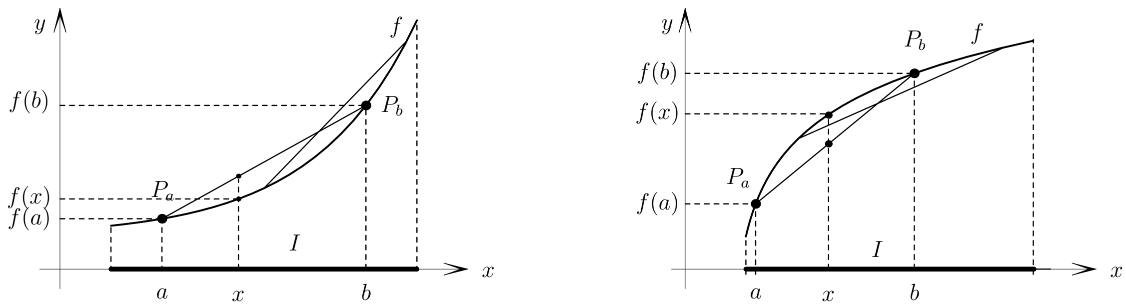
3. előadás

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTTAL 2.

Konvex és konkáv függvények

A konvex és konkáv függvények fogalmát már az Analízis I. kurzuson bevezettük. Ezzel az volt a célunk, hogy néhány alapfüggvény konvexitási tulajdonságát vizsgáljuk, és így teljes képet kapjunk ezekről a függvényekről. Nevezetesen a hatvány-, a reciprok és a gyökfüggvények esetében sikerült ezt „ügyes" számításokkal megvalósítani a definíció alapján. Azonban az exponenciális függvénynél azt mondtuk, hogy szigorú konvexitása elemi úton igazolható ugyan, de a differenciálszámítás eszköztárával ezt az állítást jóval egyszerűbben tudjuk bizonyítani.

Emlékezzünk, hogy egy függvény konvexitása bizonyos „alaki" tulajdonságaival van összefüggésben. Az mondtuk, hogy egy függvény szigorúan konvex (konkáv) egy I intervallumon, ha tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$ pontpár esetén a függvény (a, b) intervallumhoz tartozó része az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr alatt (felett) van. Az alábbi ábrák ezt illusztrálják. Az f függvény szigorúan konvex, és a g függvény szigorúan konkáv.



A szóban forgó húr egyenesének egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \qquad \text{vagy} \qquad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

A konvex és konkáv függvények pontos fogalma a következő:

1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $I \subseteq \mathcal{D}_f$ egy intervallum. Ha $\forall a, b \in I$, $a < b$ esetén igaz az, hogy*

- *ha $\forall x \in (a, b)$: $f(x) \le \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **konvex az I intervallumon**,
- *ha $\forall x \in (a, b)$: $f(x) \ge \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **konkáv az I intervallumon**,

Szigorú egyenlőtlenségek esetén **szigorúan konvex**, *illetve* **szigorúan konkáv** *függvényekről beszélünk.*

Megjegyzés. Mivel a húr egyenesének egyenlete kétféle módon írható fel, így a fenti definícióban szereplő

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \quad \text{kifejezés helyett az} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)$$

kifejezés is írható.

Most tegyük fel, hogy az f függvény konvex az I nyílt intervallumon, és $x \in I$ egy tetszőleges pont. Legyen tovább $u, v \in I$, $u < x < v$ két tetszőleges pont. Ekkor a fenti megjegyzés miatt egyszerre igaz, hogy

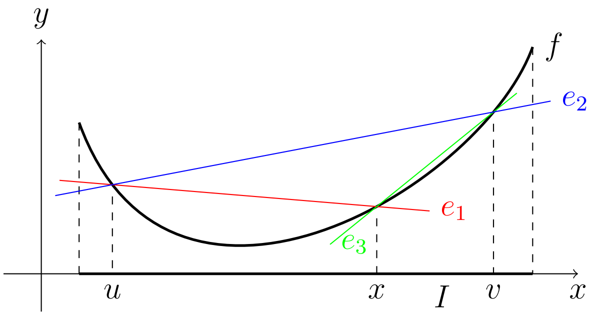
$$f(x) \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u)+f(u) \qquad \text{és} \qquad f(x) \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-v)+f(v),$$

ami egyszerű ekvivalens átalakításokkal a következő módon írható át

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(x)-f(v)}{x-v}.$$

Ha a függvény konkáv, szigorúan konvex vagy szigorúan konkáv, akkor a $(*)$-ban szereplő relációk irányán és élességén kell megfelelően változtatni.

