

## 13. előadás

# TÖBBSZÖRÖS INTEGRÁLOK 2.

### Kettős integrálok kiszámítása integráltranszformációval

A helyettesítéssel való integrálást illetően idézzük fel a valós-valós függvényekre vonatkozó állításokat. Először a határozatlan integrálokkal kapcsolatos **második helyettesítési szabályra** emlékeztetünk:

Legyenek  $I, J \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow I$ ,  $\mathcal{R}_g = I$ ,  $g \in D(J)$ ,  $g' > 0$   $J$ -n (vagy  $g' < 0$   $J$ -n) és az  $(f \circ g) \cdot g' : J \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az  $f$  függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x) dx \underset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} \quad (x \in I).$$

Tegyük fel, hogy egy  $\int f(x) dx$  alakú határozatlan integrált akarunk kiszámítani. Olyan  $g$ -t keresünk, amelyre az  $\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$  integrált ki tudjuk számítani. E cél érdekében általában olyan  $g$  függvényt próbálunk választani, amelyre  $f \circ g \cdot g'$  egyszerűbb, mint  $f$ .

A Newton–Leibniz-formulából következik a helyettesítéssel való integrálás (vagyis az integráltranszformációs formula) határozott integrálokra vonatkozó alábbi változata: Tegyük fel, hogy az  $f \in R[a, b]$  függvénynek van primitív függvénye  $[a, b]$ -n, és  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  olyan folytonos bijekció, ami differenciálható  $(\alpha, \beta)$ -n. Ekkor

$$(*) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g' = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f.$$

A feltételek szerint  $g$  szigorúan monoton  $[\alpha, \beta]$ -n.

Ha  $g \uparrow [\alpha, \beta]$ -n, akkor  $g(\alpha) = a$  és  $g(\beta) = b$ , ezért  $(*)$ -ből következik, hogy

$$\int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Ha viszont  $g \downarrow [\alpha, \beta]$ -n, akkor  $g(\alpha) = b$  és  $g(\beta) = a$ , ezért  $(*)$ -ből azt kapjuk, hogy

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g' = \int_b^a f = - \int_a^b f, \implies \int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot (-g').$$

Összefoglalva a következő állítás igaz:

Tegyük fel, hogy  $f \in R[a, b]$ ,  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  folytonosan deriválható bijekció és  $g'(t) \neq 0$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ). Ekkor

$$\int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot |g'|.$$

Az előző állítás általánosítása többszörös integrálokra már jóval bonyolultabb. Valós-valós esetben az  $f$  és a  $g$  függvények intervallumokon értelmeztük. Többdimenziós esetben olyan  $H$  halmazok kerülnek szóba, amelyeknek „van mértékük”, és így érdemes ezeken az integrált értelmezni. Emlékezzünk arra, hogy egy  $H \subset \mathbb{R}^2$  korlátos síkidomnak, akkor van területe, ha a konstans 1 függvény Riemann-integrálható  $H$ -n, és ekkor a területét a

$$t(H) := \iint_H 1 \, dx \, dy$$

kettős integrállal értelmezzük. Hasonlóan járunk el egy  $H \subset \mathbb{R}^3$  téridom térfogatának értelmezésekor hármas integrállal. Általánosan, akkor mondjuk, hogy a  $H \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) korlátos halmaz Jordan-mérhető, ha a konstans 1 függvény Riemann-integrálható  $H$ -n, és ekkor a  $H$  halmaz Jordan-mértéke a

$$\mu(H) := \int_H 1$$

integrállal értelmezzük.

**1. Tétel (Integráltranszformáció).** Legyen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) egy nem üres nyílt halmaz, és  $H \subset U$  egy nem üres, Jordan-mérhető és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy

- a)  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  egy folytonosan differenciálható függvény,
- b) a  $g$  függvény injektív a  $H$  halmaz belsejében, azaz  $g|_{\text{int } H}$  invertálható.

