Analízis 2 (F)

1. zh megoldott feladatai
(2020.10.26)

1. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}, & \text{ha } x < 1, \\ \sqrt{x+3}, & \text{ha } 1 \le x \le 6, \\ \dfrac{\sin(2x-12)}{x-6}, & \text{ha } x > 6 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

Megoldás: A megadott f függvény minden $x \in \mathbf{R}$ esetén értelmezhető, hiszen az

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2} \qquad (x \neq 1, x \neq 2)$$

illetve

$$\sqrt{x+3} \quad (x \geq -3) \qquad \text{és} \qquad \frac{\sin(2x-12)}{x-6} \quad (x \neq 6)$$

kifejezések értelmezhetők a megadott intervallumokon. A polinomok, a gyök- és a szinuszfüggvény, illetve a folytonos függvényekkel végzett alapműveletek (kivéve természetesen a nullával való osztás) és kompozíció folytonossága miatt igaz, hogy f folytonos a $]-\infty, 1[\cup]1, 6[\cup]6, \infty[$ halmazon.

$x = 1$ esetén

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0} \frac{x-3}{x-2} = 2,$$

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0} \sqrt{x+3} = 2 = f(1),$$

így f folytonos az $x = 1$ pontban.

$x = 6$ esetén az $y = 12x - 12$ helyettesítéssel

$$\lim_{6-0} f = \lim_{x\to 6-0} \sqrt{x+3} = 3 = f(6),$$

$$\lim_{6+0} f = \lim_{x\to 6+0} \frac{\sin(2x-12)}{x-6} = 2 \lim_{x\to 6+0} \frac{\sin(2x-12)}{2x-12} = 2 \lim_{y\to 0+0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2,$$

így f nem folytonos az $x = 6$ pontban, hiszen a pont bal- és jobboldali határértéke nem egyezik meg. Mivel mindkét határérték véges, ezért az f függvénynek elsőfajú szakadása van az $x = 6$ pontban.

2. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) = x^2\sqrt{x+1} \qquad (x > -1)$$

függvény lokális szélsőértékeit a teljes értelmezési tartományán, illetve abszolút szélsőértékeit a $[-\frac{1}{2}, 1]$ halmazon!

Megoldás: A deriválási szabályok értelmében f differenciálható és

$$f'(x) = 2x\sqrt{x+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}} \qquad (x > -1).$$

A függvény stacionárius pontjai az $x_1 = 0$ és az $x_2 = -\frac{4}{5}$ pontok, hiszen csak ezeken a pontokon lesz a függvény deriváltja nulla.

A következő táblázat tartalmazza a derivált függvénnyel végzett előjelvizsgálatot és ennek következményeit.

	$]-1,-\frac{4}{5}[$	$-\frac{4}{5}$	$]-\frac{4}{5},0[$	0	$]0,\infty[$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\frac{16}{25\sqrt{5}}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$
lok.		max		min	

Tehát a függvény lokális maximuma $f(-\frac{4}{5}) = \frac{16}{25\sqrt{5}}$ és lokális minimuma $f(0) = 0$.

Mivel a függvény folytonos a $[-\frac{1}{2}, 1]$ zárt intervallumon, így a Weierstrass-tétel szerint léteznek a keresendő abszolút szélsőértékek. Az abszolút szélsőértékhelyek az intervallum belsejében lévő lokális szélsőértékhelyekből és az intervallum végpontjaiból kerülhetnek ki. Mivel

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = \sqrt{2},$$

így az abszolút minimum $f(0) = 0$, és az abszolút maximum $f(1) = \sqrt{2}$.

3. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) = xe^{-x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény grafikonját!

Megoldás:

1. **Kezdeti vizsgálatok.** A függvény akárhányszor differenciálható, zérushelye: $x = 0$.

2-3. **Monotonitás, lokális szélsőértékek.**

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

Így $f'(x) = 0 \iff x = 1$. A következő táblázat tartalmazza a derivált függvénnyel végzett előjelvizsgalatot és ennek következményeit.

