

2. előadás

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 2.

Egyoldali pontbeli deriváltak

Vannak olyan esetek, amikor a differenciálhányados létezése a bal és a jobb oldali határértékek egyezését szükséges vizsgálni. Például, az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

abszolút érték függvény az $a = 0$ pontban nem differenciálható, mert

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} = 1.$$

Érdeemes tehát az egyoldali pontbeli deriváltakat értelmezni.

1. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$ olyan pont, hogy $\exists \delta > 0: [a, a + \delta) \subseteq \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény jobbról differenciálható (vagy jobbról deriválható) az a pontban, ha

$$\exists \text{ és véges a } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'_+(a)$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény a pontbeli jobb oldali deriváltjának (vagy differenciálhányadosának) nevezzük, azaz

$$f'_+(a) := \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Az f függvény bal oldali differenciálhatóságát az a pontban hasonlóan értelmezzük, és az $f'_-(a)$ szimbólummal jelöljük az a pontbeli bal oldali deriváltját.

Az előző jelölés értelmében, ha $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor $f'_-(0) = -1$ és $f'_+(0) = 1$.

Az egyoldali függvényhatárértékeknél tanultak szerint világos, hogy

$$f \in D\{a\} \iff \exists f'_-(a), \exists f'_+(a) \text{ és } f'_-(a) = f'_+(a) (= f'(a)).$$

A bal és jobb oldali deriváltak segítséget nyújtanak a következő általános probléma megoldásában. Legyen $b, j \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olyan pont, hogy $\exists \delta > 0: (a - \delta, a) \subseteq \mathcal{D}_b$, $(a, a + \delta) \subseteq \mathcal{D}_j$, és $A \in \mathbb{R}$. Milyen legyenek a b és j függvények ahhoz, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} b(x), & \text{ha } x < a \text{ } (x \in \mathcal{D}_b), \\ A, & \text{ha } x = a, \\ j(x), & \text{ha } x > a \text{ } (x \in \mathcal{D}_j) \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az a pontban?

Világos, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Ha $f \in C\{a\}$, akkor $\exists \lim_{a-0} f$, $\exists \lim_{a+0} f$ és $\lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f = f(a) = A$.
Ezért

$$\exists \lim_{a-0} b = \lim_{a-0} f = A \quad \text{és} \quad \exists \lim_{a+0} j = \lim_{a+0} f = A,$$

azaz

$$\boxed{\text{I. } \exists \lim_{a-0} b, \exists \lim_{a+0} j \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} b = A = \lim_{a+0} j}.$$

Az I. feltétel azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$, ami szükséges ahhoz, hogy $f \in D\{a\}$ teljesüljön.

Gyakori eset, amikor b balról, j jobbról folytonos a -ban és $b(a) = j(a) = A$. Világos, hogy ekkor az I. feltétel teljesül. Fordítva, ha az I. feltétel teljesül, akkor a

$$b(a) := \lim_{a-0} b \quad \text{és} \quad j(a) := \lim_{a+0} j.$$

értékadással (módosítással) elérhetjük, hogy b balról és j jobbról folytonos legyen a -ban, valamint $b(a) = j(a) = A$. Ez a módosítás nem befolyásolja az f függvény értékét, hiszen $f(a) = A$.

Ha az I. feltétel teljesül, és $b(a) = j(a) = A$, akkor $f \in D\{a\} \iff f'_-(a) = f'_+(a)$, ahol

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{b(x) - A}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{b(x) - b(a)}{x - a} = b'_-(a)$$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{j(x) - A}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{j(x) - j(a)}{x - a} = j'_+(a),$$

azaz

$$\boxed{\text{II. } b'_-(a) = j'_+(a)}.$$

Ekkor $f'(a) = b'_-(a) = j'_+(a)$. Ha $b \in D\{a\}$ és $j \in D\{a\}$, akkor a II. feltétel ekvivalens, azzal, hogy $b'(a) = j'(a)$.

