4. előadás

SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK

Már elemzett speciális függvények

Az Analízis I. kurzuson több speciális függvénnyel foglalkoztunk, megadtuk és igazoltuk tulajdonságaikat, ábrázoltuk a grafikonjukat. Első körben sikerült teljesen elemezni a

- ***hatványfüggvényeket:*** $f(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R})$, ahol $n = 0, 1, 2, \ldots$,
- ***reciprokfüggvényeket:*** $f(x) := 1/x^n \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$,
- ***gyökfüggvényeket:*** $f(x) := \sqrt[n]{x} \quad \big(x \in [0, +\infty)\big)$, ahol $n = 2, 3, 4, \ldots$.

A következő körben az exponenciális függvényre és logaritmusfüggvényre került sor. Velük kapcsolatban a következő függvényeket is elemeztük:

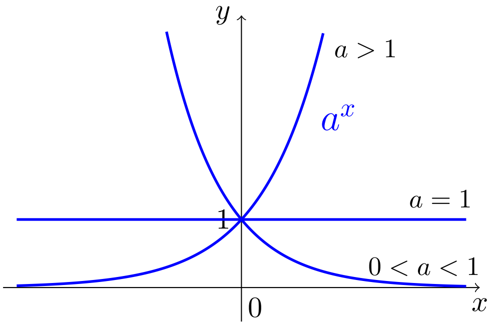
- ***a alapú exponenciális függvény:*** $f(x) := \exp_a(x) = a^x \quad (x \in \mathbb{R})$, ahol $a > 0$,
- ***a alapú logaritmusfüggvény:*** $f(x) := \log_a x \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$,
- ***általános hatványfüggvény:*** $f(x) := x^\alpha \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ez utóbbi körben még nem vizsgáltuk a függvények konvexitását, hiszen ehhez a differenciálszámítás eszközeit szerettük volna alkalmazni. Most fogjuk ezt pótolni. A konvexitáshoz a függvény második deriváltjának előjeleit kell meghatározni.

Az $\exp_a$ függvény szigorúan konvex $\mathbb{R}$-n, ha $a > 0$ és $a \neq 1$. Ez abból következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\big(\exp_a(x)\big)'' = \big(\exp_a(x) \ln a\big)' = \exp_a(x) \ln^2 a > 0.$$

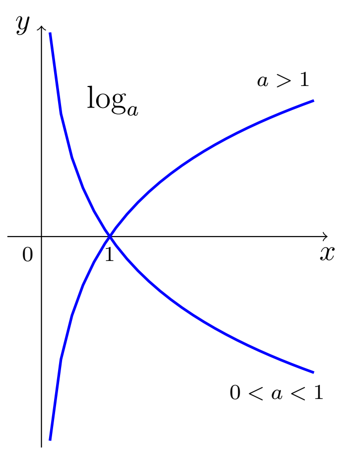
Ha $a = 1$, akkor az $\exp_a \equiv 1$ lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv $\mathbb{R}$-n, de nem szigorú értelemben.



A $\log_a$ függvény szigorúan konkáv $(0, +\infty)$-n, ha $a > 1$, és szigorúan konvex $(0, +\infty)$-n, ha $0 < a < 1$, hiszen minden $x > 0$ esetén

$$\big(\log_a(x)\big)'' = \left(\frac{1}{x \ln a}\right)' = -\frac{1}{x^2 \ln a} \begin{cases} < 0, \text{ha } a > 1, \\ > 0, \text{ha } 0 < a < 1, \end{cases}$$

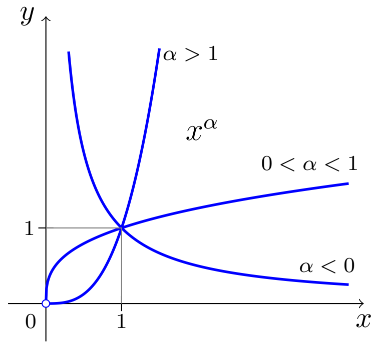
mivel $\ln a > 0$, ha $a > 1$, illetve $\ln a < 0$, ha $0 < a < 1$.



Az x^α függvény konvexitása is függ az α értéktől. Valóban, minden $x > 0$ esetén

$$(x^\alpha)'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

Tehát az $\alpha(\alpha-1)$ előjelén múlik a függvény konvexitása. Ha $\alpha > 1$ vagy $\alpha < 0$, akkor $(x^\alpha)'' > 0$, és így az x^α függvény konvex $(0,+\infty)$-n. Ha $0 < \alpha < 1$, akkor $(x^\alpha)'' < 0$, és így az x^α függvény konkáv $(0,+\infty)$-n. Ha $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$, akkor x^α lineáris függvény, azaz egyszerre konvex és konkáv $(0,+\infty)$-n, de nem szigorú értelemben.



Az Analízis I. kurzuson szintén foglalkoztunk a szinusz- és a koszinuszfüggvénnyel, de nem fejeztük be az elemzésüket. A következő részben ezt fogjuk elvégezni.

Trigonometrikus függvények

A középiskolában már megismerkedtünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sin x$, a $\cos x$, valamint alkalmas $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ számok szemléletes definícióival, amiket `érdemes felidézni` és megjegyezni. Ezekből kiindulva értelmeztük a trigonometrikus függvényeket, és megállapítottuk számos érdekes és fontos tulajdonságaikat. A szóban forgó értelmezésekhez a következő megjegyzéseket fűzzük: Egyrészt ezek a definíciók még utalást sem adnak a függvényértékek (akárcsak közelítő) kiszámolására. Másrészt az egyszerű geometriai fogalmakon túl szerepelnek viszonylag bonyolult és definiálatlan fogalmak is, így a valós számoknak a kör kerületére való „felmérése” vagy a körív hossza. A $\boldsymbol{\pi}$ **számot** az egységsugarú kör kerületének a felével definiáltuk, amelyről megtudtuk, hogy az egy *irracionális szám*, század pontossággal $3,14$.

