A pontbeli derivált fogalma

1. Definíció. *Tegyük fel, hogy* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$*. Az* $a \in A$ *pont az* A *halmaz* **belső pontja***, ha*

$$\exists K(a), \text{ hogy } K(a) \subseteq A.$$

Az **int** $\boldsymbol{A}$ *szimbólummal jelöljük* **az** $\boldsymbol{A}$ **halmaz belső pontjainak a halmazát***.*

2. Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* **differenciálható** *(vagy* **deriválható***), ha*

$$\exists \quad \text{és véges a} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ *szimbólummal jelöljük, és* **az** $\boldsymbol{f}$ **függvény** $\boldsymbol{a}$ **pontbeli deriváltjának** *(vagy* **differenciálhányadosának***) nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$*.*

Megjegyzések.

1. A fenti definícióban szereplő határértéket az $h = x - a$ helyettesítéssel gyakran így írjuk fel:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$
2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor az
$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)$$
függvényt ***az f függvény az a ponthoz tartozó különbséghányados-függvényének*** vagy ***differenciahányados-függvényének*** nevezzük.
3. A derivált definíciójában $0/0$-típusú kritikus határértékről van szó.

A differenciálhatóság erősebb megkötés, mint a folytonosság.

1. Tétel (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata). *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$*. Ekkor*

a) $f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f \in C\{a\}$,

b) Az állítás megfordítása nem igaz.

Az érintő fogalma

Az előzőek alapján, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $\big(a, f(a)\big)$ és az $\big(x, f(x)\big)$ pontokon átmenő szelőegyeneseknek van „határegyenese", ha $x \to a$. Függvény grafikonjának (mint síkbeli halmaznak) az érintőjén éppen ezt az egyenest célszerű érteni. Az $f \in D\{a\}$ függvény esetén a szóban forgó egyenes átmegy az $\big(a, f(a)\big)$ pontban és a meredeksége $f'(a)$.

3. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban* **van érintője**, *ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli* **érintőjén** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

Vegyük észre, hogy a $f'(a)$ definíciójában szereplő határérték véges, ezért az érintő nem lehet párhuzamos az y-tengellyel.

Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a kör és a parabola érintőjének a fenti definíciója ekvivalens a középiskolában geometriai úton megadott definícióval.

Deriválási szabályok

2. Tétel (Algebrai műveletekre vonatkozó deriválási szabályok). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor*

1. *a szorzó konstansokat ki tudjuk emelni a deriválásból, azaz*

$$cf \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (cf)'(a) = cf'(a) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

2. *tagokból álló függvényeket tagonként deriválhatjuk, azaz*

$$f + g \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

3. *egy szorzat deriváltja az az összeg, amelynek tagjai az egyik tényező deriváltja megszorozva a másik tényezővel, azaz*

$$f \cdot g \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

4. *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

3. Tétel (Összetett függvény deriváltja). *Tegyük fel, hogy $f,g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'\Big(g(a)\Big) \cdot g'(a).$$

4. Tétel (Inverz függvény deriváltja). *Legyen I egy nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) f szigorúan monoton és folytonos az I intervallumon,

b) valamilyen $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az f^{-1} függvény deriválható a $b = f(a)$ pontban és

$$\Big(f^{-1}\Big)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(b)\Big)}.$$

5. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének deriváltja). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \Big(x \in K_R(a)\Big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \Big(x \in K_R(a)\Big).$$

A deriváltfüggvény

4. Definíció. *Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\Big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\Big\} \neq \emptyset$, akkor az*

$$\Big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\Big\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f **deriváltfüggvényének** *(vagy* **differenciálhányados-függvényének***) nevezzük, és az f' szimbólummal jelöljük.*

2. előadás

Egyoldali pontbeli deriváltak

1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$ olyan pont, hogy $\exists \delta > 0\colon [a, a+\delta) \subseteq \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy* **az f függvény jobbról differenciálható** *(vagy* **jobbról deriválható***)* **az a pontban***, ha*

$$\exists \quad \textit{és véges a} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \textit{határérték.}$$

Ezt a határértéket az $\boldsymbol{f'_+(a)}$ *szimbólummal jelöljük, és* **az f függvény a pontbeli jobb oldali deriváltjának** *(vagy* **differenciálhányadosának***) nevezzük, azaz*

$$f'_+(a) := \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Az f függvény bal oldali differenciálhatóságát az a pontban *hasonlóan értelmezzük, és az* $\boldsymbol{f'_-(a)}$ *szimbólummal jelöljük* **az a pontbeli bal oldali deriváltját***.*

Az előző jelölés értelmében, ha $f(x) = |x| \ \ (x \in \mathbb{R})$, akkor $f'_-(0) = -1$ és $f'_+(0) = 1$.

