5. gyakorlat

ELEMI FÜGGVÉNYEK ÉS TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

Elemi függvények

1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!*

$$\arcsin\frac{1}{2},\quad \arcsin(\sin 10),\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \operatorname{arc\,tg} 1,\quad \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3},\quad \log_{1/4}\frac{1}{1024}.$$

Megoldás.

- $\underline{\arcsin\frac{1}{2}}$: Az $\arcsin := \left(\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$ értelmezés szerint

$$\underset{(x\in[-1,1])}{\arcsin x} = \underset{\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}{y} \iff \sin y = x.$$

Ezért $\arcsin\frac{1}{2} = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = \frac{1}{2} \iff y = \frac{\pi}{6}.$

Így $\underline{\underline{\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}}.$

- $\underline{\arcsin(\sin 10)}$: Az előzőhöz hasonlóan az adódik, hogy

$$\arcsin(\sin 10) = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \iff \sin y = \sin 10.$$

Emlékeztetünk arra, hogy

$$\sin y = \sin z \iff y - z = 2k\pi \ \text{ vagy } \ y + z = (2l+1)\pi \quad (k,l\in\mathbb{Z}). \ \text{ Így}$$

$$\sin y = \sin 10 \iff y - 10 = 2k\pi \ \text{ vagy } \ y + 10 = (2l+1)\pi \quad (k,l\in\mathbb{Z}).$$

Mivel $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ezért a $\pi \approx 3,14$ közelítést felhasználva azt kapjuk, hogy $y = 10 + 2k\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $(\forall\, k\in\mathbb{Z})$. Az első eset tehát nem lehetséges. A második esetben $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pontosan akkor teljesül, ha $l = 1$, azaz $y = -10+3\pi$ (≈ -0.58). Ezzel beláttuk, hogy $\underline{\underline{\arcsin(\sin 10) = -10+3\pi}}.$

- $\underline{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$: Az $\arccos := \left(\cos_{|\,[0,\pi]}\right)^{-1}$ értelmezés szerint

$$\underset{(x\in[-1,1])}{\arccos x} = \underset{(y\in[0,\pi])}{y} \iff \cos y = x.$$

Ezért $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \in [0,\pi] \iff \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff y = 3\cdot\frac{\pi}{4}.$

Így $\underline{\underline{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}}}.$

- $\underline{\operatorname{arc\,tg} 1}$: Az $\operatorname{arc\,tg} := \left(\operatorname{tg}_{|\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$ értelmezés szerint

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{arc\,tg} x & = & y & \iff & \operatorname{tg} y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & & \big(y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\big) & & \end{array}$$

Ezért $\operatorname{arc\,tg} 1 = y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \iff \operatorname{tg} y = 1 \iff y = \frac{\pi}{4}.$

Így $\underline{\underline{\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}}}.$

- $\underline{\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3}}$: Az $\operatorname{arc\,ctg} := \left(\operatorname{ctg}_{|(0,\pi)}\right)^{-1}$ értelmezés szerint

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{arc\,ctg} x & = & y & \iff & \operatorname{ctg} y = x, \\ \big(x \in \mathbb{R}\big) & & (y \in (0,\pi)) & & \end{array}$$

Ezért $\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3} = y \in (0,\pi) \iff \operatorname{ctg} y = \sqrt{3} \iff y = \frac{\pi}{6}.$

Így $\underline{\underline{\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}}}.$

- $\underline{\log_{1/4} \frac{1}{1024}}$: Tetszőleges $0 < a \neq 1$ esetén a $\log_a := (\exp_a)^{-1}$ definícióból és az $\exp_a$ függvény tulajdonságaiból következik, hogy ha $x > 0$, akkor

$$\log_a x = y \in \mathbb{R} \iff \exp_a(y) = a^y = x. \quad \text{Ezért}$$

$$\log_{1/4} \frac{1}{1024} = y \in \mathbb{R} \iff \left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{1}{1024} \iff \left(\frac{1}{2^2}\right)^y = \frac{1}{2^{10}} \iff$$

$$\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \iff 2y = 10 \iff y = 5.$$

Így $\underline{\underline{\log_{1/4} \frac{1}{1024} = 5}}.$

Megjegyzés. A logaritmus tulajdonságai alapján:

$$\log_{1/4} \frac{1}{1024} = \frac{\log_2 \frac{1}{1024}}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 2^{-10}}{\log_2 2^{-2}} = \frac{-10}{-2} = 5.$$