1. Feladat. Állapítsa meg, hogy differenciálható-e az alábbi függvény az $a = 0$ pontban!

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Megoldás. Alkalmazzuk a fenti jelöléseket! Ekkor $A := f(0) = 1 - 0 = 1$, illetve legyen

$$b(x) := 1 - x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad j(x) := e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A deriválási szabályok alapján $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$$b'(x) = -1, \quad j'(x) = -e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

- I. teljesül, hiszen $b, j \in C\{0\}$, és $b(0) = j(0) = 1 = A$.
- II. teljesül, hiszen $b, j \in D\{0\}$ és $b'(0) = -1 = j'(0)$.

Ezért $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = -1$.

Magasabb rendű deriváltak

Ha valamely valós-valós függvénynek létezik a deriváltfüggvénye, akkor természetes módon felvethetjük annak újbóli deriválhatóságát, és így eljuthatunk a **többször deriválható függvények** és a **magasabb rendű deriváltak** fogalmához. A rekurzió módszerét alkalmazzuk. Először a kétszer deriválhatóság fogalmát definiáljuk.

2. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy **f kétszer deriválható az a pontban** (jelölése: $f \in D^2\{a\}$), ha

- $\exists r > 0: f \in D(K_r(a))$, és
- az f' deriváltfüggvény deriválható a -ban, azaz $f' \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f''(a) := (f')'(a)$$

az f függvény **a -beli második deriváltja**.

Ha $H := \{x \in \text{int } \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f''(x)$ az f függvény **második deriváltfüggvénye**, amit röviden az f'' szimbólummal jelölünk.

Jelölések. A deriváltakra és a deriváltfüggvényekre a következő jelöléseket is fogjuk használni:

$$f^{(1)}(a) := f'(a) \quad \text{és} \quad f^{(1)} := f',$$

$$f^{(2)}(a) := f''(a) \quad \text{és} \quad f^{(2)} := f''.$$

Megállapodunk abban is, hogy $f^{(0)}(a) := f(a)$ és $f^{(0)} := f$.

Indukcióval értelmezzük az **n -szeri deriválhatóságot** és az **n -edik deriváltat**. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetében már értelmeztük azt, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mikor deriválható $(n-1)$ -szer egy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n-1}\{a\}$), továbbá azt is, hogy mikor létezik és mi az $(n-1)$ -edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az $f^{(n-1)}$ szimbólummal.

3. Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy valamely $n = 2, 3, \dots$ esetén létezik az $f^{(n-1)}$ -gyel jelölt $(n-1)$ -edik deriváltfüggvény. Azt mondjuk, hogy **f n -szer deriválható az a pontban** (jelölése: $f \in D^n\{a\}$), ha

- $\exists r > 0: f \in D^{n-1}(K_r(a))$, és
- az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény deriválható a -ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$$

az f függvény **a -beli n -edik deriváltja**.

Ha $H := \{x \in \text{int } \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$ az f függvény **n -edik deriváltfüggvénye**, amit röviden az $f^{(n)}$ szimbólummal jelölünk.

Példa. Ha $f(x) := x^4$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor

$$f'(x) = 4x^3 \ (x \in \mathbb{R}), \quad f''(x) = 12x^2 \ (x \in \mathbb{R}), \quad f^{(3)}(x) = 24x \ (x \in \mathbb{R}), \quad f^{(4)}(x) = 24 \ (x \in \mathbb{R}).$$

Ha egy f függvényre valamilyen $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban minden $n \in \mathbb{N}$ mellett teljesül, hogy $f \in D^n\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény ***a-ban végtelen sokszor*** (vagy ***akárhányszor***) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty\{a\}$ szimbólumot használjuk. Ha ez minden $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban igaz, akkor az ***f függvény végtelen sokszor*** (vagy ***akárhányszor***) deriválható, amit röviden így jelölünk: $f \in D^\infty$.

Könnyen igazolható, hogy ha a p függvény egy polinom, akkor $p \in D^\infty$. Másrészt $\exp \in D^\infty$, $\sin \in D^\infty$, $\cos \in D^\infty$.

