Nim(ニム) または石取りゲームの必勝法について

Igaris

2011 年 9 月 3 日

1　はじめに

Nim(ニム) というゲームがあります. 石取りゲームとも呼ばれます. 「テイルズ オブ デスティニー」というテレビゲームに登場したり, 「たけしのコマネチ大学数学科」というテレビ番組で取り上げられたこともあります. ご存じの方も多いのではないでしょうか. 様々なルールがありますが, 一般的には次のように定義されます.

1. いくつかの石が積まれた, いくつかの山がある.
2. 二人のプレイヤーが交互に 1 個の山から 1 個以上の石を取っていく.
3. 全ての山の石を 0 個にしたプレイヤーが負け.

こうしたゲームは「二人零和有限確定完全情報ゲーム」と呼ばれ, 先手と後手ともに最善手を尽くすと仮定した場合, 一方に必勝法が存在するか, または引き分けになることが数学的に証明されています. Nim では引き分けになることはないので, 先手か後手に必勝法が存在します. この文書の目的は, Nim の必勝法を厳密に示すことです.

Nim のルールには様々な拡張があります. ここでは拡張版として, 次のようなゲームを考えます (拡張し過ぎかも).

1. n 個の山があり, i 番目の山には P_i 個の石が積まれている.
2. 二人のプレイヤーが交互に石を取っていく.
3. i 番目の山からは一度に 1 個以上 T_i 個以下の石を取ることができる.
4. 石を取ることができる山の数は, 一度に K 個まで.
5. 全ての山の石を 0 個にした方が勝ち (または負け).

最後に 0 個にした方が勝ちのバージョンを Nim(W), 負けのバージョンを Nim(L) で表すことにします. 当然ですが, それぞれに必勝法が異なります.

2　準備

それぞれの山に取れる石の数に制限がありますが, このことは必勝法の証明において, 制限がない場合との本質的な違いを生むものではありません.

例 2.1. 次のようなゲームを考える.

1. 山は 1 個.
2. $P_1 = 13$
3. $T_1 = 3$
4. 石をなくした方が勝ち.

このゲームは先手必勝である. 先手はまず, 石を 1 つだけ取る. 以後は, 相手が取った石の数と, 次のターンで自分が取った石の数の和が $T_1 + 1 = 4$ となるように石を取っていく. 一度に取れる石の個数が 1 個以上 $T_1 = 3$ 個以下なので, 常にそのようにできる. すると, 先手が石を取ったあとは $12, 8, 4, 0$ と石が減っていき, 先手が勝つ.

このような事情から, ゲームの勝敗に実際的に関わってくるのは P_i を $T_i + 1$ で割った余りであろうと推測できます. このことを踏まえた上で, いささか天下り的ではありますが, 以下の定義を用いて必勝法を示します.

定義 2.1. 各局面において P_i を $T_i + 1$ で割った余りを X_i で表し, $X_i \neq 0$ のとき, それを上積みと呼ぶ. $1 \leq X_i \leq T_i$ である. 各 X_i を 2 進数で表し, それらのうちで最大のものの桁数を d とする. 桁数が d 未満のものには先頭から 0 を必要な分だけ補完して d 桁のビット列 $X_i(1) \cdots X_i(d)$ を作る. ある j について $X_i(j)$ の和を $K + 1$ で割った余りを $S_K(j)$ で表す. すなわち,

$$S_K(j) = \mathrm{mod}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i(j), K + 1\right) \tag{2.1}$$

である. 任意の j について $S_K(j) = 0$ である状況を Nim, そうでない状況を $\overline{Nim}$ で表す. また, 非負整数の列

$$S_K(1) S_K(2) \cdots S_K(d) \tag{2.2}$$

をニム和と呼ぶ.

例えば, 次のようになります.

例 2.2. $(P_1, T_1) = (13, 4)$, $(P_2, T_2) = (9, 3)$, $(P_3, T_3) = (16, 8)$ のとき,

$$X_1 = \mathrm{mod}(13, 4 + 1) = 3$$
$$X_2 = \mathrm{mod}(9, 3 + 1) = 1$$
$$X_3 = \mathrm{mod}(16, 8 + 1) = 7$$

となり, 2 進数表示では

$$X_1 = X_1(1)X_1(2)X_1(3) = 011$$
$$X_2 = X_2(1)X_2(2)X_2(3) = 001$$
$$X_3 = X_3(1)X_3(2)X_3(3) = 111$$

となる. $K = 2$ として各桁の和を $2 + 1 = 3$ で割った余りを取ると, それぞれ $1, 2, 0$ であるから, これは $\overline{Nim}$ である.

P_i からは石を 1 個以上 T_i 個以下しか取れないので, 石を取ると必ず T_i+1 で割った余りが変化します. つまり, 上積みが変化します.

初めに, 次の便利な事実を確認しておきます.

