12. gyakorlat

TÖBBVÁLTOZÓS ANALÍZIS 3.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények abszolút szélsőértékei

Emlékeztető. A valós-valós függvények abszolút szélsőértékeinek keresésére vonatkozó állítások általánosíthatók többváltozós függvények esetére.

Tétel. **(Weierstrass-tétel)** *Tegyük fel, hogy H egy korlátos és zárt halmaz az $\mathbb{R}^2$ euklideszi térben, illetve az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor az f függvénynek vannak abszolút szélsőértékhelyei, azaz*

- $\exists x_1 \in H, \forall x \in H : f(x) \leq f(x_1)$ *(x_1 abszolút maximumhely),*
- $\exists x_2 \in H, \forall x \in H : f(x) \geq f(x_2)$ *(x_2 abszolút minimumhely).*

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, illetve f deriválható H minden belső pontjában. Ekkor f a legnagyobb (legkisebb) értékét vagy a H halmaz határán veszi fel, vagy pedig egy olyan $a \in \operatorname{int} H$ belső pontban, ahol egyszerre $\partial_1 f(a) = 0$ és $\partial_2 f(a) = 0$ teljesül.*

1. Feladat. *Határozza meg az*

$$f(x, y) := x^3 - 12x + y^3 - 3y \qquad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3, \quad -x \leq y \leq 2\Big\}.$$

Megoldás. A H halmaz az $A(-2, 2)$, $B(3, -3)$ és $C(3, 2)$ csúcspontú korlátos és zárt háromszöglap. Az f függvény folytonos H-n, ezért a Weierstrass tétele alapján a függvénynek a H-n felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb érték.

Az f függvény deriválható a H halmaz belsejében, hiszen deriválható minden $\mathbb{R}^2$-beli pontban. Az abszolút szélsőértékhelyek vagy a H halmaz belső pontjaiban (ekkor azok egyúttal stacionárius pontok is), vagy pedig a H halmaz határán lehetnek.

Először meghatározzuk a függvény stacionárius pontjait a H halmaz belsejében. Mivel

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x, y) & = & 3x^2 - 12 & = & 0 \\ \partial_y f(x, y) & = & 3y^2 - 3 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2 \text{ és } y = \pm 1,$$

ezért f stacionárius pontjai:

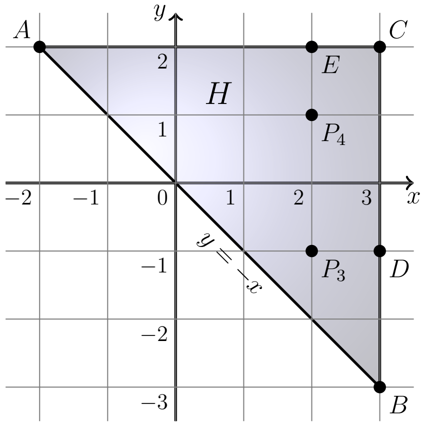
$$P_1(-2, -1), \quad P_2(-2, 1), \quad P_3(2, -1), \quad P_4(2, 1),$$

de ezekből csak P_3 és P_4 található a H halmaz belsejében. Nem szükséges megállapítani, hogy ezek közül melyik lokális szélsőértékhely, hiszen csak két pontról van szó. Elegendő kiszámolni az

$$f(P_3) = f(2, -1) = -14 \quad \text{és} \quad f(P_4) = f(2, 1) = -18$$

értékeket, és ezeket összehasonlítani más lehetséges abszolút szélsőértékhelyekkel.

Most megvizsgáljuk az f függvény H határán felvett helyettesítési értékeit. A H halmaz határa három szakaszra bontható. A feladat az, hogy meghatározzuk f abszolút szélsőértékhelyeit az egyes szakaszokon. Ehhez az f függvény adott szakaszon felvett helyettesítési értékeit egy zárt intervallumon értelmezett g valós függvénnyel állítjuk elő. Ennek lehetséges abszolút szélsőértékhelyei az intervallum belsejében lévő stacionárius pontok (ahol $g' = 0$), vagy az intervallumon határpontjai lehetnek.