Ekkor a  $g[H]$  halmaz is Jordan-mérhető, illetve az  $f : g[H] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha a

$$H \ni t \mapsto f(g(t)) \cdot |\det g'(t)|$$

függvény is integrálható, és

$$\int_{g[H]} f(x) \, dx = \int_H f(g(t)) \cdot |\det g'(t)| \, dt.$$

**Bizonyítás.** A tételt nem bizonyítjuk.

**Megjegyzés.** Az alkalmazások szempontjából az integráltranszformációra két okból is szükség lehet. Egyrészt, ha  $H$  olyan tartomány, amelyen az integrált csak „körülmenyesen” lehet kiszámolni, akkor *kereshetünk* olyan  $g$ -t, amely már egy „egyszerűbb” halmazon van értelmezve (pl. téglalapon), ezért a jobb oldali integrált könnyebb kiszámolni. Másrészt előfordulhat az is, hogy sikerül olyan  $g$  függvényt *találni*, amelyre  $f \circ g \cdot |\det g'|$  egyszerűbb, mint  $f$ .

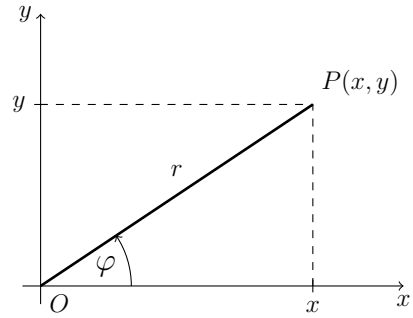
A következőben néhány nevezetes integráltranszformációt fogjuk bemutatni.

### Síkbeli polárkoordináta-transzformáció:

Sok esetben a sík Descartes-féle derékszögű koordinátarendszere helyett/mellett célszerű **polárkoordináta-rendszert** bevezetni a következő módon. Kiválasztunk a síkon egy rögzített  $O$  pontot (pólus) és egy ebből kiinduló félegyenest (polártengely). A pólustól különböző  $P$  pont *polárkoordinátáin* az  $(r, \varphi)$  számpárt értjük, ahol  $r = \overline{OP}$  és  $\varphi$  az  $\overrightarrow{OP}$  félegyenesnek a polártengellyel bezárt szöge.

Világos, hogy  $r$  és  $\varphi$  egyértelműen meghatározza a  $P$  pont helyzetét, ezzel szemben a  $P$  pont csak  $r$ -et határoz meg egyértelműen, a  $\varphi$  szöveget csak  $2\pi$  egész számú többszörösétől eltekintve. Az  $O$  pont polárszöge határozatlan.

A vizsgálataink során gyakran egymás mellett használjuk a Descartes-féle derékszögű és a polárkoordináta-rendszert. Ha a kétféle koordinátarendszer kezdőpontja, valamint a polártengely és az  $x$  tengely pozitív fele egybeesik, akkor a következő összefüggések állnak fenn az  $(x, y)$  derékszögű és az  $(r, \varphi)$  polárkoordináták között:



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{ha } x > 0, y \geq 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{ha } x > 0, y < 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{ha } x < 0, \\ \pi/2 & \text{ha } x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{ha } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Síkbeli polárkoordináta-transzformációról beszélünk, ha a

$$g(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2)$$

leképezést alkalmazzuk. Világos, hogy  $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , illetve

$$g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_r(r \cos \varphi) & \partial_\varphi(r \cos \varphi) \\ \partial_r(r \sin \varphi) & \partial_\varphi(r \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2).$$

