

11. előadás

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA 3.

Az inverzfüggvény-tétel

A valós-valós függvények inverzére vonatkozó deriválási szabály azt mondja ki, hogy ha az I nyílt intervallumon értelmezett, és ott szigorúan monoton és folytonos f függvény egy $a \in I$ pontban differenciálható, és $f'(a) \neq 0$, akkor a létező f^{-1} függvény differenciálható a $b = f(a)$ pontban és

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

A fenti állítás lokálisan kiterjeszthető az a pont egyik környezetére, ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható az I nyílt intervallumon, és $f'(a) \neq 0$. Ti. a folytonosság miatt $\exists U := K(a)$ környezet, hogy $f'(u) > 0$ (vagy $f'(u) < 0$) minden $u \in U$ esetén, ezért f szigorúan monoton és folytonos U -n, továbbá a $V := f[U]$ képhalmaz olyan nyílt intervallum, amely tartalmazza az $f(a)$ pontot, és

1. f lokálisan invertálható, azaz $f|_U : U \rightarrow V$ függvény bijekció,
2. az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V -n és

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (y \in V).$$

A többváltozós esetben hasonló állítás érvényes.

1. Tétel (Inverzfüggvény-tétel). Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy,

- a) f folytonosan deriválható Ω -n,
- b) az $a \in \Omega$ pontban $\det f'(a) \neq 0$.

Ekkor

1. f lokálisan invertálható, azaz van olyan $a \in U$ és $f(a) \in V$ nyílt halmazok, hogy az $f|_U : U \rightarrow V$ függvény bijekció (következésképpen invertálható),
2. az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V -n és

$$(*) \quad (f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1} \quad (y \in V).$$

Bizonyítás. A tételt nem bizonyítjuk.

Megjegyzések.

1. Az inverz függvény létezése a többváltozós esetben *minőségileg bonyolultabb* az egyváltozós esetnél; ez tehát egy olyan pont, ahol az egyváltozós analógia létezik ugyan, az immár nem elegendő.
2. Az f függvény explicit alakjának az ismeretében f^{-1} helyettesítési értékeire általában nincs explicit képlet, viszont $(*)$ alapján a derivált helyettesítési értékei az f' helyettesítési értékeinek felhasználásával már kiszámíthatók.

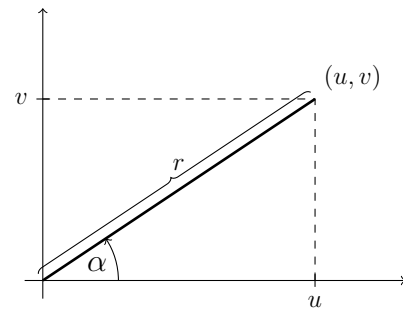
Példa. Legyen

$$f(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Nem nehéz igazolni, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Valóban $(0, 0) \notin \mathcal{R}_f$, hiszen a \sin és a \cos függvény zérushelyei különbözőek. Másrészt, minden $(u, v) \neq (0, 0)$ pont egyértelműen felírható

$$(u, v) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \quad (r > 0, \alpha \in [0, 2\pi))$$

alakban, az ún. **polárkoordinátákkal**, az ábrán szereplő jelölésekkel. Ekkor $x = \ln r$, azaz $e^x = r$, és $y = \alpha$ esetén $f(x, y) = (u, v)$.



