

A kiegyensúlyozott bináris keresőfa – AVL fák (folytatás)

(Avl-fa; Adelson-Velskij és Landisz, 1962)

Definíció: Az AVL fák magasság szerint kiegyensúlyozott bináris keresőfák.

Definíció: t kiegyensúlyozott bináris fa (KBF) \Leftrightarrow t minden (*p) csúcsára:

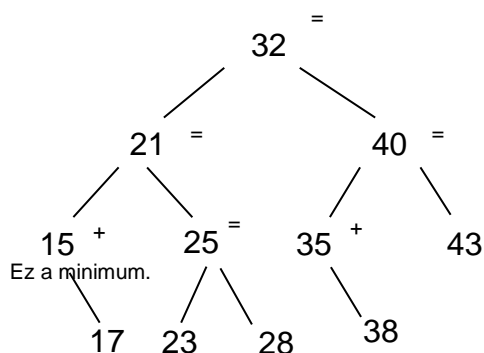
$$|h(p \rightarrow \text{right}) - h(p \rightarrow \text{left})| \leq 1$$

Megjegyzések:

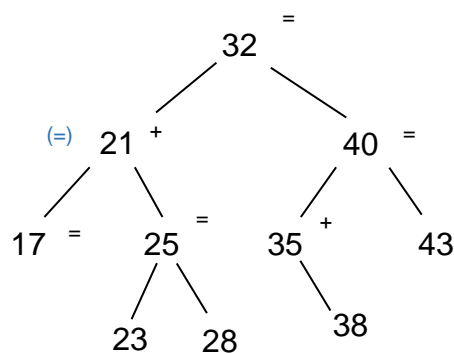
- Az AVL-fára, mint speciális alakú keresőfára, változatlanul érvényesek a keresőfákra bevezetett műveletek.
- Minden művelet (beszúrás és törlés) után ellenőrizzük, és ha kell, helyreállítjuk a fa kiegyensúlyozottságát.
- A megismert forgatások csökkentik a részfa magasságát, így törlésnél nem biztos, hogy egy forgatás után meg lehet állni a kiegyensúlyozással. Akár a gyökérig terjedhet a törlés hatása.
- Az általános törlő eljárás segéd eljárása lesz a minimális elem kivétele (törlése) a fából. Az eljárás a kiemelt minimum elem címét adja vissza.

Példa₁: Vegyük ki a minimális elemet az alábbi AVL fából!

Minimum keresése:



Jobb részfa átláncolása és címkézés:

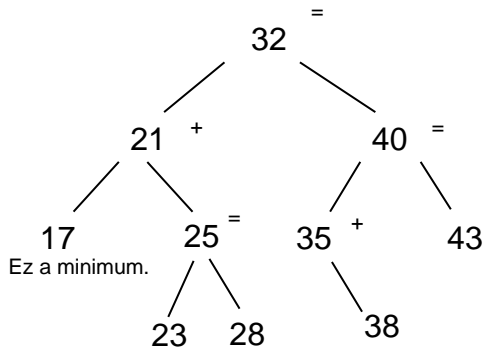


- Induljunk el a gyökértől és haladjuk balra addig, amíg lehet.
- Ha az aktuális csúcsnak nincs bal részfája, akkor ő a minimum. A címét visszaadjuk az eljárás output paraméterébe.
- A minimum szülőjének bal részfája lesz a minimum csúcs jobb részfája.
- Állítsuk át a szülő címkéjét, azaz növeljük eggyel, mert alacsonyabb lett a bal részfa.
- Ha kell, forgassunk.
- Ha a részfa nem lett alacsonyabb, azaz nem '=' lett a részfa gyökerének címkéje, akkor kész vagyunk.

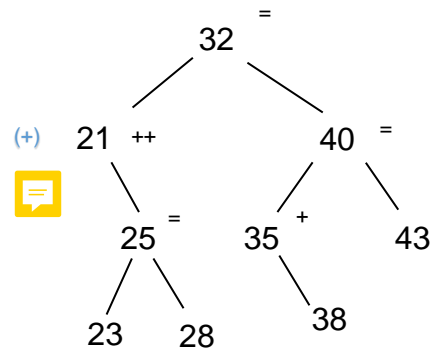
➤ Ha alacsonyabb lett a részfa, akkor ismétljük a szülő címkéjének javítását.

