

1. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 1.

A derivált definíciója

Emlékeztető.

Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban **differenciálható** (vagy **deriválható**), ha

$$\exists \text{ és véges a } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény a pontbeli deriváltjának (vagy differenciálhányadosának) nevezzük, azaz

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $f \in D\{a\}$.

Jegyezzük meg, hogy egy $0/0$ típusú határértékkel (ez, mint tudjuk bármi lehet) értelmeztük a deriválhatóságot.

Az f függvény a pontbeli deriváltja így is számolható:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

1. Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsuk ki $f'(a)$ -t, ha

a) $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 1,$

b) $f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in [0, +\infty)), \quad a := 2,$

c) $f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad a := 3,$

d) $f(x) := x|x| \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 0,$

e) $f(x) := \begin{cases} 1-x, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 - x + 1, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad a := 0.$

Megoldás. Világos, hogy az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ feltétel mindegyik esetben teljesül.

a) $f \in D\{1\}$ és $f'(1) = 4$, hiszen

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^4 - 1^4}{h} = \\ &= \left(\text{az } a^4 - b^4 = (a-b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \text{ alapján} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot ((1+h)^3 + (1+h)^2 + (1+h) + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ((1+h)^3 + (1+h)^2 + (1+h) + 1) = 4. \end{aligned}$$

b) $f \in D\{2\}$ és $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, hiszen

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) - 2}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

c) $f \in D\{3\}$ és $f'(3) = -\frac{1}{9}$, hiszen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{3 \cdot (3+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{3 \cdot (3+h)} = -\frac{1}{9}.$$

d) $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = 0$, hiszen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)|0+h| - 0 \cdot |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0.$$

e) $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = -1$, hiszen a bal és jobb oldali határérték megegyezik:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{1 - (0+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{-h}{h} = -1, \\ \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{(0+h)^2 - (0+h) + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{h^2 - h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+0} (h - 1) = -1.\end{aligned}$$

Deriválási szabályok

Emlékeztető. Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolatára a következő állítások érvényesek:

Tétel. Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int}(D_f \cap D_g)$ pontban. Ekkor

1. a szorzó konstansokat ki tudjuk emelni a deriválásból, azaz

$$cf \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (cf)'(a) = cf'(a) \quad (c \in \mathbb{R})$$

2. tagokból álló függvényeket tagonként deriválhatjuk, azaz

$$f + g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

3. egy szorzat deriváltja az az összeg, amelynek tagjai az egyik tényező deriváltja megszorozva a másik tényezővel, azaz

$$f \cdot g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

4. ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Néhány elemi függvény deriváltját tartalmazza [ez a táblázat](#).

2. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \quad (x > 0),$

c) $f(x) := x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$

d) $f(x) := x^a + a^x + ax + \frac{x}{a} + \frac{a}{x} \quad (x > 0), \quad a > 0 \text{ paraméter.}$

Megoldás. Alkalmas átalakításokkal elemi függvények összegeit kapjuk, ezért

a) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3)' = 4 \cdot (x^3)' - 2 \cdot (x^2)' + 5 \cdot (x)' - 3' = \\ &= 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{12x^2 - 4x + 5.}} \end{aligned}$$

b) A hatványazonosságok felhasználásával először átalakítjuk $f(x)$ -et:

$$\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} = \sqrt{x \sqrt{x \cdot x^{1/2}}} = \sqrt{x \cdot (x^{3/2})^{1/2}} = (x \cdot x^{3/4})^{1/2} = (x^{7/4})^{1/2} = x^{7/8}.$$

Így

$$f'(x) = \left(\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \right)' = (x^{7/8})' = \frac{7}{8} \cdot x^{7/8-1} = \frac{7}{8} \cdot x^{-1/8} = \underline{\underline{\frac{7}{8 \sqrt[8]{x}}}}.$$

c) Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} \right)' = (x^3)' + (x^{-2})' - \frac{1}{5} \cdot (x^{-5})' = \\ &= 3x^2 + (-2) \cdot x^{-3} - \frac{1}{5} \cdot (-5) \cdot x^{-6} = \underline{\underline{3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}}}. \end{aligned}$$

d) Tetszőleges $a > 0$ paraméter esetén minden $x > 0$ pontban

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^a + a^x + ax + \frac{x}{a} + \frac{a}{x} \right)' = (x^a)' + (a^x)' + a \cdot (x)' + \frac{1}{a} \cdot (x)' + a \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = \\ &= \underline{\underline{a x^{a-1} + a^x \cdot \ln a + a + \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}}}. \end{aligned}$$

3. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := x^2 \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) \quad (x > 0),$

c) $f(x) := \frac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5} \quad (x \in \mathbb{R}),$

d) $f(x) := \frac{2^x + 1}{2 + \sin x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Megoldás. A szorzatra és a hányadosra vonatkozó deriválási szabályok szerint járunk el.

a) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f'(x) = (x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = \underline{\underline{2x \sin x + x^2 \cos x}}.$$

b) Ha $x > 0$, akkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x \cdot (\sqrt[3]{x^2} + e^2))' = (e^x)' \cdot (\sqrt[3]{x^2} + e^2) + e^x \cdot (x^{2/3} + e^2)' = \\ &= e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) + e^x\left(\frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} + 0\right) = e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) + \underline{\underline{\frac{2e^x}{3\sqrt[3]{x}}}}. \end{aligned}$$

c) A nevezőnek nincs valós gyöke ($D = 1^2 - 4 \cdot 5 < 0$), ezért a deriválási szabályok alapján $f \in D(\mathbb{R})$. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5} \right)' = \frac{(x^3 + 2)' \cdot (x^2 + x + 5) - (x^3 + 2) \cdot (x^2 + x + 5)'}{(x^2 + x + 5)^2} = \\ &= \frac{3x^2 \cdot (x^2 + x + 5) - (x^3 + 2) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 5)^2} = \underline{\underline{\frac{x^4 + 2x^3 + 15x^2 - 4x - 2}{(x^2 + x + 5)^2}}}. \end{aligned}$$

d) A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ négyzetes összefüggés miatt $|\sin x| \leq 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így a függvény nevezőjének nincs valós gyöke ($2 + \sin x > 0$), ezért a deriválási szabályok alapján $f \in D(\mathbb{R})$. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2^x + 1}{2 + \sin x} \right)' = \frac{(2^x + 1)' \cdot (2 + \sin x) - (2^x + 1) \cdot (2 + \sin x)'}{(2 + \sin x)^2} = \\ &= \underline{\underline{\frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot (2 + \sin x) - (2^x + 1) \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2}}}. \end{aligned}$$

Emlékeztető. Az összetett függvényre vonatkozó szabály azt mondja ki, hogy egy összetett függvény deriváltjához először a külső függvényt deriváljuk, miközben belseje érintetlen marad. Ezt utána még megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

Tétel. Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és valamilyen $a \in \text{int } \mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Sokszor többszörösen összetett függvényt kell deriválni. Az ilyen esetekben a fenti tételt többször egymás után „kívülről befele haladva” alkalmazzuk.

4. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := (5x^2 + 3x)^{2020} \quad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (x \geq 0),$

c) $f(x) := \sin \frac{x^2 + 1}{x + 3} \quad (x > -3),$

d) $f(x) := \sin^2 (\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1) \quad (x \in \mathbb{R}).$

Megoldás. Az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály szerint járunk el.

- a) Az f függvény a $h(t) := t^{2020}$ ($t \in \mathbb{R}$) külső és a $g(x) := 5x^2 + 3x$ ($x \in \mathbb{R}$) belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = (g(x))^{2020} = (5x^2 + 3x)^{2020} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\forall x \in \mathbb{R}$ pontban $g \in D\{x\}$ és $g'(x) = 10x + 3$, illetve $h \in D\{g(x)\}$ és $h'(t) = 2020t^{2019}$ ($t \in \mathbb{R}$), ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek. Így $f = h \circ g \in D(\mathbb{R})$ és

$$\begin{aligned} f'(x) &= (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2020 (g(x))^{2019} \cdot g'(x) = \\ &= \underline{\underline{2020 (5x^2 + 3x)^{2019} \cdot (10x + 3)}}. \end{aligned}$$

- b) Az f függvény a $h(t) := \sqrt{t}$ ($t \geq 0$) külső és a $g(x) := x + \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (x \geq 0).$$

Mivel $\forall x > 0$ pontban $g \in D\{x\}$, $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, és $h \in D\{g(x)\}$, $h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ ($t > 0$), ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei ezekben a pontokban teljesülnek. Így $f = h \circ g \in D(0, +\infty)$ és

$$\begin{aligned} f'(x) &= (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}}. \end{aligned}$$

Az f függvény a 0 pontban nem deriválható.

