(x)$	0.1428831	0.0573934
5	x	0.5625000	0.5937500
	$f(x)$	0.0573934	0.0164412
6	x	0.5937500	0.6093750
	$f(x)$	0.0164412	-0.0035938
7	x	0.5937500	0.6015625
	$f(x)$	0.0164412	0.0063872

Es decir,

$$\hat{x} = 0.606554 \pm 2 \times 10^{-6} \quad (9.16)$$

9.2.3. Método de n -sección

Nótese que en el método de bisección se calcula la función en el punto intermedio X_c , con lo que se divide el intervalo en dos mitades. El método de n -sección es una variante del método de bisección, que consiste en calcular la función en $n - 1$ puntos igualmente espaciados, de tal forma que el intervalo queda dividido en n sub-intervalos de igual ancho.

Para aplicar el método de n -sección primero se definen:

- El número n de sub-intervalos que se crearán en cada iteración
- Un valor positivo δ que representa la precisión con la que se desea calcular las raíces.
- El intervalo $[X_{min}, X_{max}]$ en el que se va a realizar la búsqueda de las raíces. Los límites deben escogerse de tal manera que la función tenga valores diferentes en cada uno de ellos, es decir:

$$f(X_{min}) \times f(X_{max}) < 0 \quad (9.17)$$

Si el intervalo inicial tiene ancho I , el ancho I_k del intervalo después de haber aplicado k veces el procedimiento es:

$$I_k = I \frac{1}{n^k} \quad (9.18)$$

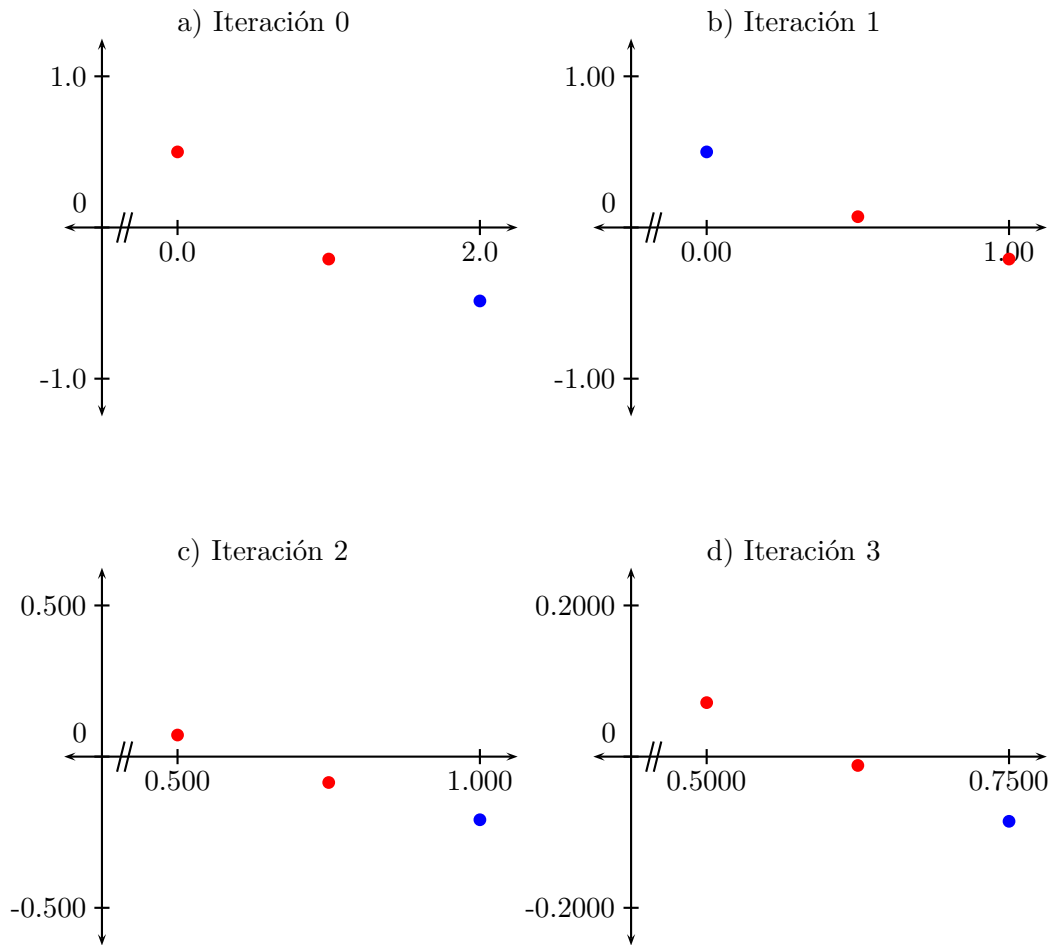


Figura 9.3: Método de bisección para el ejemplo 9.2. Primeras iteraciones.

Por tanto, para lograr que ese intervalo sea menor que δ se requiere

$$\begin{aligned}
 I \frac{1}{n^k} &< \delta \\
 n^k &> \frac{I}{\delta} \\
 k \log n &> \log I - \log \delta \\
 k &> \frac{\log I - \log \delta}{\log n}
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

Ejemplo 9.3 (Método de n -sección)

Este ejemplo ilustra el uso del método de n -sección, aplicándolo para solucionar la ecuación

$$f(x) = e^{-x} - \arctan(x) = 0 \tag{9.20}$$

Para aplicar el método hemos seleccionado:

- $n = 10$
- $\delta = 10^{-5}$
- $X_{min} = 0$ y $X_{max} = 2$, que satisface:

$$f(0) \times f(2) = 1 \times -1 = -1 < 0 \tag{9.21}$$

La Tabla 9.3 muestra los cálculos del algoritmo para las primeras 5 iteraciones y la figura 9.4 muestra los valores de las primeras 4.

En la Tabla, para cada iteración se muestran 2 filas, una para x y otra para $f(x)$ y en cada una de esas líneas hay $n + 1$ datos, correspondientes a todos los puntos con los que se ha subdividido cada intervalo.

Se han escrito en color rojo los valores que pasan a ser los límites del intervalo en la siguiente iteración. Por ejemplo, en la iteración 0 se han tomado los valores de $x = 0.6$ y $x = 0.8$ que pasan a ser los valores extremos en la iteración 1.

Después de repetir el proceso 5 veces se obtiene que:

$$\hat{x} \in [0.606554, 0.606556] \tag{9.22}$$

Es decir,

$$\hat{x} = 0.606555 \pm 5 \times 10^{-6} \tag{9.23}$$

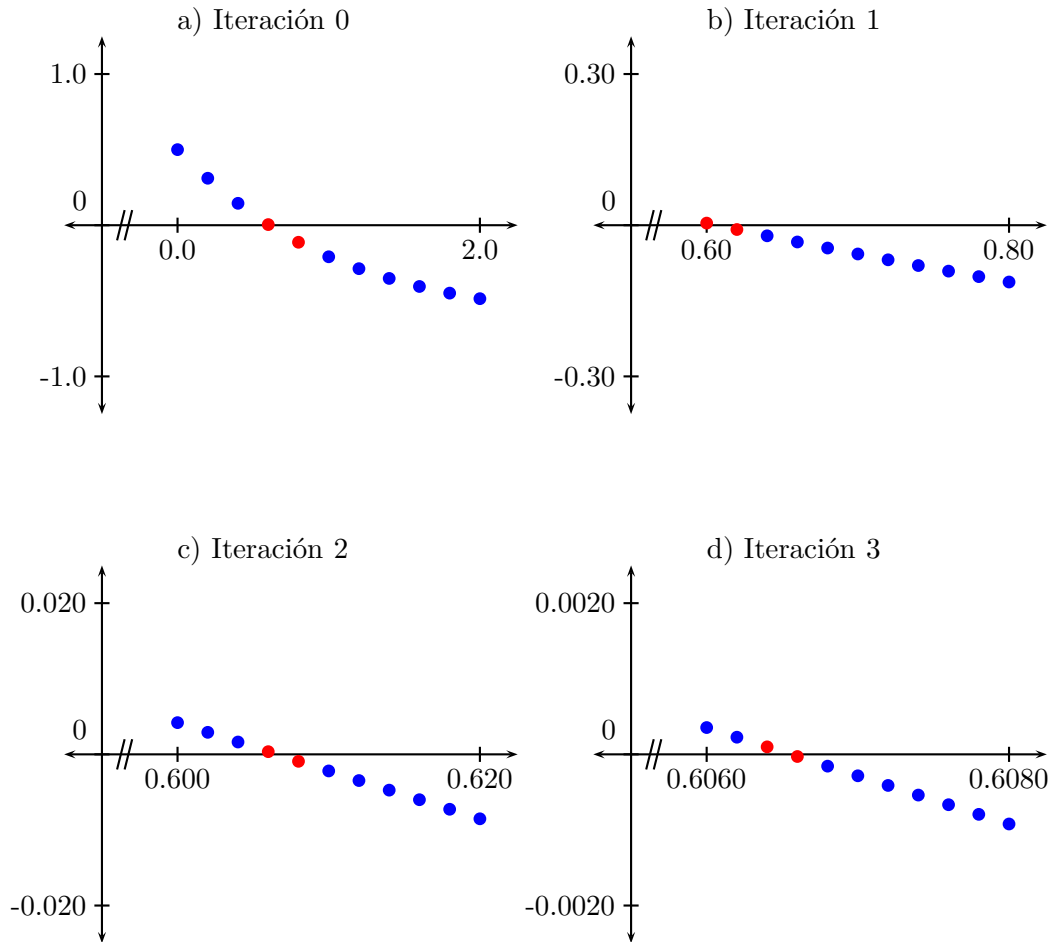


Figura 9.4: Método de n -sección ($n = 10$) para el ejemplo 9.3. Primeras iteraciones.

9.2.4. Métodos de la secante

En estos métodos también se parte de un intervalo inicial $[x_a, x_b]$. En cada iteración se calcula un tercer valor x_c y se construye un nuevo intervalo. A diferencia del método de bisección, x_c ya no es el punto intermedio. Es más, es posible que x_c no esté incluido dentro del intervalo original.

Para aplicar el método de n -sección primero se definen:

- Un valor positivo ϵ que representa la precisión con la que se desea decidir si un cierto punto es o no una raíz.
- El intervalo inicial $[x_a, x_b]$. No se impone ninguna condición sobre el signo de la función en los límites del intervalo.

