10. gyakorlat

TÖBBVÁLTOZÓS ANALÍZIS 1.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények folytonossága

Emlékeztető. Az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektor ***euklideszi normáját*** így értelmezzük:

$$\big\|(x, y)\big\| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Két $x, y \in \mathbb{R}^2$ pont ***távolságát*** a norma segítségével értelmezzük:

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Egy $a \in \mathbb{R}^2$ pont $r > 0$ sugarú ***környezetén*** a

$$K_r(a) := \big\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x - a\| < r\big\}$$

halmazt értjük. $K_r(a)$ az a pont körüli r sugarú nyílt körlap.

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény ***folytonos az*** $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f$ ***pontban***, (jelben $f \in C\{(a_1, a_2)\}$), ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f,\ \big\|(x, y) - (a_1, a_2)\big\| < \delta \text{ pontban } \big|f(x, y) - f(a_1, a_2)\big| < \varepsilon.$$

Tétel. **(A folytonosságra vonatkozó átviteli elv)** *Legyen* $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *és* $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$$f \in C\{(a_1, a_2)\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_k, y_k) \colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{k\to+\infty} (x_k, y_k) = (a_1, a_2) \text{ esetén } \lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = f(a_1, a_2).$$

Az átviteli elvből következik, hogy ha $\exists (x_k, y_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ sorozat, amely az (a_1, a_2) ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) \neq f(a_1, a_2),$$

akkor az f függvény nem folytonos az (a_1, a_2) pontban.

1. Feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ *pontban!*

Megoldás. A tört számlálója és a nevezője az origóhoz közeli pontokban 0-hoz közeli értékeket vesz fel. Két kicsi szám hányadosáról van szó. Azt már tudjuk, hogy az bármi lehet. A feladat állítása szerint a tört az origóhoz közeli pontokban 0-hoz közeli értékeket vesz fel.

A folytonosság definíciója alapján azt kell belátnunk, hogy

$$(*)\ \ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 \colon \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f,\ \Big\|(x, y) - (0, 0)\Big\| < \delta \text{ pontban } \Big|f(x, y) - f(0, 0)\Big| < \varepsilon.$$

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x, y) = (0, 0)$, akkor $\Big|f(x, y) - f(0, 0)\Big| = 0 < \varepsilon$.

Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, akkor

$$\Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| = \left|\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2\cdot|y|^3}{2x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y|^3 \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\cdot|y|^3 = |y|^3 \leq$$

$$\leq \text{(ha felteszük, hogy } \Big\|(x,y)\Big\| < 1, \text{ akkor } |y|<1) \leq |y|^2 \leq x^2+y^2 = \underbrace{\Big\|(x,y)\Big\|^2 < \varepsilon}_{\|(x,y)\|<\sqrt{\varepsilon}}.$$

Így, ha $\delta := \min\{1, \sqrt{\varepsilon}\}$, akkor $(*)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\big\{(0,0)\big\}$.

2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \textit{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \textit{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ *pontban!*

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan az f függvényértékek az origóhoz közeli pontokban két kicsi szám hányadosa. Most azt kell megmutatnunk, hogy nem igaz az, hogy minden ilyen hányados közel van a 0-hoz.

A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint elég lenne olyan, a $(0,0)$ ponthoz tartó (x_n, y_n) $(n \in \mathbb{N})$ pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek sorozatának a határértéke nem egyenlő a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0) = 0$ függvényértékkel.

Vegyük észre, hogy ha f értékeit például az $y = x$ egyenes pontjaiban tekintjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(x,y) = f(x,x) = \frac{2x\cdot x}{x^2+x^2} = 1 \qquad \big(x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\big).$$

Így, ha $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, akkor a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0), \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$$

de $f(x_n,y_n) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, tehát $f(x_n,y_n) \to 1$, ha $n \to +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0,0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban.

3. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \textit{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \textit{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f \notin C\{(0,0)\}$.

