11. gyakorlat

TÖBBVÁLTOZÓS ANALÍZIS 2.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények totális deriváltja

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény ***totálisan deriválható*** az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$), ha

$$\exists A \in \mathbb{R}^{1\times 2}: \quad \lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - A\cdot h|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $f'(a) := A$ az f függvény ***deriváltmátrixa*** az a pontban.

Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ deriváltmátrix egyértelműen meghatározott.

Tétel. **(A deriváltmátrix előállítása)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy függvény és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D\{a\}$, akkor $\exists \partial_1 f(a)$, $\exists \partial_2 f(a)$ és*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$$

az ún. **Jacobi-mátrix**.

1. Feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

Megoldás. A deriválhatóság igazolása.

Legyen $a = (a_1, a_2) = (1,2)$ és $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Azt kell belátnunk, hogy van olyan $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ sormátrix, amire:

$$\lim_{h\to \mathbf{0}} \frac{\big|f(a+h) - f(a) - A\cdot h\big|}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Ezzel a tulajdonsággal rendelkező A mátrixot így lehet meghatározni:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \\ &= 2(1+h_1)^2 + 3(1+h_1)(2+h_2) - (2+h_2)^2 - \Big[2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\cdot 2 - 2^2\Big] = \\ &= 10h_1 - h_2 + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2 = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2. \end{aligned}$$

Legyen $A := \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix}$. Az előző egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(a+h) - f(a) - A\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Most megmutatjuk azt, hogy a jobb oldalon álló függvénynek a határértéke a $(0,0)$ pontban 0-val egyenlő. Mivel

$$0 \le \frac{\left|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{2(h_1^2+h_2^2) + 3|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \left(|h_1h_2| \le \tfrac{1}{2}(h_1^2+h_2^2) \text{ miatt}\right) \le$$

$$\le \frac{2(h_1^2+h_2^2) + \frac{3}{2}(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le 4\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0 \quad (\text{ha } h_1 \to 0 \text{ és } h_2 \to 0),$$

ezért a közrefogási elvből következik, hogy a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

egyenlőség valóban teljesül. A fentieket összefoglalva tehát azt láttuk be, hogy $f \in D\{(1,2)\}$ és a deriváltmátrix az $f'(1,2) = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix}$ sormátrix.

Ellenőrzés. Mivel

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 4x + 3y, & \partial_1 f(1,2) &= 10, \\ \partial_2 f(x,y) &= 3x - 2y, & \partial_2 f(1,2) &= -1, \end{aligned}$$

ezért a Jacobi-mátrix:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f(1,2) & \partial_2 f(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix},$$

és ez valóban megegyezik a definíció alapján kapott deriváltmátrixszal.

2. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de f nem differenciálható a $(0,0)$ pontban!

Megoldás. A folytonosság igazolása. Az $a = (0,0)$ pontbeli folytonosság a definíció szerint azt jelenti, hogy

$(*)$ $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$: $\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f$, $\left\|(x,y) - (0,0)\right\| < \delta$ pontban $\left|f(x,y) - f(0,0)\right| < \varepsilon$.

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot és legyen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$\left|f(x,y) - f(0,0)\right| = \left|f(x,y)\right| = \sqrt{|xy|} \le \left(\sqrt{|xy|} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}} \text{ miatt}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\|(x,y)\right\| < \varepsilon}_{\|(x,y)\| < \sqrt{2}\varepsilon}.$$

Így, ha $\delta := \sqrt{2}\varepsilon$, akkor $(*)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\big\{(0,0)\big\}$.

$\exists \partial_1 f(0,0)$ és $\exists \partial_2 f(0,0)$ igazolása. $\partial_1 f(0,0)$ értelmezése szerint az f függvényben rögzíteni kell az $y = 0$ értéket, és az így keletkezett x-től függő függvényt (parciális függvényt) deriválni kell a 0 pontban. Ha a feladatban szereplő $\sqrt{|xy|}$ képletben $y = 0$, akkor a keletkezett parciális függvény azonosan nulla, és így $\exists \partial_1 f(0,0) = 0$.

Ugyanígy igazoljuk, hogy $\exists \partial_2 f(0,0) = 0$.

Az $f \notin D\{(0,0)\}$ állítás igazolása. Indirekt módon tegyük fel, hogy $f \in D\{(0,0)\}$. Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és a totális derivált definíciója szerint

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} \partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Könnyű észrevenni, hogy ez az állítás nem igaz. A határértékre vonatkozó átviteli elv alapján elég egy olyan origóhoz tartó pontsorozatot találni, amely mentén a függvényértékek sorozata nem tart 0-hoz. Tekintsük például az $y = x$ egyenletű egyenes mentén az

$$(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozatot. Ekkor $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$, és ezekben a pontokban a függvényértékek

$$\frac{\sqrt{|x_n\, y_n|}}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozata nem tart 0-hoz. Az indirekt feltételből kiindulva tehát ellentmondásra jutottunk, és ez azt jelenti, hogy az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

Megjegyzés. A feladat elméleti szempontból is érdekes, mert egyrészt azt igazolja, hogy a pontbeli folytonosságból általában nem következik a pontbeli totális deriválhatóság. Másrészt pedig a pontbeli parciális deriváltak létezéséből általában nem következik a pontbeli totális deriválhatóság.

3. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az f függvény a $(0,0)$ pontban

a) folytonos,

b) minden irány mentén deriválható,

c) totálisan nem deriválható!

Megoldás.

a) A pontbeli folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(**)\qquad \begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\,\delta>0, \text{ hogy } \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \text{ esetén}\\ |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon.\end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon>0$ valós számot. Ha $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, akkor

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right| = \frac{|x|\cdot y^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x|\cdot(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$

$$= |x| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így, ha $\delta:=\varepsilon$, akkor $(**)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $f\in C\big\{(0,0)\big\}$.

b) A $0=(0,0)$ origóból kiinduló irányokat az $v:=\big(\cos\alpha,\sin\alpha\big)$ $\big(\alpha\in[0,2\pi)\big)$ egységvektorokkal adjuk meg. Tekintsünk egy rögzített $\alpha\in[0,2\pi)$ paraméterrel megadott v vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt kell megmutatni, hogy a

$$F(t) := f(0+tv) = f(tv) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{t\cos\alpha\cdot(t\sin\alpha)^2}{(t\cos\alpha)^2+(t\sin\alpha)^2} =$$

$$= (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2\cdot t \qquad (t\in\mathbb{R})$$

valós-valós függvény deriválható a $t=0$ pontban. Ez viszont nyilván igaz, és $F'(0)=(\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$. Ezért az f függvénynek létezik a v irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. így $\partial_v f(0,0)=(\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$.

c) Indirekt módon tegyük fel, hogy $f\in D\{(0,0)\}$. Nem nehéz igazolni, hogy az origóban az f függvénynek mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és nullával egyenlő (a $(0,0)$ ponthoz tartozó parciális függvények azonosan nullák). Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0) = \big(\partial_1 f(0,0)\quad \partial_2 f(0,0)\big) = \big(0\quad 0\big),$$

és a totális derivált definíciója szerint

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f(h_1,h_2)-f(0,0)-\big(\partial_1 f(0,0)\quad \partial_2 f(0,0)\big)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = 0.$$

Könnyű észrevenni, és az előző feladat megoldásában alkalmazott gondolatmenettel igazolni azt, hogy ez az állítás nem igaz. Az így kapott ellentmondásból következik, hogy az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

Felület érintősíkja

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ pontban *van érintősíkja*, ha $f \in D\{(x_0, y_0)\}$. ***Az érintősík egyenlete***:

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

amelynek egyik ***normálvektora***: $\vec{n}\big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big)$.

4. Feladat. *Legyen*

$$f(x, y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 2y^2\big).$$

a) *Számítsa ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait!*

b) *Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3, 2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.*

Megoldás.

a) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $x^2 > 2y^2$, akkor a parciális deriváltak léteznek, és

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2y^2}},$$

$$\partial_2 f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2y^2}} \cdot (-4y) = \frac{-2y}{\sqrt{x^2 - 2y^2}}.$$

b) Legyen $(x_0, y_0) = (3, 2)$. Az f függvény parciális deriváltjai léteznek az (x_0, y_0) pont egy környezetében és folytonosak az (x_0, y_0) pontban, ezért f totálisan deriválható az (x_0, y_0) pontban. A felület $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjához tehát érintősík húzható. Ennek egyenlete a

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

képlettel adható meg. Mivel

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 - 2y_0^2} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2} = 1,$$

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2}} = 3,$$

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = \frac{-2y_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = \frac{-4}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2}} = -4,$$

ezért az érintősík egyenlete:

$$z - 1 = 3(x - 3) - 4(y - 2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x - 4y - z = 0.$$

Ennek egy normálvektora:

$$\vec{n} = \big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big) = (3, -4, -1).$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékei

Emlékeztető. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban ***lokális maximuma van*** (vagy másképp fogalmazva az a pont az f függvénynek ***lokális maximumhelye***), ha van olyan $K(a) \subseteq \mathcal{D}_f$ környezet, hogy

$$\forall x \in K(a)\colon\ f(x) \le f(a).$$

Ekkor az $f(a)$ függvényértéket az f függvény ***lokális maximumának*** nevezzük.

Analóg módon értelmezzük az ***lokális minimumhely*** és az ***lokális minimum*** fogalmát.

Tétel. **(Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre)** *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Továbbá*

- *$f \in D\{a\}$ és*
- *az f függvénynek az a pontban lokális szélsőértéke van.*

Ekkor $f'(a) = 0$, azaz $f'(a) = \big(\partial_1 f(a) \quad \partial_2 f(a)\big) = \big(0 \quad 0\big)$.

A tétel tehát azt állítja, hogy lokális szélsőértékhelyek csak f stacionárius pontjaiban (vagyis olyan a pontokban, f differenciálható és $\partial_1 f(a) = 0$, $\partial_2 f(a) = 0$) lehetnek.