Ezért

$$\det g'(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Adott  $R > 0$ , legyen

$$H \subseteq [0, R] \times [0, 2\pi]$$

egy nem üres, Jordan-mérhető, zárt halmaz.  $g|_{\text{int } H}$  invertálható, azaz

$$\begin{aligned} (r_1, \varphi_1), (r_2, \varphi_2) \in \text{int } H \\ g(r_1, \varphi_1) = g(r_2, \varphi_2) \end{aligned} \quad \implies \quad (r_1, \varphi_1) = (r_2, \varphi_2),$$

hiszen nem nehéz igazolni, hogy

$$\begin{aligned} 0 < r_1, r_2 < R, \quad 0 < \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi \\ r_1 \cos \varphi_1 = r_2 \cos \varphi_2, \quad r_1 \sin \varphi_1 = r_2 \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad \implies \quad r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Ekkor az integráltranszformációról szóló tétel feltételei teljesülnek, és így az

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

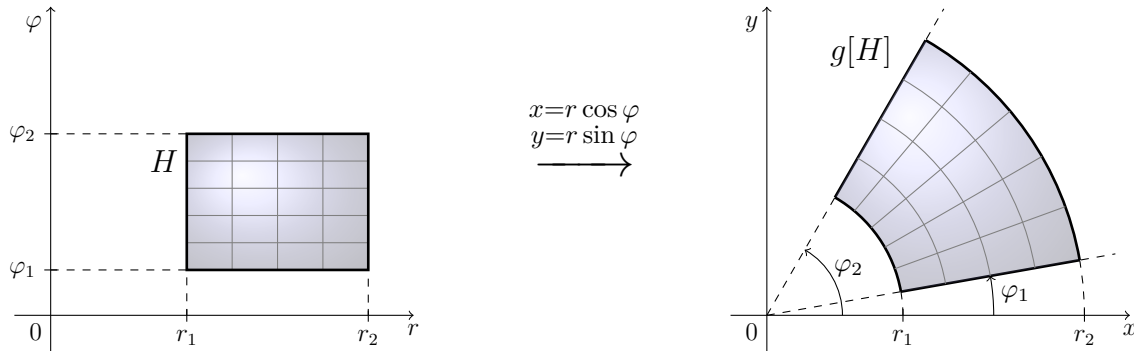
transzformációval

$$(*) \quad \iint_{g[H]} f(x, y) dx dy = \iint_H f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi,$$

hiszen  $\det g'(r, \varphi) = r \geq 0$ , ha  $H \subseteq [0, R] \times [0, 2\pi]$ .

Polárkoordináta-transzformációval egy téglalapot körgyűrűcikkbe képezhetünk. Ezt szemlélteti az alábbi ábra, ahol a téglalap:

$$H := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r_1 < r_2, 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi\}.$$



**Példa.** Számítsuk ki a

$$\iint_T x^2 y \, dx \, dy$$

kettős integrált, ahol  $T$  az

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0$$

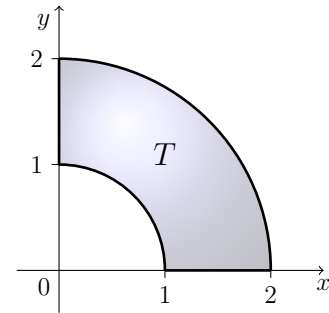
egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos síkrész!

**Megoldás.** Az ábra a  $T$ -vel jelölt integrálási tartományt szemlélteti.

Az integrandus folytonos, következésképpen integrálható a  $T$  halmazon. Az integrál kiszámításához az

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi \\ (1 \leq r \leq 2, & 0 \leq \varphi \leq \pi/2) \end{aligned}$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. A (\*) integráltranszformáció alapján  $T = g([1, 2] \times [0, \pi/2])$  és



$$\begin{aligned} \iint_T x^2 y \, dx \, dy &= \iint_{[1,2] \times [0,\pi/2]} (r \cos \varphi)^2 \cdot (r \sin \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi = \iint_{[1,2] \times [0,\pi/2]} r^4 \cdot (\sin \varphi) \cdot \cos^2 \varphi \, dr \, d\varphi = \\ &= \left( \int_1^2 r^4 \, dr \right) \cdot \left( \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \right) = \left[ \frac{r^5}{5} \right]_{r=1}^{r=2} \cdot \left[ -\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \\ &= \left( \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} \right) \cdot \left( -\frac{\cos^3(\pi/2)}{3} + \frac{\cos^3(0)}{3} \right) = \frac{31}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{15}. \end{aligned}$$