Megoldás. Három esetet fogunk megkülönböztetni:

- f leszűkítése az $y = 0$ egyenesre: $\varphi(x) := f(x, 0) = 0 \ \ (x \in \mathbb{R})$ folytonos függvény.
- f leszűkítése az $x = 0$ egyenesre: $\varphi(y) := f(0, y) = 0 \ \ (y \in \mathbb{R})$ folytonos függvény.
- f leszűkítése az $y = mx$ egyenesekre, ahol $m \neq 0$ rögzített paraméter:

  $$\varphi(x) := f(x, mx) = \frac{x^2 \cdot (mx)}{x^4 + (mx)^2} = m \cdot \frac{x}{x^2 + m^2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

  Mivel $f(0, 0) = 0$, így $\varphi(0) = 0$, azaz a fenti összefüggés is igaz $x = 0$-ra. Tehát φ folytonos függvény tetszőleges $m \neq 0$ paraméter esetén.

A feladat első állítása szerint, ha egyenes mentén az origóhoz közeledünk, akkor a függvényben szereplő hányados értéke nullához tart.

A feladat második állítása szerint nem igaz az, hogy az origóhoz közeli *tetszőleges* pontokban felvett függvényértékek is közel vannak a $(0, 0)$ pontban felvett $f(0, 0) = 0$ függvényértékhez. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint elég lenne olyan, a $(0, 0)$ ponthoz tartó $(x_n, y_n) \ \ (n \in \mathbb{N})$ pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek sorozatának a határértéke nem egyenlő a $(0, 0)$ pontban felvett $f(0, 0) = 0$ függvényértékkel.

Vegyük észre, hogy most az $y = mx^2$ parabolák mentén kaphatunk ilyen sorozatokat, mivel

$$f(x, y) = f(x, mx^2) = \frac{x^2 \cdot (mx^2)}{x^4 + (mx^2)^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

nem függ az x értéktől. Legyen például $m = 1$, és vegyük például az

$$\big(x_n, y_n\big) = \big(x_n, x_n^2\big) := \left(\frac{1}{n}, \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozatot. Világos, hogy ez a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \to (0, 0), \quad \text{ha} \ \ n \to +\infty,$$

de $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, tehát $f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$, ha $n \to +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0, 0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények határértéke

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f'$ pontban ***van határértéke***, ha $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, \ 0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \text{ pontban } |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Tétel. **(A határértékre vonatkozó átviteli elv)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f = A \iff \forall (x_k, y_k) \colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{(a_1, a_2)\}, \ \lim_{k\to+\infty} (x_k, y_k) = (a_1, a_2) \text{ esetén } \lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = A.$$

Az átviteli elvből következik, hogy ha van két olyan $(x_k, y_k), (u_k, v_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{(a_1, a_2)\}$ sorozat, amely az (a_1, a_2) ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) \neq \lim_{k\to+\infty} f(u_k, v_k),$$

akkor az f függvénynek nincs határértéke az (a_1, a_2) pontban.

4. Feladat. *Lássuk be, hogy*

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \qquad\qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$$

Megoldás. A definíció alapján fogjuk a határértékeket igazolni.

a) Azt kell megmutatni, hogy

$$(\#)\qquad \begin{gathered} \forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\delta > 0, \text{hogy } \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}, \\ 0 < \Big\|(x,y)-(0,0)\Big\| < \delta \ \text{ esetén } \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ pontban

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \left(|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} \text{ miatt}\right) \le$$

$$\le \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{1}{2}\Big\|(x,y)\Big\| < \varepsilon}_{\|(x,y)\|<2\varepsilon}.$$

Így, ha $\delta := 2\varepsilon$, akkor $(\#)$ teljesül.

Megjegyzés. A számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt{x^2y^2} \le \frac{x^2+y^2}{2} \qquad\Longrightarrow\qquad |xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} \qquad\qquad (x,y\in\mathbb{R}).$$

b) Azt kell megmutatni, hogy

$$(\#\#)\qquad \begin{gathered} \forall\,\varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\,\delta > 0,\ \text{hogy } \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}, \\ 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \ \text{ esetén } \left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} - 2\right| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ pontban

$$\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} - 2\right| = \frac{\left|(x^2+y^2+1) - 2\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right|}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+1}-1 = \left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így, ha $\delta := \varepsilon$, akkor $(\#\#)$ teljesül.

5. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) *Az*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ *pontban!*

b) *A*

$$g(x,y) := \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}\Big)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ *pontban!*

Megoldás.

a) A folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(\star) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0 : \forall\, (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \text{ pontban} \quad \Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, akkor

$$\Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| = \left|\frac{x^4 y}{\Big(x^2+y^2\Big)^2} - 0\right| = |y| \cdot \frac{\Big(x^2\Big)^2}{\Big(x^2+y^2\Big)^2} \leq |y| \cdot \frac{\Big(x^2+y^2\Big)^2}{\Big(x^2+y^2\Big)^2} =$$

$$= |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így, ha $\delta := \varepsilon$, akkor $(\star)$ teljesül.

b) A határértékre vonatkozó átviteli elv szerint elegendő két olyan, a $(0,0)$ ponthoz tartó sorozatot találni, amelyekre a függvényértékek sorozatának a határértéke különböző.

Rögzített $m \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük g értékeit az $y = mx$ egyenletű egyenes pontjaiban:

$$g(x,y) = g(x, mx) = \frac{x^4}{\big(x^2 + (mx)^2\big)^2} = \frac{1}{\big(1+m^2\big)^2} \qquad \Big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\Big).$$

Ekkor

- ha $m = 0$ és így $(x_n, y_n) := \Big(\frac{1}{n}, 0\Big) \to (0,0) \quad \Longrightarrow \quad g(x_n, y_n) = \dfrac{1}{(1+0^2)^2} = 1,$
- ha $m = 1$ és így $(u_n, v_n) := \Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big) \to (0,0) \quad \Longrightarrow \quad g(u_n, v_n) = \dfrac{1}{(1+1^2)^2} = \dfrac{1}{4}.$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (0,0) = \lim_{n\to+\infty} (u_n, v_n),$$

de

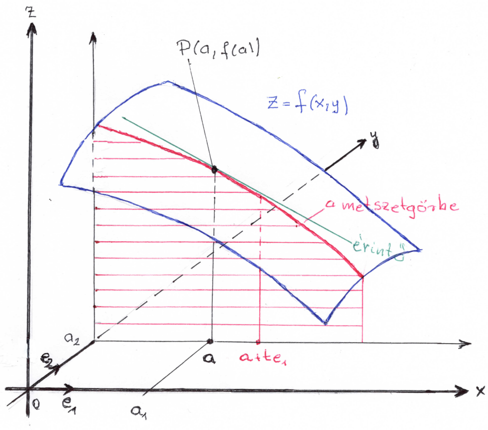
$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n, y_n) = 1 \neq \frac{1}{4} = \lim_{n\to+\infty} g(u_n, v_n),$$

ezért a g függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények parciális deriváltjai

Emlékeztető. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{és} \quad a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f.$$



A függvény grafikonja a térben a $z = f(x, y)$ egyenletű felület. Fektessünk az a ponton át az x tengellyel párhuzamos egyenest. Ennek pontjai az xy síkban

$$(a_1 + t, a_2) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Vegyük a függvény értékeit ezekben a pontokban, és képezzük velük az

$$F_x(t) := f(a_1 + t, a_2)$$

valós-valós függvényt. Ez a függvény értelmezhető a $t = 0$ pontnak egy $K(0)$ környezetében, mert $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Az F_x függvény képe egy, a felületen futó (metszet)görbe, vagyis a $z = f(x, y)$ egyenletű felület és az $y = a_2$ (x, z tetszőleges) egyenletű sík metszésvonala. ***Az f függvény x változó szerinti parciális deriváltját az a pontban*** (jele: $\boldsymbol{\partial_x f(a)}$ vagy $\boldsymbol{\partial_1 f(a)}$) úgy értelmezzük, mint ***az F_x függvény deriváltja a 0 pontban***, feltéve, hogy a derivált létezik, azaz

$$\partial_x f(a) := \partial_1 f(a) := F_x'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F_x(t) - F_x(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

$F_x'(0)$ a metszetgörbe $P\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintőjének a meredeksége.