Az ábra szemlélteti $(*)$ geometriai jelentését. Látható, hogy az e_1, az e_2 és az e_3 húrok meredekségei rendre a $(*)$-ban szereplő különbséghányadosok, és ezek nagysága megfelelnek a $(*)$-ban szereplő egyenlőtlenségeknek.



Megjegyzés. Legyen $a \in I$ és

$$F_a(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (x \in I \setminus \{a\}).$$

Mivel $u < x < v$ tetszőleges pontok, így $(*)$-ból következik, hogy f akkor és csak akkor (szigorúan) konvex, ha az $F_a(x)$ különbséghányados-függvény (szigorúan) monoton növekvő. Konkáv függvények esetén csökkenő monotonitás lép fel.

1. Tétel (A konvexitás és a deriválhatóság kapcsolata). *Legyen $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D^2(a,b)$. Ekkor*

1. *f konvex [illetve f konkáv] (a,b)-n $\iff$ $f'' \geq 0$ [illetve $f'' \leq 0$] (a,b)-n;*
2. *ha $f'' > 0$ [illetve $f'' < 0$] (a,b)-n $\implies$ f szigorúan konvex [illetve f szigorúan konkáv] (a,b)-n.*

Bizonyítás. Igazolható, hogy

- f konvex (a,b)-n $\iff$ $f' \nearrow (a,b)$-n,
- f szigorúan konvex (a,b)-n $\iff$ $f' \uparrow (a,b)$-n,
- f konkáv (a,b)-n $\iff$ $f' \searrow (a,b)$-n,
- f szigorúan konkáv (a,b)-n $\iff$ $f' \downarrow (a,b)$-n.

Ekkor a tétel állítása a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló tételből következik, ha a tételt alkalmazzuk az f' függvényre, hiszen $f'' = (f')'$.

A négy állításból csak az elsőt fogjuk igazolni. A többi hasonlóan igazolható. Tegyük fel, hogy f konvex (a,b)-n, $u, v \in (a,b)$, $u < v$ két tetszőleges pont és $u < x < v$ egy tetszőleges pont. Ekkor $(*)$ miatt határátmenettel:

$$f'(u) = \lim_{x \to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \quad \text{és} \quad f'(v) = \lim_{x \to v} \frac{f(x)-f(v)}{x-v} \geq \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$$

amiből $f'(u) \leq f'(v)$ következik, azaz f' monoton növekvő az (a,b) intervallumon.

Fordítva, tegyük fel, hogy az f' derivált függvény monoton növekvő az (a,b) intervallumon és vegyük az $a < u < x < v < b$ tetszőleges pontokat. Ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik egy $u < \xi_1 < x$ és egy $x < \xi_2 < v$ szám, hogy

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}, \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(v)-f(x)}{v-x}.$$

A monotonitás miatt $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, azaz

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(v)-f(x)}{v-x},$$

ami a következő módon alakítható át:

$$\begin{aligned}
(f(x)-f(u))(v-x) &\leq (f(v)-f(x))(x-u) \\
f(x)\big((v-x)+(x-u)\big) &\leq f(u)(v-x)+f(v)(x-u) \\
f(x)(v-u) &\leq f(u)\big((v-u)-(x-u)\big)+f(v)(x-u) \\
f(x)(v-u) &\leq (f(v)-f(u))(x-u)+f(u)(v-u) \\
f(x) &\leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u)+f(u).
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy f konvex függvény.