A deriválási szabályok némelyike magasabb rendű deriváltakra is átvihető.

1. Tétel. Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in D^n\{a\}$, akkor

$$a) \ f + g \in D^n\{a\} \quad \text{és} \quad (f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a),$$

$$b) \ f \cdot g \in D^n\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) \quad (\text{Leibniz-szabály}).$$

Bizonyítás. Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható.

- Az a) bizonyítása szinte triviális.
- A b) belátása némi számolgatást igényel.

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTAL 1.

Lokális szélsőértékek

Korábban már értelmeztük az abszolút szélsőértékek fogalmát. Célszerű bevezetni ezek lokális változatait.

4. Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban **lokális maximuma van**, ha

$$\exists K(a) \subseteq \mathcal{D}_f: \forall x \in K(a) \subseteq \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az a pontot ***f* lokális maximumhelyének** nevezzük, az $f(a)$ függvényérték pedig ***a* függvény lokális maximuma**.

Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimum** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen **lokális szélsőértéknek**, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet **lokális szélsőértékhelynek** nevezzük.

Megjegyzés. Az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn.

- Egy abszolút szélsőérték hely nem szükségképpen lokális szélsőérték hely, mert a lokális szélsőérték helynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például az $f(x) = x$ ($x \in [0, 1]$) függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimum hely. Azonban, ha az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van, és A tartalmazza az a pont egy környezetét, akkor a lokális szélsőérték hely.
- Egy lokális szélsőérték hely nem szükségképpen abszolút szélsőérték hely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$ -nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$ -nál nagyobb értéket.

2. Tétel (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel).

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és

- $f \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ -ben,
- f -nek a -ban lokális szélsőértéke van.

Ekkor $f'(a) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pont lokális maximum helye az $f \in D\{a\}$ függvénynek. Ekkor

$$\exists r > 0: \forall x \in (a - r, a + r) \text{ esetén } f(x) \leq f(a).$$

Tekintsük az f függvény a -hoz tartozó különbséghányados-függvényét:

$$(1) \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}).$$

Ha $a < x < a + r$, azaz $x - a > 0$, akkor $f(x) \leq f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \leq 0$) miatt (1)-ben szereplő különbséghányados nem pozitív. Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) \leq 0.$$

Ha $a - r < x < a$, azaz $x - a < 0$, akkor $f(x) \leq f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \leq 0$) miatt (1)-ben szereplő különbséghányados nem negatív. Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) = f'(a) \geq 0.$$

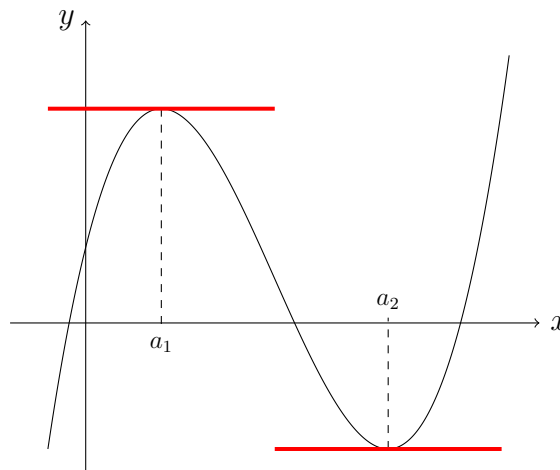
Azt kaptuk tehát, hogy $f'(a) \leq 0$ és $f'(a) \geq 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a) = 0$.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha a lokális minimum helye az f függvénynek.

Megjegyzések.

1. A deriválható f függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az $f'(x) = 0$ egyenletet kell megoldani.

2. A tételnek az a geometriai jelentése, hogy ha a függvény grafikonjának létezik érintője egy lokális szélsőértékpontban, akkor az érintő vízszintes, párhuzamos az x tengellyel.