Az y változó szerinti parciális deriváltat hasonló módon értelmezzük: $F_y(t) := f(a_1, a_2 + t)$ $(t \in K(0))$, és

$$\partial_y f(a) := \partial_2 f(a) := F_y'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F_y(t) - F_y(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

Egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény i-edik ($i = 1, 2$) változója szerinti parciális deriváltját az $a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban úgy számítjuk ki, hogy az a pont koordinátáit az i-edik kivételével rögzítjük, és az így kapott valós-valós függvényt deriváljuk (ha az deriválható).

Legyen f értelmezve az $a \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha rögzített $i = 1, 2$ esetén a $\partial_i f$ parciális derivált létezik az a pont egy környezetében és a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvénynek létezik a j-edik ($j = 1, 2$) változó szerinti parciális deriváltja az a pontban, akkor a $\partial_{ij} f(a) := \partial_i \partial_j f(a) := \partial_j \big(\partial_i f\big)(a)$ számot (mint $\partial_i f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény a-beli j-edik változó szerinti parciális deriváltját) a függvény a-beli ij-edik ***másodrendű parciális deriváltjának*** nevezzük.

6. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!*

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \qquad (x, y > 0).$$

Megoldás. Ha x szerint deriválunk, akkor y rögzített és x-et tekintjük változónak:

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2x \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot y}{(xy)^2} = \frac{2x^2 y - x^2 y + y^4}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y + y^4}{x^2 y^2} = \frac{x^2 + y^3}{x^2 y}.$$

Ha y szerint deriválunk, akkor x rögzített és y-et tekintjük változónak:

$$\partial_y f(x, y) = \frac{-3y^2 \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot x}{(xy)^2} = \frac{-3xy^3 - x^3 + xy^3}{x^2 y^2} = \frac{-2xy^3 - x^3}{x^2 y^2} = -\frac{x^2 + 2y^3}{xy^2}.$$

7. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := x^3y + x^2y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a függvény másodrendű parciális deriváltjait az $(x,y) = (1,0)$ *pontban!*

Megoldás. Először kiszámoljuk az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén:

$$\partial_x f(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 + 1,$$
$$\partial_y f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y.$$

Ha a fenti függvényeket tovább deriváljuk x és y szerint, akkor megkapjuk f másodrendű parciális deriváltjait minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\partial_{xx} f(x,y) = \partial_x(\partial_x f)(x,y) = \partial_x(3x^2y + 2xy^2 + 1) = 6xy + 2y^2,$$
$$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_y(\partial_x f)(x,y) = \partial_y(3x^2y + 2xy^2 + 1) = 3x^2 + 4xy,$$
$$\partial_{yx} f(x,y) = \partial_x(\partial_y f)(x,y) = \partial_x(x^3 + 2x^2y + 2y) = 3x^2 + 4xy,$$
$$\partial_{yy} f(x,y) = \partial_y(\partial_y f)(x,y) = \partial_y(x^3 + 2x^2y + 2y) = 2x^2 + 2.$$

Végül az $(x,y) = (1,0)$ behelyettesítéssel megkapjuk a végeredményt:

$$\partial_{xx} f(1,0) = 0, \quad \partial_{xy} f(1,0) = 3, \quad \partial_{yx} f(1,0) = 3, \quad \partial_{yy} f(1,0) = 4.$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a vegyes parciális deriváltak megegyeznek!

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények iránymenti deriváltjai

Emlékeztető. A parciális deriváltaknál az e_i kanonikus vektorokkal párhuzamos „irányokban" deriváltuk az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény értékeiből keletkezett valós-valós függvényt az a pontban. Ezt úgy fogjuk általánosítani, hogy egy tetszőleges irányban csináljuk ugyanezt.