Tabla 9.3: Método de n-sección ($n = 10$) aplicada al ejemplo 9.3

It.		Puntos											
0	x	0.0000000	0.2000000	0.4000000	0.6000000	0.8000000	1.0000000	1.2000000	1.4000000	1.6000000	1.8000000	2.0000000	
	$f(x)$	1.0000000	0.6213352	0.2898137	0.0083921	-0.2254120	-0.4175187	-0.5748638	-0.7039499	-0.8103005	-0.8983989	-0.9718134	
1	x	0.6000000	0.6200000	0.6400000	0.6600000	0.6800000	0.7000000	0.7200000	0.7400000	0.7600000	0.7800000	0.8000000	
	$f(x)$	0.0083921	-0.0170513	-0.0420208	-0.0665217	-0.0905597	-0.1141407	-0.1372708	-0.1599564	-0.1822040	-0.2040203	-0.2254120	
2	x	0.6000000	0.6020000	0.6040000	0.6060000	0.6080000	0.6100000	0.6120000	0.6140000	0.6160000	0.6180000	0.6200000	
	$f(x)$	0.0083921	0.0058263	0.0032653	0.0007090	-0.0018424	-0.0043891	-0.0069311	-0.0094683	-0.0120007	-0.0145284	-0.0170513	
3	x	0.6060000	0.6062000	0.6064000	0.6066000	0.6068000	0.6070000	0.6072000	0.6074000	0.6076000	0.6078000	0.6080000	
	$f(x)$	0.0007090	0.0004537	0.0001984	-0.0000569	-0.0003121	-0.0005673	-0.0008224	-0.0010775	-0.0013325	-0.0015875	-0.0018424	
4	x	0.6064000	0.6064200	0.6064400	0.6064600	0.6064800	0.6065000	0.6065200	0.6065400	0.6065600	0.6065800	0.6066000	
	$f(x)$	0.0001984	0.0001728	0.0001473	0.0001218	0.0000962	0.0000707	0.0000452	0.0000197	-0.0000059	-0.0000314	-0.0000569	
5	x	0.6065400	0.6065420	0.6065440	0.6065460	0.6065480	0.6065500	0.6065520	0.6065540	0.6065560	0.6065580	0.6065600	
	$f(x)$	0.0000197	0.0000171	0.0000146	0.0000120	0.0000095	0.0000069	0.0000044	0.0000018	-0.0000008	-0.0000033	-0.0000059	

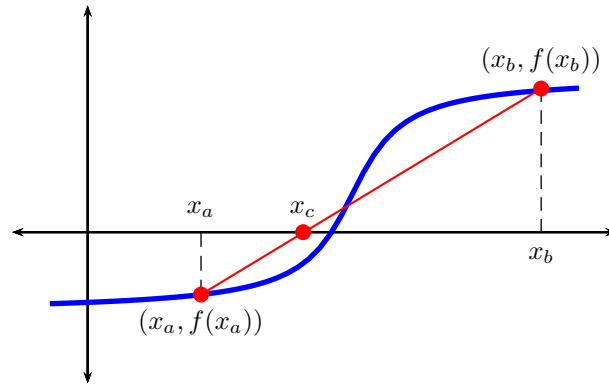


Figura 9.5: Métodos de la secante

El procedimiento para calcular x_c se ilustra en la figura 9.5: se traza la línea recta que pasa por los puntos extremos, es decir, por $(x_a, f(x_a))$ y $(x_b, f(x_b))$. La pendiente de esa recta será:

$$m = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a} \quad (9.24)$$

El valor de x_c corresponde al punto en donde esa línea recta cruza el eje horizontal.

Una vez calculado x_c hay tres valores de x : x_a , x_b y x_c . Para la siguiente iteración se define un nuevo intervalo con dos de esos puntos y se repite el proceso hasta que $|f(x_c)| < \epsilon$.

Para seleccionar los dos puntos que define el nuevo intervalo hay diferentes alternativas, que dan origen a distintos métodos como los siguientes:

- Cuerda: se seleccionan x_a y x_c .
- Rotación de puntos : se seleccionan x_b se convierte en el nuevo x_a y x_c en el nuevo x_b :

$$\begin{aligned} x_a &\leftarrow x_b \\ x_b &\leftarrow x_c \end{aligned} \quad (9.25)$$

- Mejores puntos : se seleccionan los dos puntos cuyas funciones tengan el menor valor absoluto.

Ejemplo 9.4 (Métodos de la secante)

Este ejemplo ilustra el uso del método de n -sección, aplicándolo para solucionar la ecuación

$$f(x) = e^{-x} - \arctan(x) = 0 \quad (9.26)$$

Para aplicar el método se ha seleccionado:

Tabla 9.4: Método de la cuerda aplicado al ejemplo 9.4

It.	x_a	$f(x_a)$	x_b	$f(x_b)$	m	x_c
0	0.0000000	1.0000000	2.0000000	-0.9718134	-0.9859067	1.0142947
1	0.0000000	1.0000000	1.0142947	-0.4298366	-1.4096855	0.7093781
2	0.0000000	1.0000000	0.7093781	-0.1250422	-1.5859557	0.6305346
3	0.0000000	1.0000000	0.6305346	-0.0302622	-1.6339503	0.6120137
4	0.0000000	1.0000000	0.6120137	-0.0069485	-1.6453038	0.6077905
5	0.0000000	1.0000000	0.6077905	-0.0015754	-1.6478958	0.6068345
6	0.0000000	1.0000000	0.6068345	-0.0003561	-1.6484827	0.6066185
7	0.0000000	1.0000000	0.6066185	-0.0000805	-1.6486153	0.6065696
8	0.0000000	1.0000000	0.6065696	-0.0000182	-1.6486453	0.6065586
9	0.0000000	1.0000000	0.6065586	-0.0000041	-1.6486520	0.6065561
10	0.0000000	1.0000000	0.6065561	-0.0000009	-1.6486535	0.6065556
11	0.0000000	1.0000000	0.6065556	-0.0000002	-1.6486539	0.6065554
12	0.0000000	1.0000000	0.6065554	-0.0000000	-1.6486540	0.6065554
13	0.0000000	1.0000000	0.6065554	-0.0000000	-1.6486540	0.6065554

Tabla 9.5: Método de la rotación de puntos aplicado al ejemplo 9.4

It.	x_a	$f(x_a)$	x_b	$f(x_b)$	m	x_c
0	0.0000000	1.0000000	2.0000000	-0.9718134	-0.9859067	1.0142947
1	2.0000000	-0.9718134	1.0142947	-0.4298366	-0.5498366	0.2325415
2	1.0142947	-0.4298366	0.2325415	0.5640361	-1.2713380	0.6761969
3	0.2325415	0.5640361	0.6761969	-0.0860241	-1.4652365	0.6174869
4	0.6761969	-0.0860241	0.6174869	-0.0138803	-1.2288154	0.6061912
5	0.6174869	-0.0138803	0.6061912	0.0004649	-1.2699742	0.6065573
6	0.6061912	0.0004649	0.6065573	-0.0000024	-1.2764845	0.6065554

- $\epsilon = 10^{-8}$
- $x_a = 0$ y $x_b = 2$.

Se ha aplicado el método de la secante en sus tres variantes: 1. cuerda, 2. rotación de puntos y 3. mejores dos puntos. Los resultados de cada iteración se han incluido en las Tablas 9.4, 9.5 y 9.6. En cada una de esas tablas se ha incluido la totalidad de las iteraciones que se necesitaron para lograr la precisión deseada ($|f(\hat{x})| < \epsilon$); puede verse que para este problema el método de la cuerda requirió más iteraciones que los otros dos.

En la figura 9.6 se ilustra la evolución de los tres métodos en las primeras iteraciones. Se ha utilizado un color diferente para mostrar la recta secante y los tres puntos de cada iteración. Puede observarse como el intervalo se va haciendo cada vez más pequeño, y se va acercando a la raíz.

Los resultados obtenidos se consignan en la siguiente tabla:

Cuerda	Rotación de puntos	Mejores puntos
$0.6065554 \pm 1e - 7$	$0.6065554 \pm 2e - 6$	$0.6065554 \pm 4e - 6$

Tabla 9.6: Método de los mejores puntos aplicado al ejemplo 9.4

It.	x_a	$f(x_a)$	x_b	$f(x_b)$	m	x_c
0	0.0000000	1.0000000	2.0000000	-0.9718134	-0.9859067	1.0142947
1	2.0000000	-0.9718134	1.0142947	-0.4298366	-0.5498366	0.2325415
2	1.0142947	-0.4298366	0.2325415	0.5640361	-1.2713380	0.6761969
3	1.0142947	-0.4298366	0.6761969	-0.0860241	-1.0169023	0.5916026
4	0.6761969	-0.0860241	0.5916026	0.0192175	-1.2440751	0.6070499
5	0.5916026	0.0192175	0.6070499	-0.0006309	-1.2849188	0.6065589
6	0.6070499	-0.0006309	0.6065589	-0.0000044	-1.2759711	0.6065554

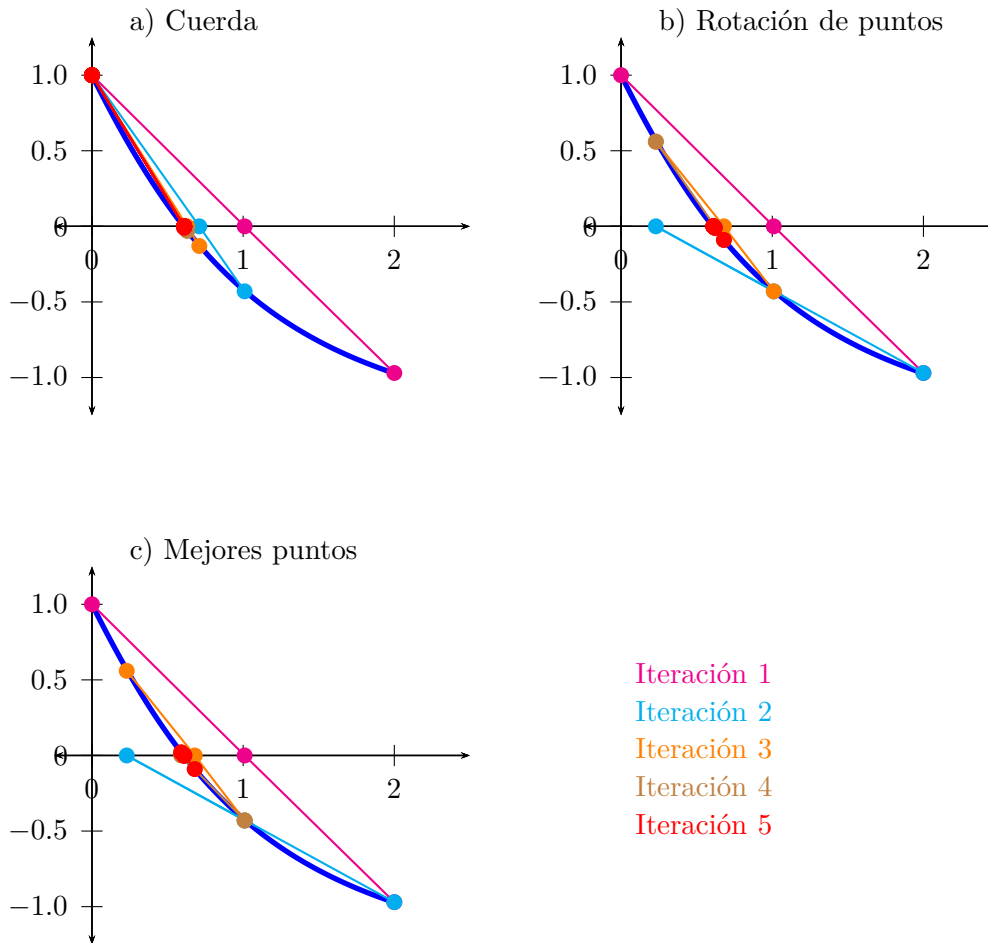


Figura 9.6: Métodos de la secante para el ejemplo 9.4.