Megjegyzés. Az előző tétel értelmében az exponenciális függvény szigorúan konvex $\mathbb{R}$-n azért, mert $\forall x \in \mathbb{R}\colon (\exp)''(x) = \exp(x) > 0$.

2. Definíció. *Legyen $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D(a,b)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $c \in (a,b)$ pont az f függvénynek* **inflexiós pontja**, *ha*

$$\exists \delta > 0\colon f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n} \quad \text{és} \quad \text{konkáv } [c, c+\delta)\text{-n}, \quad \text{vagy fordítva.}$$

Megjegyzések.

1. A konvexitás és a deriválhatóság kapcsolatáról szóló tétel értelmében, ha $f \in D^2(a,b)$ és $c \in (a,b)$ inflexiós pont, akkor f'' előjele különbözik c egy bal és egy jobb oldali környezetében. Ha még $f'' \in C\{c\}$, akkor ez csak akkor lehetséges, ha $f''(c) = 0$. Ezt hívjuk ***az inflexiós pontra vonatkozó másodrendű szükséges feltételnek***.

2. Igazolható, hogy a függvény inflexiós pontjain az érintő „átszeli" a függvény grafikonját szigorú konvexitási váltás mellet. Pontosabban, ha e jelöli az f függvény érintőjét a c pontban, akkor a $\varphi := f - e$ függvénynek előjelváltása van a c pontban. Ez a jelenség könnyen megfigyelhető az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény esetén a $c = 0$ pontban, ahol a függvénynek inflexiós pontja van, és ott az érintő egyenlete $e(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

1. Feladat. *Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából a következő függvényt*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \qquad (x \neq 0),$$

és határozzuk megy az inflexiós pontjait!

Megoldás. Előjelvizsgálatot fogunk végezni a függvény második deriváltjával, amelyet már kiszámoltunk egy korábbi előadásban:

$$f''(x) = \frac{2x+6}{x^4}, \qquad (x \neq 0).$$

Ennek egyetlen zérushelye az $x = -3$. Ekkor a monotonitáshoz hasonló táblázatot készítünk, de ennek első sorában f'' szerepel. A $\smile$ szimbólummal jelöljük azt, hogy a függvény konvex, a $\frown$ szimbólummal pedig azt, hogy a függvény konkáv az adott intervallumon.

	$x < -3$	-3	$-3 < x < 0$	$x > 0$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\frown$	$-2/9$	$\smile$	$\smile$
		infl.		

A táblázatból rögtön leolvasható, mely intervallumokon lesz konvex vagy konkáv a függvény, illetve az, hogy f-nek inflexiós pontja van az $x = -3$ helyen, ahol a függvény értéke $f(-3) = -2/9$.

Aszimptoták

Ha egy függvény grafikonja nem korlátos, akkor úgy kell ábrázolni, hogy érzékelhető legyen az a tendencia, amit a függvény követ, amikor „elhagyja" a rajzterületet. Ehhez a függvény határérték nagyon fontos segítséget nyújt. Előfordul, hogy a grafikon pontjai tetszőleges közelségbe kerülnek egy adott egyeneshez, ún. ***aszimptotához***. A legegyszerűbb ilyen eset, amikor a függvénynek egy a pontban van bal vagy jobb oldali határértéke, és ez $-\infty$ vagy $+\infty$. Ekkor az $x = a$ egyenletű egyenes egy függőleges aszimptotája lesz a függvénynek.

Ha a függvény értelmezési tartománya nem korlátos, akkor lehet vízszintes aszimptotája is. Ez akkor fordul elő, amikor létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben vagy a $+\infty$-ben, és ez egy A számmal egyenlő. Ekkor $y = A$ az aszimptota egyenlete. De előfordulnak más esetek is.

3. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* **van aszimptotája** $(+\infty)$**-ben***, ha*

$$\exists l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(f(x) - l(x) \Big) = 0.$$

Ekkor az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes az f függvény **aszimptotája** $(+\infty)$**-ben**.