3. Abból, hogy $f'(a) = 0$, nem következik, hogy az f függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pont lokális szélsőértékhelye. Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{függvényre} \quad f'(x) = 3x^2 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{miatt} \quad f'(0) = 0,$$

de a függvénynek nincs 0-ban lokális szélsőértéke (hiszen a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növekedő). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f differenciálható a -ban, akkor az $f'(a) = 0$ csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy az f függvénynek a -ban lokális szélsőértéke legyen.

A fenti példa motiválja a következő fogalom bevezetését.

5. Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ **stacionárius pontja**, ha $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = 0$.

A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel azt állítja, hogy deriválható függvénynek lokális szélsőértékhelyei a függvény stacionárius pontjaiban lehetnek. A fenti példa azonban azt mutatja, hogy lehetnek olyan stacionárius pontok, amelyek nem lokális szélsőértékhelyek. Fontos feladat tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e. Erre hamarosan jól használható eredményeket fogunk mutatni.

A differenciálszámítás középértéktételei

A középértéktételek olyan állítások, amelyek egy intervallumon értelmezett függvényről garantálják, hogy mindig van olyan pont az intervallum belsejében, amelyre bizonyos tulajdonság teljesül. Ilyen típusú állítás például a Bolzano tétele, miszerint ha $f \in C[a, b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists \xi \in (a, b): f(\xi) = 0$. Emlékezzük arról, hogy $f \in C[a, b]$ azt jelenti, hogy $[a, b] \in \mathcal{D}_f$, $f \in C\{x\}$ ($x \in (a, b)$), illetve f jobbról folytonos a -ban és balról folytonos b -ben.

Differenciálszámításnál a középértéktételek egy olyan pont létezését garantálják, ahol a függvény deriváltja olyan értéket vesz fel, ami a függvényhez kapcsolódik. Három ilyen tételt mutatjuk meg: a Rolle-, a Lagrange- és a Cauchy-féle középértéktételt. A középértéktételekkel fontos tulajdonságokat tudunk igazolni a függvény viselkedéséről.

3. Tétel (Rolle-féle középértéktétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \in C[a, b], \\ \bullet f \in D(a, b), \\ \bullet f(a) = f(b) \end{array} \right\} \implies \exists \xi \in (a, b): f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. A Weierstrass-tétel szerint, ha $f \in C[a, b]$, akkor f felveszi a maximumát és a minimumát az $[a, b]$ intervallumon, azaz

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]: f(\xi_1) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \quad f(\xi_2) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

Ekkor két eset lehetséges

- $f(\xi_1) = f(\xi_2)$. Ekkor a maximum és a minimum megegyezik, azaz f konstans az $[a, b]$ intervallumon. Ezért $f'(\xi) = 0$ minden $\xi \in (a, b)$ esetén.
- $f(\xi_1) \neq f(\xi_2)$. Ekkor az $f(a) = f(b)$ feltétel miatt nem lehetséges, hogy ξ_1 és ξ_2 legyen az $[a, b]$ intervallum két végpontja. Tehát egyikük az intervallum belsejében van, amelyet ξ -vel fogjuk jelölni. Így már ξ lokális szélsőértékhelye lesz f -nek. Ezért a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel miatt $f'(\xi) = 0$.

Megjegyzés. A Rolle-féle középértéktételből következik, hogy ha $f \in C[a, b]$, $f \in D(a, b)$ és $\forall x \in (a, b): f'(x) \neq 0$, akkor $f(a) \neq f(b)$.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$e^x = x + 1$$

egyenletnek egyetlen egy megoldása van!

Megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenlet megoldása egyben az

$$f(x) := e^x - x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény zérushelye is. Világos, hogy $a = 0$ megoldása az egyenletnek, azaz $f(a) = 0$. Azonban az

$$f'(x) = e^x - 1$$

deriváltfüggvény csak az $x = a = 0$ helyen lehet nulla az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt.

Ezért, ha $b > a$ tetszőleges szám, akkor $f \in C[a, b]$, $f \in D(a, b)$ és $\forall x \in (a, b): f'(x) \neq 0$, amiből a Rolle-tétel alapján következik, hogy $f(a) \neq f(b)$, azaz $f(b) \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek nincs pozitív megoldása.