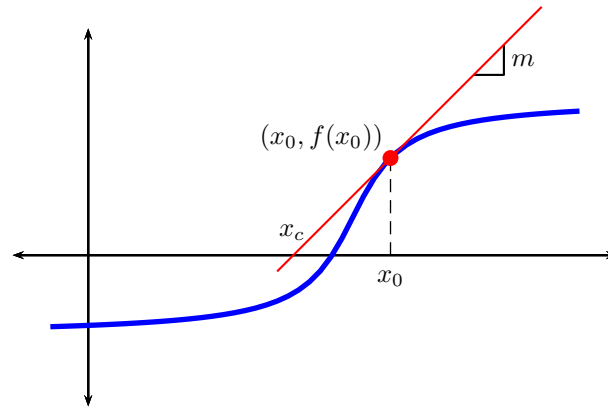


Figura 9.7: Método de Newton-Raphson

9.2.5. Método de Newton-Raphson

En el método de Newton-Raphson se parte de un valor inicial x_0 . En cada iteración se calcula un nuevo valor x_c .

Para aplicar el método de Newton-Raphson primero se definen:

- Un valor positivo ϵ que representa la precisión con la que se desea decidir si un cierto punto es o no una raíz.
- Un valor inicial x_0 .

El procedimiento para encontrar x_c se ilustra en la figura 9.7: se construye la recta tangente a $f(x)$ que pasa por $(x_0, f(x_0))$. El valor de x_c corresponde al punto en donde esa recta cruza el eje horizontal:

$$x_c = x_0 - \frac{f(x_0)}{m} \quad (9.27)$$

La pendiente de esa recta será:

$$m = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (9.28)$$

Lo anterior significa que para poder emplear el método de Newton-Raphson es necesario poder calcular la derivada de la función. Este hecho puede interpretarse como una desventaja del método respecto a los otros métodos que aquí se han presentado. Sin embargo, contar con la derivada (si ello es posible) suele acelerar considerablemente el proceso iterativo. De hecho, los métodos de la secante pueden entenderse como una modificación del método de Newton-Raphson, en la que la pendiente de la recta tangente se estima a partir de una pareja de puntos.

Tabla 9.7: Método de Newton-Raphson aplicado al ejemplo 9.5

It.	x_a	$f(x_a)$	m	x_c
0	0.0000000	1.0000000	-2.0000000	0.5000000
1	0.5000000	0.1428831	-1.4065307	0.6015855
2	0.6015855	0.0063578	-1.2822078	0.6065439
3	0.6065439	0.0000147	-1.2762820	0.6065554

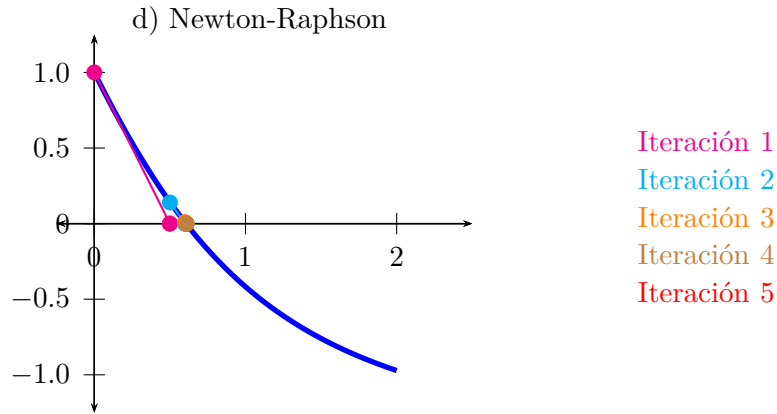


Figura 9.8: Métodos de Newton-Raphson para el ejemplo 9.5.

Ejemplo 9.5 (Método de Newton-Raphson)

Este ejemplo ilustra el uso del método de Newton-Raphson, aplicándolo para solucionar la ecuación

$$f(x) = e^{-x} - \arctan(x) = 0 \quad (9.29)$$

Para aplicar el método se ha seleccionado:

- $\delta = 10^{-5}$
- $x_0 = 0$

Los resultados de cada iteración se han incluido en la Tabla 9.7, mientras que en la figura 9.8 se ilustra la evolución del método en las primeras iteraciones. Se ha utilizado un color diferente para mostrar la recta secante y los tres puntos de cada iteración. Puede observarse como el valor de x se va acercando a la raíz.

Al cabo de 4 iteraciones se logra la precisión requerida ($|f(\hat{x})| < \epsilon$) y se obtiene como resultado:

$$\hat{x} = 0.6065554 \pm 8e - 9 \quad (9.30)$$

9.3. Aplicación al análisis de circuitos

Para ilustrar la aplicación de los métodos numéricos anteriores al análisis de circuitos se han desarrollado tres ejemplos. Los tres ejemplos se refieren al mismo circuito, un rectificador de media onda como el estudiado en la sección 6.1.2.

La diferencia entre los tres casos está en la fuente de tensión que alimenta el circuito. En el ejemplo 9.6 se utiliza una fuente DC de valor variable, en el ejemplo 9.7 una fuente AC mientras que en el ejemplo 9.8 se comparan cuatro fuentes AC de diferentes amplitudes. Los tres ejemplos emplean el método Newton-Raphson.

Ejemplo 9.6 (Rectificador de media onda en DC)

En la sección 6.1.2 se analizó gráficamente un rectificador de media onda. En este ejemplo se analiza ese mismo circuito empleando un modelo matemático del diodo. El circuito se muestra en la figura 9.9

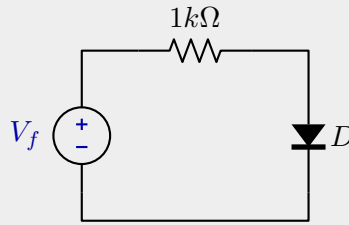


Figura 9.9: Rectificador de media onda

El diodo se modela con la ecuación de Shockley (véase [12], ec. 4.19) que explica la corriente en el diodo I_D en función de la tensión entre sus terminales V_D (Es decir, es controlado por tensión)

$$I_D = f(V_D) = I_s \left(e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1 \right) \quad (9.31)$$

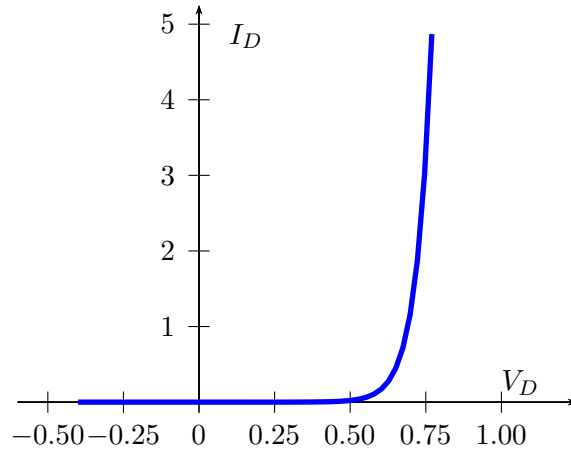
En este ejemplo no ahondaremos en el sentido físico de la ecuación ni de sus parámetros, cuyos valores son

$$\begin{aligned} I_s &= 10^{-6} A \\ \eta &= 2 \\ V_T &= 0.025 mV \end{aligned} \quad (9.32)$$

La característica $v - i$ del diodo con estos parámetros se muestra en la figura 9.10.

Al aplicar la LVK en el circuito se obtiene

$$\begin{aligned} V_f - RI_D - V_D &= 0 \\ V_f - RI_s \left(e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1 \right) - V_D &= 0 \end{aligned} \quad (9.33)$$

Figura 9.10: Característica $v - i$ del diodo del ejemplo 9.6

De donde se obtiene la ecuación $f(V_D) = 0$ que debe solucionarse para obtener el valor de V_D :

$$f(V_D) = V_f - RI_s \left(e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1 \right) - V_D \quad (9.34)$$

Para aplicar el método de Newton-Raphson se calcula la derivada respecto a la incógnita:

$$\frac{df(V_D)}{dV_D} = -\frac{RI_s}{\eta V_T} e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1 \quad (9.35)$$

La Tabla 9.8 muestra los resultados al aplicar el método de Newton-Raphson para distintos valores de V_f . Estos datos se han graficado en la figura 9.11.

Vale la pena comparar las figuras 6.12 y 9.11. Ambas figuras muestran el comportamiento esperado del circuito rectificador de media onda ante fuentes de tensión constante. La primera de las figuras se obtuvo a partir del análisis gráfico con un modelo ideal del diodo, mientras que la segunda se obtuvo empleando un análisis numérico con un modelo del diodo basado en el fenómeno físico que sucede a su interior. Nótese que la pendiente del tramo recto corresponde a la conductancia del Resistor.

