# Analízis II. (F) gyakorlatok

## Programtervező informatikus BSc 2018
## Szoftverfejlesztő (C) specializáció

2021–2022. tanév őszi félév

# 1. gyakorlat

# Differenciálszámítás 1.

## Szükséges ismeretek

- A derivált fogalma.
- A deriválási szabályok.
- Nevezetes függvények deriváltja.

## Feladatok

**1. Feladat.** A definíció alapján lássuk be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsuk ki $f'(a)$-t, ha

a) $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 1,$

b) $f(x) := \sqrt{x} \quad \big(x \in [0, +\infty)\big), \qquad a := 2,$

c) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad a := 3,$

d) $f(x) := x|x| \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 0,$

e) $f(x) := \begin{cases} 1 - x, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 - x + 1, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad a := 0.$

**2. Feladat.** Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \qquad (x > 0),$

c) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5\,x^5} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big),$

d) $f(x) := x^a + a^x + ax + \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} \qquad (x > 0),\ \ a > 0$ paraméter.

**3. Feladat.** Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := x^2 \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) \qquad (x > 0),$

c) $f(x) := \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5} \qquad (x \in \mathbb{R}),$

d) $f(x) := \dfrac{2^x + 1}{2 + \sin x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$

**4. Feladat.** Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := \left(5x^2 + 3x\right)^{2020} \qquad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \qquad (x \geq 0)$,

c) $f(x) := \sin \dfrac{x^2 + 1}{x + 3} \qquad (x > -3)$,

d) $f(x) := \sin^2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

**5. Feladat.** Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények differenciálhatók, és számítsuk ki a deriváltfüggvényeiket!

a) $f(x) := \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1-x} \qquad (x > 0)$,

b) $f(x) := \left(\ln x\right)^{x+1} \qquad (x > 1)$.

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** A definíció alapján lássa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

a) $f(x) := \dfrac{1}{x^2} \quad (x < 0), \qquad a := -1$,

b) $f(x) := \begin{cases} x^3 + x, & \text{ha } x \leq 0, \\ e^x - 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \qquad a := 0.$

**2. Feladat.** Adja meg a következő függvények deriváltját!

*a)* $f(x) := x^2 e^{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

*b)* $f(x) := \log_2 \left(\dfrac{x + 2}{x - 1}\right) \quad (x > 1)$,

*c)* $f(x) := \sin \sqrt{2^x + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

*d)* $f(x) := \dfrac{\cos(\ln 2x)}{x^2 \ln x} \quad (x > 0)$.

**3. Feladat.** Adja meg a következő függvények deriváltját!

*a)* $f(x) := x^x \quad (x > 0)$,

*b)* $f(x) := (x^3 + x)^{\ln x} \quad (x > 1)$.

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** A definíció alapján lássa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

a) $f(x) := 3x^2 - x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 3$,

b) $f(x) := \sqrt{x + 1} \quad (x > -1), \qquad a := 3$,

c) $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 0$,

d) $f(x) := \frac{2}{x} + 4 \quad (x > 0), \qquad a := 2$,

e) $f(x) := \begin{cases} x^3 - x, & \text{ha } x < 1, \\ x^2, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases} \qquad a := 1,$

f) $f(x) := \begin{cases} 2\sin x, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 + 2x, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad a := 0.$

**2. Feladat.** Számítsa ki az

$$f(x) := \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \quad (x > 0)$$

függvény deriváltfüggvényét. (Egyszerűsítsen is.)

**3. Feladat.** Adja meg a következő függvények deriváltját!

*a)* $f(x) := \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1 + x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}),$

*b)* $f(x) := \dfrac{e^x}{1 + e^x} \quad (x \in \mathbb{R}),$

*c)* $f(x) := \sin\sqrt{1 + x^3} \quad (x > -1),$

*d)* $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}} \quad (x > 0),$

*e)* $f(x) := \ln\big(e^{-x}\sin x\big) \quad (0 < x < \pi),$

*f)* $f(x) := \sqrt{1 + \sin^2 x} \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$

*g)* $f(x) := e^x \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$

*h)* $f(x) := x^2\sqrt[3]{x} \quad (x > 0),$

*i)* $f(x) := (x+2)^8(x+3)^6 \quad (x \in \mathbb{R}),$

*j)* $f(x) := \big(\sin^3 x\big) \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$