- c) Az f függvény a $h(t) := \sin t$ ($t \in \mathbb{R}$) külső és a $g(x) := \frac{x^2 + 1}{x + 3}$ ($x > -3$) belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint $f \in D(-3, +\infty)$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin \frac{x^2 + 1}{x + 3} \right)' = \cos \frac{x^2 + 1}{x + 3} \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3} \right)' = \\ &= \cos \frac{x^2 + 1}{x + 3} \cdot \frac{(x^2 + 1)' \cdot (x + 3) - (x^2 + 1) \cdot (x + 3)'}{(x + 3)^2} = \\ &= \cos \frac{x^2 + 1}{x + 3} \cdot \frac{2x \cdot (x + 3) - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x + 3)^2} = \cos \frac{x^2 + 1}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 6x - 1}{(x + 3)^2}. \end{aligned}$$

- d) Többszörösen összetett függvényről van szó. Az elemi függvények deriváltjait, valamint az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt többször egymás után (kívülről befele haladva) alkalmazva azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R})$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin^2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \right)' = \\ &= 2 \sin \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \cdot \left(\sin \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \right)' = \\ &= 2 \sin \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \cdot \cos \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \cdot \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right)' = \\ &= \sin \left(2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \cdot \left(\sqrt{1 + \cos^2 x} \right)' = \\ &= \frac{\sin \left(2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \right)}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}} \cdot (1 + \cos^2 x)' = \\ &= \frac{\sin \left(2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \right)}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}} \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) = \\ &= \underline{\underline{-\frac{\sin \left(2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1 \right) \right)}{2(1 + \cos^2 x)} \cdot \sin 2x}}. \end{aligned}$$

A fenti átalakításokban kétszer alkalmaztuk a $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ azonosságot.

5. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények differenciálhatók, és számítsuk ki a deriváltfüggvényeiket!

a) $f(x) := \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1-x} \quad (x > 0),$

b) $f(x) := (\ln x)^{x+1} \quad (x > 1).$

Megoldás. Olyan hatványokról van szó, amelyeknél az alap és a kitevő is változik, vagyis az f függvény

$$f(x) = (g(x))^{h(x)}$$

alakú, ahol a $g(x)$ alap pozitív. Az ilyen esetekben az átalakításhoz célszerű felhasználni a következő ötletet: írjuk fel a $g(x)$ alapot e hatványaként az

$$a = e^{\ln a} \quad (a > 0)$$

azonosság felhasználásával. Így azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (g(x))^{h(x)} = (e^{\ln g(x)})^{h(x)} = e^{h(x) \cdot \ln g(x)}.$$

Az f függvényt összetett függvényként fogjuk fel. Nevezetesen f az \exp külső és a $h \cdot \ln \circ g$ belső függvény kompozíciója.

a) Az $a = e^{\ln a}$ ($a > 0$) azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1-x} = \left(e^{\ln(1+\frac{1}{x})}\right)^{1-x} = e^{(1-x) \cdot \ln(1+\frac{1}{x})} = \exp\left((1-x) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Az f függvény tehát az \exp külső és az $(1-x) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ($x > 0$) belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények minden $x > 0$ pontban deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint $f \in D(0, +\infty)$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp' \left((1-x) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \cdot \left((1-x) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)' = \\ &= \exp \left((1-x) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left((-1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + (1-x) \cdot \ln' \left(1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)' \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1-x} \cdot \left(-\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1-x}{x(x+1)} \right). \end{aligned}$$

b) Mivel minden $x > 1$ pontban

$$f(x) = (\ln x)^{x+1} = (e^{\ln(\ln x)})^{x+1} = e^{(x+1) \cdot \ln(\ln x)} = \exp\left((x+1) \cdot \ln(\ln x)\right),$$

ezért az elemi függvények deriváltjainak és a deriválási szabályoknak a felhasználásával azt kapjuk, hogy $f \in D(1, +\infty)$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp' \left((x+1) \cdot \ln(\ln x) \right) \cdot \left((x+1) \cdot \ln(\ln x) \right)' = \\ &= \exp \left((x+1) \cdot \ln(\ln x) \right) \cdot \left(1 \cdot \ln(\ln x) + (x+1) \cdot \ln'(\ln x) \cdot \ln' x \right) = \\ &= (\ln x)^{x+1} \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} \right). \end{aligned}$$