Ejemplo 9.7 (Rectificador de media onda en AC)

En este ejemplo retomamos el circuito analizado gráficamente en el ejemplo 6.4 pero, ahora, empleando el modelo matemático del diodo basado en la ecuación de Shockley.

$$I_D = f(V_D) = I_s \left(e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1 \right) \quad (9.36)$$

Tabla 9.8: Resultados del ejemplo 9.6

V_f (V)	V_D (V)	I_D (mA)	error
-1.00000	-0.99900	-0.00100	0.00e+00
-0.90000	-0.89900	-0.00100	0.00e+00
-0.80000	-0.79900	-0.00100	0.00e+00
-0.70000	-0.69900	-0.00100	0.00e+00
-0.60000	-0.59900	-0.00100	0.00e+00
-0.50000	-0.49900	-0.00100	0.00e+00
-0.40000	-0.39900	-0.00100	0.00e+00
-0.30000	-0.29900	-0.00100	0.00e+00
-0.20000	-0.19902	-0.00098	0.00e+00
-0.10000	-0.09914	-0.00086	0.00e+00
-0.00000	-0.00000	-0.00000	4.63e-22
0.10000	0.09452	0.00548	0.00e+00
0.20000	0.17137	0.02863	0.00e+00
0.30000	0.22136	0.07864	-2.78e-17
0.40000	0.25277	0.14723	5.55e-17
0.50000	0.27426	0.22574	0.00e+00
0.60000	0.29021	0.30979	5.55e-17
0.70000	0.30274	0.39726	5.55e-17
0.80000	0.31302	0.48698	-5.55e-17
0.90000	0.32169	0.57831	1.67e-16
1.00000	0.32919	0.67081	1.11e-16
1.10000	0.33577	0.76423	1.67e-16
1.20000	0.34164	0.85836	1.11e-16
1.30000	0.34692	0.95308	-5.55e-17
1.40000	0.35173	1.04827	1.11e-16
1.50000	0.35614	1.14386	-1.67e-16
1.60000	0.36021	1.23979	-7.22e-16
1.70000	0.36399	1.33601	-5.00e-16
1.80000	0.36751	1.43249	6.66e-16
1.90000	0.37081	1.52919	4.44e-16
2.00000	0.37391	1.62609	-4.44e-16

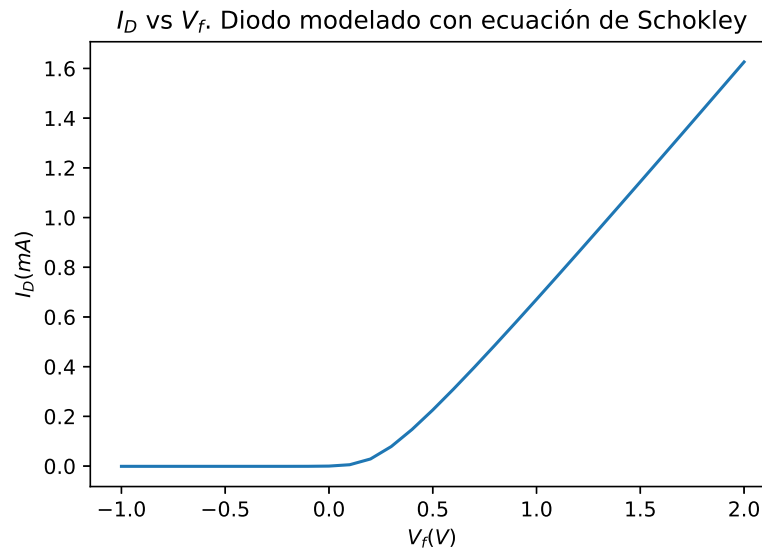


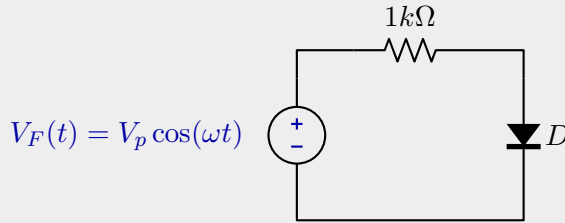
Figura 9.11: Resultados del ejemplo 9.6

Utilizaremos los mismos valores de los parámetros que se emplearon en el ejemplo 9.6:

$$\begin{aligned} I_s &= 10^{-6} A \\ \eta &= 2 \\ V_T &= 0.025 mV \end{aligned} \quad (9.37)$$

La característica $v - i$ del diodo con estos parámetros se muestra en la figura 9.10.

El circuito ahora se alimenta con una fuente de tensión alterna:



En este ejemplo, la tensión pico es $V_p = 1V$ y la frecuencia de la señal es $f = 60Hz$; por tanto

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f = 377 rad/s & : \text{Frecuencia angular} \\ T &= 1/f = 16.6 ms & : \text{Periodo} \end{aligned} \quad (9.38)$$

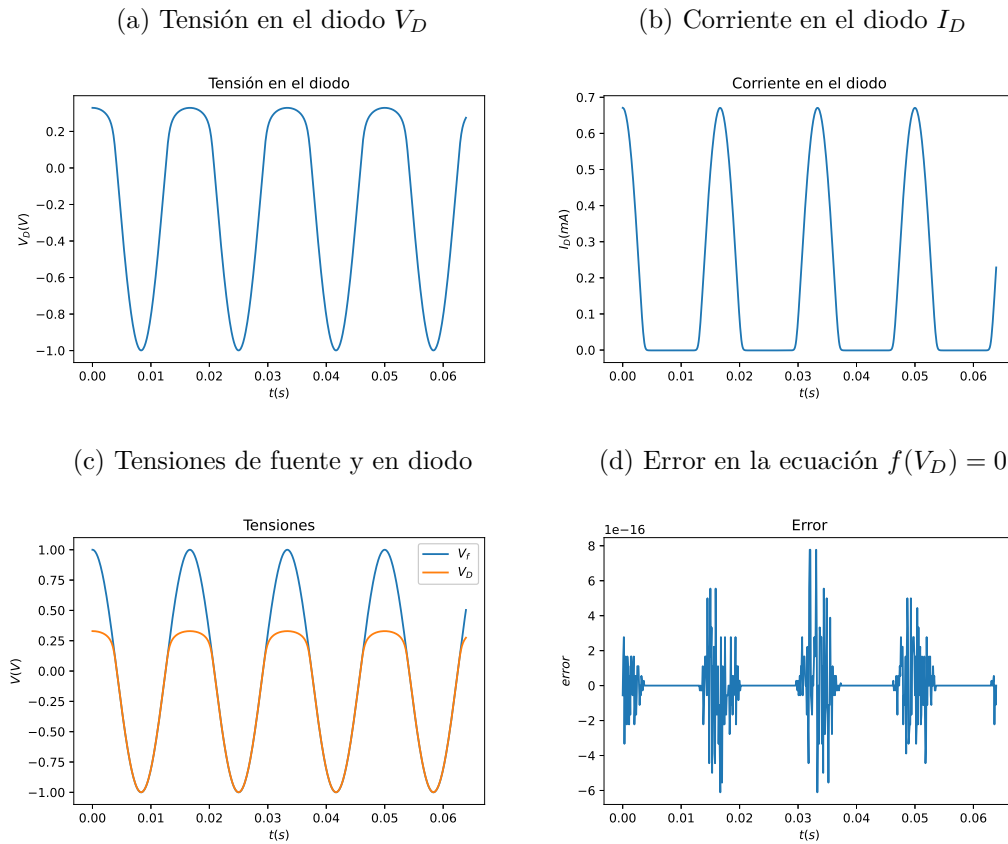
Para analizar el circuito se define un conjunto de valores de t para los cuales se deben calcular las variables. Un buen criterio consiste en escoger bastantes puntos dentro de un mismo periodo y cubrir varios periodos. Por ejemplo:

$$t : 0ms, 0.1ms, 0.2ms, \dots, 63.9ms, 64ms \quad (9.39)$$

Para cada uno de los valores de t se calcula $V_F(t) = V_p \cos(\omega t)$ y se aplica el método de Newton-Raphson para encontrar los valores de las variables del circuito, tal como se muestra en el ejemplo 9.6.

Ese procedimiento se ha aplicado, para un valor de $V_p = 1V$. Los resultados se muestran en la figura 9.12. En esa figura podemos hacer las siguientes observaciones:

- En la figura a se observa que la tensión en el diodo toma valores positivos y negativos. Este hecho debe contrastarse con el modelo de diodo ideal, según el cual en el diodo no puede haber tensiones positivas.
- En la figura b se muestra la corriente en el diodo, que es la misma corriente en el resistor.
- En la figura c se compara la tensión de alimentación con la tensión en el diodo. La diferencia de las dos corresponde a la tensión en el resistor.

Figura 9.12: Resultados del ejemplo 9.7 con $V_p = 1V$

- En la figura d se muestra el valor de $f(V_D)$ en la última iteración del método de Newton-Raphson. Esta es una medida del error cometido al emplear el método. Lo que muestra la figura es que es más difícil obtener el resultado numérico cuando el diodo está en polarización directa, en comparación con la polarización inversa.

Ejemplo 9.8 (Varios rectificadores de media onda en AC)

Para ilustrar qué tan preciso es el modelo de diodo ideal en un rectificador de media onda, en este ejemplo se analiza numéricamente ese circuito para varios valores de la tensión pico V_p y se contrasta con el análisis gráfico realizado en el ejemplo 6.4.

Los valores de V_p que se han utilizado son:

$$V_p : 0.5V, 1.0V, 10.0V, 40.0V \quad (9.40)$$

La Figura 9.13 compara la tensión de alimentación y la tensión en el diodo en cada uno de los

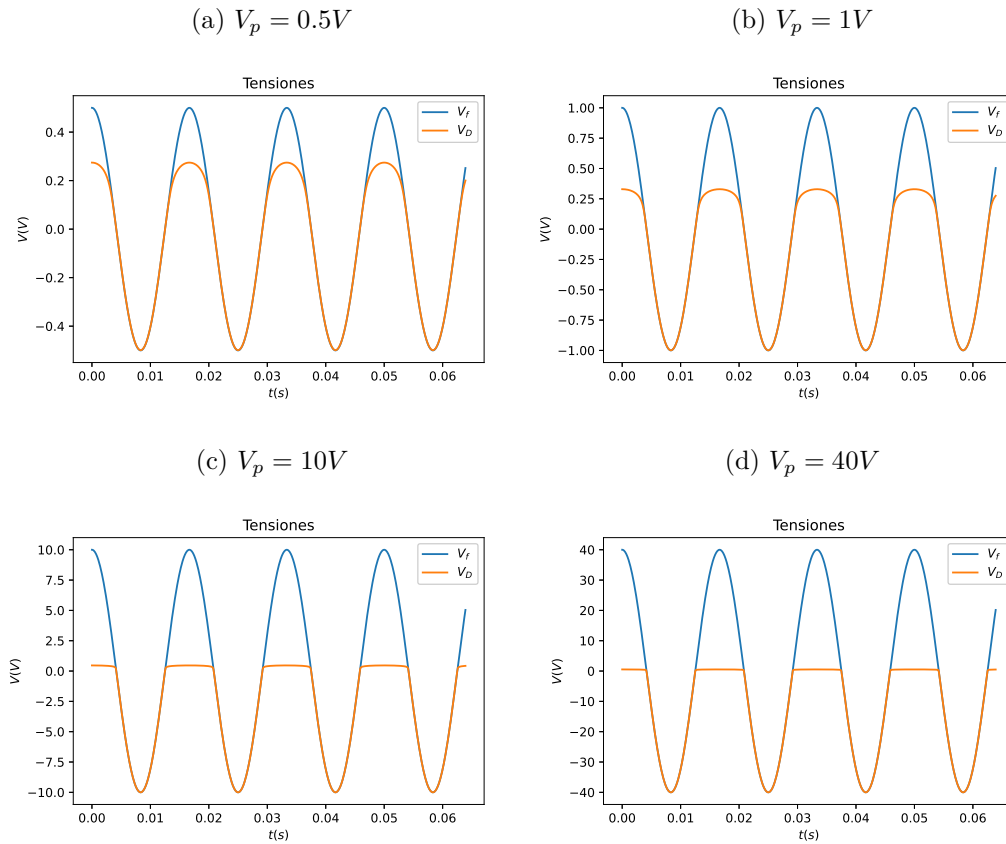


Figura 9.13: Resultados del ejemplo 9.7 para varios valores de V_p

cuatro casos. En esa figura se observa que al aumentar la tensión pico de la fuente, el modelo de diodo ideal es más preciso, porque los valores de tensiones positivas en el diodo son cada vez más pequeños en comparación con la tensión de la fuente.

