3. gyakorlat

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTTAL 1.

Monotonitás

Emlékeztető. A monotonitás és a derivált kapcsolata:

Tétel. *Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$. Ekkor*

1. $f \quad \nearrow \quad$ [*illetve* $\searrow$] (a, b)-*n* $\quad \iff \quad f' \geq 0$ [*illetve* $f' \leq 0$] (a, b)-*n*,
2. *ha* $f' > 0$ [*illetve* $f' < 0$] (a, b)-*n* $\quad \Longrightarrow \quad f \quad \uparrow$ [*illetve* $\downarrow$] (a, b)-*n*.

Fontos megjegyezni, hogy a tételben ***lényeges*** feltétel, hogy ***intervallumon értelmezett*** a függvény.

1. Feladat. *Határozzuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton, ha*

a) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\})$.

Megoldás.

a) Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = 12\,x^3 - 12\,x^2 - 24\,x = 12\,x\,(x^2 - x - 2) = 12\,x\,(x-2)\,(x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Alkalmazzuk a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tételt, tehát $f'(x)$ előjelét kell meghatároznunk. Mivel f' folytonos $\mathbb{R}$-en, így f' csak a zérushelyein tud előjelet váltani. Világos, hogy

$$f'(x) = 12\,x\,(x-2)\,(x+1) = 0 \qquad \iff \qquad x = -1,\ x = 0 \text{ vagy } x = 2.$$

Ezzel négy részintervallumot kapunk, ahol egységes f' előjele:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 2) \quad \text{és} \quad (2, +\infty).$$

Nem nehéz meghatározni f' előjeleit ezeken az intervallumokon, hiszen ehhez elegendő kiszámolni f' értékét az intervallumok egyik pontján. A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményét az f monotonitására vonatkozóan.

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

b) Mivel $x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$, ezért a tört valóban értelmezhető a megadott halmazon. Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R} \setminus \{2, 8\})$ és

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 10x + 16) - x(2x - 10)}{\left(x^2 - 10x + 16\right)^2} = \frac{16 - x^2}{\left(x^2 - 10x + 16\right)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}).$$

Mivel f' folytonos minden $x \neq 2$ és $x \neq 8$ pontban, így csak az $x = 2$, $x = 8$ és az f' zérushelyei olyan pontok, ahol eltérhet f' előjele a pont bal és jobb oldali környezetén. Világos, hogy

$$f'(x) = \frac{(4 - x)(4 + x)}{\left(x^2 - 10x + 16\right)^2} = 0 \qquad \iff \qquad x = -4 \text{ vagy } x = 4.$$

Ezzel öt részintervallumot kapunk, ahol egységes f' előjele:

$$(-\infty, -4), \quad (-4, 2), \quad (2, 4), \quad (4, 8) \quad \text{és} \quad (8, +\infty).$$

A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményét az f monotonitására vonatkozóan.

	$x < -4$	-4	$-4 < x < 2$	$2 < x < 4$	4	$4 < x < 8$	$x > 8$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$

Lokális szélsőértékek

Emlékeztető.

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* **lokális maximuma van**, *ha*

$$\exists K(a) \subseteq \mathcal{D}_f : \forall\, x \in K(a) \subseteq \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az a pontot ***f*** **lokális maximumhelyének** *nevezzük, az $f(a)$ függvényérték pedig a függvény* **lokális maximuma**.

Hasonlóan értelmezzük a ***lokális minimum*** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen ***lokális szélsőértéknek***, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet ***lokális szélsőértékhelynek*** nevezzük.

Tétel. **(Elsőrendű szükséges feltétel)** *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor $f'(a) = 0$.*

Jegyezzük meg, hogy az $f'(a) = 0$ csak ***szükséges***, de ***nem elégséges*** feltétele annak, hogy az f függvénynek a-ban lokális szélsőértéke legyen (tekintsük például az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt és az $a = 0$ pontot). Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális szélsőértékhelyek csak olyan a pontokban lehetnek, ahol $f'(a) = 0$. Ezek az f függvény ***stacionárius pontjai***.