<u>Az AB szakasz:</u> $y = -x$, ahol $-2 \leq x \leq 3$. Ekkor a

$$g_1(x) := f(x, -x) = -9x \qquad \big(x \in [-2, 3]\big)$$

függvény szigorúan monoton csökkenő. Ezért $x = -2$ és $x = 3$ a g_1 függvény abszolút szélsőértékhelyei, amelyek megfelelnek az A és B pontoknak:

$$f(A) = f(-2, 2) = 18 \quad \text{és} \quad f(B) = f(3, -3) = -27.$$

<u>A BC szakasz:</u> $x = 3$, ahol $-3 \leq y \leq 2$. Ekkor

$$g_2(y) := f(3, y) = y^3 - 3y - 9 \qquad \big(y \in [-3, 2]\big).$$

Mivel

$$g_2'(y) = 3y^2 - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm 1,$$

így g_2 lehetséges abszolút szélsőértékhelyei: $y = -3$, $y = -1$, $y = 1$ és $y = 2$. Értékei:

$$g_2(-3) = -27, \quad g_2(-1) = -7, \quad g_2(1) = -11, \quad g_2(2) = -7.$$

Ezért $y = -3$, $y = -1$ és $y = 2$ a g_2 függvény abszolút szélsőértékhelyei, amelyek rendre megfelelnek a B, a $D(3, -1)$ és a C pontoknak:

$$f(D) = f(3, -1) = -7 \quad \text{és} \quad f(C) = f(3, 2) = -7.$$

<u>Az AC szakasz:</u> $y = 2$, ahol $-2 \leq x \leq 3$. Ekkor

$$g_3(x) := f(x, 2) = x^3 - 12x + 2 \qquad \big(x \in [-2, 3]\big).$$

Mivel

$$g_3'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pm 2,$$

így g_3 lehetséges abszolút szélsőértékhelyei: $x = -2$, $x = 2$ és $x = 3$. Értékei:

$$g_3(-2) = 18, \quad g_2(2) = -14, \quad g_2(3) = -7.$$

Ezért $x = -2$ és $x = 2$ a g_2 függvény abszolút szélsőértékhelyei, amelyek rendre megfelelnek az A és az $E(2, 2)$ pontoknak:

$$f(E) = f(2, 2) = -14.$$

A kapott

$$f(P_3) = -14,\ f(P_4) = -18,\ \underline{\underline{f(A) = 18}},\ \underline{\underline{f(B) = -27}},\ f(C) = -7,\ f(D) = -7,\ f(E) = -14$$

értékeket összehasonlítva azt látjuk, hogy a H halmazon az f függvény abszolút maximumhelye az $A(-2, 2)$ pont és az abszolút maximuma $f(-2, 2) = 18$, abszolút minimumhelye a $B(3, -3)$ pont és az abszolút minimuma $f(3, -3) = -27$, azaz

$$\boxed{\min_{(x,y)\in H} f(x, y) = f(3, -3) = -27}, \qquad \boxed{\max_{(x,y)\in H} f(x, y) = f(-2, 2) = 18}.$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények feltételes szélsőértékei

Emlékeztető. ***Általános feladat:*** Adott

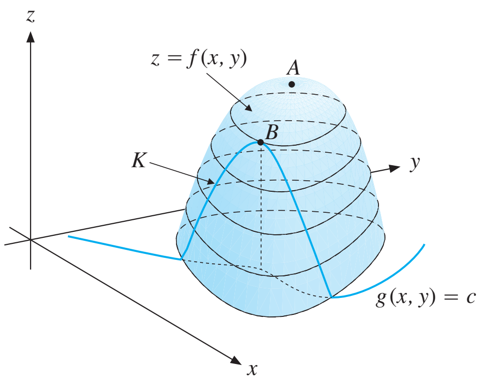
- $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,
- $f : U \to \mathbb{R}$ (célfüggvény) és
- $g : U \to \mathbb{R}$ (feltételfüggvény).

