2020.12.13.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
NUMERIKUS ANALÍZIS TANSZÉK

II. éves
Programtervező informatikus

Analízis 2

Kovács Sándor gyakorlata

(Szerda, 10^{00} – 11^{30}: ÉT-0.100B, 7. csoport)

2020. ősz

1. fejezet

Gyakorlatok

1.1. 1. oktatási hét (2020.09.09.)

Szükséges előismeretek.

- Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?
Válasz:
$$a \in H' \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ k_\varepsilon(a) \cap H \quad \text{végtelen halmaz.}$$

- Adott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim\limits_a f = A$ egyenlőségnek?
Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban $A \in \overline{\mathbb{R}}$ a határértéke, ha
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap (k_\delta(a) \backslash \{a\}) : \quad f(x) \in k_\varepsilon(A).$$

- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját!
Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor
$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f : \quad (0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon).$$

- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett véges* határérték definícióját!
Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$, ill. $A \in \mathbb{R}$. Ekkor
$$\lim_{+\infty} f = A \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \omega > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon).$$

- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját!
Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall P > 0 \quad \exists \omega > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad f(x) > P).$$

- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját!

Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, N < 0 \quad \exists\, \omega > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad f(x) < N).$$

- Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?
  Válasz: Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0} \big(a_n(x-c)^n\big)$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, ill. összegfüggvénye f:

$$f : (c-R, c+R) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

  Ekkor bármely $a \in (c-R, c+R)$ esetén létezik a $\lim_a f$ határérték és $\lim_a f = f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-c)^n$.

- Definiálja függvény jobb oldali határértékét!
  Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont a $H_a^+ := D_f \cap (a, +\infty)$ halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen létezik jobb oldali határértéke, ha az f függvény $f|_{H_a^+}$ leszűkítésének létezik a-beli határértéke.

- Fogalmazza meg a határértékre vonatkozó átviteli elvet!
  Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor igaz a

$$\lim_a f = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim(x_n) = a \quad \text{sorozatra} \quad \lim(f(x_n)) = A$$

  ekvivalencia.

Az óra anyaga.

Emlékeztető. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Azt mondtuk, hogy az f függvénynek az a pontban $A \in \overline{\mathbb{R}}$ a határértéke, ha

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \delta > 0, \quad \text{hogy} \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f \cap \big(k_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \quad \text{esetén} \quad f(x) \in k_\varepsilon(A)}.$$

Megjegyzés. Attól függően, hogy a, illetve A valós szám vagy $\pm\infty$, ezt a definíciót többféleképpen fogalmazhatjuk meg (vö. A határérték definíciója).

Feladat. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fogalmazzuk meg környezetekkel és egyenlőtlenségekkel az alábbi állításokat!

a) $\lim_{-2} f = 7$; b) $\lim_{1+0} f = +\infty$; c) $\lim_{+\infty} f = -1$; d) $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

Útm.

a) **Környezetekkel megfogalmazva:** $-2 \in \mathcal{D}_f'$ és

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \qquad \big(x \in k_\delta(-2) \setminus \{-2\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in k_\varepsilon(7)\big).$$

Egyenlőtlenségekkel megfogalmazva: $-2 \in \mathcal{D}_f'$ és

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \qquad (0 < |x - (-2)| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - 7| < \varepsilon)\,.$$

b) **Környezetekkel megfogalmazva:** $1 \in \mathcal{D}_f' \cap [1, +\infty)$ és $+\infty$ bármely V környezetéhez van az 1-nek olyan U jobb oldali környezete, hogy $f[\mathcal{D}_f \cap U \setminus \{1\}] \subset V$.
Egyenlőtlenségekkel megfogalmazva: $1 \in \mathcal{D}_f' \cap [1, +\infty)$ és

$$\forall\, P > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (1 < x < 1 + \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > P).$$

c) **Környezetekkel megfogalmazva: HÁZI FELADAT**.
Egyenlőtlenségekkel megfogalmazva: $+\infty \in \mathcal{D}_f'$ /így $\mathcal{D}_f$ felülről nem korlátos/ és

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \omega > 0\, \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - (-1)| < \varepsilon).$$

d) **Környezetekkel megfogalmazva: HÁZI FELADAT**.
Egyenlőtlenségekkel megfogalmazva: $-\infty \in \mathcal{D}_f'$ /így $\mathcal{D}_f$ alulról nem korlátos/ és

$$\forall\, P > 0\, \exists\, \alpha < 0\, \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x < \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(x) > P). \quad \blacksquare$$

Feladat. A definíció alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x}; \qquad 2.\ \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}; \qquad 3.\ \lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}.$$

Útm.

1. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R}),$$

így $0 \in \mathcal{D}_f'$. Látható, hogy ha „x közel van 0-hoz, akkor $f(x)$ közel van 1-hez”. Így sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| = \left| \frac{-x}{1+x} \right| = \frac{|x|}{|1+x|}.$$

Ha $|x| < \frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{2} < |1 + x|$, így

$$|f(x) - 1| < 2|x| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Következésképpen a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választás megfelelő.

2. Legyen

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $\pm\infty \in \mathcal{D}_f'$, hiszen $\mathcal{D}_f$ sem alulról, sem pedig felülről nem korlátos. Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f(x) = \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2+1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}}, \qquad \text{így sejthető, hogy} \qquad \lim_{\pm\infty} f = \frac{1}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|-3|}{4x^2 + 2} = \frac{3}{4x^2 + 2} < \frac{3}{4x^2} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \frac{3}{4\varepsilon}.$$

Tehát az

$$\alpha := -\sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}}, \qquad \text{ill.} \qquad \omega := \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}}$$

választás megfelelő.

3. Legyen

$$f(x) := \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{1; 2\}),$$

így $1 \in \mathcal{D}_f'$. Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(x + 1)(x^2 + 3)}{x - 2} = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x - 2},$$

ezért „ha x közel van 1-hez, akkor $f(x)$ közel van (-8)-hoz”. Sejtés: $\lim_{1} f = -8$.
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x) - (-8)| &= \left|\frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x - 2} + 8\right| = \left|\frac{x^3 + x^2 + 11x - 13}{x - 2}\right| = \\ &= \frac{|x^2 + 2x + 13|}{|x - 2|} \cdot |x - 1|. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A harmadik egyenlőtlenség a Horner-módszer következménye (vö. Mat. alapok):

	1	1	11	-13
1	1	2	13	0

Könnyen belátható (**HF**), hogy ha $0 < |x-1| < \frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{2} < |x-2|$ és $|x| < \frac{3}{2}$, következésképpen

$$\frac{|x^2+2x+13|}{|x-2|} < \frac{|x^2+2x+13|}{1/2} \leq \frac{|x|^2+2|x|+13}{1/2} < \frac{(3/2)^2+2\cdot(3/2)+13}{1/2} = \frac{73}{2} < 37.$$

Innen már látható, hogy a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{37}\right\}$ választás megfelelő. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy nem léteznek az $\lim\limits_{\pm\infty} f$ határértékek, ahol $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem állandó, periodikus függvény!

Útm. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és tegyük fel, hogy léteznek olyan $(x_n), (y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ sorozatok, amelyekre

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = a \quad \text{és} \quad \lim(f(x_n)) \neq \lim(f(y_n))$$

teljesül. Ekkor az átviteli elv felhasználásával megmutatható, hogy f-nek nincs határértéke a-ban. Ha f nem állandó, periodikus függvény, akkor van olyan $a, b \in \mathcal{D}_f$, hogy $f(a) \neq f(b)$. Így van olyan $p \in (0, +\infty)$, hogy p periódusa f-nek, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \pm np, b \pm np \in \mathcal{D}_f$, továbbá

$$f(a \pm np) = f(a), \quad f(b \pm np) = f(b) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen

$$x_n := a \pm np, \quad y_n := b \pm np \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = \pm\infty, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = f(a) \neq f(b) = \lim(f(y_n)). \quad ■$$

Emlékeztető. Legyen

$$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)', \qquad A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}, \ \ B := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. $\lim\limits_a (f \pm g) = A \pm B$, feltéve, hogy $A \pm B \in \overline{\mathbb{R}}$ értelmezve van;

2. $\lim\limits_a (f \cdot g) = A \cdot B$, feltéve, hogy $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ értelmezve van;

3. $\lim\limits_{a}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{A}{B}$, feltéve, hogy $\frac{A}{B}\in\overline{\mathbb{R}}$ értelmezve van.

Megjegyzés. Kritikus határertekek vizsgálata. Függvények határértékének a meghatározásánál „szerencsés esetekben” alkalmazhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára fentebb megfogalmazott állításokat. Ezek az eredmenyek akkor használhatók, ha a tetelben szereplő $\overline{\mathbb{R}}$-beli

$$A\pm B;\qquad AB;\qquad \frac{A}{B}$$

műveletek értelmezve vannak. Ha valamelyik művelet nincs ertelmezve, akkor a megfelelő függvenyek határértékéről általában semmit sem mondhatunk. Ezeket a kritikus határertekeket röviden a

$$(+/-\infty)+/-(+/-\infty),\qquad 0\cdot(\pm\infty),\qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\qquad \frac{0}{0},\qquad \frac{1}{0}$$

szimbólumokkal szoktuk jelölni. Ilyen esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert” követhetjük: a kritikus határértéket „valamilyen módon” (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékre átalakítani.

Feladat. Legyen $n\in\mathbb{N}_0$, $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$: $a_n\neq 0$. Mutassuk meg, hogy a

$$p(x):=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\qquad (x\in\mathbb{R})$$

polinom határértékéről a következők állíthatók!

1. bármely $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{\alpha}p=p(\alpha)$;
2. $\lim\limits_{+\infty}p=\operatorname{sgn}(a_n)(+\infty)$;
3. $\lim\limits_{-\infty}p=(-1)^n\operatorname{sgn}(a_n)(+\infty)$.

Útm.

1. Mivel bármely $\alpha\in\mathbb{R}$, ill. $n\in\mathbb{N}_0$ esetén $\lim\limits_{x\to\alpha}x^n=\alpha^n$, ezért a határértéek ées a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel következményeként

$$\lim_{\alpha}p=\lim_{x\to\alpha}(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=a_0+a_1\alpha+\ldots+a_n\alpha^n=p(\alpha).$$

2. Mivel bármely $0\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$p(x)=x^n\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\ldots+a_n\right),$$

továbbá

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ezért az állítás a határéerték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján nyilvánvaló.

3. Az előbbihez hasonlóan igazolható. ■

Megjegyzések.

1. A fenti feladatban az utolsó két állítás azat jelenti, hogy polinomok „viselkedését” a $\pm$ végtelen környezetében a polinom a_n főegyütthatója és n fokszámának paritása határozza meg, azaz polinom határértéke a $\pm$ végtelenben megegyezik az $a_n x^n$ főtag $\pm$ végtelenben vett határértékével.

2. Világos, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{-\infty} p &= \lim_{x\to+\infty} p(-x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k = \operatorname{sgn}((-1)^n a_n)(+\infty) = (-1)^n \operatorname{sgn}(a_n)(+\infty).\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $m, n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$: $a_m b_n \neq 0$ és

$$H := \{\xi \in \mathbb{R} : \; b_0 + b_1\xi + \ldots + b_n\xi^n = 0\}.$$

Mutassuk meg, hogy az

$$r(x) := \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1x + \ldots + b_n x^n} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash H)$$

racionális függvény esetében ha $\alpha \in \mathbb{R}\backslash H$, akkor

$$\boxed{\lim_{\alpha} r = r(\alpha)},$$

továbbá

$$\boxed{\lim_{+\infty} r = \begin{cases} 0 & (m < n), \\[2ex] \dfrac{a_m}{b_n} = \dfrac{a_m}{b_m} & (m = n), \\[2ex] \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_m}{b_n}\right)(+\infty) & (m > n), \end{cases}} \quad \text{és} \quad \boxed{\lim_{-\infty} r = \begin{cases} 0 & (m < n) \\[2ex] \dfrac{a_m}{b_n} = \dfrac{a_m}{b_m} & (m = n), \\[2ex] \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_m}{b_n}\right)(-1)^{m-n}(+\infty) & (m > n). \end{cases}}$$

Útm. Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R} \backslash H$ esetén

$$r(x) = x^{m-n} \cdot \frac{\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n},$$

ezért $\alpha \in \mathbb{R} \backslash H$ esetén a a határéérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján

$$\lim_{\alpha} r = \lim_{x \to \alpha} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} = \frac{a_0 + a_1 \alpha + \ldots + a_m \alpha^m}{b_0 + b_1 \alpha + \ldots + b_n \alpha^n} = r(\alpha).$$

Igaz továbbá, hogy

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} = \frac{a_m}{b_n},$$

ill.

$$\lim_{x \to +\infty} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & (m < n), \\ 1 & (m = n), \\ +\infty & (m > n), \end{cases}$$

és

$$\lim_{x \to -\infty} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ 1 & (m = n), \\ (-1)^{m-n}(+\infty) & (m > n), \end{cases}$$

ezért az állítás nyilvánvaló.

Példa. A fentiek alapján világos, hogy

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = 1;$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 7x^2 + 5x - 1} = 0;$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 23}{-3x^3 - 5x^2 + 31x + 1} = -\dfrac{2}{3};$ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 11x + 2}{x^2 + 3x + 2} = +\infty.$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2};$ 2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10};$ 3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}.$

Útm.

2020.12.13.

1. Legyen

$$f(x) := \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}).$$

Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{x^3 - x + 1}{(x-1)(x+2)},$$

ezért $\lim_{1\pm 0} f = \pm\infty$ következtében $\nexists \lim_{1} f$.

2. Legyen

$$f(x) := \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{2; 5\}).$$

Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-5)} = \frac{x-3}{x-5},$$

ezért $\lim_{2} f = \frac{1}{3}$.

3. Legyen

$$f(x) := \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)}{\cancel{(x-1)}(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)} = \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1},$$

ezért $\lim_{1} f = \dfrac{m}{n}$.

Feladat. A gyöktelenítés technikájával határozzuk meg az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ $(2 \leq n \in \mathbb{N})$.

Útm.

1. Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \qquad (0 \neq x \in (-1, +\infty)).$$

Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1},$$

ezért $\lim_{0} f = 1/2$.

2. Legyen
$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} \qquad (0 \neq x \in [-1,1]).$$
Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \\ &= \frac{(1+x-1+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$
ezért $\lim\limits_0 f = 1$.

3. **Emlékeztető.** Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az
$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)} \tag{1.1}$$
egyenlőség. Legyen tehát
$$f(x) := \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \qquad (0 \neq x \in (-1,+\infty)).$$
Ekkor (1.1) felhasználásával azt kapjuk, hogy bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1} = \\ &= \frac{1+x-1^n}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1}, \end{aligned}$$
ezért
$$\lim_0 f = \frac{1}{n}. \quad \blacksquare$$

Házi feladatok.

1. A definíció alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x+5}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

2. Számítsuk ki a következő határértékeket!

(a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$; (b) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Útm.

1. (a) Legyen

$$f(x) := \sqrt{2x+5} \qquad (-5/2 \leq x \in \mathbb{R}),$$

így $2 \in \mathcal{D}_f'$. Látható, hogy ha „x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van 3-hoz”. Így sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{2x+5} = 3.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$|f(x)-3| = \left|\sqrt{2x+5}-3\right| \cdot \frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3} = \frac{|2x-4|}{\sqrt{2x+5}+3} = \frac{2|x-2|}{\sqrt{2x+5}+3} \leq \frac{2}{3}\cdot|x-2| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-2| < \frac{3\varepsilon}{2}.$$

Következésképpen a $\delta := \frac{3\varepsilon}{2}$ választás megfelelő.

(b) A nevező gyöktényezős felbontásához a Horner-módszert használva:

	1	−2	−1	2
1	1	−1	−2	0

jól látható, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^3-2x^2-x+2 = (x-1)(x^2-x-2) = (x-1)(x+1)(x-2).$$

Legyen tehát

$$f(x) := \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1;2\}),$$

így $2 \in \mathcal{D}_f'$. Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{x^2-1},$$

ezért látható, hogy ha „x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van $\left(-\frac{1}{3}\right)$-hoz”. Így sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2} = -\frac{1}{3}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$\left|f(x)-\left(-\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{x-3}{x^2-1}+\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{x^2+3x-10}{3(x^2-1)}\right| = \left|\frac{(x+5)(x-2)}{3(x^2-1)}\right| = \frac{|x+5|}{3|x^2-1|}\cdot|x-2|.$$

Ha most $2 \neq x \in (2-1/2, 2+1/2) = (3/2, 5/2)$, akkor

$$\frac{13}{2} < |x+5| < \frac{15}{2} \qquad \text{és} \qquad \frac{5}{4} < |x^2-1| < \frac{21}{4},$$

2020.12.13.

így

$$\frac{|x+5|}{3|x^2-1|}\cdot|x-2| < \frac{\frac{15}{2}}{3\cdot\frac{5}{4}}\cdot|x-2| = 2\cdot|x-2| < \varepsilon \qquad\Longleftrightarrow\qquad |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Következésképpen a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választás megfelelő.

2. (a) Legyen

$$f(x) := \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $1 \in \mathcal{D}'_f$ és minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}$$

ezért $\lim_1 f = \frac{3}{3} = 1.$

(b) Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \qquad (5 \neq x \in (1,+\infty)).$$

Ekkor $5 \in \mathcal{D}'_f$ és minden $5 \neq x \in (1,+\infty)$ esetén

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{x-5}{(x-5)\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2},$$

ezért $\lim_5 f = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$ ■

Gyakorló feladatok.

1. A definíció alapján lássuk be, hogy

$$\boxed{\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}}$$

határérték-reláció!

2. A definíció alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}$; (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-\sin(x)}{x^2+\sin(x)}$; (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2}{1+x^2}$.

3. Adott $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$ esetén számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1} - \frac{b}{x^3-1}\right)$$

határértéket!

4. Adott $m, n \in \mathbb{N}$, ill. $a, b \in (0,+\infty)$ esetén számítsuk ki a

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^a} - \dfrac{b}{1-x^b}\right)$

határértékeket!

5. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1}-\frac{x^2-x}{x+1}\right)$$

határértékeket, amennyiben az létezik!

6. Számítsuk ki a

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right);\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right);\quad \text{(c)}\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

határértékeket, amennyiben azok léteznek!

7. Számítsuk ki a

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1};\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}.$$

határértékeket, amennyiben azok léteznek!

8. Legyen $\alpha\in\mathbb{R}$. Számítsuk ki a

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}.$$

határértékeket, amennyiben azok léteznek!

9. Milyen $a, b\in\mathbb{R}$ esetén teljesül a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right)=0$$

határértékreláció?

10. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}{x^2-1};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+5x}-x-1}\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

11. Legyen $m, n\in\mathbb{N}$, $a\in(0,+\infty)$. Számítsuk ki a következő határértékeket, amennyiben azok léteznek!

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x}+1};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}.$$

12. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

13. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\cdot\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$;

(e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

14. Legyen $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathcal{D}_f'$ és tegyük fel, hogy $\lim\limits_{a} f\in(0,+\infty)$. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\delta>0$, hogy

$$x\in\mathcal{D}_f\cap(K_\delta(a)\backslash\{a\}) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)>0$$

teljesül!

15. Fogalmazzuk meg a függvények határértékére vonatkozó Sandwich-tételt!

16. Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right]$ határértékeket!

17. **Megjegyzés.** Legyenek $f,g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre

$$\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g =: \mathcal{D}\neq\emptyset \qquad \text{és} \qquad f(x)>0 \quad (x\in\mathcal{D})$$

teljesül. Ekkor

$$(f^g)(x) := f(x)^{g(x)} := \exp\left(g(x)\ln(f(x))\right) \qquad (x\in\mathcal{D}).$$

Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

határértékeket!

18. Mutassuk meg, hogy nem léteznek az alábbi határértékek!

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{2-x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Útm.

1. Legyen
$$f(x) := \sqrt[n]{x} \qquad (x\in[0,+\infty)).$$
Így $a\in D_f'$ és két eset van:

- $a>0$: legyen $\varepsilon>0$ adott és $\delta := \min\left\{a, \varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}\right\}$. Ekkor minden $0<|x-a|<\delta$ valós számra
$$\left|f(x)-\sqrt[n]{a}\right| = \left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[n]{x^{n-k}a^{k-1}}} \le \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \begin{cases} \dfrac{\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \varepsilon & (\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}\le a),\\[2ex] \dfrac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \varepsilon & (\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}} > a),\end{cases}$$
tehát $\lim\limits_{a} f = \sqrt[n]{a}$.
- $a=0$: tegyük fel, hogy $\lim\limits_{a} f \ne \sqrt[n]{a}$. Ekkor van olyan $\varepsilon>0$, hogy minden $\delta>0$ (így pl. $\delta := \varepsilon^n$) esetén $\exists x\in(0,\delta)$: $\sqrt[n]{x}\ge\varepsilon$, azaz $\exists x\in(0,\varepsilon^n)$: $\sqrt[n]{x}\ge\varepsilon$, azaz $x\ge\varepsilon^n$, ami nem igaz.

2. (a) Legyen
$$f(x) := \frac{x^3+1}{x^2-2x-3} = \frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x^2-x+1}{x-3} \qquad (x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,3\}).$$
Ekkor $-1\in\mathcal{D}_f'$, és sejthető, hogy
$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} = \frac{3}{-4} =: A.$$
Azt kell tehát megmutatni, hogy
$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,x\in\mathcal{D}_f:\quad \left(0<|x+1|<\delta \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{x^2-x+1}{x-3}-A\right|<\varepsilon\right).$$
Világos, hogy bármely $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,3\}$ esetén
$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-3}-A\right| = \left|\frac{4x^2-4x+4+3x-9}{4(x-3)}\right| = \frac{|4x^2-x-5|}{4|x-3|} = \frac{|(x+1)(4x-5)|}{4|x-3|} = \frac{|4x-5|}{4|x-3|}\cdot|x+1|.$$
Ha most $-1\ne x\in(-1-1,-1+1)=(-2,0)$, akkor
$$5<|4x-5|<13, \qquad \text{ill.} \qquad 3<|x-3|<5.$$
Ez azt jelenti, hogy bármely $x\in\mathbb{R}$: $0<|x+1|<1$ esetén
$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-3}-A\right| < \frac{13}{4\cdot 3}\cdot|x+1|.$$
Ekkor valamely $\varepsilon>0$ esetén
$$\frac{13}{12}\cdot|x+1|<\varepsilon \qquad\Longleftrightarrow\qquad |x+1|<\frac{12\varepsilon}{13}.$$

Így tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta := \min\left\{1, \frac{12\varepsilon}{13}\right\} > 0$ szám, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ elemre

$$0 < |x+1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} - A\right| < \frac{13}{12}\cdot|x+1| < \varepsilon.$$

(b) Legyen

$$f(x) := \frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1} = \frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x+7}{x^2+1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $1 \in \mathcal{D}_f'$, és sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1} = \frac{8}{2} = 4 =: A.$$

Azt kell tehát megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad \left(0 < |x-1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x+7}{x^2+1} - A\right| < \varepsilon\right).$$

Világos, hogy bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1} - A\right| = \left|\frac{4x^2-x-3}{x^2+1}\right| = \frac{|(x-1)(4x+3)|}{x^2+1} = \frac{|4x+3|}{x^2+1}\cdot|x+1|.$$

Ha most $1 \neq x \in (1-1, 1+1) = (0,2)$, akkor

$$\frac{|4x+3|}{x^2+1} = \frac{4x+3}{x^2+1} < \frac{4\cdot 2+3}{1} = 11.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$: $0 < |x-1| < 1$ esetén

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1} - A\right| < 11\cdot|x-1|.$$

Ekkor valamely $\varepsilon > 0$ esetén

$$11\cdot|x-1| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-1| < \frac{\varepsilon}{11}.$$

Így tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\} > 0$ szám, hogy bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ elemre

$$0 < |x-1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} - A\right| < 11\cdot|x-1| < \varepsilon.$$

(c) Legyen

$$f(x) := \frac{x^2-\sin(x)}{x^2+\sin(x)} \qquad (1 < x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $\mathcal{D}_f$ felülről nem korlátos, így $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Látható, hogy ha „x elég nagy”, akkor $f(x) \approx 1$, innen sejthető, hogy $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f = (1+,\infty)$ esetén $x^2 + \sin(x) > 0$ és így

$$|f(x)-1| = \left|\frac{x^2-\sin(x)}{x^2+\sin(x)} - 1\right| = \left|\frac{-2\sin(x)}{x^2+\sin(x)}\right| = \frac{2\cdot|\sin(x)|}{x^2+\sin(x)} \le \frac{2}{x^2-1} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Így az $\omega := \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}$ választás megfelelő.

(d) Legyen

$$f(x) := \frac{3x^2}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $\pm\infty \in \mathcal{D}_f'$. Sejtés: $\lim\limits_{\pm\infty} f = 3$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és

$$\alpha := -\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}, \qquad \text{ill.} \qquad \omega := \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Ekkor minden $x > \omega$ ill. $x < \alpha$ valós számra

$$|f(x) - 3| = \frac{3}{1+x^2} < \frac{3}{x^2} < \varepsilon.$$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x^3-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $1 \in \mathcal{D}_f'$ és minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{a}{x-1} - \frac{b}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a(x^2+x+1)-b}{x^3-1} = \begin{cases} \dfrac{a(x+2)}{x^2+x+1} & (b = 3a), \\[2ex] \dfrac{ax^2+ax+a-b}{x^3-1} & (b \neq 3a), \end{cases}$$

ezért $\lim\limits_{1} f = a$, ha $b = 3a$, ill. $b \neq 3a$ esetén $\nexists \lim\limits_{1} f$, ui. $\lim\limits_{1\pm0} f = \operatorname{sgn}(3a - b) \cdot (\pm\infty)$.

4. (a) Legyen

$$f(x) := \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

- Ha $m = n = 1$, akkor bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = 0,$$

így

$$\lim_{1} f = 0 = \frac{1-1}{2}.$$

- Ha $m = 1$, $n > 1$, akkor bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n} = \frac{1}{1-x} - \frac{n}{(1-x)\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k - n}{1-x^n} = \frac{-(1-x)\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-2}(n-k-1)x^k}{(1-x)\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} = \\ &= \frac{-\sum\limits_{k=0}^{n-2}(n-k-1)\cdot x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} \longrightarrow -\frac{(n-1)n - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - n + 1}{n} = -\frac{2n^2 - 2n - n^2 + 3n - 2 - 2n + 2}{2n} = \\ &= -\frac{n^2 - n}{2n} = \frac{1-n}{2} \qquad (x \to 1). \end{aligned}$$

- Ha $m > 2$, $n = 1$, akkor a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{1} f = \dfrac{m-1}{2}$.
- Tegyük fel, hogy $2 \leq m, n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $x =: 1 + h$ helyettesítést alkalmazva bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$, azaz $0 \neq h \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} &= \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} = \\ &= \frac{m}{1-(1+h)^m} - \frac{n}{1-(1+h)^n} = \frac{m}{1 - \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} h^k} - \frac{n}{1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k} = \frac{m}{-\sum\limits_{k=1}^{m} \binom{m}{k} h^k} - \frac{n}{-\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-m\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k + n\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\right)} = \frac{-mnh - m\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k + nmh + n\sum\limits_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\right)} = \\
&= \frac{n\sum\limits_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^k - m\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} = \frac{h^2n\sum\limits_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^{k-2} - h^2m\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2}}{\left(h\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(h\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} = \\
&= \frac{n\sum\limits_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^{k-2} - m\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} \longrightarrow \frac{n\binom{m}{2} - m\binom{n}{2}}{\binom{m}{1}\binom{n}{1}} = \frac{n\dfrac{m(m-1)}{2} - m\dfrac{n(n-1)}{2}}{mn} = \\
&= \frac{m-n}{2} \quad (h \to 0).
\end{aligned}
$$

(b) Felhasználva, hogy bármely $\mu \in \mathbb{R}$, ill. $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$
x^{\mu} = \exp(\mu \cdot \ln(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \cdot \ln(x))^n}{n!}
$$

teljesül, a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$
\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}\right) = \frac{a-b}{2}.
$$

5. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ esetén

$$
\frac{x^2+x}{x-1} - \frac{x^2-x}{x+1} = \frac{(x^2+x)(x+1) - (x^2-x)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^3+2x^2+x-x^3+2x^2-x}{x^2-1} = \frac{4x^2}{x^2-1},
$$

ezért

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1} - \frac{x^2-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2-1} = 4.
$$

6. (a) Világos, hogy

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1.
\end{aligned}
$$

(b) A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1} - 3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1} - 3x\right)\cdot\frac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{\sqrt{9x^2+1}+3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x} = 0.
$$

(c) Egyszerű átalakítással azt kapjuk, hogy bármely $1 \neq x \in (0, +\infty)$ számra

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} &= \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})} = \frac{x(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})} = \\
&= \frac{x\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+\sqrt{x})} \longrightarrow \frac{1\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)}{1+1} = 3 \quad (x \to 1).
\end{aligned}
$$

7. (a) Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4} = \frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = 4.$$

(b) Mivel bármely $2 \neq x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} &= \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{x^2-4}{x-2}(\sqrt{x-1}+1) = \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}(\sqrt{x-1}+1) = (x+2)(\sqrt{x-1}+1),\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x-1}+1) = 4\cdot 2 = 8.$$

(c) Világos, hogy

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(1-x^2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{(1+x)(\sqrt{x+3}+2)} = -\frac{1}{8}.$$

8. (a) Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1} = \frac{x^2\cdot(\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{1+\alpha x-(x^2+2x+1)} = \frac{x^2\cdot(\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{-x^2+(\alpha-2)x} = \frac{x\cdot(\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{-x+\alpha-2},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(-(\sqrt{1+2x}+x+1)\right) = -2 & (\alpha = 2), \\[2ex] \dfrac{0}{\alpha-2} = 0 & (\alpha \neq 2). \end{cases}$$

(b) Világos, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\alpha} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} &= \lim_{x\to\alpha} \frac{1+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}}{\sqrt{x+\alpha}} = \lim_{x\to\alpha}\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}} \cdot \lim_{x\to\alpha}\left(1+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\lim_{x\to\alpha}\left(1+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\left(1+\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})\sqrt{x-\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\left(1+\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.\end{aligned}$$

9. Világos, hogy $a \leq 0$ esetén a keresett határérték $+\infty$. Tegyük fel most, hogy $a > 0$. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b) = \frac{x^2-x+1-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b} = \frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b},$$

ezért két esetet különböztetünk meg:

1. eset ($a^2 \neq 1$)**:**

$$\frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b} = \frac{x}{x}\cdot\frac{(1-a^2)x-(2ab+1)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}} =: \frac{g(x)}{h(x)} \qquad (x \neq 0),$$

ahol

$$\lim_{+\infty} g = \begin{cases} +\infty & (a^2 < 1), \\ -\infty & (a^2 > 1) \end{cases} \qquad \lim_{+\infty} h = 1 + a \; (\neq 0).$$

Így

$$\lim_{+\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)) = \begin{cases} +\infty & (a < 1), \\ -\infty & (a > 1). \end{cases}$$

2. eset ($a^2 = 1$, **azaz** $a = 1$)**:** $\lim_{+\infty} g = -2b - 1$; $\lim_{+\infty} h = 2$. Így

$$\lim_{+\infty} f = -\frac{1 + 2b}{2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = -\frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\lim_{+\infty} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{a = 1, \; b = -\frac{1}{2}}.$$

10. (a) Az

$$y := \sqrt[6]{x + 2}$$

helyettesítést alkalmazva azt kapjuk, hogy bármely $-1 \neq x \in (-2, 0)$, azaz $1 \neq y \in (0, \sqrt[6]{2})$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}}{x^2 - 1} &= \frac{y^3 - y^2}{(y^6 - 2)^2 - 1} = \frac{y^3 - y^2}{y^{12} - 4y^6 + 3} = \frac{y^2(y - 1)}{(y^6 - 1)(y^6 - 3)} = \\ &= \frac{y^2\cancel{(y - 1)}}{\cancel{(y - 1)}(y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + 1)(y^6 - 3)} = \\ &= \frac{y^2}{(y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + 1)(y^6 - 3)} \longrightarrow \frac{1}{-12} \quad (y \to 1). \end{aligned}$$

(b) Könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + 5x} - x - 1} &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + 5x} - x - 1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 + 5x)(x + 1)} + (x + 1)^2}{\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 + 5x)(x + 1)} + (x + 1)^2} = \\ = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left[\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 + 5x)(x + 1)} + (x + 1)^2 \right]}{(1 + 5x) - (x + 1)^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left[\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 + 5x)(x + 1)} + (x + 1)^2 \right]}{1 + 5x - x^3 - x^2 - x - 1} = \\ = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 + 5x)(x + 1)} + (x + 1)^3}{-x^2 - x + 4} &= 0 \cdot \frac{3}{4} = 0. \end{aligned}$$

(c) Mivel bármely $0 \neq x \in (-1, 1)$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x} &= \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)(1 - x)} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}}{\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)(1 - x)} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}} = \\ &= \frac{2x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)(1 - x)} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}}, \end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)(1 - x)} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}} = \frac{2}{3}.$$

11. (a) $$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[5]{x} + 1} = \lim_{y \to -1} \frac{\sqrt[3]{y^{15}} + 1}{\sqrt[5]{y^{15}} + 1} = \lim_{y \to -1} \frac{y^5 + 1}{y^3 + 1} = \lim_{y \to -1} \frac{\cancel{(y + 1)}(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1)}{\cancel{(y + 1)}(y^2 - y + 1)} = \frac{5}{3}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{y^{mn}}-1}{\sqrt[n]{y^{mn}}-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^n-1}{y^m-1}=\dfrac{n}{m}.$

12. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{\sqrt{1+0}+0}{\sqrt[4]{0+0}-1}=-1.$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right\}}{\cancel{x}\left\{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right\}}=\dfrac{1-0}{1-0}=1.$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7}\left\{\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^7}}+\sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt[5]{13}}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}}}\right\}}{\sqrt[3]{x^4}\left\{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^8}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right\}}=(+\infty)\cdot\dfrac{1+0}{1-0}=+\infty.$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}\cdot\left\{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{x^{11}}}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^{20}}}}\right\}}{\sqrt[3]{x^7}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}}=0\cdot\dfrac{1-0}{1}=0.$

13. (a) Mivel tetszőleges $1\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1} &= \frac{\sqrt[3]{7+x^3}}{x-1}-\frac{\sqrt{3+x^2}}{x-1}=\frac{7+x^3-8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{(7+x^3)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)}-\frac{3+x^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}=\\ &= \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{(7+x^3)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)}-\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)},\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}=\frac{1+1+1}{4+4+4}-\frac{1+1}{2+2}=-\frac{1}{4}.$$

(b) Világos, hogy bármely $x\in(1,+\infty)$ számra

$$\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{x^3+1-(x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)}=\frac{2}{\sqrt[6]{x^5}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)},$$

így

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)=\frac{2}{(+\infty)(1+1)}=0.$$

(c) Mivel bármely $x\in(0,+\infty)$ számra

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1},\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+x}}-\sqrt{x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

(d) Mivel bármely $x \in (0, +\infty)$ számra

$$\begin{aligned}
x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) &= x^3\cdot\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}} = \\
&= x^3\cdot\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}} = x^3\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}} = \\
&= x^3\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2} = x^3\cdot\frac{x^4+1-x^4}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)} = \\
&= \frac{x^3}{x^3\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)},
\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot(1+1)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(e) Mivel tetszőleges $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x} &= \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)x}+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1} = \\
&= \frac{(1+2x+1)\left(\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(2+x+x^3)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)} = \frac{2\cancel{(x+1)}\left(\sqrt[3]{(2+x)^2}-\sqrt[3]{(2+x)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+2)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)},
\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x} = \frac{2\cdot(1+1+1)}{(1+1+2)\cdot(1+1+1)} = \frac{1}{2}.$$

(f) Világos, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}\ \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} &= \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+2^3} = \lim_{x\to-2}\frac{x-6+8}{(x+2)(x^2-2x+4)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}-\sqrt[3]{(x-6)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)} = \\
&= \lim_{x\to-2}\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}-\sqrt[3]{(x-6)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)} = \\
&= \frac{1}{(4+4+4)\cdot(4+4+4)} = \frac{1}{144}.
\end{aligned}$$

14. A határérték definíciója alapján van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in D_f \cap (K_\delta(a)\backslash\{a\})$ esetén $|f(x) - A| < A$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha

$$-A < f(x) - A < A, \qquad \text{azaz} \qquad 0 < f(x) < 2A.$$

Megjegyzés. Az állítás nem fordítható meg, ui. az

$$f(x) := \begin{cases} |x| & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény csak pozitív értéket vesz fel, de $\lim_a f = 0$. Igaz viszont a következő (az átviteli elvvel könnyen bebizonyítható) állítás:
Ha f-nek van a-ban határértéke és minden $x \in D_f \cap ((a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\})$ esetén $f(x) \geq 0$, akkor $\lim_a f \geq 0$. ■

15. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$: $f \leq g \leq h$. Ekkor

$$\exists \lim_a f = \lim_a h =: A \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \lim_a g = A. \quad \blacksquare$$

16. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x - 1 < [x] \leq x$, ezért minden $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x},$$

ill.

$$1 - x = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad (x \in (0, +\infty))$$

és

$$1 - x = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) > x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \geq x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad (x \in (-\infty, 0)),$$

így a Sandwich-tétel következményeként azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

(Pál Jenő megoldása.)

17. Mivel minden $x \in (0, +\infty)$ esetén $x - 1 < [x] \leq x$, ezért

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

így a Sandwich-tétel alapján

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e. \quad \blacksquare$$

18. (a) Legyen

$$x_n := -\frac{1}{n}, \quad y_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = -1 \neq 1 = \lim(f(y_n)).$$

(b) Legyen

$$x_n := 1 + \frac{n}{n+1}, \quad y_n := 2 + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 2, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = +\infty \neq -\infty = \lim(f(y_n)).$$

(c) Legyen

$$x_n := \frac{1}{n\pi}, \quad y_n := \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = 0 \neq 1 = \lim(f(y_n)). \quad \blacksquare$$

1.2. 2. oktatási hét (2020.09.16.)

Szükséges előismeretek.

- Definiálja az exp függvényt!

Válasz:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- Definiálja a sin, ill. a sh függvényt!

Válasz:

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{ill.} \quad \mathrm{sh}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- Definiálja a cos, ill. a ch függvényt!

Válasz:

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{ill.} \quad \mathrm{ch}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát!

Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f folytonos a-ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f : \quad (|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

- Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát!

Válasz: Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *megszüntethető szakadási* helye van, ha

$$\exists \lim_a f \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_a f \neq f(a).$$

- Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát!

Válasz: Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban *elsőfajú szakadási* helye van, ha

$$\exists \lim_{a \pm 0} f \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_{a-0} f \neq \lim_{a+0} f.$$

- Fogalmazza meg a határérték és a folytonosság kapcsolatáról szóló tételt!

Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$. Ekkor igaz az

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_a f = f(a)$$

ekvivalencia.

- Fogalmazza meg a Bolzano-tételt! Mit jelent az, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Darboux-tulajdonságú?

Válasz: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor f **Darboux-tulajdonságú**: minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz, azaz bármely

$$\eta \in (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a))$$

esetén van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $f(\xi) = \eta$ teljesül.

- Fogalmazza meg a Heine-tételt!
  Válasz: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor egyenletesen folytonos, azaz

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathcal{D}_f : \qquad (|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \,.$$

Az óra anyaga.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $0 \notin \mathcal{R}_f$, ill. $\lim_a f = 0$, akkor

$$\lim_a \frac{\sin \circ f}{f} = 1$$

teljesül!

Útm. Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^5 \varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+5)!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad |\varphi(x)| < 1 \quad (|x| < 1),$$

ui.

$$|\varphi(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+5)!} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{(2n+5)!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+5}} = \frac{1}{24} < 1.$$

Mivel $a \in D_f'$, ezért $\forall x \in \mathcal{D}_f \backslash \{a\}$ esetén

$$\left(\frac{\sin \circ f}{f} \right)(x) = \frac{1}{f(x)} \left(f(x) - \frac{f^3(x)}{6} + f^5(x) \varphi(f(x)) \right) .$$

Mivel $\lim_a f = 0$, ezért az $\varepsilon := 1$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x)| < 1 \qquad (x \in (k_\delta(a) \backslash \{a\}) \cap \mathcal{D}_f) \,,$$

azaz $|\varphi(f(x))| < 1$. Ezért

$$\lim_a \frac{\sin \circ f}{f} = 1 - \frac{(0)^2}{6} + 0 = 1. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki a következő határértékeket, amennyiben azok léteznek:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ $(a, b \in \mathbb{R} : \ b \neq 0)$;
2. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$;
3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$;
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3}$.

Útm.

1. Világos, hogy
$$\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\frac{\frac{\sin(ax)}{ax}}{\frac{\sin(bx)}{bx}}\cdot\frac{ax}{bx}\longrightarrow\frac{1}{1}\cdot\frac{a}{b}\qquad(x\to 0).$$

2. A törtet bővítve azt kapjuk, hogy az $x\to 0$ határátmenetben
$$\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))}=\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\longrightarrow 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3. A törtet bővítve azt kapjuk, hogy az $x\to 0$ határátmenetben
$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x}&=\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))}=\frac{\sin^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}=\\&=\sin(x)\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\longrightarrow 0\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=0.\end{aligned}$$

   Megjegyzés. Tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén
$$\frac{1-\cos(x)}{x}=\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot x\longrightarrow\frac{1}{2}\cdot 0=0\qquad(x\to 0).$$

4. Némi átalakítás után azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}=1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\qquad\blacksquare$$

Feladat. A hatványsorokra vonatkozó ismeretek alkalmazásával határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$; 2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^x$; 3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x$; 4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)}$.

Útm.

1. Felhasználjuk, hogy
$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Ekor ui.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.$$

2. Mivel bármely $0<x\in\mathbb{R}$ esetén

$$e^x = 1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}>x,$$

ezért $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

3. Legyen $x=-y$. Ha $x\to-\infty$, akkor $y\to+\infty$. Ennélfogva

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{y\to+\infty}e^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

4. Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-2x}{x-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n-(-1)^nx^n}{n!}-2x}{x-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!}-2x}{x-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{(2n+1)!}-2}{1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{(2n+1)!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3!}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}\right)}{\frac{1}{3!}+\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}\right)}=\frac{2\left(\frac{1}{3!}-0\right)}{\frac{1}{3!}+0}=2. \quad\blacksquare$$

Emlékeztető. Azt mondjuk az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban (jelben $f \in \mathfrak{C}[a]$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon|)\,.$$

Feladat. A definíció alapján mutassuk meg, hogy folytonosak az alábbi függvények!

$$1.\ f(x) := |x^2 - 4| \quad (x \in [-3,5]); \qquad 2.\ f(x) := x^2 + 2x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Útm.

1. Legyen $a \in [-3,5]$, $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor bármely $x \in [-3,5]$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left||x^2-4| - |a^2-4|\right| \leq \left|x^2 - a^2\right| = |x+a| \cdot |x-a| \leq \\ &\leq (|x| + |a|)|x-a| \leq 10|x-a|. \end{aligned}$$

   Ha tehát $\delta := \dfrac{\varepsilon}{10}$, akkor bármely $x \in [-3,5]$, $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ adott. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 + 2x - 3 - (a^2 + 2a - 3)| = |x^2 - a^2 + 2x - 2a| = \\ &= |x + a + 2| \cdot |x - a|. \end{aligned}$$

   Ha $x \in (a-1, a+1)$, akkor $|x + a + 2| \leq |x| + |a| + 2 \leq 2|a| + 3$, így

$$|f(x) - f(a)| \leq (2|a| + 3)|x - a|.$$

   A

$$\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|a|+3}\right\}$$

   választás tehát megfelelő, azaz tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. ■

Feladat. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor az a pontnak van olyan környezete, amelyben f csak pozitív értéket vesz fel!
Útm. Az f függvény a pontbeli folytonossága következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz, így az $\varepsilon := f(a)$-hoz is van olyan $\delta > 0$, hogy bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, azaz

$$|f(x) - f(a)| < f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad -f(a) < f(x) - f(a) < f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < f(x) < 2f(a). \quad ■$$

Megjegyzés. Az, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **nem folytonos** valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, azt jelenti, hogy

$$f \notin \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (|x - a| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon).$$

Sorozatokkal ugyanez megfogalmazva:

$$\exists\, x_n \in \mathcal{D}_f \ (n \in \mathbb{N}) : \ \lim(x_n) = a \qquad \text{és} \qquad (\nexists \lim(f(x_n)) \quad \vee \quad \lim(f(x_n)) \neq f(a)).$$

Példa. Az

$$f(x) := \{x\} := x - [x] \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény, ill. $a \in \mathbb{Z}$ esetén $f \notin \mathfrak{C}[a]$, ui. ha

$$x_n := a - \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\lim(x_n) = a$ és

$$\lim(f(x_n)) = \lim\left(a - \frac{1}{n} - \left[a - \frac{1}{n}\right]\right) = \lim\left(a - \frac{1}{n} - (a-1)\right) = 1 \neq 0 = f(a). \quad \blacksquare$$

Emlékeztető (A határérték és a folytonosság kapcsolata). Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, akkor igaz az

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_a f = f(a)$$

ekvivalencia.

Feladat. Jelölje $r > 0$ egy $m > 0$ tömegű testnek a Föld középpontjától vett távolságát. A Föld nehézségi, ill. gravitációs erőtere által a testre gyakorolt erő nagysága:

$$F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad F(r) := \begin{cases} \dfrac{\gamma m M r}{R^3} & (r < R), \\[2ex] \dfrac{\gamma m M}{r^2} & (r \geq R), \end{cases}$$

ahol M a Föld tömege, R a Föld sugara, $\gamma > 0$ pedig a gravitációs állandó. Folytonosan függ-e a gravitációs erő az r távolságtól, azaz folytonos-e fenti függvény?
Útm. Világos, hogy $F|_{(0,R)}$ és $F|_{(R,+\infty)}$ folytonos. Mivel

$$R \in \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_F' \qquad \text{és} \qquad \lim_{r \to R} F(r) = \frac{\gamma m M}{R^2} = F(R),$$

ezért F folytonos. $\blacksquare$

Emlékeztető (Szakadási helyek osztályozása). Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $a \in \mathcal{D}_f$ az f függvény **szakadási hely**e, ha $f \notin \mathfrak{C}[a]$. A szakadás

- **megszüntethető**, ha $\lim_a f \in \mathbb{R}$, de $\lim_a f \neq f(a)$;
- **elsőfajú**, ha
$$\exists \lim_{a \pm 0} f \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_{a-0} f \neq \lim_{a+0} f.$$
- **másodfajú** minden más esetben.

Feladat. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} & (x \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}), \\ \alpha & (x = 2), \\ 0 & (x = 5). \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!
Útm. Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel minden $x \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}$ esetén

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5},$$

ezért $\lim_2 f = \dfrac{1}{3}$, tehát

$$f \in \mathfrak{C}[2] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{3},$$

egyébként f-nek 2-ben megszüntethető szakadása van. Mivel $\lim_{5 \pm 0} f = \pm\infty$, ezért f-nek 5-ben másodfajú szakadása van. ■

Emlékeztető (Bolzano-tétel). Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, továbbá az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor f **Darboux-tulajdonságú**: minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz, azaz bármely

$$\eta \in (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a))$$

esetén van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $f(\xi) = \eta$ teljesül. Következésképpen, ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ számra $f(\xi) = 0$.

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$\ln(x) + 3 = e^x$$

egyenletnek van megoldása a $(0, +\infty)$ intervallumon. Valóban, ha

$$f(x) := \ln(x) + 3 - e^x \qquad (x \in (0, +\infty)),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}[1,2]$, továbbá

$$f(1)\cdot f(2) = (\ln(1)+3-e)\cdot\left(\ln(2)+3-e^2\right) < 0,$$

ui.

$$\ln(1)+3-e = 3-e > 0 \qquad \text{és} \qquad \ln(2)+3-e^2 < \ln(e)+3-e^2 = 4-e^2 < e^2-e^2 = 0.$$

Következésképpen van olyan $\xi \in (1,2)$, amelyre

$$f(\xi) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \ln(\xi)+3 = e^{\xi}.$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van legalább egy valós gyöke!
Útm. Legyen

$$p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

páratlan (n-ed)fokú polinom. Ekkor, mint tudjuk,

$$\lim_{+\infty} p = \begin{cases} +\infty & (a_n > 0), \\ -\infty & (a_n < 0) \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{-\infty} p = \begin{cases} -\infty & (a_n > 0), \\ +\infty & (a_n < 0). \end{cases}$$

Így van olyan $a < b$, hogy

$$\operatorname{sgn}(p(a)\cdot p(b)) = -1.$$

Mivel p folytonos, van olyan $\xi \in (a,b)$, hogy $p(\xi) = 0$. ■

Emklékeztető. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos valamely $H \subset \mathcal{D}_f$ halmazon (jelben $f \in \mathfrak{EC}(H)$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, x, y \in H: \qquad (|x-y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Megjegyzések.

1. Ha f egyenletesen folytonos, akkor minden $\emptyset \neq H \subset \mathcal{D}_f$ esetén $f|_H$ is egyenletesen folytonos.
2. Ha $\mathcal{D}_f$ intervallum: $\mathcal{D}_f = A \cup B$, ahol A, B olyan intervallumok, amelyre $A \cap B \neq \emptyset$ és $f|_A$ valamint $f|_B$ egyenletesen folytonos, akkor f is egyenletesen folytonos.
3. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f egyenletresen folytonos (**Heine-tétel**).

Feladat. Igaz-e, hogy egyenletesen folytonosak az alábbi függvények?

1. $f(x) := x^2 \quad (x \in (0,1));$ 2. $f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in (0,+\infty));$

3. $f(x) := x\sqrt{x} \quad (x \in (0,+\infty));$ 4. $f(x) := \dfrac{x+3}{x-1} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. A Heine-tétel miatt a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen folytonos, így még inkább a szűkebb $(0,1)$ intervallumon.

2. A Heine-tétel miatt a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen folytonos, így a $(0,1]$ intervallumon is. Az $(1,+\infty)$ intervallumon pedig
$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq |x-y|$$
alapján a $\delta := \varepsilon$ választás megfelelő.

3. Nem egyenletesen folytonos, ui. ha $\varepsilon, \delta > 0$ és $y \in (0,+\infty)$: $y > \dfrac{4\varepsilon^2}{\delta^2}$ valamint $x := y + \dfrac{\delta}{2}$, akkor $|x-y| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$ és
$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |x\sqrt{x}-y\sqrt{y}| = |x(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + (x-y)\sqrt{y}| = \left|x\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{y}(x-y)\right| = \\ &= |x-y|\left|\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{y}\right| > \sqrt{y}|x-y| \geq \frac{\delta}{2}\sqrt{y} > \varepsilon. \end{aligned}$$

4. Ha $1 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x-1}$, következésképpen bármely $1 \neq x, y \in \mathbb{R}$ esetén
$$|f(x)-f(y)| = 4 \cdot \left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1}\right| = 4 \cdot \frac{|x-y|}{|x-1| \cdot |y-1|}.$$
Legyen
$$\delta > 0, \qquad x := 1 + \frac{3\delta}{2}, \qquad y := 1 + 2\delta.$$
Ekkor
$$|f(x)-f(y)| = 4 \cdot \frac{3\delta}{4\delta^2} = \frac{3}{\delta}.$$
Így, ha $\varepsilon > 0$ és $\delta < \dfrac{3}{\varepsilon}$, akkor $|x-y| < \delta$, de $f(x) - f(y) > \varepsilon$, következésképpen f nem egyenletesen folytonos. ■

Házi feladatok.

1. Számítsuk ki a következő határértékeket!

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(ax)}{\mathrm{tg}(bx)}\ (a, b \in \mathbb{R}:\ b \neq 0);$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\sin(x)};$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\quad (a, b \in \mathbb{R});$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-e^{2x}}{x\cos(2x)+\sin(3x)}.$

2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozzuk meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} & (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}), \\ 0 & (x=-1), \\ \alpha & (x=2). \end{cases}$$

   függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

3. Mely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén lesz az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} & (x \in (0,1)), \\ & \\ 3\alpha x^2+\alpha^2 & (x \in [1,+\infty)) \end{cases}$$

   folytonos az $a := 1$ pontban?

4. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := \{x\} := x - [x] \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   függvény az $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ pontokban folytonos!

5. Lássuk be, hogy az

$$f(x) := \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + x^3 + 6x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\})$$

   függvénynek van zérushelye!

6. Mely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén lesz egyenletesen folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^5 - 16x}{x^2 - 4} & (|x| \neq 2) \\ \\ ax + b & (|x| = 2) \end{cases} \qquad (x \in [-5, 5])$$

függvény?

Útm.

1. (a) Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(ax)}{\mathrm{tg}(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \frac{\cos(bx)}{\cos(ax)} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin(bx)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos(bx)}{\cos(ax)} = \frac{a}{b}$$

(b) Három módszerrel is kiszámítjuk az adott határértéket.

1. módszer Trigonometrikus összefüggéseket alkalmazva (vö. Mat. alapok) látható, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\cos(4x)}{\sin(x)} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \cos(4x) = 2 \cdot 1 = 2.$$

2. módszer Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x} - 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{5-3}{1} = 2.$$

3. módszer Fehasználva a sin függvény definícióját látható, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1} - 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5 - 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1} - 3^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{5-3}{1} = 2.$$

(c) Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bx)^n}{n} -}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{n!} \cdot x^n}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{n!} \cdot x^n}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{n!} \cdot x^{n-1}}{1} = \lim_{x\to 0} \left\{ a - b + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{n!} \cdot x^{n-1} \right\} = a - b.$$

(d) Mivel

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x\cos(2x) + \sin(3x)} = 5 - 2 = 3,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-e^{2x}}{x\cos(2x)+\sin(3x)} = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}.$$

2. Világos, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[\alpha]$. Mivel minden $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}$ esetén

$$f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \frac{x+4}{x+1},$$

ezért $\lim\limits_{2} f = 2$. Tehát f pontosan akkor folytonos 2-ben, ha $\alpha = 2$. Ha $\alpha \neq 2$, akkor f-nek megszüntethető szakadása van a 2 helyen. Mivel

$$\lim_{-1\pm 0} f = \pm\infty, \qquad \text{ezért} \qquad \nexists \lim_{-1} f.$$

Következésképpen tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén f-nek másodfajú szakadása van (-1)-ben.