Az Analízis I. kurzuson a **szinusz-** és a **koszinuszfüggvényt** hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ezek ekvivalensek a középiskolai definíciókkal. Néhány már megismert összefüggés azonban jelzi a hasonlóságot. A kétféle bevezetés ekvivalenciájának az igazolását majd az integrálszámítás alkalmazásainak a tárgyalásánál fejezzük be, amikor is értelmezzük a körív hosszát, és meghatározzuk a kör kerületét. A hatványsoros definíció alapján kapott szinusz- és koszinuszfüggvény jelölésére a jelzett ekvivalencia miatt használtuk a „szokásos” sin és cos szimbólumokat.

• *A* sin *és a* cos *függvény*

A ***szinusz-*** és a ***koszinuszfüggvénnyt*** az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Most bizonyítás nélkül összefoglaljuk azokat az állításokat, amelyeket az Analízis I. kurzuson már megismertünk.

$\boxed{\textbf{1.}}$ ***Paritás:*** a sin függvény páratlan, és a cos függvény páros, azaz

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{2.}$ ***Addíciós képletek:*** minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$\boxed{3.}$ Érdemes megjegyezni azt a tényt, hogy ***két szinusz, illetve koszinusz összege és különbsége szorzattá alakítható***. A következő azonosságok az addíciós képletek egyszerű következményei. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \qquad & \sin x - \sin y &= 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \qquad & \cos x - \cos y &= -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

$\boxed{4.}$ Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$\boxed{5.}$ ***Négyzetes összefüggés:***

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{6.}$ ***Folytonosság:*** A sin és a cos függvény folytonos $\mathbb{R}$-en.

$\boxed{7.}$ ***A π szám értelmezése:*** A cos függvénynek a $[0, 2]$ intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz $[0, 2]$-nek pontosan egy ξ pontjában áll fenn a $\cos \xi = 0$ egyenlőség. Ennek a ξ számnak a kétszereseként értelmezzük a π számot:

$$\pi := 2\xi.$$

Megjegyzések.

1. Az előző állítás bizonyításából (Analízis I.-ben) kiderült, hogy $\forall x \in (0, 2)\colon\ \sin x > 0$. Ezt a tulajdonságot fogjuk a továbbiakban is alkalmazni.

2. Az addíciós képletek, valamint a négyzetes összefüggés felhasználásával a sin és a cos függvény számos helyen vett helyettesítési értékeit pontosan ki tudjuk számolni. Például:

   - $\sin(\pi/2) = 1$, mert a négyzetes összefüggés miatt:

     $$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{vagy} \quad \sin \frac{\pi}{2} = -1$$

     de $\pi/2 \in (0, 2) \quad \Longrightarrow \quad \sin(\pi/2) > 0$, azaz $\sin(\pi/2) = 1$.

   - $\sin(\pi/6) = 1/2$. Az addíciós képletek miatt

     $$\begin{aligned} \cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \\ &= (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = (1 - 4 \sin^2 x) \cos x. \end{aligned}$$

     Ha $x = \pi/6$, akkor $\cos 3x = \cos(\pi/2) = 0$ és $\cos x = \cos(\pi/6) \neq 0$, mert cos-nak nincs $\pi/2$-től különböző zérushelye $(0, 2)$-n. Ezért a fenti egyenlőségből következik, hogy $1 - 4 \sin^2(\pi/6) = 0$, és így $\sin(\pi/6) = 1/2$, mert $\sin(\pi/6) > 0$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Az addíciós képletekből a következő kapcsolat adódik:

$$\text{(2)}\quad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\mathbf{9.}}$ ***Periodicitás:*** A sin és a cos függvény 2π szerint periodikus, azaz

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), \qquad \cos x = \cos(x + 2k\pi) \quad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

és 2π mindegyik függvénynek a legkisebb periódusa.

Az eddig felsorolt tulajdonságokat tanultunk az Analízis I. kurzuson. Ezentúl a differenciálszámítás eszköztárát felhasználva fogjuk a sin és a cos függvény „alaki” tulajdonságait tanulmányozni. A deriváltjukat már ismerjük.

$\boxed{\mathbf{10.}}$ ***Differenciálhatóság:*** A sin és a cos függvény differenciálható $\mathbb{R}$-en, és

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A periodicitást, valamint a paritást figyelembe véve, a vizsgálatokat elég a $[0, \pi]$ intervallumon elvégezni.

1. Tétel.

1. $\sin \uparrow [0, \frac{\pi}{2}]$*-en,* $\downarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$*-n és szigorúan konkáv* $[0, \pi]$*-n.*
2. $\cos \downarrow [0, \pi]$*-n, szigorúan konkáv* $[0, \frac{\pi}{2}]$*-en és szigorúan konvex* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$*-n.*

Bizonyítás. A (2) azonosságok alapján egyszerűen igazolható a

$$\cos x > 0 \ \left(x \in (0, \tfrac{\pi}{2})\right), \quad \cos x < 0 \ \left(x \in \left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right)\right) \quad \text{és} \quad \sin x > 0 \ \left(x \in (0, \pi)\right)$$

egyenlőtlenségeket, a deriváltakra vonatkozó már ismert

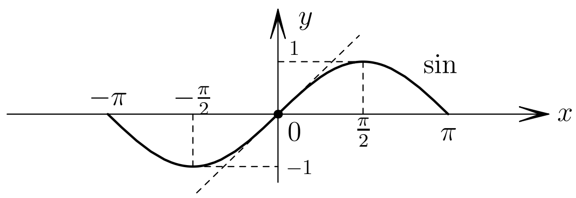
$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \cos'' x = -\cos x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

képleteket, továbbá a monotonitás, illetve a konvexitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó eredményeket felhasználva kapjuk a tétel állítását.