Es importante aclarar que las tensiones positivas en el diodo son semejantes en los cuatro casos, cercanas a $0.7V$. Sin embargo, ese valor es comparativamente más pequeño si se compara con $40V$ que si se compara con $1V$.

9.4. Solución de sistemas de ecuaciones simultáneas

La presentación que se ha realizado en este capítulo ha estado enfocada en la obtención de una solución numérica de la ecuación 9.3. En esta sección abordaremos el problema más general que consiste en encontrar la solución a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (9.41)$$

La solución estará dada por un vector $\hat{\mathbf{x}}$ que contiene una solución numérica para cada una de las incógnitas:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

La presentación es meramente descriptiva, y se enfoca en cómo se extiende el método de Newton-Raphson del caso de una variable al caso multivariable.

Para ello, retomemos la ecuación 9.27: al considerar que ese proceso se realiza iterativamente, en la k -ésima iteración se calculará el valor x_{k+1} a partir de x_k así:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m} \quad (9.43)$$

o, lo que es igual:

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_k} \right)^{-1} \times f(x_k) \quad (9.44)$$

La extensión al caso multivariable se realiza con una ecuación matricial semejante a la ecuación 9.44. En dicha ecuación la variable x se sustituye por el vector \mathbf{x} , la función $f(x)$ por un vector de funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y la derivada por el *jacobiano* $\mathbf{J}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (\mathbf{J}(\mathbf{x}_k))^{-1} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (9.45)$$

en donde:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ \vdots \\ x_{n_k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} f_1(x_{1_k}, x_{2_k}, \dots, x_{n_k}) \\ f_2(x_{1_k}, x_{2_k}, \dots, x_{n_k}) \\ \vdots \\ f_n(x_{1_k}, x_{2_k}, \dots, x_{n_k}) \end{bmatrix} \quad (9.46)$$

y el jacobiano es una matriz que contiene las derivadas parciales de las n funciones respecto

a las n variables:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

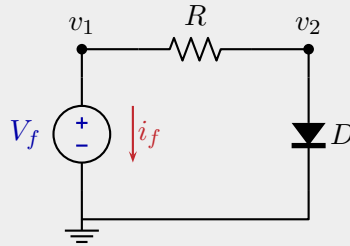
Por lo tanto, la ecuación que se utiliza para calcular un nuevo vector de soluciones en cada iteración es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \\ \vdots \\ x_{n_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ \vdots \\ x_{n_k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}^{-1} \times \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ \vdots \\ x_{n_k} \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

Para el análisis de circuitos eléctricos es necesario resolver sistemas de ecuaciones simultáneas. Si en el circuito existen elementos no lineales es necesario acudir a métodos numéricos que se implementan con ecuaciones semejantes a la expresión 9.48.

Ejemplo 9.9 (Aplicación de Newton-Raphson multidimensional)

Analicemos de nuevo el ejemplo 9.6 pero empleando un enfoque multidimensional para la aplicación de método de Newton-Raphson. El circuito es el siguiente:



Efectuemos un análisis de nodos modificado al circuito con los valores indicados en el circuito. Las incógnitas son v_1 , v_2 e i_f . Las tres ecuaciones resultantes son:

$$\begin{cases} \frac{v_1 - v_2}{R} + i_f = 0 \\ \frac{v_2 - v_1}{R} + I_s \left(e^{\frac{v_2}{\eta V_T}} - 1 \right) = 0 \\ v_1 = V_f \end{cases} \quad (9.49)$$

que pueden reescribirse como:

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_f) = \frac{v_1}{R} - \frac{v_2}{R} + i_f = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_f) = -\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + I_s \left(e^{\frac{v_2}{\eta V_T}} - 1 \right) = 0 \\ f_3(v_1, v_2, i_f) = v_1 - V_f = 0 \end{cases} \quad (9.50)$$

Si se define \mathbf{x} y $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_f \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(v_1, v_2, i_f) \\ f_2(v_1, v_2, i_f) \\ f_3(v_1, v_2, i_f) \end{bmatrix} \quad (9.51)$$

El jacobiano resulta ser:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & 1 \\ -\frac{1}{R} & \left(\frac{1}{R} + \frac{I_s}{\eta V_T} e^{\frac{v_2}{\eta V_T}} \right) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.52)$$

Para aplicar el método seleccionamos:

- $V_f = 1V$
- $R = 1k\Omega$
- $\epsilon = 10^{-9}$
- $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$

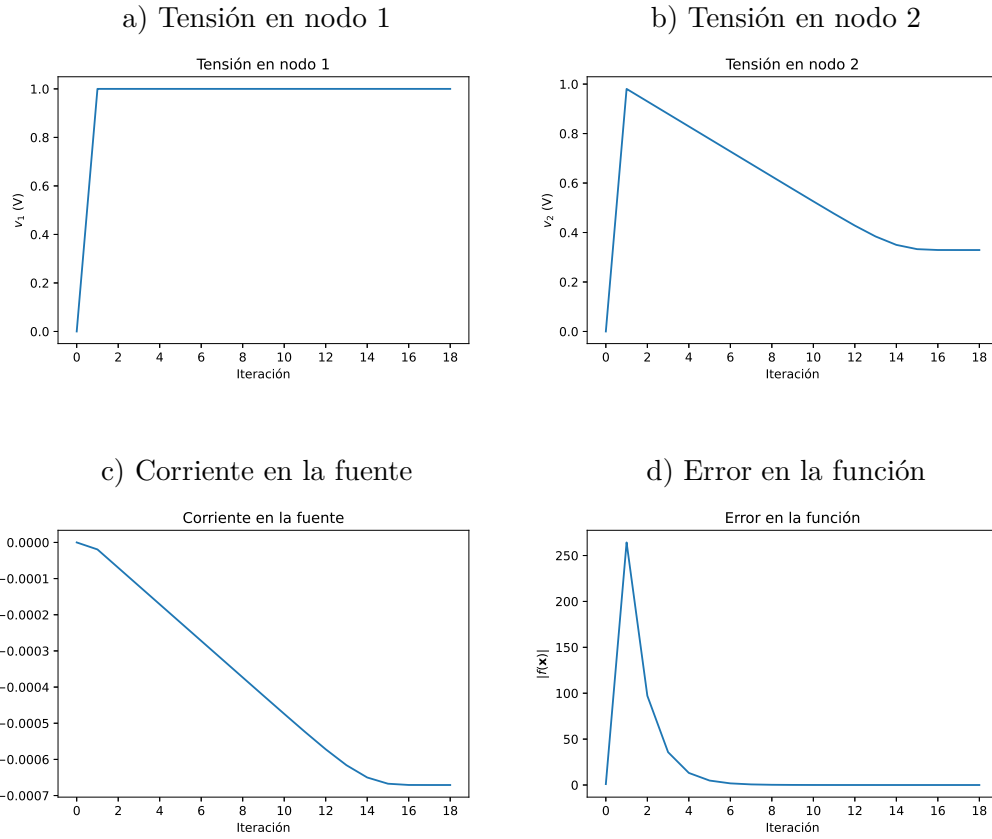


Figura 9.14: Resultados del ejemplo 9.9

La figura 9.14 muestra la evolución de las incógnitas y del error en la función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a lo largo de las iteraciones. Al cabo de 18 iteraciones se obtiene un vector tal que $\|\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\| < \epsilon$:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 0.3291855 \\ -0.0006708 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1.0000000 & V \\ v_2 = 0.3291855 & V \\ i_f = -6.708149 & mA \end{cases} \quad (9.53)$$

Este resultado puede compararse con el que se ha consignado en la Tabla 9.8 para $V_f = 1V$.

9.5. Consideraciones para el uso de métodos numéricos

Los ejemplos que se han presentado en este capítulo se han seleccionado para ilustrar como, mediante algoritmos iterativos, se puede encontrar el valor numérico de una variable incógnita

que satisfaga una cierta ecuación. Sin embargo, el uso de los métodos numéricos no siempre es tan sencillo.

El estudio de los métodos numéricos es un área amplia, profunda y de larga tradición. En esta sección se presentan de forma somera unas definiciones mínimas que se emplean para analizar la aplicación de los métodos en cada caso específico.

Convergencia : un método numérico es convergente sí y sólo sí la secuencia de valores numéricos que produce el método iteración tras iteración se acerca a un valor fijo. La convergencia puede ser local o global:

- Convergencia local: el método es localmente convergente si se puede asegurar que es convergente cuando el método inicia con valores cercanos a la solución buscada.
- Convergencia global: el método es globalmente convergente si se puede asegurar que es convergente cuando el método inicia con cualquier valor.

Consistencia : un método numérico es consistente sí y sólo sí converge a un valor que es solución de la ecuación estudiada; es decir, si el valor al que converge satisface la ecuación estudiada.

Velocidad de convergencia la velocidad de convergencia de un método es la rapidez con la que se obtiene una solución con una determinada precisión. Puede medirse en el número de veces que hay que calcular la función para llegar a ese valor. El ejemplo 9.10 ilustra esta propiedad.

Sensibilidad : la sensibilidad de un método numérico es la magnitud del efecto que cambios en los parámetros del método pueden tener sobre aspectos como la convergencia, la consistencia y la velocidad de convergencia.