3. Mivel $1 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, ezért

$$f \in \mathfrak{C}[1] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{1} f = f(1) \qquad \text{és} \qquad f \in \mathfrak{C}[1] \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathfrak{C}_-[1] \cap \mathfrak{C}_+[1].$$

Továbbá

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{(1-x^2)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2(x-1)} = -\lim_{x\to 1-0} \frac{(1+x)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{2} = -2$$

és

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0} (3\alpha x^2 + \alpha^2) = 3\alpha + \alpha^2 = f(1)\ ,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{C}[1] \quad \Longleftrightarrow \quad -2 = 3\alpha + \alpha^2, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha \in \{-2;-1\}.$$

4. Világos, hogy ha $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, akkor

$$a < 1 + [a] \qquad \text{és} \qquad [a] < a.$$

Következésképpen, ha $\varepsilon > 0$, akkor a

$$\delta := \{\varepsilon, a - [a], 1 + [a] - a\}$$

számra $\delta > 0$. Ha pedig $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|x-a| < \delta$, akkor

$$x - a < \delta \leq 1 + [a] - a \qquad \text{és} \qquad a - x < \delta \leq a - [a],$$

ahonnan $[a] < x < [a] + 1$ következik. Ennélfogva $[x] = [a]$, és így

$$|f(x) - f(a)| = |x - [x] - (a - [a])| = |x - a| < \delta \leq \varepsilon.$$

5. Világos, hogy f folytonos, továbbá

$$f(0) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0 \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{8} + 3 - 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{8} > 0.$$

Mivel

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}\backslash\{-1;1\},$$

ezért alkalmas $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \mathcal{D}_f$ számra $f(c) = 0$.

2020.12.13.

6. Mivel bármely $\pm 2 \neq x \in [-5,5]$ esetén

$$\frac{x^5-16x}{x^2-4}=\frac{x(x^4-2^4)}{x^2-4}=\frac{x\cdot(x^2-2^2)\cdot(x^2+2^2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{x\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x^2+2^2)}{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+2)}}=x\cdot(x^2+2^2),$$

ezért $\lim\limits_{\pm 2} f=16$, így az $a=8$, ill. $b=0$ választással $f\in\mathfrak{C}$, Heine tétele szerint pedig $f\in\mathfrak{C}\mathfrak{C}$. ■

Gyakorló feladatok.

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\cdot\cos(2x)}{1-\cos(x)}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)-\sin(2x)}{\sin(3x)}$.

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{x^3+x^2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}(x)}-\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}}{\sin(2x)}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x-\pi}$.

3. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin(x)}-\sqrt{\cos(x)}}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3(x)+\sin^2(2x)}{2x^2-\sin^2(x)}$.

4. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos(x)-\sin(x)+1}{\cos(x)+\sin(x)-1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{\cos(x)-e^{-x}}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)+\sqrt{\cos(2x)}-1}{(e^x-1)^2}$.

5. Számítsuk ki a

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{3x}}{x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{x})-\dfrac{1}{1-x}}{x+\sin(2x)}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x-1}$

határértékeket, amennyiben azok létezik!

6. Számítsuk ki az alábi határértékeket!

1. $\displaystyle\lim_{0+0}\ln$; 2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}$; 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(x)$; 4. $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x^x$; 5. $\displaystyle\lim_{+\infty}\ln$; 6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

7. Mutassuk meg, hogy $\mu \in \mathbb{R}$ esetén fennáll a

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x = e^\mu$$

határértékreláció!

8. Döntsük el, hogy van-e az

$$f(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvénynek folytonos kiterjesztése, azaz van-e olyan folytonos $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függgvény, amelyre

$$f(x) = \widetilde{f}(x) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

teljesül!

9. Igazoljuk, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & (x \in (-\infty, 1)), \\ \\ -\sqrt{x-1} - 1 & (x \in [1, +\infty)) \end{cases}$$

függvény folytonos!

10. Adjunk példát olyan függvényre, amely egyetlen pontban folytonos!

11. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáját!

(a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - \alpha^2}{x+3} & (x < -3), \\ \\ \alpha\sqrt{x+7} & (x \geq -3) \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x-\alpha)}{(x-1)^2} & (x < 1), \\ \\ \beta + \alpha + 2 & (x = 1), \\ \\ \dfrac{\beta^2 x + \beta}{x^2+1} & (x > 1) \end{cases} \qquad (\alpha \in [0,1],\ \beta \in \mathbb{R}).$

12. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáját!

(a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} & (x \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}), \\ \\ \alpha (\in \mathbb{R}) & (x \in \{2;5\}) \end{cases}$; (b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{|x|} & (0 \neq x \in \mathbb{R}), \\ \\ 1 & (x=0). \end{cases}$;

(c) $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & (0 \neq x \in \mathbb{R}) \\ \\ 1 & (x=0) \end{cases}$; (d) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\sqrt[3]{x}-\alpha} & (x \neq \alpha^3), \\ \\ \alpha \in \mathbb{R} & (x=\alpha^3) \end{cases}$ $(x \in \mathbb{R})$.

13. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$: $f \in \mathfrak{C}$ és tegyük fel, hogy $\lim\limits_{+\infty} f =: A \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy f korlátos függvény!

14. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha \in [0, +\infty)$ esetén fennáll a

$$2\cos(\pi\alpha) \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}} = e^{\alpha}$$

egyenlőség!

15. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha \in (0, \pi)$ esetén fenáll a

$$\ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+\alpha+1}\right) = \frac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}$$

egyenlőség!

16. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ esetén fenáll az

$$\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha) + x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{3\alpha}{2}\right) = 0$$

egyenlőség!

17. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}$, $\mathcal{D}_f$ intervallum, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_f$ és A véges. Mutassuk meg, hogy van olyan $t \in \mathcal{D}_f$, amellyel fennál az

$$f(t) = \frac{1}{|A|}\sum_{x \in A} f(x)$$

egyenlőség!

18. Tekintsük a

$$P(x) := x^3 + x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot. Bizonyítsuk be, hogy egyértelműen létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $P(\alpha) = 0$ teljesül! Számítsuk ki ezt az α-t 10^{-1}-pontossággal!

19. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletek megoldhatók az I intervallumon!

    (a) $\cos(x) = x$, $I := (0, 1)$;

    (b) $\ln(x) = e^{-x}$, $I := (1, 3)$;

    (c) $e^x = 2 - x$, $I := \mathbb{R}$;

    (d) $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$, $I := \mathbb{R}$.

20. Igazoljuk, hogy ha valamely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén a

$$\varphi : [a, b] \to [a, b]$$

függvény folytonos, akkor alkalmas $u \in (a, b)$ esetén $\varphi(u) = u$ teljesül!

21. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényről azt tudjuk, hogy folytonos és

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Mutassuk meg, hogy f vagy azonosan nulla vagy $f = \exp_{f(1)}$ (**Cauchy-féle függvényegyenlet**)!

22. Igaz-e, hogy egyenletesen folytonosak az alábbi függvények?

$$\begin{array}{ll} 1.\ f(x) := x \quad (x \in (-\infty, +\infty)); & 2.\ f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (x \in (1, 2)); \\ 3.\ f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (x \in (0, 1)); & 4.\ f(x) := \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) \quad (x \in (0, 1)). \end{array}$$

23. Bizonyítsuk be, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}$, $\exists \lim\limits_{+\infty} f =: A \in \mathbb{R}$, akkor f egyenletesen folytonos!

Útm.

1. (a) Mivel bármely $0 \neq x \in (-\pi, \pi)$ esetén

$$\frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x)}{1 - \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x) + \cos(x) \cdot (1 - \cos(2x))}{1 - \cos(x)} = 1 + \cos(x) \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{1 - \cos(x)},$$

ezért

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x)}{1 - \cos(x)} = 1 + \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(x)}{2\sin^2(x/2)} = 1 + \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}{2\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2} \cdot 4 = 5. \quad \blacksquare$$

(b) Mivel bármely $0 \neq x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$\frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{\frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot x - \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3x} = \frac{\frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2}{\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3}$$

és

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = 1 \quad (0 \neq \alpha \in \mathbb{R}),$$

ezért – felhasználva a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételt –, azt kapjuk,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

2. (a) Világos, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1+\sin(x)}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1+\sin(x)}}{x^3} \cdot \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{\sin(x)}{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

(b) Mivel bármely $0 \neq x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ esetén

$$\frac{\sqrt{1+\sin^2(x)} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^3+x^2} = \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^2(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)} + \sqrt{\cos(2x)}}{\sqrt{1+\sin^2(x)} + \sqrt{\cos(2x)}} =$$

$$= \frac{1+\sin^2(x) - \cos(2x)}{(x^3+x^2)(\sqrt{1+\sin^2(x)} + \sqrt{\cos(2x)})} = \frac{1+\sin^2(x) - \cos(2x)}{x^2} \cdot \frac{1}{(x+1)(\sqrt{1+\sin^2(x)} + \sqrt{\cos(2x)})} =$$

$$= \left\{4 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{4x^2} + \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{(x+1)(\sqrt{1+\sin^2(x)} + \sqrt{\cos(2x)})} =$$

$$= \left\{4 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} + \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{(x+1)(\sqrt{1+\sin^2(x)} + \sqrt{\cos(2x)})}$$

ezért

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^3+x^2} = \left\{4 \cdot \frac{1}{2} + 1^2\right\} \cdot \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{3}{2}.$$

(c) Ha $k \in \mathbb{Z}$ és $k\pi \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}{\sin(2x)} = \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}{\sin(2x)} \cdot \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}{\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}} =$$

$$= \frac{-2\operatorname{tg}(x)}{2\sin(x)\cos(x)\left(\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}\right)} = \frac{-1}{\cos^2(x)\left(\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}\right)},$$

ezért

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}{\sin(2x)} = \frac{-1}{(-1)^2(1+1)} = -\frac{1}{2}.$$

(d) Az $y := x - \pi$ jelölés bevezetésével a sin függvény páratlan volta és a tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén fennálló $\sin(y+\pi) = -y\sin(y)$ egyenlőség következtében azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(\sin(\sin(y)))}{\sin(\sin(y))} \cdot \frac{\sin(\sin(y))}{\sin(y)} \cdot \frac{\sin(y)}{y} = -1.$$

3. (a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)})}{1 + x\sin(x) - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}\right)}{x^2 \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} - x^2 \cdot \frac{\sin(x)}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}}{\frac{1-\cos(x)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1+1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3}.$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3(x) + \sin^2(2x)}{2x^2 - \sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \left(1 + \cos(x) + \cos^2(x)\right) + \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 \cdot 4}{2 - \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3 + 1 \cdot 4}{2-1} = \frac{11}{2}.$$

4. (a) Elemi átalakítások segítségével azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos(x) - \sin(x) + 1}{\cos(x) + \sin(x) - 1} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 1.$$

(b) Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) - e^{-x} \neq 0$ (pl. $x \neq 0$) esetén

$$\frac{\sqrt{e^x - x - 1}}{\cos(x) - e^{-x}} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^n}{n!}\right\}} =: \frac{\sqrt{x^2 \cdot f(x)}}{x \cdot g(x)},$$

és

$$\frac{\sqrt{x^2 \cdot f(x)}}{x \cdot g(x)} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)},$$

ill.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(0)} = \sqrt{\frac{1}{2!}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1,$$

továbbá

$$\nexists \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) \qquad \Big/ \lim_{x\to 0\pm 0} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1 \Big/,$$

ezért

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^x - x - 1}}{\cos(x) - e^{-x}}.$$

(c) Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\sin^2(x) + \sqrt{\cos(2x)} - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{\sin^2(x) + \frac{\cos(2x) - 1}{\sqrt{\cos(2x)} + 1}}{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)^2} = \frac{x^2\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 - 4x^2 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos(2x)} + 1}}{x^2\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\right)^2},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) + \sqrt{\cos(2x)} - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos(2x)} + 1}}{\left(1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\right)^2} = \frac{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{(1+0)^2} = 0. \quad \blacksquare$$

5. (a) Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-x}-e^{3x}}{x} &= \frac{1}{x}\cdot\left\{e^{-x}-e^{3x}\right\} = \frac{1}{x}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}\right\} = \frac{1}{x}\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}\right\} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\cdot\{(-1)^n-3^n\} = \\
&= -4+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\cdot\{(-1)^n-3^n\},
\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{3x}}{x} = -4+0 = -4.$$

(b) Jól látható, hogy ha $x \in (0,1)$, akkor

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{x})-\dfrac{1}{1-x}}{x+\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n}{x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}-1\right)x^n}{3x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{3}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}-1\right)x^{n-1}}{3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2)^{2n+1}\cdot(x)^{2n}}{(2n+1)!}} = \frac{-\dfrac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}} = \frac{1}{1+(+\infty)} = 0.$

6. (a) $\displaystyle \lim_{0+0}\ln = \lim_{x\to 0+0}\ln(x) = \lim_{y\to-\infty}\ln(e^y) = \lim_{y\to-\infty}y = -\infty.$

(b) $\displaystyle 0 \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}} \leq \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\frac{y^2}{2}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{2}{y} = 0$, így a Sandwich-tétel értelmében $\displaystyle\lim_{0+0}\ln = 0$.

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0+0}x\ln(x) = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}(\ln(1)-\ln(y)) = -\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y} = 0.$

(d) Az exp folytonosságát kihasználva látható, hogy $\displaystyle \lim_{x\to 0+0}x^x = \lim_{x\to 0+0}\exp(x\ln(x)) = \exp\left(\lim_{x\to 0+0}x\ln(x)\right) = \exp(0) = 1.$

(e) $\displaystyle \lim_{+\infty}\ln = \lim_{x\to+\infty}\ln(x) = \lim_{y\to+\infty}\ln(e^y) = \lim_{y\to+\infty}y = +\infty.$

(f) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 1}\frac{\ln(y)}{y-1} = \lim_{z\to 0}\frac{\ln(e^z)}{e^z-1} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}} = 1.$

7. Ha $y := \ln\left(1+\dfrac{\mu}{x}\right)$, akkor $y \to 0$ $(x \to +\infty)$, így (vö. korábban)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\ln\left(1+\frac{\mu}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{\mu}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{y\to 0}\frac{\mu y}{e^y-1}\right) = \\
&= \exp\left(\mu\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}\right) = \exp(\mu\cdot 1) = e^{\mu}.
\end{aligned}$$

8. Mivel a sin korlátos függvény, ezért

$$\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

így az

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (0 \neq x \in \mathbb{R}), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény megfelelő.

9. Nyilvánvaló, hogy ha $1 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor $f \in \mathfrak{C}[a]$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\delta := \min\{\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon^2\}$. Ha $x \in (-\infty, 1)$ olyan, hogy $|x-1| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(1)| = (x-1)^2 < \delta^2 \leq (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

Ha pedig $x \in [1, +\infty)$ olyan, hogy $|x-1| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(1)| = \sqrt{x-1} < \sqrt{\delta} \leq (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

10. Megmutatjuk, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \end{cases}$$

függvényre igaz, hogy

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 0.$$

1. lépés. $\lim\limits_{0} f = 0 = f(0)$, ui. tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta(:= \varepsilon)$, hogy minden $|x - 0| = |x| < \delta = \varepsilon$ esetén

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \left\{ \begin{matrix} |x| & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \end{matrix} \right\} < \varepsilon.$$

2. lépés. Ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor $f \notin \mathfrak{C}[a]$, ui. ekkor van olyan

$$y_n \in \mathbb{Q}, \quad z_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

hogy

$$\lim(y_n) = a = \lim(z_n) \qquad \text{és} \qquad \lim(f(y_n)) = \lim(y_n) = a,$$

de

$$\lim(f(z_n)) = \lim(0) = 0.$$

11. (a) Világos, hogy

$$f \in \mathfrak{C}(-\infty, -3) \cap \mathfrak{C}(-3, +\infty),$$

sőt

$$\lim_{-3+0} f = \alpha\sqrt{-3+7} = 2\alpha.$$

Mivel bármely $x \in (-\infty, -3)$ esetén

$$\frac{x^2 - \alpha^2}{x+3} = \frac{(x-\alpha)(x+\alpha)}{x+3},$$

ezért

$$\lim_{-3-0} f \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{-3, 3\}.$$

Látható, hogy $\alpha \in \{-3, 3\}$ esetén $\lim\limits_{-3-0} f = -6$. Így

$$f \in \mathfrak{C}[-3] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{-3+0} f = \lim_{-3-0} f = f(-3) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\alpha = -6 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -3.$$

Ha $\alpha = 3$, akkor

$$f(-3) = \lim_{-3+0} f = 6 \neq -6 = \lim_{-3-0} f,$$

azaz f-nek elsőfajú szakadása van a -3 pontban.

(b) Világos, hogy

$$f \in \mathfrak{C}(-\infty, 1) \cap \mathfrak{C}(1, +\infty),$$

továbbá

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x\to 1-0} \frac{\sin^2(x-\alpha)}{(x-1)^2} = \begin{cases} +\infty & (\alpha \in [0,1)), \\ \lim_{x\to 1-0} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^2 = 1 & (\alpha = 1). \end{cases}$$

Tehát $\alpha \in [0,1)$ esetén f-nek 1-ben másodfajú szakadása van. Ha $\alpha = 1$, akkor

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x\to 1+0} \frac{\beta^2 x + \beta}{x^2+1} = \frac{\beta^2+\beta}{2},$$

ill.

$$f(1) = \beta + 3$$

következtében

$$f \in \mathfrak{C}[1] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{1-0} f = \lim_{1+0} f = f(1) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = \frac{\beta^2+\beta}{2} = \beta + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = -2.$$

Ha $\alpha = 1 = \beta$, akkor

$$\lim_{1+0} f = \lim_{1-0} f = 1 \neq 4 = f(1),$$

azaz f-nek 1-ben megszüntethető szakadása van. Ha $\alpha = 1$ és $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$,

$$\lim_{1-0} f = 1 \neq \lim_{1+0} f = \frac{\beta^2+\beta}{2} \neq 1,$$

így f-nek 1-ben elsőfajú szakadása van.

12. (a) Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{2; 5\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel minden $x \in \mathbb{R}\backslash\{2; 5\}$ esetén

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5},$$

ezért $\lim_2 f = \frac{1}{3}$ Tehát $f \in \mathfrak{C}[2]$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = \frac{1}{3}$, egyébként f-nek 2-ben megszüntethető szakadása van. Mivel $\lim_{5\pm 0} f = \pm\infty$, ezért tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén f-nek 5-ben másodfajú szakadása van.

(b) Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel minden $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ és minden $0 > x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$, ezért $\lim_{0\pm 0} f = \pm 1$, azaz f-nek 0-ban elsőfajú szakadása van.

(c) Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel $\lim_{0+0} f = 1$ és $\lim_{0-0} f = +\infty$, azért f-nek 0-ban másodfajú szakadása van.

(d) Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha^3\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Ha $a = \alpha^3$, akkor két esetet különböztetünk meg:

1. eset ($\alpha^3 = \alpha$)**.** Ekkor $\alpha \in \{-1; 0; 1\}$, továbbá

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt[3]{x}-\alpha} = \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - \alpha^3}{\sqrt[3]{x}-\alpha} = (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x\alpha} + \alpha^2 \longrightarrow 3\alpha^2 \begin{cases} = \alpha & (\alpha = 0) \\ \neq \alpha & (\alpha \in \{-1; 1\}) \end{cases} \qquad (x \to \alpha^3),$$

azaz $\alpha = 0$ esetén $f \in \mathfrak{C}$, $\alpha \in \{-1; 1\}$ esetén f-nek α-ban megszüntethető szakadása van.

($\alpha^3 \neq \alpha$)**:**

$$\lim_{x\to\alpha^3} (x-\alpha) = \alpha^3 - \alpha \neq 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\alpha^3} (\sqrt[3]{x} - \alpha) = 0,$$

így
$$\lim_{x\to\alpha^3}\left|\frac{x-\alpha}{\sqrt[3]{x}-\alpha}\right| = +\infty.$$
Ekkor tehát f-nek α^3-ben másodfajú szakadása van.

13. A feltétel szerint az $\varepsilon := 1$ számhoz létezik olyan $\omega \in (0,+\infty)$, hogy minden $x \in (\omega,+\infty)$ esetén $|f(x) - A| < 1$, azaz

$$(*) \qquad A-1 < f(x) < A+1 \quad (x \in (\omega,+\infty)).$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}[a,\omega]$, ezért Weierstraß tétele alapján minden $x \in [a,\omega]$ esetén van olyan $x_m, x_M \in [a,\omega]$, hogy

$$f(x) \geq f(x_m) =: m \qquad \text{és} \qquad f(x) \leq f(x_M) =: M,$$

így
$$m \leq f(x) \leq M \qquad (x \in [a,\omega]).$$
Ebből és $(*)$-ból következik, hogy

$$k := \min\{m, A-1\} \leq f(x) \leq \max\{M, A+1\} =: K \qquad (x \in \mathcal{D}_f = [a,+\infty)).$$

A fentiek alapján $k \leq K$ is igaz, ami azt jelenti, hogy f korlátos.

14. Az
$$f(x) := 2\cos(\pi x)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} - e^x \qquad (x \in [0,+\infty))$$
függvény folytonos, továbbá

$$f(0) = 2\cos(0)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{0}}} - e^0 = 1 > 0 \qquad \text{és} \qquad f(1) = 2\cos(\pi)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1}}} - e^1 = -\frac{2}{\sqrt{2}} - e < 0.$$

15. Az
$$f(x) := \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\right) - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \qquad (x \in [0,\pi])$$
függvény folytonos, továbbá
$$f(0) = \ln(1) - \frac{\cos(0)}{1+\sin(0)} = -1 < 0$$
és
$$f(\pi) = \ln\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2+\pi+1}\right) - \frac{\cos(\pi)}{1+\sin(\pi)} = \ln\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2+\pi+1}\right) + 1 > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e\cdot\pi^2 + e > \pi^2+\pi+1,$$
és ez igaz, hiszen
$$e\cdot\pi^2 + e > 2\pi^2 + e = \pi^2+\pi^2+e > \pi^2+\pi+e > \pi^2+\pi+1.$$

16. Az
$$f(x) := \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
függvény folytonos, továbbá
$$f(0) = -\frac{\pi}{6} < 0 \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} > 0.$$

17. Legyen
$$\begin{matrix} m \\ M \end{matrix} := \begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix}\{f(x)|\ x \in A\}.$$
Ekkor $m, M \in \mathcal{R}_f$ és
$$m \leq \frac{1}{|A|}\cdot\sum_{x\in A} f(x) \leq M$$

(számtani közép). Mivel $\mathcal{R}_f$ intervallum, ezért $f^{-1}[[m, M]] \subset \mathcal{D}_f$, így a Bolzano-tétel alkalmazásával van olyan $t \in \mathcal{D}_f$, amellyel

$$f(t) = \frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} f(x).$$

18. Mivel $P(0) = -1 < 0$, $P(1) = 1 > 0$, tehát Bolzano-tétel következtében van olyan $\alpha \in (0, 1)$, hogy $P(\alpha) = 0$. Mivel bármely $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén

$$P(x) - P(y) = x^3 + x - 1 - y^3 - y + 1 = x^3 - y^3 + x - y = (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = (x-y)\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1\right) < 0,$$

ezért egyetlen ilyen α létezik, melynek közelítése:

n	a_n	b_n	$h_n = \frac{b-a}{2^n}$	$r_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$\mathrm{sgn}(f(a_n) \cdot f(r_n))$
0	0	1	1	$1/2$	1
1	$1/2$	1	$5 \cdot 10^{-1}$	$3/4$	-1
2	$1/2$	$3/4$	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$5/8$	1
3	$5/8$	$3/4$	$1.25 \cdot 10^{-1}$	$\boxed{11/16}$	-1
4	$5/8$	$11/16$	$0.625 \cdot 10^{-1}$		

19. (a) Ha

$$f(x) := \cos(x) - x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos,

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(1) = \cos(1) - 1 < 0,$$

ezért alkalmas $\alpha \in I := (0, 1)$ esetén $f(\alpha) = 0$.

(b) Ha

$$f(x) := \ln(x) - e^{-x} \qquad (x \in (0, +\infty))),$$

akkor f folytonos,

$$f(1) = -\frac{1}{e} < 0, \qquad f(3) = \ln(3) - \frac{1}{e^2} > 0,$$

ezért alkalmas $\alpha \in I := (1, 2)$ esetén $f(\alpha) = 0$.

(c) Ha

$$f(x) := e^x - 2 + x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos,

$$f(1) = e - 2 + 1 > 0, \qquad f(-1) = \frac{1}{e} - 3 < 0,$$

ezért alkalmas $\alpha \in I := (-1, 0)$ esetén $f(\alpha) = 0$.

(d) Ha

$$f(x) := x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})),$$

akkor f folytonos,

$$f(0) = 3 > 0, \qquad f(-1) = -1 < 0,$$

ezért alkalmas $\alpha \in I := (-1, 0)$ esetén $f(\alpha) = 0$. **Megjegyezzük**, hogy f páratlan fokszámú polinom.

20. Világos, hogy a

$$\psi(x) := \varphi(x) - x \qquad (x \in [a, b])$$

függvény folytonos, továbbá

$$\psi(a) = \varphi(a) - a \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \psi(b) = \varphi(b) - b \leq 0,$$

hiszen

$$\varphi(a) \geq a \qquad \text{és} \qquad \varphi(b) \leq b.$$

A
$$\psi(a) = 0, \qquad \text{ill. a} \qquad \psi(b) = 0$$
egyenlőség csak a
$$\varphi(a) = a, \qquad \text{ill. a} \qquad \varphi(b) = b$$
esetben fordul elő. Ez azt jelenti, hogy vagy az
$$u := a, \qquad \text{ill.} \qquad u := b$$
fixpontja φ-nek, vagy
$$\psi(a) > 0, \qquad \text{ill.} \qquad \psi(b) < 0.$$
Így a Bolzano-tétel következtében va olyan $u \in (a, b)$, amelyre
$$0 = \psi(u) = \varphi(u) - u,$$
azaz
$$\varphi(u) = u.$$

21. **1. lépés.** Megmutatjuk, hogy, ha van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(c) = 0$, akkor
$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Valóban, ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(c) = 0$, akkor
$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) \cdot f(c) = f(x - c) \cdot 0 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés. $f(0) \in \{0, 1\}$, ui. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$, ezért $f(0) \cdot (f(0) - 1) = 0$.

3. lépés. Így tehát, ha $f(0) = 1$, akkor – lévén $1 > 0$ – azt kapjuk, hogy $f(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Legyen ebben az esetben $a := f(1) > 0$.

4. lépés. Teljes indukcióval könnyen belátható ($\boxed{\textbf{Házi feladat.}}$), hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$f(n \cdot x) = (f(x))^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Speciálisan $x := 1$ esetén tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $f(n) = a^n$.

5. lépés. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$0 < a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \qquad \text{ezért} \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}.$$

6. lépés. Tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$ indexre
$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{a} = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\exp\left(q \cdot \frac{\ln(a)}{q}\right)} = \\ &= \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\exp\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{\ln(a)}{q}\right)} = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\prod_{k=1}^{q} \exp\left(\frac{\ln(a)}{q}\right)} = \prod_{k=1}^{p} \exp\left(\frac{\ln(a)}{q}\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\ln(a)}{q}\right) = \exp\left(\frac{p}{q}\ln(a)\right) = a^{p/q} =: a^r \end{aligned}$$

Megjegyzés. Tetszőleges $\alpha \in (0, +\infty)$, ill. $0 < r \in \mathbb{Q}$ esetén
$$\alpha^0 = \exp(0 \cdot \ln(\alpha)) = \exp(0) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \alpha^{-r} = \exp(-r \cdot \ln(\alpha)) = \frac{1}{\exp(r \cdot \ln(\alpha))} = \frac{1}{a^r}.$$

7. lépés. Mivel minden $0 < r \in \mathbb{Q}$ esetén

$$1 = f(0) = f(r - r) = f(-r) \cdot f(r), \qquad \text{ezért} \qquad f(-r) = \frac{1}{f(r)} = \frac{1}{a^r} = a^{-r}.$$

Így beláttuk, hogy bármely $r \in \mathbb{Q}$ számra $f(r) = a^r$.

8. lépés. Mivel f folytonos és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $r_n \in \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy $\lim(r_n) = x$, ezért

$$f(x) = f \lim(r_n)) = \lim(f(r_n)) = \lim\left(\exp_a(r_n)\right) = \exp_a(\lim(r_n)) = \exp_a(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

22. (a) Egyenletesen folytonos, ui. tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta(:= \varepsilon)$, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$: $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon$.

(b) A Heine-tétel miatt az $[1, 2]$ intervallumon egyenletesen folytonos, így még inkább a szűkebb $(1, 2)$ intervallumon.

(c) Nem egyenletesen folytonos, ui. lásd jegyzet.

(d) Nem egyenletesen folytonos, ui.

$$\varepsilon := 1, \qquad x := \frac{1}{n}, \qquad y := \frac{2}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{n} < \delta$$

esetén

$$|x - y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)} < \frac{1}{n} < \delta \qquad \text{és} \qquad |f(x) - f(y)| = \left|\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right| = 1 \geq \varepsilon.$$

Megjegyezzük, hogy itt az **egyenletes folytonosságra vonatkozó átviteli elv**et használtuk:

$$f \in \mathfrak{EC}(H) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (x_n), (y_n) : \mathbb{N} \to H : \quad (\lim |x_n - y_n| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim |f(x_n) - (y_n)| = 0)\,.$$

23. A határérték definíciója miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\omega > \max\{a; 0\}$, hogy minden $x > \omega$ esetén $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így minden $x, y \in (\omega, +\infty)$: $|x - y| < 1$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz $f|_{(\omega,+\infty)}$ egyenletesen folytonos. A Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos az $[a, \omega]$ halmazon, így f egyenletesen folytonos. ■

1.3. 3. oktatási hét (2020.09.23.)

Szükséges előismeretek.

- Mi a *belső pont* definíciója?

  Válasz: Azt mondjuk, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz *belső pont*ja (jelben $a \in \operatorname{int} H$), ha alkalmas $r > 0$ esetén $(a-r, a+r) \subset H$.

- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?
  Válasz: Legyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in \mathfrak{D}[a] \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

- Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?
  Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Az f függvény pontosan akkor deriválható az a pontban, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám és $\omega : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ az a pontban folytonos függvény, amelyre

$$\omega(a) = 0 \qquad \text{és} \qquad f(x) - f(a) = (A + \omega(x))(x - a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

- Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
  Válasz: Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha $f, g \in \mathfrak{D}[a]$, akkor $fg \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
  Válasz: Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha $f, g \in \mathfrak{D}[a]$, $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

- Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
  Válasz: Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha $g \in \mathfrak{D}[a]$ és $f \in \mathfrak{D}[g(a)]$, akkor $f \circ g \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Az óra anyaga.

Emlékeztető. Valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ esetén

$$f \in \mathfrak{D}[a] \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: A \in \mathbb{R}.$$

Megjegyzések.

1. Ha $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
2. Valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt deriválhatónak mondunk, ha bármely $a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$.
3. Az
$$f(x) := \sqrt{\ln(\sin(x))} \qquad (x \in \mathbb{R}:\ \ln(\sin(x)) \geq 0)$$
függvény esetében nincs értelme semilyen $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli deriválhatóságról beszélni, hiszen
$$\mathcal{D}_f = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \in \mathbb{R}:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
(és $f(x) = 0$ $(x \in \mathcal{D}_f)$), azaz $\mathrm{int}(\mathcal{D}_f) = \emptyset$.

Feladat. A derivált definíciója alapján vizsgáljuk meg, hogy deriválhatóak-e az alábbi függvények! Amennyiben deriválhatók, határozzuk is meg a deriváltjukat!

1. $f(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N});$
2. $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R});$
3. $f(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{x-a}.$$
Így $f \in \mathfrak{D}[a]$ és
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})=na^{n-1}.$$
2. Ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{a\}$ esetén
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a}=-\frac{1}{xa}.$$
Így $f \in \mathfrak{D}[a]$ és
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{xa}\right)=-\frac{1}{a^2}.$$

3. Mivel minden $0 \neq h \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + h \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_f$, ezért

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} =$$

$$= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h} = \cos(a)\cdot\frac{\sin(h)}{h} + \sin(a)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}$$

következtében

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \cos(a),$$

ui.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$$

és (vö. korábban)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0}(-2)\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 0.$$

Így $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \cos(a).$$

Megjegyzés. A második határérték kiszámítása során felhasználtuk az alábbi (ún. **linearizáló**) **formulák** egyikét:

$$\boxed{\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}}, \qquad \boxed{\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Emlékeztető. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Az f függvény pontosan akkor deriválható az a pontban, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám és $\omega : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ az a pontban folytonos függvény, amelyre

$$\omega(a) = 0 \qquad \text{és} \qquad f(x) - f(a) = A(x-a) + \omega(x)(x-a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Feladat. A definíció alapján számítsuk ki $f'(x)$-et, ha

$$f(x) := \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

majd mutassuk meg hogy bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \eta(h)h \qquad (-x < h),$$

ahol az $\eta \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\lim\limits_{0} \eta = 0$ teljesül!

Útm. Mivel

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{x+h}{2} + \frac{1}{x+h} - \frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+h)}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} + \frac{h}{x^2(x+h)}\right\} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2},
\end{aligned}$$

ezért

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Tehát

$$f(x+h) - f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right)\cdot h + \eta(h)\cdot h \qquad (-x < h),$$

ahol $h \neq 0$ esetén

$$\eta(h) := \frac{f(x+h) - f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right)\cdot h}{h} = \frac{h}{x^2(x+h)} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0).$$

Feladat. Tanulmányozzuk (tanuljuk meg úgy, hogy tudjuk könyv nélkül) a deriválási táblázatot)!

Feladat. Számítsuk ki $f'(x)$-et!

1. $f(x) := x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$;
2. $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;
3. $f(x) := x^2\sin(x)$;
4. $f(x) := \frac{x^2+3}{x^2-x-2}$.

Útm.

1. Világos, hogy bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

2. Mivel bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ számra
$$f(x) = \sqrt{x\sqrt{\sqrt{x^2 \cdot x}}} = \sqrt{x\sqrt[4]{x^3}} = \sqrt{\sqrt[4]{x^4 \cdot x^3}} = \sqrt[8]{x^7} = x^{7/8},$$
ezért $f'(x) = \dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}}$.

3. $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$.

4. $f'(x) = \dfrac{2x(x^2 - x - 2) - (x^2+3)(2x-1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \dfrac{-x^2 - 10x + 3}{(x^2 - x - 2)^2}$. ■

Feladat. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva határozzuk meg $f'(x)$-et!

1. $f(x) := (5x^2 + 3x)^{2020}$;
2. $f(x) := \sin\left(\dfrac{x^2+1}{x+3}\right)$;
3. $f(x) := \sqrt{x^3 + 2x + 1}$;
4. $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

Útm.

1. $f'(x) = 2020 \cdot (5x^2 + 3x)^{2019} \cdot (10x + 3)$;
2. $f'(x) = \cos\left(\dfrac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \dfrac{2x(x+3) - (x^2+1)}{(x+3)^2} = \cos\left(\dfrac{x^2+1}{x+3}\right) \cdot \dfrac{x^2 + 6x - 1}{(x+3)^2}$;
3. $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x + 1}}$;
4. $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$. ■

Feladat. Hol deriválható az
$$f(x) := \frac{1}{|x| + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény? Ahol deriválható, ott számítsuk ki a deriváltat!

Útm. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & (x < 0), \\ \\ 1 & (x = 0), \\ \\ \dfrac{1}{x+1} & (x > 0), \end{cases}$$

ezért, ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)^2} & (a < 0), \\ \\ \dfrac{-1}{(a+1)^2} & (a > 0). \end{cases}$$

Ha pedig $a := 0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{|x|+1} - 1\right\} = \frac{1 - |x| - 1}{x(|x|+1)} = \frac{-|x|}{x(|x|+1)} = \frac{-|x|}{x} \cdot \frac{1}{|x|+1} = -\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{1}{|x|+1}.$$

Mivel

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|+1} = 1 \qquad \text{és} \qquad \nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x),$$

ezért

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \qquad \text{azaz} \qquad f \notin \mathfrak{D}[0]. \quad \blacksquare$$

Házi feladatok.

1. A trigonometrikus azonosságok és a
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$
határérték felhasználásával a definíció alapján mutassuk meg, hogy a cos függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható és fennáll a
$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
egyenlőség!

2. A definíció alapján vizsgáljuk meg az alábbi f függvények deriválhatóságát az a pontban!

(a) $f(x) := \sqrt{x}$ $(x \in [0, +\infty))$, $a \in [0, +\infty)$;

(b) $f(x) := x + (x-1)\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)$ $(x \in (0, +\infty))$, $a := 1$.

3. A definíció alapján számítsuk ki $f'(4)$-et, ha

$$f(x) := \sqrt{x} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$

majd mutassuk meg hogy

$$f(x) - f(4) = f'(4)(x-4) + \omega(x)(x-4) \quad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$

ahol az $\omega \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\lim\limits_{4} \omega = 0$ teljesül!

4. Számítsuk ki $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$; (b) $f(x) := \dfrac{e^x}{1+e^x}$;

(c) $f(x) := 3^{x^2}$; (d) $f(x) := \dfrac{1}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$.

Útm.

1. Mivel minden $0 \neq h \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + h \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_f$, ezért

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h} = -\sin(a)\cdot\frac{\sin(h)}{h} + \cos(a)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}$$

következtében

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\sin(a),$$

ui.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0.$$

Így $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = -\sin(a).$$

2. (a) Világos, hogy $f \notin \mathfrak{D}[0]$, hiszen

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow +\infty \qquad (x \to 0).$$

Legyen $a \in (0, +\infty)$. Ekkor bármely $a \neq x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad (x \to a),$$

így $f \in \mathfrak{D}[a]$ és $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

(b) Mivel minden $0 < x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ esetén

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 + \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) \longrightarrow 1 + \frac{\pi}{4} \quad (x \to 1) \quad \Big/ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big/,$$

ezért $f \in \mathfrak{D}[1]$ és $f'(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$.

3. Mivel

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4}}{\sqrt{x}+\sqrt{4}} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{4}} = \frac{1}{4},$$

ezért $f'(4) = \frac{1}{4}$. Tehát

$$f(x) - f(4) = \frac{1}{4}(x-4) + \omega(x)(x-4) \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$

ahol $x \neq 4$ esetén

$$\omega(x) := \frac{f(x)-f(4)-\frac{1}{4}(x-4)}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{4}} - \frac{1}{4} \longrightarrow 0 \quad (x \to 4).$$

4. (a) Világos, hogy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^2\sqrt{1+x^2} - (2x^2-1)\cdot\left\{\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right\}}{x^2(1+x^2)} = \frac{4x^2(1+x^2) - (2x^2-1)\cdot\{1+2x^2\}}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \\ &= \frac{4x^2(1+x^2) + (1-2x^2)\cdot\{1+2x^2\}}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{4x^2+1}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}. \end{aligned}$$

(b) $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

(c) $f'(x) = 3^{x^2} \cdot \ln(3) \cdot 2x$.

(d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \cdot \dfrac{2}{x^3} = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \cdot \dfrac{1}{x^3}$. ■

Gyakorló feladatok.

1. Vizsgáljuk meg a definíció alapján, hogy az alábbi függvények deriválhatók-e a megadott pontokban!

(a) $f(x) := c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R};$

(b) $f(x) := \sqrt{x^2-1} \quad (x \in [1,+\infty)), \quad a \in (1,+\infty);$

(c) $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 0;$

(d) $f := \exp, \quad a \in \mathbb{R};$

(e) $f(x) := x \cdot \sqrt{1+\cos(x)} \quad (x \in (0,+\infty)), \quad a := \pi/2;$

(f) $f(x) := \begin{cases} x^4\left(\sqrt{2} + \sin(1/x)\right) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 0;$

(g) $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-9} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}), \quad a := -1;$

(h) $f(x) := \dfrac{x+1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 1;$

(i) $f := \ln, \quad a \in (0, +\infty);$

(j) $f(x) := \dfrac{e^{-x}}{1+3\sin(x)} \quad \left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)\right), \quad a := 0.$

2. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a) **additív függvény**, azaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor igaz az

$$f \in \mathfrak{D} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathfrak{D}[0], \qquad \text{ill. az} \qquad f \in \mathfrak{D} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = f'(0) \quad (x \in \mathbb{R})$$

ekvivalencia, ill. implikáció!

(b) **multiplikatív függvény**, azaz

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor igaz az

$$f \in \mathfrak{D} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathfrak{D}[0], \qquad \text{ill. az} \qquad f \in \mathfrak{D} \quad \Longrightarrow \quad f' = f'(0) \cdot f$$

ekvivalencia, ill. implikáció!

Megjegyzések.

- Additiv függvény például az

$$f(x) := cx \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}),$$

függvény, ugyanis bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x+y) = c(x+y) = cx + cy = f(x) + f(y)$$

teljesül.

- Multiplikatív függvény például az

$$f(x) := e^x \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}),$$

függvény, ugyanis bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$$

teljesül.

3. A definíció alapján számítsuk ki $f'(x)$-et, ha

$$f(x) := \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

majd mutassuk meg hogy bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \eta(h)h \qquad (-x < h),$$

ahol az $\eta \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\lim\limits_{0} \eta = 0$ teljesül!

4. Adott $n \in \mathbb{N}$, ill. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ különböző számok esetén adjunk meg olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amely ezen pontok kivételével mindenütt deriválható!

5. Tegyük fel, hogy a differenciálható $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros (páratlan) [periodikus]. Mutassuk meg, hogy f' páratlan (páros) [periodikus]!

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és

$$a_n := n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor $\lim(a_n) = f'(a)$ teljesül! Igaz-e, hogy ha (a_n) konvergens, akkor fennáll az $f \in \mathfrak{D}[a]$ tartalmazás?

7. Legyen $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy igaz az

$$f(x) := \begin{cases} x^n \sin\left(\dfrac{1}{x^m}\right) & (x \neq 0), \\ \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \qquad (x \in [-1, 1]).$$

függvény esetében igaz az

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 1$$

ekvivalencia!

8. Van-e olyan $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely pontosan egy pontban deriválható?

Útm.

1. (a) Mivel bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{c-c}{x-a} = 0 \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0),$$

ezért $f \in \mathfrak{D}[a]$ és $f'(a) = 0$.

(b) Mivel minden $0 \neq h \in \mathbb{R}$, $a \in (1, +\infty)$ esetén $a + h \in [1, +\infty) = \mathcal{D}_f$, ezért

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{(a+h)^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{h} = \\
&= \frac{\sqrt{(a+h)^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}} = \\
&= \frac{(a+h)^2-a^2}{h\left[\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}\right]} = \frac{2ah+h^2}{h\left[\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}\right]} = \\
&= \frac{2a+h}{\sqrt{(a+h)^2-1}+\sqrt{a^2-1}} \longrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2-1}},
\end{aligned}$$

azaz $f \in \mathfrak{D}[a]$ és $f'(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$.

(c) Mivel minden $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \longrightarrow \pm\infty \; (x \to 0 \pm 0)\,,$$

ezért $f \notin \mathfrak{D}[0]$.

(d) Megmutatjuk, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\exp \in \mathfrak{D}[a]$ és $\exp'(a) = \exp(a)$.

1. lépéps. Ha $a = 0$, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} - 1 = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - 1 = x \cdot \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!} = x \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}\right) \longrightarrow 0 \cdot \left(\frac{1}{2}+0\right) = 0 \qquad (n \to \partial).$$

Megjegyezzük, hogy ha $0 < |x| < 1$, akkor

$$\left|\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} - 1\right| < |x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

ahonnan ismét

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} - 1 = 0,$$

azaz $\exp \mathfrak{D}[0]$, ill. $\exp'(0) = 1$ következik.

2. lépéps. Ha $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\exp(x) = \exp(a + (x-a)) = \exp(a) \cdot \exp(x-a),$$

így tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$, ill. $y := x - a$ esetén

$$\frac{\exp(x)-\exp(a)}{x-a} = \exp(a) \cdot \frac{\exp(x-a)-1}{x-a} = \exp(a) \cdot \frac{\exp(y)-1}{y},$$

így

$$\frac{\exp(x)-\exp(a)}{x-a} \longrightarrow \exp(a)\exp'(0) = \exp(a) \quad (x \to a),$$

ahonnan $\exp \in \mathfrak{D}[a]$, ill. $\exp'(a) = \exp(a)$ következik.

(e) Mivel minden $\frac{\pi}{2} \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \frac{x \cdot \sqrt{1 + \cos(x)} - \pi/2 \cdot \sqrt{1 + \cos(\pi/2)}}{x - \pi/2} = \frac{x \cdot \sqrt{1 + \cos(x)} - \pi/2}{x - \pi/2},$$

ezért a $h := x - \pi/2$ jelöléssel

$$\frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \frac{(h + \pi/2) \cdot \sqrt{1 + \cos(h + \pi/2)} - \pi/2}{h} = \frac{(h + \pi/2) \cdot \sqrt{1 + \cos(h)\cos(\pi/2) - \sin(h)\sin(\pi/2)} - \pi/2}{h} =$$

$$= \frac{(h + \pi/2) \cdot \sqrt{1 - \sin(h)} - \pi/2}{h} = \sqrt{1 - \sin(h)} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin(h)} - 1}{h} =$$

$$= \sqrt{1 - \sin(h)} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin(h)} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin(h)} + 1}{\sqrt{1 - \sin(h)} + 1} = \sqrt{1 - \sin(h)} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \sin(h)} + 1}.$$

Így

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{h \to 0} \sqrt{1 - \sin(h)} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \sin(h)} + 1} = 1 - \frac{\pi}{4},$$

azaz $f \in \mathfrak{D}[\pi/2]$ és $f'(\pi/2) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

(f) $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^3 \left(\sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$, ui. a $\mathcal{D}_f \ni x \mapsto \sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény korlátos és $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$.

(g) Mivel minden $x \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 3; -1\}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\frac{x + 2}{x^2 - 9} + \frac{1}{8}}{x + 1} = \frac{x^2 + 8x + 7}{8(x + 1)(x^2 - 9)} = \frac{(x + 1)(x + 7)}{(8x + 8)(x^2 - 9)} = \frac{x + 7}{8(x^2 - 9)}$$

ezért

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \longrightarrow \frac{6}{-64} = -\frac{3}{32} \qquad (x \to -1),$$

azaz $f \in \mathfrak{D}[1]$ és $f'(-1) = -\frac{3}{32}$.

(h) Mivel minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x + 1}{x^2 + 1} - 1}{x - 1} = \frac{\frac{x + 1 - x^2 - 1}{x^2 + 1}}{x - 1} = \frac{x - x^2}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{x(1 - x)}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{-x}{x^2 + 1},$$

ezért

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad (x \to 1),$$

azaz $f \in \mathfrak{D}[1]$ és $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

(i) Mivel

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{a}{x - a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{a}{x - a} \cdot \ln\left(\frac{a + x - a}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{a}{x - a} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x - a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \to a} \cdot \ln\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x - a}}\right)^{\frac{a}{x - a}}\right) = \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\lim_{x \to a}\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x - a}}\right)^{\frac{a}{x - a}}\right) = \frac{1}{a} \cdot \ln(e) = \frac{1}{a},$$

ezért $f \in \mathfrak{D}[a]$ és $f'(0) = \dfrac{1}{a}$.

(j) Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^{-x}}{1+3\sin(x)} - 1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{-x} - 1 - 3\sin(x)}{1 + 3\sin(x)} = \frac{e^{-x} - 1 - 3\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + 3\sin(x)},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + 3\sin(x)} = \frac{1}{1 + 3 \cdot 0} = 1,$$

és

$$\begin{aligned}\frac{e^{-x} - 1 - 3\sin(x)}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - 1 - 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} = \frac{1}{x} \cdot \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} - 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} - 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \longrightarrow -1 - 3 \cdot 0 = -1 \qquad (x \to 0),\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = (-1) \cdot 1 = -1.$$

Következésképpen $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = -1$.

2. (a) Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0),$$

ezért $f(0) = 0$. Így ha $h, x \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, akkor

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) + f(h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Így, ha valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$, akkor

$$\mathbb{R} \ni f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \in \mathbb{R},$$

azaz $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = f'(x)$. Hasonló érveléssel látható be az

$$f \in \mathfrak{D}[0] \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathfrak{D}$$

implikáció is.

(b) Világos, hogy az

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

esetben teljesül az állítás. Ellenkező esetben alkalmas $\xi \in \mathbb{R}$ esetén $f(\xi) \neq 0$, így

$$f(\xi) = f(\xi + 0) = f(\xi) \cdot f(0), \qquad \text{azaz} \qquad f(0) = 1.$$

Így bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$1 = f(0) = f(a - a) = f(a + (-a)) = f(a) \cdot f(-a),$$

ahonnan $f(a) \neq 0$ következik. Ha tehát $h, x \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, akkor

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \frac{f(h) - 1}{h} = f(x) \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Következésképpen, ha valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$, akkor

$$\mathbb{R} \ni f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h} = f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \in \mathbb{R},$$

azaz $f \in \mathfrak{D}[0]$ és

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1}{f(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

azaz

$$f'(x) = f'(0)\cdot f(x).$$

Hasonló érveléssel látható be az

$$f \in \mathfrak{D}[0] \quad\Longrightarrow\quad f \in \mathfrak{D}$$

implikáció is.

3. Mivel

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{x+h}{2}+\frac{1}{x+h}-\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x(x+h)}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}+\frac{h}{x^2(x+h)}\right\} = \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{x^2},
\end{aligned}$$

ezért

$$f'(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{x^2} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Tehát

$$f(x+h)-f(x) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot h + \omega(h)\cdot h \qquad (-x < h),$$

ahol $h \neq 0$ esetén

$$\eta(h) := \frac{f(x+h)-f(x)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot h}{h} = \frac{h}{x^2(x+h)} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0).$$

4. Az

$$f(x) := |x-a_1|\cdot\ldots\cdot|x-a_n| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény megfelelő.

5. **1. lépés.** Ha f páros, akkor $\mathcal{D}_f = -\mathcal{D}_f$ és $f(-x) = f(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$; így ha f páros és $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor $f \in \mathfrak{D}[-a]$ és $f'(-a) = -f'(a)$, ui.

   - egyrészt $-a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_f)$, hiszen tetszőleges $\delta > 0$ esetén $K_\delta(-a) = -K_\delta(a)$ és $K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_f \Rightarrow -K_\delta(a) \subset -\mathcal{D}_f$;
   - másrészt pedig

$$\begin{aligned}
f'(-a) &= \lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(a)}{x+a} = \lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(a)}{-y+a} = \lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{-y+a} = \\
&= -\lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = -f'(a).
\end{aligned}$$

   2. lépés. Ha f páratlan, akkor $\mathcal{D}_f = -\mathcal{D}_f$ és $f(-x) = -f(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$; így ha f páratlan és $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor $f \in \mathfrak{D}[-a]$ és $f'(-a) = f'(a)$, ui.

   - egyrészt $-a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}_f)$, hiszen tetszőleges $\delta > 0$ esetén $K_\delta(-a) = -K_\delta(a)$ és $K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_f \Rightarrow -K_\delta(a) \subset -\mathcal{D}_f$;

- másrészt pedig

$$f'(-a) = \lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x\to -a}\frac{f(x)+f(a)}{x+a} = \lim_{y\to a}\frac{f(-y)+f(a)}{-y+a} = \lim_{y\to a}\frac{-f(y)+f(a)}{-y+a} =$$

$$= \lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a).$$

3. lépés. Ha f periodikus, akkor van olyan $0 \neq p \in \mathbb{R}$, hogy $\mathcal{D}_f = p + \mathcal{D}_f$ és $f(x+p) = f(p)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$; így ha f periodikus és $f \in D[a]$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a+p]$ és $f'(a+p) = f'(a)$, ui.

$$\lim_{x\to a+p}\frac{f(x)-f(a+p)}{x-(a+p)} = \lim_{y\to a}\frac{f(y+p)-f(a+p)}{y+p-a-p} = \lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a).$$

6. **1. lépés.** Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}},$$

ezért az állítás az átviteli elv és a deriválhatóság definíciójának egyszerű következménye.

2. lépés. Ha pl. f a Dirichlet-függvény és $a \in \mathbb{R}$, akkor (a_n) nullasorozat, így konvergens, ui. a és $a + \frac{1}{n}$ egyszerre racionális vagy irracionális szám. Viszont f nem differenciálható a-ban, hiszen nem folytonos a-ban (vö. előadás).

7. **1. lépés.** Ha $n > 1$, akkor bármely $0 \neq x \in [-1, 1]$ esetén

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x^m}\right) \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0),$$

ahonnan $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = 0$ következik.

2. lépés. Ha $n = 0$, akkor az

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[m]{n}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\lim(a_n) = 0$, de az $\left(\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0}\right)$ sorozat nem konvergens, így $f \notin \mathfrak{D}[0]$.

3. lépés. Ha $n \leq 0$, akkor az

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[m]{(4n+1)\frac{\pi}{2}}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra $\lim(a_n) = 0$, de $f(a_n) \not\to f(0)$ $(n \to \infty)$, így $f \notin \mathfrak{D}[0]$, ui. $f \notin \mathfrak{C}[0]$.

8. Ha

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in \mathbb{Q}), \\ -x^2 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

- $f \in \mathfrak{D}[0]$, hiszen

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{x^2}{x}\right| = |x| \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0)$$

/sőt $f'(0) = 0$/.

- bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f \notin \mathfrak{D}[x]$, hiszen ha
  (a) $a \in \mathbb{Q}$, akkor van olyan $x_n \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy $\lim(x_n) = a$, de $\lim(f(x_n)) = -a^2 \neq a^2 = f(a)$, azaz $f \notin \mathfrak{C}[a]$;
  (b) $a \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, akkor van olyan $y_n \in \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy $\lim(y_n) = a$, de $\lim(f(y_n)) = a^2 \neq -a^2 = f(a)$, azaz $f \notin \mathfrak{C}[a]$. ■

1.4. 4. oktatási hét (2020.09.30.)

Szükséges előismeretek.

1. Mit jelent az, hogy egy függvény *jobbról deriválható* egy pontban?
Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és tegyük fel, hogy alkalmas $\delta > 0$ számra $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in \mathfrak{D}_+[a] \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

2. Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?
Válasz: $\mathfrak{D}[a] \subset \mathfrak{C}[a]$, azaz bármely $f \in \mathfrak{D}[a]$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. A fordított irányú implikáció nem igaz, ui. az

$$f(x) := |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $f \in \mathfrak{C}[a]$, de $f \notin \mathfrak{D}[a]$, hiszen tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \mathrm{sgn}(x) \longrightarrow \pm 1 \quad (x \to 0 \pm 0).$$

3. Definiálja az ln függvényt!
Válasz: Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ függvény bijekció. Ennek inverze az $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ logaritmusfüggvény.

4. Mi a definíciója az a^x $(a, x \in \mathbb{R},\ a > 0)$ hatványnak?
Válasz: $a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$.

5. Mi az érintő definíciója?
Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}[a]$. Az

$$e_a^f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad e_a^f(x) := f(a) + f'(a)(x - a)$$

függvényt az f függvény a-beli érintőfüggvényének grafikonját pedig az $y = f(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$ grafikon $(a, f(a))$-beli érintőjének nevezzük.

Az óra anyaga.

Emlékeztető. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és tegyük fel, hogy alkalmas $\delta > 0$ számra

- $[a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in \mathfrak{D}_+[a] \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

- $(a-\delta, a] \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in \mathfrak{D}_-[a] \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Megjegyzés. Ha $\alpha < a < \beta$ és

$$f(x) = \begin{cases} b(x) & (x \in (\alpha, a)), \\ f(a) & (x = a), \\ j(x) & (x \in (a, \beta)), \end{cases}$$

akkor az f függvény deriválhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy $b, j \in \mathfrak{D}$, ill. $f \in \mathfrak{D}[a]$ teljesüljön. Ez utóbbi pedig pontosan akkor áll fenn, ha

$$\lim_{a-0} b = f(a) = \lim_{a+0} j \qquad \text{és} \qquad f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} b'(x) = \lim_{x \to a+0} j'(x) = f'_+(a).$$

Feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Mely pontokban deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2 & (x \in (-\infty, 0)), \\ x - x^2 & (x \in [0, +\infty)) \end{cases}$$

függvény? Ahol deriválható, ott számítsuk ki a deriváltat!
Útm.

- Ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor nyilván $f \in \mathfrak{D}[a]$ és

$$f'(a) = \begin{cases} \alpha + 2a & (a < 0), \\ 1 - 2a & (a > 0). \end{cases}$$

- Ha $a = 0$, akkor nyilván $f \in \mathfrak{C}[0]$, és így

$$f'_-(0) = \alpha - 2 \cdot 0 = \alpha \qquad \text{és} \qquad f'_+(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

  következtében

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 1. \quad \blacksquare$$

Feladat. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$$

határértéket!

Útm. Ha

$$f(x) := \sqrt[4]{x} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}),$$

akkor az f deriválhatóságának következtében

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(16+h) - f(16)}{h} = f'(16) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvények, $\mathcal{D} := \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, továbbá $f(x) > 0$ $(x \in \mathcal{D})$, akkor az

$$f^g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \qquad f^g(x) := f(x)^{g(x)} := e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

függvény is deriválható és deriváltjára

$$\boxed{(f^g)'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}} \qquad (x \in \mathcal{D}) \tag{1.2}$$

teljesül.

Példa. Ha

$$h(x) := x^x = e^{x \ln(x)} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$h'(x) = x^x \{\ln(x) + 1\} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

A (1.2) formulát **logaritmikus deriválás**nak hívják. Konkrét számolások során sok esetben célszerű az alábbi módon eljárni:

1. lépés. Mivel minden $x \in \mathcal{D}$ esetén

$$h(x) := f(x)^{g(x)} > 0,$$

képezzük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln(h(x)) = g(x) \cdot \ln(f(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

2. lépés. Innen mindkét oldalt deriválva

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

adódik.

3. lépés. A derivált tehát

$$h'(x) = h(x) \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \qquad (x \in \mathcal{D}),$$

alakú, ahonnan ismét azt kapjuk, hogy

$$\left(f^g\right)'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

A logaritmikus deriválás más esetben is igen hasznos segédeszköz. Így van ez az

$$f(x) := K \frac{x^\alpha (ax+b)^\beta}{(cx+d)^\gamma}$$

$$\left(x \in \left(\max\left\{ -\frac{b}{a}, -\frac{d}{c} \right\}, +\infty \right);\ 0 < \alpha, \beta, a, b, c, d, K \in \mathbb{R} \right)$$

deriválható függvény esetében is:

$$\ln(f(x)) \equiv \ln(K) + \alpha \ln(x) + \beta \ln(ax+b) - \gamma \ln(cx+d),$$

így mindkét oldal deriváltját véve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \frac{\alpha}{x} + \frac{a\beta}{ax+b} - \frac{c\gamma}{cx+d},$$

azaz

$$\begin{aligned}
f'(x) &\equiv K \cdot \frac{x^\alpha (ax+b)^\beta}{(cx+d)^\gamma} \cdot \left\{ \frac{\alpha}{x} + \frac{a\beta}{ax+b} - \frac{c\gamma}{cx+d} \right\} \equiv \\
&\equiv K \cdot \frac{x^\alpha (ax+b)^\beta}{(cx+d)^\gamma} \cdot \frac{\alpha(ax+b)(cx+d) + a\beta x(cx+d) - c\gamma x(ax+b)}{x(ax+b)(cx+d)} \equiv \\
&\equiv K \cdot \frac{x^{\alpha-1}(ax+b)^{\beta-1}}{(cx+d)^{\gamma+1}} \cdot \{\alpha(ax+b)(cx+d) + a\beta x(cx+d) - c\gamma x(ax+b)\} \equiv \\
&\equiv K \cdot \frac{x^{\alpha-1}(ax+b)^{\beta-1}}{(cx+d)^{\gamma+1}} \cdot \left\{ ac(\alpha+\beta-\gamma)x^2 + [\alpha(ad+bc) + a\beta d - c\gamma b)x + \alpha bd \right\}.
\end{aligned}$$

Feladat. Deriváljuk a következő függvényeket!

1. $f(x) := x^{\ln(x)} \quad (x \in (0, +\infty))$; 2. $f(x) := \ln(x)^x \quad (x \in (1, +\infty))$; 3. $f(x) := \dfrac{x^3\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\ln(f(x)) = \ln(x) \cdot \ln(x) = \ln^2(x),$$

ezért

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2\ln(x)}{x}, \qquad \text{ahonnan} \qquad f'(x) = f(x) \cdot \frac{2\ln(x)}{x} = x^{\ln(x)} \cdot \frac{2\ln(x)}{x} = 2\ln(x) \cdot x^{\ln(x)-1}.$$

2. Mivel tetszőleges $x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln(\ln(x)),$$

ezért

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\ln(x)) + x \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)},$$

ahonnan

$$f'(x) = f(x) \cdot \left\{\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\right\} = \ln(x)^x \cdot \left\{\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\right\}$$

következik.

3. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\ln(f(x)) = 3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+3),$$

ezért

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+3} = \frac{3(x^2+1)(x^2+3) + x^2(x^2+3) - x^2(x^2+1)}{x(x^2+1)(x^2+3)} =$$

$$= \frac{3x^4+14x^2+9}{x(x^2+1)(x^2+3)},$$

ahonnan

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{3x^4+14x^2+9}{x(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}} \cdot \frac{3x^4+14x^2+9}{x(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{x^2(3x^4+14x^2+9)}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{(x^2+3)^3}}. \quad \blacksquare$$

Emlékeztető. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}[a]$. Ekkor

1. az

$$\boxed{e_a^f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) \quad (x \in \mathbb{R})}$$

   függvény grafikonját az f függvény $(a, f(a))$ pontbeli *érintő*jének nevezzük.

2. ha $f'(a) \neq 0$, az

$$\boxed{n_a^f(x) := f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a) \quad (x \in \mathbb{R})}$$

   függvény grafikonját, ill. $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$ esetén az $x = a$ egyenletű egyenest az f függvény $(a, f(a))$ pontbeli *normális*ának nevezzük.

Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5}\right) \qquad (-1 < x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonjának az $a := 0$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőehgyenesének az egyenletét!
Útm. Mivel

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x) - 5 \cdot \ln(x^2+1) \qquad (-1 < x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1} \quad (-1 < x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

következtében az érintőegyenes egyenlete

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy az az iménti feladatban nem használtuk ki a logaritmusfüggvényre vonatkozó azonosságokat, akkor f' kiszámítása lényegesen tovább tartott volna:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\frac{(x^2+1)^5}{2\sqrt{1+x}} - 10x(x^2+1)^4\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^{10}} = \frac{\frac{(x^2+1)^5}{2(1+x)} - 10x(x^2+1)^4}{(x^2+1)^5} = \\
&= \frac{(x^2+1)^5 - 20x(x+1)(x^2+1)^4}{2(1+x)(x^2+1)^5} = \frac{(x^2+1) - 20x(x+1)}{2(1+x)(x^2+1)} = \\
&= \frac{\cancel{(x^2+1)}}{2(1+x)\cancel{(x^2+1)}} - \frac{20x\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}(x^2+1)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Házi feladatok.

1. Deriválható-e f az a pontban?

   (a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0); \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}),\ a := 0;$

   (b) $f(x) := |\ln(|x|)| \quad (0 \neq x \in \mathbb{R}),\ a := -1;$

   (c) $f(x) := \sqrt{1 - e^{-x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}),\ a := 0.$

2. Mely $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} x & (x \in (-\infty, 0)), \\ a + bx + cx^2 + dx^3 & (x \in ([0, 1]), \\ -x^2 & (x \in (1, +\infty)) \end{cases}$$

   függvény?

3. Határozzuk meg az

$$f(x) := (2 + \sin(x))^{\cos(x)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   függvény deriváltfüggvényét!

4. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsuk ki a

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}$$

   határértéket!

5. Írjuk fel az

$$f(x) := \sin\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   függvény grafikonjának az $a := \dfrac{1}{2}$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőehgyenesének az egyenletét!

6. Határozzuk meg az

$$f(x) := e^{2x} + x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   függvény grafikonjának az $a := 0$ abszcisszájú pontjához húzható érintőegyenesére az érintési pontban merőleges egyenes egyenletét, majd ennek az egyenesnek az origótól való távolságát!

Útm.

1. (a) Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{f(x)-f(0)=}{x-0}=\frac{1}{1+e^{1/x}}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0-0} e^{1/x}=0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} e^{1/x}=+\infty,$$

ezért

$$f'_{-}(0)=1 \qquad \text{és} \qquad f'_{+}(0)=0.$$

Következésképpen $f \notin \mathfrak{D}[0]$.

(b) Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{|\ln(|x|)|}{x+1}=\begin{cases}\dfrac{-\ln(|x|)}{x+1} & (0\neq x\in(-1,1)),\\[2ex] \dfrac{\ln(|x|)}{x+1} & (x\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)),\end{cases}$$

következésképpen (vö. korábban)

$$f'_{-}(-1)=\lim_{x\to -1-0}\frac{\ln(-x)}{x+1}=\lim_{y\to 1+0}\frac{\ln(y)}{1-y}=-\lim_{y\to 1+0}\frac{\ln(y)}{y-1}=-1$$

és

$$f'_{+}(-1)=\lim_{x\to -1+0}\frac{-\ln(-x)}{x+1}=-\lim_{x\to -1+0}\frac{\ln(-x)}{x+1}=1.$$

Ez azt jelenti, hogy $f \notin \mathfrak{D}[0]$.

(c) Bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ számra

$$\frac{f(x)-f(0)=}{x-0}=\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}=\frac{\sqrt{1-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}}}{x}=\frac{\sqrt{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n!}}}{x}=\operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{n!}}=$$

$$=\operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{n!}}\longrightarrow \pm\sqrt{1+0}=\pm 1 \qquad (x\to 0\pm 0).$$

Következésképpen $f'_{\pm}(0)=\pm 1$, azaz $f \notin \mathfrak{D}[0]$.

2. Ha f deriválható, akkor folytonos is. Világos, hogy ha $\alpha \in \{0;1\}$, akkor

$$f\in\mathfrak{C}[\alpha] \qquad\Longrightarrow\qquad (0=a \quad\wedge\quad a+b+c+d=-1)\,.$$

teljesül. Mivel $f'_{-}(0)=1$, $f'_{+}(0)=b$, ezért

$$f\in\mathfrak{D}[0] \qquad\Longrightarrow\qquad 1=b.$$

Mivel $f'_{-}(1)=b+2c+3d$, $f'_{+}(1)=-2$, ezért

$$f\in\mathfrak{D}[1] \qquad\Longrightarrow\qquad b+2c+3d=-2.$$

Mindez azt jelenti, hogy az

$$a=0,\qquad a+b+c+d=-1,\qquad b=1,\qquad b+2c+3d=-2.$$

egyenlőségeknek kell teljesülniük, azaz

$$a=0,\qquad b=1,\qquad c=-3,\qquad d=1$$

esetén lesz f deriválható.

3. Mivel
$$\ln(f(x)) = \cos(x)\cdot\ln(2+\sin(x)) \qquad (x\in\mathbb{R}),$$
ezért
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin(x)\cdot\ln(2+\sin(x)) + \cos(x)\cdot\frac{\cos(x)}{2+\sin(x)} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$
Következésképpen
$$f'(x) = (2+\sin(x))^{\cos(x)}\cdot\left\{\frac{\cos^2(x)}{2+\sin(x)} - \sin(x)\cdot\ln(2+\sin(x))\right\} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

4. Mivel
$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2) \qquad (x\in\mathbb{R}),$$
ezért az
$$f(x) := \frac{\sin(x-1)}{x+2} \qquad (-2\neq x\in\mathbb{R})$$
deriválható függvényre
$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{\sin(x-1)}{x+2}-0}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = \left.\frac{(x+2)\cos(x-1)-\sin(x-1)}{(x+2)^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{3}.$$

5. Mivel $f(a) = \sin(-2/5)$ és
$$f'(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^2+2x+1}{(-x^2+1)^2}, \qquad \text{ill.} \qquad f'(a) = \cos(-2/5)\cdot\frac{28}{25} = \frac{28\cos(2/5)}{25},$$
ezért az érintő:
$$y = f(a) + f'(a)(x-a) = \sin(-2/5) + \cos(-2/5)\cdot\frac{44}{25}\cdot(x-1/2) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

6. Világos, hogy $f(0) = 1+0 = 1$, továbbá $f'(0) = 2\cdot e^{2\cdot0} + 2\cdot 0 = 2$, így az érintőre merőleges egyenes egyenlete: $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Ennek az origótól való távolsága: $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. ■

Gyakorló feladatok.

1. Legyen $\alpha, \beta, \gamma, x_0 \in \mathbb{R}$. Hol differenciálhatók az alábbi függvények? Ahol igen, ott számítsuk ki a deriváltakat!

(a) $f(x) := x|x| \quad (x\in\mathbb{R})$;

(b) $f(x) := \begin{cases} 1-x & (x<0), \\ e^{-x} & (x\geq 0); \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} x^2-x+1 & (x<0), \\ 1-\sin(x) & (x\geq 0); \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} x^2 & (x\leq x_0), \\ \alpha x+\beta & (x>x_0); \end{cases}$

(e) $f(x) := \begin{cases} 1-\alpha x & (x<0), \\ e^{-x^2} & (x\geq 0); \end{cases}$

(f) $f(x) := \begin{cases} \alpha x^2+\beta x+\gamma & (x<0), \\ e^{x} & (x\geq 0). \end{cases}$

2. Legyen $a \in \mathbb{R}$, ill. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az

$$\text{(a) } f(x) := g(x)(x-a) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{(b) } f(x) := g(x)|x-a| \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény deriválható az $a \in \mathbb{R}$ pontban?

3. Adott $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ valós számok, ill. az a pontban differenciálható $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény esetén mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + \beta & (x < a), \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény deriválható az a pontban?

4. Számítsuk ki az

$$f(x) := \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{x^2} \qquad (x \in (0, \pi))$$

függvény deriváltját!

5. Határozzuk meg f grafikonjának $(a, f(a))$-beli érintőjét!

$$\text{(a) } f(x) := x^{\sin(x)} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \quad a := 1, \qquad \text{(b) } f(x) := \frac{x+1}{x-1} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}), \quad a := 3,$$

$$\text{(c) } f(x) := \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := 1/2, \qquad \text{(d) } f(x) := \sin^2(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := \pi/2;$$

$$\text{(e) } f(x) := (x+2)^{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := -1, \quad \text{(f) } f(x) := \left(\sin(\sqrt{x})\right)^{e^{1/x}} \quad (x \in (0, \pi^2)), \ a := \frac{\pi^2}{4}.$$

6. Igazoljuk, hogy ha $1 \neq x \in \mathbb{R}$ és $2 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor fennállnak az alábbi egyenlőségek!

(a) $1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$;

(b) $1 + 2^2x + \ldots + n^2x^{n-1} = \dfrac{-1 - x + (n+1)^2x^n + (1 - 2n - 2n^2)x^{n+1} + (n^2 + 2n - 2)x^{n+2}}{(x-1)^3}$.

7. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := x^3 - 2x^2 + 4x - 5$, (b) $f(x) := x + 2\sqrt{x}$,

(c) $f(x) := x - \mathrm{tg}(x)$, (d) $f(x) := 2\ln(x) - x$,

(e) $f(x) := \dfrac{x^5}{5} - 2x^3 + x$, (f) $f(x) := \dfrac{10}{x^3}$,

(g) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$, (h) $f(x) := x - \sin(x)$,

(i) $f(x) := e^x + \dfrac{1}{x}$, (j) $f(x) := 3a^x - \cos(x)$.

8. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := x^2 \sin(x)$, (b) $f(x) := x^2 \mathrm{tg}(x)$,

(c) $f(x) := \sqrt{x}\cos(x)$, (d) $f(x) := \ln(x) \cdot e^x$,

(e) $f(x) := \mathrm{ctg}(x) \cdot \sin(x)$, (f) $f(x) := (1 + x^3) \cdot e^x$.

9. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - x - 2}$, (b) $f(x) := \dfrac{2x^4}{1 - x^2}$,

(c) $f(x) := \dfrac{1 - x}{1 + x}$, (d) $f(x) := \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

10. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := (3x^2 + 4x + 1)^5$, (b) $f(x) := (1 + \sqrt[3]{x})^3$, (c) $f(x) := \mathrm{tg}\left(x^3\right)$,

(d) $f(x) := \sin\left(2^x\right)$, (e) $f(x) := \sqrt{x^2 + 1}$, (f) $f(x) := \exp\left(x^4\right)$,

(g) $f(x) := \mathrm{tg}\left((x^2 + x)^3\right)$, (h) $f(x) := \cos\left(e^{2x+3}\right)$, (i) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

(j) $f(x) := \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x + 3}}$.

11. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$,

(b) $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$,

(c) $f(x) := \sin^3(x)\cdot\cos(x)$,

(d) $f(x) := \ln(\cos(x))$,

(e) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$,

(f) $f(x) := e^{4x+3}$,

(g) $f(x) := 3^{x^2}$,

(h) $f(x) := \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$,

(i) $f(x) := \sin\left(\sqrt{1-2^x}\right)$,

(j) $f(x) := \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$,

(k) $f(x) := \ln\left(e^x\cdot\cos(x) + e^{-x}\cdot\sin(x)\right)$,

(l) $f(x) := \cos(x)\cdot\sqrt{1+\sin^2(x)}$.

12. Határozzuk meg $f'(x)$-et!

(a) $f(x) := e^{ax}\dfrac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad /a^2+b^2>0/$,

(b) $f(x) := \dfrac{1}{1-1/a}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{\sqrt{1/a}}{1-1/a}\ln\left(\dfrac{1+x\sqrt{1/a}}{1-x\sqrt{1/a}}\right)$ $\quad /0<a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}/$,

(c) $f(x) := (1+nx^m)(1+mx^n)$ $\quad /m,n\in\mathbb{N}/$,

(d) $f(x) := \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ $\quad /a\in\mathbb{R}/$,

(e) $f(x) := \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\cdot\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right)$ $\quad /0<a,b\in\mathbb{R}/$,

(f) $f(x) := \ln\left(\dfrac{b+a\cos(x)+\sqrt{b^2-a^2}\sin(x)}{a+b\cos(x)}\right)$ $\quad /a,b\in\mathbb{R}:\ 0\le|a|<|b|/$,

(g) $f(x) := \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ $\quad /a,b\in\mathbb{R}:\ a>b\ge 0/$,

(h) $f(x) := \ln\left(\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}\right) + \dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{b}\right)$ $\quad /0\ne b\in\mathbb{R}/$.

13. Számítsuk ki az
$$f(x) := \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x \in (-1,1))$$
függvény deriváltját az $a := \sqrt{2}$ pontban!

14. Számítsuk ki az
$$f(x) := \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2x + 1 \qquad (x \in (-1,1))$$
függvény deriváltját az $a := 0$ pontban!

15. Számítsuk ki az
$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} \qquad (x \in (0,\pi))$$
függvény deriváltját!

16. Számítsuk ki az
$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right) + \frac{\sin(x)}{2\cos^2(x)} \qquad (x \in (-\pi/2, \pi/2))$$
függvény deriváltját!

17. Számítsuk ki az
$$f(x) := \ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right) \qquad (x \in (-1,1))$$
függvény deriváltját!

18. Számítsuk ki az
$$f(x) := \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \qquad (x \in (-1,1))$$
függvény deriváltját!

Útm.

1. (a) Mivel
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0), \\ & \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases},$$
így bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = 0$ esetben pedig
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x|x| - 0|0|}{x-0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0),$$
azaz $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = 0$.

(b) Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = 0$ esetben pedig

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = \begin{cases} \frac{1-x-1}{x} = -1 & (x < 0), \\ \\ \frac{e^{-x}-1}{x} & (x > 0) \end{cases} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Így $f'_-(0) = -1$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - e^0}{x} = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)_{x=0} = \left(-e^{-x}\right)_{x=0} = -1.$$

Ezért $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = -1$.

(c) Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ eseténf $\in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = 0$ esetben pedig

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x} = x - 1 & (x < 0), \\ \\ \frac{-\sin(x)}{x} & (x > 0) \end{cases} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Így $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = -1$. Ezért $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0) = -1$.

(d) Világos, hogy $x_0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = x_0$ esetben a következőket érdemes meggondolni. Ha $f \in \mathfrak{D}[x_0]$, akkor

$$2x_0 = \lim_{x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$

Tehát $\alpha = 2x_0$, $\beta = -x_0^2$.

(e) Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ eseténf $\in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = 0$ esetben pedig nyilvánvalóan $f \in \mathfrak{C}[0]$, továbbá

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\alpha = f'_-(0) = f'_+(0) = e^{-2 \cdot 0^2} \cdot (-2 \cdot 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 0.$$

(f) Világos, hogy bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ eseténf $\in \mathfrak{D}[a]$. Az $a = 0$ esetben pedig $f \in \mathfrak{C}[0]$ pontosan akkor teljesül, ha $\gamma = 1$. Mivel $f'_-(0) = \beta$, $f'_+(0) = 1$, ezért

$$f \in \mathfrak{D}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \;\wedge\; \beta = 1 \;\wedge\; \gamma = 1).$$

2. (a) Mivel

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(x) \qquad (a \neq x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f \in \mathfrak{D}[a] \qquad \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} g(x) \in \mathbb{R}.$$

(b) A g függvény folytonossága következtében f is folytonos. Mivel $f \in \mathfrak{D}_\pm[a]$, ezért

$$f'_((a) = -g(a) \qquad \text{és} \qquad f'_+(a) = g(a).$$

Látható tehát, hogy f pontosan akkor deriválható az a pontban, ha $g(a) = 0$ teljesül.

3. Ha f deriválható a-ban, akkor folytonos is a-ban, ahonnan

$$\alpha a + \beta = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = g(a)$$

következik. Ha $f'_-(a) = f'_+(a)$, azaz $\alpha = g'(a)$, akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$. Az f függvény tehát pontosan akkor deriválható az a pontban, ha

$$\alpha = g'(a) \qquad \text{és} \qquad \beta = g(a) - a g'(a).$$

4. Mivel tetszőleges $x \in (0, \pi)$ esetén
$$\frac{\sin(x)}{x} > 0,$$
ezért a
$$h(x) := \ln(f(x)) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \qquad (x \in (0, \pi))$$
függvényre
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot \frac{x \cdot \cos(x) - 1 \cdot \sin(x)}{x^2} = 2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \frac{x}{\sin(x)} \cdot (x \cdot \cos(x) - \sin(x)) = \\ &= 2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x \cdot (x \cdot \mathrm{ctg}(x) - 1) \qquad (x \in (0, \pi)). \end{aligned}$$
Következésképpen
$$f'(x) = f(x) \cdot \left\{2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x \cdot (x \cdot \mathrm{ctg}(x) - 1)\right\} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{x^2} \cdot \left\{2x \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + x \cdot (x \cdot \mathrm{ctg}(x) - 1)\right\} \qquad (x \in (0, \pi)).$$

5. (a) Mivel
$$\ln(f(x)) \equiv \sin(x)\ln(x), \qquad \text{ezért} \qquad f'(x) \equiv f(x)\left\{\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right\},$$
ahonnan
$$f'(1) = f(1)\{\cos(1)\ln(1) + \sin(1)\} = \sin(1)$$
következik. Így az érintő egyenlete:
$$y = 1 + \sin(1)(x - 1).$$

(b) Mivel $f(3) = 2$, ill.
$$f'(x) \equiv \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} \equiv \frac{-2}{(x - 1)^2},$$
továbbá $f'(3) = -\frac{1}{2}$, ezért az érintő egyenlete:
$$y = 2 - \frac{1}{2}(x - 3).$$

(c) Mivel $f(1/2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, ill.
$$f'(x) \equiv \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$
továbbá $f'(1/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ezért az érintő egyenlete:
$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

(d) Mivel $f(\pi/2) = 1$, ill. $f'(x) \equiv \sin(2x)$, továbbá $f'(\pi/2) = 0$, ezért az érintő egyenlete:
$$y = 1.$$

(e) Mivel $f(-1) = 1$, $\ln(f(x)) \equiv (x^2 + 1)\ln(x + 2)$, ill.
$$f'(x) \equiv f(x)\left\{2x\ln(x + 2) + \frac{x^2 + 1}{x + 2}\right\},$$
továbbá
$$f'(1) = f(-1)\left\{-2\ln(1) + \frac{2}{1}\right\} = 2,$$

ezért az érintő egyenlete:

$$y = 1 + 2(x+1).$$

(f) Mivel $f(\pi^2/4) = 1$, $\ln(f(x)) \equiv e^{1/x} \ln(\sin(\sqrt{x}))$, ill.

$$f'(x) \equiv f(x) \left\{ -\frac{e^{1/x}}{x^2} \ln(\sin(\sqrt{x})) + e^{1/x} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} \right\},$$

továbbá

$$f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \left\{ -\frac{16e^{4/\pi^2}}{\pi^4} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + e^{4/\pi^2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right\} = 1 \cdot 0 = 0,$$

ezért az érintő egyenlete:

$$y = 1.$$

6. Legyen

$$f(x) := x + x^2 + \ldots + x^n = x\left(1 + x \ldots + x^{n-1}\right) = x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$1 + 2x + \ldots + \ldots + nx^{n-1} = f'(x) = \frac{[(n+1)x^n - 1](x-1) - x^{n+1} + x}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Továbbá a

$$\varphi(x) := x \cdot f'(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$\begin{aligned} 1 + 2^2x + \ldots + n^2x^{n-1} &= \varphi'(x) = \frac{[n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + 1](x-1)^2 - 2(x-1)[nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x]}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{[n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + 1](x-1) - 2[nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x]}{(x-1)^3} = \\ &= \frac{-1 - x + (n+1)^2x^n + (1 - 2n - 2n^2)x^{n+1} + (n^2 + 2n - 2)x^{n+2}}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

7.

(a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$, (b) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

(c) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, (d) $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1$,

(e) $f'(x) = x^4 - 6x^2 + 1$, (f) $f'(x) = -\dfrac{30}{x^4}$,

(g) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^6}$, (h) $f'(x) = 1 - \cos(x)$,

(i) $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2}$, (j) $f'(x) = 3a^x \ln(a) + \sin(x)$.

8.

(a) $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$, (b) $f'(x) = 2x\,\mathrm{tg}(x) + \dfrac{x^2}{\cos^2(x)}$,

(c) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin(x)$, (d) $f'(x) = \dfrac{e^x}{x} + \ln(x) \cdot e^x$,

(e) $f'(x) = -\sin(x)$, (f) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + (1 + x^3) \cdot e^x$.

9.

(a) $f'(x) = \frac{2x(x^2-x-2)-(2x-1)(x^2+3)}{(x^2-x-2)^2}$, (b) $f'(x) = \frac{8x^3(1-x^2)+4x^5}{(1-x^2)^2}$,

(c) $f'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$, (d) $f'(x) = \frac{2x\ln(x)-x}{\ln^2(x)}$.

10.

(a) $f'(x) = 5(3x^2+4x+1)^4(6x+4)$, (b) $f'(x) = 3(1+\sqrt[3]{x})^2\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

(c) $f'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3)}$, (d) $f'(x) = \cos(2^x)\cdot 2^x\cdot\ln(2)$,

(e) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, (f) $f'(x) = 4x^3\exp\left(x^4\right)$,

(g) $f'(x) = \frac{3(2x+1)(x^2+x)^2}{\cos^2((x^2+x)^3)}$, (h) $f'(x) = -\sin\left(e^{2x+3}\right)\cdot 2\cdot e^{2x+3}$,

(i) $f'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$, (j) $f'(x) = \frac{\sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}}{3\sqrt[3]{[1+x\sqrt{x+3}]^2}}$.

11.

(a) $f'(x) = \frac{3(x+1)^2\left\{2\sqrt{x^3}-(x+1)\sqrt{x}\right\}}{2x^3}$, (b) $f'(x) = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$,

(c) $f'(x) = (1+2\cos(2x))\sin^2(x)$, (d) $f'(x) = -\operatorname{tg}(x)$,

(e) $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$, (f) $f'(x) = 4e^{4x+3}$,

(g) $f'(x) = x3^{x^2}\ln(9)$, (h) $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$,

(i) $f'(x) = -\frac{2^{x-1}\cdot\ln(2)\cdot\ln(2)\cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)}{\sqrt{1-2^x}}$, (j) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{\frac{-1}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$,

(k) $f'(x) = \frac{(1+e^{2x})(\cos(x)-\sin(x))}{e^{2x}\cos(x)+\sin(x)}$, (l) $f'(x) = \frac{-2\sin^3(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$.

12.

(a) $f'(x) = \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx)$, (b) $f'(x) = \frac{2a}{(a-x^2)(1-x^2)}$,

(c) $f'(x) = mn\left[x^{m-1}+(m+n)x^{m+n-1}+x^{n-1}\right]$, (d) $f'(x) = \sqrt{x^2+a^2}$,

(e) $f'(x) = \frac{1}{a-bx^2}$, (f) $f'(x) = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos(x)}$,

(g) $f'(x) = \frac{1}{a+b\cos(x)}$, (h) $f'(x) = \frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$.

13. Mivel bármely $x \in (-1,1)$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{x^2(1-\ln(x))-1}{x\sqrt{(x^2-1)^3}} = \frac{x\ln(x)}{\sqrt{(x^2-1)^3}},$$

ezért

$$f'(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(2).$$

14. Mivel bármely $x\in(-1,1)$ esetén

$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}+2=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}-\frac{1}{1-x^2}+2,$$

ezért

$$f'(0)=1+0-1+2=2.$$

15. Bármely $x\in(0,\pi)$ esetén

$$f'(x)=\frac{1}{\sin^3(x)}.$$

16. Mutassuk meg, hogy

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^3(x)}\qquad (x\in(-\pi/2,\pi/2)).$$

teljesül!

17. Mutassuk meg, hogy

$$f'(x)=\frac{-2x}{1-x^4}\qquad (x\in(-1,1))$$

teljesül!

18. Mutassuk meg, hogy

$$f'(x)=\frac{x}{1-x^4}\qquad (x\in(-1,1))$$

teljesül! ■

Közazdasági alkalmazások

Térjünk most egy kicsit vissza az

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

összefüggéshez. Ez a határérték definíciója alapján nem más, mint

$$\lim_{h\to 0}\left(f'(a)-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=0\,.$$

Erre „pongyolán” fogalmazva azt mondjuk, hogy, ha

h elég közel van a 0-hoz, akkor az

$$f'(a)-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

különbség kicsi, azaz

$$\boxed{f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}\,.$$

Átrendezve azt kapjuk, hogy ha $a \cdot f(a) \neq 0$, akkor

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{f(a)} \approx \frac{h}{a} \cdot \frac{a}{f(a)} \cdot f'(a)\,,$$

azaz ha pl. f költségfüggvény, akkor azt mondhatjuk, hogy az

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{f(a)}$$

mennyiség, azaz egy a áru költségének relatív megválozása közelítőleg az

$$\frac{h}{a}$$

relatív árváltozással arányos. Az arányossági tényezőt a költség ár**rugalmasság**ának, ill. ár**elaszticitás**ának nevezzük. Látható, hogy mind a költség relatív megváltozása, mind pedig a relatív árváltozás „dimenziótlan" mennyiség[1], ezért közgazdászok előszeretettel használják az elaszticitást a derivált helyett, ugyanis pl. ha árról van szó, akkor különböző termékek esetében a termékek árának 1 Ft-os növekedése lehet jelentős is meg semmitmondó is.

Az elaszticitás (rugalmasság) fogalmát tehát a következő módon értelmezzük:

Definíció. Tegyük fel, hogy $f \in \mathfrak{D}[a]$: $f(a) \neq 0$. Ekkor az f függvény a pontbeli **elaszticitás**a az

$$\boxed{E_f(a) := \frac{a}{f(a)} \cdot f'(a)}$$

szám.

Feladat. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{26}\left(9x^2 - x^3 - 28\right) \qquad (x \in (0,+\infty))$$

költségfüggvény, ahol x az előállított mennyiség, $f(x)$ pedig a költség! **Határozzuk meg** a hozzá tartozó elaszticitásfüggvény értékét az $a = 5$ helyen!

Útm.

$$f(5) = \frac{9\cdot 5^2 - 5^3 - 28}{26} = \frac{9\cdot 25 - 5\cdot 25 - 28}{26} = \frac{72}{26} \neq 0,$$

így

$$E_f(5) = \frac{5}{f(5)} \cdot f'(5) = \frac{5\cdot 26}{72} \cdot \frac{18\cdot 5 - 3\cdot 5^2}{26} = \frac{5}{f(5)} \cdot f'(5) = \frac{5\cdot 26}{72} \cdot \frac{18\cdot 5 - 15\cdot 5}{26} = \frac{75}{72}.$$

[1]Ez azt jelenti, hogy pl. a relatív árváltozás számlálójának is meg nevezőjének is ugyanúgy [Ft] a dimenziója, így magának a relatív árváltozásnask nincs dimenziója.

Tétel. Igazoljuk, hogy függvények körében értelmezett algebrai műveletek és az elaszticitás kapcsolatára igaz a következő állítás! Ha $f, g \in D[a]$: $f(a) \cdot g(a) \neq 0$, akkor

1. $E_{f+g}(a) = \dfrac{f(a) \cdot E_f(a) + g(a) \cdot E_g(a)}{f(a) + g(a)}$;
2. $E_{f \cdot g}(a) = E_f(a) + E_g(a)$;
3. $E_{\frac{f}{g}}(a) = E_f(a) - E_g(a)$;
4. ha $1 \neq f(a) > 0$, akkor $E_{\ln \circ f}(a) = \dfrac{E_f(a)}{\ln(f(a))}$.

Biz.

1. $E_{f+g}(a) = \dfrac{a}{(f+g)(a)}(f+g)'(a) = \dfrac{a}{f(a)+g(a)}(f'(a)+g'(a)) = \dfrac{f(a)\frac{a}{f(a)}f'(a) + g(a)\frac{a}{g(a)}g'(a)}{f(a)+g(a)} =$
$= \dfrac{f(a) \cdot E_f(a) + g(a) \cdot E_g(a)}{f(a) + g(a)}$;
2. $E_{f \cdot g}(a) = \dfrac{a}{(f \cdot g)(a)}(f \cdot g)'(a) = \dfrac{a}{f(a)g(a)}(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) = \dfrac{a}{f(a)}f'(a) + \dfrac{a}{g(a)}g'(a) =$
$E_f(a) + E_g(a)$;
3. $E_{\frac{f}{g}}(a) = \dfrac{a}{(f/g)(a)}(f/g)'(a) = \dfrac{ag(a)}{f(a)}\dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} = \dfrac{a}{f(a)}f'(a) - \dfrac{a}{g(a)}g'(a) = E_f(a) -$
$E_g(a)$;
4. ha $1 \neq f(a) > 0$, akkor $E_{\ln \circ f}(a)) = \dfrac{a}{\ln(f(a))}(\ln \circ f)'(a) = \dfrac{a}{\ln(f(a))}\dfrac{f'(a)}{f(a)} = \dfrac{1}{\ln(f(a))}\dfrac{a}{f(a)}f'(a) =$
$\dfrac{E_f(a)}{\ln(f(a))}$. ■

Feladat.

1. **Igazoljuk**, hogy ha $f \in D[a]$: $a \cdot f'(a) \neq 0$, akkor fennáll a

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{f(a)} : \frac{h}{a} \right) = E_f(a)$$

egyenlőség! **Mutassuk meg** azt is, hogy ha a-nak h-val való megváltozása α%-os, akkor az $f(a)$-nak $f(a+h)$-ra való megváltozása közelítőleg $\alpha \cdot E_f(a)$%-os! **Igazoljuk** azt is, hogy ha f lineáris függvény, akkor a "közelítőleg egyenlő" helyett pontos egyenlőség teljesül!

2. **Mutassuk meg**, hogy ha egy f függvény grafikonját az x-tengelyre tükrözzük, akkor a tükrözött grafikonnak megfelelő $(-f)$ függvény elaszticitása megegyezik f elaszticitásával!

3. Milyen függvényre igaz az

$$f' = E_f$$

egyenlőség?

4. Legyen $f, g \in D[a]$: $f(a) = g(a) \neq 0$. Mi annak a feltétele, hogy teljesüljön az

$$E_f(a) = E_g(a)$$

egyenlőség?

5. Valamely árucikk iránti keresletet a p árától függően az

$$f(p) := \frac{100}{p+3} \quad (p \in (0, +\infty))$$

függvény írja le. **Állapítsuk meg**, hogy hány %-kal növekszik a kereslet, ha a cikk árát $p = 5$-ről 1%-kal csökkentjük!

Útm.

1. Az elaszticitás definícióját megelőző megjegyzés alapján nem nehéz belátni a határérték-reláció teljesülését.
Ha a-nak h-val való megváltozása α%-os, akkor

$$\frac{100(a+h-a)}{a} = \alpha.$$

Az iménti határértékreláció alapján a függvényértékek és a független változó százalékos arányára

$$\frac{100[f(a+h)-f(a)]}{f(a)} : \frac{100(a+h-a)}{a} = \frac{100[f(a+h)-f(a)]}{\alpha \cdot f(a)} \longrightarrow E_f(a) \quad (h \to 0)\ ,$$

teljesül, így valóban fennáll a közelítő

$$\frac{100[f(a+h)-f(a)]}{f(a)} \approx \alpha \cdot E_f(a)$$

egyenlőség. Ha f lineáris, azaz $f(x) = mx + b$ $(x \in \mathcal{D}_f)$, akkor

$$\frac{100[f(a+h)-f(a)]}{\alpha \cdot f(a)} = \frac{100[(m(a+h)+b)-(ma+b)]}{ma+b} : \frac{100(a+h-a)}{a} =$$

$$\frac{ma}{ma+b} = \frac{a}{ma+b} \cdot m = E_f(a)\ .$$

2. $E_{-f}(x) = \dfrac{x}{-f(x)}(-f'(x)) = \dfrac{x}{f(x)}f'(x) = E_f(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f: \ f(x) \neq 0)$.

3. Tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$: $f(x) \neq 0$ esetén $E_f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.

4. $E_f(a) = E_g(a) \Leftrightarrow \dfrac{a}{f(a)}f'(a) = \dfrac{a}{g(a)}g'(a) \Leftrightarrow f'(a) = g'(a)$, azaz f és g grafikonja a-ban érintkezik (közös érintőjük van).

5. $E_f(p) = -\dfrac{p}{p+3}$ $(p \in (0, +\infty))$, így $\dfrac{100 \cdot [f(5-0.05) - f(5)]}{f(5)} \approx 1 \cdot \left(-\dfrac{5}{5+3}\right) = -\dfrac{5}{8} \approx -0.6$, azaz a kereslet kb. $0,6\%$-kal növekszik.

1.5. 5. oktatási hét (2020.10.07.)

Szükséges előismeretek.

1. Milyen *szükséges és elégséges* feltételeket ismer differenciálható függvény *monotonitásaival* kapcsolatban?
Válasz: Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény értelmezési tartománya nyílt intervallum. Ekkor
   - f monoton növő $\iff$ $f' \geq 0$;
   - f monoton fogyó $\iff$ $f' \leq 0$.
2. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen *lokális maximuma* van?
Válasz: Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \mathcal{D}_f$ helyen lokális maximuma van, ha alkalmas $r > 0$ számmal
$$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < r).$$
3. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?
Válasz: Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen lokális szélsőértéke van és $f \in \mathfrak{D}[a]$. van Ekkor $f'(a) = 0$.
4. Hogyan szól a lokális szélsőértékekre vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?
Válasz: Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és valamely $r > 0$ számmal
$$f \in \mathfrak{D}[x] \qquad (x \in (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f).$$
Ekkor
   (a) ha az f' deriváltfüggvénynek az a pontban $(+,-)$-jelváltása van, akkor f-nek az a pontban lokális maximuma van;
   (b) ha az f' deriváltfüggvénynek az a pontban $(-,+)$-jelváltása van, akkor f-nek az a pontban lokális minimuma van.
5. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *másodrendű elégséges* feltétel?
Válasz: Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in \mathfrak{D}^2[a]$, $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$, akkor f-nek az a helyen lokális szélsőértéke van. Ez utóbbi az $f''(a) > 0$ esetben lokális minimum, az $f''(a) < 0$ esetben pedig lokális maximum.
6. Hogyan szól a *Weierstraß-tétel*?
Válasz: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor f értékkészletének van legkisebb és legnagyobb eleme:
$$(m := \min \mathcal{R}_f, \quad M := \max \mathcal{R}_f) \qquad \Longrightarrow \qquad m, M \in \mathcal{R}_f.$$

Az óra anyaga.

Emlékeztető. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor

1. f szigorúan monoton növő $\iff$ $f'(x) \geq 0$ $(x \in I)$ és bármely $J \subset I$ nyílt intervallumnak van olyan $a \in J$ pontja, amelyre $f'(a) > 0$;
2. f szigorúan monoton fogyó $\iff$ $f'(x) \leq 0$ $(x \in I)$ és bármely $J \subset I$ nyílt intervallumnak van olyan $a \in J$ pontja, amelyre $f'(a) < 0$.

Feladat. Legyen $1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Hány pozitív zérushelye van az

$$f(x) := x + \cos(x) - \alpha \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek?
Útm. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 1 - \sin(x)$, ezért f szigorúan monoton növekedő. Ha

- $\alpha < 1$, akkor $f(0) > 0$, így f-nek nincsen pozitív zérushelye;
- $\alpha > 1$ esetén $f(0) < 0$, így $f(\alpha + 2) > 0$ miatt a Bolzano-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy f-nek van pozitív zérushelye, a szigorú monotonitás miatt pontosan egy. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény, ill. $H := \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ halmaz esetében pontosan egy olyan $\xi \in H$ szám van, amelyre $f(\xi) = 0$ teljesül!
Útm. Mivel (vö. 2. gyakorlat, 15. gyakorló feladat)

$$f(0) = -\frac{\pi}{6} \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

és f folytonos, ezért a Bolzano-tétel következményeként alkalmas

$$\xi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$$

esetén $f(\xi) = 0$. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \cos(x) - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin(x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{3x}{2\cos^2\left(\frac{3x}{2}\right)} > 0 \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

ezért f szigorúan monoton (növekedő) a J intervallumon, tehát nincsen más zérushelye f-nek. ■

Feladat. Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket!

1. $f(x) := x^2(x-3) \quad (x \in \mathbb{R});$
2. $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{2; 8\});$
3. $f(x) := x \cdot \ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R});$
4. $f(x) := \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\});$

5. $f(x) := \dfrac{x^3}{3x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

2. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{2;8\}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-10x+16) - x\cdot(2x-10)}{(x^2-10x+16)^2} = \frac{16-x^2}{(x^2-10x+16)^2} = \frac{(4-x)\cdot(4+x)}{(x-2)^2\cdot(x-8)^2},$$

ezért

	$(-\infty,-4)$	$(-4,2)$	$(2,4)$	$(4,8)$	$(8,+\infty)$
f'	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

3. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x) + 1,$$

ezért

	$(0,1/e)$	$(1/e,+\infty)$
f'	$-$	$+$
f	$\downarrow$	$\uparrow$

4. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^2} + \frac{8}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)^2+8x^2}{x^2(1+x)^2} = \frac{6x^2-4x-2}{x^2(1+x)^2} = 2\cdot\frac{3x^2-2x-1}{x^2(1+x)^2} = \\ &= 2\cdot\frac{3\cdot(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x^2(1+x)^2} = 2\cdot\frac{(x-1)(3x+1)}{x^2(1+x)^2}, \end{aligned}$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	$(-1,-1/3)$	$(-1/3,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

5. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (3x^2+1) - x^3 \cdot 6x}{(3x^2+1)^2} = \frac{9x^4+3x^2-6x^4}{(3x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2}{(3x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1)}{(3x^2+1)^2} \geq 0$$

és bármely nyílt $J \subset \mathbb{R}$ esetén van olyan $a \in J$, amelyre $f'(a) > 0$, ezért f szigorúan monoton növö. ■

Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit, majd a $H \subset \mathcal{D}_f$ halmazon abszolút szélsőértékeit!

1. $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad H := [-1, 4];$
2. $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad H := \left[-\dfrac{1}{2}, 2\right];$
3. $f(x) := 2x + \dfrac{200}{x} \quad (0 < x \in \mathbb{R}), \quad H := \mathcal{D}_f.$

Útm.

1. **1. lépés.** Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{0; 3\}.$$

Mivel f'-nek 0-ban nincsen előjelváltása, ezért az $a := 0$ stacionárius pont nem lokális szélsőértékhely. Ha $b := 3$, akkor f'-nek $(-,+)$ előjelváltása van b-ben, így b-ben lokális minimuma van, továbbá $f(b) = -17$.

2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{C}[H]$, ezért Weierstraß tételének következtében f-nek létezik abszolút szélsőértéke a H halmazon:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in H\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(-1),\ f(3),\ f(4)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{15,\ -17,\ 10\} = \begin{matrix}-17,\\ 15.\end{matrix}$$

Következésképpen az f függvény H-ra való leszűkítésének abszolút minimuma -17 és abszolút maximuma 15.

2. **1. lépés.** Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{-1; 1\}.$$

Mivel f'-nek az $a := -1$ pontban $(-,+)$ előjelváltása van, azért az a stacionárius pont lokális minimumhely, $f(a) = -\frac{1}{2}$. Világos, hogy f-nek a $b := 1$ pontban $(+,-)$ jelváltása van, ezért a b stacionárius pont lokális maximumhely, $f(1) = \frac{1}{2}$.

2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{C}[H]$, ezért Weierstraß tételének következtében f-nek létezik abszolút szélsőértéke a H halmazon:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in H\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(-1/2),\ f(b),\ f(2)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right\} = \begin{matrix}-2/5,\\ 1/2,\end{matrix}$$

hiszen $a \notin H$. Következésképpen az f függvény abszolút minimuma, ill. maximuma a H halmazon $-2/5$, ill. $1/2$.

3. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{400}{x^3} \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 10 \quad \text{és} \quad f''(10) = \frac{4}{10} > 0.$$

Világos, hogy

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

így f-nek az $a := 10$ helyen lokális és abszolút minimuma van: $f(a) = 40$, és f-nek nincsen maximuma. ■

Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Útm. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

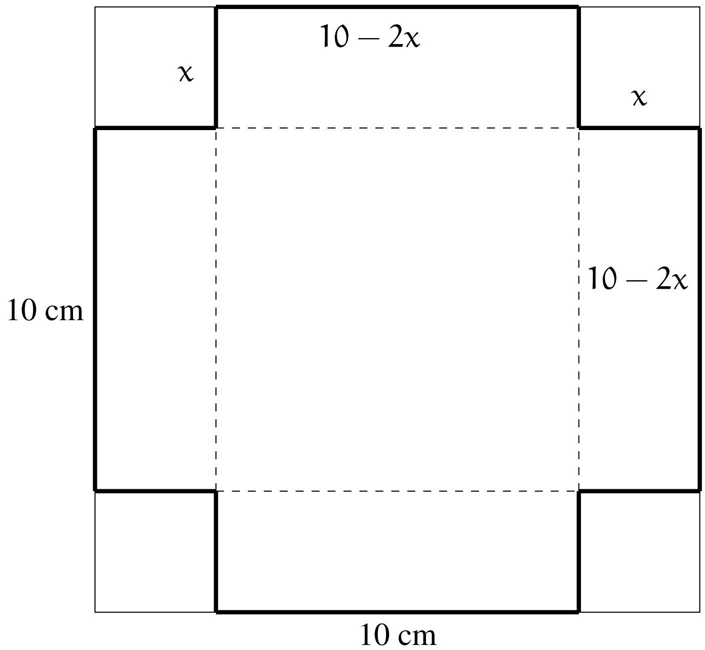
$$f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$

Feladat. Egy $100\ \mathrm{cm}^2$ területű, négyzet alakú lemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, majd a lemez széleit felhajtjuk és dobozt készítünk belőle. Mekkora legyen a levágott négyzetek oldala, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

Útm.



Az ábrából látható, hogy a doboz alapja egy $10-2x$ cm oldalú négyzet, és magassága x cm, ahol $x \in (0,5)$. Azért a doboz térfogata a következőképpen írható:

$$V(x) := (10-2x)\cdot(10-2x)\cdot x = (100-40x+4x^2)\cdot x = 4x^3-40x^2+100x \qquad (x \in (0,5)).$$

Mivel $V \in \mathfrak{D}^2$ és tetszőleges $x \in (0,5)$ esetén

$$V'(x) = 12x^2-80x+100 = 4(3x^2-20x+25) \qquad \text{és} \qquad V''(x) = 8(3x-10),$$

továbbá

$$V'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{10-\sqrt{100-75}}{3} = \frac{5}{3} \qquad \text{és} \qquad V''\left(\frac{5}{3}\right) = 8(5-10) = -40 < 0,$$

ezért V-nek $\frac{5}{3}$-ban lokális maximuma van van, ami nyilvánvalóan abszolút maximum is. ■

Feladat. Egységsugarú körbe írjunk maximális területű téglalapot.

Útm. Világos, hogy ha a téglalap első síknegyedbe eső csúcsának koordinátái (x, y), akkor a téglalap területe:

$$4xy \qquad (x, y \in (0, 1)).$$

Mivel a téglalap csúcsai az egységkörön vannak, ezért $x^2 + y^2 = 1$, ahonnan $y = \sqrt{1-x^2}$ és a területre

$$T(x) = 4x\sqrt{1-x^2} \qquad (x \in (0, 1))$$

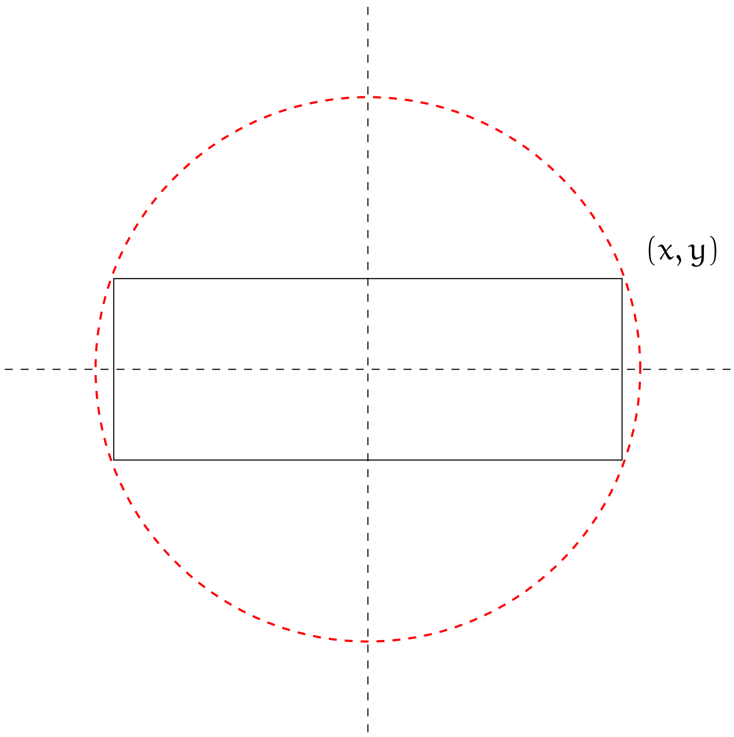
adódik. Látható, hogy $T \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in (0, 1)$ esetén

$$T'(x) = 4\sqrt{1-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4(1-x^2) - 4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-4(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mivel T'-nek $\frac{1}{\sqrt{2}}$-ben $(+, -)$ jelváltása van, így itt T-nek lokális maximuma van, ami nyilvánvalóan abszolút maximumhely is egyben. A megfelelő y koordinátára

$$y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy a keresett maximális területű téglalap a négyzet. ■



Házi feladatok.

1. Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az

$$f(x) := \frac{e^x}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvényt!

2. Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2+x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény

(a) lokális szélsőértékeit;

(b) abszolút szélsőértékeit a $H := [-2, 0]$ intervallumon!

3. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$ van, amelyre fennáll az $e^x = 1 + x$ egyenlőség!

4. Az e^π vagy π^e számok közül melyik a nagyobb?

5. Egy trapéz keresztmetszetű csatornát kell készítenünk, amelnek a földben lévő minden oldala adott l hosszúságú. Hány fokos szöget kell bezárnia a nem párhuzamos oldalaknak a vízszintessel, hogy a keresztmetszet a lehető legnagyobb legyen?

6. Tekintsünk egy $v_0 > 0$ kezdősebességgel légüres térben ferdén elhajított testet. Határozzuk meg, hogy a vízsznteshez viszonyítva milyen θ szög alatt kell elhajítani, hogy az maximális H távolságban érje el újból a vízszintest!

Útm.

1. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$-$	$-$	$+$
f	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

2. **1. lépés.** Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+x+1) - x \cdot (2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2},$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$

2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{C}[H]$, ezért Weierstraß tételének következtében f-nek létezik abszolút szélsőértéke a H halmazon:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x)\in\mathbb{R}:\ x\in H\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(-2),\ f(-1),\ f(0)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{-\frac{2}{3},\ -1,\ 0\right\} = \begin{matrix}-1,\\ 0,\end{matrix}$$

hiszen $1 \notin H$. Következésképpen az f függvény abszolút minimuma, ill. maximuma a H halmazon -1, ill. 0.

3. **1. lépés.** Ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) := e^x - 1 - x$, akkor $f(0) = 0$, hiszen $e^0 = 1 = 1 + 0$.

   2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = e^x - 1$, ezért

$$f'(x) < 0 \quad (x \in (-\infty, 0)) \qquad \text{és} \qquad f'(x) > 0 \quad (x \in (0, +\infty)).$$

   Tehát f a $(-\infty, 0)$ intervallumon szigorúan monoton fogyó csökkenő, a $(0, +\infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton növő.

4. $\pi^e < e^\pi$

5. Az ábráról látható, hogy a csatorna

$$m := l \cdot \sin(\alpha)$$

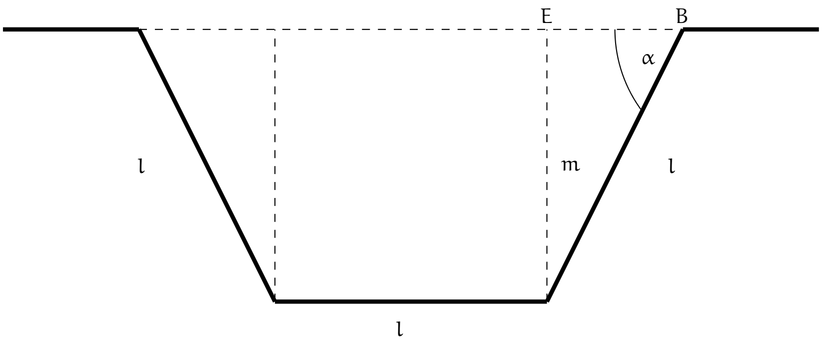
mélyen van a földben. Így a csatorna keresztmetszetének területe

$$T(l) := 2 \cdot \frac{l \cdot \cos(\alpha) \cdot m}{2} + l \cdot m = l^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha) + l^2 \sin(\alpha) = l^2\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2} + \sin(\alpha)\right) \qquad \left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Mivel $T \in \mathfrak{D}$ és

$$T'(x) = l^2(\cos(2\alpha) + \cos(\alpha)) = l^2(2\cos^2(\alpha) - 1 + \cos(\alpha)) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \cos(\alpha) = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha = \frac{\pi}{3},$$

továbbá T-nek nincsen más stacionárius helye, ezért T-nek az $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$-ban van abszolút maximuma. Ez azt jelenti, hogy a csatorna nem párhuzamos oldalának $60°$-os szöget kell bezárnia a vízszintessel. ■



6. A sebesség vízszintes összetevője $v_0\cos(\alpha)$, a függőleges összetevő pedig $v_0\sin(\alpha)$. A test vízszntesre eső vetülete egyenletes mozgást végez, következésképpen a test t idő elteltével az $x = v_0 t\cos(\alpha)$ abszcisszájú pontban lesz. A függőleges vetület mozgását, amelynél a nehézségi erőt is figyelembe kell venni – az

$$y = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{gt^2}{2}$$

egyenlet írja le. A két összefüggésből a t értéket kilüszöbölve a pálya egyenletét kapjuk:

$$y = x\,\mathrm{tg}(\alpha) - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}.$$

Az x-tengelyt akkor metszi ez a görbe, ha a test eléri a vízszintest, azaz ha $y = 0$. Az

$$x\,\mathrm{tg}(\alpha) - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} = 0$$

egyenlet gyökei:

$$x = 0 \qquad \text{és} \qquad x = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha).$$

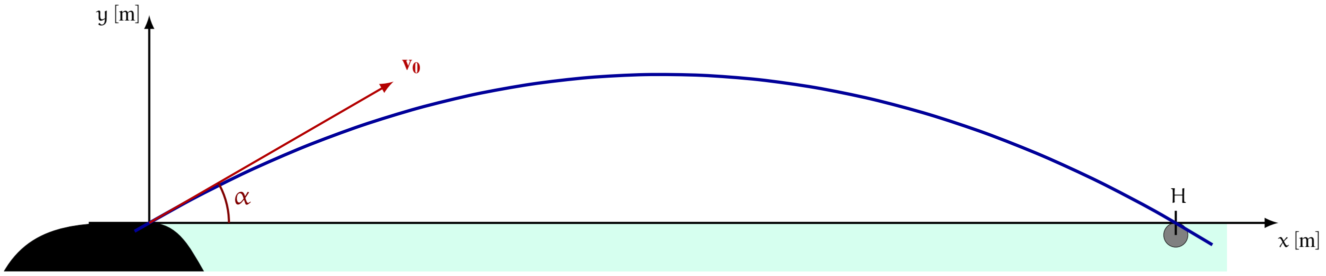
Tehát a

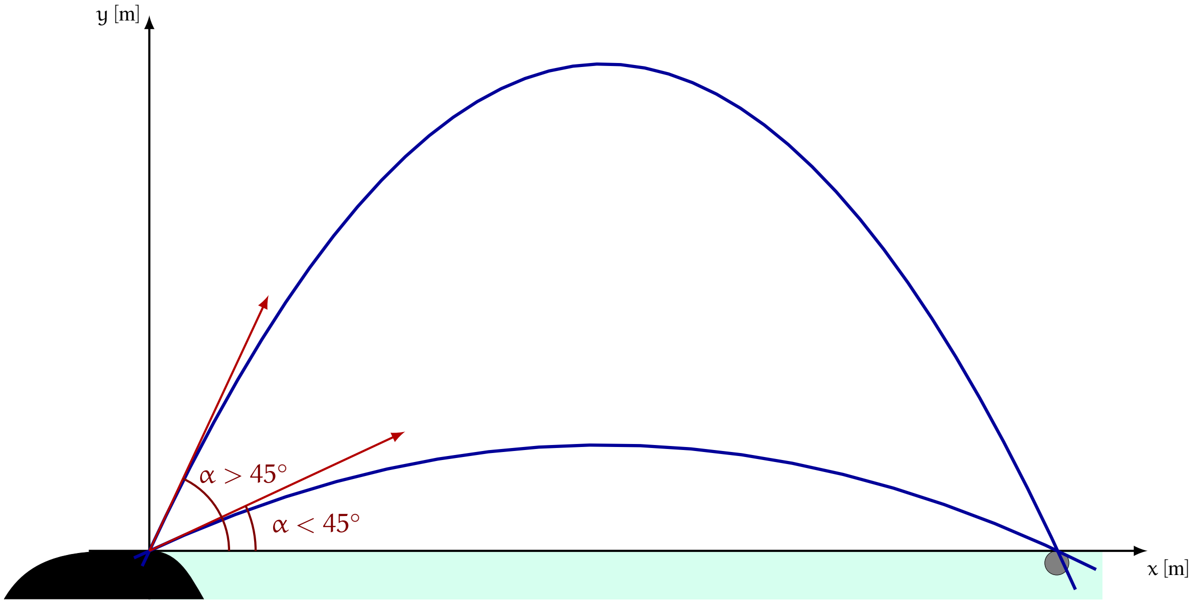
$$H(\alpha) := \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha) \qquad \left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

függvény abszolút maximumát kell keresnünk. Mivel $H \in \mathfrak{D}^2$ és

$$H'(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \cos(2\alpha) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(2\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{továbbá} \qquad H''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4v_0^2}{g} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4v_0^2}{g} < 0,$$

ezért H-nak a $\frac{\pi}{4}$-ben lokális maximuma van, amely nyilvánvalóan abszolút maximum is egyben. ■





Gyakorló feladatok.

1. Határozzuk meg az

$$f(x) := \operatorname{arctg}(1+\cos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény

(a) lokális szélsőértékeit;

(b) abszolút szélsőértékeit a $H := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon!

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, ill. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Igazoljuk, hogy ha bármely $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) \geq g'(x)$, akkor fennáll az

$$f(b) - f(a) \geq g(b) - g(a)$$

egyenlőtlenség (**növekmények összehasonlításának elve**)!

3. Mutassuk meg, hogy az f függvénynek pontosan egy zérushelye van!

(a) $f(x) := x^7 + 14x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := x^5 + 10x - 3$ $(x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right) - \frac{1}{2} \quad \left(x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right)$.

4. Igazoljuk, hogy a (még A. Einstein bevezette)

$$f(x) := x^2 \cdot \frac{e^x}{(e^x - 1)} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton fogyó!

5. Határozzuk meg f monotonitási intervallumait, ill. lokális szélsőértékhelyeit!

(a) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$ $(x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := (x+2)^2(x-1)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := x^4 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := x^3 - 2x + 20 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(e) $f(x) := x^3 - 12x \quad (x \in \mathbb{R})$;

(f) $f(x) := \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(g) $f(x) := \frac{x^2+1}{x} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$;

(h) $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R});$

(i) $f(x) := x\sqrt{1-x^2} \quad (x \in [-1,1]);$

(j) $f(x) := \sin(x) + \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R});$

(k) $f(x) := \cos(x) + \dfrac{\cos(2x)}{2} + \dfrac{\cos(3x)}{3} \quad (x \in \mathbb{R});$

(l) $f(x) := x + \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R});$

(m) $f(x) := 4x + \mathrm{tg}(x) \quad (x \in \mathbb{R}:\ |2x| < \pi);$

(n) $f(x) := \mathrm{arctg}(2x) \quad (x \in \mathbb{R});$

(o) $f(x) := -x\ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R});$

(p) $f(x) := |x|(x+2) \quad (x \in \mathbb{R});$

(q) $f(x) := x^x \quad (0 < x \in \mathbb{R}).$

6. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := x^2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := x - \ln(1+x) \quad (-1 < x \in \mathbb{R}).$

7. Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit!

(a) $f(x) := \dfrac{x^2}{x^3+1} \quad (0 \le x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-10,12]);$

(c) $f(x) := x^2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R});$

(d) $f(x) := \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}\ (x \in [-2,3]);$

(e) $f(x) := \dfrac{a}{a^{x^2}+a} + a^{x^2} + 1\ (x \in \mathbb{R}:\ 1 \neq a \in (0,+\infty)).$

8. Szöveges szélsőértékfeladatok.

(a) Osszunk fel egy 30 cm-es szakaszt két részre úgy, hogy a részekkel szerkesztett négyzetek területének összege minimális legyen!

(b) Mely pozitív szám esetén lesz a szám és reciprokának összege a lehető legkisebb?

(c) Két, egymást derékszögben metsző egyenes egy-egy pontja egyidejűleg kezd a csúcspont felé mozogni. Az egyik 100 m, a másik 60 m távolságban indul a csúcsponttól. Az első sebessége 4 m/s, a másiké 2 m/s. Mikor lesz a két pont egymáshoz legközelebb, és mekkora lesz ekkor egymástól a távolságuk?

(d) Egy 5 m széles csatornán szálfákat úsztatnak. A csatornából egy $2,5$ m széles melléékág vezet le, amelynek az iránya az eredetivel derékszöget zár be. Legyfeljebb hány m hosszúságú szálfát tudunk a szóban forgó mellékágra terelni?

(e) Az R sugarú gömbbe írt kúpok közül keressük meg azt, amelyiknek a téfogata maximális!

(f) Egy szép napon az $A(0,a)$ városban lakó *Billy* elhatározza, hogy meglátogatja a $B(b,c)$-beli *Mary*t $/a, b, c > 0/$, ezért lóra pattan. *Szomjas* névre hallgató lova azonban csak akkor hajlandó (egyenletes sebességgel) vágtatni, ha útközben ihat a $-\infty$-ben eredő, a $+\infty$-be torkolló, és az x-tengely mentén folyó *River* vizéből. Hol célszerű *Billy*nek megitatnia a lovát, ha azt akarja, hogy a lehető legrövidebb úton jusson el *Mary*hez?

(g) Az előbbi feladat módosításaként tegyük fel, hogy *Mary* a *River* túlsó partján lévő $B(b,-c)$ városban lakik, *Szomjas* pedig az A váris felőli parton v_1, addig a túlparton v_2 (egyenletes) sebességgel tud vágtatni. Hol célszerű megitatni a *Szomjas*t *Billy*nek, ha azt karja, hogy a legrövidebb idő alatt jusson el A-ból a B városba?

(h) Ismeretes, hogy az emberi szem akkor lát valami a legjobban, ha azt a (bizonyos korlátok között) a lehető legnagyobb szög alatt látja. Szociológusok megfigyelték, hogy a Skóciába látogató turisták az idegenforgalmi nevezetességnek számító kockás szoknya helyett a szoknya alatti lábszárrészt nézegetik. Számítsuk ki, hogy milyen közel kell menni a turistának a szoknyás skótokhoz, hogy a szoknya alól kivilágló lábszárrész a lehető legnagyobb szög alatt látszódjék?

(i) Valamely R sugarú kör alakú asztal közepe felett milyen magasra kell emelni a lámpát, hogy az asztal szélén maximális legyen a megvilágítás erőssége? (A megvilágítás erőssége egyenesen arányos a beesési szög koszinuszával, fordítva arányos a távolság négyzetével.)

(j) Egy számítógép alaplapjának elkülönített részén apcsoljunk egy R ellenállású fogyasztót valamely U_0 elektromotoros erejű (üresjárási feszültségű) és R_b belső ellenállású áramforrásra. Milyen R esetén lesz a fogyasztóra jutó teljesítmény maximális? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

(k) Ismeretes, hgy adott f fókusztávolságú szemnüveglecsétől t távolságra lévő tárgy k képtávolsága:

$$k = \frac{tf}{t-f} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$$

(vö. **lencsetörvény**). Számítsuk ki szóban forgó lencse esetében a tárgy és képtávolság összegének alsó, ill. felső határát!

(l) Valamely mennyiséget (pl. valamely test tömegét, időt stb.) n-szer mérünk $(n \in \mathbb{N})$. A mérés eredményeként az $x_1, \ldots, x_n$ számokat kapjuk. A mennyiség valódi értéks legjobb becslésének azt az $\overline{x}$ számot tekintjük, amelytől a mérési altérések négyzetösszege a legkisebb. Határozzuk meg aztz az $\overline{x}$ számot!

Útm.

1. **1. lépés.** Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{1+(1+\cos(x))^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ezért az

$$\{2k\pi \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{ill.} \qquad \{(2k+1)\pi \in \mathbb{R} : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

pontjaiban f'-nek $(+,-)$-, ill. $(-,+)$-jelváltása, következésképpen f-nek lokális maximuma, ill. minimuma van. Így f lokális maximuma, ill. lokális minimuma:

$$f(2k\pi) = \mathrm{arctg}(2), \qquad \text{ill.} \qquad f((2k+1)\pi) = \mathrm{arctg}(0) = 0.$$

2. lépés. Mivel $f \in \mathfrak{C}[H]$, ezért Weierstraß tételének következtében f-nek létezik abszolút szélsőértéke a H halmazon:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in H\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(-\pi/2),\ f(0),\ f(\pi), f(3\pi/2)\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{\frac{\pi}{4},\ \mathrm{arctg}(2),\ \frac{\pi}{4}\right\} = \begin{matrix}\pi/4,\\ \mathrm{arctg}(2)\end{matrix},$$

hiszen az arctg függvény szigorúan monoton növekedő. Következésképpen az f függvény abszolút minimuma, ill. maximuma a H halmazon $\pi/4$, ill. $\mathrm{arctg}(2)$.

2. Mivel bármely $x \in (a,b)$ esetén $(f(x)-g(x))' \geq 0$, ezért $f-g$ monoton növekedő, ahonnan

$$f(b)-g(b) = (f-g)(b) \geq (f-g)(a) = f(a)-g(a), \qquad \text{azaz} \qquad f(b)-f(a) \geq g(b)-g(a)$$

következik.

3. (a) Mivel f páratlan fokszámú polinom, ezért alkalmas $\xi \in \mathbb{R}$ esetén $f(\xi) = 0$. Mivel

$$f'(x) = 7x^6 + 14 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért f szigorúan monoton növekedő. Következésképpen f-nek pontosan egy zérushelye van. A Bolzano-tétel következtében a ξ zérushely valamennyire lokalizálható, ui. $f(0) = -3 < 0$ és $f(2) = 97 > 0$, így $\xi \in (0,2)$.

(b) Mivel f páratlan fokszámú polinom, ezért alkalmas $\xi \in \mathbb{R}$ esetén $f(\xi) = 0$. Mivel

$$f'(x) = 5x^4 + 10 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért f szigorúan monoton növekedő. Következésképpen f-nek pontosan egy zérushelye van. A Bolzano-tétel következtében a ξ zérushely valamennyire lokalizálható, ui. $f(0) = -3 < 0$ és $f(2) = 7 > 0$, így $\xi \in (0,1)$.

(c) Mivel

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0 \qquad \text{és} \qquad f(1) = \frac{\pi-1}{2} > 0$$

ezért a Bolzano-tétel következtében van olyan $\xi \in \mathcal{D}_f$, amelyre $f(\xi) = 0$. Mivel bármely $x \in I := \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ esetén

$$f'(x) = \frac{-1}{1-\frac{1}{x}+1} \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} = \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \cdot \frac{1}{x} > 0,$$

ezért f szigorúan monoton növekedő. Következésképpen f-nek pontosan egy zérushelye van.

4. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{\left\{2xe^x + x^2e^x\right\} \cdot (e^x-1)^2 - x^2e^x \cdot 2 \cdot (e^x-1) \cdot e^x}{(e^x-1)^4} = \frac{\left\{2xe^x + x^2e^x\right\} \cdot (e^x-1) - x^2e^x \cdot 2 \cdot e^x}{(e^x-1)^3} = \frac{xe^x\left[2e^x - x(1+e^x) - 2\right]}{(e^x-1)^3}.$$

Ha sikerül belátnunk, hogy

$$2e^x - x(1+e^x) - 2 < 0 \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor készen vagyunk, hiszen ekkor az intervallumon értelmezett f függvényre $f' < 0$. Legyen tehát

$$g(x) := 2e^x - x(1+e^x) - 2 \qquad (0 \le x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $g \in \mathfrak{D}$ és

$$g'(x) = 2e^x - 1 - e^x - xe^x = e^x - 1 - xe^x \qquad (0 \le x \in \mathbb{R}).$$

Ha belátjuk, hogy a g függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor készen vagyunk, ui. ekkor

$$0 = g(0) > g(x) = 2e^x - x(1+e^x) - 2 \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Ezt pedig a következőképp igazoljuk. Mivel $g \in \mathfrak{D}^2$,

$$g''(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x \le 0 \quad (0 \le x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,$$

ezért g' szigorúan monoton csökkenő, következésképpen

$$0 = g'(0) > g'(x) = e^x - 1 - xe^x \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

5. (a) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x-2)(x+1) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

(b) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 2(x+2)(x-1)^2 + 2(x+2)^2(x-1) = 2(x+2)(x-1)(2x+1) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

(c) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$	0	$\left(0,+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

(d) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty\right)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min	$\uparrow$

(e) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, 2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\uparrow$	lok. min.	$\uparrow$

(f) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

(g) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

(h) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x)}{(x^2+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, 0)$	0	$(0+\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

(i) Mivel $f \in \mathfrak{D}(-1, 1)$ és

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1, 1)),$$

ezért

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. min.	$\downarrow$

(j) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \cos(x) - \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Lévén, hogy

$$f''(x) = -\sin(x) - \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$f''\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) < 0, \quad \text{ill.} \quad f''\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) > 0 \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

ezért f-nek a $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ helyeken maximuma, az $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ helyeken pedig minimuma van:

$$f\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\sqrt{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Az f függvény monoton

- csökkenő a $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) + 2k\pi$ intervallumokon $(k \in \mathbb{Z})$;

- növekvő a $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$ intervallumokon $(k \in \mathbb{Z})$.

(k) Mivel az f függvény 2π-periodikus, ezért ezért csak a $[0, 2\pi)$ intervallumon vizsgáljuk monotonitását. Ha tehát $x \in [0, 2\pi)$, akkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - \sin(2x) - \sin(3x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(2x) - \cos(x)\sin(2x) = \\ &= -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(2x) - 2\cos^2(x)\sin(x) = -\sin(x)\left\{1 + 2\cos(x) + \cos(2x) + 2\cos^2(x)\right\} = \\ &= -\sin(x)\left\{2\cos(x) + 2\cos^2(x) + 2\cos^2(x)\right\} = -2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\{1 + 2\cos(x)\}. \end{aligned}$$

Így

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x \in \{0, \pi\} \quad \vee \quad x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \quad \vee \quad x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}\right).$$

Mivel

$$f''(x) = -\cos(x) - 2\cos(2x) - 3\cos(3x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

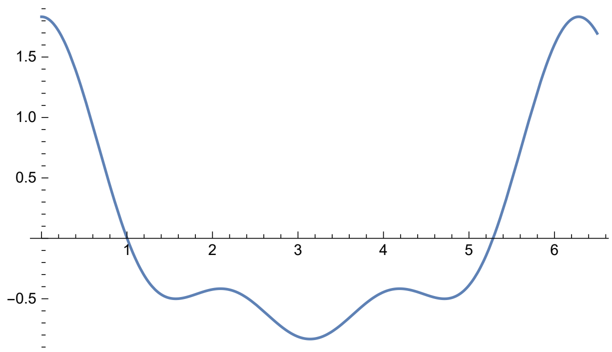
és

$$f''(0) = -6 < 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0, \quad f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} < 0, \quad f''(\pi) = 2 > 0, \quad f''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} < 0, \quad f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 > 0,$$

ezért f-nek a $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ halmaz pontjaiban lokális maximuma, a $\left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ halmaz pontjaiban pedig lokális minimuma van. Tobábbá az is igaz, hogy

- f monoton fogyó a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ intervallumokon;
- f monoton növő a $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{2}\right)$, $\left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$, intervallumokon

(vö. 1.3. ábra).



1.1. ábra

(l) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 1 - 2\sin(2x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$\left(-\infty, \frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\pi}{12}$	$\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{5\pi}{12}$	$\left(\frac{\pi}{12}, +\infty\right)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

(m) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = 4 + \frac{1}{\cos^2(x)} > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}: \ |2x| < \pi),$$

ezért f szigorúan monoton növekedő és f-nek nincsen szélsőértéke.

(n) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x)x^2} > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért f szigorúan monoton növekedő és f-nek nincsen szélsőértéke.

(o) Mivel $f \in \mathfrak{D}$ és

$$f'(x) = -\ln(x) - \frac{x}{x} = -(1+\ln(x)) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e} + \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

(p) Világos, hogy $f \in \mathfrak{C}$, továbbá bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot (2x+2) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Így

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\emptyset$	$+$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

(q) Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\ln(f(x)) = x\ln(x),$$

így

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1, \qquad \text{azaz} \qquad f'(x) = x^x(\ln(x)+1) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen

	$\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

6. (a) Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^2$, továbbá

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3, \quad f''(x) = 6x - 6, \quad f'''(x) = 6 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \qquad \text{és} \qquad f''(1) = 0, \; f'''(1) = 6 \neq 0.$$

Következésképpen f-nek nincsen lokális szélsőértéke (1-ben inflexiója van).

(b) Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^2$, továbbá

$$f'(x) = x(2-x)e^{-x}, \quad f''(x) = e^{-x}(2 - 4x + x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0; 2\} \qquad \text{és} \qquad f''(0) = 2 > 0, \; f''(2) = -2e^{-2} < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f-nek 0-ban lokális minimuma van, 2-ben pedig lokális maximuma.

(c) Látható, hogy $f \in \mathfrak{D}^2$, továbbá

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad (-1 < x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \qquad \text{és} \qquad f''(0)=1>0.$$

Ez azt jelenti, hogy f-nek 0-ban lokális minimuma van.

7. (a) Nyilvánvaló, hogy f a 0-ban veszi fel legkisebb értékét, hiszen $f(0)=0$ és bármely $x>0$ számra $f(x)>0$. Mivel f differenbciálható és tetszőleges $0\leq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$f'(x)=\frac{2x(x^3+1)-x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}=\frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}, \qquad \text{ezért} \qquad f'(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x\in\left\{0,\ \sqrt[3]{2}\right\}.$$

Lévén, hogy f szigorúan monoton növekvő a $\left(0,\ \sqrt[3]{2}\right)$ intervallumon és szigorúan monoton fogyó a $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$ intervallumon, ezért f a $\sqrt[3]{2}$ helyen veszi fel maximuát, továbbá

$$f\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2+1}=\sqrt[3]{\frac{4}{27}}.$$

(b) Mivel bármely $x\in(-10,12)$ esetén

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)=6(x-1)(x+2),$$

ezért

$$f'(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\in\{-2,1\}.$$

Tehát

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x)\in\mathbb{R}:\ \ x\in[-10,12]\}=\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{\color{red}{f(-10)},\ \color{blue}{f(12)},\ \color{green}{f(-2)},\ \color{purple}{f(1)}\}=\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{\color{red}{-1579},\ \color{blue}{3745},\ \color{green}{21},\ \color{purple}{-6}\}=\begin{matrix}-1579,\\ 3745,\end{matrix}$$

hiszen

	2	3	−12	1
−10	2	−17	158	−1579
12	2	27	312	3745
−2	2	−1	−10	21
1	2	5	−7	−6

(c) Világos, hogy f a 0-ban veszi fel legkisebb értékét, hiszen $f(0)=0$ és bármely $x>0$ számra $f(x)>0$. Mivel f differenbciálható és tetszőleges $0\leq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x\cdot e^{-x}\,(2-x)\,,$$

ezért

$$f'(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\in\{0,2\}.$$

Lévén, hogy f szigorúan monoton fogyó a $(-\infty,0)$ és a $(2,+\infty)$ intervallumon, ill. szigorúan monoton növekedő a $(0,2)$ intervallumon, ezért f a 0-ban helyen veszi fel minimumát: $f(0)=0$. Mivel

$$\lim_{-\infty} f=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=+\infty,$$

ezért f felülről nem korlátos.

(d) Mivel bármely $x\in(-2,3)$ esetén

$$f'(x)=\frac{2x^3-4x}{\sqrt{x^4-4x^2+9}}=\frac{2x(x^2-2)}{\sqrt{x^4-4x^2+9}},$$

ezért

$$f'(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\in\left\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right\}.$$

Tehát

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x)\in\mathbb{R}:\ \ x\in[-2,3]\}=\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{f(-2),\ f(3),\ f(-\sqrt{2}),\ f(0),\ f(-\sqrt{2})\right\}=\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{3,\sqrt{54},3,3,3\right\}=\begin{matrix}3,\\ \sqrt{54}.\end{matrix}$$

(e) Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{-a \cdot a^{x^2} \ln(a) \cdot 2x}{(a^{x^2}+a)^2} + a^{x^2} \ln(a) \cdot 2x = a^{x^2} \ln(a) \cdot 2x \left\{ \frac{-a}{(a^{x^2}+a)^2} + 1 \right\} = a^{x^2} \ln(a) \cdot 2x \cdot \frac{(a^{x^2}+a)^2 - a}{(a^{x^2}+a)^2},$$

ezért az $f'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van: 0. Lévén, hogy

- $a > 1$ esetén f-nek 0-ban $(-,+)$ jelváltása van és $\lim_{\pm} f = +\infty$, ezért f a 0 veszi fel legkisebb értékét: $f(0) = \frac{a}{1+a} + 2$, és f felülről nem korlátos;
- $0 < a < 1$ esetén f-nek 0-ban $(+,-)$ jelváltása van és $\lim_{\pm} f = 0$, ezért f a 0-ban veszi el legnagyobb értékét: $f(0) = \frac{a}{1+a} + 2$. Az f függvény ugyan alulról korlátos, hiszen $f \geq 0$. de nincsen legkisebb értéke, hsizen 0 az egyetlen stacionárius helye.

8. (a) Ha x az egyik szakasz hossza, akkor a másiké nyilván $30 - x$. A négyzetek területének összegére

$$T(x) := x^2 + (31 - x)^2 \qquad (x \in (0, 30)).$$

Mivel $T \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in (0, 30)$ esetén $T'(x) = 2x - 2(30 - x)$, ezért a $T'(x) = 0$ egyenlet megoldása: 15. Világos, hogy itt T-nek minimuma van, hiszen

$$T(x) = 2x^2 - 60x + 900 \qquad (x \in (0, 30)).$$

(b) Legyen x a szóban forgó pozitív szám. Ekkor az

$$f(x) := x + \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény minimumhelyét kell meghatározni. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = \frac{1}{x}$, azaz ha $x = 1$, ezért az 1 az a pozitív szám, amelyre a keresett összeg minimális: 2.

(c) Nyilvánvaló, hogy t idő elteltéevel a két pont

$$f(t) := \sqrt{(100 - 4t)^2 + (60 - 2t)^2} \qquad (t \in [0, +\infty))$$

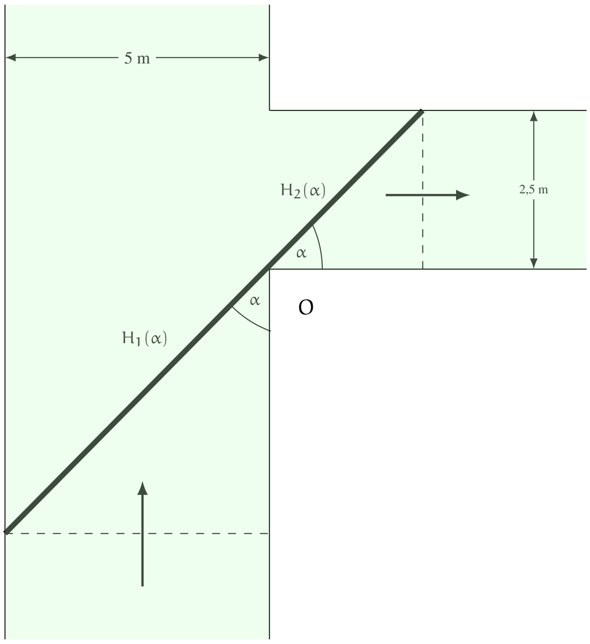
méter távolságra lesz egymástól. Világos, hogy f-nek ugyanott van minimuma, ahol a

$$g(t) := f^2(t) = (100 - 4t)^2 + (60 - 2t)^2 \qquad (t \in [0, +\infty))$$

függvénynek: $t = 26$. Ekkor a két pont távolsága $f(26) = \sqrt{800}$ méter.

(d) Világos, hogy csak olyan hosszúságú szálfát tudunk a mellékágra terelni, amely rövidebb, mint az a szakasz, amelyiknek az egyik végpontja a csatornának a mellékággal szembeni partján van, a másik pedig a mellékág bal partján, továbbá amelyik illeszkedik a csatorna és a mellékág O találkozási pontjára. Az optimális szálfahossz tehát ezen szakaszok hosszainak a minimuma. Ha α jelöli az egyik ilyen szakasznak a csatorna jobb partjával bezárt szögét, akkor a szakasz hossza

$$H(\alpha) := H_1(\alpha) + H_2(\alpha) = \frac{5}{\sin(\alpha)} + \frac{2,5}{\cos(\alpha)} \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$



Világos, hogy $H \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ számra

$$H'(\alpha) = -\frac{5 \cdot \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{2,5 \cdot \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{-5 \cdot \cos^3(\alpha) + 2,5 \cdot \sin^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)} = \frac{-20 \cdot \cos^3(\alpha) + 10 \cdot \sin^3(\alpha)}{\sin^2(2\alpha)} = -10 \cdot \frac{2 \cdot \cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)}{\sin^2(2\alpha)},$$

és

$$\begin{aligned} H''(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\left(-\frac{5 \cdot \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{2,5 \cdot \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right) = \\ &= \frac{5 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin^2(\alpha) + 5 \cdot \cos(\alpha) \cdot 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} + \frac{2,5 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) - 2,5 \cdot \sin(\alpha) \cdot 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot (-\sin(\alpha))}{\cos^4(\alpha)} = \\ &= \frac{5 \cdot \sin^2(\alpha) + 10 \cdot \cos^2(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} + \frac{2,5 \cdot \cos^2(\alpha) - 5 \cdot \sin^2(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} = \frac{5 + 5 \cdot \cos^2(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} + \frac{5 + 5 \cdot \sin^2(\alpha)}{2 \cdot \cos^3(\alpha)}. \end{aligned}$$

Mivel

$$H'(\alpha^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \cdot \cos^3(\alpha^*)) - \sin^3(\alpha^*)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{tg}(\alpha^*) = \sqrt[3]{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^* = \mathrm{arctg}\left(\sqrt[3]{2}\right)$$

és $\alpha^* \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ következtében

$$\cos(\alpha^*) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha^*)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}} > 0, \qquad \text{ill.} \qquad \sin(\alpha^*) = \frac{\frac{\sin(\alpha^*)}{\cos(\alpha^*)}}{\frac{1}{\cos(\alpha^*)}} = \frac{\mathrm{tg}(\alpha^*)}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\alpha^*)}}} = \frac{\mathrm{tg}(\alpha^*)}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha^*)}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}} > 0,$$

ezért $H''(\alpha^*) > 0$. Ennélfogva a H függvény az

$$\alpha^* := \mathrm{arctg}\left(\sqrt[3]{2}\right) \approx 51,56°$$

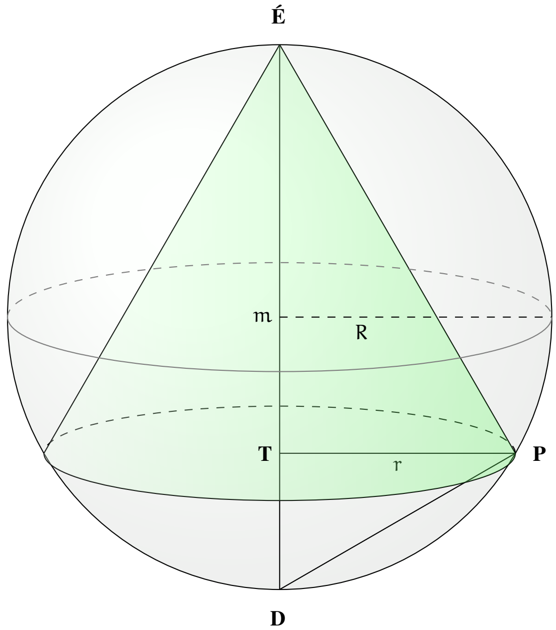
szögben veszi fel abszolút minimumát. Így H abszolút minimuma:

$$H(\alpha^*) = H\left(\sqrt[3]{2}\right) = 5 \cdot \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}} + 2,5 \cdot \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}} \approx 10,4,$$

Ez azt jelenti, hogy közel maximum $10,4$ m-es szálfát lehet a mellékágra irányítani.

(e) Ha r jelöli a beírt kúp alapkörének sugarát, m pedig magasságát, akkor térfogata

$$V(m) := r^2\pi \cdot \frac{m}{3} \qquad (m \in (0, 2R)).$$



Mivel a $\overline{\mathbf{PT}}$ szakasz merőleges a pólusokat összekötő $\overline{\mathbf{ED}}$ szakaszra, ezért Thalész-tétel-tétel értelmében az északi és déli pólust összekötő $\overline{\mathbf{ÉD}}$szakasz derékszögben látszik a gömfelület **P** pontjából. A magasságtétel szerint így r az $\overline{\mathbf{ÉT}}$ és a $\overline{\mathbf{DT}}$ szakaszok hosszának mértani közepe:

$$r = \sqrt{m \cdot (2R - m)}.$$

Következésképpen

$$V(m) = m \cdot (2R - m) \cdot \frac{m}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(2Rm^2 - m^3\right) \qquad (m \in (0, 2R)).$$

Mivel tetszőleges $m \in (0, 2R)$ esetén

$$V'(m) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(4Rm - 3m^2\right) \qquad \text{és} \qquad V''(m) = \frac{\pi}{3} \cdot (4R - 6m) = \frac{2\pi}{3} \cdot (2R - 3m),$$

ezért

$$V(m^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m = \frac{4R}{3} \qquad \text{és} \qquad V''(m^*) = \frac{2\pi}{3} \cdot (2R - 4R) = -\frac{4\pi R}{3} < 0$$

következtében a maximálisan beírható kúp m^* magasságára, ill. alapkörének r^* sugarára

$$m^* = \frac{4R}{3}, \qquad \text{ill.} \qquad r^* \sqrt{m^* \cdot (2R - m^*)} = \sqrt{\frac{4R}{3} \cdot (2R - \frac{4R}{3})} = \sqrt{\frac{4R \cdot (6R - 4R)}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$$

(f) Mivel a praeryn[2] két pont között legrövidebb út az egyenes, *Billy*nek az $X(x, 0)$ ideális itatóhelyig $\sqrt{a^2 + x^2}$, X-ből B-be pedig $\sqrt{(b - x)^2 + c^2}$ utat kell megtennie, A-ból B-be tehát összesen$f(x)$-et:

$$f(x) := \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b - x)^2 + c^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

[2]az euklideszi sík neve over the sea

Az f függvény legalább kétszer differenciálható, továbbá

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} - \frac{-\sqrt{(b-x)^2+c^2}+\dfrac{(b-x)^2}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}}{(b-x)^2+c^2} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} + \frac{c^2}{\sqrt{((b-x)^2+c^2)^3}} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Mivel

$$f'(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{ab}{a+c} \qquad \text{és} \qquad f''\left(\frac{ab}{a+c}\right)>0,$$

ezért f-nek $\frac{ab}{a+c}$-ben lokális minimuma van. Mivel

$$f''(x)>0 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

f konvex, így f-nek $\frac{ab}{a+c}$-ben abszolút minimuma van.

Megjegyzések.

- Könnyen belátható, hogy ha $x\in[0,b]$, akkor

$$f(x)<f(y) \qquad (y\in(-\infty,0)\cup(b,+\infty)).$$

Ezért elegendő csak a

$$g(x):=f(x) \qquad (x\in[0,b])$$

függvény abszolút minimumhelyét meghatározni. Mivel $g\in\mathfrak{C}[0,b]\cap\mathfrak{D}(0,b)$ és

$$0<\frac{ab}{a+c}<b,$$

továbbá

$$\min\left\{g(0),g(b),g\left(\frac{ab}{a+c}\right)\right\} = \min\left\{a+\sqrt{b^2+c^2},\sqrt{a^2+b^2}+c,\sqrt{b^2+(a+c)^2}\right\} = \sqrt{b^2+(a+c)^2},$$

ezért g-nek, így f-nek is az $\frac{ab}{a+c}$ pontban abszolút minimuma van.

- Az a tény, hogy az optimális itatóhelyet a $[0,b]$ intervallumban érdemes keresni, egyszerűbbé teszi a dolgot. Legyen ui. B' a B pontnak az x-tengelyre vonatkozó tükörképe. Ha X' az x-tengely ($[0,b]$-beli) tetszőleges pontja, akkor

$$\mathrm{dist}(A,X')+\mathrm{dist}(X',B)=\mathrm{dist}(A,X')+\mathrm{dist}(X',B').$$

A

$$\mathrm{dist}(A,X')+\mathrm{dist}(X',B)$$

összeg akkor lesz a legkisebb, amikor

$$\mathrm{dist}(A,X')+\mathrm{dist}(X',B')$$

a legkisebb, azaz ha X' egybeesik az AB' egyenes és az x-tengely X metszéspontjával. Mivel

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \text{és} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+x^2}},$$

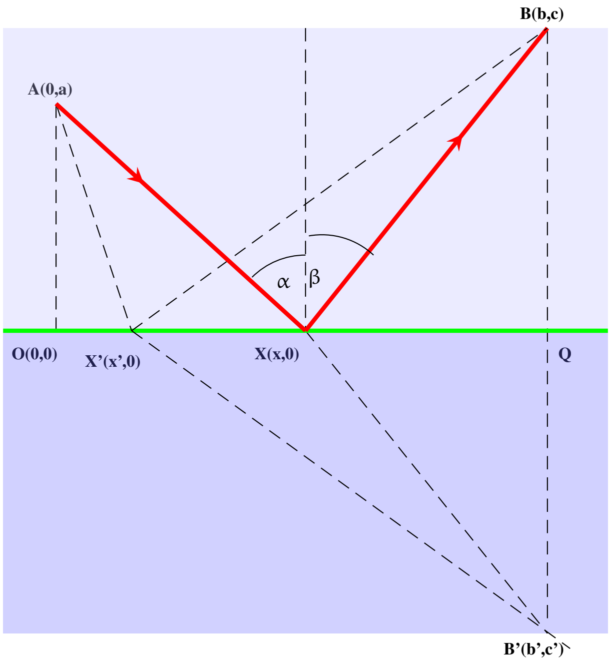
ezért a legrövidebb úthoz tartozó itatóhelyhez esetében

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right), \qquad \text{azaz} \qquad \boxed{\alpha=\beta}$$

Az α ás a ßβ szögek egyenlősége persze úgy is megkapható, hogy a tükrözés következtében a $\frac{\pi}{2} - \beta = BXQ\sphericalangle$ megegyezik a $QXB'\sphericalangle$-gel, ami pedig nem más mint $AXO\sphericalangle = \frac{\pi}{2} - \beta$. Ebben az esetben az AOX háromszög hasonló az XQB háromszöghöz, ahol Q az x-tengely és a BB' egyenes metszéspontja. A hasonlóság miatt

$$\frac{x}{b-x} = \frac{a}{c}, \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{ab}{a+c}$$

(vö. **Héron**nak[3] a fényvisszaverődésre vonatkozó „**legrövidebb út elvével**”).



(g) Ha *Mary* a *River* túlsó partján lakik, akkor az A városból a B városba *Szomjas*

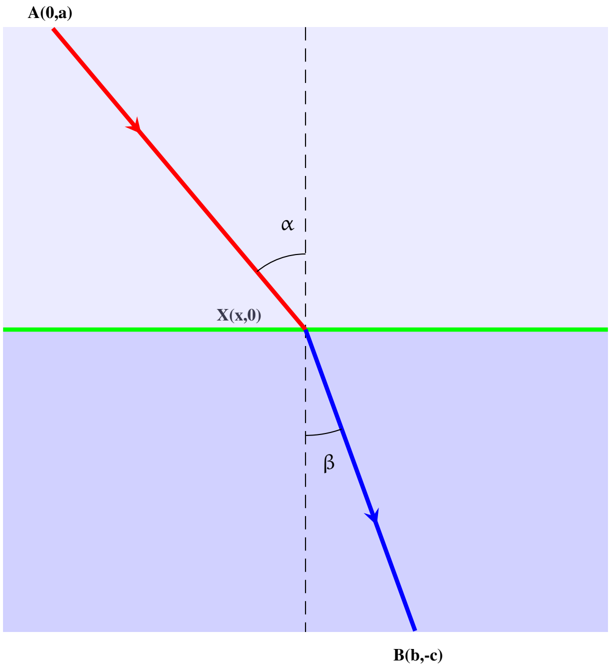
$$T(x) := T_1(x) + T_2(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

idő alatt jut el, hiszen a bal, parton v_1 sebességgel tud haladni, így az itatóhelyig az A várostól, illetve az itatóhelytől a B városig

$$T_1(x) := \frac{\overline{\mathbf{AX}}}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}, \qquad \text{ill.} \qquad T_2(x) := \frac{\overline{\mathbf{XB}}}{v_2} = \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}$$

ideig kell vágtatnia.

[3] Alexandriai Hérón (10 körül - 75 körül) egyiptomi hellén gépész és matematikus.



Mivel $T\in\mathfrak{D}^2$, ezért tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$T'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}},\qquad\text{ill.}\qquad T''(x)=\frac{a^2}{v_1\sqrt{[a^2+x^2]^3}}+\frac{c^2}{v_2\sqrt{[(b-x)^2+c^2]^2}}>0.$$

Látható, hogy

$$T'(x)=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x-b}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}}.$$

Az ábráról leolvasdható, hogy

$$\sin(\alpha)=\frac{x}{|\mathbf{\acute{E}O}|}=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}\qquad\text{és}\qquad\sin(\beta)=\frac{x}{|\mathbf{OD}|}=\frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+c^2}},$$

ahonnan

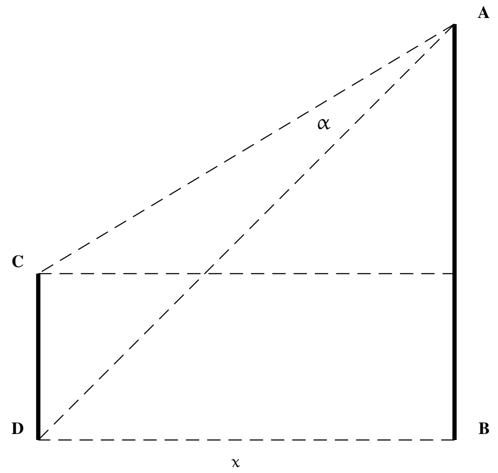
$$\frac{\sin(\alpha)}{v_1}=\frac{\sin(\beta)}{v_2},\qquad\text{ill.}\qquad\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}=\frac{v_1}{v_2}}$$

(vö. a fénytörés **Snell-Descartes**-féle (vagy latinosan **Snellius-Cartesius**-féle) törvénye).[4]

(h) Jelöljük a-val az $\overline{AB}$ szakasszal modellezett turista szemmagasságát, b-vel pedig a $\overline{CD}$ szakasszal modellezett skót szoknyája alsó szélének a földtől mért távolságát, továbbá x-szel a skót és a turista távolságát. Ekkor a kérdéses szög a $ABC\measuredangle$ és az $ABC\measuredangle$ különbsége

$$\alpha(x):=CAB\measuredangle-DAB\measuredangle=\text{arctg}\left(\frac{x}{b-a}\right)-\text{arctg}\left(\frac{x}{b}\right)\qquad(x\in[0,+\infty)).$$

[4]Ez a törvény Willebrord van Roijen Snell (1591-1626) holland csillagász és matematikus, valamint René Descartes (1596-1650) francia filozófus, matematikus és természettudós nevéhez fűződik.



Mivel

$$\alpha(x) \geq 0 \quad (x \in [0, +\infty)), \qquad \alpha(0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

továbbá $\alpha \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén

$$\alpha'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{b-a}\right)^2} \cdot \frac{1}{b-a} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b-a}{(b-a)^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + x^2},$$

ezért

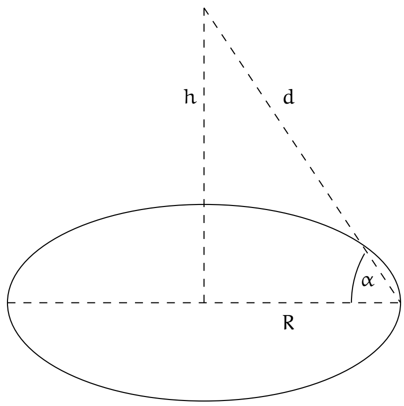
$$\alpha'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{b-a}{(b-a)^2 + x^2} = \frac{b}{b^2 + x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (b-a)\{b^2 + x^2\} = b\{(b-a)^2 + x^2\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{b(b-a)}$$

következtében az optimális távolság $\sqrt{b(b-a)}$.[5]

(i) Ha a beesési szög $\frac{\pi}{2} - \alpha$, akkor a megvilágítás erőssége:

$$k \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{d^2} = k \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\left(\frac{R}{\cos(\alpha)}\right)^2} = k \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)}{R^2} =: J(\alpha) \qquad \left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

ahol $0 < k \in \mathbb{R}$ az ún. arányossági tényező.



[5]A rossznyelvek szerint nyáron nemcsak azért rövidebb a skótok szoknyája, mert jobbak az időjárási viszonyok, hanem mert ekkor – lévén, hogy a kisebb – kisebb az optimális x távolság, azaz a turistának közelebb kelljen mennie.

Mivel $J \in \mathfrak{D}^2$, és tetszőleges $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$J'(\alpha) = \frac{k}{R^2} \cdot \left\{\cos^3(\alpha) - 2\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)\right\} = \frac{k}{R^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \left\{\cos^2(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\right\}$$

és

$$J''(\alpha) = \frac{k}{R^2} \cdot \left[-\sin(\alpha) \cdot \left\{\cos^2(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\right\} + \cos(\alpha) \cdot \{-\sin(2\alpha) - 4\sin(2\alpha)\}\right],$$

ezért

$$J'(\alpha^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^* = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 55° \qquad \text{és} \qquad J''(\alpha^*) = \frac{k}{R^2} \cdot [-\sin(\alpha^*) \cdot 0 - 5\cos(\alpha^*)\sin(2\alpha^*)] < 0.$$

Így a maximális megvilágításhoz tartozó magasság, ill. a maximális megvilágítás értéke:

$$h = R \cdot \operatorname{tg}(\alpha^*) = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad J(\alpha^*) = \frac{k}{d\sqrt{3}} = \frac{2k\sqrt{3}}{9R^2}.$$

(j) Az R ellenállású fogysztóra jutó elektromos teljesítmény:

$$P = UI = I^2 R,$$

ahol I a fogyasztón átfolyó áram:

$$I = \frac{U_0}{R_0 + R}.$$

Ezért

$$P(R) = U_0^2 \cdot \frac{R}{(R_0 + R)^2} \qquad (R \in [0, +\infty)).$$

Látható, hogy P legalább kétszer deriválható függvény, továbbá

$$P'(R) = U_0^2 \cdot \frac{(R_b + R)^2 - 2(R_b + R)R}{(R_b + R)^4} = U_0^2 \cdot \frac{R_b^2 - R^2}{(R_b + R)^4} = U_0^2 \cdot \frac{R_b - R}{(R_b + R)^3} = 0 \qquad (R \in [0, +\infty))$$

és P'-nek R_b-ben $+-$ előjelváltása van. Tehát a külső fogysztóra jutó legnagyobb teljesítmény úgy érhető el egy adott áramforrás esetén, ha a fogyasztó ellenállását R_b-nek választjuk. Ekkor

$$P(R_b) = U_0^2 \cdot \frac{R_b}{(R_0 + R_b)^2}.$$

(k) Legyen a két távolság összege:

$$S(t) := t + k = t + \frac{tf}{t - f} \qquad (f \neq t \in (0, +\infty)).$$

Mivel $S \in \mathfrak{D}^2$ és

$$S'(t) = 1 + \frac{f(t - f) - tf}{(t - f)^2} = 1 - \frac{f^2}{(t - f)^2} \quad \text{és} \quad S''(t) = \frac{2f^2}{(t - f)^3} \qquad (f \neq t \in (0, +\infty)),$$

ezért

$$S'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2f \qquad \text{és} \qquad S''(2f) = \frac{2}{f} > 0.$$

Így S-nek 2f-nél abszolút minimuma van. Mivel $\lim_f S = +\infty$, ezért S felülről nem korlátos, tehát

$$\inf\{S(t) \in \mathbb{R} : \; f \neq t \in (0, +\infty)\} = \min\{S(t) \in \mathbb{R} : \; f \neq t \in (0, +\infty)\} = S(2f) = 4f$$

és

$$\sup\{S(t) \in \mathbb{R} : \; f \neq t \in (0, +\infty)\} = +\infty.$$

(l) A mérési eredményektől való eltérés négyzetösszege:

$$f(x) := (x - x_1)^2 + \ldots (x - x_n)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 2(x - x_1) + \ldots + 2(x - x_1), \qquad \text{ill.} \qquad f''(x) = 2 + \ldots + 2 = 2n > 0$$

ezért

$$f'(\overline{x}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2[n\overline{x} - (x_1 + \ldots + x_n)] = 0$$

következtében a legjobb becslés a mérté értékek

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

számtani közepe. ■

1.6. 6. oktatási hét (2020.10.14.)

Szükséges előismeretek.

1. Fogalmazza meg a deriváltak egyenlőségére vonatkozó állításokat!

   Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, ill. $f, g : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvények. Ebben az esetben $f - g$ pontosan akkor állandófüggvény, ha fennáll az $f' = g'$ egyenlőség.

2. Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és a deriváltjáról?