A sin függvény páratlan, ezért a grafikonja szimmetrikus az origóra. A következő ábrán szemléltetjük a sin függvény grafikonját a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:

A $\sin$ ***függvény***

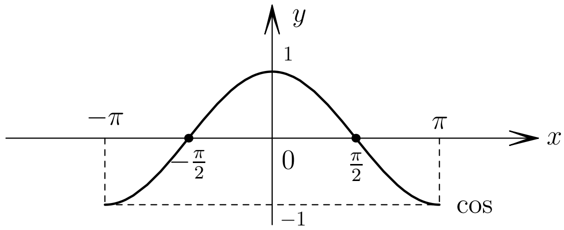
- $\downarrow [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$-en, $\uparrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-en és $\downarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$-n;
- szigorúan konvex $[-\pi, 0]$-n és
- 0 inflexiós pont.



A cos függvény páros, ezért a grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre. A következő ábrán a cos függvény grafikonját szemléltetjük a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:

A* cos *függvény

- $\uparrow$ $[-\pi, 0]$-n és $\downarrow$ $[0, \pi]$-n;
- szigorúan konvex $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$-en,
  szigorúan konkáv $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-en,
  szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2}, \pi]$-n;
- $\pm\frac{\pi}{2}$ inflexiós pontok.



A periodicitást figyelembe véve az előzőekből már következnek a sin és a cos függvény ***zérushelyeire*** vonatkozó alábbi állítások:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \cos x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}}$$

Az (1) azonosságokat és a fenti egyenlőségeket felhasználva egyszerűen bebizonyíthatjuk, hogy

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x = \sin y \quad &\Longleftrightarrow \quad x - y = 2k\pi \ \text{ vagy } \ x + y = (2l+1)\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}), \\ \cos x = \cos y \quad &\Longleftrightarrow \quad x - y = 2k\pi \ \text{ vagy } \ x + y = 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}}$$

• *A* tg *és a* ctg *függvény*

A ***tangensfüggvényt*** így értelmezzük:

$$\operatorname{tg} x := \operatorname{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right).$$

A sin és a cos függvények tulajdonságait felhasználva adódnak a következő állítások:

a) tg *páratlan* függvény, azaz $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad (x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}})$;

b) a tg függvény π *szerint periodikus*, azaz $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x \quad (x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}},\ k \in \mathbb{Z})$;

c) a tg függvény *zérushelyei*:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z});}$$

d) Mivel

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y},$$

ezért

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x - y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).}$$

Ezek alapján a tg függvény „alaki tulajdonságait” elég a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon megállapítani. Mivel $\operatorname{tg} \in D^{\infty}(-\pi/2, \pi/2)$, és például

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{tg}'' x = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x} \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

Meg kell azonban vizsgálnunk a tg függvény $\pm\frac{\pi}{2}$ pont körüli viselkedését. Mivel

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = \pm 1, \quad \text{és}$$

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{továbbá} \quad \cos x > 0, \text{ ha } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),$$

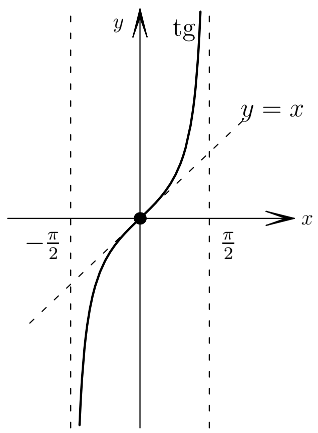
ezért

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty\,.$$

A tg függvény grafikonja a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, és alapvető tulajdonságai:

A* tg *függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\uparrow$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
- szigorúan konkáv $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$-n,
  szigorúan konvex $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$ és $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.



A **kotangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\operatorname{ctg} x := \operatorname{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})\,.$$

A ctg függvény *páratlan* és π *szerint periodikus*, továbbá

$$\boxed{\operatorname{ctg} x = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}),}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \iff \sin(x-y) = 0 \iff x = y + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).}$$

A tg és a ctg függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

(3)
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \qquad \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\left(x \in \mathcal{D}_{\mathrm{tg}} \cap \mathcal{D}_{\mathrm{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\,\tfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

A ctg függvény tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $(0,\pi)$-n megvizsgálni. Mivel $\operatorname{ctg} \in D^{\infty}(0,\pi)$, és

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \operatorname{ctg}'' x = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} \qquad \big(x \in (0,\pi)\big),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

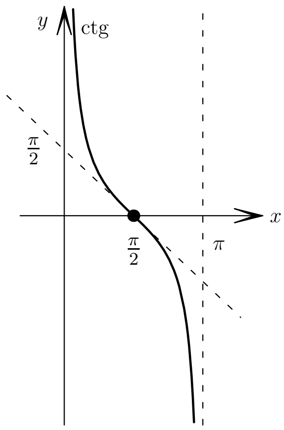
A ctg függvény 0 és π pont körüli viselkedésére a következők teljesülnek:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty\,.$$

A ctg függvény grafikonja a $(0,\pi)$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:

A* ctg *függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\downarrow$ $(0,\pi)$-n,
- szigorúan konvex $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$-en,
  szigorúan konkáv $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$-n,
- $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont,
- $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$ és $\lim\limits_{x\to \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$.



Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények)

A trigonometrikus függvények mindegyike periodikus, ezért egyikük sem invertálható. Mind a négy függvénynek vannak azonban olyan alkalmas intervallumra vonatkozó leszűkítéseik, amelyeken a függvények szigorúan monotonok, ezért invertálhatók. Ki fogunk választani egy-egy ilyen intervallumot, és ezekre vonatkozó leszűkítéseket invertáljuk. Az így kapott függvényeket ***arkuszfüggvényeknek*** nevezzük. (Az *arcus* szó — ívet jelent — azt jelzi, hogy a függvények helyettesítési értékei bizonyos körív hosszával hozható kapcsolatba.)

1. Definíció. *A szigorúan monoton*

$$\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}, \qquad \cos_{|\,[0,\pi]}, \qquad \operatorname{tg}_{|\,(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}, \qquad \operatorname{ctg}_{|\,(0,\pi)}$$

függvények inverzeit rendre **arkuszszinusz-, arkuszkoszinusz, arkusztangens-, arkuszkotangens-függvényeknek** *nevezzük és így jelöljük:*

$$\arcsin := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \arccos := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}_{|\,(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \operatorname{arc\,ctg} := \left(\operatorname{ctg}_{|\,(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy ha egy invertálható függvényt és annak inverzét egy koordinátarendszerben ábrázoljuk (feltéve azt, hogy a tengelyeken az egységek egyenlő hosszúak), akkor a szóban forgó függvények grafikonjai egymás tükörképei az $y=x$ egyenletű szögfelező egyenesre vonatkozóan. Következésképpen mindegyik arkuszfüggvény grafikonját a neki megfelelő trigonometrikus függvény (már ismert) grafikonjából kapjuk meg.

Az* arc sin *függvény definíciójából következik, hogy tetszőleges $x\in[-1,1]$ esetén $\arcsin x$ az a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba eső y szög, amelynek a szinusza x-szel egyenlő, azaz

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \arcsin x & = & y & \iff & \sin y = x. \\ \big(x\in[-1,1]\big) & & \big(y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\big) & & \end{array}}$$

Az $\arcsin$ függvény *folytonos* $[-1,1]$*-en* (lásd az „inverz függvény folytonosságára" vonatkozó tételt), a függvény *deriválhatósága* pedig egyszerűen adódik az inverz függvény deriválási szabályából: Legyen $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin y = x \in [-1,1]$, azaz $y = \arcsin x$. Mivel $\sin' y = \cos y > 0$, ha $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ezért $\arcsin \in D(-1,1)$ és

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

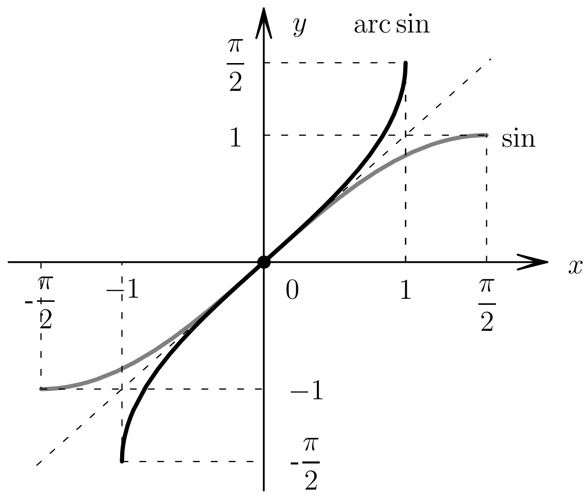
azaz

$$\boxed{\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)}. \tag{4}$$

A következő ábrán szemléltetjük az $\arcsin$ függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

Az $\boldsymbol{\arcsin}$ ***függvény***

- $\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1,1]$, $\mathcal{R}_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- folytonos $[-1,1]$-en„
- deriválható $(-1,1)$-en, és
  $$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)$$
- $\uparrow$ $[-1,1]$-en,
- szigorúan konkáv $[-1,0]$-en, szigorúan konvex $[0,1]$-n,
- 0 inflexiós pont.



Az $\boldsymbol{\arccos}$ ***függvény*** definíciójából következik, hogy

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \arccos x & = & y & \iff & \cos y = x. \\ \big(x \in [-1,1]\big) & & (y \in [0,\pi]) & & \end{array}}$$

Az (2) azonosságok felhasználásával igazolható, hogy

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \big(x \in [-1,1]\big)}. \tag{5}$$

A bizonyításához vegyünk egy tetszőleges $x \in [-1,1]$ elemet. Ekkor

$$\arcsin x =: y_1 \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \iff x = \sin y_1 \iff x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - y_1\right), \text{ és}$$

$$\arccos x =: y_2 \in [0,\pi] \iff x = \cos y_2.$$

Mivel $\frac{\pi}{2} - y_1 \in [0,\pi]$, és $\cos \downarrow [0,\pi]$-n, így

$$x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - y_1\right) = \cos y_2 \iff \tfrac{\pi}{2} - y_1 = y_2 \iff y_1 + y_2 = \tfrac{\pi}{2} \iff \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

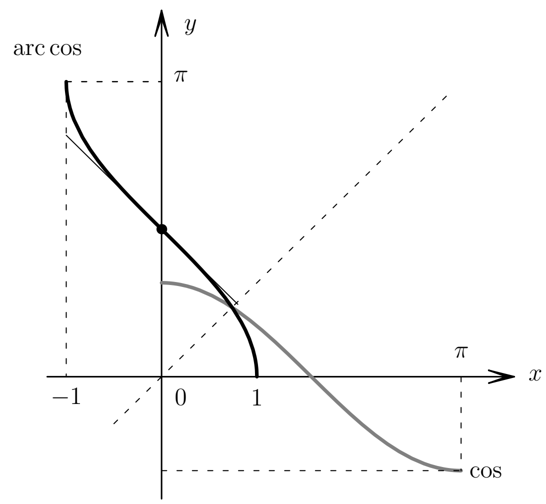
Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel alapján az arc cos függvény *folytonos* $[-1,1]$-*en.* A (5) és a (4) képletekből pedig az következik, hogy $\arccos \in D(-1,1)$ és

$$\boxed{\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)}\,.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc cos függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