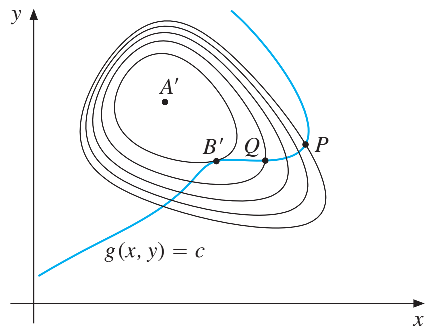
Keressük az f függvény szélsőértékeit a

$$H_g := \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$$

halmazon, azaz határozzuk meg az $f_{|H_g}$ függvény szélsőértékeit!

A problémát az alábbi ábrákon szemléltetjük:





Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy $f, g : U \to \mathbb{R}$ adott függvények és

$$a \in H_g := \{z \in U \mid g(z) = 0\} \neq \emptyset.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az a pontban

- ***feltételes abszolút maximuma van***, ha $\forall x \in H_g \colon f(x) \leq f(a)$,
- ***feltételes lokális maximuma van***, ha $\exists K(a) \subseteq U, \forall x \in K(a) \cap H_g \colon f(x) \leq f(a)$.

Tétel. **(Szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre)** *Tegyük fel, hogy*

a) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *nyílt halmaz és az* $f, g : U \to \mathbb{R}$ *függvényeknek léteznek a parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az* U *halmazon,*

b) az $(x_0, y_0) \in U$ *pontban az* f *függvénynek a* $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van,*

c) $g'(x_0, y_0) = \big(\partial_1 g(x_0, y_0), \partial_2 g(x_0, y_0)\big) \neq (0, 0)$.

Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ *valós szám (ezt* ***Lagrange-szorzónak*** *szokás nevezni), hogy az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange-függvénynek (x_0, y_0) *stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = \big(\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0), \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)\big) = (0, 0).$$

Tétel. **(A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel)** *Tegyük fel, hogy*

a) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a másodrendű parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az U halmazon,

b) az $(x_0, y_0) \in U$ pontban a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ számmal teljesül a szükséges feltétel.

Tekintsük ezzel a λ_0 számmal az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange-függvényt. Legyen

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12}\mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22}\mathcal{L}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ekkor,

- $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* **maximumhely**,
- $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* **minimumhely**.

2. Feladat. *Határozza meg az $f(x, y) := x^2 + y^2$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény feltételes lokális minimumhelyeit a $g(x, y) = x + 2y - 4 = 0$ feltételre vonatkozóan!*

a) Mi a feladat geometriai tartalma?

b) Oldja meg a feladatot úgy, hogy a korlátozó feltételből y kifejezésével visszavezeti egyváltozós szélsőérték-problémára!

c) Oldja meg a feladatot a Lagrange-szorzók módszerével!

Megoldás.

a) Mivel az egyenes egy (x, y) pontjának az origótól vett távolsága $\sqrt{x^2 + y^2}$, ezért a feladat az $x + 2y = 4$ egyenes az origóhoz legközelebbi pontjának a meghatározása.

b) A $g(x, y) = x + 2y - 4 = 0$ egyenletből $y = -\frac{1}{2}x + 2$ adódik. Ezért a feladat a

$$h(x) := f\Big(x, -\tfrac{1}{2}x + 2\Big) = x^2 + \Big(-\tfrac{1}{2}x + 2\Big)^2 = \tfrac{5}{4}x^2 - 2x + 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvény lokális minimumhelyeinek a megkeresése. Mivel

$$h'(x) = \frac{5}{2}x - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 = \frac{4}{5} \;\text{ és }\; h''(x_0) = \frac{5}{2} > 0,$$

ezért x_0 a h másodfokú polinomnak egyetlen lokális minimumhelye. Következésképpen az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozó egyetlen feltételes lokális minimumhelye. Ez a pont egyúttal abszolút feltételes minimumhely is, hiszen x_0 a h függvény abszolút minimumhelye.