   Válasz: Legyen $c \in \mathbb{R}$ és tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\sum (\alpha_n(x-c)^n)$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

   $$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n \qquad (x \in k_R(c)).$$

   Ekkor minden $x \in k_R(c)$ pontban az f függvény differenciálható és deriváltja az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott összege:

   $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n (x-c)^{n-1} \qquad (x \in k_R(c)).$$

3. Mi a konvex függvény definíciója?

   Válasz: Azt mondjuk, hogy az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett függvény konvex, ha bármely $a, b \in I$ és tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ esetén fennáll az

   $$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

   egyenlőtlenség.

4. Milyen ekvivalens definíciót ismer a konvexitásra?

   Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ valódi intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és valamely $a \in I$ esetén

   $$K_a^f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (0 \neq x \in I).$$

   Ebben az esetben f pontosan akkor konvex, ha a K_a^f különbségihányados-függvény monoton növekedő.

5. Jellemezze egy függvény *konvexitását* a második deriváltfüggvény segítségével!

   Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in \mathfrak{D}^2$. Ebben az esetben f pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.

6. Mit ért azon, hogy inflexió?

   Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$. Azt mondjuk, hogy f-nek inflexiója van a-ban, ha az $f - e_a^f$ függvény jelet vált a-ban.

7. Értelmezze az arctg függvényt!

   Válasz: A tg szigorúan monoton növekledő a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. Az

   $$\mathrm{arctg} := \left(\mathrm{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)}\right)^{-1}$$

   függvény az arkusztangensfüggvény.

Az óra anyaga.

Emlékeztető. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvény, akkor igaz az

$$f'(x) = 0 \quad (x \in I) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c \in \mathbb{R} : \quad f(x) = c \quad (x \in I)$$

ekvivalencia.

Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}$ és $f' = f$. Mutassuk meg, hogy ekkor alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$f(x) := \alpha \cdot e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség!

Útm. Legyen

$$\varphi(x) := f(x) \cdot e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x} = f(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen alkalmas $c \in \mathbb{R}$, ill. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(x) = c$. Mivel $c = \varphi(0) = f(0) =: \alpha$, ezért

$$\varphi(x) = f(0) = \alpha \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{azaz} \qquad f(x) = f(0)e^x = \alpha e^x \quad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$: $a < b$, valamint $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, amelyekre

$$f(a) = g(a) \qquad \text{és} \qquad f'(x) \geq g'(x) \quad (x \in (a, b))$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy ha tetszőleges $J \subset (a, b)$ intervallum esetén van olyan $c \in J$, amelyre $f'(c) > g'(c)$, akkor bármely $x \in (a, b)$ esetén fennáll az $f(x) > g(x)$ egyenlőség!

Útm. Legyen

$$\varphi(x) := f(x) - g(x) \qquad (x \in [a, b)).$$

Ekkor $\varphi(a) = 0$, $\varphi \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in [a, b)$ számra $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$. A feltételből az következik, hogy bármely $J \subset [a, b)$ nyílt intervallum esetén van olyan $c \in J$, hogy

$$\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) > 0,$$

ezért

$$0 < \varphi(x) = f(x) - g(x) \qquad (x \in (a, b)). \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$: $a < b$, valamint az $f, g : [a, b) \to$ függvények n-szer differenciálhatók. Belátható, hogy ekkor

$$f^{(k)}(a) \geq g^{(k)}(a) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}) \qquad \text{és} \qquad f^{(n)}(x) \geq g^{(n)}(x) \quad (x \in (a, b)),$$

továbbá tetszőleges $J \subset (a, b)$ intervallum esetén van olyan $c \in J$, amelyre $f^{(n)}(c) > g^{(n)}(c)$, akkor bármely $x \in (a, b)$ számra fennáll az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenség.

Feladat. Igazoljuk, hogy fennáll az

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenségpár!
Útm.

1. lépés. A jobb oldali egyenlőtlenség igazolásához tekintsük a

$$\varphi(x) := x - \ln(x+1) \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Ekkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

Mivel

$$\varphi'(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

ezért φ szigorúan monoton növekedő. Következésképpen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 = \varphi(0) < \varphi(x) = x - \ln(x+1), \qquad \text{azaz} \qquad \ln(x+1) < x.$$

2. lépés. A bal oldali egyenlőtlenség igazolásához tekintsük a

$$\varphi(x) := x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1) \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Ekkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1} = \frac{1 + x - x^2 - x - 1}{x+1} = \frac{-x^2}{x+1} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

Mivel

$$\varphi'(x) \leq 0 \quad (0 \leq x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \varphi'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

ezért φ szigorúan monoton fogyó. Következésképpen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 = \varphi(0) > \varphi(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1), \qquad \text{azaz} \qquad x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1).$$

Megjegyezzük, hogy a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával is belátható ez az egyenlőtlenség. Tekintsük ui. tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi : [1, 1+x] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) := \ln(t)$$

leképezést. Ekkor

$$\varphi \in \mathfrak{C}[1, 1+x] \cap \mathfrak{D}(1, 1+x),$$

következésképpen alkalmas $\xi \in (1, 1+x)$ köztes számra

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\varphi(1+x) - \varphi(1)}{1+x-1} = \varphi'(\xi) = \frac{1}{\xi} < 1, \qquad \text{azaz} \qquad \ln(x+1) < x. \quad \blacksquare$$

Emlékeztető. Legyen $c \in \mathbb{R}$ és tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\sum (\alpha_n (x-c)^n)$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n \qquad (x \in k_R(c)).$$

Ekkor minden $x \in k_R(c)$ pontban az f függvény differenciálható és deriváltja az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott összege:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n (x-c)^{n-1} \qquad (x \in k_R(c)).$$

Feladat. Igazoljuk, hogy fennáll a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (x \in (-1, 1))$$

egyenlőség!

Útm. Mivel $\lim\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$, ezért tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \in \mathbb{R}$. Legyen

$$\varphi(x) := \ln(1+x) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Ekkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{n} = 0 \qquad (x \in (-1,1)).$$

Így van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in (-1,1)$ számra $\varphi(x) = c$, és $c = \varphi(0) = 0$. ■

Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás és konkávitás szempontjából az alábbi függvényeket!

1. exp;
2. ln;
3. $(0,+\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

Útm.

1. Mivel $\exp'' = \exp' = \exp > 0$, ezért exp konvex függvény.
2. Mivel
$$\ln''(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$
ezért ln konkáv függvény.
3. Mivel
$$\frac{d^2}{dx^2}x^\alpha = \frac{d}{dx}\alpha x^{\alpha-1} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} =: f''(x) \qquad (x \in (0,+\infty),\ \alpha \in \mathbb{R})$$
és bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

α	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

ezért az
$$(0,+\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$$
függvény $\alpha \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ esetén konvex és $\alpha \in (0,1)$ esetén konkáv. Az $\alpha \in \{0,1\}$ esetben konvex is és konkáv is. ■

Megjegyezzük, hogy sokszor célszerűnek mutatkozik a

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) := f^{(n)}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

klasszikus jelölés használata.

Feladat. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv! Van-e f-nek inflexiós pontja?

1. $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := \ln(x^2 + 2x + 2) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és

$$f''(x) = (f')'(x) = \frac{d}{dx}(6x^2 - 42x + 36) = 12x - 42 = 6(2x-7) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, 7/2)$	$7/2$	$(7/2, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$

2. Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = \frac{d}{dx}\frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{2\cdot(x^2+2x+2) - (2x+2)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \\ &= \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$	inflexió	$\frown$

Emlékeztető. Azt mondtuk, hogy az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett függvény konkáv, ha bármely $a, b \in I$ és tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ esetén fennáll az

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

egyenlőtlenség.

Feladat. A természetes alapú logaritmusfüggvény konkávitását felhasználva mutassuk meg, hogy tetszőleges

$$a, b \in [0, +\infty), \qquad \text{ill.} \qquad p \in (1, +\infty), \quad q := \frac{p}{p-1}$$

esetén fennáll az

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

Young-egyenlőtlenség! Mely esetben áll fenn egyenlőség?
Útm. Világos, hogy az $a = 0 = b$ esetben fennáll az egyenlőtlenség, sőt egyenlőség teljesül. Legyen a továbbiakban $a, b \in (0, +\infty)$. Mivel

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = \frac{1+p-1}{p} = 1$$

(erre azt is szokás mondani, hogy p és q **konjugált kitevők**), ezért a természetes alapú logaritmusfüggvény konkávitásának következményeként azt kapjuk, hogy

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab),$$

ahonnan az ln függvény szigorú monotonitását felhasználva a Young-egyenlőtlenség már következik.
Megjegyezzük, hogy ha $b \in (0, +\infty)$, akkor az

$$f(a) := \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \qquad (0 \leq a \in \mathbb{R})$$

függvényre

$$\frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{1+p-1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$$

következtében

$$f(0) = \frac{b^q}{q} > 0, \qquad f\left(b^{q/p}\right) = \frac{b^q}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{(q/p)+1} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{a\to+\infty} f(a) = +\infty.$$

Következésképpen f-nek van minimuma. Mivel f deriválható, ezért a megfelelő minimumhelyet az

$$0 = f'(a) = a^{p-1} - b$$

egyenlet megoldásával kapjuk meg:

$$a = b^{1/p-1} = b^{q/p}.$$

Tehát a Young-egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan az $a^p = b^q$ esetben áll fenn. ■

Házi feladatok.

1. Legyen $\alpha, \tau, \xi \in \mathbb{R}$, ill. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor igaz az

$$(f' = \alpha f \quad \wedge \quad f(\tau) = \xi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = \xi e^{\alpha(x-\tau)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ekvivalencia!

2. Mutassuk meg, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$x \leq e^{x-1}$$

egyenlőtlenség!

3. Mutassuk meg, hogy fennáll az

$$\mathrm{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in (-1,1))$$

egyenlőség!

4. Alkalmas $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monotonitását felhasználva igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségek fennállását!

   (a) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R})$;

   (b) $(x^p + 1)^2 < (x^2 + 1)^p \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ 2 < p \in \mathbb{R})$.

5. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, ill. konkáv! Van-e f-nek inflexiós pontja?

   (a) $f(x) := \dfrac{4x}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (b) $f(x) := 1 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 \quad (1 \neq x \in \mathbb{R})$.

6. Lássuk be a **Jensen-egyenlőtlenség**et, azaz mutassuk meg, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, továbbá valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $p_1, \ldots, p_n \in [0, +\infty)$, $p_1 + \ldots + p_n = 1$, akkor bármely $x_1, \ldots, x_n \in I$ számokra fennáll az

$$f(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n)$$

egyenlőtlenség! Ha f konkáv, akkor az állítás fordított irányú egyenlőtlenséggel teljesül.

2020.12.13.

7. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény konvex, majd ezt felhasználva lássuk be a négyzetes és a számtani egyenlőtlenség közötti összefüggést, azaz mutassuk meg, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

teljesül!

Útm.

1. **1. lépés.** Világos, hogy ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) := \xi e^{\alpha(x-\tau)}$, akkor $f(\tau) = \xi e^0 = \xi$, továbbá $f'(x) = \alpha\xi e^{\alpha(x-\tau)} = \alpha f(x)$.

   2. lépés. Tegyük fel, hogy $f' = \alpha f$ és $f(\tau) = \xi$. Ekkor a

   $$\varphi(x) := f(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   függvényre $\varphi \in \mathfrak{D}$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

   $$\varphi'(x) = f'(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} - \alpha \cdot f(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} = \alpha \cdot f(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} - \alpha \cdot f(x) \cdot e^{-\alpha(x-\tau)} = 0.$$

   Következésképpen alkalmas $c \in \mathbb{R}$, ill. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(x) = c$, ahonnan

   $$c = \varphi(\tau) = f(\tau) \cdot e^0 = f(\tau) = \xi, \qquad \text{és így} \qquad f(x) = \xi e^{\alpha(x-\tau)}$$

   következik.

2. Ha

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{x-1} - x$$

   akkor f folytonos,

   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

   Ez azt jelenti, hogy f-nek van abszolút minimuma. Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és

   $$f'(x) = e^{x-1} - 1, \quad f''(x) = e^{x-1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

   ezért

   $$f'(x) = 0 \iff x = 1 \qquad \text{és} \qquad f''(1) = 1 > 0,$$

   tehát f az $x = 1$ helyen veszi fel abszolút minimumát. Ez azt jelenti, hogy

   $$e^{x-1} - x = f(x) \geq f(1) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

3.
   - Világos, hogy $x = 0$ esetén a sor konvergens. Legyen $0 \neq x \in (-1, 1)$. Ekkor

     $$\lim \left(\left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \frac{2n+1}{x^{2n+1}} \right| \right) = |x|^2 \lim \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right) = |x|^2 < 1,$$

     így a hányadoskritérium következtében a sor minden $x \in (-1, 1)$ esetén konvergens.

- Legyen

$$f(x) := \mathrm{arctg}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1).$$

Ekkor bármely $x \in (-1, 1)$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2n+1} x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1-(-x^2)} = 0 \qquad (-1 < x < 1).$$

Így f állandófüggvény, azaz tetszőleges $x \in (-1, 1)$ számra $f(x) = f(0) = 0$, ahonnan

$$\mathrm{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

következik.

4. (a) Ha

$$f(x) := \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \qquad (0 \le x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f(0) = 0$ és

$$f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \qquad (0 \le x \in \mathbb{R}).$$

Ha sikerül belátnunk, hogy tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) > 0$, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor f szigorúan monoton növekedő, következésképpen

$$0 = f(0) < f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}, \qquad \text{azaz} \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Az f' deriváltfüggvénynek a $(0, +\infty)$ intervallumon való pozitivitását pedig úgy igazoljuk, hogy megmutatjuk, hogy $f''(0) = 0$ és tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $f''(x) > 0$ teljesül. Ebből ui. az következik, hogy f' szigorúan monoton növekedő, következésképpen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $0 = f'(0) < f'(x)$. Mivel tetszőleges $0 \le x \in \mathbb{R}$ számra $f''(x) = -\sin(x) + x$, ezért $f''(0) = 0$. Nem maradt más tehát hátra, mint az, hogy megmutassuk, hogy bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $f''(x) > 0$ teljesül. Mivel bármely $0 \le x \in \mathbb{R}$ esetén $f'''(x) = -\cos(x) + 1$, ezért f''' pontosan a $2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ pontokban tűnik el, egyébként pedig $f''' > 0$. Következésképpen bármely $J \subset [0, +\infty)$ intervallumnak van olyan a pontja, amelyre $f'''(a) > 0$, ami azt jelenti, hogy f'' szigorúan monoton növekedő, ahonnan minden $x \in (0, +\infty)$ számra $0 = f''(0) < f''(x)$ következik.

(b) Világos, hogy tetszőleges $x \in (0, +\infty)$, ill. bármely $p \in (2, +\infty)$ esetén igaz az

$$(x^p + 1)^2 < (x^2 + 1)^p \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^p + 1 < (x^2 + 1)^{p/2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < (x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1$$

ekvivalencia. Ha tehát

$$f(x) := (x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1 \qquad (0 \le x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f \in \mathfrak{D}$, $f(0) = 0$ és

$$f'(x) = px(\sqrt{x^2+1})^{p-2} - px^{p-1} = px\left\{(\sqrt{x^2+1})^{p-2} - x^{p-2}\right\} > px\left\{(\sqrt{x^2})^{p-2} - x^{p-2}\right\} = 0 \qquad (x > 0).$$

Következésképpen f szigorúan monoton növekedő, ahonnan tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ számra

$$0 = f(0) < f(x) = (x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1, \qquad \text{azaz} \qquad (x^p + 1)^2 < (x^2 + 1)^p$$

következik.

5. (a) Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4\cdot(x^2+1)-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-8x\cdot(x^2+1)^2-4(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-8x\cdot(x^2+1)-4(1-x^2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+1)^3} = \frac{8x^3-24x}{(x^2+1)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \qquad (x\in\mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$	inflexió	$\frown$	inflexió	$\smile$

(b) Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = \frac{d}{dx}2\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{d}{dx}(-4)\cdot\frac{x+1}{(x-1)^3} = \\ &= (-4)\cdot\frac{1\cdot(x-1)^3-(x+1)\cdot 3\cdot(x-1)^2}{(x-1)^6} = (-4)\cdot\frac{x-1-3x-3}{(x-1)^4} = (-4)\cdot\frac{-2x-4}{(x-1)^4} = 8\cdot\frac{x+2}{(x-1)^4}, \end{aligned}$$

ezért

	$(-\infty,-2)$	-2	$(2,1)$	$(1,+\infty)$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$	$\smile$

6. Teljes indukcióval bizonyítjuk a konkáv esetet.

- Ha $n=2$ és $p_1,p_2\in[0,+\infty)$ olyan számok, amelyekre $p_1+p_2=1$, akkor f konkávitása következtében

$$f(p_1x_1+p_2x_2)\geq p_1f(x_1)+p_2f(x_2).$$

- Ha valamely $2\leq n\in\mathbb{N}$ esetén fennáll az

$$f(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)\geq p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n),$$

egyenlőtlenség tetszőleges $p_1,\ldots,p_n\in[0,+\infty)$, $p_1+\ldots+p_n=1$ esetén, és $p_{n+1}\in[0,+\infty)$ olyan, hogy $p_1+\ldots+p_n+p_{n+1}=1$, akkor az $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\in I$ számokra

$$\begin{aligned} f(p_1x_1+\ldots+p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}) &= f\left((1-p_{n+1})\frac{p_1x_1+\ldots+p_nx_n}{1-p_{n+1}}+p_{n+1}x_{n+1}\right)\geq \\ &\geq (1-p_{n+1})f\left(\frac{p_1x_1+\ldots+p_nx_n}{1-p_{n+1}}\right)+p_{n+1}f(x_{n+1}) = \\ &= (1-p_{n+1})f\left(\frac{p_1}{1-p_{n+1}}x_1+\ldots+\frac{p_n}{1-p_{n+1}}x_n\right)+p_{n+1}f(x_{n+1})\geq \\ &\geq (1-p_{n+1})\left\{\frac{p_1}{1-p_{n+1}}\cdot f(x_1)+\ldots+\frac{p_n}{1-p_{n+1}}\cdot f(x_n)\right\}+p_{n+1}f(x_{n+1}) = \\ &= p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n)+p_{n+1}f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

7. Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és

$$f'(x)=2x,\quad f''(x)=2>0 \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért f konvex. Ha

$$p_1 := \ldots := p_n := \frac{1}{n}, \qquad \text{akkor} \qquad p_1 + \ldots + p_n = \frac{1 + \ldots + 1}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

így a Jensen-egyenlőtlenség felhasználásával így azt kapjuk, hogy bármely $x_1, , x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 = f\left(\frac{x_1}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} f(x_1) + \ldots + \frac{1}{n} f(x_n) = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladatok.

1. Adjuk meg az
$$f(x) := \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \operatorname{arctg}(x) \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R})$$
függvény értékkészletét!

2. Mutassuk meg, fennáll a
$$2\operatorname{arctg}(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi \operatorname{sgn}(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1),$$
egyenlőség!

3. Legyen
$$f(x) := \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \qquad (x \in [0,1]).$$
Adjunk meg olyan $c \in \mathbb{R}$ számot, amelyre tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) = c$ teljesül!

4. Mutassuk meg, hogy fennáll az
$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} \pi - 2\operatorname{arctg}(x) & (x > 1), \\ 2\operatorname{arctg}(x) & (-1 \leq x \leq 1), \\ -\pi - 2\operatorname{arctg}(x) & (x < -1) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
egyenlőség!

5. Számítsuk ki $f(x)$-et!
$$f(x) := \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$

6. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, ill. konkáv! Van-e f-nek inflexiós pontja?

(a) $f(x) := x \cdot e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := \dfrac{x^3+x}{x^2-x} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}).$

7. Alkalmas f függvény növekedésére hivatkozva igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségek fennállását!

(a) $\log_a(x) < (x-1)\log_a(e) \quad (1 < a, x \in \mathbb{R});$

(b) $\ln(1+n) > \dfrac{n}{x+1} \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N});$

(c) $(ax+1)e^{-ax} < 1 \quad (0 < a, x \in \mathbb{R});$

(d) $\dfrac{1+x}{1-x} > e^{2x} \quad (x \in (0,1));$

(e) $(x-1)\left(e^{2-x}-2\right) < -1 \quad (2 < x \in \mathbb{R}).$

8. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvény, továbbá alkalmas $K > 0$, ill. $a \in I$ esetén

$$|f'| \leq k|f| \qquad \text{és} \qquad f(a) = 0,$$

akkor fenáll az

$$f(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

egyenlőség!

9. Számítsuk ki a

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (|x| < 1) \qquad \text{és a} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \cdot x^n \quad (x \in (-1,1))$$

összeget!

10.

Útm.

1. Mivel bármely $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2x^2+2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

ezért alkalmas $c, d \in \mathbb{R}$ számokra

$$f(x) = c \quad (-1 > x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f(x) = d \quad (-1 < x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyezzük, hogy f nem intervallumon értelmezett függvény, ezért kell külön-külön az értelmezési tartomány részintervallumain alkalmazni a tanult tételt. Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(1) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{és} \qquad f(0) = \operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(0) = -\frac{\pi}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4},$$

ezért

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} \quad (-1 > x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f(x) = -\frac{\pi}{4} \quad (-1 < x \in \mathbb{R}),$$

következésképpen

$$\mathcal{R}_f = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

2. Ha

$$f(x) := 2\,\mathrm{arctg}\,(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

akkor bármely $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$ számra

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2 - 4x^2}} \cdot \frac{-2x^2+2}{1+x^2} = \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} = 0. \end{aligned}$$

Így alkalmas $c, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$2\,\mathrm{arctg}\,(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} c & (x \in [1, +\infty)), \\ d & (x \in (-\infty, -1]). \end{cases}$$

Az $x := 1$, ill. $x := -1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $c = \pi$, ill. $d = -\pi$, ahonnan az igazolandó állítás következik.

3. Mivel bármely $x \in (0, 1)$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = c \qquad (x \in [0, 1]).$$

Így

$$c = f(0) = \arcsin(0) + \arcsin(1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Ha

$$f(x) := \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\})$ és

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}'(x) & (|x| < 1), \\[2ex] -\dfrac{2}{1+x^2} = -2\,\mathrm{arctg}'(x) & (|x| > 1). \end{cases}$$

Ezért alkamas $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) + 2\,\mathrm{arctg}(x) &= c_1 \qquad (x > 1), \\ f(x) - 2\,\mathrm{arctg}(x) &= c_2 \qquad (x \in (-1, 1)), \\ f(x) + 2\,\mathrm{arctg}(x) &= c_3 \qquad (x < -1). \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} c_1 &= f(\sqrt{3}) + 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{3}) = \pi, \\ c_2 &= f(0) + 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{0}) = 0, \\ c_3 &= f(-\sqrt{3}) + 2\,\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\pi, \end{aligned}$$

amiből következik az állítás, ui. az $x = \pm 1$ helyeken az állítás nyilvánvaló.

5. Ha

$$\varphi(x) := \mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

továbbá $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$, ill.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

következtében

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (x > 0), \\ -\dfrac{\pi}{2} & (x < 0). \end{cases} \qquad \blacksquare$$

6. (a) Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x)\right) = (-4x)e^{-x^2} + (1-2x^2)e^{-x^2}(-2x) = 2x(2x^2-3)e^{-x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{0, \pm\sqrt{3/2}\},$$

ezért

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	inflexió	$\smile$	inflexió	$\frown$	inflexió	$\smile$

(b) Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$ és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x-1} = \frac{x^2-1+1+x}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1+x}{x-1} = x+1+\frac{1+x}{x-1},$$

így

$$f'(x) = 1 + \frac{x-1-(1+x)}{(x-1)^2} = 1 + \frac{-2}{(x-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3},$$

tehát

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f''	$-$	$-$	$+$
f	$\frown$	$\frown$	$\smile$

7. **1. lépés.** Ha $f \geq 0$, akkor a

$$g(x) := f(x) \cdot e^{-kx} \qquad (x \in I)$$

függvény

$$g'(x) = e^{-kx}(f'(x) - kf(x)) \leq 0 \qquad (x \in I)$$

következtében monoton csökkenő, így $g(a) = 0$ miatt

$$g(x) \leq 0 \qquad (a \leq x \in I).$$

Így a feltétel következtében

$$f(x) = 0 \qquad (a \leq x \in I).$$

Hasonlóan, ha

$$h(x) := f(x) \cdot e^{kx} \qquad (x \in I),$$

akkor

$$h(x) \leq 0 \qquad (a \geq x \in I),$$

ahonnan

$$f(x) = 0 \qquad (a \geq x \in I)$$

következik.

2. lépés. Az iméntieket alkalmazva a $\varphi := f^2$ (deriválható) függvényre, a

$$|\varphi'| = |\varphi \cdot \varphi' + \varphi' \cdot \varphi| = 2|\varphi' \cdot \varphi| \leq 2k|\varphi \cdot \varphi| = 2kf$$

becslés következtében

$$\varphi(x) = 0 \quad (x \in I), \qquad \text{azaz} \qquad f(x) = 0 \quad (x \in I)$$

adódik. ■

8. (a) **1. lépés.** Mivel $\lim\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$, ezért a

$$\sum_{n=1} (n \cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara 1.

2. lépés. Ha

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \qquad (|x| < 1),$$

akkor

$$f \in \mathfrak{D} \qquad \text{és} \qquad f(x) = x \cdot F'(x) \quad (|x| < 1),$$

ahol

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 \qquad (|x| < 1),$$

így bármely $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(b) **1. lépés.** Mivel

$$\lim\left(\binom{n+3}{2} : \binom{n+2}{2}\right) = \lim\left(\frac{(n+3)!}{2! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{(n+2)!}{2! \cdot n!}\right) = \lim\left(\frac{(n+3)!}{2! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{2! \cdot n!}{(n+2)!}\right) = \lim\left(\frac{n+3}{n+1}\right) = 1,$$

ezért a

$$\sum_{n=0} \left(\binom{n+2}{2} \cdot x^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara 1.

2. lépés. Ha

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n \qquad (|x| < 1),$$

akkor

$$f \in \mathfrak{D} \qquad \text{és} \qquad f(x) = F'(x) \quad (|x| < 1),$$

ahol

$$\begin{aligned} F(x) \quad &:= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2! \cdot n! \cdot (n+1)} \cdot x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2} \cdot x^{n+1} = \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \\ &= \quad \frac{x^2}{2(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} = \frac{x^2 + 2x(1-x)}{2(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{2(1-x)^2} \qquad (|x| < 1), \end{aligned}$$

így bármely $x \in (-1,1)$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n = F'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2-2x)(1-x)^2+(2x-x^2)2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)^2+2x-x^2}{(1-x)^3} =$$

$$= \frac{1-2x+x^2+2x-x^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3}. \quad \blacksquare$$

2020.12.13.

1.7. 7. oktatási hét (2020.10.21.)

Szükséges előismeretek.

1. Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
Válasz: Ha $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény injektív és folytonos, $a \in I$, továbbá $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor az $f^{-1} : \mathcal{D}_f \to \mathcal{R}_f$ függvényre a következők igazak:

$$1.\ f^{-1} \in \mathcal{D}[f(a)] \quad \Longleftrightarrow \quad f'(a) \neq 0; \qquad 2.\ f^{-1} \in \mathcal{D}[f(a)] \quad \Longrightarrow \quad (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(a))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. Fogalmazza meg a Bernoulli-L'Hospital-szabályt!
Válasz: Legyen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, és tegyük fel, hogy az $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekre

(i) $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b))$;

(ii) az alábbi feltétel közül pontosan egy teljesül:

$$\textbf{vagy} \quad \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0 \qquad \textbf{vagy pedig} \quad \lim_{a+0} g \in \{-\infty, +\infty\};$$

(iii) $A := \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor
$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$
Mindez igaz marad akkor is, ha az (ii), (iii) feltételekben b baloldali határértékére cseréljük az a jobboldali határértékét. Ekkor

$$\lim_{b-0} \frac{f}{g} = \lim_{b-0} \frac{f'}{g'}.$$

3. Milyen állítást ismer a $(+\infty)$-beli aszimptota meghatározására?
Válasz: Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Az f függvénynek pontosan akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha

$$\alpha := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az f aszimptotája a
$$\varphi(x) := \alpha x + \beta \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény.

Az óra anyaga.

Emlékeztető. Ha $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény injektív és folytonos, $a \in I$, továbbá $f \in \mathfrak{D}[a]$, akkor az $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$ függvényre a következők igazak:

1. $f^{-1} \in \mathcal{D}[f(a)] \quad \Longleftrightarrow \quad f'(a) \neq 0$;
2. $f^{-1} \in \mathcal{D}[f(a)] \quad \Longrightarrow$

$$\boxed{(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(a))} = \frac{1}{f'(a)}}.$$

Példák.

$$\boxed{\operatorname{arcsin}'(x) =} \frac{1}{\sin'(\operatorname{arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\operatorname{arcsin}(x))}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1))};$$

$$\boxed{\operatorname{arccos}'(x) =} \frac{1}{\cos'(\operatorname{arccos}(x))} = \frac{1}{-\sin(\operatorname{arccos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\operatorname{arccos}(x))}} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1))}$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}'(x) =} \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x))} = \cos^2(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \boxed{\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})}$$

$$\boxed{\operatorname{arcctg}'(x) =} \frac{1}{\operatorname{ctg}'(\operatorname{arcctg}(x))} = -\sin^2((\operatorname{arcctg}(x))) = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg}(x))} = \boxed{\frac{-1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})}$$

$$\boxed{\operatorname{arsh}'(x) =} \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{arsh}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh}(x))}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})}$$

$$\boxed{\operatorname{arch}'(x) =} \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{arch}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch}(x))-1}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x \in (1,+\infty))}$$

$$\boxed{\operatorname{arth}'(x) =} \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{arth}(x))} = \operatorname{ch}^2(\operatorname{arth}(x)) = \frac{1}{1-{}^2(\operatorname{arth}(x))} = \boxed{\frac{1}{1-x^2} \qquad (x \in (-1,1))}$$

$$\boxed{\operatorname{arcth}'(x) =} \frac{1}{\operatorname{cth}'(\operatorname{arcth}(x))} = -\operatorname{sh}^2(\operatorname{arcth}(x)) = \frac{-1}{\operatorname{cth}^2(\operatorname{arcth}(x))-1} = \boxed{\frac{1}{1-x^2} \qquad (x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty))}$$

Feladat. Tekintsük az

$$f(x) := x^3 + x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Igazoljuk, hogy f invertálható és inverze differenciálható. Számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)'(2)$ helyettesítési értéket!

Útm. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Következésképpen f szigorúan monoton növekedő. Tehát $\exists\, f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és $f(1) = 2$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \left.\frac{1}{3x^2+1}\right|_{x=1} = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Tekintsük az

$$f(x) := 2x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^2+1) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy f invertálható és inverze differenciálható! Számítsuk ki az

$$\left(f^{-1}\right)'\left(2+\frac{\pi}{4}+\ln(2)\right)$$

deriváltat!

Útm. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 2 + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{2x}{x^2+1} = 2 + \frac{-1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2+2x^2-1+2x}{x^2+1} = \frac{1+2x^2+2x}{x^2+1} > 0.$$

Így f szigorúan monoton növekedő. Tehát $\exists\, f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és $f(1) = 2 + \frac{\pi}{4} + \ln(2)$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'\left(2+\frac{\pi}{4}+\ln(2)\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(2+\frac{\pi}{4}+\ln(2)\right)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{5}. \quad \blacksquare$$

Emlékeztető (Bernoulli-L'Hospital-szabály).[6]

Legyen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, és tegyük fel, hogy az $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekre

(i) $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b))$;

(ii) az alábbi feltétel közül pontosan egy teljesül:

$$\textbf{vagy} \quad \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0 \qquad \textbf{vagy pedig} \quad \lim_{a+0} g \in \{-\infty, +\infty\};$$

(iii) $A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$

Mindez igaz marad akkor is, ha az **(ii)**, **(iii)** feltételekben b baloldali határértékére cseréljük az a jobboldali határértékét. Ekkor

$$\lim_{b-0} \frac{f}{g} = \lim_{b-0} \frac{f'}{g'}.$$

[6] Gaullaume François Antoine Marqies de l'Hospital (1661 − 1704) havonta fél professzori fizetés adott Johann (I) Bernoullinek (1667 − 1748), hogy annak matematikai eredményeit kizárólag vele közölje, amit l'Hospital saját neve alatt meg is jelentetettt. Halála után így ezeket az eredményeket hosszú ideig neki tulajdonnították. Szász Pál (1901 − 1978) szófordulatával élve elmondható, hogy ez az a szabály, ami Bernoullitól lett „ellopitálva".

Előfordul, hogy valamely határérték számítása során – **a szabály feltételei teljesülésének ellenőrzése mellett** – többször (esetünkben k-szor) vagyunk kénytelenek megkísérelni a fenti szabály alkalmazását. Ez esetben a következő jelöléseket használjuk

$$\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \sim \frac{f''}{g''} \sim \frac{f'''}{g'''} \sim \ldots \sim \frac{f^{(k)}}{g^{(k)}} \longrightarrow A, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{f}{g} \longrightarrow A.$$

Példák.

- Ha $a \in (1, +\infty)$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor

  $$\frac{a^x}{x^n} \sim \frac{a^x \ln(a)}{nx^{n-1}} \sim \frac{a^x \ln^2(a)}{n(n-1)x^{n-2}} \sim \ldots \sim \frac{a^x \ln^n(a)}{n!} \longrightarrow +\infty \qquad (x \to +\infty)$$

  következtében
  $$\frac{a^x}{x^n} \longrightarrow +\infty \qquad (x \to +\infty).$$
  Erre azt is szokás mondani, hogy $1 < a \in \mathbb{R}$ esetén **az $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ exponenciális függvény gyorsabban tart végtelenhez, mint az identikus függvény bármely pozitív egész kitevújű hatványa**. Ezt az alábbi jelsorozattal szokás röviden kifejezni:

  $$x^n \ll a^x, \quad \text{ha } x \text{ elég nagy.}$$

- Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor

  $$\frac{\ln^n(x)}{x^m} \sim \frac{n\ln^{n-1}(x)}{mx^m} \sim \frac{n(n-1)\ln^{n-2}(x)}{m^2x^m} \sim \ldots \sim \frac{n!}{m^nx^m} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty)$$

  következtében
  $$\frac{\ln^n(x)}{x^m} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty).$$
  Erre azt is szokás mondani, hogy **az identikus függvény bármely pozizív egész kitevőjű hatványa gyorsabban tart végtelenhez, mint** ln **bármely pozitív egész kitevőjű hatványa**. Ezt az alábbi jelsorozattal szokás röviden kifejezni:

  $$\ln^n(x) \ll x^m, \quad \text{ha } x \text{ elég nagy.}$$

Megjegyzések.

1. a tételbeli $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ feltétel lényeges, ui. az

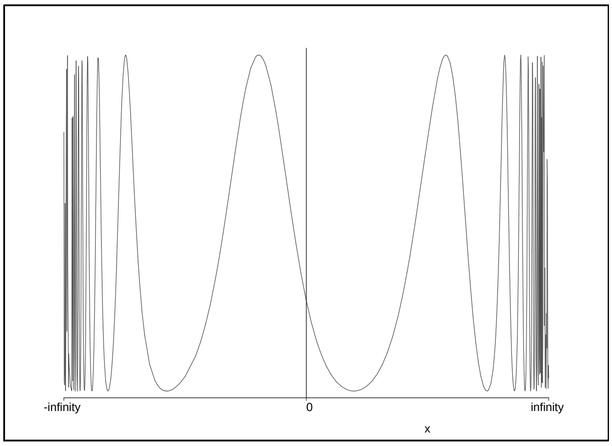
   $$f(x) := x + \sin(x)\cos(x), \quad g(x) := f(x)e^{\sin(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények esetében nem létezik a $\lim\limits_{+\infty}(f/g)$ határérték, hiszen a sin periodikus függvény (vö. 1. gyakorlat), viszont

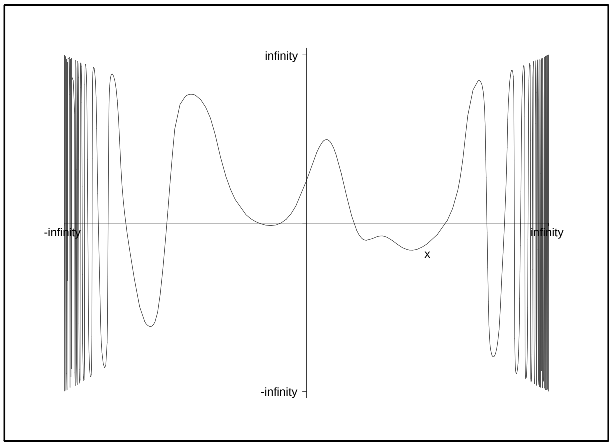
$$\lim_{+\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cos(x)e^{-\sin(x)}}{x+\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)} = 0.$$

A Bernoulli-L'Hospital-szabály azért nem alkalmazható, mert g' tetszőleges nemkorlátos intervallumon felveszi a 0 értéket:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x)e^{\sin(x)}(x+\sin(x)\cos(x)) + e^{\sin(x)}(1+\cos^2(x)-\sin^2(x)) = \\ &= e^{\sin(x)}\left[x\cos(x)+\sin(x)\cos^2(x)+1+\cos^2(x)-\sin^2(x)\right] = \\ &= e^{\sin(x)}\left[x\cos(x)+\sin(x)\cos^2(x)+2\cos^2(x)\right] = \\ &= e^{\sin(x)}\cos(x)\left[x+\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)\right] \quad (x\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$



1.2. ábra. Az f/g függvény grafikonja.



1.3. ábra. A g' függvény grafikonja.

2. Sok esetben a Bernoulli-L'Hospital-szabály alkalmazása nem célravezető, viszont egyszerű átalakításokkal a keresett határérték kiszámítható:

   (a) ha a
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$
   határérték kiszámítására akarnánk használni a szabályt, akkor
   $$\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\sim\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\sim\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\sim\ldots$$
   miatt sohasem érnénk célt, így inkább az alábbi módon járunk el:
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

   (b) ha a
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$
   határérték kiszámítására akarnánk használni a szabályt, akkor
   $$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\sim\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\sim\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\sim\ldots$$
   miatt sohasem érnénk célt, így inkább az alábbi módon járunk el:
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1.$$

3. Előfordulhat, hogy
   $$\nexists\lim\frac{f'}{g'},\qquad\text{de}\qquad\exists\lim\frac{f}{g}.$$
   Ilyenkor persze nem a Bernoulli-L'Hospital-szabályt alkalmazzuk a határérték kiszámításához. Pl.

   (a) a
   $$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos(1/x)}{\sin(x)}$$
   határérték kizámítására nem alkalmazható a szabály, hiszen
   $$\nexists\lim_{x\to0}\frac{\sin(1/x)+2x\cos(1/x)}{\cos(x)}.$$

Viszont

$$\frac{x^2\cos(1/x)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \cdot \left(x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

(b) a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\operatorname{tg}(x)}$$

határérték kizámítására nem alkalmazható a szabály, hiszen

$$\nexists \lim_{x\to 0} \cos^2(x)\,\{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)\}.$$

Viszont

$$\frac{x^2\sin(1/x)}{\operatorname{tg}(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \cdot x \cdot \cos(x) \cdot \sin(1/x) \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

4. A Bernoulli-L'Hospital-szabályt tehát

$$\frac{0}{0} - \qquad \text{és} \qquad \frac{\cdots}{\infty}\text{-típusú}$$

határértékek kiszámítására alkalmas. Bizonyos esetekben nem ilyen típusú határértékekkel van dolgunk, azonban, amint azt az

$$a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}, \qquad a - b = a \cdot \frac{b}{b} - b \cdot \frac{a}{a} = a \cdot b \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{ab}}, \qquad a^b = e^{b\ln(a)}$$

átalakítások szimbolikusan mutatják, ezeknek a határértékeknek a kiszámítása a Bernoulli-L'Hospital-szabályban szereplő típusú határértékekre vezethető vissza. Az alábbiakban felsorolunk néhány alapvető esetet, amelyek ilyen típusú határértékek kiszámítására vezethetők vissza.

A $0 \cdot \infty$-típusú határérték kiaszámítása az

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{vagy} \qquad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

átalakítás $\frac{0}{0}$-típusú vagy $\frac{\cdots}{\infty}$-típusú határérték kiszámítására vezethető vissza.

A $\infty - \infty$-típusú határérték kiaszámítása az

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)f(x)}}$$

átalakítás segítségével $\frac{0}{0}$-típusú határérték kiszámítására vezethető vissza.

A 0^0-típusú, ∞^0-típusú, ill. 1^∞-típusú határérték kiszámítása az

$$f(x)^{g(x)} = \exp\left(g(x)\ln(f(x))\right) = \exp\left(\frac{\ln(f(x))}{\frac{1}{g(x)}}\right)$$

átalakítás segítségével, illetve az exponenciális függvény folytonosságára való hivatkozással $\frac{\cdots}{\infty}$ vagy $\frac{0}{0}$-típusú határérték kiszámítására vezethető vissza.

Példák.

1. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \neq 0$ esetén

$$\sin(x)\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \frac{-\sin^2(x)}{x\cos(x)} \sim \frac{-\sin(2x)}{\cos(x) - x\sin(x)} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0 \qquad (x \to 0),$$

ezért

$$\lim_{x\to 0+0} \sin(x)\ln(x) = 0.$$

2. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(x)}$$

ezért az exponenciális függvény folytonossága következtében

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\sin(x)} = \exp\left(\lim_{x\to 0+0} \sin(x)\ln(x)\right) = e^0 = 1.$$

3. Mivel $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1+3x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(1+3x^2)\right)$$

és

$$\frac{1}{x^2}\ln(1+3x^2) \sim \frac{\frac{6x}{1+3x^2}}{2x} = \frac{3}{1+3x^2} \longrightarrow 3 \qquad (x \to 0),$$

ezért az exponenciális függvény folytonosságát használva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{x^2}\right) = e^3.$$

Feladat. A Bernoulli-L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin(x)}}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;
3. $\lim \left(n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\right) \quad (0<\alpha\in\mathbb{R})$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Útm.

1. Mivel

$$\frac{a^x - a^{\sin(x)}}{x^2} \sim \frac{a^x\ln(a) - a^{\sin(x)}\ln(a)\cos(x)}{2x} \sim$$

$$\sim \frac{a^x\ln^2(a) - a^{\sin(x)}\ln^2(a)\cos^2(x) + a^{\sin(x)}\ln(a)\sin(x)}{2} \longrightarrow 0 \quad (x\to 0)$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{\sin(x)}}{x^2} = 0.$$

2. Világos, hogy ha a határérték létezik, akkor az exponenciális függvény folytonossága következtében

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1}\exp\left(\frac{1}{1-x}\ln(x)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln(x)\right).$$

Mivel

$$\frac{\ln(x)}{1-x} \sim \frac{1}{-x} \longrightarrow -1 \qquad (x\to 1),$$

ezért

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \exp(-1) = \frac{1}{e}.$$

3. Világos, hogy ha a határérték létezik, akkor

$$\lim\left(n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\right) = \lim\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x - 1}{x}.$$

Mivel

$$\frac{\alpha^x-1}{x} \sim \alpha^x\ln(\alpha) \longrightarrow \ln(\alpha) \qquad (x\to 0),$$

ezért

$$\lim\left(n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)\right) = \ln(\alpha).$$

4. Közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}.$$

Ez $\dfrac{0}{0}$-típusú határérték. Kíséreljük meg alkalmazni a Bernoulli-l'Hospital-szabályt, azaz számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{(x+1)e^x-1}$$

határértéket! Ez megint $\dfrac{0}{0}$-típusú. Ismét kíséreljük meg alkalmazni a Bernoulli-l'Hospital-szabályt, azaz számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{(x+2)e^x}$$

határértéket! Ennek értéke $\dfrac{1}{2}$; tehát a keresett határérték $\dfrac{1}{2}$. ■

Megjegyzés. Induljunk ki az

$$f(x):=\sqrt{x^2-1}\qquad (x\in\mathbb{R},\ |x|>1)$$

függvényből! A

$$\sqrt{x^2-1}-x=\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\qquad (x\in\mathbb{R},\ |x|>1)$$

egyenlőségből azonnal következik, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0,\qquad \text{ill.}\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0.$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $\alpha<0$, ill. $\omega>0$, hogy

$$(x\in(-\infty,\alpha),\quad \text{ill.}\quad x\in(\omega,+\infty))\qquad\Longrightarrow\qquad |f(x)-x|<\varepsilon,$$

azaz a $(-\infty,\alpha)$, ill. az $(\omega,+\infty)$ intervallumon f az ε hibakorlátnál kisebb eltéréssel helyettesíthető a

$$\varphi(x):=x\qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvénnyel. Ez motiválja a következő fogalmat.

Emlékeztető. Legyen $A, B \in \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománya alulról, ill. felülről nem korlátos. Azt mondtuk, hogy a

$$\varphi(x) := Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény az f **aszimptotá**ja a $(-\infty)$-ben, ill. a $(+\infty)$-ben, ha

$$\lim_{-\infty}(f - \varphi) = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{+\infty}(f - \varphi) = 0.$$

Megjegyezzük, hogy ha

$$\lim_{+/-\infty} f = \alpha \in \mathbb{R},$$

akkor a

$$\varphi(x) := \alpha \qquad (x \in \mathbb{R})$$

állandófüggvény az f aszimpotájának a $(+/-\infty)$-ben, ui. ebben az esetben

$$f(x) - \alpha \longrightarrow 0 \qquad (x \to +/-\infty).$$

Tétel. A fenti φ lineáris függvény pontosan akkor aszimptotája f-nek, ha

$$\lim_{x\to -/+\infty} \frac{f(x)}{x} = A, \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to -/+\infty} (f(x) - Ax) = B.$$

Példák.

1. Az

$$f(x) := x - 2\,\mathrm{arctg}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény esetében

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2\,\mathrm{arctg}(x)}{x} \longrightarrow 1 =: A \qquad (x \to \pm\infty)$$

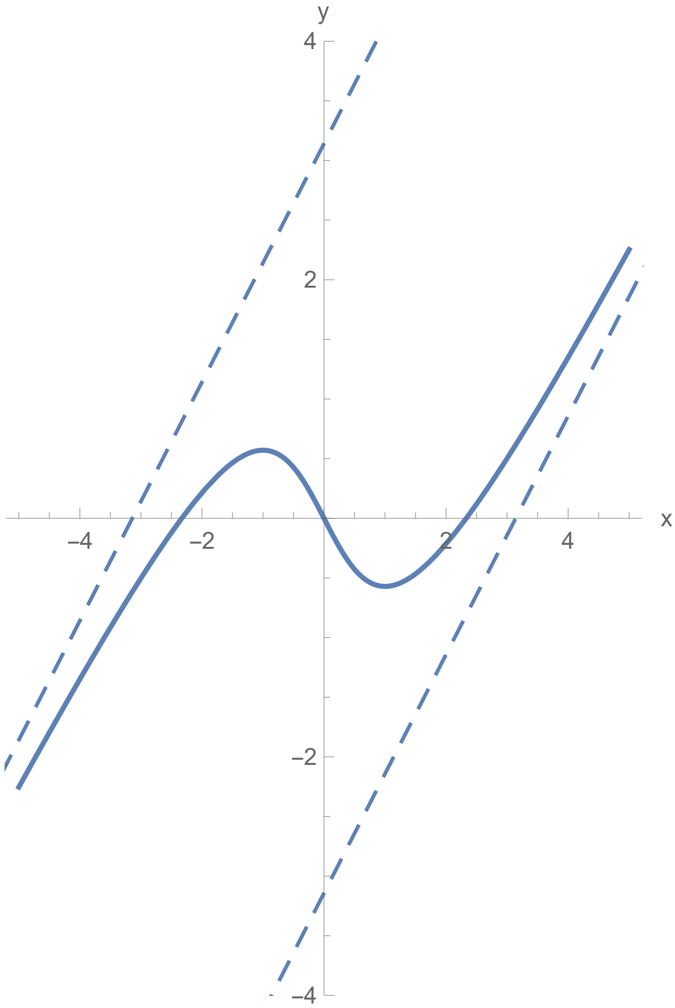
és

$$f(x) - Ax = -2\,\mathrm{arctg}(x) \longrightarrow \mp\pi \qquad (x \to \pm\infty).$$

Tehát a

$$\varphi(x) := x + \pi \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill. a} \qquad \psi(x) := x - \pi \quad (x \in \mathbb{R})$$

aszimptota a $-\infty$-ben, ill. $+\infty$-ben (vö. 1.4. ábra).



1.4. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - 2\,\mathrm{arctg}(x)$ függvény grafikonja.

2. Az

$$f(x) := \frac{x^2+9}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény esetében

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+9}{x^2} \longrightarrow 1 =: A \qquad (x \to \pm\infty),$$

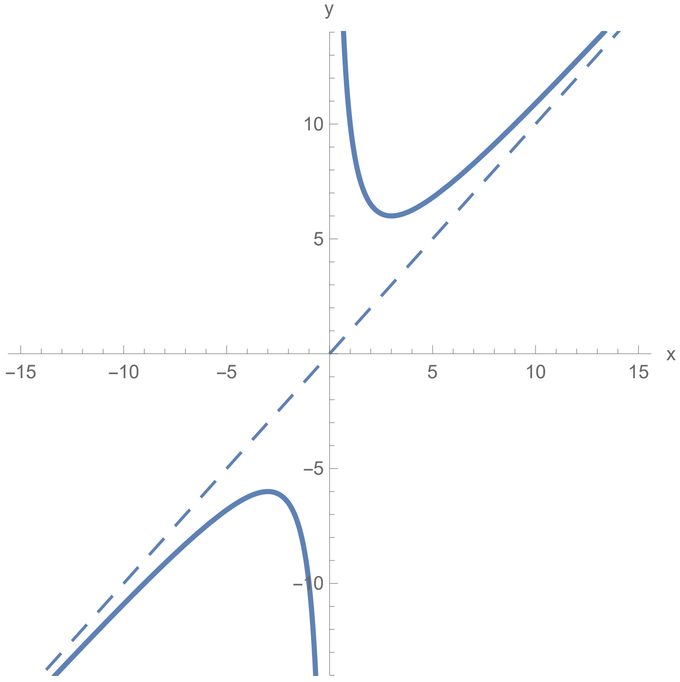
és

$$f(x) - Ax = \frac{x^2+9}{x} - x = \frac{9}{x} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \pm\infty).$$

Tehát a

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptota a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben is (vö. 1.5. ábra).



1.5. ábra. Az $\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni x \mapsto \dfrac{x^2+9}{x}$ függvény grafikonja.

Házi feladatok.

1. Igazoljuk, hogy az
$$f(x) := 3x^5 + 10x^3 + 15x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény invertálható és $f^{-1} \in \mathfrak{D}$, majd számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)'(1)$ deriváltat!

2. Igazoljuk, hogy az
$$f(x) := x + e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény invertálható és $f^{-1} \in \mathfrak{D}^2$, majd számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)''(1)$ deriváltat!

3. A következő határértékek kiszámításához használjuk a Bernoulli-l'Hospital-szabályt!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{\sin(2\cdot\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln(x+1)}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-x}{x-\sin(x)}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(5x)}$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin(x)}}{x-\sin(x)}$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{a^{\ln(x)}-x}$;

(j) $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot e^{1/x^2}$;
(k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)}$;
(l) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \left(2-\dfrac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg}(x)}$;

(m) $\lim_{x\to 0} x^{4/(1+2\ln(x))}$;
(n) $\lim_{x\to +\infty} x\cdot \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;
(o) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{x}{x-1}\right)$;

(p) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$;
(q) $\lim_{x\to 0+0} \dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$;
(r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$.

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája a $(+\infty)$-ben, ill. a $(-\infty)$-ben?

(a) $f(x) := x^4+x^3 \quad (x\in\mathbb{R})$;
(b) $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \quad (1\neq x\in\mathbb{R})$.

5. Határozzuk meg az f függvény aszimptotáit!

(a) $f(x) := \dfrac{1-x^3}{x^2} \quad (0\neq x\in\mathbb{R})$;
(b) $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x} \quad (0<x\in\mathbb{R})$.

Útm.