**Példa.** Kettős integrállal határozzuk meg az  $R$  sugarú kör területét!

**Megoldás.** Jelölje  $H_R$  az origó középpontú  $R$  sugarú zárt körlapot. Legyen

$$f(x, y) := 1 \quad ((x, y) \in H_R).$$

Mivel  $f \in R(H_R)$ , ezért a  $H_R$  halmaznak van területe, és az egyenlő a

$$\iint_{H_R} 1 \, dx \, dy$$

kettős integrállal. Ezt az

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi \\ (0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned}$$

polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A megismert képlet alapján

$$\iint_{H_R} 1 \, dx \, dy = \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} r \, dr \, d\varphi,$$

és ez utóbbi integrált szukcesszív integrálással könnyű kiszámítani:

$$\iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} r \, dr \, d\varphi = \left( \int_0^R r \, dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R \cdot 2\pi = R^2 \pi.$$

Az  $R$  sugarú kör területére tehát így is megkaphatjuk a jól ismert  $R^2 \pi$  képletet.

**Megjegyzés.** Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a félkör területét a

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

**Példa.** Kettős integrállal határozzuk meg az  $R$  sugarú gömb térfogatát!

**Megoldás.** Legyen  $R > 0$  adott valós szám és

$$f(x, y) := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \left( H_R := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \right\} \right).$$

Az  $f$  függvény grafikonja az origó középpontú  $R$  sugarú gömb felső féltérbe eső felülete; az ez alatti térrész pedig a félgömb. Mivel  $f \in C(H_R)$ , ezért  $f \in R(H_R)$ . Így a félgömbnek van térfogata, és az egyenlő az alábbi kettős integrállal:

$$\iint_{H_R} f = \iint_{H_R} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{H_R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Ezt az

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi \\ (0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned}$$

polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A megismert képlet alapján

$$\iint_{H_R} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi,$$

és ez utóbbi integrált szukcesszív integrálással könnyű kiszámítani:

$$\begin{aligned} \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi &= \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi = \\ &= \left( \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r \, dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) = \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^R \cdot 2\pi = \frac{2R^3 \pi}{3}. \end{aligned}$$

Az  $R$  sugarú gömb térfogata tehát  $4R^3 \pi / 3$ .

**Megjegyzés.** Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a gömb (forgástest) térfogatát a

$$\pi \cdot \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

### Térbeli polárkoordináta-transzformáció:

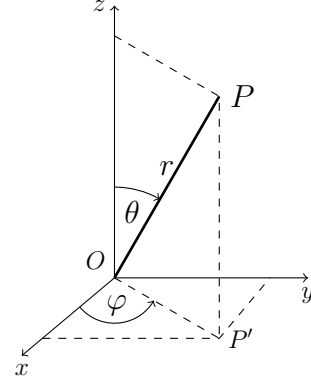
A síkbeli polárkoordináta-rendszert „térbeli” megfelelője az ábrán található jelölésekkel tudjuk megvalósítani.

Ha  $\overrightarrow{OP}(x, y, z)$  vektor hossza

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0,$$

akkor a síkbeli polárkoordináták alapján

$$z = r \cos \theta$$



és  $\overrightarrow{OP'}$  hossza  $r \sin \theta$ , ahol  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Ha felírjuk a  $P'$  pont síkbeli polárkoordinátáit, akkor