Tétel. **(Elsőrendű elégséges feltétel)** *Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$ és egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$, továbbá az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben. Ekkor c egy lokális szélsőértékhely, és*

- *ha f'-nek c-ben $(-, +)$ előjelváltása van, akkor c az f függvény lokális minimumhelye,*
- *ha f'-nek c-ben $(+, -)$ előjelváltása van, akkor c az f függvény lokális maximumhelye.*

Tétel. **(Másodrendű elégséges feltétel)** *Tegyük fel, hogy egy $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban $f \in D^2\{c\}$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) \neq 0$. Ekkor c egy lokális szélsőértékhely, és*

- *ha $f''(c) > 0$, akkor c az f függvény lokális minimumhelye,*
- *ha $f''(c) < 0$, akkor c az f függvény lokális maximumhelye.*

2. Feladat. *Számítsuk ki az*

$$f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

Megoldás. Az f polinomfüggvény, ezért $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = \left(x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1\right)' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) =$$
$$= 5x^2(x-3)(x-1) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális szélsőérték csak olyan x pontokban lehet, ahol $f'(x) = 0$ teljesül (stacionárius pontok). Világos, hogy

$$f'(x) = 5x^2(x-3)(x-1) = 0 \qquad \iff \qquad x = 0,\ x = 1 \text{ vagy } x = 3.$$

El kell dönteni, hogy a fenti pontok közül melyik lokális szélsőértékhely, és ez minimum- vagy maximumhely lesz-e. Kétféle módon járhatunk el.

a) Az elsőrendű elégséges feltétel alapján megvizsgáljuk f' előjelváltását a stacionárius pontokban. Ha nem jelent nehézséget, érdemes megvizsgálni a teljes f' függvény előjelét a monotonitási vizsgálathoz hasonlóan, de az előjelváltás egyéb megfontolásokkal is meghatároztató. A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményét az f lokális szélsőértékeire vonatkozóan.

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
lok.		$-$		max		min	

- A 0 pont nem lokális szélsőértékhely (a függvény szigorúan monoton növekvő a pont egyik környezetében).
- Az 1 pont lokális maximumhely, és itt a lokális maximum $f(1) = 2$.
- A 3 pont lokális minimumhely, és itt a lokális minimum $f(3) = -26$.

b) A másodrendű elégséges feltétel alapján megvizsgáljuk f'' értékét a stacionárius pontokban.

$$f''(x) = \left(5x^4 - 20x^3 + 15x^2\right)' = 20x^3 - 60x^2 + 30x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- $f''(0) = 0$, ezért a 0 pontról nem derül ki, hogy lokális szélsőértékhely vagy sem. Monotonitási vizsgálat után kiderül, hogy nem lokális szélsőértékhely.
- $f''(1) = -10 < 0$, ezért az 1 pont lokális maximumhely. Itt a lokális maximum $f(1) = 2$.
- $f''(3) = 90 > 0$, ezért a 3 pont lokális minimumhely. Itt a lokális minimum $f(3) = -26$.

Abszolút szélsőértékek

Emlékeztető. Az Analízis I. kurzusban tanultuk az abszolút szélsőértékek fogalmát.

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek ***van abszolút maximuma***, ha van olyan $\alpha \in \mathcal{D}_f$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ pontban $f(x) \le f(\alpha)$. Ekkor α az f-nek ***abszolút maximumhelye***, az $f(\alpha)$ pedig f ***abszolút maximuma***. Hasonlóan értelmezzük az ***abszolút maximumhelyet*** és **abszolút minimumot**.