c) A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

A szükséges feltétel: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert

$$f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big) \;\text{ és }\; g'(x, y) = \big(\partial_1 g(x, y), \partial_2 g(x, y)\big) = (1, 2) \neq (0, 0) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x+2y-4) \quad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 2x + \lambda &&= 0 \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 2y + 2\lambda &&= 0 \\ g(x,y) &= x + 2y - 4 &&= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai. Az első és a második egyenletből adódó $x = -\frac{\lambda}{2}$ és $y = -\lambda$ értékeket a harmadik egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$$0 = x + 2y - 4 = -\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 4 = -\frac{5}{2}\lambda - 4 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{8}{5}.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát:

$$x_0 = \frac{4}{5}, \quad y_0 = \frac{8}{5}, \quad \lambda_0 = -\frac{8}{5}.$$

Következésképpen csak az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pontban lehet lokális feltételes szélsőérték. A hozzá tartozó Lagrange-szorzó: $\lambda_0 = -\frac{8}{5}$.

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

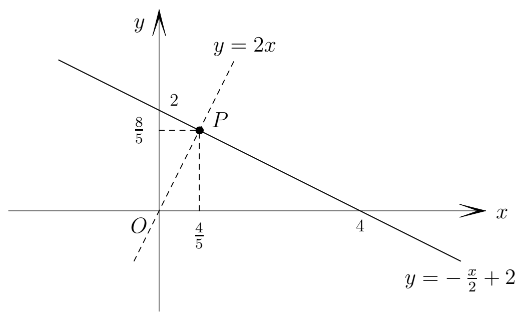
$$\partial_1 g(x,y) = 1, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 0 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2;$$

$$D(x,y;\lambda) := \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) - 1(1 \cdot 2 - 2 \cdot 0) + 2 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = -10 < 0.$$

így $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0$, ezért az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont az egyetlen feltételes lokális minimumhely.

Megjegyzés. Az előző feladat megoldása megegyezik az elemi geometriából ismert eredménnyel, amit az alábbi ábrán szemléltetünk.



Az $y = 2x$ egyenletű egyenes merőleges az

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$

egyenesre, mert a meredekségük szorzata -1. A két egyenes metszéspontja az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont. A szóban forgó egyenes és az origó távolsága tehát

$$\sqrt{f\big(x_0, y_0\big)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

3. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := xy \quad \textit{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

a) Elemi úton keresse meg az f függvény feltételes abszolút szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

b) A Lagrange-szorzók módszerével keresse meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

Megoldás.

a) Az elemi megoldás alapötlete a számtani és mértani közepekre vonatkozó

$$|xy| = \sqrt{x^2y^2} \le \frac{x^2+y^2}{2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

egyenlőtlenség, ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x^2 = y^2$.

A $H_g := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; g(x,y) = 0\Big\}$ halmaz pontjaiban $x^2 + y^2 = 1$, ezért a fenti egyenlőtlenségek alapján

$$|xy| \le \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \le xy \le \frac{1}{2} \qquad \big((x,y) \in H_g\big).$$

- Az első egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = -y$. Mivel $x^2 + y^2 = 1$, ezért $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez viszont azt jelenti, hogy a

  $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

  pontok az f függvény feltételes abszolút minimumhelyei a $g = 0$ feltétel mellett.
- A második egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y$. Mivel $x^2 + y^2 = 1$, ezért $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez viszont azt jelenti, hogy a

  $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

  pontok az f függvény feltételes abszolút maximumhelyei a $g = 0$ feltétel mellett.

b) A feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

A szükséges feltétel: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert

$$f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big) \quad \text{és} \quad g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)\big) = (2x, 2y) \ne (0,0) \qquad \big((x,y) \in H_g\big),$$

hiszen ha $(2x, 2y) = (0,0)$, akkor $x = y = 0$, de ekkor $g(0,0) = -1 \ne 0$.