Az $\boldsymbol{\arccos}$ ***függvény***

- $\mathcal{D}_{\arccos} = [-1,1]$, $\mathcal{R}_{\arccos} = [0,\pi]$,
- folytonos $[-1,1]$-en„
- deriválható $(-1,1)$-en, és
  $$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x \in (-1,1)\big)$$
- $\downarrow$ $[-1,1]$-en,
- szigorúan konvex $[-1,0]$-en,
  szigorúan konkáv $[0,1]$-n,
- 0 inflexiós pont.



Az $\boldsymbol{\operatorname{arc\,tg}}$ ***függvény*** definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,tg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\operatorname{arc\,tg}} = \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{arc\,tg} \uparrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \operatorname{arc\,tg} x = & y & \iff \quad \operatorname{tg} y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & \Big(y \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\Big) & \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = +\frac{\pi}{2}.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = -\frac{\pi}{2}$ (illetve az $y = \frac{\pi}{2}$) egyenletű egyenes az arc tg függvény aszimptotája a $(-\infty)$-ben (illetve a $(+\infty)$-ben).

Mivel minden $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén $\operatorname{tg}' y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, ezért minden $x = \operatorname{tg} y \in \mathbb{R}$ pontban az arc tg függvény deriválható és az inverz függvény deriválási szabálya alapján

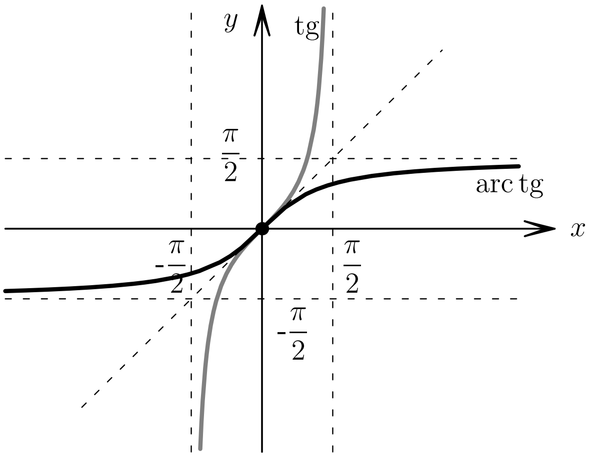
$$\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}' y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}\,.$$

A következő ábrán szemléltetjük az arc tg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

Az* arc tg *függvény



- $\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,tg}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{arc\,tg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n, szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm\frac{\pi}{2}$ aszimptota a $(\pm\infty)$-ben.

Az* arc ctg *függvény definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,ctg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\operatorname{arc\,ctg}} = (0, \pi)\,, \quad \operatorname{arc\,ctg} \downarrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} \operatorname{arc\,ctg} x & = & y & \Longleftrightarrow & \operatorname{ctg} y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & & (y \in (0,\pi)) & & \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = \pi \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = \pi$ (illetve az $y = 0$) egyenletű egyenes az arc ctg függvény aszimptotája $(-\infty)$-ben (illetve $(+\infty)$-ben).

A (3) azonosságokból következik, hogy az arc tg és az arc ctg függvény között a következő összefüggés áll fenn:

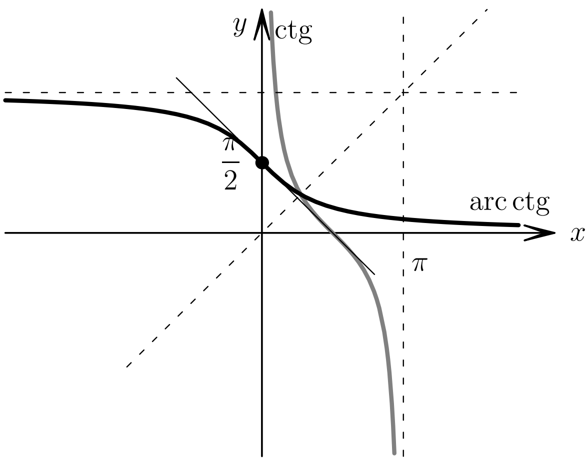
$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})},$$

ezért arc ctg $\in D(\mathbb{R})$, és

$$\boxed{\operatorname{arc\,ctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})}.$$

Most szemléltetjük az arc ctg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

Az* arc ctg *függvény



- $\mathcal{D}_{\operatorname{arc\,ctg}} = \mathbb{R}$ $\mathcal{R}_{\operatorname{arc\,ctg}} = (0, \pi)$,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\operatorname{arc\,ctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
- $\downarrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n, szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- π inflexiós pont,
- $y = \pi$ aszimptota a $(-\infty)$-ben és $y = 0$ aszimptota a $(+\infty)$-ben.

Hiperbolikus függvények és inverzeik

• Hiperbolikus függvények

A ***szinuszhiberbolikusz-*** és a ***koszinuszhiberbolikusz-függvényt*** az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmezzük:

$$\operatorname{sh} x := \operatorname{sh}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ch} x := \operatorname{ch}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az exp függvény

$$e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

definíciójából közvetlenül következnek az alábbi fontos formulák:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

A hiperbolikus függvények sok rokon vonást mutatnak a trigonometrikus függvényekkel, ezekre utalnak az elnevezések. Az (6) formulák, valamint az exp függvény alaptulajdonságai felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók a trigonometrikus függvényekhez hasonló alábbi állítások:

1. ***Paritás:*** A sh *páratlan*, a ch pedig *páros* függvény.