1. Világos, hogy $f\in\mathfrak{D}$ és tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 15x^4+30x^2+15 \geq 15 > 0$. Így f szigorúan monoton növekedő. Tehát $\exists\, f^{-1}\in\mathfrak{D}$, és $f(0)=1$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{15}.$$

2. Világos, hogy $f\in\mathfrak{D}$ és tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 1+e^x > 0$. Így f szigorúan monoton növekedő. Tehát $\exists\, f^{-1}\in\mathfrak{D}$ és

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}.$$

Az $\left(f^{-1}\right)'$ függvény is deriválható, ui. deriválható függvények kompozíciója, így

$$\left(f^{-1}\right)'' = -\frac{f''\circ f^{-1}\cdot\left(f^{-1}\right)'}{(f'\circ f^{-1})^2} = -\frac{f''\circ f^{-1}\cdot\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}}{(f'\circ f^{-1})^2} = -\frac{f''\circ f^{-1}}{(f'\circ f^{-1})^3},$$

és $f(0)=1$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)''(1) = -\frac{f''(f^{-1}(1))}{(f'(f^{-1}(1)))^3} = -\frac{f''(0)}{(f'(0))^3} = -\frac{\exp(0)}{(1+\exp(0))^3} = -\frac{1}{8}.$$

3. (a) Ha

$$f(x) := 3x^2-2x-1 \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := 5x^2-x-4 \quad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{6x-2}{10x-1} \longrightarrow \frac{4}{9} \qquad (x\to 1),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}=\frac{4}{9}.$$

Megjegyezzük, hogy a határérték kiszámítása oly módon is történhet, hogy kihasználjuk azt a tényt, miszerint a számláló és a nevező is polinom:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(3x+1)}{\cancel{(x-1)}(5x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{5x+4}=\frac{4}{9}.$$

(b) Ha

$$f(x):=e^{2x}-1\quad (x\in\mathbb{R})\qquad \text{és}\qquad g(x):=\sin(x)\quad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=\lim_{x\to 0}g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{2e^{2x}}{\cos(x)}\longrightarrow\frac{2}{1}=2\qquad (x\to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin(x)}=2.$$

(c) Ha

$$f(x):=\sin(2\cdot\arccos(x))\quad (x\in\mathbb{R})\qquad \text{és}\qquad g(x):=\sqrt{1-x^2}\quad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\sin(2\cdot 0)=0=\lim_{x\to 1-0}g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{\cos(2\cdot\arccos(x))\cdot\frac{(-2)}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{2}{x}\cdot\cos(2\cdot\arccos(x))\longrightarrow\frac{2}{1}\cdot\cos(2\cdot 0)=2\qquad (x\longrightarrow 1-0),$$

ezért

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin(2\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}=2.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2\sin(\arccos(x))\cdot\cos(\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x\cdot\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}}{\sqrt{1-x^2}}=2x\longrightarrow 2\qquad (x\to 1-0).$$

(d) Ha

$$f(x):=x\quad (-1<x\in\mathbb{R})\qquad \text{és}\qquad g(x):=\ln(1+x)\quad (-1<x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty=\lim_{x\to+\infty}g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=x+1\longrightarrow+\infty\qquad (x\to+\infty),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}=+\infty.$$

(e) Ha
$$f(x) := \mathrm{tg}(x) - x \quad \left(0 \neq x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x - \sin(x) \quad \left(0 \neq x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$
akkor
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$
Mivel
$$\mathrm{tg}' = \frac{1}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \mathrm{tg}^2,$$
így
$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{1 + \mathrm{tg}^2(x) - 1}{1 - \cos(x)} \sim \frac{2\,\mathrm{tg}(x)(1 + \mathrm{tg}^2(x))}{\sin(x)} = \frac{2(1 + \mathrm{tg}^2(x))}{\cos(x)} \longrightarrow \frac{2(1+0)}{1} = 2 \qquad (x \to 0),$$
ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - x}{x - \sin(x)} = 2.$$

(f) Ha
$$f(x) := \cos(x) - 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$
Mivel
$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{-\sin(x)}{2x} \sim \frac{-\cos(x)}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad (x \to 0),$$
ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

(g) Ha $\frac{\pi}{2} \neq x \in \left(-\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right)$, akkor
$$\frac{\mathrm{tg}(x)}{\mathrm{tg}(5x)} = \frac{\sin(x)}{\sin(5x)} \cdot \frac{\cos(5x)}{\cos(x)} =: f(x).$$
Mivel
$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(5x)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$
és
$$\frac{\cos(5x)}{\cos(x)} \sim \frac{-5\sin(5x)}{-\sin(x)} \longrightarrow \frac{5 \cdot 1}{1} \qquad \left(x \to \frac{\pi}{2}\right),$$
ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to \pi/2} f(x) = 1 \cdot 5 = 5.$$

(h) Ha
$$f(x) := e^x - e^{\sin(x)} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x - \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$
Mivel
$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{\sin(x)} \cdot \frac{e^{x - \sin(x)} - 1}{x - \sin(x)} \sim e^{\sin(x)} \cdot \frac{(1 - \cos(x))e^{x - \sin(x)}}{1 - \cos(x)} = e^{\sin(x)} \cdot e^{x - \sin(x)} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1 \qquad (x \to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x-\sin(x)} = 1.$$

(i) Ha

$$f(x) := \ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := a^{\ln(x)} - x \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\frac{1}{x}}{a^{\ln(x)}\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{a^{\ln(x)}\cdot\ln(a) - x} \Longrightarrow \frac{1}{a^0\cdot\ln(a) - 0} = \frac{1}{\ln(a)-1} \qquad (x\to 1),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{a^{\ln(x)} - x} = \frac{1}{\ln(a)-1}.$$

(j) Ha

$$f(x) := x^2 \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := e^{1/x^2} \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.$$

Mivel

$$x^2\cdot e^{1/x^2} = f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} \sim \frac{e^{1/x^2}\cdot(-2/x^3)}{-2/x^3} = e^{1/x^2} \longrightarrow +\infty \qquad (x\to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot e^{1/x^2} = +\infty.$$

(k) Ha

$$f(x) := e^{x^2} - 1 \quad (\in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := 1-\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{2xe^{x^2}}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)}\cdot 2\cdot e^{x^2} \longrightarrow 1\cdot 2\cdot 1 = 2 \qquad (x\to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)} = 2.$$

(l) Mivel

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(2-\frac{2x}{\pi}\right) = 2-0 = 2 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}(x) = +\infty,$$

ezért

$$\operatorname{tg}(x)\ln\left(2-\frac{2x}{\pi}\right) = \frac{\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)}{\operatorname{ctg}(x)} \sim \left(-\frac{2}{\pi}\right)\cdot\frac{-\sin^2(x)}{2-\frac{2x}{\pi}} \longrightarrow \frac{2}{\pi} \qquad \left(x\to\frac{\pi}{2}-0\right),$$

illetve az exponenciális függvény folytonossága következtében

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg}(x)}=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}(x)\ln\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)\right)=e^{2/\pi}.$$

(m) Mivel

$$\frac{4\ln(x)}{1+2\ln(x)}\sim\frac{\frac{4}{x}}{\frac{2}{x}}=2\longrightarrow 2\quad(x\to 0),$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(x)}{1+2\ln(x)}=2,$$

ill. az exponenciális függvény folytonossága következtében

$$\lim_{x\to 0}x^{4/(1+2\ln(x))}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(x)}{1+2\ln(x)}\right)=e^2.$$

(n) Ha

$$f(x):=x\quad(x\in\mathbb{R})\qquad\text{és}\qquad g(x):=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad(0<x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\qquad\text{és}\qquad\lim_{x\to+\infty}g(x)=\ln(1)=0.$$

Mivel

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\sim\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x}\longrightarrow 1\qquad(x\to+\infty),$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

(o) Mivel tetszőleges $1<x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{x-1}=\frac{x-1-x\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}\sim\frac{1-1-\ln(x)}{1-\frac{1}{x}+\ln(x)}\sim\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}\longrightarrow-\frac{1}{2}\qquad(x\to 1),$$

ezért

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}$$

(p) Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\exp\left(n\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right),$$

ezért a $(0,+\infty)\ni x\mapsto x\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ függvény $(+\infty)$-határértékét kell kiszámítanunk. MIvel tetszőleges $0<x\in\mathbb{R}$ esetén

$$x\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}}\sim\frac{\frac{1}{1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\longrightarrow 1\qquad(x\to+\infty),$$

ezért az exponenciális függvény folytonosságát felhasználva

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\exp\left(\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)=e^1=e$$

adódik.

(q) Ha

$$f(x) := (1+x)^{1/x} - e \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y - e = 0 = \lim_{x\to 0+0} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\varphi'(x)-0}{1} = (1+x)^{1/x}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

ahol a

$$(0,+\infty)\ni x\mapsto \varphi(x) := (1+x)^{1/x}$$

függvényre

$$\ln(\varphi(x)) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2},$$

és

$$\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2} \sim \frac{\frac{1+x-x}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x} \sim \frac{\frac{-2}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^2}}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad (x\to 0+0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

(r) Mivel tetszőleges $x \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$\frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} = \frac{\sin(x)}{x}\cdot\left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)^2,$$

ezért (vö. (f))

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} = 1\cdot 2^2 = 4.$$

4. (a) Mivel

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty}(x^3+x^2) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2) = -\infty,$$

ezért f-nek sem $(+\infty)$-ben, sem $(-\infty)$-ben nincsen aszimptotája.

(b) Mivel

$$\lim_{\pm\infty} f = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1,$$

ezért az $\mathbb{R}\ni x\mapsto 1$ lineáris függvény aszimptotája f-nek mind $(+\infty)$-ben, mind pedig $(-\infty)$-ben.

5. (a) Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^3}{x^3} = -1,$$

és

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^3+x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2} = 0,$$

ezért az $\mathbb{R}\ni x\mapsto -x$ lineáris függvény aszimprotája f-nek $(-\infty)$-ben és $(+\infty)$-ben (vö. 1.6. ábra).

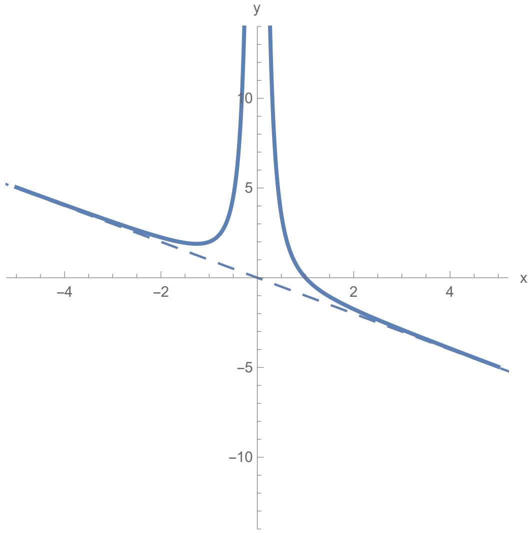
(b) Mivel

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0,$$

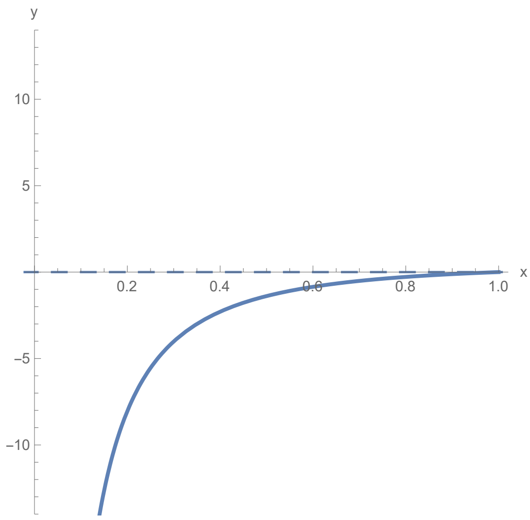
és

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x})}{1} = 0,$$

ezért az $\mathbb{R} \ni x \mapsto$ lineáris függvény aszimprotája f-nek a $(+\infty)$-ben (vö. 1.7. ábra).



1.6. ábra. Az $f(x) := \dfrac{1-x^3}{x^2} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonja.



1.7. ábra. Az $f(x) := \dfrac{\ln(x)}{x} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonja.

Gyakorló feladatok.

1. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := x - \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \left(x \in \left(0, \sqrt{2}\right)\right)$$

függvény invertálható, majd számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)'(1 + \ln(2))$ deriváltat!

2. Lássuk be, hogy van olyan deriválható $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$h(x^3 + 3x + 1) = x^3 - 2x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

majd számítsuk ki a $h'(-3)$ deriváltat!

3. Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$h^3(x) + 3h(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

majd számítsuk ki a $h'(0)$ deriváltat!

4. Az $y \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényről azt tudjuk, hogy $y \in \mathfrak{D}^2$, $y(1) = 1$ és

$$x^3 - 2x^2y^2(x) + 5x + y(x) = 5 \qquad (x \in \mathcal{D}_y).$$

Számítsuk ki az $y''(1)$ deriváltat!

5. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$, $f \in \mathfrak{D}[a]$. Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$e(x) := f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

érintőre fennáll a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - e(x)}{x - a} = 0$$

határérték-reláció!

6. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ (valódi) intervallum, $a \in I$, $f \in \mathfrak{C}[a]$ és f differenciálható az $I \backslash \{a\}$ halmazon. Igazoljuk, hogy ha

$$b := \lim_{x \to a} f'(x) \in \mathbb{R},$$

akkor $f \in \mathfrak{D}[a]$ és fennáll az

$$f'(a) = b$$

egyenlőség!

7. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $b \neq 0$. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{ex}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x)}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin(x)}{x^3}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x-\sin(x)}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$;

(h) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x)}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$;

(k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)-x-\frac{x^3}{6}}{x^5}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

(n) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0} (2^x-1)^{\sin(x)}$;

(p) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$;

(q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-x^3}$;

(r) $\lim\limits_{x\to 4} \exp\left(e^x-e^a\right)\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{8}\right)$;

(s) $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\sin(2\cdot\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$;

(t) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{\ln(x)}\right)$;

(u) $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{ctg}(x)\cdot \ln(x+1)$;

(v) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \left(\operatorname{tg}(x)\right)^{1/(\operatorname{arctg}(4x-\pi))}$;

(w) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2-x+\ln(x)}{5\ln(x)+x-4x^2}$;

(x) $\lim\limits_{x\to +0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right) \quad (a, b, c > 0)$;

(y) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x\ln(x)}\right)$;

(z) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{x^2}\right)$.

8. Van-e az f függvénynek aszimptotája a $(+\infty)$-ben, ill. a $(-\infty)$-ben?

(a) $f(x) := x\ln(|x|) \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := \sqrt{x^2-x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

9. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, és tegyük fel, hogy az $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható függvényekre

(i) $g^{(k)}(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b),\ k \in \{1, \dots, n\})$;

(ii) $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = \lim\limits_a f' = \lim\limits_a g' = \dots = \lim\limits_a f^{(n-1)} = \lim\limits_a g^{(n-1)} = 0$;

(iii) $A := \lim\limits_{a+0} \dfrac{f^{(n)}}{g^{(n)}} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Lássuk be, hogy ekkor

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$

Mindez igaz marad akkor is, ha az **(ii)**, **(iii)** feltételekben b baloldali határértékére cseréljük az a jobboldali határértékét. Ekkor

$$\lim_{b-0} \frac{f}{g} = \lim_{b-0} \frac{f^{(n)}}{g^{(n)}}$$

10. Ismeretes, hogy az **abszolút feket test** emisszióképességének frekvenciától és hőmérséklettől való függésére

$$E(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \qquad (\nu, T \in (0, +\infty)),$$

ill. (a $c = \lambda\nu$ helyettesítéssel) hullámhossztól és hőmérséklettől való függésére

$$E(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda Tk}\right) - 1} \qquad (\lambda, T \in (0, +\infty))$$

teljesül, ahol

c : a fény sebessége vákuumban,
ν : a sugárzás frekvenciája,
λ : a sugárzás hullámhossza,
k : a Boltzmann-állandó,
T : a sugárzó test abszolút hőmérséklete,
h : a Planck-állandó

(**Planck-féle sugárzási törvény**). Adott $T > 0$ hőmérséklet esetén írjuk fel azt az egyenletet, amelyet a Planck-féle sugárzási törvényben a ν frekvenciának ki kell elégítenie ahhoz, hogy az E emisszióképesség maximális legyen!

Útm.

1. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x} = \frac{x^2+x-(x+1)-1}{x^2+x} = \frac{x^2-2}{x^2+x} < 0$$

Következésképpen f szigorúan monoton fogyó. Tehát $\exists\, f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és $f(1) = 1 + \ln(2)$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'(1+\ln(2)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \left.\frac{x^2+x}{x^2-2}\right|_{x=1} = -2.$$

2. Legyen

$$f(x) := x^3 - 2x + 1, \quad g(x) := x^3 + 3x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

$$\lim_{\pm\infty} g = \pm\infty, \qquad g \in \mathfrak{D} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így $\mathcal{R}_g = \mathbb{R}$ és g szigorúan monoton, tehát invertálható, sőt $g^{-1} \in \mathfrak{D}$. Kovetkezésképpen a $h := f \circ g^{-1}$ függvény deriválható, és deriváltjára

$$h' = f' \circ g^{-1} \cdot \left(g^{-1}\right)' = \frac{f' \circ g^{-1}}{g' \circ g^{-1}}, \qquad \text{így} \qquad h'(-3) = \frac{f'(g^{-1}(-3))}{g'(g^{-1}(-3))} = \frac{f'(-1)}{g'(-1)} = \frac{1}{6}.$$

3. Mivel minden valós együtthatós, páratlan fokszámú polinomnak van gyöke, ezért létezok ilyen függvény. Sőt csak egy ilyen van, ui. ha h_1 és h_2 ilyen tulajdonságú, akkor

$$h_1^3(x) + 3h_1(x) = x \quad \text{és} \quad h_2^3(x) + 3h_2(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$h_1^3(x) - h_2^3(x) + 3(h_1(x) - h_2(x)) = (h_1(x) - h_2(x))(h^2(x) + h_1(x)h_2(x) + h_2^2(x) + 3) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami csak úgy lehetséges, hogy $h_1 = h_2$. Látható, hogy az $\mathbb{R} \ni x \mapsto h^3(x) + 3h(x)$ függvény differenciálható; így

$$h'(x) = \frac{1}{3(h^2(x) + 1)} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan $h'(0) = \dfrac{1}{3}$ következik.

4. Mivel

$$3x^2 - 4xy^2(x) - 4x^2y(x)y'(x) + 5 + y'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

és

$$6x - 4y^2(x) - 8xy(x)y'(x) - 8xy(x)y'(x) - 4x^2(y'(x))^2 - 4x^2y(x)y''(x) + y''(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_y),$$

ezért

$$y'(1) = \frac{4}{3}, \qquad \text{ill.} \qquad y''(1) = \frac{16 \cdot 8 - 18}{-27}.$$

Megjegyezzük, hogy fentebb a Leibniz-szabály $(fhg)' = f'gh + fg'h + fgh'$ speciális esetét használtuk.

5. Mivel

$$\lim_{x \to a}(f(x) - e(x)) = 0 = \lim_{x \to a}(\lim_{x \to a})$$

és

$$\frac{f(x) - e(x)}{x - a} \sim \frac{f'(x) - e'(x)}{1} = f'(x) - f'(a) \longrightarrow 0 \qquad (x \to a),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazsával a kívánt állítást kapjuk.

6. Az f függvény a-beli folytonosságának következtében

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0.$$

Ha

$$F, G : I \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := f(x) - f(a), \quad G(x) := x - a$$

akkor F deriválható az $I \backslash \{a\}$ halmazon, G deriválható I, és bármely $x \in I$ esetén $G'(x) = 1 \neq 0$, továbbá

$$\lim_{x \to a} F(x) = 0 = \lim_{x \to a} G(x).$$

Mivel

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = f'(x) \qquad (a \neq x \in I),$$

ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to a} f'(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Következésképpen

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b \in \mathbb{R}.$$

7. (a) Ha
$$f(x) := \sqrt{1+3x^2}-1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$
Mivel
$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3}{2\sqrt{1+3x^2}} \longrightarrow \frac{3}{2} \qquad (x \to 0),$$
ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

(b) Ha
$$f(x) := \sin(\pi x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := ex \quad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$
Mivel
$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\pi\cos(\pi x)}{e} \longrightarrow \frac{\pi}{e} \qquad (x \to 0),$$
ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{ex} = \frac{\pi}{e}.$$

(c) Ha
$$f(x) := x-1 \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := \ln(x) \quad (< x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x).$$
Mivel
$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \longrightarrow 1 \qquad (x \to 1),$$
ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1.$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $1 \neq x \in (0, +\infty)$ esetén
$$\frac{x-1}{\ln(x)} = \frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}} = \frac{1}{\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}} \longrightarrow \frac{1}{\ln'(1)} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (x \to 1).$$

(d) Ha
$$f(x) := 1-\cos(ax) \quad (0 < x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := 1-\cos(bx) \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1-1 = 0 = 1-1 = \lim_{x\to 1} g(x).$$
Mivel
$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a\sin(ax)}{b\sin(bx)}$$
és
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} a\sin(ax) = 0 = \lim_{x\to 0} b\sin(bx) = \lim_{x\to 0} g'(x),$$

ezért

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \sim \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{a^2\cos(ax)}{b^2\cos(bx)} \longrightarrow \frac{a^2}{b^2} \qquad (x \to 0),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{a\sin(ax)}{b\sin(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos(ax)}{b^2\cos(bx)} \longrightarrow \frac{a^2}{b^2}.$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$: $\cos(bx) \neq 0$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)} &= \frac{1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(ax)^{2n}}{(2n)!}}{1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(bx)^{2n}}{(2n)!}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(ax)^{2n}}{(2n)!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(bx)^{2n}}{(2n)!}} = \\ &= \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(ax)^{2n-2}}{(2n)!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(bx)^{2n-2}}{(2n)!}} = \frac{\frac{a^2}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}(x)^{2n-2}}{(2n)!}}{\frac{b^2}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{b^{2n}(x)^{2n-2}}{(2n)!}} \longrightarrow \frac{\frac{a^2}{2}+0}{\frac{b^2}{2}+0} = \frac{a^2}{b^2} \qquad (x \to 0).\end{aligned}$$

(e) coming soon

(f) coming soon

(g) coming soon

(h) coming soon

(i) coming soon

(j) coming soon

(k) coming soon

(l) coming soon

(m) coming soon

(n) coming soon

(o) coming soon

(p) coming soon

(q) coming soon

(r) coming soon

(s) coming soon

(t) coming soon

(u) coming soon

(v) coming soon

(w) coming soon

(x) coming soon

(y) Ha

$$f(x) := x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad g(x) := x\ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{1+\ln(x)} \longrightarrow 1 \qquad (x \to 1),$$

ezért a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\ln(x)}=1.$$

(z) Ha

$$f(x):=e^x-\frac{1}{1-x}\quad (x\in(-1,1)),\qquad \text{ill.}\qquad g(x):=x^2\quad (x\in\mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=\lim_{x\to 0}g(x).$$

Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)}\sim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^x-\frac{1}{(1-x)^2}}{2x}\sim\frac{e^x-\frac{2}{(1-x)^3}}{2}\longrightarrow-\frac{1}{2}\qquad (x\to 0).$$

Így a Bernoulli-l'Hospital-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{(1-x)^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{2}{(1-x)^3}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

8. Teljes indukcióval bizonyítunk.

- Az $n:=1$ esetben az állítás nem más, mint a Bernoulli-l'Hospital-szabály egyik alesete.
- Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén a feltételeket teljesítő f, ill. g függvényre, majd legyen f és g $(n+1)$-szer differenciálható az (a,b) intervallumon, $g^{(n+1)}(x)\neq 0$ $(x\in(a,b))$, továbbá

$$\lim_a f^{(k)}=0=\lim_a g^{(k)}\quad (k\in\{0,\ldots,n\})\qquad \text{és}\qquad \lim_{a+0}\frac{f^{(n+1)}}{g^{(n+1)}}\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor az indukcs feltevést az f' és g' függvényre alkalmasva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{a+0}\frac{f'}{g'}=A,\qquad \text{ahonnan (BL)}\qquad \lim_{a+0}\frac{f}{g}=A\qquad \text{következik.}$$

9. Ha rögzített $T>0$ esetén az

$$u(\nu):=E(\nu,T)\qquad (\nu\in(0,+\infty))$$

függvénynek maximuma van, akkor

$$\begin{aligned}0&=u'(\nu)=\frac{24\pi h\nu^2}{c^3}\cdot\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}+\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{-1}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right)^2}\cdot\frac{h\nu}{kT}\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)=\\&=\frac{8\pi h}{c^3}\cdot\nu^2\cdot\frac{1}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right)^2}\cdot\left\{3\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right)-\frac{h\nu}{kT}\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)\right\}\end{aligned}$$

teljesül. Mivel u pozitív értékű, és a Bernoulli-L'Hospital-szabály segítségével könnyen belátható, hogy

$$\lim_{\nu\to 0}u(\nu)=0=\lim_{\nu\to\infty}u(\nu),$$

ezért az $x:=\dfrac{h\nu}{kT}$ jelöléssel a maximumhelyre

$$3(e^x-1)=xe^x,\qquad \text{azaz}\qquad x=3(1-e^{-x})$$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy a fenti transzcendens egyenlet gyökére pl. a MAPLE© programcsomga felhasználásával igen jó közelítést kaphatunk:

$$x_{max} = \frac{h\nu_{max}}{kT} \approx 2.82.$$[7]

Adott T hőmérsékleten az u függvény maximuma a

$$\nu_{max} = \frac{kT}{h} x_{max}$$

frekvenciánál van. Ebből látszik, hogy a maximumhely a hőmérséklet növekedésével arányosan növekszik, tehát a növekvő frekvencia felé tolódik el (**Wien-féle eltolódási törvény**). ■

[7] A "solve$(x = 3 * (1 - \exp(-x)), x)$; > evalf(%);" parancssor eredménye: $2.821439372, 0$.

1.8. 8. oktatási hét (2020.10.04.)

Szükséges előismeretek.

1. Definiálja a *periodikus* függvényt!
Válasz: Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény periodikus, ha alkalmas $0 < p \in \mathbb{R}$ számmal tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ elemre

$$x \pm p \in \mathcal{D}_f \qquad \text{és} \qquad f(x+p) = f(x)$$

teljesül.

2. Definiálja a π számot!
Válasz: π-vel jelöljük azt a valós számot, amelyre

$$0 < \pi < 4 \qquad \text{és} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

teljesül.

3. Mit tud mondani a sin és a cos függvények periodicitásáról?

Válasz: A sin, cos függvények 2π-szerint periodikusak, továbbá 2π a legkisebb periódusa ezeknek a függvényeknek.

4. Értelmezze az arkuszszinusz függvényt!
Válasz: A szinusz függvénynek a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, inverze az arkuszszinuszfüggvény:

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

5. Értelmezze az arkuszkoszinusz függvényt!
Válasz: A koszinusz függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, inverze az arkuszkoszinuszfüggvény:

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi].$$

6. Értelmezze az arkusztangens függvényt!
Válasz: A tangensfüggvénynek a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, inverze az arkusztangensfüggvény:

$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Értelmezze az arkuszkotangens függvényt!
Válasz: A kotangensfüggvénynek a $(0,\pi)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, inverze az arkuszkotangensfüggvény:

$$\operatorname{arcctg} := \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi).$$

8. Értelmezze az areaszinuszhiperbolikusz függvényt!
Válasz: Az $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szinuszhiperbolikusz függvény szigorúan monoton növő, inverze az

$$\operatorname{arsh} := \operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

areaszinuszhiperbolikusz függvény.

9. Értelmezze az areakoszinuszhiperbolikusz függvényt!
Válasz: A koszinuszhiperbolikusz függvénynek a $[0,+\infty)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, inverze az areakoszinuszhiperbolikusz függvény:

$$\mathrm{arch} := \left(\mathrm{ch}|_{[0,+\infty)}\right)^{-1} : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty).$$

10. Értelmezze az aretangenshiperbolikusz függvényt!
Válasz: A $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to (-1,1)$ függvény szigorúan monoton növő, inverze az

$$\mathrm{arth} := \mathrm{th}^{-1} : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

aretangenshiperbolikusz függvény.

11. Értelmezze az areakotangenshiperbolikusz függvényt!
Válasz: A $\mathrm{cth} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ kotangenshiperbolikusz függvénynek mind a $(-\infty,0)$, mind pedig a $(0,+\infty)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, inverze az

$$\mathrm{arcth} := \mathrm{cth}^{-1} : (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

areakotangenshiperbolikusz függvény.

Az óra anyaga.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!

$$\log_{1/4}\left(\frac{1}{1024}\right), \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arcsin(\sin(10)), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \mathrm{arctg}(1), \quad \mathrm{arctg}(\sqrt{3}).$$

Útm.

- Ha $1 \neq a \in (0,+\infty)$, $x \in (0,+\infty)$ és $y \in \mathbb{R}$, akkor

$$\log_a(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exp_a(y) = a^y = x,$$

ezért

$$\log_{1/4}\left(\frac{1}{1024}\right) = y \in \mathbb{R} \iff \left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{1}{1024} \iff \left(\frac{1}{2^2}\right)^y = \frac{1}{2^{10}} \iff$$

$$\iff \frac{1}{2^{2y}} = \frac{1}{2^{10}} \iff 2y = 10 \iff y = 5.$$

így

$$\log_{1/4}\left(\frac{1}{1024}\right) = 5.$$

- Világos, hogy ha $x \in [-1,1]$ és $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor

$$\arcsin(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(y) = x,$$

ezért

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(y) = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{\pi}{6},$$

ahonnan

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

következik.

- A fenti gondolatmenetet követve azt kapjuk, hogy

$$\arcsin\left(\sin(10)\right) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(y) = \sin(10),$$

így

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in \{\beta + 2k\pi \in \mathbb{R} :\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \beta + 2l\pi \in \mathbb{R} :\ l \in \mathbb{Z}\}.$$

következtében

$$y = 10 + 2k\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{vagy} \qquad y = (2l+1)\pi - 10 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (l = 1).$$

Ennélfogva

$$\arcsin\left(\sin(10)\right) = 3\pi - 10.$$

- Világos, hogy ha $x \in [-1,1]$ és $y \in [0, \pi]$, akkor

$$\arccos(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(y) = x,$$

ezért

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \in [0, \pi] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{3\pi}{4},$$

ahonnan

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

következik.

- Jól látható, hogy ha $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor

  $$\mathrm{arctg}(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{tg}(y) = x,$$

  ezért

  $$\mathrm{arctg}\,(1) = y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{tg}(y) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{\pi}{4},$$

  ahonnan

  $$\mathrm{arctg}\,(1) = \frac{\pi}{4}$$

  következik.

- A fentiekhez hasonlóan, ha $x \in \mathbb{R}$ és $y \in (0, \pi)$, akkor

  $$\mathrm{arcctg}(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{ctg}(y) = x,$$

  ezért

  $$\mathrm{arcctg}(\sqrt{3}) = y \in (0, \pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{ctg}(y) = \sqrt{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{\pi}{6},$$

  ahonnan

  $$\mathrm{arcctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$$

  következik. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $x \in [-1, 1]$ esetén fennáll az

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

egyenlőség!

Útm. Legyen

$$\varphi(x) := \arcsin(x) + \arccos(x) - \frac{\pi}{2} \qquad (x \in [-1, 1]).$$

Ekkor

$$\varphi(-1) = \arcsin\,(-1) + \arccos(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = 0$$

és

$$\varphi(1) = \arcsin\,(1) + \arccos(1) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Mivel $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = 0 \qquad (x \in (-1, 1)),$$

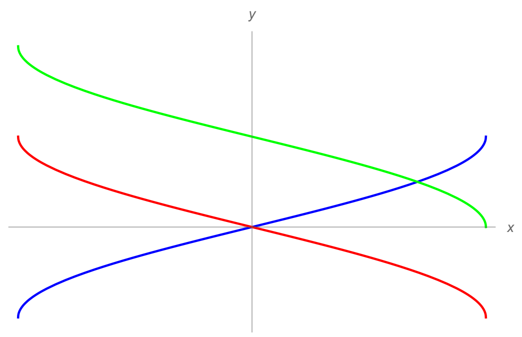
ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$, illetve tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén $\varphi(x) = c$. Következésképpen

$$c = \varphi(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) - \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

ahonnan az állítás nyílvánvaló. **Megjegyezzük**, hogy a feladatbeli állításból az arcsin és az arccos függvények grafikonja közötti

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \qquad (x \in [-1,1])$$

állítás következik: az arccos függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az arcsin függvény grafikonjából, hogy azt tükrözzük az x-tengelyre, majd az y-tengely irányában felfelé toljuk $\frac{\pi}{2}$-vel. ■



1.8. ábra. Az arcsin, a $-$arcsin és az arccos függvények grafikonjai.

Feladat. Vázoljuk az

$$f(x) := \arcsin(\sin(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját! **Útm.** Mivel a sin, következésképpen az f függvény 2π szerint periodikus, ezért f-et elegendő megvizsgálni valamely 2π hosszúságú intervallumon, például a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon. Az arcsin függvény értelmezéséből következik, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\arcsin(\sin(x)) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(x) = \sin(y).$$

Ha tehát

- $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor a $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ függvény szigorú monotonitása miatt

  $$\sin(x) = \sin(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

  ahonnan

  $$f(x) = x \qquad \left(x, \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

következik.

- $x, y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, akkor

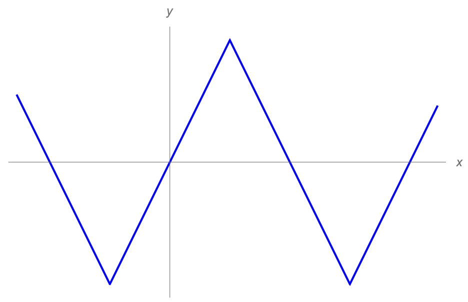
$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2},$$

így

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) = \sin(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi - x = y.$$

Következésképpen

$$f(x) = \pi - x \qquad \left(x, \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right). \quad \blacksquare$$



1.9. ábra. Az $\arcsin(\sin)$ grafikonjának egy részlete.

Megjegyzés. Valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény vizsgálatakor az alábbi lépéseket célszerű végigmenni.

1. lépés (kezdeti vizsgálatok). Deriválhatóság, paritás, periodikusság, előjelviszonyok megállapítása.

2. lépés (határérték, aszimptota). A $\mathcal{D}_f' \backslash \mathcal{D}_f$ halmaz pontjaiban, valamint nem-korlátos $\mathcal{D}_f$ esetén $(\pm\infty)$-ben kiszámítjuk f határértékét, illetve meghatározzuk aszimptotáját.

3. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Megkeressük f stacionárius helyeit, valamint azokat az intervallumokat, ahol f szigorúan monoton, majd azonosítjuk f lokális szélsőértékhelyeit, ill. szélsőértékeit.

4. lépés (görbület, inflexió). Megkeressük f' stacionárius helyeit, valamint azokat az intervallumokat, ahol f szigorúan konvex vagy konkáv, majd azonosítjuk f inflexiós pontjait.

5. lépés (grafikon). Vázoljuk f grafikonját.

Feladat. Végezzük el az alábbi függvények teljes vizsgálatát!

1. $f(x) := \mathcal{G}(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R});$[8]

2. $f(x) := \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 2x + 1} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R});$

3. $f(x) := x + \ln(x^2 - 4x) \qquad (x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty));$

4. $f(x) := 2^{-x} \sin(\pi x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$. Mivel

$$f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért f páros. Sőt, az is igaz, hogy tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) > 0$.

2. lépés (határérték, aszimptota). Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{\pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Következésképpen a

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

3. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

4. lépés (görbület, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

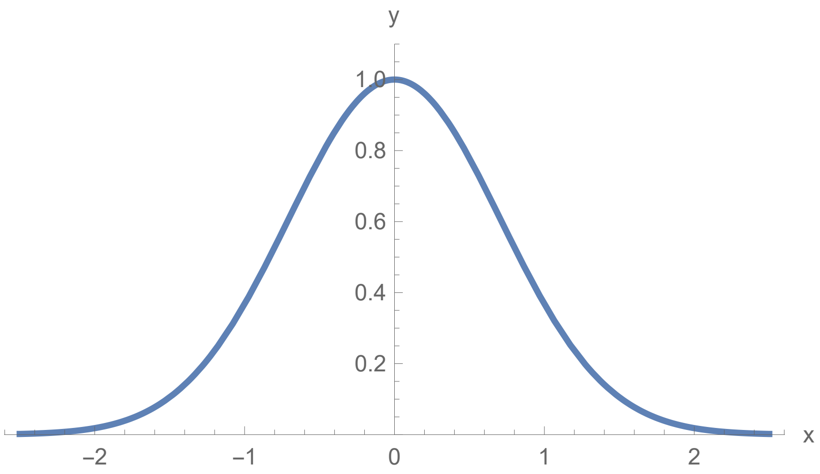
$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért

[8] Ezt a függvény Carl Friedrich Gauß $(1777 - 1855)$ német matematikus, természettudós, csillagászról nevéhez fűződik, akit munkásságának elismeréseként „a matematika fejedelme” névvel illetnek. Grafikonját szokás **Gauß-görbé**nek vagy alakja alapján **haranggörbé**nek is nevezni.

	$(-\infty, -\sqrt{2}/2)$	$-\sqrt{2}/2$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2, +\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	inflexió	$\frown$	inflexió	$\smile$

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 1.10. ábra szemlélteti.



1.10. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \to e^{-x^2}$ függvény grafikonja.

2. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$, továbbá

$$f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \{-2; 0\},$$

így

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$

2. lépés (határérték, aszimptota). Mivel f racionális függvény, így az előző lépést (is) figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{-1\pm 0} f = +\infty.$$

Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \longrightarrow 1 \qquad (x \to \pm\infty),$$

továbbá

$$f(x) - x = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2} - x = \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-x}{x^2 + 2x + 1} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \pm\infty),$$

ezért a

$$\varphi(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek mind a $(-\infty)$-ben, mind pedig a $(+\infty)$-ben.

3. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+2x^2)}{(x+1)^4} = \frac{(3x^2+4x)(x+1) - 2(x^3+2x^2)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{x^3+3x^2+4x}{(x+1)^3} = \frac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3}$$

és

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0,$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

4. lépés (görbület, inflexió). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{(3x^2+6x+4)\cdot(x+1)^3 - (x^3+3x^2+4x)\cdot 3\cdot(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{(3x^2+6x+4)\cdot(x+1) - 3(x^3+3x^2+4x)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{3x^3+6x^2+4x+3x^2+6x+4-3(x^3+3x^2+4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+4}{(x+1)^4} = \frac{2(2-x)}{(x+1)^4}$$

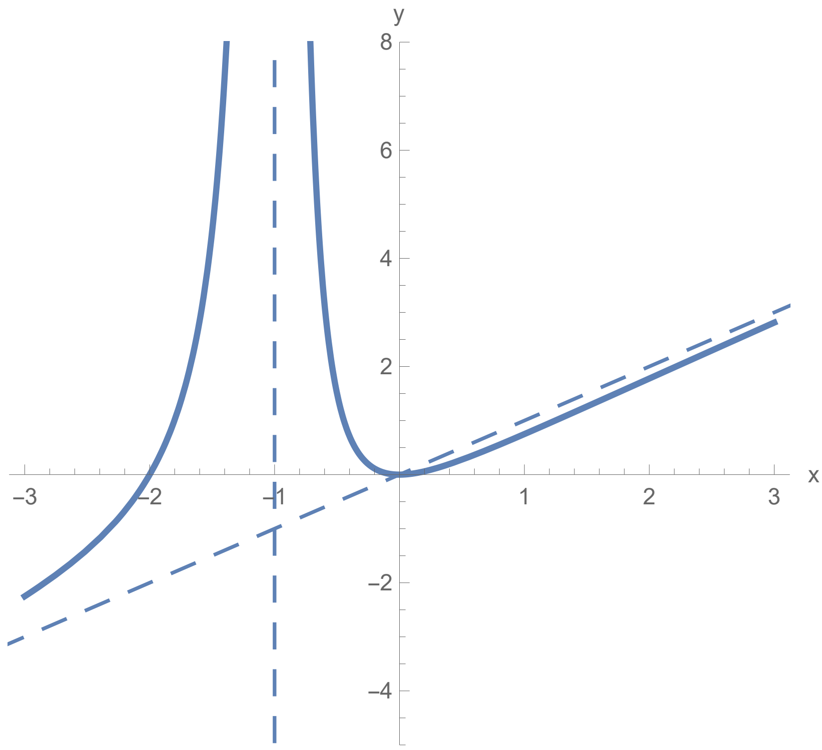
és

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2,$$

ezért

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f''	$+$	$+$	0	$-$
f	$\smile$	$\smile$	inflexió	$\frown$

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 1.11. ábra szemlélteti.



1.11. ábra. Az $\mathbb{R}\setminus\{-1\} \ni x \longrightarrow \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1}$ függvény grafikonja.

3. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^{\infty}$, továbbá igaz az

$$x \in (4, +\infty) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > 0$$

implikáció.

2. lépés (határérték, aszimptota). Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{0-0} f = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{4+0} f = -\infty,$$

továbbá $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, illetve $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, ui. egyrészt $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln(x) = -\infty$, másrészt pedig

$$\exp\left(x + \ln(x^2 - 4x)\right) = e^x \cdot (x^2 - 4x) = x^2 \cdot e^x - 4 \cdot x \cdot e^x \longrightarrow 0 - 0 = 0 \qquad (x \to -\infty),$$

hiszen a Bernoulli-l'Hospital-szabályt felhasználva tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$x^k \cdot e^x = \frac{x^k}{e^{-x}} \sim \frac{kx^{k-1}}{-e^{-x}} \sim \frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^{-x}} \sim \frac{k!}{(-1)^k e^{-x}} = \frac{k!}{(-1)^k} \cdot e^x \longrightarrow 0 \qquad (x \to -\infty)$$

adódik. Mivel

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\ln(x^2-4x)}{x} \longrightarrow 1+0=1 \qquad (x \to +\infty)$$

hiszen a Bernoulli-l'Hospital-szabályt használva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\ln(x^2-4x)}{x} \sim \frac{2x-4}{x^2-4x} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty),$$

továbbá

$$f(x) - x = \ln(x^2-4x) \longrightarrow +\infty \qquad (x \to +\infty),$$

ezért f-nek nincsen aszimptotája sem a $(+\infty)$-ben, sem pedig a $(-\infty)$-ben.

3. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-4}{x^2-4x} = \frac{x^2-2x-4}{x^2-4x} = \frac{(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})}{x^2-4x}$$

és

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1-\sqrt{5}$$

hiszen

$$1-\sqrt{5} < 1-\sqrt{4} = -1 < 0 < 1+\sqrt{5} < 1+\sqrt{9} = 4$$

következtében $1+\sqrt{5} \notin \mathcal{D}_f$, ezért

	$(-\infty, 1-\sqrt{5})$	$1-\sqrt{5}$	$(1-\sqrt{5}, 0)$	$(4, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$+$
f	$\uparrow$	lok max.	$\downarrow$	$\uparrow$

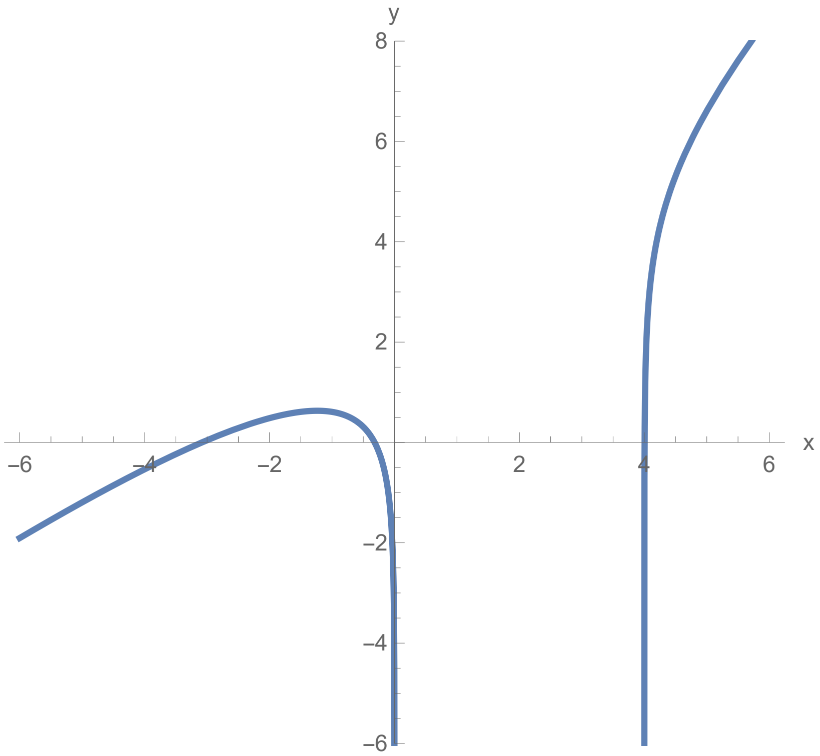
4. lépés (görbület, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-2)(x^2-4x)-(x^2-2x-4)(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = \\ &= \frac{2x^3-8x^2-2x^2+8x-2x^3+4x^2+4x^2-8x+8x-16}{(x^2-4x)^2} = \\ &= (-2)\cdot\frac{x^2-4x+8}{(x^2-4x)^2} = (-2)\cdot\frac{(x-2)^2+4}{(x^2-4x)^2} < 0, \end{aligned}$$

ezért

	$(-\infty, 0)$	$(4, +\infty)$
f''	$-$	$-$
f	$\frown$	$\frown$

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 1.15. ábra szemlélteti.



1.12. ábra. Az $(x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)) \ni x \to x + \ln(x^2 - 4x)$ függvény grafikonja.

4. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $2^{-x} \neq 0$, ezért

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\pi x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi x \in \{k\pi \in \mathbb{R} : \; k \in \mathbb{Z}\} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{Z}.$$

2. lépés (határérték, aszimptota). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$|f(x)| \leq 2^{-x} \longrightarrow 0 \qquad (x \to +\infty),$$

ezért $\lim_{+\infty} f = 0$, következésképpen a

$$\varphi(x) := 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

lineáris függvény aszimptotája f-nek a $(+\infty)$-ben. Mivel

$$\lim_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x 2^{x}} = -\infty,$$

ill.

$$\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=(-1)^k \qquad (k\in\mathbb{Z}),$$

ezéert f nek a $(-\infty)$-ben sem határértéke, sem pedig aszimptotája nincsen.

3. és lépés 4. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték, és görbület, inflexió). Bármely $x\in\mathcal{D}_f$ esetén $2^{-x}>0$ és

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2^{-x}(-\ln(2))\sin(\pi x)+2^{-x}\pi\cos(\pi x)=2^{-x}\{-\ln(2)\sin(\pi x)+\pi\cos(\pi x)\},\\
f''(x) &= =2^{-x}(-\ln(2))\{-\ln(2)\sin(\pi x)+\pi\cos(\pi x)\}\\
&\quad +2^{-x}\left\{-\ln(2)\pi\cos(\pi x)-\pi^2\sin(\pi x)\right\}=\\
&= 2^{-x}\left\{\left(\ln^2(2)-\pi^2\right)\sin(\pi x)-2\pi\ln(2)\cos(\pi x)\right\},
\end{aligned}$$

ezért a

$$g(x):=-a\sin(\pi x)+b\cos(\pi x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény előjelviszonyait fogjuk vizsgálni, ahol $a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Legyen

$$H:=\left\{k+\frac{1}{2}\in\mathbb{R}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Ekkor bármely $x\in H$ esetén $g(x)\neq 0$, hiszen

$$g\left(k+\frac{1}{2}\right)=-a(-1)^k\neq 0.$$

Világos, hogy

$$g(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad b\cos(\pi x)=a\sin(\pi x) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{b}{a}=\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}=\operatorname{tg}(\pi x) \quad (x\in\mathbb{R}\backslash H),$$

továbbá adott $k\in\mathbb{Z}$ esetén

$$x\in\left(k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad x-k\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \pi(x-k)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

és a tangensfüggvény periodicitása miatt $\operatorname{tg}(\pi x)=\operatorname{tg}(\pi(x-k))$. Mivel

$$\operatorname{arctg}:=\left(\operatorname{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\pi x)=\frac{b}{a} \quad&\Longleftrightarrow\quad \exists k\in\mathbb{Z}:\quad \pi(x-k)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\ \wedge\ \operatorname{tg}(\pi(x-k))=\frac{b}{a} \qquad\Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow\quad \exists k\in\mathbb{Z}:\quad \pi(x-k)=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad\Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow\quad \exists k\in\mathbb{Z}:\quad x-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)=k \qquad\Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow\quad x-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

A

$$c:=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

jelölés bevezetésével így azt kapjuk, hogy

- $a:=-\ln(2)>0$ és $b:=\pi>0$ esetén

$$0<c<\frac{1}{2}.$$

  Mivel

$$g(0)=b=\pi>0 \qquad \text{és} \qquad 0\in(-1+c.c).$$

  így a koszinuszfüggvény és a szinuszfüggvény periodukussága következtében

$$g(x)\begin{cases} >0 & (x\in(k+c,k+1+c),\ k\in\mathbb{Z}:\ k\equiv 1\,(2)),\\ \\ <0 & (x\in(k+c,k+1+c),\ k\in\mathbb{Z}:\ k\equiv 0\,(2)).\end{cases}$$

- $a:=\pi^2-\ln^2(2)>\pi^2-2^2>0$ és $b:=-2\pi\ln(2)<0$ esetén $-\frac{1}{2}<c<0$. Mivel

$$g(0)=b<0 \qquad \text{és} \qquad 0\in(c,1+c),$$

  ezért

$$g(x)\begin{cases} <0 & (x\in(k+c,k+1+c),\ k\in\mathbb{Z}:\ k\equiv 0\,(2)),\\ \\ >0 & (x\in(k+c,k+1+c),\ k\in\mathbb{Z}:\ k\equiv 1\,(2)).\end{cases}$$

Következésképpen az f függvény

(a) szigorúan monoton növő a

$$\left[2k+1+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right), 2k+2+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

intervallumokon;

(b) szigorúan monoton fogyó a

$$\left[2k\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right), 2k+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

intervallumokon;

(c) konvex az

$$I_k := \left[2k+1+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\pi\ln(2)}{\pi^2-\ln^2(2)}\right), 2k+2+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\pi\ln(2)}{\pi^2-\ln^2(2)}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

intervallumokon;

(d) konkáv a

$$J_k \left[2k+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\pi\ln(2)}{\pi^2-\ln^2(2)}\right), 2k+1+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\pi\ln(2)}{\pi^2-\ln^2(2)}\right)\right] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

intervallumokon,

továbbá f-nek

(a) lokális maximuma van a

$$2k+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

pontokban;

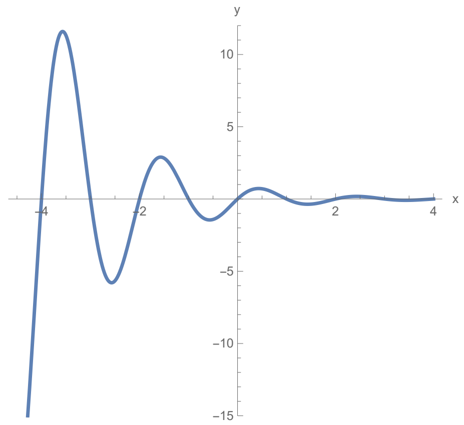
(b) lokális minimuma van a

$$2k+1+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

pontokban;

(c) inflexiója van az I_k, ill. J_k intervallumok határpontjaiban $(k \in \mathbb{Z})$.

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 1.13. ábra szemlélteti.



1.13. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \to 2^{-x}\sin(\pi x)$ függvény grafikonja.

Házi feladatok.

1. Igazoljuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arcctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

egyenlőség! Milyen kapcsolat van az arctg és az arcctg függvények grafikonjai között?

2. Lássuk be, hogy tetszőleges $x \in (-1, 1)$ esetén fennáll az

$$\arcsin(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

3. Iigazoljuk, hogy bármely $x \in (0, 2)$ esetén fennáll a $\sin(x) > 0$ egyenlőtlenség!

4. Végezzük el az alábbi függvények teljes vizsgálatát!

   (a) $f := \mathcal{S} := -\mathcal{G}''$;[9]

   (b) $f(x) := \dfrac{x^4}{x^2 - 2x} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\})$;

   (c) $f(x) := \dfrac{x^4}{|x| \cdot (x^2 - 1)} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0; 1\})$;

   (d) $f(x) := \dfrac{(x-1)^2}{x^2} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$;

   (e) $f(x) := \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\})$.

[9] Ez az ún. Sombrero-függvény, amelyet az angol nyelvű szakirodalomban gyakran a „mexican hat wavelet”, „Ricker wavelet” vagy normálás erejéig második „Hermite-függvény” névvel illetnek. Felhasználása széleskörű: szükség van rá pl. a geofizikában, csillagászatban, informatikában (vö. képfeldolgozás), de a mérnöktudományok területén is nagy jelentőséggel bír.

Útm.

1. Legyen
$$\varphi(x) := \mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arcctg}(x) - \frac{\pi}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Ekkor $\varphi \in \mathcal{D}$ és
$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = 0,$$
ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$, illetve tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(x) = c$. Következésképpen
$$c = \varphi(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) - \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$
ahonnan az állítás már következik. A feladatbeli állításból az arctg és az arcctg függvények grafikonja közötti
$$\mathrm{arcctg}(x) - \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
állítás következik: az arcctg függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az arctg függvény grafikonjából, hogy azt tükrözzük az x-tengelyre, majd az y-tengely irányában felfelé toljuk $\frac{\pi}{2}$-vel.

2. Legyen
$$\varphi(x) := \arcsin(x) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad (x \in (-1,1)).$$
Ekkor $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$ és
$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (1-x^2) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,\end{aligned}$$
ezért alkalmas $c \in \mathbb{R}$, illetve tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén $\varphi(x) = c$. Következésképpen
$$c = \varphi(0) = \arcsin(x) - \mathrm{arctg}\,(0) = 0 + 0 = 0,$$
ahonnan az állítás már következik.

3. Ha $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, akkor $(-1)^n(2n+1) = 1, -3, 5, , -7, \ldots$, így bármely $x \in (0,2)$ esetén
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\right)}_{1-\frac{2^2}{(4\cdot 0+2)(4\cdot 0+3)}=\frac{1}{3}>0} > 0.$$

4. (a) coming soon
   (b) coming soon
   (c) coming soon
   (d) coming soon
   (e) coming soon

Gyakorló feladatok.

1.

2.

3.

4.

5.

1.9. 9. oktatási hét (2020.11.04.)

Szükséges előismeretek.

1. Fogalmazza meg a *Rolle-tételt*!

   Válasz: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, továbbá $f(a) = f(b)$ teljesül. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén $f'(\xi) = 0$.

2. Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt*!