	$]-\infty,1[$	1	$]1,\infty[$
f'	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	$\frac{1}{e}$	$\downarrow$
lok.		max	

4. **Konvexitás, inflexiós pontok.**

$$f''(x) = (-1)e^{-x} + (1-x)e^{-x}(-1) = (x-2)e^{-x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

Így $f''(x) = 0 \iff x = 2$. A következő táblázat tartalmazza a második derivált függvénnyel végzett előjelvizsgálatot és ennek következményeit.

	$]-\infty,2[$	2	$]2,\infty[$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$\frac{2}{e^2}$	$\smile$
		infl.	

5. **Határértékek.**

$$\lim_{\infty} f = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty)\cdot\infty = -\infty.$$

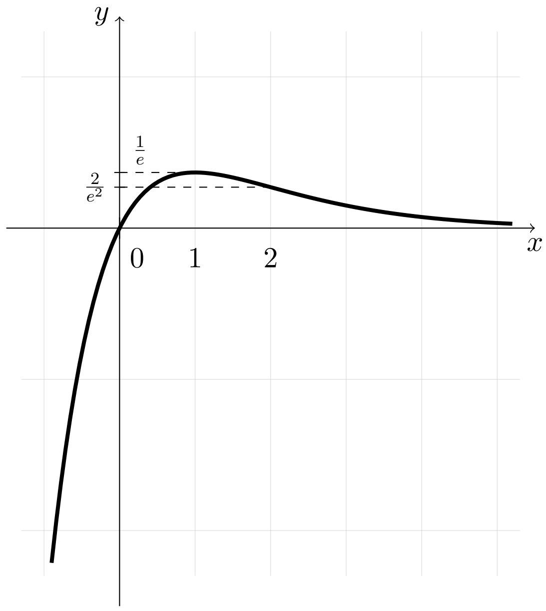
6. **Aszimptoták.**
A $(+\infty)$-ben

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \qquad B = \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0$$

A $(-\infty)$-ben

$$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \text{nincs aszimptota.}$$

7. **Ábrázolás.**



4. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a) $\displaystyle\lim_{x\to0+0} (\cos x)^{1/\sin x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0-0} (x \cdot \ln(-x))$

Megoldás: A határértékeket L'Hospital szabály segítségével fogjuk megoldani.

a) Alakítsuk át a kifejezést a következő módon

$$(\cos x)^{1/\sin x} = e^{\ln(\cos x)^{1/\sin x}} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sin x}}.$$

Másrészt

$$\lim_{x\to0+0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to0+0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{\cos x} = \frac{1 \cdot 0}{1} = 0.$$

Így az exponenciális függvény folytonossága miatt

$$\lim_{x\to0+0} (\cos x)^{1/\sin x} = e^0 = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to0-0} (x \cdot \ln(-x)) = \lim_{x\to0-0} \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to0-0} \frac{\frac{1}{-x} \cdot (-1)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0-0} (-x) = 0$$

5. Feladat. Írja fel az alábbi függvény 0 középpontú másodfokú Taylor-polinomját, és adjon becslést a közelítés hibájára a $]0, \frac{1}{4}[$ intervallumon!

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} \qquad (x > -\frac{1}{2})$$

Megoldás: A függvény akárhányszor deriválható, és minden $x > -\frac{1}{2}$ pontban

$$f(x) = (1+2x)^{-3/2} \qquad \Longrightarrow \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}(1+2x)^{-5/2} \cdot 2 = -3(1+2x)^{-5/2} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(0) = -3$$

$$f''(x) = \frac{15}{2}(1+2x)^{-7/2} \cdot 2 = 15(1+2x)^{-7/2} \qquad \Longrightarrow \qquad f''(0) = 15$$

Az f függvény 0 ponthoz tartozó másodfokú Taylor-polinomja

$$T_{0,2}(f,x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 - 3x + \frac{15}{2}x^2.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal. Ekkor minden $0 < x < \frac{1}{4}$ értékhez van olyan $0 < \xi < x$ szám, hogy

$$f(x) - T_{0,2}(f,x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3.$$

Mivel

$$f'''(x) = -\frac{105}{2}(1+2x)^{-9/2} \cdot 2 = \frac{-105}{\sqrt{(1+2x)^9}},$$

így

$$|f(x) - T_{0,2}(f,x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}|x|^3 = \frac{105}{6}\frac{1}{\sqrt{(1+2\xi)^9}}|x|^3 \le \frac{35}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{35}{128}.$$