A függvény $(-\infty)$**-beli aszimptotáját** *is hasonló módon értelmezzük.*

2. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - Ax\Big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

Bizonyítás. A tétel könnyen igazolható a határérték alaptulajdonságai alapján.

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására.

A L'Hospital-szabály

Ebben a fejezetben láttuk, hogy a differenciálszámítás eszköztárával milyen hatékonyan tudunk meghatározni több függvénytulajdonságot. Az aszimptoták kivételnek tűnnek, mert ehhez határértékszámítás szükséges. Most megmutatjuk, hogy a differenciálszámítás is remek módon alkalmazható függvények határértékének kiszámításában.

Először lássuk hogyan számítjuk a következő határértéket az eddigi ismereteink alapján:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^8 + 3x^5 - 2x^2 - 2}{x^4 - 6x^2 + 5x} = \lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^7 + x^6 + x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 2)}{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 - 5x)} = -\frac{19}{3}.$$

Egy $0/0$ típusú kritikus határértékről van szó. A számlálóból és a nevezőből kiemeltük az $x-1$ tényezőt, és egyszerűsítés után kiértékeltük $x = 1$-re a fennmaradó kifejezést. Itt a problémát a kiemelés jelenti, amire több módszer ismert, de ezek általában sok számítással járnak. Most megpróbálkozunk valami mással. Legyen $a = 1$, illetve

$$f(x) := x^8 + 3x^5 - 2x^2 - 2 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x^4 - 6x^2 + 5x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Tudjuk, hogy f és g differenciálható függvények,

$$f'(x) = 8x^7 + 15x^4 - 4x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 4x^3 - 12x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f, g \in D\{a\}$, $f(a) = g(a) = 0$ és $g'(a) \neq 0$, így

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Ha az $f'(a) = f'(1) = 19$ és a $g'(a) = g'(1) = -3$ értékeket egymással elosztjuk, akkor megkapjuk a már ismert végeredményt. A határérték kiszámításához „csak" külön kellett deriválni a számlálót és a nevezőt, és az így kapott hányadost kiértékelni az $x = a$ pontban.

A most bemutatott módszer csak a fent megadott feltételek mellett alkalmazható. Több olyan eset van, amikor az $\overline{\mathbb{R}}$-beli műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek nem alkalmazhatók, ezek az ún. ***kritikus határértékek***. Ilyenek például a következők:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0^0.$$

Szerencsére a bemutatott módszer csak egy speciális esete egy jóval általánosabb állításnak, amit L'Hospital-szabálynak nevezünk.

3. Tétel (L'Hospital-szabály a $0/0$ esetben). *Legyen* $(-\infty \le a < b < +\infty)$, *illetve* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy a Rolle-tétel alapján, ha $g' \neq 0$ (a,b)-n, akkor g-nek legfeljebb egy zérushelye van (a,b)-n. Ekkor választhatunk olyan $b > a$ számot, hogy $g \neq 0$ (a,b)-n.

Két esetet fogunk megkülönböztetni

1. $\boxed{a > -\infty \text{ (véges).}}$ Legyen $A := \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$. Azt kell igazolni, hogy $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = A$, azaz

$$(\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in (a, a+\delta) \subseteq (a,b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Az $A = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'}$ feltétel azt jelenti, hogy

$$(\#\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall y \in (a, a+\delta) \subseteq (a,b)\colon \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az f és a g függvényt az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

A $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy ekkor $f, g \in C[a, a+\delta)$.

Legyen most $x \in (a, a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a,x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists \xi_x \in (a,x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \text{ (és ez (\#\#) miatt) } \in K_\varepsilon(A).$$

A $(\#)$ állítást tehát bebizonyítottuk. A $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ határérték létezik, és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = A$.