2. ***Addíciós képletek:*** minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

3. ***Négyzetes összefüggés:***

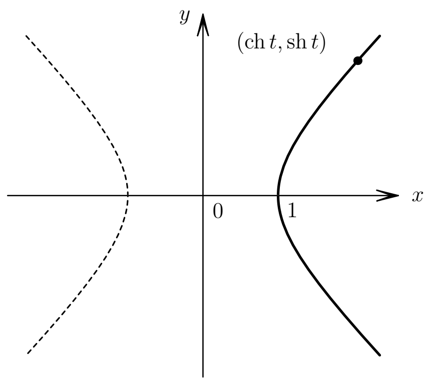
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A négyzetes összefüggés geometriai tartalma a következő:

Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az

$$(x, y) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$$

síkbeli pont rajta van az $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$ egyenletű hiperbolaágon (innen származik a szóban forgó függvények nevében szereplő „hiperbolikus” jelző).

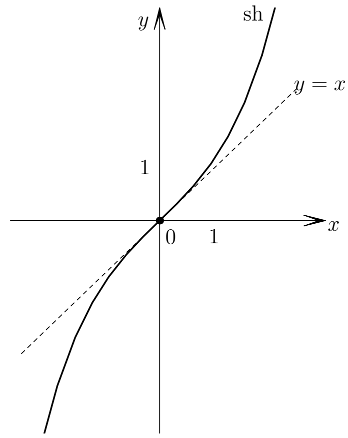


4. ***Differenciálhatóság:*** A sh és a ch függvény differenciálható (tehát folytonos is) $\mathbb{R}$-en, és

$$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

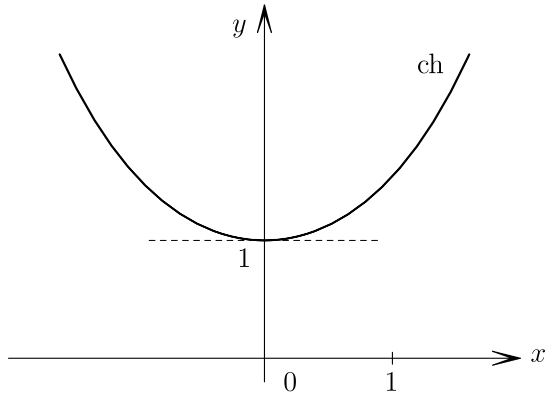
A differenciálszámítás eszköztárának a felhasználásával vizsgálhatjuk a sh és a ch függvény analitikus és „alaki” tulajdonságait. Most a részletek mellőzésével felsoroljuk ezeknek a függvényeknek a tulajdonságait, majd azok felhasználásával ábrázoljuk a grafikonjaikat.

A* sh *függvény



- $\mathcal{D}_{\text{sh}} = \mathbb{R},\ \mathcal{R}_{\text{sh}} = \mathbb{R}$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\text{sh}' x = \text{ch}\, x \quad (x \in \mathbb{R})$$
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont.

A* ch *függvény



- $\mathcal{D}_{\text{ch}} = \mathbb{R},\ \mathcal{R}_{\text{ch}} = [1, +\infty)$,
- páros függvény,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\text{ch}' x = \text{sh}\, x \quad (x \in \mathbb{R})$$
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-en, és $\uparrow$ $(0, +\infty)$-en,
- szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en,
- 0 abszolút minimumhely.

Megjegyzés. A ch függvény képét ***láncgörbének*** is nevezik, mert egy homogén, hajlékony, nyúlásmentes, két végén felfüggesztett fonal (lánc) ilyen alakot vesz fel.

A ***tangenshiperbolikusz-*** és a ***kotengenshiperbolikusz-függvényeket*** a tg és a ctg függvények mintájára értelmezzük:

$$\text{th}\, x := \text{th}(x) := \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}\ \big(x \in \mathbb{R}\big), \qquad \text{cth}\, x := \text{cth}(x) := \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}\ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

(A definícióknál figyelembe vettük azt, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re $\text{ch}\, x \neq 0$, és $\text{sh}\, x = 0 \iff x = 0$.)
Mindkét függvény páratlan, ezért a tulajdonságaikat elég a $(0, +\infty)$ intervallumon megállapítani. Meg kell még vizsgálni a $\lim\limits_{+\infty} \text{th}$, a $\lim\limits_{+\infty} \text{cth}$ és a $\lim\limits_{0+0} \text{cth}$ határértékeket. Mivel

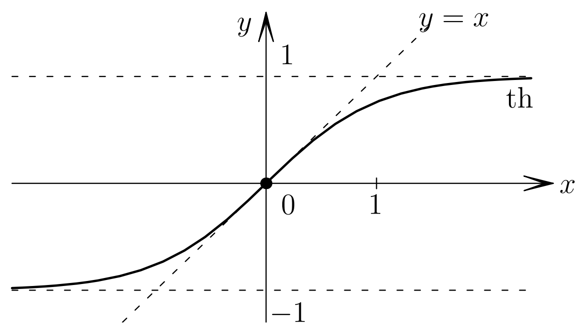
$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} \overset{(6)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0, \quad \text{cth}\, x = \frac{1}{\text{th}\, x} \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \text{sh}\, x = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \to +\infty} \text{th}\, x = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \text{cth}\, x = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \text{cth}\, x = +\infty.$$