Egy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény minden $v = (v_1, v_2)$ egységvektor $(v_1^2 + v_2^2 = 1)$ szerint képezhetjük a v irányú iránymenti deriváltat valamely $a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban. Az

$$F_v\colon K(0) \ni t \mapsto f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = f(a + tv)$$

valós-valós függvény $t = 0$ pontban vett deriváltját (amennyiben létezik) nevezzük ***az f függvény v irányú iránymenti deriváltjának az a pontban***.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, illetve az f függvénynek léteznek a parciális deriváltjai egy $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetben, és ezek folytonosak az a pontban. Ekkor az f függvénynek az a pontból induló tetszőleges $v = (v_1, v_2)$ egységvektor irányban létezik az iránymenti deriváltja, és*

$$\partial_v f(a) = \partial_1 f(a) \cdot v_1 + \partial_2 f(a) \cdot v_2.$$

8. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$a = (a_1, a_2) = (1,1)$ *és* v *az* x*-tengely pozitív ágával* α *szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor.*

a) *Határozzuk meg a definíció alapján a* $\partial_v f(a)$ *iránymenti deriváltat!*

b) *Ellenőrizzük a kapott eredményt a tanult tétellel!*

Megoldás. Az origóból kiinduló irányokat a

$$v := \big(v_1, v_2\big) = \big(\cos\alpha, \sin\alpha\big) \quad \big(\alpha \in [0, 2\pi)\big)$$

vektorokkal adjuk meg. Ezek egységvektorok, mert

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1 \qquad \big(\alpha \in [0, 2\pi)\big).$$

a) Tekintsünk egy rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméterrel megadott v vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt kell megmutatni, hogy a

$$\begin{aligned} F_v(t) :&= f(a + tv) = f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = f(1 + t\cos\alpha, 1 + t\sin\alpha) = \\ &= (1 + t\cos\alpha)^2 - (1 + t\cos\alpha)(1 + t\sin\alpha) + (1 + t\sin\alpha)^2 = \\ &= \big(1 - (\sin\alpha)(\cos\alpha)\big) \cdot t^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot t + 1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

valós-valós függvény deriválható a $t = 0$ pontban.

Ez viszont nyilván igaz, és $F'(0) = \sin\alpha + \cos\alpha$. Ezért az f függvénynek létezik a v irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. Így minden rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén

$$\partial_v f(1, 1) = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

b) Először az iránymenti derivált kiszámolására vonatkozó állítás feltételeit ellenőrizzük. Az f függvény parciális deriváltfüggvényei léteznek:

$$\partial_1 f(x, y) = 2x - y, \quad \partial_2 f(x, y) = -x + 2y \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

és folytonosak minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. A szóban forgó tétel szerint a kérdezett iránymenti derivált létezik, és minden $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméter esetén

$$\partial_v f(1, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 f(1, 1) \\ \partial_2 f(1, 1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Ez megegyezik a definíció alapján kapott eredménnyel.

9. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x, y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ *pontban a* $u = (1, 2)$ *vektor által meghatározott irány mentén!*

Megoldás. Az iránymenti derivált kiszámítására vonatkozó tételt alkalmazzuk. Mindkét változó szerinti elsőrendű parciális deriváltak léteznek minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$\partial_x f(x, y) = -2\frac{y^3}{e^{2x+1}}, \qquad \partial_y f(x, y) = \frac{3y^2}{e^{2x+1}}.$$

Ezek a függvények minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban folytonosak és

$$f'(x, y) = \Big(\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)\Big) \quad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

Az f függvénynek tehát a P pontban minden irányban létezik az iránymenti deriváltja és

$$\partial_v f(P) = \langle f'(P), v\rangle,$$

ahol

$$f'(P) = f'\Big(-\tfrac{1}{2}, 1\Big) = \Big(\partial_x f\Big(-\tfrac{1}{2}, 1\Big), \partial_y f\Big(-\tfrac{1}{2}, 1\Big)\Big) = (-2, 3)$$

és v az u irányú euklideszi normában vett egységvektor, azaz

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Így

$$\partial_v f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left\langle (-2, 3), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$