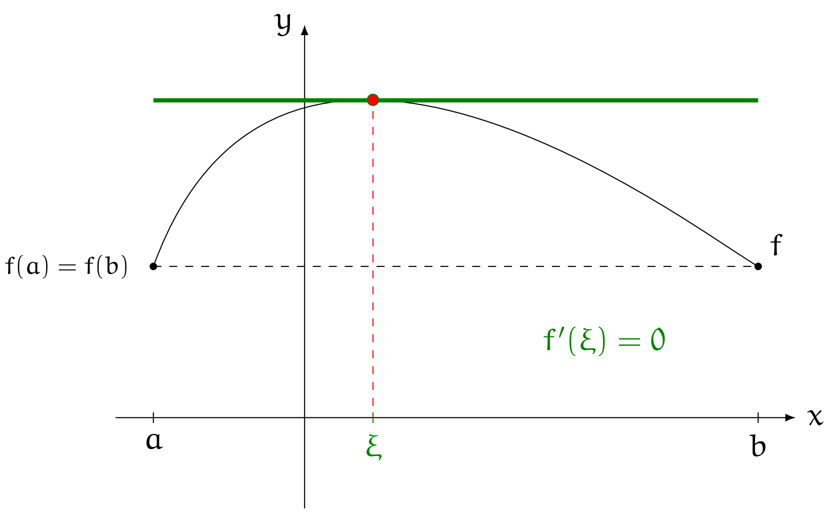
   Válasz: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$ teljesül. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. Hogy szól a *Cauchy-féle középértéktétel* és milyen sepeciális esetei ismertek?

   Válasz: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekrere $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, $[a, b] \subset \mathcal{D}_g$, $f, g \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$ teljesül. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén fennáll az
   $$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi).$$
   egyenlőség. Ha tetszőleges $x \in [a, b]$ esetén $g(x) = x$, akkor a Lagrange-féle középértéktételt kapjuk, ha pedig ezen felül még $f(a) = f(b)$ is teljesül, akkor pedig a Rolle-tételhez jutunk.

Az óra anyaga.

Emlékeztető (Rolle-tétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, továbbá $f(a) = f(b)$ teljesül. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén $f'(\xi) = 0$.



Feladat. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x & (-16 \leq x \leq 2), \\ \\ -x^2 + 6x - 6 & (2 < x \leq 8) \end{cases}$$

1. Teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei a $[-6, 6]$ intervallumon?

2. Van-e zérushelye f'-nek a $(-6, 6)$ intervallumon?

Útm.

1. Mivel

$$\lim_{x \to 2-0} f'(x) = \lim_{x \to 2-0} 1 = 1 \neq 2 = \lim_{x \to 2+0} (-2x + 6) = \lim_{x \to 2+0} f'(x),$$

ezért $f \notin \mathfrak{D}[-2]$, következésképpem a $[-6, 6]$ intervallumon nem teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.

2. Világos, hogy $f'(3) = 0$ és $3 \in (-6, 6)$. ■

Feladat. Tegyük fel, hogy a folytonos $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható a $[-1, 1]$ intervallumon, kétszer differenciálható a $(-1, 1)$ intervallumon, továbbá fennáll az

$$f(-1) = f(1) \qquad \text{és az} \qquad f'(-1) = 0 = f'(1)$$

egyenlőség. Igazoljuk, hogy ekkor van olyam $\xi, \eta \in (-1, 1)$, amelyekre $\xi \neq \eta$ és

$$f''(\xi) = 0 = f''(\eta)$$

teljesül!
Útm. Mivel

$$f \in \mathfrak{C}[-1, 1] \cap \mathfrak{D}(-1, 1) \qquad \text{és} \qquad f(1) = f(-1),$$

ezért a Rolle-tétel értelmében alkalmas $c \in (-1, 1)$ esetén $f'(c) = 0$. A fentiek következtében az $f' : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ deriváltfüggvény is eleget tesz a Rolle-tétel feltételeinek a $[-1, c]$ és a $[c, 1]$ intervallumokon, következésképpen van olyan $\xi \in (-1, c)$ és $\eta \in (c, 1)$, amelyekre $f''(\xi) = 0 = f''(\eta)$ teljesül. ■

Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig polinom. Igazoljuk, hogy ha az $a \in \mathbb{R}$ a p polinomnak n-szeres zérushelye, akkor p'-nek $(n - 1)$-szeres zérushelye!
Útm.

1. lépés. Legyen $n = 1$. Ekkor alkalmas $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomra

$$p(x) = (x - a)q(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad q(a) \neq 0.$$

Mivel

$$p'(x) = q(x) + (x-a)q'(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért $p'(a) \neq 0$.

2. lépés. Ha $1 < n \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom, amelyre

$$p(x) = (x-a)^n q(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad q(a) \neq 0.$$

Így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{p'(x)} = n(x-a)^{n-1}q(x) + (x-a)^n q'(x) = (x-a)^{n-1}\{nq(x) + (x-a)q'(x)\} =:$$

$$=: \boxed{(x-a)^{n-1}r(x)}$$

és

$$\boxed{r(a) \neq 0}.$$

Következésképpen az a szám p'-nek $(n-1)$-szeres gyöke. ■

Feladat. Legyen $1 \neq a, b, c \in (0, +\infty)$. Lehet-e az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := a^x + b^x + c^x - 3$$

függvénynek három különböző zérushelye?
Útm. Világos, hogy a 0 zérushelye f-nek:

$$f(0) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0.$$

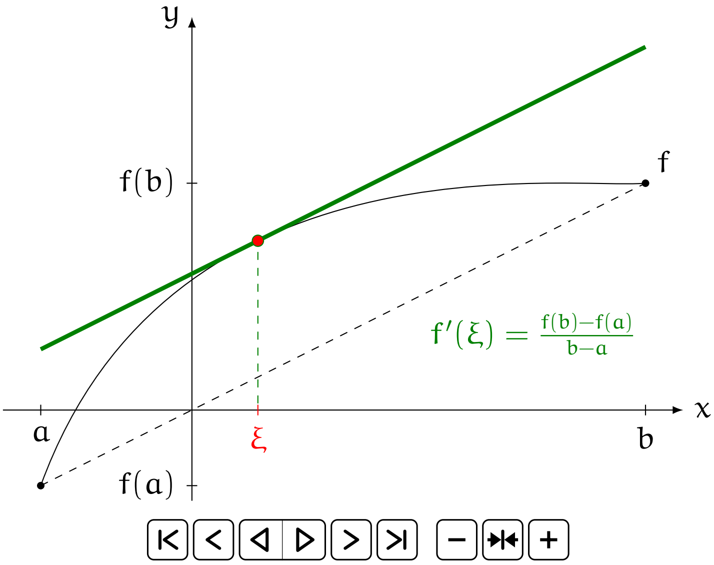
Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = a^x \ln(a) + b^x \ln(b) + c^x \ln(c) \qquad \text{és} \qquad f''(x) = a^x \ln^2(a) + b^x \ln^2(b) + c^x \ln^2(c),$$

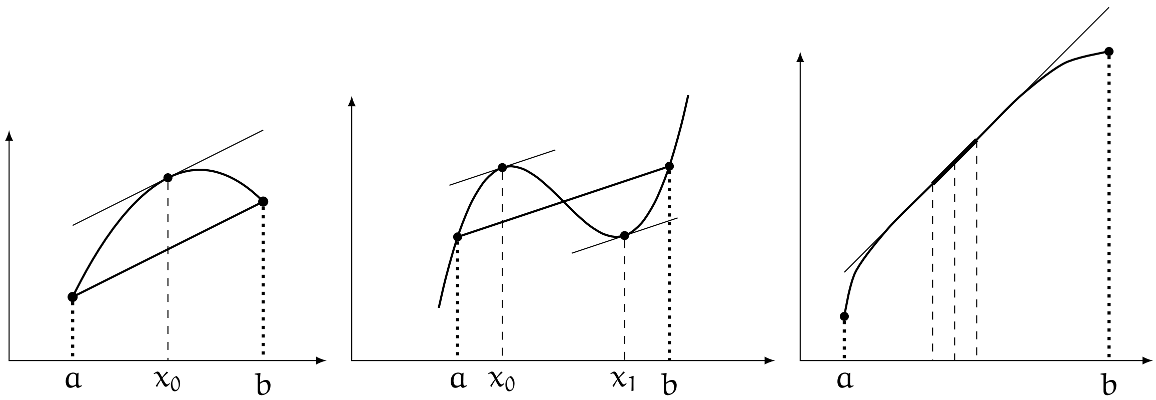
ezért ha f-nek három különböző zérushelye lenne, akkor a Rolle-tétel következményeként f'-nek legalább két zérushelye, f''-nek pedig legalább egy zérushelye lenne, ami nem lehetséges, hiszen bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f''(x) > 0$. ■

Emlékeztető (Lagrange-féle középértéktétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Megjegyezzük, hogy amint azt a 1.14 ábra is mutatja – hasonlóan a Rolle-tételhez – A Lagrange-tétel esetében is nem csak egy ξ létezhet.



(a) egyetlen ξ létezik (b) két ξ létezik (c) végtelen sok ξ létezik

1.14. ábra

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $-1 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$\sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n}$$

egyenlőtlenség!

Útm. Legyen

$$f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt[n]{1+x} - 1.$$

Azt kell belátnunk, hogy bármely $-1 \leq x \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) \leq \frac{x}{n} \tag{1.3}$$

teljesül. Világos, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}} \qquad (-1 < x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Ha

- $x \in (0, +\infty)$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel következtében van olyan $\xi \in (0, x)$, hogy

  $$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{1+\xi}\right)^{n-1}}.$$

  Mivel $\xi > 0$, ezért $1 + \xi > 1$, így az n-edik gyökfüggvény monotonitának figyelembevételével azt kapjuk, hogy

  $$\left(\sqrt[n]{1+\xi}\right)^{n-1} \geq \left(\sqrt[n]{1}\right)^{n-1} = 1.$$

  Következésképpen

  $$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{n}, \qquad \text{azaz} \qquad f(x) \leq \frac{x}{n} \quad (x > 0,\ n \in \mathbb{N}).$$

- $x \in [-1, 0)$, akkor szintén a Lagrange-féle középértéktétel következtében van olyam $\xi \in (x, 0)$, hogy

  $$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{1+\xi}\right)^{n-1}};$$

  így $\xi < 0$ következtében $1 + \xi < 1$, ill.

  $$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{n}, \qquad \text{azaz} \qquad f(x) \leq \frac{x}{n} \quad (x < 0,\ n \in \mathbb{N}).$$

- $x = 0$, akkor triviálisan telesül az egyenlőtlenség, sőt egyenlőség van. ■

Megjegyezzük, hogy ha alkalmazzuk a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget az

$$1, 1, \ldots, 1, 1 - x \in [0, +\infty) \qquad (-1 \leq x \in \mathbb{R})$$

számokra, akkor azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\sqrt[n]{1+x}} = \sqrt[n]{1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot (1+x)} \leq \frac{1 + \ldots + 1 + 1 + x}{n} = \frac{(n-1) \cdot 1 + 1 + x}{n} = \frac{n}{n} + \frac{x}{n} = \boxed{1 + \frac{x}{n}}.$$

Feladat. Lássuk be, hogy bármely $x \in (-1, 1)$ esetén fennáll az

$$|\arcsin(x)| \leq \frac{|x|}{1-|x|}$$

egyenlőtlenség!
Útm. Ha

- $x = 0$, akkor triviálisan telesül az egyenlőtlenség, sőt egyenlőség van.
- $0 \neq x \in (-1, 1)$, akkor a Lagrange-féle középértéktétel következtében van olyan $\xi \in (x, 0) \cup (0, x)$[10], amelyre
$$\frac{\arcsin(x)}{x} = \frac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x - 0} = \arcsin'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$
Mivel $|\xi| < |x|$, ezért $\xi^2 < x^2$, így
$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
ahonnan
$$|\arcsin(x)| = \left|\frac{\arcsin(x)}{x}\right| \cdot |x| = \frac{|x|}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}.$$
következik. Mivel $|x| < 1$, ezért igaz a
$$\sqrt{1-x^2} \geq 1 - |x| \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x^2 \geq 1 - 2|x| + |x|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2|x|^2 - 2|x| \leq 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad |x|\,(|x| - 1) \leq 0.$$
ekvivalencialánc. Mivel az utolsó állítás nyilvánvaló, ezért
$$|\arcsin(x)| \leq \frac{|x|}{1-x^2} \leq \frac{|x|}{1-|x|}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha n rendre páros, illetve páratlan, akkor a

$$p(x) := x^n + ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak legfeljebb kettő, illetve három gyöke van!
Útm.

[10] 0 és x közötti ξ

1. lépés. Legyen $n \equiv 0\,(2)$, azaz n páros. Tegyük fel, hogy p-nek legalább három gyöke van: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2 < x_3$. A Lagrange-féle középértéktétel következtében bármely $k \in \{1; 2\}$ indexre van olyan $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, amelyre

$$0 = p(x_k) - p(x_{k+1}) = p'(\xi_k)(x_k - x_{k+1}), \qquad \text{azaz} \qquad p'(\xi_k) = 0.$$

Mivel $x_2 \in (\xi_1, \xi_2)$ ezért p'-nek legalább két gyöke van. Lévén, hogy $n-1$ páratlan, és

$$p'(x) = nx^{n-1} + a \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért p'-nek csak a $\left(-\frac{a}{n}\right)^{1/(n-1)}$ szám lehet a gyöke. Ez pedig nem lehetséges.

3. lépés. Legyen $n \equiv 1\,(2)$, azaz n páratlan. Tegyük fel, hogy p-nek legalább négy gyöke van: $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, és $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. A Lagrange-féle középértéktétel következtében bármely $k \in \{1; 2; 3\}$ indexre van olyan $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, amelyre

$$0 = p(x_k) - p(x_{k+1}) = p'(\xi_k)(x_k - x_{k+1}), \qquad \text{azaz} \qquad p'(\xi_k) = 0.$$

Mivel $x_2 \in (\xi_1, \xi_2)$ és $x_3 \in (\xi_2, \xi_3)$ ezért p'-nek legalább három gyöke van. Lévén, hogy

$$p'(x) = nx^{n-1} + a = n\left(x^{n-1} + 0 \cdot x + \frac{a}{n}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért p' három gyöke az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^{n-1} + 0 \cdot x + \frac{\alpha}{n}$$

polinonmnak is gyöke. Ennek a polinomnak viszont $n-1$ párossága következtében legfeljebb két gyöke lehet az elősző lépés szerint, ami azt jelenti, hogy a kiinduló feltevésünk hamis volt. ■

Feladat. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre

- $f(x) \in [a, b] \quad (x \in [a, b])$;
- alkalmas $q \in [0, 1)$ esetén
$$|f'(x)| \leq q \qquad (x \in [a, b])$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor f **kontrakció**, azaz bármely $x, y \in [a, b]$ esetén fennáll az

$$|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|$$

egyenlőtlenség!

Útm. A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával tetszőleges $x, y \in [a, b]$, ill. alkalmas $\xi \in (a, b)$

esetén azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq q \cdot |x-y|. \quad \blacksquare$$

Emlékeztető (Cauchy-féle középértéktétel). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre $[a,b] \subset \mathcal{D}_f$, $[a,b] \subset \mathcal{D}_g$ és $f, g \in \mathfrak{C}[a,b] \cap \mathfrak{D}(a,b)$. Ekkor alkalmas $\xi \in (a,b)$ esetén

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi).$$

Megjegyezzük, hogy ha tetszőleges $x \in (a,b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor a Rolle-tétel következtében $g(a) \neq g(b)$, és így

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$ és $a < b$, továbbá $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\xi \in \mathbb{R}$, amelyre

$$\frac{af(b) - bf(a)}{b - a} = \xi f'(\xi) - f(\xi)$$

teljesül!
Útm. Tetszőleges $x \in [a,b]$ esetén legyen

$$\varphi(x) := \frac{f(x)}{x} \qquad \text{és} \qquad \psi(x) := \frac{1}{x}.$$

Ekkor $\varphi, \psi \in \mathfrak{C}[a,b] \cap \mathfrak{D}(a,b)$, továbbá bármely $x \in (a,b)$ esetén $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, így a Cauchy-féle középértéktételt használva a

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{af(b) - bf(a)}{ab}}{\frac{a-b}{ab}} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = -\frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$$

és a

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = -(\xi f'(\xi) - f(\xi))$$

egyenlsőégekhez jutunk, ahonnan az állítás már nyilvánvaló. $\blacksquare$

Házi feladatok.

1. Legyen
$$f(x) := \begin{cases} x & (-10 \leq x \leq 2), \\ \sqrt{8x - x^2 - 8} & \left(2 \leq x \leq 2(2+\sqrt{2})\right) \end{cases}$$
   (a) Teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei?
   (b) Van-e zérushelye f'-nek?

2. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig n-edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy az
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^x - p(x)$$
függvénynek $n + 1$ zérushelye van!

3. A Rolle-téel felhasználásával mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén fennáll a
$$\sin(x) > \frac{2x}{\pi}$$
egyenlőség!

4. A Lagrange-féle középérték-tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!
   (a) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$;
   (b) $\mathrm{arctg}(x) - \mathrm{arctg}(y) \leq x - y \qquad (x, y \in \mathbb{R} :\ y < x)$;
   (c) $\frac{ab - a^2}{b^2 + 1} < \ln\left(\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+1}}\right) < \frac{b^2 - ab}{a^2 + 1}$, ahol $0 < a < b < +\infty$.

5. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$. Mutassuk meg, hogy alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén fennáll a
$$\frac{b}{b-a} \cdot e^{f(b)-f(\xi)} + \frac{a}{a-b} \cdot e^{f(a)-f(\xi)} = 1 + \xi \cdot f'(\xi)$$
egyenlőség!

Útm.

1. (a) Világos, hogy tetszőleges $2 \neq a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in \mathfrak{D}[a]$, és
$$\lim_{x\to 2-0} f'(x) = \lim_{x\to 2-0} 1 = 1 = \lim_{x\to 2+0} \frac{8-2x}{2\sqrt{8x - x^2 - 8}} = \lim_{x\to 2+0} f'(x).$$
Ezért $f \in \mathfrak{D}$, így eljesülnek a Rolle-tétel feléttelei.

(b) Világos, hogy

$$f'(\xi)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{8-2\xi}{2\sqrt{8\xi-\xi^2-8}}=\frac{4-\xi}{\sqrt{8\xi-\xi^2-8}} \quad\Longleftrightarrow\quad \xi=4.$$

2. Tegyük fel, hogy f-nek legalább $n+2$ zérushelye van. Rolle-téele következtében f'-nek legalább $n+1$, f''-nek legalább n gyöke van. Következésképpen az $f^{(n)}$ függvénynek éegalább két gyöke van. Ez pedig nem lehetséges, hiszen alkalmas $c\in\mathbb{R}$ számra

$$f(x)=e^x-c \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

és az exponenciális függvény szigorúan monoton.

3. Legyen

$$f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, \qquad f(x):=\sin(x)-\frac{2x}{\pi}.$$

Ekkor

$$f'(x)=\cos(x)-\frac{2}{\pi} \qquad \left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Mivel f'-nek csak egyetlen zérushelye van a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban és

$$f(0)=0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ezért Rolle-tétele következtében f-nek nincsen más zérushelye a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban. Mivel $f\in\mathfrak{C}$, ezért

$$\textbf{vagy} \quad f(x)>0 \quad \left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad \textbf{vagy} \quad f(x)<0 \quad \left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Mivel $f\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$, ezért az első eset teljesül, amiből következik az állítás.

4. (a) Tetszőleges $0<x\in\mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi:[1,1+x]\to\mathbb{R}, \qquad \varphi(t):=\ln(t)$$

függvényre

$$\varphi\in\mathfrak{C}[1,1+x]\cap\mathfrak{D}(1,1+x).$$

ALagrange-féle középértéktétel következtében így alkalmas $\xi\in(1,1+x)$ köztes számra

$$\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{\varphi(1+x)-\varphi(1)}{1+x-1}=\varphi'(\xi)=\frac{1}{\xi}<1, \qquad \text{azaz} \qquad \ln(x+1)<x. \quad \blacksquare$$

(b) A Lagrange-féle középértéktétel következtében van olyan $\xi\in(y,x)$, hogy

$$\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arctg}(y)=\operatorname{arctg}'(\xi)(x-y)=\frac{1}{1+\xi^2}(x-y)\le x-y.$$

5. Az

$$f(x):=\ln(x^2+1) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvényre $f\in\mathfrak{C}[a,b]\cap\mathfrak{D}(a,b)$ teljesül, így alkalmas $\xi\in(a,b)$ esetén

$$\frac{2\xi}{1+\xi^2}=\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(b^2+1)-\varphi(a^2+1)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right). \quad \blacksquare$$

6. Mivel

$$\frac{b}{b-a}\cdot e^{f(b)-f(\xi)}+\frac{a}{a-b}\cdot e^{f(a)-f(\xi)}=1+\xi\cdot f'(\xi) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{b}{b-a}\cdot e^{f(b)}+\frac{a}{a-b}\cdot e^{f(a)}=\left(1+\xi\cdot f'(\xi)\right)\cdot e^{f(\xi)},$$

ezért az

$$F(x) := x \cdot e^{f(x)}, \quad G(x) := x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényekre

$$F(b) - F(a) = b \cdot e^{f(b)} - a \cdot e^{f(a)}, \qquad \text{ill.} \qquad G(b) - G(a) = b - a,$$

továbbá tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$G'(x) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad F'(x) = e^{f(x)} + x \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)} \left[1 + x \cdot f'(x)\right].$$

Gyakorló feladatok.

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $a + b \neq 0$, továbbá tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, ill. $af(b) = bf(a)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ számmal fennáll az
$$\frac{f(b) + f(a)}{b + a} = f'(\xi)$$
egyenlőség!

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $ab > 0$, továbbá tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, ill.
$$\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$
teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ számmal fennáll az
$$\frac{f(b) \cdot f(a)}{b \cdot a} = f'(\xi)$$
egyenlőség!

3. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy az
$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$
egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$ intervallumban!

4. Oldjuk meg a
$$3^x + 6^x = 4^x + 5^x$$
egyenletet a Lagrange-féle középértéktétellel!

5.

6.

7.

Útm.

1. Az
$$F(x) := f(x) - \frac{f(b)+f(a)}{b+a}\cdot x \qquad (x\in\mathcal{D}_f)$$
függvényre $F\in\mathfrak{C}[a,b]\cap\mathfrak{D}(a,b)$, ill.
$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)+f(a)}{b+a}\cdot a = \frac{a^f(b)+af(a)+bf(b)+bf(a)-af(b)-af(a)}{b+a} == \frac{bf(b)+bf(a)}{b+a} = \frac{f(b)+f(a)}{b+a}\cdot b = F(b)$$
teljesül. Így a Rolle-tétel felhasználásávak azt kapjuk, hogy alkalmas $\xi\in(a,b)$ esetén
$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)+f(a)}{b+a}, \qquad \text{azaz} \qquad f'(\xi) = \frac{f(b)+f(a)}{b+a}.$$

2. Az
$$F(x) := f(x) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}\cdot x \qquad (x\in\mathcal{D}_f)$$
$$\begin{aligned} F(a)-F(b) &= f(a) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}\cdot a = f(b) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}\cdot b = f(a)-f(b) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}\cdot(a-b) = \\ &= \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}\cdot(a-b) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}\cdot(a-b) = 0 \end{aligned}$$
teljesül, hiszen a feltételekből
$$\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{f(a)-f(b)}{f(b)f(a)} = \frac{a-b}{ba} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)f(a)}{ba}.$$
Így a Rolle-tétel felhasználásávak azt kapjuk, hogy alkalmas $\xi\in(a,b)$ esetén
$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}, \qquad \text{azaz} \qquad f'(\xi) = \frac{f(b)\cdot f(a)}{b\cdot a}.$$

3. Legyen
$$f(x) := ax^4 + bx^3 + cx^2 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$
Ekkor $f\in\mathfrak{C}[0,1]\cap\mathfrak{D}(0,1)$, továbbá
$$f(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad f(1) = a+b+c.$$
A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával azt kapjuk, hogy alkalmas $\xi\in(0,1)$ esetén
$$a+b+c = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\xi) = 4a\xi^3 + 3b\xi^2 + 2c\xi.$$

4. Világos, hogy tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén
$$3^x + 6^x = 4^x + 5^x \qquad\Longleftrightarrow\qquad 4^x - 3^x = 6^x - 5^x.$$
Ha most
$$f(t) := t^x \qquad (0 < t\in\mathbb{R}),$$
akkor
$$f\in\mathfrak{C}[3,4]\cap\mathfrak{D}(3,4) \qquad \text{és} \qquad f\in\mathfrak{C}[5,6]\cap\mathfrak{D}(5,6).$$
A Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával így azt kapjuk, hogy alkalmas $\xi\in(3,4)$, ill. $\eta\in(5,6)$ esetén
$$x\cdot\xi^{x-1} = f'(\xi) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = 4^x - 3^x \qquad \text{és} \qquad x\cdot\eta^{x-1} = f'(\eta) = \frac{f(6)-f(5)}{6-5} = 6^x - 5^x.$$

Következésképpen

$$4^x - 3^x = 6^x - 5^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \cdot \xi^{x-1} = x \cdot \eta^{x-1}.$$

Látható tehát, hogy $x = 0$ megoldás. Ha $x \neq 0$, akkor

$$x \cdot \xi^{x-1} = x \cdot \eta^{x-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi^{x-1} = \eta^{x-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{x-1} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1.$$

5.

6.

7.

1.10. 10. oktatási hét (2020.11.11.)

Szükséges előismeretek.

1. Mit ért azon, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontban?
Válasz:
$$f \in \mathfrak{D}^2[a] \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, r>0 : (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f, \ \forall x \in (a-r, r+r) : \quad f \in \mathfrak{D}[x] \ \text{ és } \ f' \in \mathfrak{D}[a].$$

2. Mi a kapcsolat hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?
Válasz: Ha
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n \qquad (r>0,\ |x-c|<r),$$
akkor $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és
$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

3. Hogyan definiálja valamely függvény *Taylor-sorát*?
Válasz: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és
$$\alpha_k := \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$
Ekkor a
$$\sum_{n=0} (\alpha_n (x-c)^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
hatványsort az f függvényt *Taylor-sorának* nevezzük.

4. Mi a *Taylor-polinom* definíciója?
Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $f \in \mathfrak{D}^{n+1}(I)$ teljesül. Ha $a \in I$, akkor a
$$T_n(x) := T_n(f,a)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$
polinomot az f függvény (a-hoz tartozó n-edik) *Taylor-polinomjának* nevezzük.

5. Fogalmazza meg a *Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal* néven tanult tételt!
Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $f \in \mathfrak{D}^{n+1}(I)$ teljesül. Ekkor bármely $a, x \in I$ esetén van olyan $\xi \in (a,x) \cup (x,a)$, hogy
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (x \in I).$$

Az óra anyaga.

Feladat. Legyen $m \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy a
$$T_m(x) := \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \cos(m \arccos(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
Csebisev-polinomokra
$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Útm. Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T'_m(x) = \frac{m}{2^{m-1}} \cdot \frac{\sin(m \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m}{2^{m-1}} \cdot \sin(m \arccos(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

és

$$T''_m(x) = -\frac{m^2 \cos(m \arccos(x))}{2^{m-1}(1-x^2)} + \frac{xm \sin(m \arccos(x))}{2^{m-1}\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{m^2}{1-x^2} \cdot T_m(x) + \frac{xT'_m(x)}{1-x^2}.$$

Következésképpen minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\boxed{(1-x^2)T''_m(x) - xT'_m(x) + m^2 T_m(x)} = -m^2 T_m(x) + xT'_m(x) - xT'_m(x) + m^2 T_m(x) = \boxed{0}. \qquad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Számítsuk ki az alábbi függvények n-edik deriváltját!

1. $f(x) := \ln(1+x) \quad (x \in (-1,+\infty))$;
2. $f(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;
4. $f(x) := \sin^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;
5. $f(x) := \dfrac{1}{x^2-3x+2} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\})$;
6. $f(x) := \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (a,b,c,d,x \in \mathbb{R}:\ c \neq 0,\ x \neq -d/c)$;
7. $f(x) := \ln\left(\dfrac{a+bx}{a-bx}\right) \quad \left(x \in \left(-\dfrac{a}{b}, \dfrac{a}{b}\right);\ 0 < a,b \in \mathbb{R}\right)$.

Útm.

1. Világos, hogy $f^{(0)} = f$, továbbá bármely $x \in (-1,+\infty)$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}.$$

   Innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in (-1,+\infty)).$$

2. Mivel $f^{(0)} = f$, és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(x) = -\sin(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

és

$$f'''(x) = -\cos(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f^{(4)}(x) = \sin(x) = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right),$$

ezért indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Mivel $f^{(0)} = f$, és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(x) = -\cos(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

és

$$f'''(x) = \sin(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f^{(4)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + \frac{4\pi}{2}\right),$$

ezért indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Mivel

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2x)) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \sin(2x) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(x) = 2\cos(2x) = -2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = -4\sin(2x) = -4\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad f^{(4)}(x) = -8\cos(2x) = -8\cos\left(2x + \frac{4\pi}{2}\right).$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

5. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}\backslash\{1; 2\}$ esetén[11]

[11]Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \neq b$, akkor bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{a; b\}$ esetén

$$\boxed{\frac{c}{(x-a)(x-b)}} = \frac{c}{b-a} \cdot \frac{b-a}{(x-a)(x-b)} = \frac{c}{b-a} \cdot \frac{(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)} = \boxed{\frac{c}{b-a} \cdot \left\{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right\}}.$$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

ezért

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-1)^3}, \qquad f''(x) = -\frac{6}{(x-2)^4} + \frac{6}{(x-1)^4}.$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

6. Mivel tetszőleges $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$: $c \neq 0$, $x \neq -d/c$ esetén $\boxed{f^{(0)}(x) = f(x)} =$

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \left[1 + \frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x + \frac{d}{c}}\right] = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \boxed{\frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}}$$

vagy $\boxed{f^{(0)}(x) = f(x)} =$

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{acx+bc}{acx+ad} = \frac{a}{c} \cdot \frac{acx+ad+bc-ad}{acx+ad} = \frac{a}{c} \cdot \left(1 + \frac{bc-ad}{acx+ad}\right) = \boxed{\frac{a}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{bc-ad}{cx+d}}$$

(vö. Analízis 1 (14. oldal)) ezért

$$f'(x) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(cx+d)^2}, \qquad f''(x) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{-2c}{(cx+d)^3},$$

és

$$f'''(x) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{6c^2}{(cx+d)^4}.$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot c^n \cdot n!}{(cx+d)^{n+1}}. \qquad (n \in \mathbb{N},\ a, b, c, d, x \in \mathbb{R}:\ c \neq 0,\ x \neq -d/c).$$

7. Legyen $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor tetszőleges $x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)$ esetén

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \ln(a + bx) - \ln(a - bx), \qquad f'(x) = \frac{b}{a + bx} + \frac{b}{a - bx},$$

$$f''(x) = \frac{-b^2}{(a + bx)^2} + \frac{b^2}{(a - bx)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2b^3}{(a + bx)^3} + \frac{2b^3}{(a - bx)^3}.$$

Innen indukcióval azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $x \in \left(-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)$ esetén

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1} \cdot b^n \cdot (n-1)!}{(a + bx)^n} + \frac{b^n \cdot (n-1)!}{(a - bx)^n} = \\ &= \frac{b^n \cdot (n-1)!}{(a^2 - b^2x^2)^n} \{(a + bx)^n - (-1)^n \cdot (a - bx)^n\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tétel (Leibniz-szabály). Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in \mathfrak{D}^n[a]$, akkor $f \cdot g \in \mathfrak{D}^n[a]$ és

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)}$$

Megjegyezzük, hogy

- az $n = 2$, ill. $n = 3$ esetben a fenti szabály

  $$\boxed{(f \cdot g)''} = ((f \cdot g)')' = (f' \cdot g + f \cdot g')' = f'' \cdot g + f' \cdot g' + f' \cdot g' + f \cdot g'' = \boxed{f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g''}$$

  ill.

  $$\begin{aligned} \boxed{(f \cdot g)'''} &= ((f \cdot g)'')' = (f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g'')' = \\ &= f''' \cdot g + f'' \cdot g' + 2 \cdot f'' \cdot g' + 2 \cdot f' \cdot g'' + f' \cdot g'' + f \cdot g''' = \\ &= \boxed{f''' \cdot g + 3 \cdot f'' \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g'' + f \cdot g'''} \end{aligned}$$

  alakú;

- a szabály bizonyítása a teljes indukcióval történik (vö. Simon Péter: Bevezetés az analízsbe I.)

Feladat. Számítsuk ki az alábbi f függvéyn n-edik deriváltját!

1. $f(x) := x^2 \ln(1-x) \ \ (x \in (-\infty, 1))$; 2. $f(x) := e^x \cdot x^n \ \ (x \in \mathbb{R})$; 3. $f(x) := x^2 \cdot \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \ \ (x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Legyen
$$\varphi, \psi : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^2, \quad \psi(x) = \ln(1-x).$$
Ekkor
$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
és bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre és $x \in (-\infty, 1)$ számra
$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{2!}{(2-k)!} \cdot x^{2-k} & (k \in \{1,2\}), \\ \\ 0 & (2 < k \in \mathbb{N}), \end{cases} \qquad \psi^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{(1-x)^k}.$$
A Leibniz-szabály következtében így tetszőleges $x \in (-\infty, 1)$ esetén
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(n-k)}(x) = \\ &= -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \cdot x^2 - 2 \cdot n \cdot x \cdot \frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}. \end{aligned}$$

2. Legyen
$$\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^n, \quad \psi(x) = e^x.$$
Ekkor
$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
így bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre és $x \in \mathbb{R}$ számra
$$\psi^{(k)}(x) = e^x, \qquad \text{ill.} \qquad \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k} & (k \in \{1, \ldots, n\}), \\ \\ 0 & (n < k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$
A Leibniz-szabályt alkalmazva tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi^{(k)}(x)\cdot\psi^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\cdot x^{n-k}\cdot e^x =$$

$$= e^x\cdot\sum_{k=0}^{n} k!\cdot\binom{n}{k}^2\cdot x^{n-k}$$

adódik.

3. Legyen

$$\varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \varphi(x):=x^2,\quad \psi(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}(x).$$

Ekkor

$$\varphi'(x)=2x,\quad \varphi''(x)=2,\quad \varphi'''(x)=0\qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ill.

$$\psi^{(n)}=\begin{cases}\mathrm{ch} & (n\equiv 0\ (2)),\\ \mathrm{sh} & (n\equiv 1\ (2)).\end{cases}$$

Így

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)\qquad (x\in\mathbb{R}),$$

és bármely $n\in\mathbb{N}_0$ indexre és $x\in\mathbb{R}$ számra

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{2}{k}\varphi^{(k)}(x)\psi^{(2-k)}(x)=\binom{n}{0}x^2\,\mathrm{ch}^{(n)}(x)+\binom{n}{1}2x\,\mathrm{ch}^{(n-1)}(x)+\binom{n}{2}\mathrm{ch}^{(n-2)}(x)=$$

$$=\begin{cases}x^2\cdot\mathrm{ch}(x)+2\cdot n\cdot x\cdot\mathrm{sh}(x)+n\cdot(n-1)\cdot\mathrm{ch}(x) & (n\equiv 0\ (2)),\\ \\ x^2\cdot\mathrm{sh}(x)+2\cdot n\cdot x\cdot\mathrm{ch}(x)+n\cdot(n-1)\cdot\mathrm{sh}(x) & (n\equiv 1\ (2)).\end{cases}\quad\blacksquare$$

Emlékeztető. Legyen $n\in\mathbb{N}_0$, $\alpha_n, c, r\in\mathbb{R}$, $r>0$, továbbá

$$f:(c-r,c+r)\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-c)^n.$$

Ekkor $f\in\mathfrak{D}^\infty$ és tetszőleges $k\in\mathbb{N}_0$ esetén

$$f^{(k)}(x)=k!\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\alpha_n(x-c)^{n-k}\qquad (x\in(c-r,c+r)).$$

Megjegyezzük, hogy ennek az állításnak több következménye is van.

- Ha
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n \in \mathbb{R} \qquad (x \in (c-r, c+r)),$$
akkor $f \in \mathfrak{D}^{\infty}$ és
$$f^{(k)}(a) = k! \cdot \alpha_k \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

- Ha $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_n, \beta_n, c, r, s \in \mathbb{R}$, $r, s > 0$, továbbá valamely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n \in \mathbb{R} \qquad (x \in (c-r, c+r))$$
és
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x-c)^n \in \mathbb{R} \qquad (x \in (c-s, c+s)),$$
akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ indere $\alpha_n = \beta_n$ (**hatványsorokra vonatkozó egyértelműségi télel**).

Feladat. Számítsuk ki $f^{(n)}(0)$-t az alábbi f függvények esetében!

$$1.\ f(x) := x^n e^x \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad\qquad 2.\ f := \text{arctg}\,.$$

Útm.

1. **1. módszer.** A Leibniz-szabály felhasználásával (vö. fent) azt kapjuk, hogy
$$f^{(n)}(0) = e^0 \cdot \sum_{k=0}^{n} k! \cdot \binom{n}{k}^2 \cdot 0^{n-k} = n!.$$

   2. módszer. Mivel
$$f(x) = x^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+k}}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
   ezért
$$f^{(n)}(0) = n! \cdot \frac{1}{1} = n!.$$

2. **1. módszer.** Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\text{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = f'(x), \qquad \text{azaz} \qquad (1+x^2)f'(x) = 1.$$
   Mindkét oldal $(n-1)$-edik deriváltját véve, a Leibniz-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + \binom{n-1}{1} 2xf^{(n-1)}(x) + 2\binom{n-1}{2} f^{(n-1)}(x) = 0,$$

azaz

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2}(0) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel

$$f'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \qquad \text{és} \qquad f''(0) = \frac{-2 \cdot 0}{(1+0^2)^2} = 1,$$

így a fenti rekurziót használva

$$f'''(0) = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!, \qquad f^{(6)}(0) = 0,$$

$f^{(7)}(0) = -6 \cdot 5 \cdot 4! = -6!$ stb. adódik. Tehát, ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0\,(2)), \\ (-1)^n(2n)! & (n \equiv 1\,(2)). \end{cases}$$

2. módszer. Tudjuk (vö. 6. gyakorlat, 3. házi feladat), hogy

$$\mathrm{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Következésképpen, ha

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in (-1,1)), \qquad \text{akkor tetszőleges } k \in \mathbb{N}_0 \text{ indexre}$$

$$\mathrm{arctg}^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathrm{arctg}^{(2k+1)}(0) = f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)!.$$

A következő fogalom informatikai tanulmányaink során lépten-nyomon előkerül.

Definíció. Az $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat **generátorfüggvény**ének, illetve **exponenciális generátorfüggvény**ének nevezzük az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha van olyan $0 < r \leq \rho$, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad (|x| < r),$$

illetve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad (|x| < r),$$

ahol ρ a

$$\sum_{n=0} (a_n \cdot x^n) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill. a} \qquad \sum_{n=0} \left(a_n \cdot \frac{x^n}{n!}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara.

Példák.

1. Az

$$a_n := n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatnak nincsen generátorfüggvénye, ui. a

$$\sum_{n=0} (n! \cdot x^n) \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmaza a $\{0\}$ egyelemű halmaz.

2. Adott $n \in \mathbb{N}_0$ esetén az

$$f(x) := (1+x)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény

- generátorfüggvénye a $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots$ sorozatnak, illetve
- exponenciális generátorfüggvénye a $V_n^0, V_n^1, \ldots, V_n^n, 0, 0, \ldots$ sorozatnak, ahol

$$C_n^k := \binom{n}{k}, \qquad \text{ill.} \qquad V_n^k := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

ugyanis a binomiális tétel következtében

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

(**Fibonacci-sorozat**) akkor fennáll az

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőség (**Moivre–Binet-formula**)!

Útm. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$0 \leq F_n \leq 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ezért a

$$\sum_{n=0} (F_n \cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor ρ konvergenciasugarára: $\rho \leq \frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n \qquad \left(x \in \mathbb{R} : \ |x| < \frac{1}{2}\right)$$

függvény az (F_n) sorozat generátorfüggvénye. Így

$$f(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})\, x^n = x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} =$$

$$= x(f(x)+1) + x^2 f^2(x) = x + (x+x^2) f(x).$$

A fenti egyenletet $f(x)$-re megoldva azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) x^n$$

amennyiben

$$x \in \mathbb{R} : \ |x| < \min\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Innen az állítás a hatványsorokra vonatkozó egyértelműségi tétel felhasználásával következik. ■

Mint ahogy azt az 5. előadáson hallhatták, van olyan függvény, amelynek Taylor-sora egy intervallumban konvergens, de a sor nem az adott függvényt, hanem egy másik függvényt állít elő. Erre vonatkozik a következő – Cauchy-tól származó –

Feladat. Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy

1. bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}^\infty[x]$, majd számítsuk ki az

$$f'(x), \qquad f''(x), \qquad f'''(x)$$

   deriváltakat;

2. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, illetve alkalmas p_n polinom esetén fennáll az

$$f^{(n)}(x) = f(x) \cdot \frac{p_n(x)}{x^{3n}} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

   egyenlsőség;

3. bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $f \in \mathfrak{D}^n[0]$, majd számítsuk ki $f^{(n)}(0)$ értékét!

Útm.

1. Világos, hogy bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}^\infty[x]$, hiszen f itt nem más, mint az exponenciális függvény és egy racionális függvény kompozíciója, továbbá bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(-2)x^{-3}\exp(-x^{-2}) = 2x^{-3}f(x), \\ f''(x) &= 2(-3)x^{-4}f(x) + 2x^{-3}f'(x) = (-6x^{-4} + 4x^{-6})f(x), \\ f'''(x) &= \left[(-6)(-4)x^{-5} + 4(-6)x^{-7}\right] f(x) + \left[-6x^{-4} + 4x^{-6}\right] f'(x) = \\ &= \left(24x^{-5} - 24x^{-7} - 12x^{-7} + 8x^{-9}\right) f(x) = \left(24x^{-5} - 36x^{-7} + 8x^{-9}\right) f(x). \end{aligned}$$

2. Indukcióval bizonyítunk.

   - Világos, hogy $n = 1$ esetén igaz az állítás (vö. fent).
   - Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \\ &= (-3n)x^{-3n-1}p_n(x)f(x) + x^{-3n}p_n'(x)f(x) + x^{-3n}p_n(x)f'(x) = \\ &= x^{-3n-3}\left[-3nx^2p_n(x) + x^3p_n'(x) + 2p_n(x)\right] f(x). \end{aligned}$$

Ha most

$$p_{n+1}(x) := -3nx^2p_n(x) + x^3p_n'(x) + 2p_n(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor p_{n+1} polinom, azaz az $n+1$ indexre is igaz az állítás.

3. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{x\to 0} x^{-2} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} x^{-2n}\exp(-x^{-2}) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^{-2})^n}{\exp(-x^{-2})} = 0,$$

következésképpen

$$\lim_{x\to 0} x^{-n}\exp(-x^{-2}) = \lim_{x\to 0} x^{-2n}\cdot\exp(-x^{-2})\cdot\lim_{x\to 0} x^n = 0\cdot 0 = 0.$$

Így

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{-1}\exp(-x^{-2}) \longrightarrow 0 \qquad (x\to 0),$$

így $f \in \mathfrak{D}[0]$ és $f'(0)=0$. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f \in \mathfrak{D}^n[0]$ és $f^{(n)}(0)=0$, akkor

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = x^{-3n-1}p_n(x)f(x) \longrightarrow p_n(0)\cdot 0 = 0 \qquad (x\to 0),$$

ennélfogva

$$f \in \mathfrak{D}^{n+1}[0] \qquad \text{és} \qquad f^{(n+1)}(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a fenti eredmény azt jelenti, hogy az f függvény 0-körüli Taylor-sora:

$$\sum_{n=0} (0\cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ami minden $\mathbb{R} \ni x$-re konvegens és összege minden x helyen zérus. Így a 0 pont környezetében mindenhol konvergens Taylor-sor nem állítja elő az f függvényt.

Feladat. Írjuk fel az alábbi függvények $a := 0$-hoz tartozó adott Taylor-polinomját, a kért esetekben a hozzátartozó Lagrange-féle maradéktaggal!

1. $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad T_n + R_n$; 2. $f(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad T_5 + R_5$;

3. $f(x) := \sin^3(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad T_n$; 4. $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}), \quad T_n$.

Útm.

1. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot x^{n+1},$$
ahol $\xi \in (0, x) \cup (x, 0)$;

2. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(\xi)}{6!} \cdot x^6,$$
ahol $\xi \in (0, x) \cup (x, 0)$;

3. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \sin(x) \cdot \sin^2(x) = \sin(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x) \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \\ &= \frac{\sin(x)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)}{2} = \frac{3}{4} \cdot \sin(x) - \frac{1}{4} \cdot \sin(3x),\end{aligned}$$
ezért indukcióval azt kapjuk, hogy
$$f^{(n)}(x) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \cdot 3^n \cdot \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Ennélfogva tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\begin{aligned}T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x - 0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left\{ \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \cdot 3^k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right\} \cdot x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left\{ \frac{3}{4} \cdot (-1)^{2k+1} - \frac{1}{4} \cdot 3^{2k+1} \cdot (-1)^{2k+1} \right\} \cdot x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left\{1 - 3^{2k}\right\} \cdot x^{2k+1}.\end{aligned}$$

2020.12.13.

4. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{2;3\}$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

ezért (vö. fennt)

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{2;3\}).$$

Következésképpen

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot \left(2^{k+1} - 3^{k+1}\right)}{6^{k+1}} \cdot x^k \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Írjuk fel a

$$p(x) := 1 + 3x + 5x^2 + 2x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot $x+1$ hatványai szerint!
Útm. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p'(x) = 3 + 10x + 6x^2, \qquad p''(x) = 10 + 12x, \qquad p'''(x) = 12, \qquad p^{(4)}(x) = 0$$

és

$$p(-1) = 1–3+5–2 = 1, \qquad p'(-1) = 3–10+6 = -1, \qquad p''(-1) = 10–12 = -2, \qquad p'''(-1) = 12,$$

így a Lagrange-maradéktagos Taylor-formula szernt, ha $x \in \mathbb{R}$ akkor alkalmas $\xi \in (-1,x) \cup (x,-1)$, ill. $x = -1$ esetén $\xi := -1$ köztes elemmel

$$p(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{p^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k = \frac{p^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)^4 = 0,$$

azaz

$$\boxed{p(x)} = \sum_{k=0}^{3} \frac{p^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k = \boxed{1 - (x+1) - (x+1)^2 + 2(x+1)^3}.$$

Megjegyzések.

1. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha először x helyébe $(x-1)$-et helyettesítünk, majd felbontjuk a zárójeleket, és az így kapott polinomba x helyébe $x+1$-et írunk:

$$1+3x+5x^2+2x^3 \rightsquigarrow 1+3(x-1)+5(x-1)^2+2(x-1)^3 =$$

$$= 1+3x-3+5x^2-10x+5+2x^3-6x^2+6x-2 =$$

$$= 1-x-x^2+2x^3 \rightsquigarrow 1-(x+1)-(x+1)^2+2(x+1)^3.$$

2. Ha $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ legfeljebb n-edfokú polinom, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $p^{(n+1)}(x) = 0$. Így a Lagrange-maradéktagos Taylor-formula következtében bármely $a \in \mathbb{R}$ számra

$$\boxed{p(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + 0 = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Feladat. Számítsuk ki e értékét $3 \cdot 10^{-6}$-nál kisebb hibával!

Útm. Mivel

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R};\ \xi \in (0,x) \cup (x,0)),$$

ezért

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi} \cdot 1^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (x = 1;\ \xi \in (0,1)).$$

Az n értékét úgy kell megválasztanunk, hogy a hiba

$$|R_n| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < 3 \cdot 10^{-6}$$

legyen. Mivel $e^{\xi} < e < 3$, ezért

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!} < 3 \cdot 10^{-6} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n+1)! > 10^6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 9$$

$$(5! = 120, \qquad 6! = 720, \qquad 7! = 540, \qquad 8! = 40320, \qquad 9! = 362880, \qquad 10! = 3628800.)$$

Következésképpen Tehát

$$e \approx T_9(1) = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!} = 2,71828. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki $\ln(1,1)$ értékét 10^{-4} pontossággal!

Útm. Legyen $x \in (-1,1)$. Ekkor

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k!} + R_n(x),$$

ahol

$$R_n(x) := (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}$$

valamely $\xi \in (0,x) \cup (x,0)$ $(x \neq 0)$ esetén ($x = 0$ esetén $\xi := 0$). Mivel

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{10^{n+1} \cdot (n+1)},$$

ezért n értékét úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\frac{1}{10^{n+1}(n+1)} < 10^{-4}, \qquad \text{azaz} \qquad n = 3$$

legyen. Tehát

$$\ln(1,1) = \ln(1+0,1) \approx T_3(0,1) = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0,0953. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $0 < h \in \mathbb{R}$, ill.

$$f : (-h, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt{x+h}.$$

1. Határozzuk meg az f függvény 0-körüli T_1 első és T_2 második Taylor-polinomját!

2. Lássuk be, hogy fennáll a

$$T_2(x) < f(x) < T_1(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

   egyenlőtlenségpár!

3. Adjunk alsó, ill. felső becslést a $\sqrt{148}$ számra!

Útm.

1. Mivel bármely $-h < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+h}}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(x+h)^3}}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(x+h)^5}},$$

ezért

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = \sqrt{h} + \frac{x}{2\sqrt{h}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ill.

$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 = \sqrt{h} + \frac{x}{2\sqrt{h}} - \frac{x^2}{8h\sqrt{h}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

2. Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$, ill. alkalmas $\xi_1, \xi_2 \in (0, x)$ esetén

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-0)^2 = -\frac{x^2}{8\sqrt{(\xi_1+h)^3}} < 0$$

ill.

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi_2)}{6}(x-0)^3 = \frac{3x^3}{48\sqrt{(\xi_2+h)^5}} > 0.$$

Következésképpen bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ számra

$$\boxed{T_2(x) <} T_2(x) + R_2(x) = \boxed{f(x)} = T_1(x) + R_1(x) \boxed{< T_1(x)}.$$

3. Mivel $148 = 144 + 4 = 12^2 + 4$, ezért a $h := 144$, ill. $x := 4$ választással

$$T_2(4) < f(4) = \sqrt{148} < T_1(4)$$

és

$$\begin{aligned} T_1(4) &= 12 + \frac{4}{2 \cdot 12} = 12 + \frac{1}{6} < 12,167, \\ T_2(4) &= 12 + \frac{1}{6} - \frac{16}{8 \cdot 144 \cdot 12} = 12 + \frac{1}{6} - \frac{1}{144 \cdot 6} = 2 + \frac{143}{864} > 12,165 \end{aligned}$$

következtében

$$12,165 < \sqrt{148} < 12,167. \quad \blacksquare$$

Feladat. Tetszőleges $0 \le x \le 1$ esetén adjunk felső becslést az

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} \right|$$

számra, és ennek alapján határozzuk meg $\sqrt{2/3}$ egy közelítő értékét $(=: \alpha)$, majd becsüljük meg (felülről) az $\left|\sqrt{2/3} - \alpha\right|$ eltérést!

Útm. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad (x \in (-1, +\infty)).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(1+x)^3}}, \qquad f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{(1+x)^5}}, \qquad f'''(x) = -\frac{15}{8\sqrt{(1+x)^7}}$$

ill.

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{-1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{3}{4}$$

Így

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8}\right| &= \left|f(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k\right| = |f(x) - T_2(x)| = \\
&= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x-0)^3\right| = \left|-\frac{15}{48\sqrt{(1+\xi)^7}} \cdot x^3\right| = \\
&= \frac{15}{48\sqrt{(1+\xi)^7}} \cdot x^3 < \frac{15}{48}
\end{aligned}$$

$$(0 \leq x \leq 1;\ 0 < \xi < x, \text{ ill. } \xi = 0, \text{ ha } x = 0),$$

valamint $\sqrt{2/3}$ egy közelítő értéke:

$$\sqrt{2/3} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/2}} \approx T_2(1/2) = 1 - \frac{1/2}{2} + \frac{3(1/2)^2}{8} = \frac{27}{32} =: \alpha,$$

és

$$\left|\sqrt{2/3} - \alpha\right| < \frac{15}{48 \cdot 8} = \frac{5}{128} = 0,0390625. \quad \blacksquare$$

Feladat. Adott $0 \leq x \leq 1$ esetén adjunk felső becslést a

$$\left|\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}\right|$$

számra, és ennek alapján határozzuk meg $\sqrt[3]{5/4}$ egy közelítő értékét $(=: \alpha)$, majd becsüljük meg felülről az $\left|\sqrt[3]{5/4} - \alpha\right|$ eltérést!

Útm. Legyen

$$f(x) := \sqrt[3]{1+x} \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{D}^{\infty}$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}, \qquad f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}}, \qquad f'''(x) = \frac{10}{27\sqrt[3]{(1+x)^8}},$$

ill.

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{1}{3}, \qquad f''(0) = \frac{-2}{9}$$

Így

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}\right| &= \left|f(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k\right| = |f(x) - T_2(x)| = \\ &= \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \cdot (x-0)^3\right| = \left|\frac{10}{6 \cdot 27 \cdot \sqrt[3]{(1+\xi)^8}} \cdot x^3\right| = \\ &= \frac{10}{6 \cdot 27 \cdot \sqrt[3]{(1+\xi)^8}} \cdot x^3 < \frac{10}{6 \cdot 27} = \frac{10}{162}\end{aligned}$$

$$(0 < \xi < x, \text{ ill. } \xi = 0, \text{ ha } x = 0)\,,$$

valamint $\sqrt[3]{5/4}$ egy közelítő értéke:

$$\sqrt[3]{5/4} = \sqrt[3]{1 + 1/4} \approx 1 + \frac{1/4}{3} - \frac{(1/4)^2}{9} = \frac{155}{144}$$

és

$$\left|\sqrt[3]{5/4} - \alpha\right| < \frac{10}{162 \cdot 64} = \frac{10}{10368}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Írjuk fel a tg harmadfokú Taylor-polinomját a 0-körül, majd a Lagrange-féle maradéktag felhasználásával mutassa meg, hogy fennáll a

$$\operatorname{tg}(x) > x + \frac{x^3}{3} \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

egyenlőtlenség!