Ejemplo 9.10 (Velocidad de convergencia)

En los ejemplos 9.1 a 9.5 se utilizan diferentes métodos numéricos para encontrar la solución de la misma ecuación:

$$f(x) = e^{-x} - \arctan(x) = 0 \quad (9.54)$$

La Tabla 9.9 compara los resultados obtenidos. En la columna **Cálculos** se ha consignado el número de veces que fue necesario calcular $f(x)$ ó df/dx . Del contenido de esa columna se desprende que cada hay diferencias en la velocidad de convergencia de los métodos empleados.

Tabla 9.9: Comparación de los métodos en los ejemplos

Método	Solución	Precisión	Cálculos
Fuerza bruta	0.6065550	$\pm 5 \cdot 10^{-6}$	100001
Bisección	0.6065540	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$	21
N-sección	0.6065550	$\pm 5 \cdot 10^{-6}$	50
Cuerda	0.6065554	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$	14
Rotación de puntos	0.6065554	$\pm 2 \cdot 10^{-6}$	7
Mejores puntos	0.6065554	$\pm 4 \cdot 10^{-6}$	7
Newton-Raphson	0.6065554	$\pm 8 \cdot 10^{-9}$	7

Apéndice A

Galería de ejemplos de obtención de ecuaciones

En este apéndice se presentan escuetamente las ecuaciones que resultan al analizar siete circuitos de ejemplo mediante el método del *Tableau* disperso, el método del *Tableau* reducido y el método MNA.

Para cada caso se presenta:

- El diagrama del circuito.
- El grafo del circuito.
- La representación tabular del circuito.
- La construcción paso a paso de las matrices asociadas al método del *Tableau*.
- La construcción paso a paso de las matrices asociadas al método MNA.
- Los valores de las variables incógnitas.

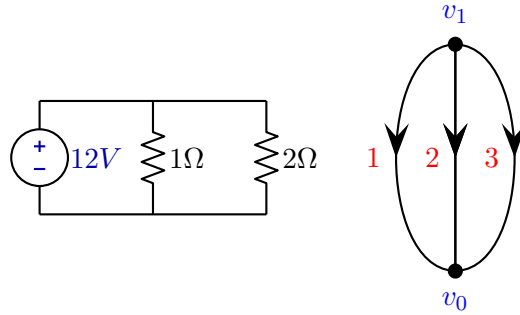
A.1. Ejemplo A.01

Figura A.1: Circuito y grafo del ejemplo A.01

Tabla A.1: Representación tabular del circuito. Ejemplo A.01

Rama	Tipo	NodoP	NodoN	Valor	RamaAux
1	FuenteV	1	0	12.0	0
2	Resistor	1	0	1.0	0
3	Resistor	1	0	2.0	0

A.1.1. Método del *Tableau* dispersoTabla A.2: Construcción iterativa de las matrices *Tableau*. Ejemplo A.01

Rama número 1									
A	Z				Y				s
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0.00	0.00	0.00		1.00	0.00	0.00		12.00
	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00		0.00
	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00		0.00
Rama número 2									
A	Z				Y				s
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	0.00	0.00	0.00		1.00	0.00	0.00		12.00
	0.00	1.00	0.00		0.00	-1.00	0.00		0.00
	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00		0.00
Rama número 3									
A	Z				Y				s
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	0.00	0.00	0.00		1.00	0.00	0.00		12.00
	0.00	1.00	0.00		0.00	-1.00	0.00		0.00
	0.00	0.00	1.00		0.00	0.00	-0.50		0.00

A.1.2. Método MNA

Tabla A.3: Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.01

Rama número 1							
T ₁₁	T ₁₂	T ₂₁	T ₂₂	S ₁	S ₂		
0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	12.00		
Rama número 2							
T ₁₁	T ₁₂	T ₂₁	T ₂₂	S ₁	S ₂		
1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	12.00		
Rama número 3							
T ₁₁	T ₁₂	T ₂₁	T ₂₂	S ₁	S ₂		
1.50	1.00	1.00	0.00	0.00	12.00		

A.1.3. Solución

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 18.00 \\ 12.00 \\ 6.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 12.00 \\ 12.00 \\ 12.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12.00 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

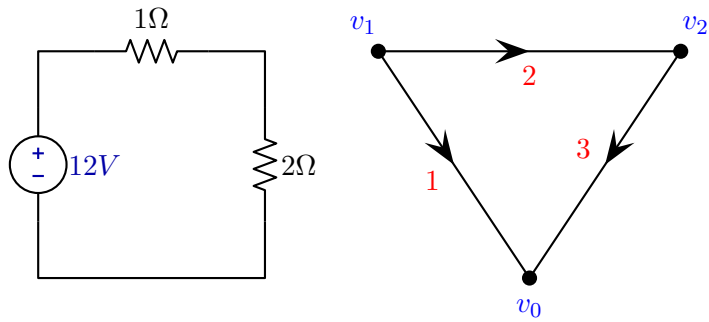
A.2. Ejemplo A.02

Figura A.2: Circuito y grafo del ejemplo A.02

Tabla A.4: Representación tabular del circuito. Ejemplo A.02

Rama	Tipo	NodoP	NodoN	Valor	RamaAux
1	FuenteV	1	0	12.0	0
2	Resistor	1	2	1.0	0
3	Resistor	2	0	2.0	0

A.2.1. Método del *Tableau* dispersoTabla A.5: Construcción iterativa de las matrices *Tableau*. Ejemplo A.02

Rama número 1									
A			Z			Y			s
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0.00	0.00	0.00		1.00	0.00	0.00		12.00
	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00		0.00
	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00		0.00
Rama número 2									
A			Z			Y			s
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	0.00	0.00	0.00		1.00	0.00	0.00		12.00
	0.00	1.00	0.00		0.00	-1.00	0.00		0.00
	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00		0.00
Rama número 3									
A			Z			Y			s
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	0.00	0.00	0.00		1.00	0.00	0.00		12.00
	0.00	1.00	0.00		0.00	-1.00	0.00		0.00
	0.00	0.00	1.00		0.00	0.00	0.00		-0.50

A.2.2. Método MNA

Tabla A.6: Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.02

Rama número 1						
\mathbf{T}_{11}		\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2
$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12.00 \end{bmatrix}$
Rama número 2						
\mathbf{T}_{11}		\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2
$\begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 \\ -1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12.00 \end{bmatrix}$
Rama número 3						
\mathbf{T}_{11}		\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2
$\begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 \\ -1.00 & 1.50 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12.00 \end{bmatrix}$

A.2.3. Solución

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} -4.00 \\ 4.00 \\ 4.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 12.00 \\ 4.00 \\ 8.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12.00 \\ 8.00 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A.3. Ejemplo A.03

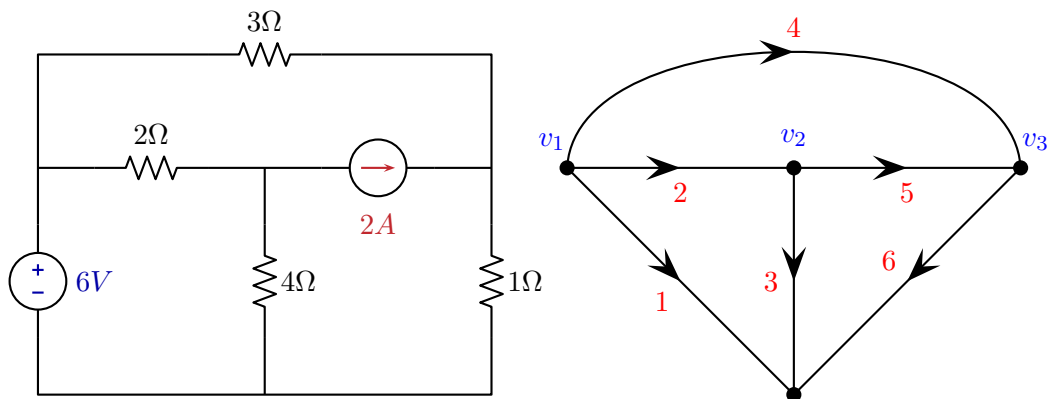


Figura A.3: Circuito y grafo del ejemplo A.03

Tabla A.7: Representación tabular del circuito. Ejemplo A.03

Rama	Tipo	NodoP	NodoN	Valor	RamaAux
1	FuenteV	1	0	6.0	0
2	Resistor	1	2	2.0	0
3	Resistor	2	0	4.0	0
4	Resistor	1	3	3.0	0
5	FuenteI	2	3	2.0	0
6	Resistor	3	0	1.0	0

	0.00	0.00	0.00		1.00		[1.00	0.00	0.00]	[0.00]	0.00		[6.00]
	0.00	0.00	0.00		0.00						0.00		
	0.00	0.00	0.00		0.00						0.00		
Rama número 2													
	T₁₁				T₁₂		T₂₁			T₂₂	S₁		S₂
	0.50	-0.50	0.00		1.00						0.00		
	-0.50	0.50	0.00		0.00		[1.00	0.00	0.00]	[0.00]	0.00		[6.00]
	0.00	0.00	0.00		0.00						0.00		
Rama número 3													
	T₁₁				T₁₂		T₂₁			T₂₂	S₁		S₂
	0.50	-0.50	0.00		1.00						0.00		
	-0.50	0.75	0.00		0.00		[1.00	0.00	0.00]	[0.00]	0.00		[6.00]
	0.00	0.00	0.00		0.00						0.00		
Rama número 4													
	T₁₁				T₁₂		T₂₁			T₂₂	S₁		S₂
	0.83	-0.50	-0.33		1.00						0.00		
	-0.50	0.75	0.00		0.00		[1.00	0.00	0.00]	[0.00]	0.00		[6.00]
	-0.33	0.00	0.33		0.00						0.00		
Rama número 5													
	T₁₁				T₁₂		T₂₁			T₂₂	S₁		S₂
	0.83	-0.50	-0.33		1.00						0.00		
	-0.50	0.75	0.00		0.00		[1.00	0.00	0.00]	[0.00]	-2.00		[6.00]
	-0.33	0.00	0.33		0.00						2.00		
Rama número 6													
	T₁₁				T₁₂		T₂₁			T₂₂	S₁		S₂
	0.83	-0.50	-0.33		1.00						0.00		
	-0.50	0.75	0.00		0.00		[1.00	0.00	0.00]	[0.00]	-2.00		[6.00]
	-0.33	0.00	1.33		0.00						2.00		

A.3.3. Solución

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} -3.33 \\ 2.33 \\ 0.33 \\ 1.00 \\ 2.00 \\ 3.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6.00 \\ 4.67 \\ 1.33 \\ 3.00 \\ -1.67 \\ 3.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6.00 \\ 1.33 \\ 3.00 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A.4. Ejemplo A.04