*k)* $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}} \quad (x > 0),$

*l)* $f(x) := \dfrac{\sin(2x^2)}{3 - \cos(2x)} \quad (x \in \mathbb{R}),$

*m)* $f(x) := \ln(x^2 e^x) \quad (x > 0),$

*n)* $f(x) := e^{\cos x} + \cos(e^x) \quad (x \in \mathbb{R}),$

*o)* $f(x) := \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}} \quad (x > 0),$

*p)* $f(x) := \ln\big(\cos x\big) \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$

*q)* $f(x) := \sqrt[5]{x\cos x} \quad (x > 0),$

*r)* $f(x) := \sin^2\Big(\ln\big(\sqrt{1 + \cos^2 x} + 1\big)\Big) \quad (x \in \mathbb{R}).$

**4. Feladat.** Adja meg a következő függvények deriváltját!

*a)* $f(x) := \big(1 + e^{3x+1}\big)^{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}),$

*b)* $f(x) := (2 + \sin x)^{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R}),$

*c)* $f(x) := x^{\sqrt{x}} \quad (x > 0),$

*d)* $f(x) := \sin\big(x^{\cos x}\big) \quad (x > 0).$

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Hol deriválhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat!

*a)* $f(x) := |3x - 1| \quad (x \in \mathbb{R}),$

*b)* $f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}),$

*c)* $f(x) := \ln|x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$

*d)* $f(x) := x^2(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign}|x - 1|) \quad (x \in \mathbb{R}).$

**2. Feladat.** Legyen $\alpha$ valós paraméter. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat!

**3. Feladat.** Tegyük fel, hogy a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Fejezze ki az $f$ függvény deriváltját $g$ segítségével, ha

a) $f(x) := g^2(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := g\big(g(x)\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$,

c) $f(x) := \ln|g(x)| \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid g(y) = 0\}\big)$.

**4. Feladat.** Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki $h'$-t $f$ és $g$ segítségével, ha

a) $h(x) := f\big(g(\sin x)\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$,

b) $h(x) := \log_{f(x)}\big(g(x)\big) \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\}\big)$.

**5. Feladat.** Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki $h'$-t $f$ és $g$ segítségével, ha

a) $h(x) := f\big(g(\sin x)\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$,

b) $h(x) := \log_{f(x)}\big(g(x)\big) \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\}\big)$.

**6. Feladat.** Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a következő határértékeket!

$$a) \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}, \qquad\qquad b) \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^2 + x - 2}.$$

**7. Feladat.** Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az

$$a) \quad f(x) := g(x)(x - a) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad\qquad b) \quad f(x) := g(x)|x - a| \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény deriválható az $a$ pontban?

## 2. gyakorlat

# Differenciálszámítás 2.

## Szükséges ismeretek

- Az érintő fogalma, egyenlete.
- Az inverz függvényre vonatkozó deriválási szabály,
- Egyoldali pontbeli deriváltak.
- A Rolle- és a Lagrange-féle középértéktétel.

## Feladatok

**1. Feladat.** Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} \qquad (x > -1).$$

a) Vizsgáljuk meg deriválhatóság szempontjából az $f$ függvényt, és határozzuk meg az $f'$ deriváltfüggvényét!

b) Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának a $\big(0, f(0)\big)$ pontban van érintője, és írjuk fel az érintőegyenes egyenletét!

**2. Feladat.** Igazoljuk, hogy az alábbi függvények invertálhatók és inverzei differenciálhatók! Számítsuk ki az $(f^{-1})'$ függvény értékét a megadott $b$ pontban!

a) $f(x) := x^3 + x \ \ (x \in \mathbb{R}), \qquad b := -2,$

b) $f(x) := 2x + \ln(x^2+1) \ \ (x > 0), \qquad b := 2 + \ln 2.$

**3. Feladat.** Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := \sqrt{e^{2x-1}+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvények invertálható, inverze differenciálható és határozzuk meg az inverz függvényének deriváltját!

