6. gyakorlat

TAYLOR-POLINOMOK ÉS TAYLOR-SOROK

Emlékeztető. ***Tétel.*** ***(Lineáris közelítés)*** *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in D\{a\} \qquad \iff \qquad \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \quad \textit{és} \quad \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \ \lim\limits_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Az f függvény a pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény az a pont környezetében „jól” közelíthető lineáris függvénnyel. Ennek a lineáris függvénynek a grafikonja az

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

egyenletű egyenes, ami az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli ***érintője***.

Ha $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^n\{a\}$, akkor a

$$T_{n,a}f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot ***az f függvény a ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinomjának*** nevezzük.

Tétel. ***(Taylor-formula)*** *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. Ekkor*

$$\forall\, x \in K(a) \quad \textit{ponthoz} \quad \exists\, \xi \quad a \textit{ és } x \textit{ között}: \qquad f(x) - T_{n,a}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

A fenti képlet jobb oldalán álló függvényt **Lagrange-féle maradéktagnak** *nevezzük.*

1. Feladat. *Legyen*

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad (x > -1) \qquad \textit{és} \qquad A := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}}.$$

a) *Milyen lineáris becslést tudunk adni az f függvényre az $a = 0$ pont környezetében? Becsüljük vele az A értéket, és adjunk hibabecslést!*

b) *Írjuk fel az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon legfeljebb mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!*

c) *A b) pontban kapott becslés felhasználásával adjunk újabb becslést az A számra, és becsüljük meg a közelítés hibáját!*

Megoldás. Vegyük először észre, hogy

$$A := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}} = \frac{1}{10\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}} = \frac{B}{10}, \qquad \text{ahol} \quad B := \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}} = f\Big(\tfrac{3}{100}\Big).$$

A tanult módszerekkel az érték- és hibabecslést B-re érdemes meghatározni, hiszen $3/100$ már az $a = 0$ közelében van, és majd ezekből, tízzel elosztva, megkapjuk az A-ra vonatkozó becsléseket.

a) $\mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$, $a = 0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D(-1, +\infty)$ és minden $x > -1$ pontban

$$f(x) = (1+x)^{-1/3}, \qquad f'(x) = -\tfrac{1}{3}(1+x)^{-4/3}.$$

Ezért $f(0) = 1$ és $f'(0) = -1/3$, amiből a keresett lineáris becslés:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \sim f(0) + f'(0)(x-0) = 1 - \frac{x}{3} \qquad \text{és így} \qquad B = f\left(\tfrac{3}{100}\right) \approx 1 - \frac{\frac{3}{100}}{3} = 0,99.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk, hiszen a lineáris becslésben szereplő elsőfokú polinom megegyezik az $n = 1$-re vonatkozó Taylor-polinommal. Legyen $x = 3/100$. A Taylor-formula szerint $\exists \xi \colon 0 < \xi < x = 3/100$, hogy

$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{f''(\xi)}{2!} x^2.$$

Mivel

$$f''(x) = \frac{4}{9}(1+x)^{-7/3} = \frac{4}{9\sqrt[3]{(1+x)^7}} \qquad (x > -1),$$

így ha $x = 3/100$, akkor

$$|B - 0,99| = \left| f(x) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) \right| = \frac{|f''(\xi)|}{2!} |x|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9\sqrt[3]{(1+\xi)^7}} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^2 <$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9\sqrt[3]{(1+0)^7}} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{10000} = 0,0002.$$

Ennek következtében $A = B/10 \approx 0,099$ és $|A - 0,099| < 0,00002$.

b) Az $f(x) = (1+x)^{-1/3}$ $(x > -1)$ függvény akárhányszor deriválható, és

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(1+x)^{-4/3}, \quad f''(x) = \tfrac{4}{9}(1+x)^{-7/3}, \quad f'''(x) = -\tfrac{28}{27}(1+x)^{-10/3}$$

minden $x > -1$ pontban. Ezért $f(0) = 1$, $f'(0) = -1/3$, $f''(0) = 4/9$, illetve $f'''(0) = -28/27$. Az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja:

$$T_{3,0} f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 = 1 - \frac{1}{3} x + \frac{2}{9} x^2 - \frac{14}{81} x^3.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk. Legyen $x \in \left(0, \tfrac{1}{10}\right]$. Ekkor $\exists \xi_x \colon 0 < \xi_x < x \le 1/10$, hogy

$$f(x) - T_{3,0} f(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} \cdot x^4.$$