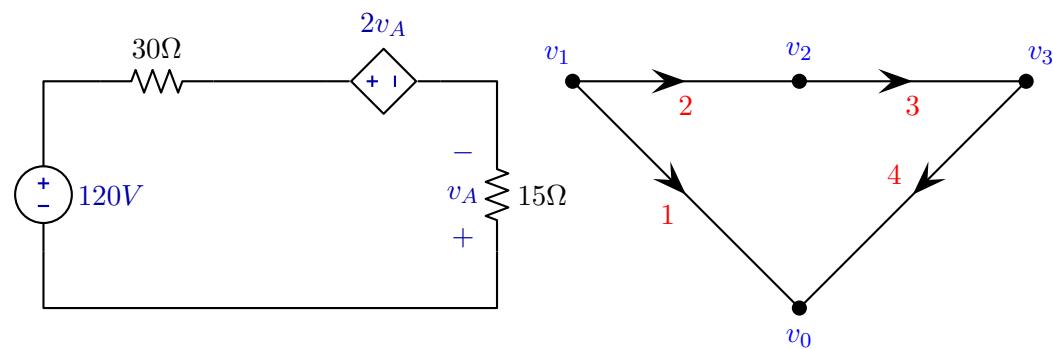


Figura A.4: Circuito y grafo del ejemplo A.04

Tabla A.10: Representación tabular del circuito. Ejemplo A.04

Rama	Tipo	NodoP	NodoN	Valor	RamaAux
1	FuenteV	1	0	120.0	0
2	Resistor	1	2	30.0	0
3	FuenteVControlV	2	3	-2.0	4
4	Resistor	3	0	15.0	0

A.4.3. Solución

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} -8.00 \\ 8.00 \\ 8.00 \\ 8.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 120.00 \\ 240.00 \\ -240.00 \\ 120.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 120.00 \\ 120.00 \\ 120.00 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.5. Ejemplo A.05

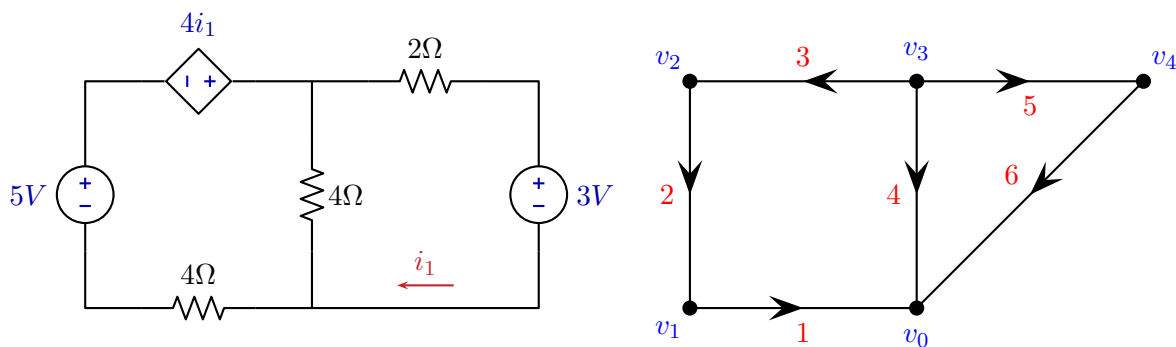


Figura A.5: Circuito y grafo del ejemplo A.05

Tabla A.13: Representación tabular del circuito. Ejemplo A.05

Rama	Tipo	NodoP	NodoN	Valor	RamaAux
1	Resistor	1	0	4.0	0
2	FuenteV	2	1	5.0	0
3	FuenteVControlI	3	2	4.0	6
4	Resistor	3	0	4.0	0
5	Resistor	3	4	2.0	0
6	FuenteV	4	0	3.0	0

A.6. Ejemplo A.06

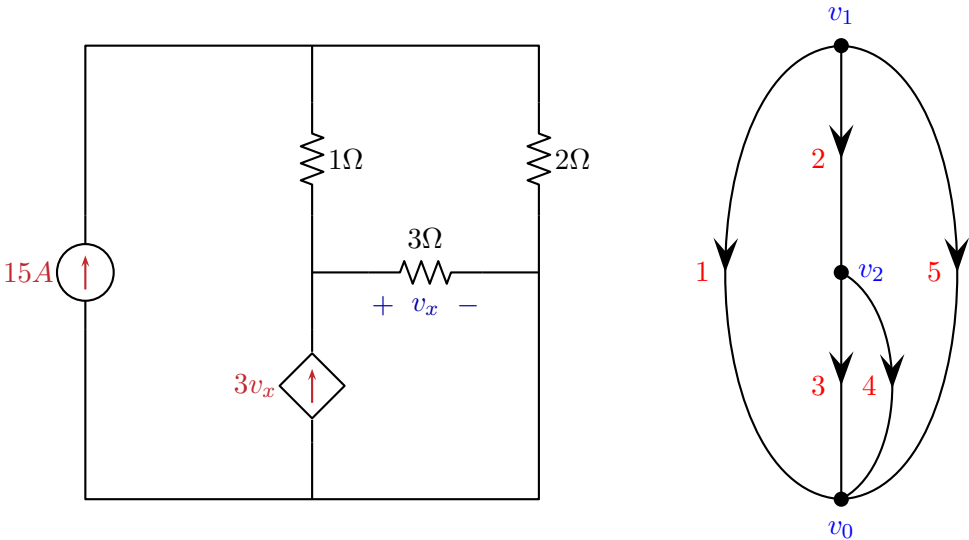


Figura A.6: Circuito y grafo del ejemplo A.06

Tabla A.16: Representación tabular del circuito. Ejemplo A.06

Rama	Tipo	NodoP	NodoN	Valor	RamaAux
1	FuenteI	1	0	-15.0	0
2	Resistor	1	2	1.0	0
3	FuenteIControlV	2	0	-3.0	4
4	Resistor	2	0	3.0	0
5	Resistor	1	0	2.0	0

A.6.1. Método del *Tableau* dispersoTabla A.17: Construcción iterativa de las matrices *Tableau*. Ejemplo A.06

Rama número 1														
A	Z						Y					s		
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		-15.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
Rama número 2														
A	Z						Y					s		
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		-15.00	
	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
Rama número 3														
A	Z						Y					s		
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		-15.00	
	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	3.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
Rama número 4														
A	Z						Y					s		
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		-15.00	
	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	3.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00		0.00	0.00	0.00	-0.33	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
Rama número 5														
A	Z						Y					s		
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		-15.00	
	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	3.00	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00		0.00	0.00	0.00	-0.33	0.00		0.00	
	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00		0.00	0.00	0.00	0.00	-0.50		0.00	

A.6.2. Método MNA

Tabla A.18: Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.06

Rama número 1						
\mathbf{T}_{11}	\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2	
$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	
Rama número 2						
\mathbf{T}_{11}	\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2	
$\begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 \\ -1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	
Rama número 3						
\mathbf{T}_{11}	\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2	
$\begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 \\ -1.00 & -2.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}] \\ [\end{bmatrix}$	
Rama número 4						
\mathbf{T}_{11}	\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2	

$\begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 \\ -1.00 & -1.67 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$
Rama número 5						
\mathbf{T}_{11}	\mathbf{T}_{12}	\mathbf{T}_{21}	\mathbf{T}_{22}	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2	
$\begin{bmatrix} 1.50 & -1.00 \\ -1.00 & -1.67 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$

A.6.3. Solución

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 15.00 \\ 11.43 \\ 12.86 \\ -1.43 \\ 3.57 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7.14 \\ 11.43 \\ -4.29 \\ -4.29 \\ 7.14 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7.14 \\ -4.29 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

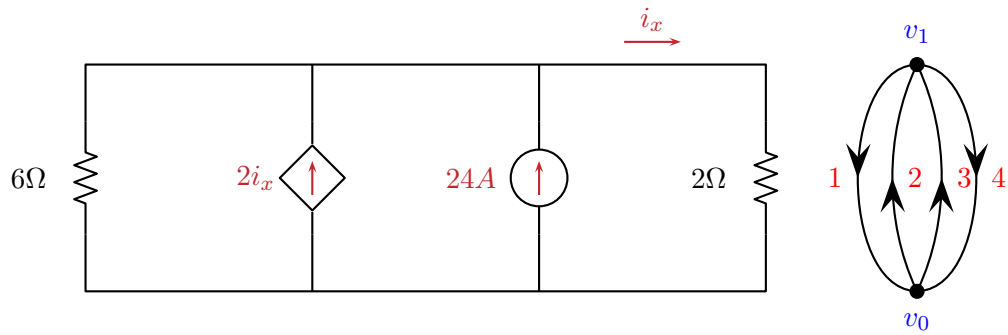
A.7. Ejemplo A.07

Figura A.7: Circuito y grafo del ejemplo A.07

Tabla A.19: Representación tabular del circuito. Ejemplo A.07

Rama	Tipo	NodoP	NodoN	Valor	RamaAux
1	Resistor	1	0	6.0	0
2	FuenteIControlI	0	1	2.0	4
3	FuenteI	0	1	24.0	0
4	Resistor	1	0	2.0	0

A.7.1. Método del *Tableau* dispersoTabla A.20: Construcción iterativa de las matrices *Tableau*. Ejemplo A.07

Rama número 1												
A		Z				Y				s		
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		1.00	0.00	0.00	0.00	-0.17	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
Rama número 2												
A		Z				Y				s		
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		1.00	0.00	0.00	0.00	-0.17	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	1.00	0.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
Rama número 3												
A		Z				Y				s		
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$		1.00	0.00	0.00	0.00	-0.17	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	1.00	0.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	24.00		
		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
Rama número 4												
A		Z				Y				s		
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$		1.00	0.00	0.00	0.00	-0.17	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	1.00	0.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
		0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	24.00		
		0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.50	0.00		

A.7.2. Método MNA

Tabla A.21: Construcción iterativa de las matrices MNA. Ejemplo A.07

Rama número 1						
T ₁₁	T ₁₂	T ₂₁	T ₂₂	S ₁	S ₂	
0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
Rama número 2						
T ₁₁	T ₁₂	T ₂₁	T ₂₂	S ₁	S ₂	
0.17	-2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
Rama número 3						
T ₁₁	T ₁₂	T ₂₁	T ₂₂	S ₁	S ₂	
0.17	-2.00	0.00	0.00	24.00	0.00	
Rama número 4						
T ₁₁	T ₁₂	T ₂₁	T ₂₂	S ₁	S ₂	
0.17	-1.00	-0.50	1.00	24.00	0.00	

A.7.3. Solución

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 12.00 \\ 72.00 \\ 24.00 \\ 36.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 72.00 \\ 72.00 \\ 72.00 \\ 72.00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 72.00 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Apéndice B

Ajuste de curvas a funciones (Regresiones)

El problema de ajustar curvas a funciones puede plantearse de la siguiente manera:

Dada una curva que relacione dos variables x, y se debe encontrar una expresión matemática analítica de la forma $y = f(x)$ tal que represente la curva inicial lo más exactamente posible.