Hasonlóan igazolható, hogy az egyenletnek nincs negatív megoldása.

A Rolle-féle középértéktétel a következő módon általánosítható.

4. Tétel (Cauchy-féle középértéktétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f, g \in C[a, b], \\ \bullet f, g \in D(a, b), \\ \bullet \forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \implies \exists \xi \in (a, b): \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy a Rolle-tételből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$. Tekintsük az

$$F(x) := f(x) - \lambda g(x) \quad (x \in [a, b]), \quad \text{ahol} \quad \lambda := \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

függvényt! Világos, hogy

$$f, g \in C[a, b] \implies F \in C[a, b] \quad \text{és} \quad f, g \in D(a, b) \implies F \in D(a, b).$$

Másrészt

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a) = (\lambda \text{ definíciója szerint}) = f(b) - \lambda g(b) = F(b).$$

Ez azt jelenti, hogy F eleget tesz a Rolle-tétel feltételeinek, és így $\exists \xi \in (a, b): F'(\xi) = 0$. Azonban

$$F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x) \quad (x \in (a, b)),$$

tehát

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = F'(\xi) = 0 \implies \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

A Cauchy-féle középértéktételnek van egy fontos speciális esete.

5. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \in C[a, b], \\ \bullet f \in D(a, b) \end{array} \right\} \implies \exists \xi \in (a, b): f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

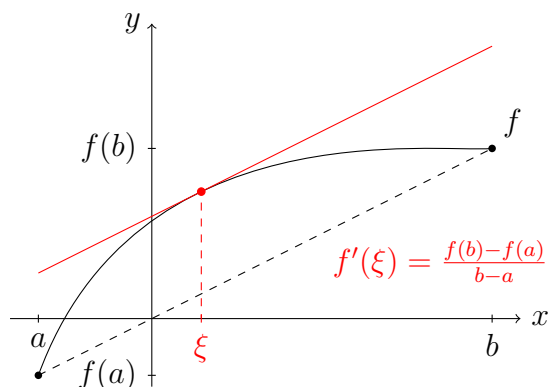
Bizonyítás. Legyen $g(x) := x$ a Cauchy-féle középértéktételben.

A Rolle-féle középértéktétel a Lagrange-féle középértéktétel speciális esete.

A Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentése: az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon átmenő húr meredeksége

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tehát f grafikonjának van olyan pontja, ahol az érintő párhuzamos ezzel a húrral.



A Lagrange-féle középértéktétel egyszerű, de fontos következményei a következő állítások:

6. Tétel (A deriváltak egyenlősége). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$.

1. Tegyük fel, hogy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor

$$f' \equiv 0 \text{ (} a, b \text{)-n} \iff f \equiv \text{állandó (} a, b \text{)-n.}$$

2. Tegyük fel, hogy $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ és $f, g \in D(a, b)$. Ekkor

$$f' \equiv g' \text{ (} a, b \text{)-n} \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in (a, b): f(x) = g(x) + c.$$

Bizonyítás.

1. Az állítás $\boxed{\Leftarrow}$ irányát már ismerjük, ugyanis a konstansfüggvény deriváltja 0.

A $\boxed{\Rightarrow}$ irány a Lagrange-féle középértéktétel következménye. Valóban, $\forall x, y \in (a, b)$, $x < y$ esetén $f \in C[x, y]$, $f \in D(x, y)$, és így

$$\exists \xi \in (x, y): \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) = 0 \implies f(x) = f(y).$$

2. Alkalmazzuk az 1. állítást az $F := f - g$ függvényre.

Monotonitás

Az egyszerűség kedvéért csak intervallumon vizsgáljuk a monotonitást. Az $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ szimbólummal jelölünk egy korlátos vagy nem korlátos nyílt intervallumot, tehát $a = -\infty$ vagy $b = +\infty$ is lehetséges.