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned}
\partial_1\mathcal{L}(x,y) &= y + 2\lambda x &&= 0\\
\partial_2\mathcal{L}(x,y) &= x + 2\lambda y &&= 0\\
g(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 &&= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Az $x = 0$ nem megoldás (hiszen akkor y is 0 lenne, ami a 3. egyenlet miatt lehetetlen), ezért az első egyenletből $2\lambda = -\frac{y}{x}$. Ezt a 2. egyenletbe beírva

$$x + \left(-\frac{y}{x}\right)\cdot y = 0 \quad\Longrightarrow\quad x - \frac{y^2}{x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 = y^2.$$

A 3. egyenletből pedig azt kapjuk, hogy $2x^2 = 1$. Ezek alapján az egyenletrendszernek megoldásából a következő pontokat kapjuk

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2},$$
$$P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Az f függvénynek csak ezekben lehetnek a feltételes lokális szélsőértékhelyei.

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = 2x, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2y;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 1 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda;$$

ezért

$$\begin{aligned}
D(x,y;\lambda) :&= \det\begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y)\\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y)\\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y\\ 2x & 2\lambda & 1\\ 2y & 1 & 2\lambda\end{pmatrix} =\\
&= -2x(2x\cdot 2\lambda - 2y) + 2y(2x - 2\lambda\cdot 2x) =\\
&= -8\lambda\underbrace{(x^2+y^2)}_{=1} + 8xy = 8(xy - \lambda).
\end{aligned}$$

Így

$$D(P_1,\lambda_1) = D(P_2,\lambda_1) = 8 > 0 \quad\Longrightarrow\quad \underline{\underline{P_1 \text{ és } P_2 \text{ feltételes lokális maximumhelyek}}},$$
$$D(P_3,\lambda_2) = D(P_4,\lambda_2) = -8 < 0 \quad\Longrightarrow\quad \underline{\underline{P_3 \text{ és } P_4 \text{ feltételes lokális minimumhelyek}}}.$$

Megjegyzések.

1. Az előző feladat megoldásából következik, hogy körbe írható maximális területű téglalap a négyzet.

2. Az a tény, hogy P_1, P_2, P_3 és $P4$ feltételes abszolút szélsőértékhelyek, nem csak az a) pontban bemutatott „elemi” megoldásból adódik. Ti. f folytonos a

$$H_g := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=1\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

korlátos és zárt halmazon. Így a Weierstrass-tétel szerint f felveszi a maximumát és a minimumát H_g-n. Mivel a b) pont szerint P_1, P_2, P_3 és P_4 az egyedüli feltételes lokális szélsőértékhelyek, és

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{1}{2}, \quad \text{illetve} \quad f(P_3) = f(P_4) = \frac{1}{2},$$

így P_1 és P_2 feltételes abszolút maximumhelyek és P_3 és P_4 feltételes abszolút minimumhelyek.

4. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := 2x + 3y \quad \textit{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Határozza meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

Megoldás. A feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

A szükséges feltétel: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert

$$f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big) \;\; \text{és} \;\; g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)\big) = (2x, 2y) \neq (0,0) \quad \big((x,y) \in H_g\big),$$

hiszen ha $(2x, 2y) = (0,0)$, akkor $x = y = 0$, de ekkor $g(0,0) = -1 \neq 0$.

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 2x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \;\; \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A szóban forgó tétel szerint a lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 2 + 2\lambda x &&= 0 \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 3 + 2\lambda y &&= 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 &&= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaiból adódnak.

A $\lambda = 0$ nyilván nem megoldás, ezért az első és a második egyenletből $x = -\frac{1}{\lambda}$ és $y = -\frac{3}{2\lambda}$ adódik. Ezeket az értékeket a 3. egyenletbe beírva azt kapjuk, hogy

$$0 = x^2 + y^2 - 1 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} - 1 = \frac{13 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai, tehát a *lehetséges* feltételes lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right), \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$P_2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right), \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = 2x, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2y;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 0 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda;$$

ezért

$$D(x,y;\lambda) := \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -2x(2x \cdot 2\lambda - 0) + 2y(0 - 2\lambda \cdot 2y) = -8\lambda\big(\underbrace{x^2 + y^2}_{=1}\big) = -8\lambda.$$

Így

$$D\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{\sqrt{13}}{2}\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{P_1 \text{ feltételes lokális minimumhely,}}}$$

$$D\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{\sqrt{13}}{2}\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{P_2 \text{ feltételes lokális maximumhely.}}}$$