2. Feladat. *Differenciálszámítással igazoljuk, hogy*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in [-1,1]\big).$$

Milyen kapcsolat van az $\arcsin$ *és az* $\arccos$ *függvények grafikonjai között?*

Megoldás. Az sin függvény folytonos és szigorúan monoton növekvő $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$-n. Legyen $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin y = x \in [-1,1]$, azaz $y = \arcsin x$. Mivel $\sin' y = \cos y \neq 0$, ha $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, így az inverz függvény deriválási szabályából:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = (\cos y > 0) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Az cos függvény folytonos és szigorúan monoton csökkenő $[0,\pi]$-n. Legyen $y \in [0,\pi]$ és $\cos y = x \in [-1,1]$, azaz $y = \arccos x$. Mivel $\cos' y = -\sin y \neq 0$, ha $y \in (0,\pi)$, így az inverz függvény deriválási szabályából:

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos' y} = \frac{1}{-\sin y} = (\sin y > 0) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Legyen

$$f(x) := \arcsin x + \arccos x \quad \big(x \in [-1,1]\big).$$

Ekkor $f \in D(-1,1)$. Ha $x \in (-1,1)$, akkor

$$f'(x) = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

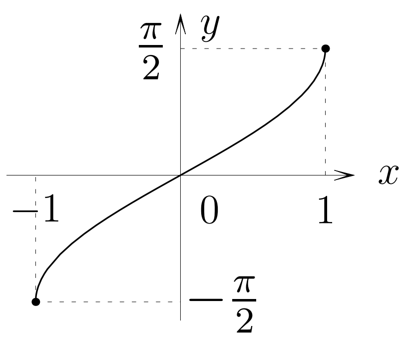
Így $\forall\, x \in (-1,1)\colon f'(x) = 0$. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = c$ $\big(x \in (-1,1)\big)$. Mivel $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, ezért $f(x) = \frac{\pi}{2}$, ha $x \in (-1,1)$. Ez az egyenlőség a ± 1 pontokban is igaz, mert

$$f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$
$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

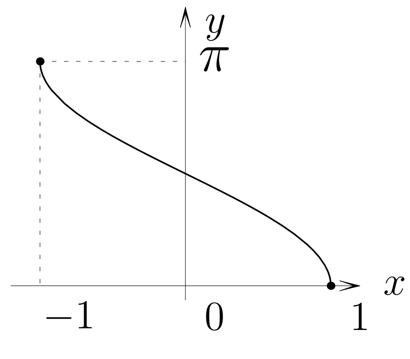
A feladat állítását tehát bebizonyítottuk. A bebizonyított egyenlőségből következik, hogy az arc sin és az arc cos függvények grafikonjai egymásból elemi függvénytranszformációkkal származtathatók. Mivel

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad \big(x \in [-1,1]\big),$$

ezért az arc cos függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az arc sin függvény grafikonját először tükrözzük az x tengelyre, majd a y tengely irányában „felfele” toljuk $\frac{\pi}{2}$-vel. Az arc sin függvény képe az arc cos függvény képéből hasonló módon adódik.



az arc sin függvény



az arc cos függvény

3. Feladat. *Szemléltessük az*

$$f(x) := \arcsin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Megoldás. A sin függvény, következésképpen az f is 2π szerint periodikus. Így f-et elég megvizsgálni egy 2π hosszúságú intervallumon, például $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$-n.

Az arc sin függvény definíciójából következik, hogy

$$\arcsin(\sin x) = y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \iff \sin x = \sin y \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Legyen $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. A $\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény $\uparrow$, ezért a $\sin x = \sin y$ egyenlőség csak $x = y$ esetén teljesül. Így

$$\underline{\underline{f(x) = x, \quad \text{ha} \;\; x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].}}$$

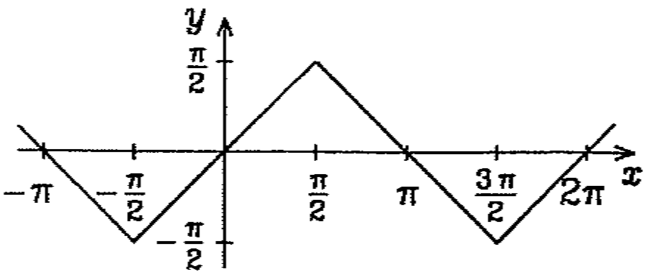
Tegyük fel, hogy $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Ekkor

$$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \quad \text{azaz} \quad -\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}.$$