Mivel

$$f^{(4)}(\xi_x) = \frac{280}{81} \cdot (1+\xi_x)^{-13/3} = \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+\xi_x)^{13}}} \qquad (x > -1),$$

így

$$\left| f(x) - T_{3,0} f(x) \right| = \frac{|f^{(4)}(\xi_x)|}{4!} \cdot |x|^4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+\xi_x)^{13}}} \cdot |x|^4 <$$

$$< \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81\sqrt[3]{(1+0)^{13}}} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{280}{81} \cdot \frac{1}{10000} = 0,0000144.$$

c) Az előző pontban kapott képlet alapján

$$B = f\Big(\frac{3}{100}\Big) \approx T_{0,3}\Big(\frac{3}{100}\Big) = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{100} + \frac{2}{9}\cdot\Big(\frac{3}{100}\Big)^2 - \frac{14}{81}\Big(\frac{3}{100}\Big)^3 = 0,990195\dot{3}.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk most az $x = 3/100$ esetén. Ekkor $\exists \xi\colon 0 < \xi < x = 3/100$, hogy

$$\Big|f(x) - T_{3,0}f(x)\Big| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\cdot|x|^4 = \frac{1}{24}\cdot\frac{280}{81\sqrt[3]{(1+\xi)^{13}}}\cdot|x|^4 <$$

$$< \frac{1}{24}\cdot\frac{280}{81\sqrt[3]{(1+0)^{13}}}\cdot\Big(\frac{3}{100}\Big)^4 = \frac{1}{24}\cdot\frac{280}{81}\cdot\Big(\frac{3}{100}\Big)^4 = \frac{35}{3}\cdot 10^{-8} < 1,2\cdot 10^{-7}$$

Tehát $A = B/10 \approx 0,0990195\dot{3}$ és $\Big|A - 0,0990195\dot{3}\Big| < 1,2\cdot 10^{-8}$.

Emlékeztető. Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^\infty\{a\}$, akkor a

$$T_af(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots =$$
$$= \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az ***f függvény a ponthoz tartozó Taylor-sorának*** nevezzük.

A Taylor-sor részletösszegei a függvény Taylor-polinomjai.

Tétel. *Minden pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor összegfüggvénye a Taylor-sorával egyenlő a konvergenciahalmaz belsejében.*

2. Feladat. *Az $f(x) = e^x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó negyedfokú Taylor polinomja segítségével adjunk becslést a $\sqrt{e}$ értékére és adjunk hibakorlátot! A becslések kiszámításakor kizárólag a négy alapműveletet szabad használni.*

Megoldás. Az exp függvényt egy 0 középpontú hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük, ezért ennek részletösszegei az exp függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-polinomjai. Ezért az $f(x) = e^x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó negyedfokú Taylor polinomja

$$T_{4,0}f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

amelynek értéke az $x = 1/2$ pontban $1,6484375$. Ezért $\sqrt{e} = e^{1/2} \approx T_{4,0}f(1/2) = 1,6484375$.

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk. Legyen $x = 1/2$. Ekkor igaz, hogy $\exists \xi\colon 0 < \xi < x = 1/2$, hogy

$$f(x) - T_{4,0}f(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot x^5 = \frac{e^\xi}{5!}\cdot x^5.$$

Így
$$\Big|f(x) - T_{4,0}f(x)\Big| = \frac{e^\xi}{5!}\cdot|x|^5 < \frac{2}{120}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^5 = 0,00052084,$$

hiszen $e^\xi < e^{1/2} < 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$. A hibakorlát tehát $0,00052084$.