Tétel. **(Weierstrass-tétel)** *Korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos f függvénynek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz $\exists\, \alpha, \beta \in [a, b]$, hogy $f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha)$ $\big(x \in [a, b]\big)$.*

Abszolút szélsőértékhelyek keresése. Ha f folytonos egy korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon, akkor a Weierstrass-tétel szerint f-nek van legnagyobb és legkisebb értéke. Ha f ezek valamelyikét egy c pontban veszi fel, akkor vagy $c = a$, vagy $c = b$, vagy pedig $c \in (a, b)$. Ez utóbbi esetben lokális szélsőértékről van szó. Ha feltesszük még azt is, hogy $f \in D(a, b)$, akkor $f'(c) = 0$. Ha tehát megkeressük az összes olyan $c \in (a, b)$ pontot, amelyben f' eltűnik, azaz ***az (a, b)-n lévő stacionárius pontokat***, akkor biztos, hogy ***az abszolút szélsőértékhelyek ezek közül, valamint az a és a b végpontok közül kerülnek ki.*** Például az abszolút maximumhelyet úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk f értékeit ezekben a pontokban (nem feledkezve meg az a és b végpontokról sem), és kiválasztjuk azokat, amelyekben f értéke a legnagyobb.

3. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x) := \frac{x}{x^2 + 1} \qquad \left(x \in \left[-\tfrac{1}{2}, 2\right]\right)$$

függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit!

Megoldás. Mivel $f \in C[-1/2, 2]$, ezért *Weierstrass tétele* szerint f-nek léteznek abszolút szélsőértékei.

A stacionárius pontok meghatározása: a deriválási szabályok szerint $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{1 \cdot \left(x^2 + 1\right) - x \cdot 2\,x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$f'(x) = 0 \quad \iff \quad 1 - x^2 = 0 \quad \iff \quad x = 1 \;\text{ vagy }\; x = -1.$$

f stacionárius pontjai: $x_1 = 1$ vagy $x_2 = -1$. Mivel $-1 \notin [-1/2, 2]$, ezért csak az x_1 pontot tekintjük.

A függvényértékek összehasonlítása: Mivel

$$f(1) = \frac{1}{2}, \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{5}, \qquad f(2) = \frac{2}{5},$$

ezért

- f abszolút minimumhelye $-1/2$, és abszolút minimuma $-2/5$.
- f abszolút maximumhelye 1, és abszolút maximuma $1/2$.

Szöveges szélsőértékfeladatok

Megmutatjuk, hogyan tudunk megoldani konkrét gyakorlati szélsőértékfeladatokat a tanult differenciálszámítási tételekkel. Az a feladat, hogy meg kell találni mikor lesz optimális egy bizonyos mennyiség, melynek értéke folytonosan változik. A megoldás lényege, hogy felírjuk az optimalizálandó mennyiséget egy másik változó mennyiség függvényeként, ami csak egy intervallum belül „mozoghat”, és az így kapott függvény abszolút szélsőértékét megkeressük.

Azonban sok esetben nem korlátos vagy nem zárt intervallumon történő abszolút szélsőértékkeresésről van szó. Ekkor a Weierstrass-tétel nem alkalmazható, és előfordulhat, hogy nincs is abszolút szélsőérték. A feladatot egy összetett monotonitási és lokális szélsőértékvizsgálattal próbálhatjuk megoldani, de vannak olyan esetek, ahol az abszolút szélsőérték könnyebben meghatározható.

Tegyük fel, hogy $f \in D(a,b)$, $f' \in C(a,b)$ (pl. ha $f \in D^2(a,b)$) és egyetlen olyan $c \in (a,b)$ létezik, amire $f'(c) = 0$ teljesül. A folytonosság miatt f' csak a c pontban tud előjelet váltani. Ezért f szigorúan monoton az (a,c) és a (c,b) intervallumon. Ha az elégséges feltételek egyikéből kiderül, hogy c lokális szélsőértékhely, akkor f' előjelet vált a c pontban, és így f monotonitása különbözni fog az (a,c) és a (c,b) intervallumon. Így c abszolút szélsőértékhely is.

4. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha két pozitív szám összege állandó, szorzatuk akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő!*

Megoldás. Jelölje x és y a két pozitív számot, melyek összege az állandó a szám, azaz $x + y = a$. Szeretnénk megtudni, hogy mikor lesz maximális az xy szorzat. Ez x-től és $y - tól$ is függ, azaz nem tekinthető egyváltozós függvénynek, de mivel összegük a-val egyenlő, így $y = a - x$, amiből következik, hogy

$$xy = x(a - x) = ax - x^2,$$

ahol $0 < x < a$. Tehát az

$$f(x) = ax - x^2 \qquad (0 < x < a)$$

függvénynek keressük az abszolút maximumhelyét. A deriválási szabályok szerint igaz, hogy $f \in D^2(0,a)$ és

$$f'(x) = a - 2x, \quad f''(x) = -2 \qquad (0 < x < a).$$

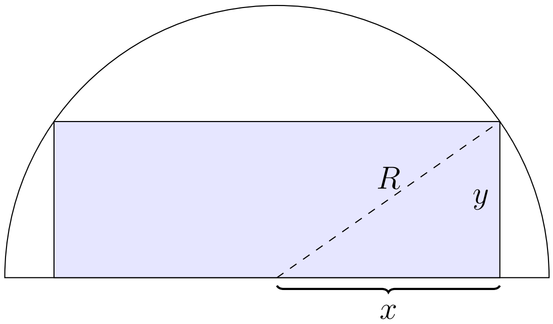
$f'(x) = a - 2x = 0 \iff x = a/2$. Mivel $f''(a/2) = -2 < 0$, így a másodrendű elégséges feltétel szerint $x = a/2$ az f függvény lokális maximumhelye. Ez abszolút maximumhely is, mert $f \in D^2(0,a)$ és az $f'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van.

Az előbbiek szerint xy akkor a legnagyobb, ha $x = a/2$ miközben $y = a - x = a/2$, azaz $x = y$, amivel az állítást igazoltuk.

5. Feladat. *Határozzuk meg egy R sugarú félkörbe írt legnagyobb területű téglalap méreteit, ha a téglalap egyik oldala a félkör átmérőjén fekszik!*

Megoldás. A feladatot kétféle módon fogjuk megoldani.

1. Megoldás. Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



A téglalapok területe $T = 2xy$. Nyilvánvaló, hogy elegendő azokat a téglalapokat venni, amelyek belülről érintik a kört. Ekkor

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Ezért

$$T = 2xy = 2x\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2x^2 - x^4},$$

ahol $0 < x < R$. Vegyük észre, hogy T akkor is csak akkor a legnagyobb, ha $R^2x^2 - x^4$ a legnagyobb. Emiatt az

$$f(x) = R^2x^2 - x^4 \qquad (0 < x < R)$$

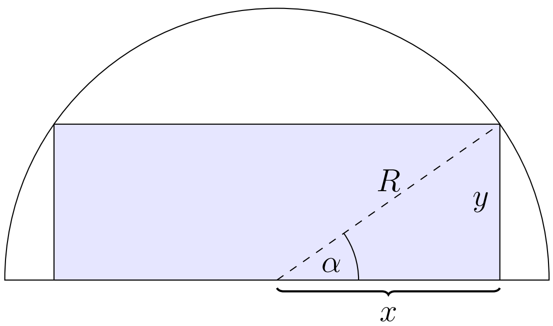
függvénynek keressük az abszolút maximumhelyét. A deriválási szabályok szerint igaz, hogy $f \in D^2(0, R)$ és

$$f'(x) = 2R^2x - 4x^3, \quad f''(x) = 2R^2 - 12x^2 \qquad (0 < x < R).$$

$f'(x) = 2x(R^2 - 2x^2) = 0 \iff x = R/\sqrt{2}$ (a $(0, R)$-n). Mivel $f''(R/\sqrt{2}) = -4R^2 < 0$, így a másodrendű elégséges feltétel szerint $x = R/\sqrt{2}$ az f függvény lokális maximumhelye. Ez abszolút maximumhely is, mert $f \in D^2(0, R)$ és az $f'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van a $(0, R)$ intervallumon.

Az előbbiek szerint T akkor a legnagyobb, ha $x = R/\sqrt{2}$ miközben $y = \sqrt{R^2 - x^2} = R/\sqrt{2}$, azaz $x = y$. Ezért a téglalap területe akkor a legnagyobb, ha a félkör átmérőjén fekvő oldal kétszer akkora, mint a rá merőleges oldal.