Az egyoldali függvényhatárértékeknél tanultak szerint világos, hogy

$$f \in D\{a\} \quad \iff \quad \exists f'_-(a),\ \exists f'_+(a) \ \text{ és } \ f'_-(a) = f'_+(a) \ (= f'(a)).$$

Mikor deriválható az f függvény az 'a' pontban?

$$f(x) := \begin{cases} b(x), & \text{ha } x < a \ (x \in \mathcal{D}_b), \\ A, & \text{ha } x = a, \\ \quad j(x), \text{ha } x > a \ (x \in \mathcal{D}_j) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{I.} \quad \exists \lim_{a-0} b,\ \exists \lim_{a+0} j \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} b = A = \lim_{a+0} j}\ .$$

Az I. feltétel azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$, ami szükséges ahhoz, hogy $f \in D\{a\}$ teljesüljön.

Gyakori eset, amikor b balról, j jobbról folytonos a-ban és $b(a) = j(a) = A$. Világos, hogy ekkor az I. feltétel teljesül. Fordítva, ha az I. feltétel teljesül, akkor a

$$\boxed{\text{II.} \quad b'_+(a) = j'_+(a)}\ .$$

Ekkor $f'(a) = b'_+(a) = j'_+(a)$. Ha $b \in D\{a\}$ és $j \in D\{a\}$, akkor a II. feltétel ekvivalens, azzal, hogy $b'(a) = j'(a)$.

Magasabb rendű deriváltak

Ha valamely valós-valós függvénynek létezik a deriváltfüggvénye, akkor természetes módon felvethetjük annak újbóli deriválhatóságát, és így eljuthatunk a ***többször deriválható függvények*** és a ***magasabb rendű deriváltak*** fogalmához. A rekurzió módszerét alkalmazzuk. Először a kétszer deriválhatóság fogalmát definiáljuk.

2. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy* ***f* kétszer deriválható az *a* pontban** *(jelölése: $f \in D^2\{a\}$), ha*

- $\exists r > 0\colon f \in D\Big(K_r(a)\Big)$, *és*
- *az f' deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f' \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f''(a) := \Big(f'\Big)'(a)$$

az f függvény ***a*-beli második deriváltja***.*

Ha $H := \Big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\Big\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f''(x)$ az f függvény ***második deriváltfüggvénye***, amit röviden az f'' szimbólummal jelölünk.

Jelölések. A deriváltakra és a deriváltfüggvényekre a következő jelöléseket is fogjuk használni:

$$f^{(1)}(a) := f'(a) \quad \text{és} \quad f^{(1)} := f',$$
$$f^{(2)}(a) := f''(a) \quad \text{és} \quad f^{(2)} := f''.$$

Megállapodunk abban is, hogy $\quad f^{(0)}(a) := f(a) \quad$ és $\quad f^{(0)} := f$.

Indukcióval értelmezzük az ***n-szeri deriválhatóságot*** és az ***n-edik deriváltat***. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetében már értelmeztük azt, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mikor deriválható $(n-1)$-szer egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n-1}\{a\}$), továbbá azt is, hogy mikor létezik és mi az $(n-1)$-edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az $f^{(n-1)}$ szimbólummal.

3. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy valamely $n = 2, 3, \ldots$ esetén létezik az $f^{(n-1)}$-gyel jelölt $(n-1)$-edik deriváltfüggvény. Azt mondjuk, hogy* ***f n*-szer deriválható az *a* pontban** *(jelölése: $f \in D^n\{a\}$), ha*

- $\exists r > 0\colon f \in D^{n-1}\Big(K_r(a)\Big)$, *és*
- *az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := \Big(f^{(n-1)}\Big)'(a)$$

az f függvény ***a*-beli *n*-edik deriváltja.**

Ha $H := \Big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\Big\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$ az f függvény ***n-edik deriváltfüggvénye***, amit röviden az $f^{(n)}$ szimbólummal jelölünk.