3. Feladat. *Számítsuk ki* $\sin 1$ *értékét 5 tizedesjegy pontossággal!*

Megoldás. Az, hogy egy számot 5 tizedesjegyre pontosan adunk meg, azt jelenti, hogy a közelítő érték és a valódi érték eltérése nem nagyobb, mint $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

A sin függvényt egy 0 középpontú hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük, ezért ennek részletösszegei a sin függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-polinomjai. Így az $f(x) = \sin x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó $2n+1$-edik Taylor polinomja

$$T_{2n+1,0}f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A Taylor-formula szerint, ha $x = 1$, akkor $\exists \xi \in (0, x)$, hogy

$$(*) \qquad \left|\sin x - T_{2n+1,0}f(x)\right| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)!},$$

hiszen a sin függvény deriváltjai egynél kisebb abszolút értékű függvények.

Most azt a legkisebb $n \in \mathbb{N}$ számot kell megválasztanunk, amelyre fennáll az

$$\frac{1}{(2n+2)!} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 200\,000 \le (2n+2)!$$

egyenlőtlenség. Mivel $8! = 40\,320$ és $10! = 3\,628\,800$, ezért $n = 4$. Így $(*)$-ból az adódik, hogy

$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}\right)\right| \le \frac{1}{10!} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = 0,000005.$$

Tehát $\sin 1$ közelítő értéke 5 tizedesjegy pontossággal

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = 0,841471.$$

4. Feladat.

a) *Mutassuk meg, hogy bármely* P *polinomot bármely* $a \in \mathbb{R}$ *ponthoz tartozó Taylor-sora mindenütt előállítja, azaz ha* P *tetszőleges legfeljebb* n*-edfokú polinom és* $a \in \mathbb{R}$ *egy tetszőlegesen megadott középpont, akkor minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

b) *Írjuk fel az* x^5 *polinomot* $(x-1)$ *hatványai szerint, és számítsuk ki vele* $1,1^5$ *pontos értékét!*

Megoldás.

a) Tekintsünk egy tetszőleges, legfeljebb n-edfokú P polinomot, és egy adott $a \in \mathbb{R}$ számot. A Taylor-formula szerint $\forall x \in \mathbb{R}$-hez $\exists \xi$ szám a és x között, hogy

$$P(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{P^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0,$$

hiszen $P^{(n+1)}(\xi) = 0$, mert $P^{(m)} \equiv 0$ minden $m > n$ esetén. Így igaz az állítás.

b) Legyen $f(x) := x^5 \quad (x \in \mathbb{R})$. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 5x^4, \quad f''(x) = 20x^3, \quad f'''(x) = 60x^2, \quad f^{(4)}(x) = 120x, \quad f^{(5)}(x) = 120.$$

Mivel $f(1) = 1$, $f'(1) = 5$, $f''(1) = 20$, $f'''(1) = 60$, $f^{(4)}(1) = 120$, $f^{(5)}(1) = 120$, így a függvény $a = 1$ ponthoz tartozó ötödfokú Taylor polinomja:

$$T_{5,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 +$$

$$+ \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5.$$

Az előző pont állítása szerint f és $T_{5,1}$ minden pontban megegyeznek, így

$$x^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $x = 1,1$, akkor könnyen megkapjuk a keresett szám pontos értékét:

$$\begin{aligned} 1,1^5 = 1& \\ +0,5& \\ +0,1& \\ +0,01& \\ +0,0005& \\ +0,00001& \\ \hline = 1,61051& \end{aligned}$$

5. Feladat. *Számítsuk ki az* $\operatorname{arc\,tg}$ *függvény deriváltjait a* 0 *pontban!*

Megoldás. Az első két derivált

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{arc\,tg}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért $\operatorname{arc\,tg}'(0) = 1$ és $\operatorname{arc\,tg}''(0) = 0$. A további deriváltak meghatározása így hosszadalmas számolást igényel.