Egy függvény esetén a „monoton növekedő”, a „monoton csökkenő”, a „szigorúan monoton növekedő”, illetve a „szigorúan monoton csökkenő” kifejezések helyett gyakran a „ \nearrow ”, a „ \searrow ”, a „ \uparrow ”, illetve a „ \downarrow ” jeleket használjuk.

Az első fontos észrevétel az, hogy az első derivált előjeléből következtethetünk a függvény monotonitására. A következő animációban „látjuk”, hogy a lokális szélsőértékeken a függvényhez húzott érintő párhuzamos az x tengellyel, továbbá a szigorúan monoton növekvő szakaszokon az érintő meredeksége pozitív, illetve a szigorúan monoton csökkenő szakaszokon az érintő meredeksége negatív.

7. Tétel (A monotonitás és a derivált kapcsolata). Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$. Ekkor

$$1. f \nearrow [\text{illetve } \searrow] (a, b)\text{-n} \iff f' \geq 0 [\text{illetve } f' \leq 0] (a, b)\text{-n};$$

$$2. \text{ ha } f' > 0 [\text{illetve } f' < 0] (a, b)\text{-n} \implies f \uparrow [\text{illetve } \downarrow] (a, b)\text{-n}.$$

Bizonyítás.

1. \Rightarrow Ha $f \nearrow (a, b)$ -n és $t \in (a, b)$ egy tetszőleges pont, akkor

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0 \quad (t < x < b),$$

hiszen $x - t > 0$ és a monotonitás miatt $f(x) - f(t) \geq 0$. Mivel $f \in D\{t\}$, így

$$f'(t) = f'_+(t) = \lim_{x \rightarrow t+0} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0.$$

\Leftarrow Ha $\forall x \in (a, b): f'(x) \geq 0$, akkor legyen $x, y \in (a, b)$, $x < y$ két tetszőleges pont. Ekkor $f \in C[x, y]$, $f \in D(x, y)$, és így a Lagrange-féle közéértéktétel szerint

$$\exists \xi \in (x, y): \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0 \implies f(x) \leq f(y).$$

Ezért $f \nearrow (a, b)$ -n.

Az állítás hasonlóan igazolható monoton csökkenő függvények esetében is.

2. Alkalmazzuk „éles” egyenlőtlenségeket az 1. pont \Leftarrow irányában.

Megjegyzések.

1. A tételben lényeges feltétel, hogy intervallumon értelmezett függvényről van szó. Például, ha

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \text{akkor} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f: f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

de az f függvény nem szigorúan monoton csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami **nem intervallum**.

2. Az 1. pont \Rightarrow irányában nem tudunk „éles” egyenlőtlenségeket alkalmazni. **A szigorú monotonitásra vonatkozó elégséges feltételek nem is fordíthatók meg.** Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton növekedő az egész valós számok halmazán, de $f'(0) = 0$.

3. Nem nehéz igazolni (pl. átviteli elvvel), hogy ha f monoton az (a, b) intervallumon, és folytonos az intervallum egyik végpontján, akkor a monotonitás kiterjeszthető a végponttal bővített intervallumra. Ez az állítás szigorú monotonitás esetén is igaz. Így tudjuk az előbbi tételt kiterjeszteni tetszőleges intervallumra. Például, $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$ esetén

$$f \nearrow [a, b] - n \iff f' \geq 0 (a, b) - n.$$

A lokális szélsőértékre vonatkozó elégséges feltételek

Az eddigiek alapján könnyen kaphatunk elégséges feltételeket arra, hogy egy függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen.

Az egyik ahhoz kapcsolódik, hogy a deriváltfüggvény **előjelet vált**. Azt mondjuk, hogy a $g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $t \in \text{int } \mathcal{D}_g$ pontban negatívból pozitívba megy át (röviden: $(-, +)$ előjelváltása van), ha $g(t) = 0$ és $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $g < 0$ $(t - \delta, t)$ -n és $g > 0$ $(t, t + \delta)$ -n. A $(+, -)$ előjelváltást hasonló módon értelmezzük.