補題 2.1. *数 X は d 桁の 2 進数表示で表されるとする. このとき, $d-1$ 桁の任意のビット列は X 未満のある数の 2 進数表示 (先頭に 0 を許す) に対応する.*

Proof. $X = 2^{d-1}$ としても一般性を失わない. 1 から $2^{d-1}-1$ までの数の 2 進数表示が, 1 から始まる高々 $d-1$ 桁のビット列全体に対応する. 桁数が $d-1$ に満たない場合には先頭から 0 を補えばよい. □

Nim を作ったプレイヤーは, ある意味でゲームを「支配」することができます.

定理 2.1. *ある局面で Nim になったとすると, 次の局面では必ず $\overline{Nim}$ になる.*

Proof. 今, Nim であると仮定する. 各 j について $S_K(j) = 0$ である. 次の局面でも Nim になったと仮定すると, 各 j について, $X_1(j)$ から $X_n(j)$ のうちで 0 に変化したものの数と 1 に変化したものの数の差が $K+1$ の倍数であることが必要十分である. ところが, 変化した上積みは高々 K 個なので, 差が $K+1$ 以上になることはあり得ず, したがって 0 に変化したものの数と 1 に変化したものの数は同数である. ここで, 任意の i について, X_i の $j-1$ 桁目までに変化がなく, いずれかの i について $X_i(j)$ が 1 から 0 に変化したと仮定する. 石を取ったことにより, そのような i, j が必ず存在する. このとき, いずれかの i' について $X_{i'}(j)$ が 0 から 1 に反転している. しかし, そのためには上位の桁の変化が必要であり, これは仮定に反する. □

定理 2.2. *ある局面で $\overline{Nim}$ になったとすると, 適当な操作により, 次の局面で Nim となるようにできる.*

Proof. 上積みが K 個以下のときは全ての上積みを取れば Nim にできる. 上積みが $K+1$ 個以上と仮定する. ニム和を取り, 0 でない最上位の桁を d, その値を t とする. Nim にするには, d 桁目が 1 の上積みから t 個を選んで, 石を取らなければならない. 任意に選んだ t 個をグループ A_1, それら以外をグループ A_2 とおく. 補題 2.1 により, A_1 から適当に石を取れば, そのニム和の $d+1$ 桁目以降を, 0 以上 t 以下の数からなる任意の列にすることができる. よって, A_2 から高々 $K-t$ 個を選んで石を取り, その後の A_2 のニム和の各桁が 0 または $K-t+1$ 以上 (*) になるようにできればよい. 最初の A_2 のニム和の 1 以上 $K-t$ 以下の最上位の桁を d', その値を t' とする. d' 桁目が 1 の上積みを任意に t' 個選び, それらをグループ B_1, それら以外を B_2 とする. 今, $d'-1$ 桁目まではないものと考えて差し支えない. 補題 2.1 により, B_1 から適当に石を取れば, そのニム和の $d'+1$ 桁目以降を, 0 以上 t' 以下の数からなる任意の列にすることができる. よって, B_2 でのニム和の i 桁目が a $(1 \leq a \leq K-t')$ になったならば, 石を取ったあとの B_1 のニム和の i 桁目が $K-t'+1-a$ $(1 \leq K-t'+1-a \leq K-t')$ となるようにすれば, A_2 全体でのニム和が (*) を満たすようにできる. □

3 Nim(W)

定理 2.1 より, 自分のターンで Nim を作ることができた場合, 相手のターンでは必ず $\overline{Nim}$ となり, 定理 2.2 より, 次の自分のターンでまた Nim を作ることができることが分かります. 全ての山の石が 0 個である状況は Nim なので, このような操作を続けていくことにより, 相手に勝つことができることが分かります.

定理 3.1. *Nim(W) について考える．初期配置において* Nim *ならば，後手必勝である．先手のターン終了後に* $\overline{Nim}$ *になるので，後手は以後，常に* Nim *となるように石を取っていけばよい．同様に，初期配置において* $\overline{Nim}$ *ならば，先手必勝である．先手はまず* Nim *を作り，あとは後手必勝の場合と同様にすれば勝てる．*

4 Nim(L)

Nim(L) については，話がややこしくなります．Nim(W) では自分のターンで Nim を作ることができることが必勝法の前提でしたが，例えば，上積みが 1 の山が $K+1$ 個あって他の山には上積みがないとき，これは Nim ですが，次のターンで相手が K 個の上積みから石を 1 個ずつ取ったとき，相手の必勝となります．何故なら，相手は以後，こちらが取った石の数との和が T_i+1 の倍数になるようにそれぞれの山から石を取っていけば，上積みは 1 のものが 1 つだけあるという状態が保持され，最終的にはこちらが最後の 1 個を取ることになり，負けてしまうからです．とは言え，Nim を作った方がある意味でゲームを「支配」することができることも事実なので，途中までは Nim を作り続け，Nim を作ると相手に負けてしまうようなときに戦術を変えるのが良さそうです．このような事情から，Nim(L) における安全パターンを次のように定義します．

定義 4.1. *それぞれの上積みが 1 である状態において，上積みが 1 の山の個数を* P *で表す．Nim(L) における安全パターン* S *とは，次の 2 つのいずれかを指すものとする．*