A \sin és a \cos függvény periodicitása miatt f globálisan nem invertálható. Azonban f lokálisan invertálható az \mathbb{R}^2 minden pontjában. Ez utóbbi állítást az inverzfüggvény-tétellel tudjuk a legegyszerűbben igazolni. Világos, hogy $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa egy tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$(\#) \quad f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Mivel

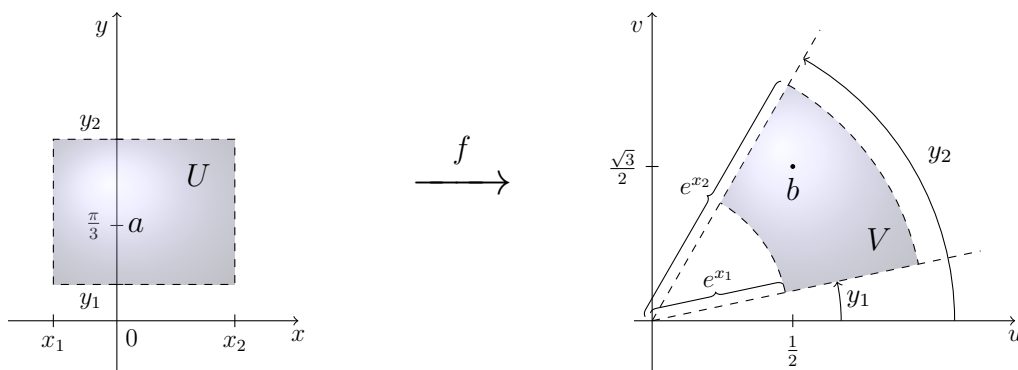
$$\det f'(x, y) = e^{2x} \cdot \cos^2 y + e^{2x} \cdot \sin^2 y = e^{2x} \neq 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért az inverzfüggvény-tétel feltételei teljesülnek minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. Tehát f lokálisan invertálható.

Legyen $a := (0, \pi/3)$ és $b := f(a) = f(0, \pi/3) = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Tetszőleges $x_1 < 0 < x_2$ és $0 < y_1 < \pi/3 < y_2 < \pi/2$ valós számok esetén

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\} \ni a$$

nyílt halmaz, és $V := f[U] \ni b$ olyan nyílt halmaz, amelynek minden pontja pozitív koordinátákkal rendelkezik.



Ezért, ha $(x, y) \in U$, akkor

$$\begin{cases} e^x \cos y = u > 0 \\ e^x \sin y = v > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} e^{2x} = u^2 + v^2 \\ \operatorname{tg} y = \frac{v}{u} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \\ y = \arctg \frac{v}{u} \end{cases}.$$

Ekkor minden $(u, v) \in V$ esetén

$$f^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \\ \arctg \frac{v}{u} \end{pmatrix} \implies (f^{-1})'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{u^2 + v^2} & \frac{v}{u^2 + v^2} \\ -\frac{v}{u^2 + v^2} & \frac{u}{u^2 + v^2} \end{pmatrix}.$$

Így

$$(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Az előző eredmény az inverzfüggvény-tételben szereplő

$$(f^{-1})'(b) = [f'(f^{-1}(b))]^{-1} = [f'(a)]^{-1}$$

összefüggéssel is megkaphatjuk. Valóban $(\#)$ -ból

$$f'(a) = f'\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies (f^{-1})'(b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. Érdemes megjegyezni a (2×2) -es mátrixok inverzére vonatkozó alábbi képletet: ha $ad - bc \neq 0$, akkor

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvény-tételnek egyenletrendszerek megoldásával kapcsolatos értelmezés is adható. Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Jelölje

$$f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

az f függvény koordinátafüggvényeit: $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tekintsük az

$$f(x) = y$$

egyenletet. A komponensekre bontott alakba írva kapjuk az n egyenletből álló

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_2, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol az y_1, y_2, \dots, y_n számokat paramétereknek tekintjük, és x_1, x_2, \dots, x_n az ismeretlenek.

Legyen $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{D}_f$ és $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) := f(a)$. Tegyük fel, hogy f folytonosan deriválható az a pont egyik Ω környezetében, továbbá teljesül a $\det f'(a) \neq 0$ feltétel. Ekkor az inverzfüggvény-tétel szerint megadható olyan $b \in V$ paramétertartomány, hogy az egyenletrendszer egyértelműen megoldható az a pont egy U környezetében.

Implicit függvények (egyenletek megoldása)

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \neq \emptyset$$

teljesül. Az lenne a kérdés, hogy ki tudjuk-e fejezni az y változót az x változó függvényeként, azaz van-e olyan $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $y = \varphi(x)$ ekvivalens legyen az $f(x, y) = 0$ egyenlettel.

Tudjuk, hogy az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai az origó középpontú egység sugarú kör pontjai, és nincs olyan valós-valós függvény, amelynek grafikonja kört alkot. Ezért az eredeti kérdésnek egy „lokális” változatával foglalkozunk, nevezetesen olyan $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ nyílt intervallum értelmezett függvényt keresünk, amire

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in I)$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy φ az $f(x, y)$ egyenletnek egy **implicit megoldása**.

Nézzük újra az

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényből származó $x^2 + y^2 - 1 = 0$ egyenletet!

Ha $C(a, b)$ olyan pont, hogy $f(a, b) = 0$ és $b > 0$, akkor $\exists I \ni a$ nyílt halmaz, hogy

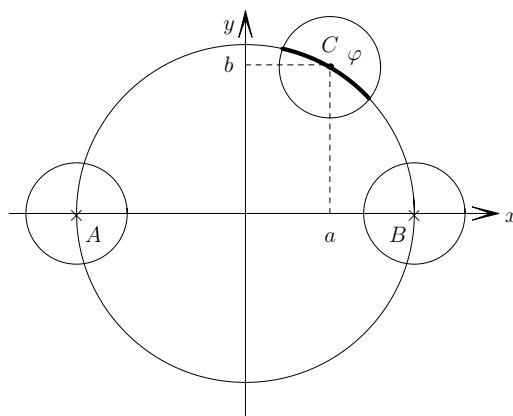
$$\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (x \in I)$$

implicit megoldása lesz az egyenletnek, illetve ha $b < 0$, akkor

$$\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad (x \in I)$$

implicit megoldása lesz az egyenletnek. Azonban nincs olyan implicit megoldás, amely az $A(-1, 0)$ vagy a $B(1, 0)$ ponton menne át, azaz ha $b = 0$.

Vegyük észre, hogy $\partial_2 f(x, y) = 2y \implies \partial_2 f(A) = \partial_2 f(B) = 0$, de a többi C pontban (ahol $\exists \varphi$) igaz, hogy $\partial_2 f(C) \neq 0$.



2. Tétel (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel). Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

- f folytonosan deriválható Ω -n,
- az $(a, b) \in \Omega$ pontban $f(a, b) = 0$ és $\partial_2 f(a, b) \neq 0$.

Ekkor

- van olyan $U := K(a)$ környezet és $b \in V$ nyílt halmaz \mathbb{R} -ben, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f(x, \varphi(x)) = 0$ teljesül,
- az így definiált $\varphi : U \rightarrow V$ függvény folytonosan deriválható U -n és

$$(**) \quad \varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, \varphi(x))}{\partial_2 f(x, \varphi(x))} \quad (x \in U).$$

Bizonyítás. A tételt nem bizonyítjuk.

Megjegyzések.

1. Világos, hogy $\varphi(a) = b$. A φ függvényt az $f(x, \varphi(x)) = 0$ ($x \in U$) egyenlőség „implicit” (= nem kifejtett, burkolt, rejtett) módon definiálja. Innen származik a tétel neve.
2. A tétel igazolható az inverzfüggvény-tétel segítségével. Ennek vázlata a következő: legyen

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) := (x, f(x, y)).$$

Ekkor F folytonosan deriválható Ω -n, és

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 f(x, y) & \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix} \implies \det F'(a, b) = \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Így F kielégíti az inverzfüggvény-tétel feltételeit az (a, b) pontban, ahol $F(a, b) = (a, 0)$. A létező folytonosan differenciálható $F^{-1} : V^* \rightarrow U^*$ inverz függvény F_1^{-1} és F_2^{-1} koordinátafüggvényei szintén folytonosan differenciálhatók, és minden $(x, y) \in V^*$ esetén

$$(x, y) = F(F^{-1}(x, y)) = F(F_1^{-1}(x, y), F_2^{-1}(x, y)) = (F_1^{-1}(x, y), f(F_1^{-1}(x, y), F_2^{-1}(x, y))).$$

Ebből $F_1^{-1}(x, y) = x$, és így $f(x, F_2^{-1}(x, y)) = y$. Mivel $(a, 0) \in V^*$ nyílt halmaz, ezért $\exists K(a), K(0)$ környezetek, hogy $K(a) \times K(0) \in V^*$. Ekkor

$$f(x, F_2^{-1}(x, 0)) = 0 \quad (x \in K(a)) \implies \varphi(x) := F_2^{-1}(x, 0) \quad (x \in K(a))$$

a keresett implicit függvény, amiről nem nehéz igazolni, hogy ez az egyedüli ilyen függvény, ami értelmezett a $K(a)$ környezetben.

A $(**)$ összefüggésből abból következik, hogy

$$h(x) := f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in K(a)).$$

Ezért az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály alapján

$$0 = h'(x) = \partial_1 f(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \partial_2 f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad (x \in K(a)).$$

3. Tétel (Implicitfüggvény-tétel az általános esetben). Legyenek $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ és $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ nyílt halmazok ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+$), illetve $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$. Tegyük fel, hogy,

- a) f folytonosan deriválható az $\Omega_1 \times \Omega_2$ halmazon,
- b) az $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ pontban $f(a, b) = 0$ és $\det \partial_2 f(a, b) \neq 0$.

Ekkor

1. létezik a -nak olyan $U := K(a) \subseteq \Omega_1$ környezet és $b \in V \subseteq \Omega_2$ nyílt halmaz, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f(x, \varphi(x)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_2}$,
2. az így definiált $\varphi : U \rightarrow V$ függvény folytonosan deriválható U -n és

$$\varphi'(x) = -[\partial_2 f(x, \varphi(x))]^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in U).$$

Megjegyzések.

1. A tételben $\partial_2 f(a, b)$ jelöli az f függvény *második változócsoporthoz tartozó parciális deriváltját* az (a, b) pontban. Ez az alábbi módon definiált $n_2 \times n_2$ -típusú mátrix:

$$\partial_2 f(a, b) := (\mathbb{R}^{n_2} \supset \Omega_2 \ni y \mapsto f(a, y) \in \mathbb{R}^{n_2})'_{y=b} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}.$$

A $\partial_1 f(a, b)$ derivált definíciója hasonló.

2. A tételnek egyenletrendszerek *megoldhatóságával* kapcsolatos értelmezés is adható.

Legyen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$ és $f = (f_1, f_2, \dots, f_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$.

Tekintsük az $f(x, y) = 0$ egyenletrendszert, amelyet komponensekre bontott alakban így írhatunk fel:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}; y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}; y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{n_2}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}; y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) &= 0. \end{aligned}$$

Itt az y_1, y_2, \dots, y_{n_2} számok az ismeretlenek és x_1, x_2, \dots, x_{n_1} a paraméterek. Feltesszük, hogy *ismerjük* ennek egy megoldását, azaz tudjuk, hogy az $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n_1})$ paraméter esetén $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n_2})$ egy megoldás, vagyis $f(a, b) = 0$. A fenti egyenletrendszerből szeretnénk kifejezni az y_1, y_2, \dots, y_{n_2} ismeretleneket az x_1, x_2, \dots, x_{n_1} paraméterek függvényében. A 2. Tétel szerint ez minden a -hoz közeli x esetén megtehető, ha f folytonosan deriválható és $\partial_2 f(a, b) \neq 0$; a megoldások egyértelműek és x -nek folytonosan deriválható függvényei.

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények feltételes szélsőértékei

Vannak olyan problémák, ahol egy $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szélsőértékét kell keresni, de csak bizonyos egyenletet kielégítő pontok jöhetnek számításba.

1. Példa: Keressük meg az $x + 2y - 4 = 0$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amely legközelebb van az origótól!

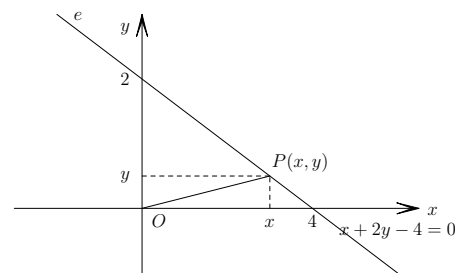
A probléma a következő módon modellezhető:

Keressük meg az

$$f(x, y) := x^2 + y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény minimumát a

$$H_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} \quad \text{halmazon, ahol} \quad g(x, y) := x + 2y - 4 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

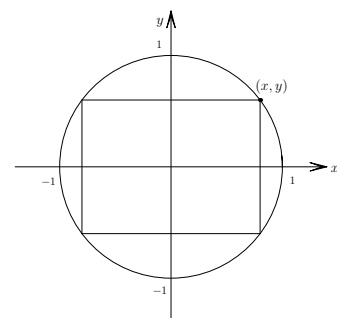


2. Példa: Határozzuk meg az egységsugarú körbe írt téglalapok között a maximális területű téglalapot!

A probléma a következő módon modellezhető:

Keressük meg az

$$f(x, y) := 4xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$



függvény maximumát a

$$H_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

halmazon, ahol

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Általános feladat: Adott

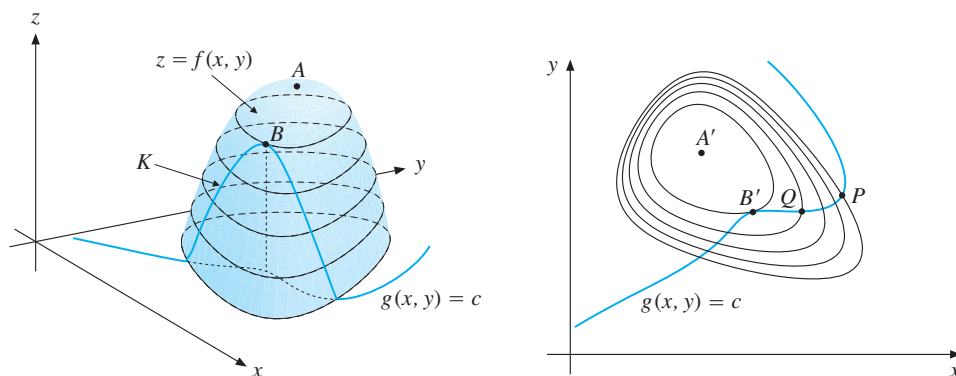
- $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (célfüggvény) és
- $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ (feltételfüggvény).

Keressük az f függvény szélsőértékeit a

$$H_g := \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$$

halmazon, azaz határozzuk meg az $f|_{H_g}$ függvény szélsőértékeit!

A problémát az alábbi ábrákon szemléltetjük:



1. Definíció. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények és

$$a \in H_g := \{z \in U \mid g(z) = 0\} \neq \emptyset.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az a pontban

- **feltételes abszolút maximuma van, ha**

$$\forall x \in H_g: f(x) \leq f(a),$$

- **feltételes lokális maximuma van, ha**

$$\exists K(a) \subseteq U, \forall x \in K(a) \cap H_g: f(x) \leq f(a).$$

A **minimummal** kapcsolatban hasonló fogalmakat kapunk, ha a fentiekben a \leq egyenlőtlenség helyett \geq -t írunk. A korábbiakkal összhangban használjuk $f(a)$ -ra a **feltételes abszolút (lokális) maximum (minimum)**, illetve **szélsőérték**, továbbá a -ra a **feltételes abszolút (lokális) maximumhely (minimumhely)**, illetve **szélsőértékhely** elnevezést is.

Megjegyzés. Az $f|_{H_g} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékeire *nem alkalmazhatók* az előző előadáson megfogalmazott tételek, hiszen a $H_g \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaznak nincsenek belső pontjai. Ezért úgy értelmeztük a feltételes lokális szélsőértékhelyeket, hogy minden feltételes abszolút szélsőértékhely egyben lokális szélsőértékhely is legyen az f függvénynek.

4. Tétel (Szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre). Tegyük fel, hogy

- a) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a parciális deriváltak és ezek folytonosak az U halmazon,
- b) az $(x_0, y_0) \in U$ pontban az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van,
- c) $g'(x_0, y_0) = (\partial_1 g(x_0, y_0), \partial_2 g(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$.

Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám (ezt **Lagrange-szorzónak** szokás nevezni), hogy az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad ((x, y) \in U)$$

Lagrange-függvénynek (x_0, y_0) stacionárius pontja, azaz

$$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = (\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0), \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)) = (0, 0).$$

Bizonyítás. A c) feltétel alapján feltételezhető, hogy $\partial_2 g(x_0, y_0) \neq 0$, ellenkező esetben $\partial_1 g(x_0, y_0) \neq 0$, és így a bizonyítás további részében x és y szerepe felcserélhető. Ha $\partial_2 g(x_0, y_0) \neq 0$, akkor a g függvény az (x_0, y_0) pontra vonatkozóan teljesíti az implicitfüggvény-tétel feltételeit, hiszen $g(x_0, y_0) = 0$ és az a) feltétel alapján g folytonosan deriválható U -n. Ezért van olyan $\varphi : U^* := K(x_0) \rightarrow V$ folytonosan deriválható függvény, hogy $g(x, \varphi(x)) = 0$ teljesül, és

$$(*) \quad \varphi'(x) = -\frac{\partial_1 g(x, \varphi(x))}{\partial_2 g(x, \varphi(x))} \quad (x \in U^*).$$

A b) feltétel alapján a

$$h(x) := f(x, \varphi(x)) \quad (x \in U^*)$$

függvénynek lokális szélsőértéke van az x_0 pontban. Ezért az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály szerint

$$0 = h'(x_0) = \partial_1 f(x_0, \varphi(x_0)) + \partial_2 f(x_0, \varphi(x_0))\varphi'(x_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)\varphi'(x_0),$$

hiszen $\varphi(x_0) = y_0$. De (*) miatt $\varphi'(x_0) = -\partial_1 g(x_0, y_0)/\partial_2 g(x_0, y_0)$. Ha ezt behelyettesítjük a fenti egyenletbe, akkor átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\partial_1 f(x_0, y_0)\partial_2 g(x_0, y_0) - \partial_2 f(x_0, y_0)\partial_1 g(x_0, y_0) = 0.$$

Mivel $\partial_2 g(x_0, y_0) \neq 0$, így $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) + \lambda \partial_2 g(x_0, y_0) = 0$. Ezért

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = -\lambda \partial_2 g(x_0, y_0) \implies \partial_1 f(x_0, y_0)\partial_2 g(x_0, y_0) - (-\lambda \partial_2 g(x_0, y_0))\partial_1 g(x_0, y_0) = 0.$$

$\partial_2 g(x_0, y_0)$ -vel való egyszerűsítés után

$$\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) + \lambda \partial_1 g(x_0, y_0) = 0.$$

Megjegyzés. A feltételes szélsőértékek vizsgálatára alkalmazható módszer kitalálója *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) francia matematikus. Ezért a szóban forgó módszert **Lagrange-szorzók** (vagy **Lagrange-féle multiplikátorok**) **módszerének** nevezzük.

A módszer alkalmazása:

1. Képezzük az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad ((x, y) \in U)$$

Lagrange függvényt.

2. Az x, y, λ ismeretlenekre megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}\partial_x \mathcal{L}(x, y) &= \partial_x f(x, y) + \lambda \partial_x g(x, y) = 0, \\ \partial_y \mathcal{L}(x, y) &= \partial_y f(x, y) + \lambda \partial_y g(x, y) = 0, \\ g(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Az így kapott (x_0, y_0) pont(ok)ban *lehet(nek)* a feltételes lokális szélsőérték helyek.

Azonban az $\mathcal{L}'(x_0, y_0) = (0, 0)$ csak *szükséges*, de *nem elégséges* feltétel a feltételes lokális szélsőértékre.

5. Tétel (A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel). Tegyük fel, hogy

- a) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a másodrendű parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az U halmazon,
- b) az $(x_0, y_0) \in U$ pontban a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ számmal teljesül a szükséges feltétel.

Tekintsük ezzel a λ_0 számmal az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \quad ((x, y) \in U)$$

Lagrange-függvényt. Legyen

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11} \mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12} \mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21} \mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22} \mathcal{L}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ekkor,

- $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \implies (x_0, y_0)$ feltételes lokális **maximum**hely,
- $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \implies (x_0, y_0)$ feltételes lokális **minimum**hely.

Bizonyítás. A tételt nem bizonyítjuk.

Megjegyzések.

1. A fentiekben két változó és egy egyenlőségi feltétel mellett vizsgáltuk a feltételes szélsőérték problémát. Az eredmények kiterjeszthetők arra az esetre is, amikor az f célfüggvény n -változós ($2 < n \in \mathbb{N}$), és ekkor az egyetlen $g = 0$ feltétel helyett akár több $g_1 = 0, g_2 = 0, \dots, g_m = 0$ egyenlőségi feltételt is előírhatunk, ahol $1 \leq m < n$. Ekkor a Lagrange-függvény

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k(x, y) \quad ((x, y) \in U).$$

Ha $m > 1$, akkor több λ szorzó szerepel a Lagrange-függvényben, ami igazolja a „Lagrange-szorók” elnevezésben szereplő többes számot.

2. A gyakorlat felvet számos olyan szélsőérték-problémát, amelyekben a változókra tett korlátozó feltételek *nem egyenlőségekkel*, hanem *egyenlőtlenségekkel* adottak. Az ilyen típusú problémákat (*lineáris*) *programozási* feladatoknak hívják. Vizsgálatukhoz nem csak az *analízis*, hanem a *lineáris algebra* eszköztárát is fel kell használni.
3. Ha szükséges feltétel bizonyításában szereplő $\varphi: U^* \rightarrow \mathbb{R}$ implicit függvény ki tudjuk fejezni, például az y változó kifejezhető az x változó függvényeként, akkor az f függvénynek a H_g halmaz pontjaiban felvett értékeit a

$$h(x) := f(x, \varphi(x)) \quad (x \in U^*)$$

valós-valós függvénnyel lehet kifejezni. Ekkor a kétváltozós függvényekre vonatkozó feltételes szélsőérték-problémát a h egyváltozós függvény szélsőérték-problémájára lehet visszavezetni.

Példa: Tekintsük az

$$f(x, y) := xy, \quad g(x, y) := \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényeket, és határozzuk meg az f feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett!

A *sükséges feltételre* vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ és

$$g'(x, y) = (\partial_1 g(x, y), \partial_2 g(x, y)) = \left(\frac{x}{4}, y\right) \neq (0, 0)$$

minden $H_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ -beli pontban, hiszen ha $\left(\frac{x}{4}, y\right) = (0, 0)$, akkor $x = 0$ és $y = 0$, de $g(x, y) = -1 \neq 0$.

A feladat Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó *sükséges* feltétel az x, y, λ ismeretlenekre az alábbi egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x, y) &= y + \lambda \frac{x}{4} = 0, \\ \partial_2 \mathcal{L}(x, y) &= x + \lambda y = 0, \\ g(x, y) &= \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x = -\lambda y$ adódik. Ezt beírjuk az első egyenletbe:

$$0 = y + \lambda \frac{-\lambda y}{4} \implies 0 = y \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) \implies \lambda^2 = 4 \implies \lambda = \pm 2,$$

hiszen $y \neq 0$ (ha $y = 0$, akkor $x = 0$ és így $g(x, y) = g(0, 0) = -1 \neq 0$).

i) Ha $\lambda = 2$, akkor $x = -2y$. Ekkor a harmadik egyenletből:

$$\frac{(-2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \implies y^2 = 1 \implies \begin{aligned} y = 1, \quad x = -2, \quad P_1(-2, 1), \\ y = -1, \quad x = 2, \quad P_2(2, -1). \end{aligned}$$

ii) Ha $\lambda = -2$, akkor $x = 2y$. Ekkor a harmadik egyenletből:

$$\frac{(2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \implies y^2 = 1 \implies \begin{aligned} &y = 1, \quad x = 2, \quad P_3(2, 1), \\ &y = -1, \quad x = -2, \quad P_4(-2, -1). \end{aligned}$$

Az *elégseges feltétel*. Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\begin{aligned} \partial_1 g(x, y) &= \frac{x}{4}, \quad \partial_2 g(x, y) = y; \\ \partial_{11} \mathcal{L}(x, y) &= \frac{\lambda}{4}, \quad \partial_{12} \mathcal{L}(x, y) = 1 = \partial_{21} \mathcal{L}(x, y), \quad \partial_{22} \mathcal{L}(x, y) = \lambda. \end{aligned}$$

Mivel $x = -\lambda y$, így

$$\begin{aligned} D(x, y; \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 0 & x/4 & y \\ x/4 & \lambda/4 & 1 \\ y & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda y/4 & y \\ -\lambda y/4 & \lambda/4 & 1 \\ y & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda y & 4y \\ -\lambda y & \lambda & 4 \\ y & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \frac{y^2}{16} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 4 \\ -\lambda & \lambda & 4 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{y^2}{16} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 2\lambda & 4 + \lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{y^2}{16} \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ 2\lambda & 4 + \lambda^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\lambda y^2}{16} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4 + \lambda^2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda y^2}{16} \cdot (-(4 + \lambda^2) - 2 \cdot 4) = -\lambda \cdot \frac{y^2(\lambda^2 + 12)}{16}. \end{aligned}$$

$P_1(-2, 1)$, $\lambda = 2$: $D(-2, 1; -2) < 0$, ezért a $P_1(-2, 1)$ pont *feltételes lokális minimumhely*.

$P_2(2, -1)$, $\lambda = 2$: $D(2, -1; -2) < 0$, ezért a $P_2(2, -1)$ pont *feltételes lokális minimumhely*.

$P_3(2, 1)$, $\lambda = -2$: $D(2, 1; -2) > 0$, ezért a $P_3(2, 1)$ pont *feltételes lokális maximumhely*.

$P_4(-2, -1)$, $\lambda = -2$: $D(-2, -1; -2) > 0$, ezért a $P_4(-2, -1)$ pont *feltételes lokális maximumhely*.

Megjegyzés. Az

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

egyenletű görbe pontjai az ábrán látható ellipszist alkotják. Ezekből a pontokból álló H_g halmaz korlátos és zárt az \mathbb{R}^2 térben. Mivel f folytonos, így a Weierstrass-tétel szerint felveszi a maximumát és a minimumát ezen a halmazon. A feltételes abszolút maximum- és minimumhely csak a fenti négy pontból kerülhet ki, továbbá

$$f(P_1) = f(P_2) = -2 \quad \text{és} \quad f(P_3) = f(P_4) = 2.$$

Ezért

$P_1(-2, 1)$, és $P_2(2, -1)$: *feltételes abszolút minimumhely*.

$P_3(2, 1)$, és $P_4(-2, -1)$: *feltételes abszolút maximumhely*.