2. $\boxed{a = -\infty.}$ Legyen $-\infty < c < \min\{0, b\}$, $d := -1/c$ és

$$F(x) := f(-1/x), \quad G(x) := g(-1/x) \qquad \big(x \in (0,d)\big).$$

Ekkor F és G kielégítik a $0/0$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabály feltételeit $(0,d)$-n, illetve az összetett függvény deriváltja szerint

$$F'(x) := f'(-1/x) \cdot \frac{1}{x^2}, \quad G(x) := g'(-1/x) \cdot \frac{1}{x^2} \qquad \big(x \in (0,d)\big).$$

Így az $x = -1/y$ helyettesítéssel

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \text{(L'Hospital)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x^2} f'(-1/x)}{\frac{1}{x^2} g'(-1/x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{f'(-1/x)}{g'(-1/x)} = \lim_{y\to-\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Most megfogalmazzuk a $(+\infty)/(+\infty)$ kritikus határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

4. Tétel (L'Hospital-szabály a $(+\infty)/(+\infty)$ esetben). *Legyen* $(-\infty \le a < b < +\infty)$, *illetve* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ekkor*

- $f, g \in D(a,b)$,
- $\forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0$,
- $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty$,
- $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\Longrightarrow \quad \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk.

Megjegyzések.

1. Ha $(-\infty < a < b \le +\infty)$, akkor a L'Hospital-szabály minkét esete átfogalmazható a ***b pontbeli bal oldali határértékre*** (így tehát $+\infty$-ben vett határértékekre is). Ehhez elegendő az $y = -x$ helyettesítést elvégezni. Így a L'Hospital-szabály könnyen kétoldali határértékekre is átfogalmazható.

2. A $(+\infty)/(+\infty)$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabály alkalmazható a $(+\infty)/(-\infty)$, a $(-\infty)/(+\infty)$ és a $(-\infty)/(-\infty)$ típusú esetekre is.

3. Mivel az $a < b$ értékeket úgy választhatjuk, hogy egymáshoz tetszőleges közelségben legyenek, így a $\forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0$ feltétel szinte mindig előfordul a gyakorlatban.

4. A L'Hospital-szabály alkalmazása előtt győződjünk meg, hogy a határérték teljesíti a szabály alkalmazásához szükséges feltételeket. Például, ha
$$f(x) := \cos x, \quad \text{és} \quad g(x) := x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_0 \frac{f}{g} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1, \quad \text{de} \quad \lim_0 \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0 \neq \lim_0 \frac{f}{g}.$$

5. A L'Hospital-szabály többször egymás után is alkalmazható, ha szükséges. Például
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$
Azonban előfordul, hogy ez soha nem vezet eredményhez. Például
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$
és ha még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt, akkor az induló kifejezést kapjuk.

6. A L'Hospital-szabály nem fordítható meg abban az értelemben, hogy ha elvégzése után a kapott határérték nem létezik, akkor attól még lehet, hogy a keresett határérték létezik. Például

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1}\ \nexists,\ \text{de}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Ha $a>1$ és $1\le n\in\mathbb{N}$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln a)\cdot a^x}{n\cdot x^{n-1}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln a)^2\cdot a^x}{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}}=\cdots=$$

$$=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln a)^{n-1}\cdot a^x}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln a)^n\cdot a^x}{n!}=+\infty.$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy ha $a>1$, akkor $x\to+\infty$ esetén az a^x $(x\in\mathbb{R})$ függvény gyorsabban tart $(+\infty)$-hez, mint x bármelyik pozitív kitevőjű hatványa, és ezt szokás így is jelölni:

$$x^n\ll a^x,\quad \text{ha}\ \ x\ \ \text{elég nagy.}$$

Hasonlóan, ha $1\le m,n\in\mathbb{N}$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x^m}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot\ln^{n-1}x}{m\cdot x^m}=\cdots=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{m^n\cdot x^m}=0,$$

azaz x bármely pozitív kitevőjű hatványa gyorsabban tart $(+\infty)$-hez $x\to+\infty$ esetén, mint $\ln x$ bármely pozitív kitevőjű hatványa. Röviden: minden $1\le n,m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\big(\ln x\big)^n\ll x^m,\quad \text{ha}\ \ x\ \ \text{elég nagy.}$$

A többi kritikus határértéktípust gyakran vissza lehet vezetni $0/0$ vagy $(+\infty)/(+\infty)$ típusú határértékre, és így megpróbálhatjuk alkalmazni a L'Hospital-szabályt.