**4. Feladat.** Állapítsuk meg, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvények a megadott $a$ pontokban!

$$a)\ f(x) := \begin{cases} x^2+1, & \text{ha } x < 0, \\ \ln(x^2+1), & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad a = 0,$$

$$b)\ f(x) := \begin{cases} 2^x, & \text{ha } x < 1, \\ 2, & \text{ha } x = 1, \\ \sqrt{x^3+3}, & \text{ha } x > 1, \end{cases} \qquad a = 1,$$

$$c)\ f(x) := \begin{cases} \cos^2 x, & \text{ha } x \le \frac{\pi}{2}, \\ (x - \frac{\pi}{2})^2, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad a = \frac{\pi}{2},$$

$$d)\ f(x) := \begin{cases} x^3 + 1, & \text{ha } x \le 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \qquad a = 0.$$

**5. Feladat.** Megadható-e olyan $a$ és $b$ paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 + b, & \text{ha } x < 1, \\ \dfrac{a}{x}, & \text{ha } x \ge 1. \end{cases} \qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} \sin ax + b, & \text{ha } x \le 0, \\ e^{x^2} + x, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

**6. Feladat.** Legyen $a, b \neq 1$ két pozitív szám. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := a^x + b^x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek legfeljebb két zérushelye lehet!

**7. Feladat.** Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \qquad (x > 0).$$

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Írja fel az

$$f(x) := \cos \frac{x-1}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonjának az $a = \frac{1}{2}$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!

**2. Feladat.** Igazolja, hogy az alábbi függvény invertálható és inverze differenciálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon! Számítsa ki a függvény inverzének deriváltja a $b = 1 + \frac{\pi}{2}$ pontban!

$$f(x) := x + \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

**3. Feladat.** Megadható-e olyan $a$ és $b$ paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvény?

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 - ax + b\cos(x+1), & \text{ha } x < -1, \\ \dfrac{2a}{x^2+1} + e^{bx+b}, & \text{ha } x \ge -1. \end{cases}$$

**4. Feladat.** Igazolja, hogy az $f(x) := x^7 + 14x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvénynek pontosan egy zérushelye van!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Számítsa ki a következő függvény deriváltját, és írja fel a függvény grafikonjának az $a = 2$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!

$$f(x) := \frac{1}{\ln^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \qquad (x > 1)$$

**2. Feladat.** Írja fel az $f$ függvény grafikonjának az $a$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!

a) $f(x) := \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a = 1/2,$

b) $f(x) := \dfrac{\sin\sqrt{1+x^2}}{x+3} \quad \big(x \in (-3, +\infty)\big), \qquad a = 0,$

c) $f(x) := (x+2)^{x^2+1} \quad (x > -2), \qquad a = -1,$

d) $f(x) := x^{\ln x} \quad (x > 0), \qquad a = e^2.$

**3. Feladat.** A logaritmikus deriválás segítségével számítsa ki a következő függvények deriváltját!

$$a) \quad f(x) := \frac{x^4\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}} \quad (x \neq 0), \qquad b) \quad f(x) := \frac{(2x+3)^8(x+4)^5}{x^x(3x+1)^3} \quad (x > 0).$$

**4. Feladat.** Igazolja, hogy az alábbi függvény invertálható és inverze differenciálható! Számítsa ki a függvény inverzének deriváltja a $b = 2$ pontban!

$$f(x) := x^5 + x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

**5. Feladat.** Igazolja az inverz kapcsolat segítségével, hogy az alábbi függvények invertálhatók, inverzük differenciálható és határozza meg az inverz függvényük deriváltját!

$$a) \quad f(x) := 3\,e^{\sqrt[3]{x}} - 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad b) \quad f(x) := e^{e^x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**6. Feladat.** Állapítsa meg, hogy differenciálhatóak-e az alábbi függvények a megadott pontokban!

$$a) \quad f(x) := \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & \text{ha } x \leq 1, \\ e^{1-x}, & \text{ha } x > 1, \end{cases} \qquad a = 1,$$

$$b) \quad f(x) := \begin{cases} \sin^2 x, & \text{ha } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x^2 - \pi x, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad a = \frac{\pi}{2},$$

$$c) \quad f(x) := \begin{cases} e^x, & \text{ha } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 3 - \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x > 1, \end{cases} \qquad a_1 = 0,\ a_2 = 1,$$

$$d) \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{4x+5}{x+1}, & \text{ha } x < -2, \\ 1 - x, & \text{ha } -2 \leq x \leq 2, \\ \cos\big(\pi(x-1)\big), & \text{ha } x > 2, \end{cases} \qquad a_1 = -2,\ a_2 = 2,$$

$$e) \quad f(x) := \begin{cases} \sin(x^2 + \pi), & \text{ha } x \leq 0, \\ x\ln(x+1), & \text{ha } x > 0, \end{cases} \qquad a = 0.$$