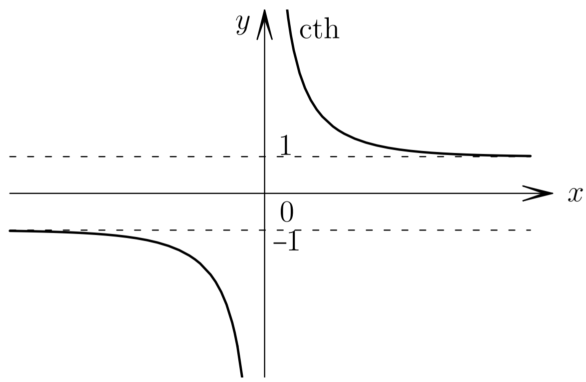
A th *függvény*

- $\mathcal{D}_{\text{th}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{th}} = (-1, 1)$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\text{th}'\, x = \frac{1}{\text{ch}^2\, x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konkáv $[0, +\infty)$-en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.



A cth *függvény*

- $\mathcal{D}_{\text{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{R}_{\text{cth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható $\mathbb{R}$-en, ill.
$$\text{cth}'\, x = -\frac{1}{\text{sh}^2\, x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$
- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-en, és $\downarrow$ $(0, +\infty)$-en„
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$-n,
  szigorúan konvex $[0, +\infty)$-en,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$-ben.

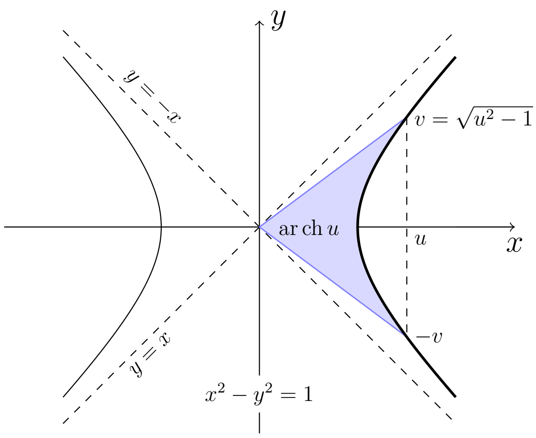


Hiperbolikus függvények inverzei (areafüggvények)

2. Definíció. *A* sh*,* $\text{ch}_{|\,[0,+\infty)}$*,* th*,* cth *függvények invertálhatók. Az inverzeiket rendre* **areaszinuszhiperbolikusz-, areakoszinuszhiperbolikusz-, areatangenshiperbolikusz-, areakotangenshiperbolikusz-függvényeknek** *nevezzük és így jelöljük:*

$$\text{ar sh} := \text{sh}^{-1}, \quad \text{ar ch} := \left(\text{ch}_{|\,[0,+\infty)}\right)^{-1}, \quad \text{ar th} := \text{th}^{-1}, \quad \text{ar cth} := \text{cth}^{-1}.$$

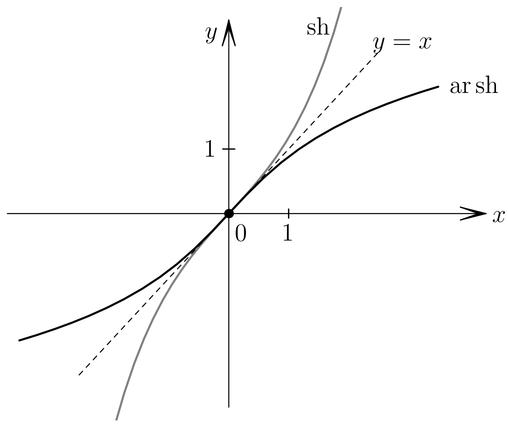
Megjegyzés. Az inverz hiperbolikus függvények nevében megjelenő *area*=terület szó azt jelzi, hogy az $\text{ar ch}\, u$ mennyiség egy bizonyos síkidom területével egyenlő. Pontosabban: Legyen $u \geq 1$ és $v = \sqrt{u^2 - 1}$. Jelölje A_u azt a tartományt, amelyet az origót az (u, v) és $(u, -v)$ pontokkal összekötő két szakasz, valamint az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolának az (u, v) és $(u, -v)$ pontok közötti íve határol. Meg lehet mutatni, hogy az A_u tartomány területe éppen $\text{ar ch}\, u$-val egyenlő. Ezt szemlélteti a következő ábra.

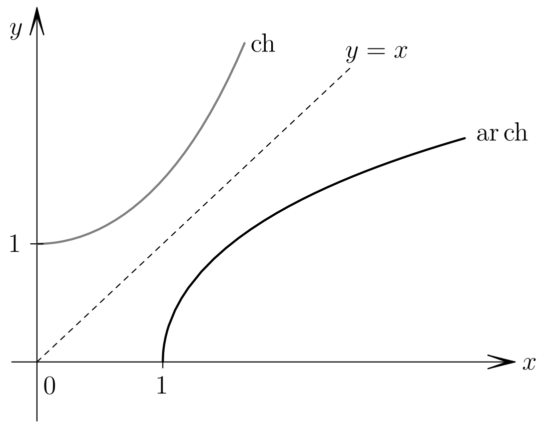


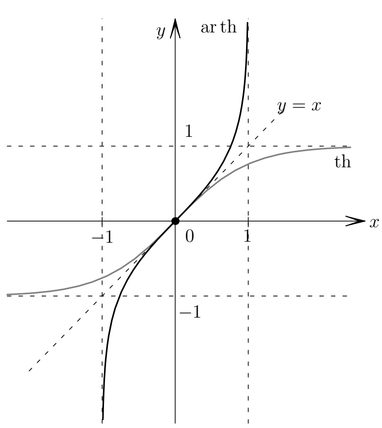
Az inverz függvény deriválási szabályából következik, hogy mindegyik areafüggvény az értelmezési tartományának minden belső pontjában deriválható, és