Tétel. **(Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in C^2\{a\}$. Tegyük fel, hogy*

$$\partial_1 f(a) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(a) = 0.$$

Jelölje

$$D(a) := \det \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

1. *ha $D(a) > 0$ és $\partial_{11} f(a) > 0$ [illetve $\partial_{11} f(a) < 0$], akkor az f függvénynek a-ban lokális minimuma [illetve maximuma] van.*
2. *ha $D(a) < 0$, akkor f-nek a-ban nincs lokális szélsőértéke (ezt nevezzük nyeregpontnak)*
3. *ha $D(a) = 0$, akkor így nem tudjuk megállapítani, hogy az a pont vajon lokális szélsőértékhely-e vagy sem.*

Ha a feltételek nem teljesülnek, akkor ez az elégséges feltétel nem használható. Ilyenkor egyedi vizsgálatokkal lehet eldönteni, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e vagy sem.

5. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x, y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-ön, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x, y) & = & 3x^2 - 6x + 2y & = & 0 \\ \partial_y f(x, y) & = & 2x + 2y & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad y = -x \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 6x - 2x = 0.$$

Ebből

$$3x^2 - 8x = x(3x - 8) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = \frac{8}{3},$$

ezért az f függvény stacionárius pontjai, azaz a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0, 0), \quad P_2(\tfrac{8}{3}, -\tfrac{8}{3}).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\partial_{xx} f(x,y) = 6x - 6, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 2 = \partial_{yx} f(x,y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = 2.$$

Ezért

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = 6x - 6, \quad D_2 = \det f''(x,y) = 12x - 16.$$

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = -16 < 0$. Az $f''(0,0)$ mátrix indefinit, ezért a $P_1(0,0)$ pontban az f függvénynek *nincs lokális szélsőértéke.*

A $P_2(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pontban $f''\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = 16 > 0$, $D_1 = 10 > 0$. Az $f''\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ *lokális minimumhely.*

6. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-őn, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_x f(x,y) & = & 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x^3 = y^3 \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \quad x = 1 \text{ vagy } x = -1.$$

Az f függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0), \quad P_2(1,1), \quad P_3(-1,-1).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\begin{array}{ll} \partial_{xx} f(x,y) = 12x^2 - 2, & \partial_{xy} f(x,y) = -2, \\ \partial_{yx} f(x,y) = -2, & \partial_{yy} f(x,y) = 12y^2 - 2, \end{array}$$

ezért

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = 12x^2 - 2, \quad D_2 = \det f''(x,y).$$

A $P_2(1,1)$ pontban $f''(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$, $D_2 = 10^2 - 4 > 0$, $D_1 = 10 > 0$. Az $f''(1,1)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2(1,1)$ *lokális minimumhely*.

A $P_3(-1,-1)$ pontban $f''(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = f''(1,1)$, ezért az f függvénynek a $P_3(-1,-1)$ pont is *lokális minimumhelye*.

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ és $\det f''(0,0) = 0$. Ebben a pontban a másodrendű elégséges feltétel *nem alkalmazható*.

Egyedi vizsgálattal tudjuk csak eldönteni, hogy a $P_1(0,0)$ pont vajon lokális szélsőértékhelye. Mivel $f(0,0) = 0$, ezért f-nek a P_1 pontban pontosan akkor van lokális szélsőértéke, ha f az origó egy környezetében azonos előjelű. Megmutatjuk, hogy ez nem igaz. *Vegyük észre*, hogy

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 = x^4 + y^4 - (x+y)^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

és tekintsük f értékeit először az $y = -x$ egyenes mentén: $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4$, ami pozitív minden $x \neq 0$ valós számra. Nézzük most a függvény értékeit az $y = 0$ egyenes (vagyis az x-tengely) mentén: $f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1)$; ez pedig negatív, ha $|x| < 1$ és $x \neq 0$. Az f függvény tehát az origó tetszőleges kicsi környezetében felvesz negatív és pozitív értéket is, ezért ebben a pontban nincs lokális szélsőértéke.

7. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) := x^3y^5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-ön, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) & = & 3x^2y^5 & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 5x^3y^4 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ és } y \in \mathbb{R} \quad \text{vagy} \quad y = 0 \text{ és } x \in \mathbb{R}.$$

Ezért az f függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek a $P_y(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ pontok (az y-tengely pontjai), illetve a $P_x(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ pontok (az x-tengely pontjai).

Másodrendű elégséges feltétel. Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\partial_{xx} f(x,y) = 6xy^5, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 15x^2y^4 = \partial_{yx} f(x,y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = 20x^3y^3,$$

ezért

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy^5 & 15x^2y^4 \\ 15x^2y^4 & 20x^3y^3 \end{pmatrix}.$$

Minden stacionárius pontban

$$\det f''(P_x) = \det f''(P_y) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

ezért a másodrendű elégséges feltétel nem használható. A lokális szélsőértékhelyek megállapításához további vizsgálatok kellenek.

Világos, hogy a tengelyek minden pontjában a függvényérték 0. Egyszerűen belátható, hogy a tengelyek bármely pontjának minden környezetében a függvény pozitív és negatív értéket is felvesz, ezért az f függvénynek *sehol sincs lokális szélsőértéke*.