Példák.

1. $\displaystyle\lim_{x\to0+0}x\ln x=\big(0\cdot(-\infty)\big)=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0+0}(-x)=0.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(?)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\,\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\,\cos x}=$

   $$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\,\sin x}=\frac{0}{1+1-0}=0.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to0+0}x^x=\big(0^0\big)=\lim_{x\to0+0}\big(e^{\ln x}\big)^x=\lim_{x\to0+0}e^{x\ln x}=\exp\Big(\lim_{x\to0+0}x\ln x\Big)=\exp(0)=1,$

   hiszen exp folytonos függvény, és már igazoltuk, hogy $\displaystyle\lim_{x\to0+0}x\ln x=0.$

Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény ***teljes függvényvizsgálatán*** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

$\boxed{1.}$ Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, zérushelyek, előjelvizsgálat, paritás, periodicitás megállapítása.)

$\boxed{2.}$ Lokális szélsőértékek és monotonitási intervallumok.

$\boxed{3.}$ Konvexitási intervallumok és inflexiós pontok.

$\boxed{4.}$ Határértékek és aszimptoták.

$\boxed{5.}$ A függvény grafikonjának felrajzolása.

2. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az*

$$f(x) := x - 1 - \frac{4x}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok***. A deriválási szabályok alapján az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban akárhányszor deriválható. Mivel

$$f(x) = x - 1 - \frac{4x}{x^2+1} = \frac{x^3 - x^2 - 3x - 1}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2-2x-1)}{x^2+1},$$

így $f(x) = 0 \iff x = -1$ vagy $x^2 - 2x - 1 = 0$, azaz

$$x = -1, \qquad x = x_1 := 1 - \sqrt{2} \approx -0,414 \qquad \text{vagy} \qquad x = x_2 := 1 + \sqrt{2} \approx 2,414.$$

Előjelvizsgálat

	$x < -1$	-1	$-1 < x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

A függvény nem páros, páratlan vagy periodikus.

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 1 - \frac{4 \cdot (x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 - 3}{(x^2+1)^2},$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \iff \qquad x^4 + 6x^2 - 3 = 0.$$

A $t = x^2$ helyettesítéssel

$$t^2 + 6t - 3 = 0 \qquad \iff \qquad t = -3 - 2\sqrt{3} < 0, \quad \text{vagy} \quad t = -3 + 2\sqrt{3} > 0.$$

Ezért $x^2 = 2\sqrt{3} - 3 \quad \iff$

$$x = x_3 := \sqrt{2\sqrt{3}-3} \approx 0,681 \quad \text{vagy} \quad x = -x_3 := -\sqrt{2\sqrt{3}-3} \approx -0,681$$

	$x < -x_3$	$-x_3$	$-x_3 < x < x_3$	x_3	$x > x_3$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$0,18$	$\downarrow$	$-2,18$	$\uparrow$
lok.		max		min	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = \frac{(4x^3+12x)(x^2+1)^2 - (x^4+6x^2-3)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{8x(3-x^2)}{(x^2+1)^3},$$

ezért $f''(x) = 0 \quad \iff \quad x = 0, \quad x = -\sqrt{3} \approx -1,73, \quad \text{vagy} \quad x = \sqrt{3} \approx 1,73.$

	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	0	$0 < x\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\smile$	-1	$\frown$	-1	$\smile$	-1	$\frown$
		infl.		infl.		infl.	

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták***. Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = \left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - 1 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = \pm\infty - 1 - 0 = \pm\infty.$$

Továbbá

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{1+x^2}\right) = 1 =: A$$

és

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-1 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = -1 =: B.$$

Ez azt jelenti, hogy az $y = Ax+B$, azaz az $y = x-1$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben és $(+\infty)$-ben is.

$\boxed{5.}$ ***Ábrázolás***.