**7. Feladat.** Megadható-e olyan $a$ és $b$ paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + a, & \text{ha } x < 0, \\ bx^3 + ax^2 + bx, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} a + x - x^2, & \text{ha } x < 0, \\ e^{bx} - a, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$$

$$c)\quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} + a, & \text{ha } x < 0, \\ \ln(\sin x + b), & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad d)\quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{ha } x < 1, \\ \cos\left(\frac{x-1}{2}\right), & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

**8. Feladat.** Megadható-e olyan $a$ és $b$ paraméter, hogy differenciálhatók legyen a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} a - \dfrac{bx}{x^2+1}, & \text{ha } x < 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{ax} + bx, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

**9. Feladat.** Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -16 \leq x \leq 2, \\ -x^2 + 6x - 6, & \text{ha } 2 < x \leq 8. \end{cases}$$

a) Teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei a $[-6, 6]$ intervallumon?

b) Van-e zérushelye $f'$-nek a $(-6, 6)$ intervallumon?

**10. Feladat.** Legyen

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Igazolható, hogy $f(-1) = f(1)$, de nincs olyan pont $-1$ és $1$ között, ahol a függvény deriváltja nulla. Ez pedig a Rolle-féle középértéktételnek ellenmond. Hol hibádzik az előző okfejtés?

**11. Feladat.** Legyen

$$f(x) := x(x+1)(x+2)(x+3) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Igazoljuk, hogy az $f'$ függvénynek pontosan három zérushelye van!

**12. Feladat.** Igazolja, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

**13. Feladat.** Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$\sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n} \qquad (x \geq -1).$$

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Adja meg olyan $p$ és $q$ értékeket, hogy az $x$ tengely érintse az

$$f(x) := x^3 + px + q \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

**2. Feladat.** Igazolja, hogy az

$$f(x) := e^x + x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, $f^{-1} \in D^2(\mathbb{R})$, majd számítsa ki az $\left(f^{-1}\right)''(1)$ értékét!

**3. Feladat.** Igazolja, hogy van olyan deriválható $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$h(x^3 + 3x + 1) = x^3 - 2x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül, majd számítsa ki a $h'(-3)$ értéket!

**4. Feladat.** Adott $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$, ill. az $a$ pontban differenciálható $g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény esetén mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{ha } x < a, \\ g(x), & \text{ha } x \geq a \end{cases}$$

függvény deriválható az $a$ pontban?

**5. Feladat.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha $n$ rendre páros, illetve páratlan, akkor a

$$p(x) := x^n + ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak legfeljebb kettő, illetve három gyöke van!

**6. Feladat.** A Rolle-tétel felhasználásával igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$\sin x > \frac{2x}{\pi} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

# 3. gyakorlat

# Függvénytulajdonságok kapcsolata a deriválttal 1.

## Szükséges ismeretek

- A monotonitás és a derivált kapcsolata.
- A lokális szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele.
- A lokális szélsőérték elsőrendű és másodrendű elégséges feltétele.

## Feladatok

**1. Feladat.** Határozzuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az $f$ függvény monoton, ha

a) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\})$.

**2. Feladat.** Számítsuk ki az

$$f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

**3. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2 + 1} \qquad \left(x \in \left[-\tfrac{1}{2}, 2\right]\right)$$

függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit!

**4. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha két pozitív szám összege állandó, szorzatuk akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő!

**5. Feladat.** Határozzuk meg egy $R$ sugarú félkörbe írt legnagyobb területű téglalap méreteit, ha a téglalap egyik oldala a félkör átmérőjén fekszik!

**6. Feladat.** Hogyan kell megválasztani egy 1 liter térfogatú, henger alakú konzervdoboz méreteit, hogy a gyártási költsége minimális legyen?

## Házi feladatok

**1. Feladat.** Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az $f$ függvény monoton, ha

a) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 8\}\big)$,

b) $f(x) := \dfrac{e^x}{x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$.

**2. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2+x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek

a) a lokális szélsőértékeit,

b) az abszolút szélsőértékeit a $[-2, 0]$ halmazon!