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad \text{és} \quad y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

ahol  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Térbeli polárkoordináta-transzformációról beszélünk, ha a

$$g(r, \varphi, \theta) := (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad ((r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3)$$

leképezést alkalmazzuk. Világos, hogy  $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ , illetve

$$\begin{aligned} g'(r, \varphi, \theta) &= \begin{pmatrix} \partial_r(r \sin \theta \cos \varphi) & \partial_\varphi(r \sin \theta \cos \varphi) & \partial_\theta(r \sin \theta \cos \varphi) \\ \partial_r(r \sin \theta \sin \varphi) & \partial_\varphi(r \sin \theta \sin \varphi) & \partial_\theta(r \sin \theta \sin \varphi) \\ \partial_r(r \cos \theta) & \partial_\varphi(r \cos \theta) & \partial_\theta(r \cos \theta) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \quad ((r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \det g'(r, \varphi, \theta) &= \cos \theta \cdot \det \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \end{pmatrix} - r \sin \theta \cdot \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \cos \theta \cdot (r^2 \sin \theta \cos \theta) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}}_{=-1} - r \sin \theta \cdot (r \sin^2 \theta) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{=1} = \\ &= -r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Adott  $R > 0$ , legyen

$$H \subseteq [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

egy nem üres, Jordan-mérhető, zárt halmaz. Nem nehéz igazolni, hogy  $g|_{\text{int } H}$  invertálható.

Ekkor az integráltranszformációról szóló tétel feltételei teljesülnek, és így az

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \text{és} \quad z = r \cos \theta$$

transzformációval

$$(**) \quad \iiint_{g[H]} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_H f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta,$$

hiszen  $\det g'(r, \varphi, \theta) = -r^2 \sin \theta \leq 0$ , ha  $H \subseteq [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

**Példa.** Számítsuk ki az  $R$  sugarú gömb térfogatát!

**Megoldás.** A gömb térfogatát kiszámíthatjuk az alábbi hármas integrállal:

$$V = \iiint_G 1 \, dx \, dy \, dz, \quad \text{ahol} \quad G := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Térbeli polárkoordináta-transzformációval

$$H := [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \quad \implies \quad G = g[H],$$

ezért  $(**)$  alapján

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_H 1 \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \left( \int_0^R r^2 \, dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) \cdot \left( \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) = \\ &= \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=R} \cdot \left[ \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot \left[ -\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

## A normális eloszlás sűrűségfüggvénye

A valószínűségszámításban nagyon fontos szerepet játszanak azok az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények, amikre

$$f(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1$$

teljesül, az ún. **sűrűségfüggvények**. A folytonos eloszlások közül a normális eloszlás központi szerepet tölt be. Ennek sűrűségfüggvénye

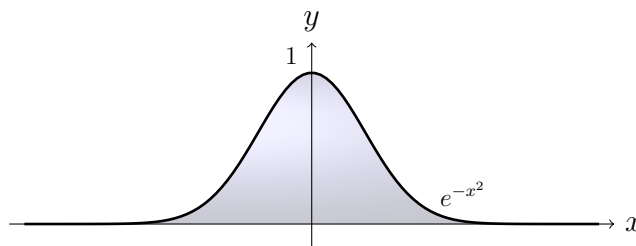
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (m \in \mathbb{R}, \sigma > 0, x \in \mathbb{R}).$$

De miért lesz  $f$  sűrűségfüggvény? Az  $f(x) \geq 0$  tulajdonság nyilván teljesül, de a teljes  $\mathbb{R}$  halmazon vett improprius integrálját ki kellene számítani. Azonban ezt nem tudjuk az improprius integrál fogalma alapján kiszámolni, mert ehhez ismerni kellene  $f$  primitív függvényeit, de ezek nem elemi függvények. Más szavakkal, nincs képlet, amivel tudnánk a Newton–Leibniz-formulát alkalmazni, és majd határértéket venni.

Érdekes módon, a többszörös integrálásnál megismert módszerek segítenek megoldani a feladatot. Először számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$$

ún. **Gauss-integrált**. Ez úgy értelmezhető, mint az  $e^{-x^2}$  függvény alatti terület, amely az alábbi ábrán látható.