2. Megoldás. Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



A téglalapok területe $T = 2xy$. Nyilvánvaló, hogy elegendő azokat a téglalapokat venni, amelyek belülről érintik a kört. Ekkor

$$x = R\cos\alpha \qquad \text{és} \qquad y = R\sin\alpha.$$

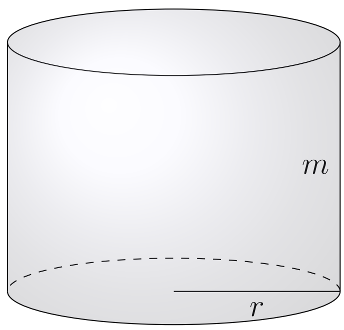
Ezért
$$T = 2xy = 2R\cos\alpha R\sin\alpha = R^2\sin 2\alpha,$$
ahol $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tehát a
$$T(\alpha) = R^2\sin 2\alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$
függvénynek keressük az abszolút maximumhelyét. A deriválási szabályok szerint igaz, hogy $T \in D^2(0, \pi/2)$ és
$$T'(\alpha) = 2R^2\cos 2\alpha, \quad T''(\alpha) = -4R^2\sin 2\alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$
$T'(\alpha) = 2R^2\cos 2\alpha = 0 \iff \alpha = \pi/4$. Mivel $T''(\pi/4) = -4R^2 < 0$, így a másodrendű elégséges feltétel szerint $\alpha = \pi/4$ a T függvény lokális maximumhelye. Ez abszolút maximumhely is, mert $T \in D^2(0, \pi/2)$ és az $T'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van a $(0, \pi/2)$ intervallumon.

Az előbbiek szerint T akkor a legnagyobb, ha
$$x = R\cos\alpha = R\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}R}{2} \qquad \text{és} \qquad y = R\sin\alpha = R\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}R}{2},$$
azaz $x = y$. Ezért a téglalap területe akkor a legnagyobb, ha a félkör átmérőjén fekvő oldal kétszer akkora, mint a rá merőleges oldal.

6. Feladat. *Hogyan kell megválasztani egy 1 liter térfogatú, henger alakú konzervdoboz méreteit, hogy a gyártási költsége minimális legyen?*

Megoldás. Jelölje r a henger alapkörének sugarát és m a henger magasságát!

A gyártási költség egyik részét az anyagköltség adja. Ezt azzal tudjuk minimalizálni, ha a legkisebb felületű konzervdobozt gyártjuk. A henger felülete
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r m.$$
Az r és m változók nem függetlenek egymástól, mert a henger térfogata 1 liter, azaz 1000 cm^3. A henger térfogata



$$V = \pi r^2 m = 1000 \qquad \Longrightarrow \qquad m = \frac{1000}{\pi r^2}.$$
Ebből felírhatjuk a henger felszínét az r sugár függvényeként
$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad (r > 0).$$
Ennek a függvénynek keressük az abszolút minimumhelyét. A deriválási szabályok szerint igaz, hogy $A \in D^2(0, +\infty)$ és
$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}, \quad A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} \qquad (r > 0).$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Mivel

$$A''\left(\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 4\pi + 4000 \cdot \frac{2\pi}{10^3} = 12\pi > 0,$$

így a másodrendű elégséges feltétel szerint $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ az A függvény lokális minimumhelye. Ez abszolút minimumhely is, mert $A \in D^2(0, +\infty)$ és az $A'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van a $(0, +\infty)$ intervallumon.

Ekkor

$$m = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi}\left(\frac{\sqrt[3]{2\pi}}{10}\right)^2 = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Ezért a keresett konzervdoboz méretei a következők: a konzervdoboz alapkörének sugara $\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ cm és magassága $\frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$ cm. Ebből következik, hogy az optimális méreteket akkor érjük el, ha a konzervdoboz alapkörének átmérője és magassága megegyezik.