(S1) Nim *かつ* $P \not\equiv 0 \pmod{K+1}$
(S2) $P \equiv 1 \pmod{K+1}$

また，安全でないパターンを $\overline{S}$ *で表す．*

定理 2.1 と同様，次のことが示せます．

定理 4.1. *ある局面でパターン* S *になったとすると，次の局面では必ずパターン* $\overline{S}$ *になる．*

Proof. (1) $S2$ のとき．石を取ると上積みは 1 以外に変化するので，$S2$ にするには上積みを 0 に変化させるしかなく，したがってそのような上積みが $K+1$ の倍数個でなければならない．ところが，一度に高々 K 個の上積みからしか石を取れないので，$S2$ から $S2$ に変化することはない．$S2$ から $S1$ に変化したとする．ある上積みから 1 つだけ取れば Nim にできる．また，Nim の次のターンでは必ず $\overline{Nim}$ になることから，それより多く取って Nim にすることは不可能である．このとき，上積みが高々 1 であることと Nim であることから，$P \equiv 0 \pmod{K+1}$ となり，これは $S1$ の条件に反する．(2) $S1$ のとき．定理 2.1 より，Nim の次のターンでは $\overline{Nim}$ となるので，$S1$ から $S1$ になることはない．$S1$ から $S2$ になったとする．$d-1$ 桁目まででニム和を取ると，石を取る前と後とで常に 0 であるから，定理 2.1 の証明と同様に考えると，$d-1$ 桁目までのビット列には変化がない．ということは，直前のターンではそれぞれの上積みが高々 1 でなければならない．そのような条件を満たし Nim であるためには $P \equiv 0 \pmod{K+1}$ を満たす状況しかあり得ないが，これは $S1$ であることに反する． □

補題 4.1. *Nim(L) における安全でないパターン* $\overline{S}$ *は，次の 2 つのいずれかを満たす．*

($\overline{S}1$) $\overline{Nim}$ *かつ* $P \not\equiv 1 \pmod{K+1}$
($\overline{S}2$) $P \equiv 0 \pmod{K+1}$

Proof. ベン図をかけば明らか. □

定理 4.2. ある局面でパターン $\overline{S}$ になったとすると, 適当な操作により, 次の局面で S となるようにできる.

Proof. $\overline{S}2$ であったならば, K 個の上積みから石を取れば $S2$ にできる. $\overline{S}1$ であったと仮定する. 定理 2.1 より, 次のターンで Nim にできるが, これが $S1$ の条件を満たすならばそれでよい. そうでないとき, つまり Nim にすると $P \equiv 0 \pmod{K+1}$ となってしまう場合は, 次のように操作を変えて $S2$ を満たすようにできる. (1) ある上積みからいくつか取って 0 個になった場合. 取る石の個数を 1 個減らせば $P \equiv 1 \pmod{K+1}$ とできる. 1 個減らすためには Nim にするときに 2 個以上の石を取らなければならないが, 1 個だけしか取らないことがあり得ないことは次のように分かる. ある上積みから 1 個だけ取ると 0 になり $P \equiv 0 \pmod{K+1}$ となったのならば初めは $P \equiv 1 \pmod{K+1}$ であるが, これは $\overline{S}1$ であることに反する. (2) どの上積みも石をいくつか取ったときに 0 にならなかった場合. 直前の上積みの数は $K+1$ の倍数個であり, 2 以上の上積みが高々 K 個存在し, 他の上積みは高々 1 である. このとき, 2 以上の上積みと他の上積み, 合わせて K 個から石を全て取れば, $P \equiv 1 \pmod{K+1}$ となる. □

全ての山の石の数が 0 である状況は $\overline{S}$ なので, 以上により, 次のことが分かります.

定理 4.3. *Nim(L)* について考える. 初期配置において S ならば, 後手必勝である. 先手のターン終了後に $\overline{S}$ になるので, 後手は以後, 常に S となるように石を取っていけばよい. 同様に, 初期配置において $\overline{S}$ ならば, 先手必勝である. 先手はまず S を作り, あとは後手必勝の場合と同様にすれば勝てる.

5 まとめ

ひょんなことからニムの必勝法について考え始めたのですが, なかなかどうして奥が深く, 思った以上に分量が多くなってしまいました. ニム和という概念と, 必勝法では常に安全なパターンを作っていくというアイデアは下記の参考文献によるものですが, 証明は全て独力で考えました. そのため, どこかに根本的な間違いがあったり, ちょっとした不備がある可能性は否定できません. お気づきの点などありましたら, igaris0816@gmail.com まで連絡して頂けると嬉しく思います.

余談ですが, [1] では石を取れる山の数が 1 個の場合のみが扱われ, [2] では取れる石の個数に制限がある場合が扱われていません. そういう意味では (ほとんど間違いなく既知の結果ではありますが), オリジナルの成果を上げることができたことに満足しています.

何はともあれ, 疲れました.

参考文献

[1] 一松信, 『石とりゲームの数理 [POD 版]』, 森北出版, 2003 年

[2] 内藤 久資, ゲームの戦略, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/ naito/lecture/high_school_1999/note.pdf, 1999 年