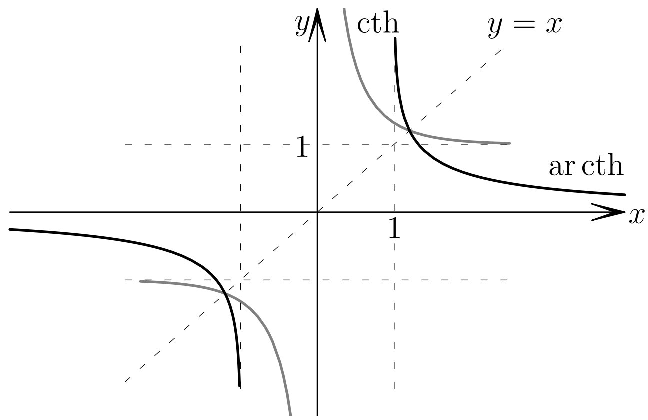
$$\operatorname{ar\,sh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \operatorname{ar\,ch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \big(x \in (1,+\infty)\big),$$
$$\operatorname{ar\,th}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(x \in (-1,1)\big), \qquad \operatorname{ar\,cth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad \big(|x|>1\big).$$

Az areafüggvények alábbi ábrákon szemléltetett analitikus és geometriai tulajdonságai a korábbiakhoz hasonlóan állapíthatók meg.









A hiperbolikus függvényeket ki lehet fejezni az exp függvénnyel. Az exp függvény inverze az ln függvény, ezért nem meglepő, hogy az areafüggvényeket az ln segítségével is fel tudjuk írni.

2. Tétel. *A következő azonosságok teljesülnek:*

$$\operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ar\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (x \in [1,+\infty)),$$

$$\operatorname{ar\,th} x = \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (x \in (-1,1)),$$

$$\operatorname{ar\,cth} x = \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad (|x| > 1).$$

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak az első azonosság igazolását részletezzük. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $y := \operatorname{ar\,sh} x$, azaz $x = \operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Bevezetve a $t := e^y$ jelölést, t-re a $t^2 - 2tx - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Mivel $t > 0$, ezért $t = e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, azaz

$$y = \operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A fenti képletek jelentősége a következő: Ha az ln függvény helyettesítési értékeit ki tudjuk számolni, akkor az areafüggvények helyettesítési értékei is számolhatók.

Az elemi függvények helyettesítési értékeinek a kiszámolása

Az analízisben (és általában a matematikában) a leggyakrabban előforduló függvények a polinomok, a racionális függvények, az exponenciális-, hatvány- és logaritmusfüggvények, a trigonometrikus függvények, a hiperbolikus függvények és az inverzeik. ***Elemi függvényeknek*** nevezzük azokat a függvényeket, amelyeket a fentiekből kaphatjuk meg a négy alapművelet, a kompozíció és valamely nyílt intervallumra való leszűkítés véges számú alkalmazásával.

Fontos kérdés az elemi függvények helyettesítési értékeinek „tetszőleges pontossággal” való kiszámíthatósága. Polinomok és racionális függvények helyettesítési értékei a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával egyszerűen számolhatók. Hatványsor összegfüggvényei polinomok sorozatának határértékei, ezért azok helyettesítési értékeit általában nem tudjuk pontosan kiszámolni. A közelítő értékeit azonban (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk határozni a négy alapművelet véges sokszori felhasználásával.

Érdekes és fontos tény az, hogy mindegyik elemi függvényt *ki lehet fejezni* néhány „alapfüggvény” segítségével. Pontosabban igaz a következő állítás: *Mindegyik elemi függvény kifejezhető az*

- $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x$,
- $(0,+\infty) \ni x \mapsto \ln x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arc\,tg} x$

függvényekkel a négy alapművelet, a kompozíció és valamely nyílt intervallumra való leszűkítés véges számú alkalmazásával.

Ez azt is jelenti, hogy az *összes* elemi függvény tetszőleges pontossággal való kiszámolhatóságához elég előállítani csak az utolsó négy függvényt hatványsor összegfüggvényeként. Az exp és a sin függvényekre ilyen előállítást már megismertünk. Az ln és az arc tg függvények alkalmas leszűkítéseit hamarosan elő fogjuk állítani hatványsor összegfüggvényeként.

Most felsoroljuk a fenti állítás bizonyításához alkalmazható formulákat:

- $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $\quad \big(x \in (0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R}\big)$
- $a^x = e^{x \ln a}$ $\quad \big(x \in \mathbb{R},\ a \in (0, +\infty)\big)$
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \big(x \in (0, +\infty),\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\big)$
- $\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \big(x \in (-1, 1)\big)$
- $\cos x = \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{2}\Big)$ $\quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$
- $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$ $\quad \big(x \in [-1, 1]\big)$
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \Big(x \in \mathbb{R} \setminus \Big\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\Big\}\Big)$
- $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad \Big(x \in \mathbb{R} \setminus \Big\{k\pi \mid k \in Z\Big\}\Big)$
- $\operatorname{arc\,ctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x$ $\quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$
- $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$
- $\operatorname{ar\,sh} x = \ln\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big)$ $\quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$
- $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$
- $\operatorname{ar\,ch} x = \ln\Big(x + \sqrt{x^2-1}\Big)$ $\quad \big(x \in [1, +\infty)\big)$
- $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$
- $\operatorname{ar\,th} x = \dfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad \big(x \in (-1, 1)\big)$
- $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$
- $\operatorname{ar\,cth} x = \dfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)$ $\quad \big(x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\big)$