Az improprius integrál fogalma szerint

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad \text{ahol} \quad \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x^2} dx,$$

hiszen az  $e^{-x^2}$  függvény páros. A fenti határérték létezik és véges, mert az

$$F(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx \quad (t > 0)$$

integrálfüggvény szigorúan monoton növekvő és korlátos. Valóban,  $F$  létezik, mert az  $e^{-x^2}$  függvény folytonos, tehát integrálható minden  $[0, t]$  intervallumon.  $F$  szigorúan monoton növekvő, mert az  $e^{-x^2}$  függvény pozitív.  $F$  korlátos a  $[0, 1]$  intervallumon, mert folytonos, illetve minden  $t > 1$  esetén

$$F(t) = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^t e^{-x^2} dx < \int_0^1 1 dx + \int_1^t e^{-x} dx = 1 + \left[ \frac{e^{-x}}{-1} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{e^t} + \frac{1}{e} < 2.$$

A fentiekből következik, hogy a Gauss-integrál konvergens, azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^0 e^{-x^2} dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t e^{-x^2} dx$$

egy véges szám.

Most nézzük meg az

$$I_R := \iint_{H_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

kettős integrált, ahol  $H_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  az origó középpontú  $R$  sugarú zárt körlap, és természetesen  $R > 0$ . Mivel  $f \in C(\mathbb{R}^2)$ , ezért a fenti integrál létezik és véges. Az integrál kiszámításához az

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi \\ (0 \leq r \leq R, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned}$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_R &= \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi = \left( \int_0^R e^{-r^2} \cdot r dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) = \left( -\frac{1}{2} \int_0^R e^{-r^2} \cdot (-2r) dr \right) \cdot 2\pi = \\ &= -\pi \cdot \left[ e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=R} = -\pi (e^{-R^2} - e^0) = \pi \cdot (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

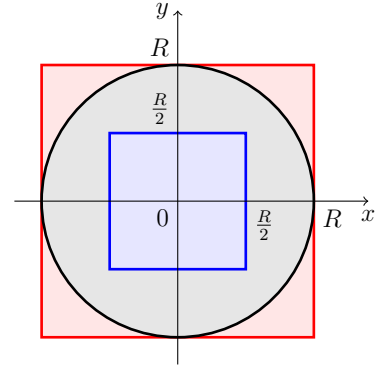


A következő lépésben tekintsük a

$$T_R := [-R, R] \times [-R, R] \quad (R > 0)$$

téglalapokat. Nem nehéz igazolni, hogy  $T_{R/2} \subset H_R \subset T_R$  (lásd a jobb oldali ábrát). Ezért

$$\iint_{T_{R/2}} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{H_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{T_R} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$



Azonban minden  $R > 0$  esetén

$$\iint_{T_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{T_R} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Ennek következtében

$$\left( \int_{-R/2}^{R/2} e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi \cdot (1 - e^{-R^2}) \leq \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

adódik minden  $R > 0$ -ra. Tudjuk, hogy a Gauss-integrál konvergens. Ezért a fenti egyenlőtlenségben  $R$ -rel plusz végtelenhez tartva azt kapjuk, hogy

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

tehát

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Most térünk vissza az eredeti feladathoz, azaz a normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (m \in \mathbb{R}, \sigma > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Minden  $t > m$  esetén a következő helyettesítéssel:

$$u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma} \implies x = \sqrt{2}\sigma u + m := g(u) \quad (u > 0) \implies g'(u) = \sqrt{2}\sigma > 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$\int_m^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_m^t e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-u^2} \cdot \sqrt{2}\sigma du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-u^2} du.$$

Így ha  $t$  tart a plusz végtelenhez, akkor

$$\int_m^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} dx.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\int_{-\infty}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-u^2} dx.$$

Ennek következtében

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_m^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-u^2} du + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 1. \end{aligned}$$