Usualmente el problema se plantea con una restricción adicional, consistente en que la expresión $f(x)$ debe tener una forma específica; por ejemplo, puede ser que se quiera obtener una expresión de la forma $y(x) = ax + b$, y por lo tanto el problema se convierte en averiguar cuáles son los valores de los coeficientes a y b que representan la curva inicial lo más exactamente posible.

Los métodos analíticos para ajustar curvas a funciones, a diferencia de los métodos gráficos, parten de la obtención de un conjunto de parejas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ mediante lectura directa de la curva. La forma usual de evaluar qué tan exactamente representa una expresión matemática al conjunto de parejas ordenadas es mediante la suma del error cuadrático e_2 :

$$e_2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (\text{B.1})$$

En este caso, el problema se conoce como la obtención de una Regresión para el conjunto de parejas, y puede plantearse en los siguientes términos:

Dado un conjunto de n parejas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ se debe encontrar una expresión matemática analítica de la forma $y = f(x)$ tal que minimice la sumatoria de los errores cuadráticos.

Existen distintos tipos de Regresión, dependiendo de la forma que se desee para la expresión $f(x)$. En este documento consideramos los siguientes casos:

Regresión Lineal : Se busca una expresión de la forma

$$y = ax + b \quad (\text{B.2})$$

Regresión Monomial : Se busca una expresión de la forma

$$y = ax^b \quad (\text{B.3})$$

Regresión Exponencial : Se busca una expresión de la forma

$$y = ae^{b \cdot x} \quad (\text{B.4})$$

Regresión Polinomial de grado m : Se busca una expresión de la forma

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m \quad (\text{B.5})$$

A continuación se presentan las metodologías necesarias para obtener las Regresiones definidas arriba, para un conjunto de n parejas.

B.1. Regresión lineal

Sean las n parejas ordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_n, y_n)$ de las cuales se quiere obtener una regresión de la forma:

$$y = ax + b \quad (\text{B.6})$$

Los coeficientes a y b que minimizan los errores cuadráticos se obtienen así:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

B.1.1. Demostración

Para calcular el error cuadrático de una regresión lineal, debemos remplazar en B.1 la función $f(x)$ por la expresión de la ecuación B.6:

$$e_2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (\text{B.8})$$

El mejor regresor será aquel que minimice el valor de la ecuación B.8. Para encontrar los parámetros a y b de ese regresor, debemos derivar parcialmente respecto a cada uno de ellos e igualar a cero:

$$\begin{cases} \frac{\partial e_2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial e_2}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Para facilitar el cálculo de las derivadas parciales, reescribimos la sumatoria de B.8

$$\begin{aligned} e_2 &= \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2y_i(ax_i + b) + (ax_i + b)^2] \\ e_2 &= \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2] \\ e_2 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n 2ax_iy_i - \sum_{i=1}^n 2by_i + \sum_{i=1}^n a^2x_i^2 + \sum_{i=1}^n 2abx_i + \sum_{i=1}^n b^2 \\ e_2 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2a \sum_{i=1}^n x_iy_i - 2b \sum_{i=1}^n y_i + a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^n x_i + nb^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Utilizando B.10 el cálculo de las derivadas parciales que aparecen en B.9 resulta ser:

$$\begin{cases} \frac{\partial e_2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_iy_i + 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \frac{\partial e_2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n y_i + 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2nb = 0 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

La ecuación B.11 es simplemente un sistema de dos ecuaciones lineales en el que las dos incógnitas son a y b . Para resolverlo podemos despejar b en ambas ecuaciones e igualar:

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{\sum_{i=1}^j x_i y_i - a \sum_{i=1}^j x_i^2}{\sum_{i=1}^j x_i} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

es decir

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^j x_i y_i - a \sum_{i=1}^j x_i^2}{\sum_{i=1}^j x_i} \quad (\text{B.13})$$

lo que nos permite escribir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j x_i \sum_{i=1}^j y_i - a \left(\sum_{i=1}^j x_i \right)^2 &= n \sum_{i=1}^j x_i y_i - a n \sum_{i=1}^j x_i^2 \\ a \left(n \sum_{i=1}^j x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^j x_i \right)^2 \right) &= n \sum_{i=1}^j x_i y_i - \sum_{i=1}^j x_i \sum_{i=1}^j y_i \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

y despejar a para obtener

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (\text{B.15})$$

La ecuación B.15 en conjunto con la segunda ecuación que aparece en B.12 forman la expresión B.7 que queríamos demostrar.

B.2. Regresión monomial

Sean las n parejas ordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ de las cuales se quiere obtener una regresión de la forma:

$$y = ax^b \quad (\text{B.16})$$

Al aplicar logaritmos naturales a cada lado de la expresión deseada se obtiene:

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln(ax^b) \\ \ln(y) &= \ln(a) + \ln(x^b) \\ \ln(y) &= \ln(a) + b \ln(x) \\ \ln(y) &= b \ln(x) + \ln(a)\end{aligned}\tag{B.17}$$

Nótese que la anterior expresión corresponde a una regresión lineal en la que las variables x, y han sido remplazadas por $\ln(x), \ln(y)$ respectivamente; por esta razón la estrategia para obtener la regresión monomial consiste en:

1. Crear un nuevo conjunto de n parejas

$$\left(\ln(x_1), \ln(y_1) \right), \left(\ln(x_2), \ln(y_2) \right), \dots \left(\ln(x_n), \ln(y_n) \right)\tag{B.18}$$

2. Efectuar una regresión lineal con el nuevo conjunto, para obtener los parámetros c y d en:

$$\ln(y) = c \ln(x) + d\tag{B.19}$$

3. Obtener los coeficientes a y b a partir de:

$$\begin{aligned}\ln(a) &= d \\ a &= e^d \\ b &= c\end{aligned}\tag{B.20}$$

4. Construir la regresión monomial:

$$y = ax^b\tag{B.21}$$

B.3. Regresión exponencial

Sean las n parejas ordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$ de las cuales se quiere obtener una regresión de la forma:

$$y = ae^{bx}\tag{B.22}$$

Al aplicar logaritmos naturales a cada lado de la expresión deseada se obtiene:

$$\begin{aligned}\ln(y) &= \ln(ae^{bx}) \\ \ln(y) &= \ln(a) + \ln(e^{bx}) \\ \ln(y) &= \ln(a) + bx \\ \ln(y) &= bx + \ln(a)\end{aligned}\tag{B.23}$$

Nótese que la anterior expresión corresponde a una regresión lineal en la que las variables x, y han sido remplazadas por $x, \ln(y)$ respectivamente; por esta razón la estrategia para obtener la regresión Monomial consiste en:

1. Crear un nuevo conjunto de n parejas

$$(x_1, \ln(y_1)), (x_2, \ln(y_2)), \dots (x_n, \ln(y_n)) \quad (\text{B.24})$$

2. Efectuar una regresión lineal con el nuevo conjunto, para obtener los parámetros c y d en:

$$\ln(y) = cx + d \quad (\text{B.25})$$

3. Obtener los coeficientes a y b a partir de:

$$\begin{aligned} \ln(a) &= d \\ a &= e^d \\ b &= c \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

4. Construir la regresión monomial:

$$y = ae^{bx} \quad (\text{B.27})$$

B.4. Regresión polinomial de grado m

Sean las n parejas ordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$ de las cuales se quiere obtener una regresión de la forma:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (\text{B.28})$$

Los $(m+1)$ coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ que minimizan los errores cuadráticos se obtienen así:

1. Formular el siguiente sistema de $(m+1)$ ecuaciones lineales en donde las $(m+1)$ incógnitas son los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \sum_{i=1}^n x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^1 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n x_i^0 y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n x_i^1 y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+m} = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \end{array} \right. \quad (\text{B.29})$$

2. Solucionar el sistema de ecuaciones anterior, para obtener los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m .
3. Construir la regresión polinomial

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (\text{B.30})$$

Nótese que en la primera ecuación de B.29 hay algunos términos que se reducen a expresiones más sencillas:

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^0 = a_0 n \quad , \quad \sum_{i=1}^n x_i^0 y_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{B.31})$$

Bibliografía

- [1] Álvaro Acosta. *Análisis de circuitos eléctricos. Un enfoque teórico*. 2022.
- [2] L.O. Chua, C.A. Desoer, and E.S. Kuh. *Linear and Nonlinear Circuits*. Electrical & electronic engineering. McGraw-Hill, 1987.
- [3] Richard C. Dorf and James A. Svoboda. *Circuitos Eléctricos*. Marcombo, 9th edition, 2020.
- [4] Oscar G. Duarte. *Circuitos DC con resistores no lineales*. Universidad Nacional de Colombia, 1997.
- [5] Jorge Arlex González and Jesser James Marulanda. *Texto guía para el curso de circuitos eléctricos 2*. Editorial UTP, 2017.
- [6] William Hayt, Jack Kemmerly, and Steven Durbin. *Análisis de circuitos en ingeniería*. McGraw-Hill, 9th edition, 2019.
- [7] G. H. Hostetter, H. J. Lane, and R. T. Stefani. Engineering circuit analysis jack e. kemmerly william h. hayt. *IEEE Transactions on Education*, 20(2):120–120, 1977.
- [8] John Edwin Candelo Becerra Javier Guerrero Sedeño. *Análisis de circuitos eléctricos*. Editorial Universidad del Norte, Barranquilla, 1.^a ed. edition, 2011. eISBN: 9789587418972(PDF).
- [9] Farid N. Najm. *Circuit Simulation*. John Wiley & Sons, 2010.
- [10] Jan Ogrodzki. *Circuit Simulation Methods and Algorithms*. CRC Press, 1994.
- [11] Estrella Parra. *Análisis de armónicos en sistemas de distribución*. Unibiblos, 2004.
- [12] William Shockley. The theory of p-n junctions in semiconductors and p-n junction transistors. *The Bell System Technical Journal*, 28(3):435–489, 1949.
- [13] Stella Timotheou and Andri Ioannou. On making, tinkering, coding and play for learning: A review of current research. In *17th IFIP Conference on Human-Computer Interaction (INTERACT)*, pages 217–232, Paphos, Cyprus., Sep 2019.