8. Tétel (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

- $f \in D(a, b)$,
- egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$ és
- az f' deriváltfüggvény előjelet vált c -ben.

Ekkor,

1. ha az f' függvény a c pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át, akkor c az f függvénynek lokális minimumhelye,
2. ha az f' függvény a c pontban pozitív értékből negatív értékbe megy át, akkor a c pont az f függvénynek lokális maximumhelye.

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló tételből, hiszen ha f -nek $(-, +)$ előjelváltása van a c pontban, akkor $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $f' < 0$ $(c - \delta, c)$ -n és $f' > 0$ $(c, c + \delta)$ -n. Ezért $f \downarrow (c - \delta, c]$ -n és $f \uparrow [c, c + \delta)$ -n. Emiatt $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : f(x) > f(c)$, tehát c az f függvénynek lokális minimumhelye. Az állítás hasonlóan igazolható $(+, -)$ előjelváltás esetén.

3. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

függvény lokális szélsőérték helyeit és monotonitási intervallumait!

Megoldás. A tanult tételek értelmében előjelvizsgálatot fogunk végezni az

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3} \quad (x \neq 0)$$

deriváltfüggvény esetében. Mivel f' folytonos minden $x \neq 0$ pontban, így csak az $x = 0$ és az f' zérushelyei olyan pontok, ahol eltérhet f' előjele a pont bal és jobb oldali környezetén. A példában f' -nek egyetlen zérushelye van:

$$f'(x) = -\frac{x+2}{x^3} = 0 \quad \implies \quad x = -2.$$

Ezzel három részintervallumot kapunk, ahol egységes f' előjele: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ és $(0, +\infty)$. Nem nehéz meghatározni f' előjeleit ezeken az intervallumokon, hiszen ehhez elegendő kiszámolni f' értékét az intervallumok egyik pontján. A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményeit az f függvényre vonatkozóan.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	$x > 0$
f'	$-$	0	$+$	$-$
f	\downarrow	$-1/4$	\uparrow	\downarrow
lok.		min		

A táblázatból rögtön leolvashatók f monotonitási szakaszait, illetve azt, hogy f -nek lokális minimumhelye van az $x = -2$ pontban, és lokális minimuma $f(-2) = -1/4$.

Kétszer differenciálható függvények esetében van egy alternatív módszer, amivel nem szükséges előjelvizsgálatot végezni, ha a függvényt kétszer deriváljuk.

9. Tétel (A lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel).

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

- $f \in D^2\{c\}$, azaz kétszer deriválható egy $c \in (a, b)$ pontban,
- $f'(c) = 0$ és
- $f''(c) \neq 0$.

Ekkor c lokális szélsőérték helye az f függvénynek, és

1. ha $f''(c) > 0$, akkor f -nek c -ben lokális minimuma van,
2. ha $f''(c) < 0$, akkor f -nek c -ben lokális maximuma van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f''(c) > 0$. Mivel

$$0 < f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c},$$

így a c pontnak van olyan bal oldali környezete, ahol $f' < 0$, van olyan jobb oldali környezete, ahol $f' > 0$. Tehát f' -nek $(-, +)$ előjelváltása van, ami azt jelenti, hogy f' -nek c -ben lokális minimuma van.

Az állítás hasonlóan igazolható $f''(c) < 0$ esetén.

Megjegyzések.

1. A 3. Feladatban $f \in D^2\{x\}$ minden $x \neq 0$ esetén, és

$$f''(x) = \left(-\frac{x+2}{x^3}\right)' = -\frac{1 \cdot x^3 - (x+2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x+6}{x^4} \implies f(-2) > 0.$$

Ezért $x = -2$ valóban lokális minimumhely.

2. Ha egyszerre $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$, akkor c lehet lokális szélsőérték hely, de lehet, hogy nem. A különböző lehetőségeket mutatják például az $f(x) := x^3$, $f(x) := x^4$ és az $f(x) := -x^4$ ($x \in \mathbb{R}$) függvények a $c = 0$ helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek.