A pontbeli derivált fogalma

1. Definíció. *Tegyük fel, hogy* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. *Az* $a \in A$ *pont az* A *halmaz* **belső pontja***, ha*

$$\exists K(a), \text{ hogy } K(a) \subseteq A.$$

Az **int** $\boldsymbol{A}$ *szimbólummal jelöljük* **az** $\boldsymbol{A}$ **halmaz belső pontjainak a halmazát***.*

2. Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* **differenciálható** *(vagy* **deriválható***), ha*

$$\exists \quad \text{és véges a} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ *szimbólummal jelöljük, és* **az** $\boldsymbol{f}$ **függvény** $\boldsymbol{a}$ **pontbeli deriváltjának** *(vagy* **differenciálhányadosának***) nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$.

Megjegyzések.

1. A fenti definícióban szereplő határértéket az $h = x - a$ helyettesítéssel gyakran így írjuk fel:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$
2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor az
$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)$$
függvényt ***az*** $\boldsymbol{f}$ ***függvény az*** $\boldsymbol{a}$ ***ponthoz tartozó különbséghányados-függvényének*** vagy ***differenciahányados-függvényének*** nevezzük.
3. A derivált definíciójában $0/0$-típusú kritikus határértékről van szó.

A differenciálhatóság erősebb megkötés, mint a folytonosság.

1. Tétel (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata). *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

a) $f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f \in C\{a\}$,

b) Az állítás megfordítása nem igaz.

Az érintő fogalma

Az előzőek alapján, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $\big(a, f(a)\big)$ és az $\big(x, f(x)\big)$ pontokon átmenő szelőegyeneseknek van „határegyenese", ha $x \to a$. Függvény grafikonjának (mint síkbeli halmaznak) az érintőjén éppen ezt az egyenest célszerű érteni. Az $f \in D\{a\}$ függvény esetén a szóban forgó egyenes átmegy az $\big(a, f(a)\big)$ pontban és a meredeksége $f'(a)$.

3. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban* **van érintője**, *ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli* **érintőjén** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

Vegyük észre, hogy a $f'(a)$ definíciójában szereplő határérték véges, ezért az érintő nem lehet párhuzamos az y-tengellyel.

Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a kör és a parabola érintőjének a fenti definíciója ekvivalens a középiskolában geometriai úton megadott definícióval.