A $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin y$ egyenlőség csak akkor igaz, ha $\pi - x = y$. Így

$$\underline{\underline{f(x) = \pi - x, \quad \text{ha} \;\; x \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right].}}$$

A fentiek alapján az f függvény grafikonját az alábbi ábrán szemléltetjük:



4. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Megoldás. Legyen $\quad f(x) := \arcsin x - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$

Az elemi függvények deriválhatóságaiból és a deriválási szabályokból az következik, hogy $f \in D(-1,1)$. Most kiszámoljuk $f'(x)$-et. Ha $x \in (-1,1)$, akkor

$$f'(x) = (\arcsin x)' - \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(1 - x^2\right) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Így $\forall\, x \in (-1,1)\colon f'(x) = 0$. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = c \;\big(\forall\, x \in (-1,1)\big)$. Mivel $f(0) = \arcsin 0 - \operatorname{arc\,tg} 0 = 0$, ezért $c = 0$. A feladat állítását tehát bebizonyítottuk.

Teljes függvényvizsgálat

5. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk a következő függvény grafikonját!*

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok.*** f polinomfüggvény, ezért $f \in D^\infty(\mathbb{R})$. f zérushelyei nehezen meghatározhatók, ezért nem fogunk előjelvizsgálatot végezni. A függvény nem páros, páratlan vagy periodikus.

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás.*** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = 3.$$

	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$x>3$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	10	$\downarrow$	-17	$\uparrow$
lok.		$-$		min	

Vegyük észre, hogy 0 nem lokális szélsőértékhely, és f szigorúan monoton csökkenő $(-\infty, 3]$-n.

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás.*** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \ \text{ vagy } \ x = 2.$$

	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	10	$\frown$	-6	$\smile$
		infl.		infl.	

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták.*** A határértékeket most a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben kell megvizsgálni.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^4 - 4x^3 + 10\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

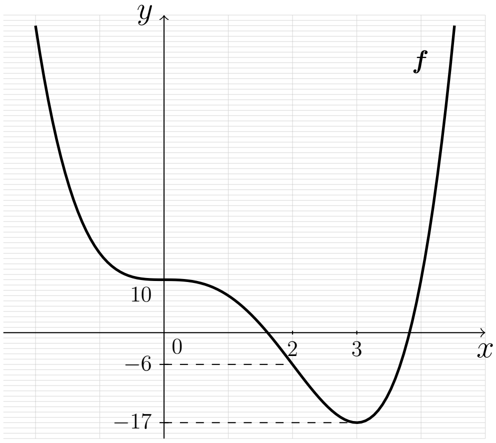
Mivel a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \cdot \left(1 - \tfrac{4}{x} + \tfrac{10}{x^4}\right) = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty$$

határértékek léteznek, de nem végesek, ezért f-nek nincs aszimptotája sem $(+\infty)$-ben, sem $(-\infty)$-ben.

$\boxed{5.}$ ***A függvény grafikonja.*** $\longrightarrow$



6. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk a következő függvény grafikonját!*

$$f(x) := \frac{x^3+x}{x^2-1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}\big)$$

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok***. A deriválási szabályok alapján f minden $x \neq \pm 1$ pontban akárhányszor deriválható. A függvény páratlan, hiszen

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3+x}{x^2-1} = -f(x) \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}\big).$$

Másrészt

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1} = \frac{x(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0.$$

Előjelvizsgálat

	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	$x>1$
f	$-$	$+$	0	$-$	$+$

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás***. Minden $x \neq \pm 1$ valós szám esetén

$$f'(x) = \frac{(3x^2+1)(x^2-1) - (x^3+x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-2)^2-5}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x^2-2)^2 - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 2 \pm \sqrt{5}$$

Mivel csak $2+\sqrt{5} > 0$, így $x = x_1 := \sqrt{2+\sqrt{5}} \approx 2,058$ vagy $x = -x_1 \approx -2,058$.