**3. Feladat.** Keresse meg azt a maximális területű téglalapot az első síknegyedben, amelynek az egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló két oldala a koordinátatengelyekre illeszkedik, és az origóval szemközti csúcs az

$$f(x) := e^{-3x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

függvény grafikonján helyezkedik el!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az $f$ függvény monoton, ha

*a)* $f(x) := 1 - 4x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

*b)* $f(x) := x^2(x-3) \quad (x \in \mathbb{R})$,

*c)* $f(x) := x \ln x \quad (x > 0)$,

*d)* $f(x) := \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{1+x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\big)$,

*e)* $f(x) := 2e^{x^2-4x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

*f)* $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

*g)* $f(x) := \ln \dfrac{x^2}{(1+x)^3} \quad (x > -1,\ x \neq 0)$,

*h)* $f(x) := (x-3)\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$.

**2. Feladat.** Határozza meg az $f$ függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit, ha

*a)* $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

*b)* $f(x) := \dfrac{x^2}{x-3} \quad (x \neq 3)$,

*c)* $f(x) := x^2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

*d)* $f(x) := x - \ln(1+x) \quad (x > -1)$.

**3. Feladat.** Számítsa ki az $f$ függvény abszolút szélsőértékeit, ha

*a)* $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (-3 \leq x \leq 3)$,

*b)* $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad (-1 \leq x \leq 4)$,

*c)* $f(x) := x^2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

*d)* $f(x) := 2x + \dfrac{200}{x} \quad (0 < x < +\infty)$.

**4. Feladat.** A $6x+y=9$ egyenletű egyenesen keressük meg a $(-3, 1)$-hez legközelebbi pontot!

**5. Feladat.** Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ ponthoz?

**6. Feladat.** Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(3, 5)$ ponton és az első síknegyedből a legkisebb területű részt vágja le!

**7. Feladat.** Mely pozitív szám esetén lesz a szám és reciprokának összege a lehető legkisebb?

**8. Feladat.** Egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

**9. Feladat.** Határozzuk meg egy $R$ sugarú félkörbe írt legnagyobb területű trapéz méreteit, ha a trapéz egyik párhuzamos oldala a félkör átmérőjén fekszik!

**10. Feladat.** A Tisza partján egy 3200 $m^2$ területű, téglalap alakú telket kell bekeríteni. Mekkorára válaszuk a téglalap méreteit, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség? (A folyóparton nem állítunk kerítést.)

**11. Feladat.** Egy ablak alakja egy téglalap és egy fölé állított szabályos háromszögből áll. Kerülete 5 m. Milyennek válasszuk a méreteket, hogy az ablak a legtöbb fényt bocsássa át?

**12. Feladat.** Az R sugarú gömbbe írt kúpok közül keressük meg azt, amelyiknek a térfogata maximális!

**13. Feladat.** Határozzuk meg az 1 literes, felül nyitott legkisebb felszínű henger méreteit!

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Mutassa meg, hogy ha $f \in D(\mathbb{R})$ és $f$ páros (páratlan), akkor $f'$ páratlan (páros)!

**2. Feladat.** Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

**3. Feladat.** Az $\ln' 1 = 1$ egyenlőség alapján bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**4. Feladat.** Vizsgáljuk meg van-e lokális szélsőértéke az

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$$

függvénynek az $x = a$ pontban, ha a $\varphi$ függvény folytonos az $x = a$ pontban, $\varphi(a) \neq 0$ és $n$ egy pozitív egész szám!

**5. Feladat.** Két, egymást derékszögben metsző egyenes egy-egy pontja egyidejűleg kezd a csúcspont felé mozogni. Az egyik 100 m, a másik 60 m távolságban indul a csúcsponttól. Az első sebessége 4 m/s, a másiké 2 m/s. Mikor lesz a két pont egymáshoz legközelebb, és mekkora lesz ekkor egymástól a távolságuk?

**6. Feladat.** Egy 5 m széles csatornán szálfákat úsztatnak. A csatornából egy 2,5 m széles mellékág vezet le, amelynek az iránya az eredetivel derékszöget zár be. Legfeljebb hány méter hosszúságú szálfát tudunk a szóban forgó mellékágra terelni?

**7. Feladat.** Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?

**8. Feladat.** Egy ellipszis két féltengelyének hossza $a$ és $b$. Mekkorák az ellipszisbe írható legnagyobb területű téglalap méretei, ha feltételezzük, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak az ellipszis féltengelyeivel?