Az előadáson azonban láttuk, hogy az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényt a 0 pont körüli Taylor-sora előállítja $[-1,1]$-en:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \big(x \in [-1,1]\big).$$

Így minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén $\operatorname{arc\,tg}^{(2k)}(0) = 0$ és

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{arc\,tg}^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)!.$$

Emlékeztető. Egy f függvény a-hoz tartozó Taylor-sorának a felírásához kétféle módon járhatunk el.

a) A definíció értelmében meghatározzuk a függvény *összes* magasabb rendű deriváltját az a pontban, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra az $f^{(n)}(a)$ függvényértékeket. Ezek meghatározása általában nem egyszerű feladat, de néhány esetben ki lehet következtetni az első néhány deriválás után. Ezzel fel tudjuk írni a keresett Taylor-sort, de még meg kell határozni a konvergenciahalmazát, illetve megvizsgálni milyen pontokban állítja elő a függvényt.

b) Egy ismert függvény hatványsoros előállításából kiindulva helyettesítéssel, tagonkénti deriválással vagy egyéb módon megkapjuk a függvény hatványsorba fejtését egy $K(a)$ környezetben, amiről azt tanultuk, hogy a függvény Taylor-sora lesz. Ezzel rögtön kapunk egy konvergenciahalmazt, ahol a Taylor-sor előállítja a függvényt.

6. Feladat. *Milyen $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens az*

$$\sum_{n=0}(n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

hatványsor, és mi az összegfüggvénye?

Megoldás. A hatványsor konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum, hiszen a Cauchy–Hadamard-tétel szerint a konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n+1|}} = 1,$$

középpontja $a = 0$, illetve az $x = \pm 1$ pontokban divergens, mert ekkor a kapott sorok általános tagja nem tart nullához.

Az összegfüggvény meghatározásához vegyük észre, hogy a $\sum\limits_{n=1} x^n$ sor konvergenciahalmaza szintén a $(-1, 1)$ intervallum, és

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)' = \left(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \quad \text{és} \quad g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

Ekkor a mértani sor összegére vonatkozó képlet alapján

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} \qquad \big(x \in (-1, 1)\big),$$

és így

$$f(x) = g'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

Beláttuk tehát azt, hogy

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{ha } x \in (-1, 1).$$

7. Feladat. *Adjuk meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát!*

$$a)\quad f(x) := \sin^3 x \quad (x \in \mathbb{R}),\quad a = 0, \qquad\qquad b)\quad f(x) := \frac{1}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R}),\quad a = 1.$$

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

Megoldás.

a) Először a tanult trigonometrikus azonosságokkal fogjuk a $\sin^3 x$ függvényt „linearizálni”. Ha egymásból kivonjuk a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \text{és} \qquad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

azonosságokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Ekkor

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x.$$

Tudjuk, hogy két szinusz, illetve koszinusz összege és különbsége szorzattá alakítható, vagy éppen fordítva, ha ezt a másik irányból nézzük. Az erre vonatkozó négy összefüggésből tekintsük a

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

azonosságot. Ha $y = 3x$, akkor

$$\sin x - \sin 3x = 2\sin(-x)\cos(2x) = -2\sin x \cos 2x.$$

Ezért

$$\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}(\sin x - \sin 3x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Tudjuk, hogy a sin függvényt a 0 pont körüli Taylor-sora előállítja:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így azonnal felírhatjuk a $g(x) := \sin 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorát. Ez a sor is az egész $\mathbb{R}$-en állítja elő g-t, ezért

$$\sin 3x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A fentiek alapján *egyszerűen* megkapjuk a kérdezett Taylor-sort. Elegendő megszorozni a $\sin x$ sor tagjait $3/4$-gyel, a $\sin 3x$ sor tagjait $-1/4$-gyel, és az így kapott két sort tagonként összeadni:

$$\sin^3 x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - 9^n) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) A 6. Feladatban igazoltuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \qquad (-1 < x < 1).$$

Ha x helyett $1-x$-et írünk, akkor

$$\frac{1}{x^2} = \underline{\frac{1}{(1-(1-x))^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(1-x)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n \ (\underbrace{-1 < 1-x < 1}_{0<x<2}).$$

A hatványsorok deriváltjáról szóló tétel alapján, ha $0 < x < 2$, akkor

$$\frac{-2}{x^3} = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n(n+1)(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)(x-1)^n.$$

Így

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{n+2}{2}(x-1)^n \qquad (0 < x < 2).$$

A sor divergens az $x=0$ és $x=2$ pontokban, mert ekkor a kapott sorok általános tagja nem tart nullához.