Példa2: Vegyük ki a minimális elemet az alábbi AVL fából!

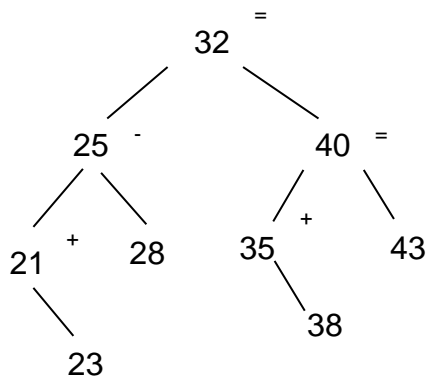
Minimum keresése:



Jobb részfa átláncolása és címkézés:



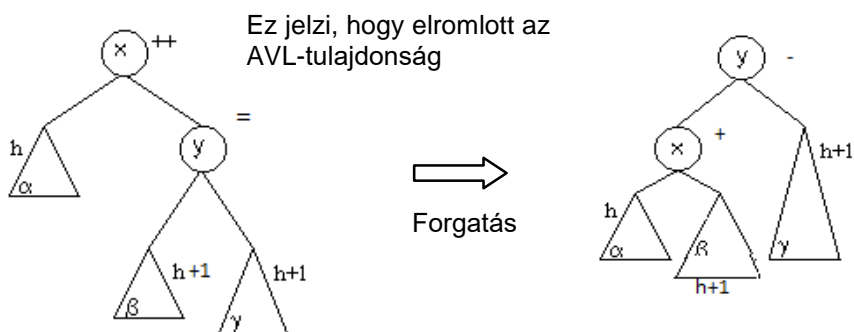
Forgatás (++,=):



Megjegyzések:

- Ez egy új forgatási sémának felel meg. Ez az eset csak törléskor fordulhat elő.
- Ez a forgatási séma nem csökkenti az aktuális részfa magasságát, így ezután nem kell tovább ellenőrizni a címkéket.

3. A (++, =) szabály (tükörképe a (--, =) szabály)



$\alpha < x < \beta < y < \gamma$ (a reláció az α , β és γ részfa minden csúcsának kulcsára igaz)

AVL fából való törlés

Három eset van:

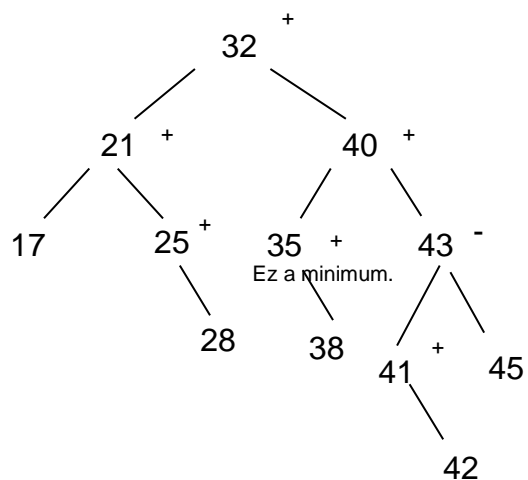
- Levelet törölünk. (Ez az eset a programban összevonható a következővel.)
- Egy gyerekes csúcsot törölünk.
- Két gyerekes csúcsot törölünk.

Megjegyzések:

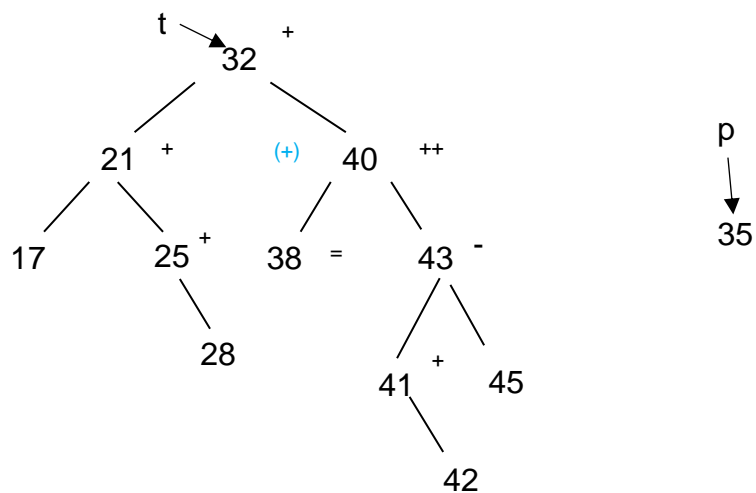
- Levél törlése esetén a szülő megfelelő oldali részfa üres lesz és az egyensúlya eggyel nő vagy csökken.
- Egy gyerekes csúcs törlése esetén a törlendő csúcs gyerekeit beláncoljuk a szülő azon oldalára ahonnan töröljük az elemet, és módosítjuk a szülő címkéjét, mert a megfelelő oldal mélysége eggyel csökkent.
- Az előbbi két eset fordult elő a minimum elem kivételénél.
- Úgy is mondhatjuk, hogy „ha a törlendő csúcsnak egyik részfa üres, akkor a másik részfa-t tesszük a törlendő csúcs helyére”, függetlenül attól, hogy ez a másik részfa üres-e vagy sem. Ilyen értelemben a fenti három esetből az első kettő összevonható.
- Kétgyerekes elem törlésekor előbb kiemeljük a jobb oldali részfájának minimumát. A jobb oldali részfa szükség szerinti kiegyensúlyozása a minimumának kiemelésekor történik.
- Ezután a törlendő elem helyére beláncoljuk a kiemelt minimumot, azaz a törlendő elem szülője erre a csúcsra fog mutatni, és ez a csúcs veszi át a törlendő elem két részfáját. Ezt követően beállítjuk aktuális részfa gyökerének egyensúlyát, és szükség esetén kiegyensúlyozzuk.
- A jobb oldali részfa minimuma kisebb minden jobboldali elemnél és nagyobb a bal oldali részfa összes eleménél, így az új helyre való beillesztése nem rontja a keresőfa tulajdonságot.
- Természetesen a bal oldali részfa maximuma is megfelelő lenne a törlendő elem helyére.

Példa: Töröljük ki az alábbi AVL fa gyökerét, azaz 32-t!

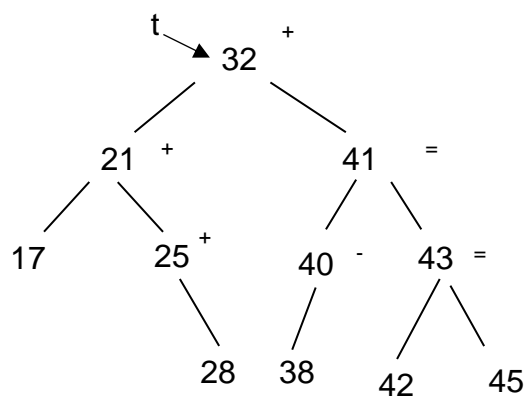
Jobboldali részfa minimum keresése:



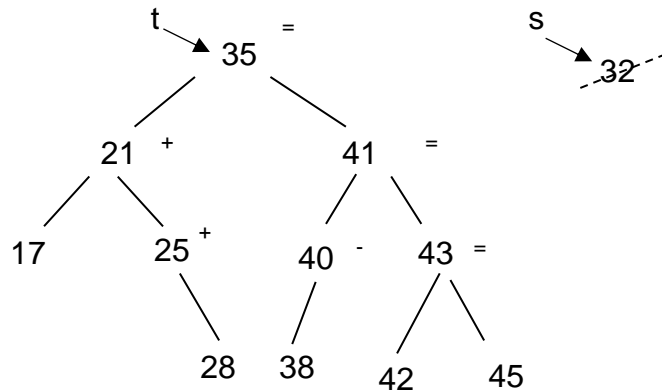
Minimum kiemelése és címkézés:



Forgatás (++, -):



A (*p) beláncolása (*t) helyére, régi gyökér törlése, új gyökér egyensúlyának aktualizálása:



- Az új (*t) egyensúlyának aktualizálása kapcsán további kiegyensúlyozásra lett volna szükség, ha egyensúlya -2-re vagy +2-re változott volna.
- Ha a t fa egy nagyobb fa része, akkor nagyobb fa magasabb szintjein további kiegyensúlyozásokra lehet szükség, mert a t rész fája alacsonyabb lett.