	$x<-x_1$	$-x_1$	$-x_1<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<x_1$	x_1	$x>x_1$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$-3,33$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	3.33	$\uparrow$
lok.		max				min	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás***. Minden $x \neq \pm 1$ valós szám esetén

$$f''(x) = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)^2 - (x^4-4x^2-1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2-1)\cdot 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	$x>1$
f''	$-$	$+$	0	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$	0	$\frown$	$\smile$
			infl.		

4. ***Határértékek és aszimptoták***. A határértékeket most a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben, ill. a -1 és az 1 pontok bal és jobb oldalán kell megvizsgálni. Mivel tudjuk, hogy a függvény páratlan, így a számítások leegyszerűsödnek.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x}{x^2-1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{2x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{2} = +\infty, \qquad \text{és így} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad (f \text{ páratlan}).$$

$$\lim_{x\to1\pm0} f(x) = \lim_{x\to1\pm0} \frac{x^3+x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1\pm0} \frac{x^3+x}{x+1} \cdot \lim_{x\to1\pm0} \frac{1}{x-1} = \frac{2}{2} \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$$

és így $\lim\limits_{x\to-1\pm0} f(x) = \pm\infty$, hiszen f páratlan.

Mivel a

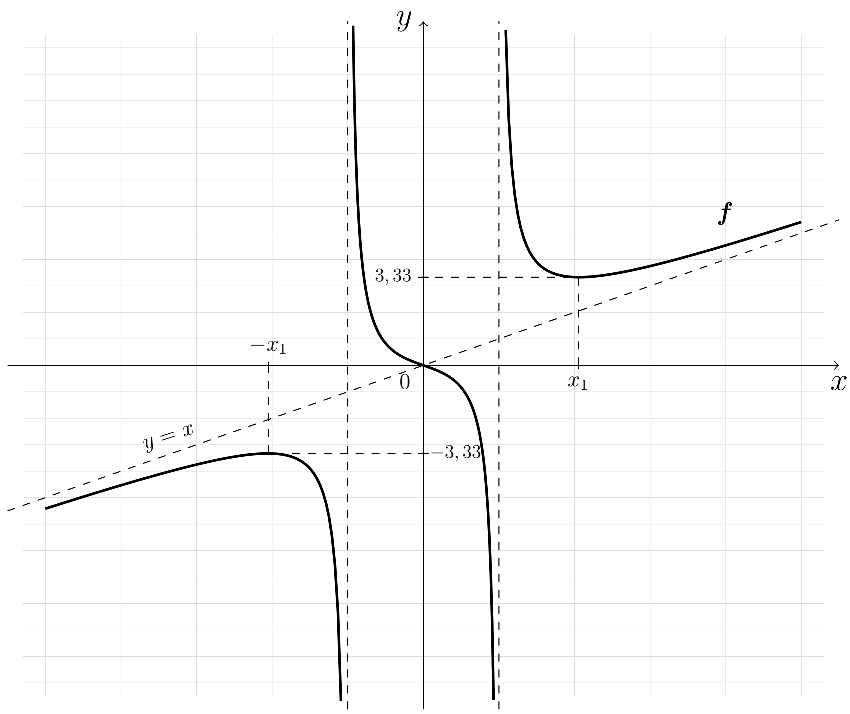
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x}{x^3-x} = \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+1}{3x^2-1} =$$
$$= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{6x} = 1 := A,$$

és

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+x}{x^2-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2x} = 0 := B$$

ezért f-nek a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben van aszimptotája, és ez mindkét esetben az $y = x$ egyenletű egyenes

5. ***A függvény grafikonja***.



7. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az*

$$f(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. **Gauss-görbét***)!*

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok***. $f \in D^{\infty}(\mathbb{R})$, páros függvény és mindenütt pozitív.

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0.$$

	$x<0$	0	$x>0$
f'	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	1	$\downarrow$
lok.		max	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

	$x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	$e^{-1/2}$	$\frown$	$e^{-1/2}$	$\smile$
		infl.		infl.	

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták***. A határértékeket most a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben kell megvizsgálni.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0,$$

azaz létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben, és mindkettő a $B=0$ számmal egyenlő. Tehát f-nek a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben van aszimptotája, és ez mindkét esetben az $y=0$ egyenletű egyenes.

$\boxed{5.}$ ***A függvény grafikonja***.