Útm.

$$\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2}, \qquad \operatorname{tg}'' = \frac{2\sin}{\cos^3}, \qquad \operatorname{tg}''' = \frac{2\cos^4 + 6\cos^2\sin^2}{\cos^6} = \frac{2\cos^2 + 6\sin^2}{\cos^4} = \frac{2 + 4\sin^2}{\cos^4},$$

ill.

$$\operatorname{tg}(0) = 0, \qquad \operatorname{tg}'(0) = 1, \qquad \operatorname{tg}''(0) = 0, \qquad \operatorname{tg}'''(0) = 2.$$

Így

$$T_3(x) = x + \frac{x^3}{3} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Minden $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ esetén van tehát olyan $\xi \in (0, x)$, hogy

$$\mathrm{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{\mathrm{tg}^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4$$

Mivel

$$\mathrm{tg}^{(4)} = \frac{8 \sin \cos^2 + 4 \sin(2 + 4 \sin^2)}{\cos^5},$$

így tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ esetén $\mathrm{tg}^{(4)}(x) > 0$, ahonnan már következik az állítás. ■

Házi feladatok.

1. Legyen $m \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy a

$$P_m(x) := \frac{1}{2^m m!} \cdot \frac{d^m}{dx^m} \left((x^2 - 1)^m\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   Legendre-polinomokra[12] fennáll az

$$(1 - x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   egyenlőség!

2. Határozzuk meg a következő függvények magasabbrendű deriváltjait!
   (a) $f(x) := (x^4 + 1) \cdot \ln(x) \quad (0 < x \in \mathbb{R})$, $f^{(5)}(x) = ?$;
   (b) $f(x) := x^2 \cdot \sin(x) \quad (\in \mathbb{R})$, $f^{(7)}(x) = ?$;
   (c) $f(x) := e^x \cdot \cos(x) \quad (\in \mathbb{R})$, $f^{(3)}(x) = ?$.

3. Igazoljuk, hogy ha $l : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre

$$l_1 = 1, \qquad l_{n+1} = 2l_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

   akkor fennáll az

$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

[12] Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, q \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}, \quad P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}.$$

egyenlőség (vö. „Hanoi tornyai”-feladat: Analízis 1 (68. oldal))!

4. Számítsuk ki az $f := \operatorname{arctg}$ függvény negyedik deriváltját, majd írjuk fel a 0 és az 1 körüli negyedik Taylor-polinomját!

5. Legyen $m \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy a P_m Legendre-polinomnak a $[-1, 1]$ intervallumban pontosan m zérushelye van!

6. Lássuk be, hogy a
$$\sum_{k=1} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$
sor konvergens és határozzuk meg az összegét!

7. Írjuk fel az
$$f(x) := \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad (x \in (-1, 1))$$
függvény 0-körüli Taylor-sorát! Hol állítja elő a Taylor-sor az f függvényt?

8. Igazoljuk, hogy bármely $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőtlenségpárok!

   (a) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin(x) < x$;

   (b) $1 - \dfrac{x^2}{2!} < \cos(x) < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$.

9. Mutassuk meg, hogy fennáll az
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
egyenlőség!

Útm.

1. Legyen
$$\varphi(x) := (x^2-1)^m \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$(x^2-1)\varphi'(x) = (x^2-1)m(x^2-1)^{m-1}2x = 2mx(x^2-1)^m = 2mx\varphi(x),$$
így mindkét oldal $(m+1)$-edik deriváltját véve – a Leibniz-szabály felhasználásával – azt kapjuk, hogy
$$(x^2-1)\varphi^{(m+2)}(x) + 2(m+1)x\varphi^{(m+1)}(x) + (m+1)m\varphi^{(m)}(x) = 2mx\varphi^{(m+1)}(x) + 2m(m+1)\varphi^{(m)}(x).$$
ahonnan
$$(x^2-1)\varphi^{(m+2)}(x) - 2x\varphi^{(m+1)}(x) + m(m+1)\varphi^{(m)}(x) = 0$$

következik. A tetszőeeges $x \in \mathbb{R}$ esetén fennálló

$$\varphi^{(m+2)}(x) = 2^m m! P_m''(x), \qquad \varphi^{(m+1)}(x) = 2^m m! P_m'(x), \qquad \varphi^{(m)}(x) = 2^m m! P_m(x)$$

egyenlőségek figyelembe vételével az igazolandó állítát kapjuk.

2. (a) Legyen

$$\varphi, \psi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^4 + 1, \quad \psi(x) = \ln(x).$$

Ekkor

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in (0, +\infty)),$$

és bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre és $x \in (0, +\infty)$ számra

$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{4!}{(4-k)!} \cdot x^{4-k} & (k \in \{1, 2, 3, 4\}), \\[2ex] 0 & (4 < k \in \mathbb{N}), \end{cases} \qquad \psi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^{k-1}}.$$

A Leibniz-szabály következtében így tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} f^{(5)}(x) &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(5-k)}(x) = \\ &= \binom{5}{0} \cdot (x^4+1) \cdot \frac{24}{x^5} + \binom{5}{1} \cdot 4x^3 \cdot \left(-\frac{6}{x^4}\right) + \binom{5}{2} \cdot 12x^2 \cdot \frac{2}{x^3} + \binom{5}{3} \cdot 24x \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \binom{5}{4} \cdot 24 \cdot \frac{1}{x} + \binom{5}{5} \cdot 0 \cdot \ln(x) = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \left\{ 24 \cdot \frac{x^4+1}{x^4} - 5 \cdot 24 + 10 \cdot 24 - 10 \cdot 24 + 5 \cdot 24 + 0 \right\} = \frac{24}{x}\left(1 + \frac{1}{x^4}\right). \end{aligned}$$

(b) Legyen

$$\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := x^2, \quad \psi(x) = \sin(x).$$

Ekkor

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és bármely $k \in \mathbb{N}$ indexre és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{2!}{(2-k)!} \cdot x^{2-k} & (k \in \{1, 2\}), \\[2ex] 0 & (2 < k \in \mathbb{N}), \end{cases} \qquad \psi^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

A Leibniz-szabály következtében így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f^{(7)}(x) &= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cdot \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(5-k)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{7}{k} \cdot \varphi^{(k)}(x) \cdot \psi^{(7-k)}(x) = \\ &= \binom{7}{0} \cdot x^2 \cos(x) + \binom{7}{1} \cdot 2x(-\sin(x) + \binom{7}{2} \cdot 2(-\cos(x)) = -x^2 \cos(x) - 14x \sin(x) + 42 \cos(x). \end{aligned}$$

(c) Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)), \qquad f''(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + e^x(-\sin(x) - \cos(x)) = -2e^x \sin(x),$$

és

$$f'''(x) = -2e^x \sin(x) - 2e^x \cos(x) = -2e^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

3. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$0 < l_n \leq 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A
$$\sum_{n=0} (|l_n x^n|) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

sornak majoránsa a

$$\sum_{n=0} (|2^n x^n|) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

sor, ez pedig tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1/2$ esetén konvergens, így a

$$\sum_{n=0} (l_n x^n) \qquad (x \in \mathbb{R}: \ |x| < 1/2)$$

sor abszolút konvergens. Ezért az (l_n) sorozatnak generátorfüggvénye az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n \qquad (|x| < 1/2)$$

függvény, ahol $l_0 := 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x) &= l_1 + \sum_{n=2}^{\infty} l_n x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (2l_{n-1} + 1) x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2l_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2l_n x^{n+1} + \frac{x}{1-x} - 1 = 2x \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n + \frac{x}{1-x} = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Így egy egyenletet kapunk $f(x)$-re, amiből

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{(1-x)-(1-2x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1/2).$$

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \min\{1, 1/2\} = 1/2$ esetén

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{2^n - 1\} x^n,$$

ezért az egyértelműségi tétel következtében

$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

4. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \\ f''(x) &= \frac{-2 \cdot x}{(1+x^2)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{-2 \cdot (1+x^2)^2 \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot (1+x^2)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{12 \cdot x \cdot (1+x^2)^3 - (6x^2-2) \cdot 3 \cdot (1+x^2)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^6} = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}, \end{aligned}$$

ezért

$$f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -2, \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

és

$$f'(1)=\frac{1}{2},\qquad f''(1)=-\frac{1}{2},\qquad f'''(1)=\frac{1}{2},\qquad f^{(4)}(1)=0.$$

Mivel

$$f(0)=0,\qquad \text{ill.}\qquad f(1)=\frac{\pi}{4},$$

ezért az f függvény 0 körüli negyedik Taylor-polinomja

$$T_4(x)=\sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k=0+\frac{1}{1!}x+0+\frac{-2}{3!}x^3+0=x-\frac{1}{3}x^3\qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ill. 1 körüli negyedik Taylor-polinomja

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k= \\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2\cdot 1!}(x-1)-\frac{1}{2\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{1}{2\cdot 3!}(x-1)^3+0= \\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3\qquad (x\in\mathbb{R}).\quad\blacksquare \end{aligned}$$

5. A Leibniz-szabály következtében tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{2^m m!}\cdot\frac{d^m}{dx^m}\left((x-1)^m(x+1)^m\right)=\frac{1}{2^m m!}\cdot\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cdot\frac{d^k}{dx^k}(x-1)^m\cdot\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}(x+1)^m= \\ &= \frac{1}{2^m m!}\cdot\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cdot\frac{m!}{(m-k)!}(x-1)^{m-k}\cdot\frac{m!}{(m-(m-k))!}(x+1)^{m-(m-k)}= \\ &= \frac{1}{2^m m!}\cdot\sum_{k=0}^{m}m!\cdot\binom{m}{k}^2\cdot(x-1)^{m-k}(x+1)^k. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy P_m m-edfokú polinom, így P_m-nek legfeljebb m valós gyöke lehet. Mivel az

$$f(x):=2^m m!P_m(x)=(x^2-1)^m\qquad (x\in\mathbb{R})$$

polinomnak a ± 1 n-szeres gyökei, ezért tetszőleges $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ esetén az $f^{(k)}$ polinomnak ± 1 $(n-k)$-szoros gyökei. Így a Rolle-tétel m-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy f-nek legalább m gyöke van a $[-1,1]$ intervallumban.

6. Mivel

$$\ln^{(n)}(1+x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\qquad (x\in(-1,1]),$$

ezért tetszőleges $x\in(0,1]$ esetén van olyan $\xi\in(0,x)$, hogy

$$\ln(1+x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln^{(k)}(1+x)}{k!}x^k=\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1},$$

azaz

$$\left|\ln(1+x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln^{(k)}(1+x)}{k!}x^k\right|=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\le\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+0)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\longrightarrow 0\quad (n\to\infty).$$

Tehát

$$\boxed{\ln(2)}=\ln(1+1)=\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}}.$$

7. Mivel tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, ezért

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1+x)^3}$$

ahonnan indukcióval

$$f^{(n)}(x) = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} + \frac{(-1)^n \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (x \in (-1,1)), \qquad \text{ill.} \qquad f^{(n)}(0) = -(n-1)! + (-1)^n \cdot (n-1)! = [-1 + (-1)^n] \cdot (n-1)!$$

következik. Következésképpen f 0-körüli Taylor-sora

$$\sum_{n=0} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \right) = \sum_{n=0} \left(\frac{-1+(-1)^n}{n} \cdot x^n \right) = \sum_{n=0} \left(\frac{-2}{2n+1} \cdot x^{2n+1} \right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyezzük, hgy a 6. gyakorlaton bizonyítottakból következik, hogy bármely $x \in (-1,1)$ esetén

$$f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-x)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot [(-1)^n - 1] \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{2n+1} \cdot x^{2n+1}.$$

Innen persze az is következik, hogy a Taylor sor az egész $(-1,1)$ intervallumon előállítja f-et.

8. (a) Az $f := \sin$ függvény 0-körüli második Taylor-polinomja:

$$T_2(x) = \sin(0) + \sin'(0)x + \sin''(0)\frac{x^2}{2} = x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

a megfelelő maradéktag pedig $R_2 = \sin - T_2$ alakú, azaz tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, ill alkalmas $\xi \in (0,x)$ számokra

$$R_2(x) = \frac{\sin'''(\xi)}{3!} \cdot x^3 = (-\cos(\xi)) \cdot \frac{x^3}{3!}.$$

Mivel bármely $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ számra $0 < \cos(\xi) < 1$, ezért

$$-\frac{x^3}{3!} < R_2(x) < 0,$$

ahonnan

$$R_2(x) = \sin(x) - T_2(x) = \sin(x) - x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

felhasználásával a kívánt egyenlőtlenségpár igazoltnak tekinthető.

(b) Az $f := \cos$ függvény 0-körüli harmadik Taylor-polinomja:

$$T_3(x) = \cos(0) + \cos'(0)x + \cos''(0)\frac{x^2}{2} + \cos'''(0)\frac{x^3}{6} = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

a megfelelő maradéktag pedig $R_3 = \cos - T_3$ alakú, azaz tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ill alkalmas $\xi \in (0,x)$ számokra

$$R_3(x) = \frac{\cos^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4 = (\cos(\xi)) \cdot \frac{x^4}{4!}.$$

Ennélfogva

$$0 < R_3(x) < \frac{x^4}{4!},$$

ahonnan a kívánt egyenlőtlenségpár fennállása már következik.

9. **1. módszer.** Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned}\frac{e^x+e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left\{e^x+e^{-x}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n!}\cdot x^n = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}\cdot x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

2. módszer. Ha

$$f(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor $f \in \mathfrak{D}^{\infty}$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} & (n \equiv 0\,(2)), \\ \frac{e^x-e^{-x}}{2} & (n \equiv 1\,(2)). \end{cases}$$

Így

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = f(x) = f(0)+f(0)\cdot x+\frac{f(0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f(0)^n}{n!}+R_n(x) = 1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_n(x),$$

ahol alkalmas $\xi \in (0,x)\cup(x,0)$ esetén

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$R_n(x) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladatok.

1. Legyen $m \in \mathbb{N}$. Lássuk be, hogy az

$$L_m(x) := e^x \cdot \frac{d^m}{dx^m}\left(x^m e^{-x}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Laguerre-polinomokra fennáll az

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL_m(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség!

2. Legyen $m \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy az

$$H_m(x) := (-1)^m e^{x^2}\cdot\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-x^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Hermite-polinomokra fennáll a

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség!

3. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Számítsuk ki az alábbi függvények n-edik deriváltját!

   (a) $f(x) := \ln(1+x) \quad (x \in (-1, +\infty))$;

   (b) $f(x) := \sin^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (c) $f(x) := \sin^4(x) + \cos^4(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (d) $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (e) $f(x) := \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (x \in \mathbb{R};\ a, b, c, d \in \mathbb{R}:\ c \neq 0)$;

   (f) $f(x) := \ln\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right) \quad \left(x \in \left(-\dfrac{a}{b}, \dfrac{a}{b}\right);\ 0 < a, b \in \mathbb{R}\right)$;

   (g) $f(x) := \mathrm{arctg}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (h) $f(x) := \frac{x}{\sqrt[n]{1+x}} \quad (-1 < x \in \mathbb{R})$;

   (i) $f(x) := x\cos(ax) \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$;

   (j) $f(x) := x^2 \sin(ax) \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$;

   (k) $f(x) := e^x \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (l) $f(x) := x^n e^x \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (m) $f(x) := \cos^3(x) \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (n) $f(x) := \sin^2(ax)\cos(bx) \quad (x \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R})$;

4. Adott $0 \leq x \leq 1$ esetén adjunk felső becslést az

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|$$

számra, és ennek alapján határozzuk meg $\ln(3/2)$ egy közelítő értékét $(=:\ \alpha)$, majd becsüljük meg (felülről) az $|\ln(3/2) - \alpha|$ eltérést!

5. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy aigaz az

$$f \text{ konvex} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x, y \in I: \quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$$

ekvivalencia!

6. Lássuk be, hogy tetszőleges $\alpha \in [1, +\infty)$, ill. $x \in (-1, +\infty)$ esetén fennáll az

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

egyenlőtlenség (**Bernoulli-egyenlőtlenség**)!

7. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény: $f \in \mathfrak{D}^2$, továbbá

$$M_k := \sup\left\{|f^{(k)}(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\right\} \qquad (k \in \{0,1,2\}),$$

akkor fennáll az

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2$$

Landau-Kolmogorov-egyenlőtlenség!

8. Igazoljuk, hogy ha a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre

$$\varphi'(x) = x + \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \varphi(0) = 0$$

teljesül, akkor $\varphi \in \mathfrak{D}^\infty$, majd írjuk fel a φ függvény 0-körüli n-edik Taylor-polinomját! A Taylor-polinom felhasználásával számítsuk ki a $\varphi(1)$ helyettesítési értéket!

Útm.

1. coming soon
2. coming soon
3. coming soon
4. Legyen

$$f(x) := \ln(1+x) \qquad (x \in (-1, +\infty)).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4},$$

ill.

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = -1, \qquad f'''(0) = 2,$$

Így

$$\begin{aligned}
\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right| &= \left|f(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k\right| = |f(x) - T_3(x)| = \\
&= \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (x-0)^4\right| = \left|\frac{6}{24(1+\xi)^4} \cdot x^4\right| = \\
&= \frac{1}{4(1+\xi)^4} \cdot x^4 < \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$(0 < \xi < x, \text{ ill. } \xi = 0, \text{ ha } x = 0),$$

valamint $\ln(3/2)$ egy közelítő értéke:

$$\ln(3/2) = \ln(1 + 1/2) \approx 1/2 - \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^3}{3} = \frac{5}{12} =: \alpha$$

és

$$|\ln(3/2) - \alpha| < \frac{1}{4 \cdot 16} = \frac{1}{64} = 0,015625.$$

5. **1. lépés.** Mivel $f \in \mathfrak{D}^2$, ezért f konvexitásának következtében $f'' \geq 0$. Így tetszőleges $y \in I$ esetén az f függvény y-körüli első Taylor-polinomja:

$$T_1(x) = f(y) + f'(y)(x - y) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen alkalmas $\xi \in (x, y) \cup (y, x)$ (ha $x = y$, akkor $\xi := x = y$) esetén

$$f(x) = f(y) + f'(y)(x - y) + \frac{f'(\xi)}{2}(x - y)^2$$

Ha $x \neq y$, akkor $\xi \neq x$ és $\xi \neq y$. Ennélfogva $f''(\xi) \geq 0$, ahonnan

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y) + 0 = f(y) + f'(y)(x - y)$$

következik.

2. lépés. Tudjuk, hogy f pontosan akkor konvex, ha tetszőleges $a, b \in I$ esetén igaz az

$$x \in (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

implikáció. Világos, hoga a

$$\varphi(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (x \in (a, b])$$

függvény differenciálható, továbbá a feltételek következtében tetszőleges $x \in (a, b]$ esetén

$$\varphi'(x) = \frac{(x - a)f'(x) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2} = \frac{f(a) - f(x) - f'(x)(x - a)}{(x - a)^2} \geq 0.$$

Ez azt jelenti, hogy φ monoton növekedő. Következésképpen $\varphi(x) \leq \varphi(b)$.

6. Az

$$f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := (1 + x)^{\alpha}$$

függvény nyilvánvalóan kétszer differenciálható, továbbá tetszőleges $-1 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha - 1} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \alpha(\alpha - 1)^{\alpha - 2}.$$

Következésképpen $f'' \geq 0$, azaz f konvex, így az előző feladatbeli állítás felhasználásával ($y := 0$) azt kapjuk, hogy

$$(1 + x)^{\alpha} = f(x) \geq f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + \alpha x.$$

7. A Lagrange-maradéktagos Taylor-formula következtében bármely $x, h \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

ahol ξ az x és $x + h$ által meghatározott nyílt intervallumban van (illetve $h = 0$ esetén $\xi := x$).

1. eset. $M_0, M_1, M_2 < +\infty$. Ekkor, ha valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén

- $f(x) \geq 0$, úgy

$$0 \leq f(x) = f(x + h) - f'(x)h - \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \leq M_0 - f'(x)h + \frac{M_2}{2}h^2.$$

Mivel ez tetszőleges $h \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, ezért $|f'(x)|^2 \leq 2M_0M_2$.

- $f(x) \leq 0$, úgy
$$0 \leq -f(x) = -f(x+h) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \leq M_0 + f'(x)h + \frac{M_2}{2}h^2.$$
Mivel ez tetszőleges $h \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, ezért $|f'(x)|^2 \leq 2M_0M_2$.

Az $|f'(x)|^2 \leq 2M_0M_2$ egyenlőtlenség tehát minden $x \in \mathbb{R}$ pontban fennáll, amiből már következik, hogy
$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

2. eset. M_0, M_1, M_2 nem mindegyike véges. Elég azt megmutatni, hogy ha $M_1 = +\infty$, akkor M_0 és M_2 közül legalább az egyik $+\infty$. Ha ez nem igaz, akor a minden $x, h \in \mathbb{R}$ esetén fenálló
$$|f'(x)h| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}h^2$$
egyenlőtlenségből az $M_1 = +\infty$ feltételünkkel ellentmondásra jutunk.

Könnyen megmutatható, hogy az
$$f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+\frac{229}{77}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvényre $M_1^2 = 2M_0M_2$. Ez azt jelenti, hogy a fenti becslés nem javítható.

8. Világos, hogy $\varphi \in \mathfrak{D}^\infty$ és
$$\varphi^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \in \{0;1\}), \\ 1 & (1 < n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$
ui. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\begin{array}{lll} \varphi'(x) = x + \varphi(x), & \varphi(0) = 0 & \varphi'(0) = 0, \\ \varphi''(x) = 1 + \varphi'(x), & & \varphi''(0) = 1, \\ \varphi'''(x) = \varphi''(x), & & \varphi'''(0) = 1, \\ \varphi^{(4)}(x) = \varphi'''(x), & & \varphi^{(4)}(0) = 1, \\ \varphi^{(5)}(x) = \varphi^{(4)}(x), & & \varphi^{(5)}(0) = 1, \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$
Így φ 0-körüli n-edik Taylor-polinomja:
$$T(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Látható, hogy
$$T(x) \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Így
$$\varphi(x) = e^x - x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
ahonnan $\varphi(1) = e - 2$ következik. ■

2020.12.13.

1.11. 11. oktatási hét (2020.11.18.)

Szükséges előismeretek.

1. Definiálja a primitív függvényt!

   Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, F : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a F függvény primitív függvénye az f függvénynek, ha $F \in \mathfrak{D}$ és $F' = f$.

2. Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek *nincs* primitív függvénye!

   Válasz: A sgn függvénynek nincsen primitív függvénye, ui. nem Darboux-tulajdonságú.

3. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

   Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Az f függvény határozatlan integrálja a

   $$\int f := \int f(x)\,dx := \{F : I \to \mathbb{R} :\ F \in \mathfrak{D},\ F' = f\}$$

   (függvény)halmaz.

4. Milyen állítást ismer a primitív függvények számával kapcsolatban?

   Válasz: Ha $F \in \int f \neq \emptyset$, akkor

   $$\int f = \{F + c : I \to \mathbb{R} :\ c \in \mathbb{R}\}.$$

5. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

   Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\int f \neq \emptyset$ és $\int g \neq \emptyset$. Ekkor tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

   $$\int (f + \alpha g) = \int f + \alpha \int g.$$

6. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás* tétele?

   Válasz: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $f, g \in \mathfrak{D}$, ill. $\int f'g \neq \emptyset$. Ekkor

   $$\int fg' = fg - \int f'g.$$

7. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?

   Válasz: Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$. Ha $g \in \mathfrak{D}$ és $\int f \neq \emptyset$, akkor $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$ és

   $$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g.$$

8. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt*!

   Válasz: Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$. Ha g bijektív és $g \in \mathfrak{D}$, akkor $\int f \neq \emptyset$ és

   $$\int f = \left(\int (f \circ g) \cdot g'\right) \circ g^{-1}.$$

Az óra anyaga.

Feladat. Az

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény esetén adjuk meg az összes olyan deriválható $F : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $F' = f$ teljesül!

Útm.

$$F(x) := \begin{cases} \ln(x) + c & (0 < x \in \mathbb{R}), \\ \\ \ln(-x) + d & (0 > x \in \mathbb{R}) \end{cases} \qquad (c, d \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

A továbbiakban $I \subset \mathbb{R}$ mindig nyílt intervallumot jelöl.

Emlékeztető. Adott $f : I \to \mathbb{R}$ esetén a $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt a f függvény **primitív függvény**ének neveztük, ha $F \in \mathfrak{D}$ és $F' = f$.

Példa. A $F := -\cos$ függvény a $f := \sin$ függvény primitív függvénye, ui. $F \in \mathfrak{D}$ és $F' = f$.

Példa. A

$$F(x) := \ln(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény a

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvény primitív függvénye, ui. $F \in \mathfrak{D}$ és $F' = f$.

Példa. A

$$F(x) := \ln(-x) \qquad (0 > x \in \mathbb{R})$$

függvény a

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 > x \in \mathbb{R})$$

függvény primitív függvénye, ui. $F \in \mathfrak{D}$ és

$$F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = f(x) \qquad (0 > x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzések.

1. Mivel a **Darboux-tétel** szerint, bármely függvény deriváltja ún. Darboux-tulajdonságú függvény ezért azoknak a függvényeknek, amelyek nem rendelkeznek a szóban forgó tulajdonsággal, nyilván nincs primitív függvényük. Ilyen pl. az előjelfüggvény.

2. Minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.

Emlékeztető. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$. Így, ha

1. F az f primitív függvénye, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye f-nek, ui. ekkor $F + c \in \mathfrak{D}$ és
$$(F + c)' = f + 0 = f.$$

2. F_1 és F_2 az f primitív függvénye, akkor $F_1 - F_2$ állandófüggvény, hiszen mindekettő értelmezési tartomány az I nyílt intervallum és
$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti emlékeztetőben az a feltétel, hogy f értelmezési tartománya intervallum lényeges (ellenkező esetben nem igaz az állítás).

Példa. Az
$$f(x) := \begin{cases} 2x & (x \in (0,1)), \\ 0 & (x \in (2,3)) \end{cases}$$
függvény, ill. a
$$F_1(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in (0,1)), \\ 1 & (x \in (2,3)), \end{cases} \qquad F_2(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in (0,1)), \\ 0 & (x \in (2,3)) \end{cases}$$
függvények esetében $F_1' = f = F_2'$, de $F_1 - F_2$ nem állandófüggvény:
$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 0 & (x \in (0,1)), \\ 1 & (x \in (2,3)). \end{cases}$$

Példa. A
$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in (2,3)), \\ 2 & (x \in (5,6)) \end{cases}$$
függvény ill. a
$$F_1(x) := \begin{cases} x & (x \in (2,3)), \\ 2x & (x \in (5,6)), \end{cases} \qquad F_2(x) := \begin{cases} x - 3 & (x \in (2,3)), \\ 2x + 7 & (x \in (5,6)) \end{cases}$$
függvények esetében $F_1' = f = F_2'$, de $F_1 - F_2$ nem állandófüggvény:
$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 3 & (x \in (2,3)), \\ -7 & (x \in (5,6)). \end{cases}$$

Emlékeztető. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát az f függvény **határozatlan integrál**jának neveztük és az

$$\int f \quad \text{(olv. „integrál ef”)}, \qquad \text{ill. az} \qquad \int f(x)\,dx \quad \text{(olv. „integrál efikszdéiksz”)}$$

szimbólummal jelöltük.

Ha tehát F primitív függvénye f-nek: $F \in \int f$, akkor az előző tétel értelmében

$$\int f = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\} =: [F].$$

Ezt az egyenlőséget kevésbé pontos, de a hagyományoknak jobban megfelelő formában a következőképpen írjuk:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c =: [F(x)]_{x\in I} \qquad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$

Példák.

1. $\displaystyle\int \sin = \{-\cos + c :\ c \in \mathbb{R}\};$
2. $\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$
4. $\displaystyle\int \operatorname{sgn} = \emptyset.$

Példa.

$$\begin{aligned}\int \cos^4(x)\,dx &= \int \left(\cos^2(x)\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4}\right) dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} + \\ &\quad + \int \frac{1+\cos(4x)}{8}\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Házi feladat. $\displaystyle\int \sin^4(x)\,dx = ?$

Megjegyzések. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén igazak az alábbi trigonometrikus, ill. hiperbolikus összefüggések:

1.
   - $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (**négyzetes összefüggés**)
   - $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ (**addíciós képlet**);
   - $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$ (**addíciós képlet**);
   - $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ (**az argumentum kétszeresén felvett értékek**);
   - $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ (**linearizáló formulák**);
2.
   - $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ (**négyzetes összefüggés**);
   - $\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$ (**addíciós képlet**);
   - $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}(x)\cos(y) \pm \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$ (**addíciós képlet**);
   - $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$ (**az argumentum kétszeresén felvett értékek**);
   - $\mathrm{sh}^2(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}$, $\mathrm{ch}^2(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}$ (**linearizáló formulák**).

Feladat. Tanulmányozzuk (tanuljuk meg úgy, hogy tudjuk könyv nélkül) a alapintegrálok táblázatát)!

Feladat. Elemi átlakítások felhasználásával határozzuk meg $\int f$-et az alábbi esetekben!

1. $f(x) := x^4 - 3x^2 + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$,
2. $f(x) := 3x^4 + 4x^{-5} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,
3. $f(x) := \dfrac{\sqrt{2 + x^4 + x^{-4}}}{x^3} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,
4. $f(x) := \dfrac{x^2+3}{x^2-1} \quad (1 < x \in \mathbb{R})$,
5. $f(x) := \sqrt[3]{x^2} + 10^x \quad (x \in \mathbb{R})$,
6. $f(x) := \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. $\displaystyle\int \left(x^4-3x^2+5\right)\,dx=\frac{x^5}{5}-x^3+5x+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

2. $\displaystyle\int \left(3x^4+4x^{-5}\right)\,dx=\frac{3x^5}{5}-x^{-4}+c=\frac{3x^5}{5}-\frac{1}{x^4}+c \quad (0<x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x^4+x^{-4}}}{x^3}\,dx=\int\frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3}\,dx=\ln(x)-\frac{1}{4x^4}+c \quad (0<x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx=\int\frac{x^2-1+4}{x^2-1}\,dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=x-4\,\mathrm{arcth}(x)+c \quad (1<x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

5. $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x^2}+10^x\right)dx=\int\left(x^{2/3}+10^x\right)dx=\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+\frac{10^x}{\ln(10)}+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

6. $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}\,dx=\int\sqrt{x\sqrt[12]{x^5}}\,dx=\int\sqrt[24]{x^{17}}\,dx=\int x^{17/24}\,dx=\frac{24}{41}x\sqrt[24]{x^{17}}+c \quad (x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).\ \blacksquare$

Tétel. Ha $I,J\subset\mathbb{R}$ intervallum, $\varphi:I\to J$, $\varphi\in\mathfrak{D}$, $f:J\to\mathbb{R}$, $f\in\mathfrak{D}$, akkor

$$\boxed{\int (f'\circ\varphi)\cdot\varphi'=f\circ\varphi+c}$$

vagyhagyományos jelöléssel

$$\boxed{\int f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=f(\varphi(x))+c \qquad (x\in I,\ c\in\mathbb{R})}.$$

Biz. Mivel f is φ is deriválható, ezért $f\circ\varphi$ is az és

$$(f\circ\varphi)'(x)=(f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) \qquad (x\in I).\quad\blacksquare$$

Példák.

1. $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

2. $\displaystyle\int\frac{1}{x(1+\ln^2(x))}\,dx=\int\frac{1}{1+\ln^2(x)}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\mathrm{arctg}(\ln(x))+c \quad (x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).$

3. $\displaystyle\int\frac{e^x}{1+e^{2x+1}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\sqrt{e}e^x}{1+(\sqrt{e}e^x)^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\mathrm{arctg}\left(e^{x+1/2}\right)+c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

4. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg}(x)}}{\cos^2(x)}\,dx = \int e^{\operatorname{tg}(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = e^{\operatorname{tg}(x)} + c \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$

5. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x\,dx = \arcsin(e^x) + c \quad (x \in (-\infty, 0),\ c \in \mathbb{R}).$

Tétel. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in I$ esetén $f(x) > 0$. Ekkor fennáll a

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})}$$

egyenlőség.
Biz. Ha

$$\varphi(x) := \ln(f(x)) \qquad (x \in I),$$

akkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \qquad (x \in I). \quad \blacksquare$$

Példák.

1. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln\left(x^2+1\right) + c \quad (x \in \mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R});$

2. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+27}\,dx = \ln\left(\sqrt{x^2-6x+27}\right) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \ln\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

4. $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln(\cos(x)) + c = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) + c \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right);$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = \ln(\ln(x)) + c \quad (x \in (1, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$

Tétel. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$,$f \in \mathfrak{D}$, valamint tetszőleges $x \in I$ esetén $f(x) > 0$, továbbá $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor fennáll az

$$\boxed{\int f^{\alpha}(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})}$$

egyenlőség.
Biz. Ha

$$\varphi(x) := \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} \qquad (x \in I),$$

akkor $\varphi \in \mathfrak{D}$ és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot f^{\alpha}(x) \cdot f'(x) \qquad (x \in I). \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor a fenti tételben az

$$f(x) > 0 \qquad (x \in I)$$

feltétel elhagyható.

Példák.

1. $$\int x^3(1-2x^4)^{2020}\,dx = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \int (-8)x^3(1-2x^4)^{2020}\,dx = -\frac{(1-2x^4)^{2021}}{8\cdot 2021} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$$

2. $$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \int (-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{-\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R});$$

3. $$\int x^2\sqrt{2x^3+3}\,dx = \frac{\sqrt{(2x^3+3)^3}}{9} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$$

4. $$\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int \left[x\left(1+x^2\right) - x\right]\sqrt[3]{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int x\sqrt[3]{(1+x^2)^4}\,dx - \int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^7}}{14} - \frac{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}{8} + c$$
$(x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$;

5. $$\int e^x(1-e^x)^2\,dx = -\frac{(1-e^x)^3}{3} + c = \frac{(e^x-1)^3}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$$

6. $$\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(1+e^x)^2}}{2} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

Emlékeztető. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $f, g \in \mathfrak{D}$, ill. $\int f'g \neq \emptyset$. Ekkor

$$\boxed{\int fg' = fg - \int f'g}.$$

Megjegyezzük, hogy a parciális integrálásra különösen alkalmas függvények típusai a következők.

1. típus. $\boxed{\int p(x)\cdot t(ax+b)\,dx \quad (a,b,x\in\mathbb{R}:\ a\neq 0),}$ ahol p polinom és $t\in\{\exp,\sin,\cos,\mathrm{sh},\mathrm{ch}\}$.

Ebben az esetben legyen

$$f'(x) := t(ax+b) \quad \text{és} \quad g(x) := p(x) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Annyi parciális integrálásra lesz szükség, mint amennyi a p foka.

2. típus. $\boxed{\int x^{\alpha}\ln^{n}\left(x^{\beta}\right)\,dx \quad (0<x\in\mathbb{R};\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha\neq -1;\ n\in\mathbb{N})}$.

Ebben az esetben legyen

$$f'(x) := x^{\alpha} \quad \text{és} \quad g(x) := \ln^{n}\left(x^{\beta}\right) \qquad (0<x\in\mathbb{R}).$$

Itt n darab parciális integrálásra lesz szükség.

3. típus. $\boxed{\int t_1(ax+b)\cdot t_2(ax+b)\,dx \quad (a,b,c,d,x\in\mathbb{R}:\ ac\neq 0),}$ ahol $t_1,t_2\in\{\exp,\sin,\cos,\mathrm{sh},\mathrm{ch}\}$.

Ebben az esetben legyen

$$f'(x) := t_1(ax+b) \quad \text{és} \quad g(x) := t_2(cx+d) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

4. típus. $\boxed{\int p(x)\cdot i(x)\,dx \quad (x\in\mathcal{D}_i),}$ ahol p polinom és $i\in\{\ln,\mathrm{arc},\mathrm{area}\}$.

Ebben az esetben

$$f' := p \qquad \text{és} \qquad g := i.$$

„5. típus”. Nem tartoznak a fenti típusok egyikébe sem, de a parciálisan integrálás módszerével célszerű meghatározni ezeket az integrálokat.

Példa. Az 1. típusban említett módszerrel határozhatók meg az alábbi integrálok.

- $\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$
- $\int x^2e^{2x}\,dx = \frac{x^2e^{2x}}{2} - \int xe^{2x}\,dx = \frac{x^2e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + c$ $(x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$

- $\int x^2 \sin(5x)\,dx = \frac{-\cos(5x)x^2}{5} + \frac{2}{5}\int x\cos(5x)\,dx = \frac{-\cos(5x)x^2}{5} + \frac{\sin(5x)2x}{25} - \frac{2}{25}\int \sin(5x)\,dx =$
$= \frac{-\cos(5x)x^2}{5} + \frac{\sin(5x)2x}{25} + \frac{2\cos(5x)}{125} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

Példa. A 2. típusban említett módszerrel határozhatók meg az alábbi integrálok.

- $\int x\ln^2\left(x^3\right)\,dx = \frac{x^2\ln^2\left(x^3\right)}{2} - \int 3x\ln\left(x^3\right)\,dx = \frac{x^2\ln^2\left(x^3\right)}{2} - \frac{3x^2\ln\left(x^3\right)}{2} + + \frac{9}{2}\int x\,dx =$
$= \frac{x^2\ln^2\left(x^3\right)}{2} - \frac{3x^2\ln\left(x^3\right)}{2} + \frac{9x^2}{4} + c \quad (x \in (0,+\infty),\ c \in \mathbb{R}).$
- $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln(x) - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln(x) - \int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx == 2\sqrt{x}\ln(x) - 4\sqrt{x} + c$
$(x \in (0,+\infty),\ c \in \mathbb{R}).$

Példa. A 3. típusban említett módszerrel határozhatók meg az alábbi integrál.

$$\int e^{2x}\sin^2(x)\,dx = \int e^{2x}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos(2x),$$

ahol

$$\int e^{2x}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x) + \int e^{2x}\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x) + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x) - \int e^{2x}\cos(2x)\,dx,$$

így

$$\int e^{2x}\cos(2x) = \frac{e^{2x}}{4}(\cos(2x)+\sin(2x)) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

Szintén a 3. típusban említett módszerrel határozható meg az

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx \qquad (a,b,x \in \mathbb{R}:\ ab \neq 0)$$

integrál.

1. módszer.

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin(bx)\,dx &= -e^{ax}\frac{\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \\
&= -e^{ax}\frac{\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\left(e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx\right) = \\
&= \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,
\end{aligned}$$

Így
$$\underbrace{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}_{\frac{b^2+a^2}{b^2}} \cdot \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)),$$

ill.
$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + c \qquad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$$

2. módszer. Két különböző módon parciálisan integrálunk: egyszer az

$$f'(x) := \sin(bx) \qquad \text{és} \qquad g(x) := e^{ax} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

választással, majd az
$$f'(x) := e^{ax}, \qquad g(x) := \sin(bx) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

választással:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx \;=\; -e^{ax}\frac{\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx, \qquad (*)$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx \;=\; \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx. \qquad (**)$$

$(*)$-t $\frac{b}{a}$-val, $(**)$-ot $\frac{a}{b}$-vel szorozva és összeadva azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)}_{\frac{b^2+a^2}{ab}}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{b}\sin(bx) - \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx)\,,$$

amiből
$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + c \quad (x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R})$$

következik.

Példa. A 4. típusban említett módszerrel határozhatók meg az alábbi integrálok.

- $\displaystyle\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln(x) - x + c \quad (x\in(0,+\infty),\ c\in\mathbb{R}).$
- $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c \quad (x\in(-1,1),\ c\in\mathbb{R}).$

Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{x+4}} \qquad (x \in (-4, +\infty))$$

függvény primitív függvényeinek halmazát!

Útm. Két módszert is használunk az integrál kiszámítására.

1. módszer. Ha $x \in (-4, +\infty)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = 2x\sqrt{x+4} - \int 2\sqrt{x+4}\,dx = 2x\sqrt{x+4} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+4)^3} + c.$$

2. módszer. Ha $x \in (-4, +\infty)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx &= \int \frac{x+4-4}{\sqrt{x+4}}\,dx = \int \left(\sqrt{x+4} - \frac{4}{\sqrt{x+4}}\right) dx = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + c.\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a kétféle módszerrel kapott eredmény azonos. A

$$\varphi(x) := 2x\sqrt{x+4} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+4)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} + 8\sqrt{x+4} \qquad (x \in (-4, +\infty))$$

függvény deriválható és deriváltjára

$$\varphi'(x) = 2\sqrt{x+4} + \frac{x}{\sqrt{x+4}} - 2\sqrt{x+4} - \sqrt{x+4} + \frac{4}{\sqrt{x+4}} = 0 \qquad (x \in (-4, +\infty))$$

teljesül. Így alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(x) = c$ $(x \in (-4, +\infty))$. Mivel $\varphi(0) = 0$, ezért

$$\varphi(x) = 0 \quad (x \in (-4, +\infty)). \quad \blacksquare$$

Házi feladatok.

1. Elemi átlakítások felhasználásával határozzuk meg $\int f$-et az alábbi esetekben!

   (a) $f(x) := \dfrac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,

   (b) $f(x) := \mathrm{tg}^2(x) + \mathrm{ctg}^2(x) \quad \left(x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,

   (c) $f(x) := \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - 2}{\mathrm{ch}(2x) + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

   (d) $f(x) := \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$,

   (e) $f(x) := \dfrac{5}{4 - 4x^2} \quad (x \in (-1, 1))$,

   (f) $f(x) := \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \quad (x \in (-1, 1))$,

   (g) $f(x) := \dfrac{x^2}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

   (h) $f(x) := \dfrac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)} \quad \left(x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

2. Számítsuk ki $\int f$-et az alábbi esetekben!

   (a) $f(x) := \dfrac{1}{x\ln(x)} \quad (x \in (0, 1))$

   (b) $f(x) := \dfrac{1}{(x^2 + 1)\,\mathrm{arctg}(x)} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$;

   (c) $f(x) := \dfrac{1}{\mathrm{ctg}(x) - \mathrm{tg}(x)} \quad \left(x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

3. Számítsuk ki $\int f$-et az alábbi esetekben!

   (a) $f(x) := \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 + 3e^{2x}}} \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (b) $f := \sin\cos$;

   (c) $f := \sin^2\cos$;

   (d) $f := \sin^3$;

   (e) $f := \cos^3$;

   (f) $f(x) := \dfrac{6x + 5}{\sqrt[3]{(3x^2 + 5x + 7)^9}} \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (g) $f(x) := \dfrac{\mathrm{tg}(x)}{(\ln(\cos(x)))^6} \quad \left(x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

4. Határozzuk meg azt az $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre

$$f(-4) = 0 \qquad \text{és} \qquad f'(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(3x) & (x \geq 0), \\ x & (x < 0) \end{cases}$$

teljesül!

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (x \in (0, +\infty));$

(b) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt{2x-1}\, dx \quad (x \in (1/2, +\infty));$

(c)

Útm.

1. (a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}\, dx = \int x^{2/15}\, dx = \frac{15\, \sqrt[15]{x^{17}}}{17} + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

(b) $\displaystyle\int (\operatorname{tg}(x))^2 + (\operatorname{ctg}(x))^2\, dx = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{ctg}(x) - 2x + c \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right)$, ui.

$$\operatorname{tg}^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1-\cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} - 1, \qquad \text{azaz} \qquad \operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \operatorname{tg}^2,$$

továbbá

$$\operatorname{ctg}^2 = \frac{\cos^2}{\sin^2} = \frac{1-\sin^2}{\sin^2} = \frac{1}{\sin^2} - 1, \qquad \text{azaz} \qquad \operatorname{ctg}' = -\frac{1}{\sin^2} = -1 - \operatorname{ctg}^2.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch}^2(x) - 2}{\operatorname{ch}(2x) + 1}\, dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2(x) - 2}{\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}\, dx = \frac{x}{2} - \tanh(x) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)}\, dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)}\, dx = \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

(e) $\displaystyle\int \frac{5}{4 - 4x^2}\, dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{5\operatorname{arth}(x)}{4} + c \quad (x \in (-1, 1),\ c \in \mathbb{R}).$

(f) $\displaystyle\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\arcsin(x) + c \quad (x \in (-1, 1),\ c \in \mathbb{R}).$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{1 + x^2 - 1}{1+x^2}\, dx = \ldots = x - \operatorname{arctg}(x) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\, dx = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{ctg}(x) + c \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$

2. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\, dx = \ln(-\ln(x)) + c \quad (x \in (0, 1),\ c \in \mathbb{R});$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)\operatorname{arctg}(x)}\, dx = \ln(\operatorname{arctg}(x)) + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

(c) Mivel tetszőleges $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ esetén

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}(x) - \operatorname{tg}(x)} = \frac{1}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin(x)\cdot\cos(x)}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-\sin(2x)}{\cos(2x)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)},$$

ezért

$$\int f = -\frac{1}{4} \cdot \ln(\cos(2x)) + c = \ln\left(\sqrt[4]{\ln(\cos(2x))}\right) + c \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$$

3. (a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+3e^{2x}}}\,dx = \frac{\sqrt{1+3e^{2x}}}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

(b) $\displaystyle\int \sin\cos = \frac{\sin^2}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R});$

(c) $\displaystyle\int \sin^2\cos = \frac{\sin^3}{3} + c \quad (c \in \mathbb{R});$

(d) $\displaystyle\int \sin^3 = \int \sin^2\sin = \int (1-\cos^2)\sin = \int (\sin + \cos^2(-\sin)) = -\cos + \frac{\cos^3}{3} + c \quad (c \in \mathbb{R});$

(e) $\displaystyle\int \cos^3 = \int \cos^2\cos = \int (1-\sin^2)\cos = \int (\cos - \sin^2\cos) = \sin - \frac{\sin^3}{3} + c \quad (c \in \mathbb{R});$

(f) $\displaystyle\int \frac{6x+5}{\sqrt[3]{(3x^2+5x+7)^9}}\,dx = -\frac{1}{2(3x^2+5x+7)^2} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}(x)}{(\ln(\cos(x)))^6}\,dx = -\int \frac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{(\ln(\cos(x)))^6}\,dx = \frac{1}{5\ln(\cos(x)))^5} + c \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$

4. Mivel

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + d \qquad (x \in (-\infty, 0),\ d \in \mathbb{R}),$$

ezért $f(-4) = 0$, ezért $f(-4) = 8 + d = 0$, azaz $d = -8$. Mivel

$$\begin{aligned}\int \mathrm{arctg}(3x)\,dx &= \int 1 \cdot \mathrm{arctg}(3x)\,dx = x\,\mathrm{arctg}(3x) - \int \frac{3x}{1+(3x)^2}\,dx = \\ &= x\,\mathrm{arctg}(3x) - \frac{1}{6}\int \frac{18x}{1+(3x)^2}\,dx = \\ &= x\,\mathrm{arctg}(3x) - \frac{1}{6}\ln\left(1+(3x)^2\right) + c \quad (x \in [0, +\infty),\ c \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

és – lévén, hogy f differenciálható –, így folytonos is, ezért

$$\lim_{0-0} f = -8 = f(0) = c,$$

amiből $c = -8$ adódik. Tehát

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{arctg}(3x) - \frac{1}{6}\ln\left(1+(3x)^2\right) - 8 & (x \geq 0), \\ \dfrac{x^2}{2} - 8 & (x < 0). \end{cases}$$

5. (a) Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}(-1)\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int \frac{-1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + c \quad (x \in (0, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

(b) Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \sqrt{2x-1}\,dx = x \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x-1)^3} - \frac{1}{3} \cdot \int \sqrt{(2x-1)^3}\,dx = \frac{x}{3} \cdot \sqrt{(2x-1)^3} - \frac{1}{15} \cdot \sqrt{(2x-1)^5} + c \qquad (x \in (1/2, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

(c)

Gyakorló feladatok.

1. Elemi átlakítások felhasználásával határozzuk meg $\int f$-et az alábbi esetekben!

(a) $f(x) := \arcsin(x) + \arccos(x)$ $\quad (x \in (-1,1))$,

(b) $f(x) := \sqrt{1-\sin(2x)}$ $\quad \left(x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)\right)$,

(c) $f(x) := \dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} \quad (x \in (-1,1))$,

(e) $f(x) := \dfrac{2x+3}{x-2} \quad (x \in (2,+\infty))$,

(f) $f(x) := \dfrac{\cos^2(x)-5}{1+\cos(2x)} \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

2. Számítsuk ki $\int f$-et az alábbi esetekben!

(a) $f(x) := \dfrac{e^x(\mathrm{sh}(5x)+\mathrm{ch}(5x))}{\mathrm{ch}(6x)} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{1}{\sin(x)} \quad (x \in (0,\pi))$

(c) $f(x) := \dfrac{x}{x^2+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

3. Számítsuk ki $\int f$-et az alábbi esetekben!

(a) $f(x) := \dfrac{2x-5}{\sqrt[4]{(x^2-5x+13)^3}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{9x^2}{\sqrt{2-3x^3}} \quad (0 > x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\mathrm{tg}^3(x)}} \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$,

(d) $f(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{5+2\sin(x)}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(e) $f(x) := \dfrac{(\ln(x))^5}{x} \quad (1 < x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := \sqrt{\dfrac{\mathrm{arsh}(x)}{1+x^2}} \quad (0 < x \in \mathbb{R})$.

4. A parciális integrálás módszerével határozzuk meg az

$$f(x) := x^5 e^{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill. a} \qquad g(x) := \frac{xe^x}{(1+x)^2} \quad (-1 < x \in \mathbb{R})$$

függvény primitív függvényeinek halmazát!

5. Használjuk a parciális integrálás módszerét $\int f$ kiszámítására!

(a) $f(x) := \ln\left(\dfrac{2x-5}{3-x}\right) \quad \left(x \in \left(\dfrac{5}{2}, 3\right)\right)$,

(b) $f(x) := \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := x\,\mathrm{tg}^2(x) \quad \left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,

(d) $f(x) := x^2\cos^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(e) $f(x) := x^2\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \quad (1 < x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := x^2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad (0 < x \in \mathbb{R})$,

(g) $f := \cos^4$,

(h) $f(x) := \dfrac{1}{\sin^3(x)} \quad (x \in (0, \pi))$,

(i) $f(x) := \dfrac{1}{(x^2+1)^3} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(j) $f(x) := x^3\sqrt{1-x^2} \quad (x \in (-1, 1))$.

6. Mutassuk meg, hogy ha $1 < n \in \mathbb{N}$, akkor igazak az alábbi azonosságok!

(a) $$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx \quad (x \in \mathbb{R});$$

(b) $$\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx \quad (x \in \mathbb{R});$$

(c) $$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Útm.

1. (a) $\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\,dx = \int \frac{\pi}{2}\,dx = \frac{\pi x}{2} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R})$.

(b) $\int \sqrt{1-\sin(2x)}\,dx = \int (\sin(x) - \cos(x))\,dx = -\cos(x) - \sin(x) + c \quad \left(x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right),\ c \in \mathbb{R}\right)$.

(c) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx = \int \left(e^{2x} - e^x + 1\right)\,dx = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$.

(d) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arcsin(x) + \mathrm{arsh}(x) + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R})$.

(e) $\int \frac{2x+3}{x-2}\,dx = \int \frac{2x-4+7}{x-2}\,dx = \int \left(2 + \frac{7}{x-2}\right)\,dx = 2x + 7\ln(x-2) + c \quad (x \in (2, +\infty),\ c \in \mathbb{R})$.

(f) $\int \frac{\cos^2(x)-5}{1+\cos(2x)}\,dx = \int \frac{\cos^2(x)-5}{\cos^2(x)+\sin^2(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)}\,dx = \frac{x - 5\,\mathrm{tg}(x)}{2} + c \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right)$.

2. (a) $\int \frac{e^x(\mathrm{sh}(5x)+\mathrm{ch}(5x))}{\mathrm{ch}(6x)}\,dx = \int e^x \cdot \frac{\frac{e^{5x}+e^{-5x}}{2} + \frac{e^{5x}-e^{-5x}}{2}}{\frac{e^{6x}+e^{-6x}}{2}}\,dx = \int \frac{2e^{6x}}{e^{6x}+e^{-6x}}\,dx = \int \frac{2e^{12x}}{e^{12x}+1}\,dx = \ln\left(\sqrt[6]{e^{12x}+1}\right) + c$

$(x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{1}{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$
$(x \in (0,\pi),\ c \in \mathbb{R})$.

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \ln(\sqrt{x^2+3}) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$.

3. (a) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{\sqrt[4]{(x^2-5x+13)^3}}\,dx = 4\sqrt[4]{x^2-5x+13} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$;

(b) $\displaystyle\int \frac{9x^2}{\sqrt{2-3x^3}}\,dx = -2\sqrt{2-3x^3} + c \quad (0 > x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\operatorname{tg}^3(x)}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg}(x)}} + c \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right)$;

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{5+2\sin(x)}}\,dx = \sqrt{5+2\sin(x)} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$;

(e) $\displaystyle\int \frac{(\ln(x))^5}{x}\,dx = \frac{(\ln(x))^6}{6} + c \quad (1 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$;

(f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arsh}(x)}{1+x^2}}\,dx = \frac{2\sqrt{\operatorname{arsh}^3(x)}}{3} + c \quad (0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$.

4.

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int x^4(2x)e^{x^2}\,dx = \frac{x^4e^{x^2}}{2} - 2\int x^3e^{x^2}\,dx = \frac{x^4e^{x^2}}{2} - \int x^2(2x)e^{x^2}\,dx = \\
&= \frac{x^4e^{x^2}}{2} - x^2e^{x^2} + \int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{x^4e^{x^2}}{2} - x^2e^{x^2} + e^{x^2} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,dx &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x+xe^x}{1+x}\,dx = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x\,dx = \\
&= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + c = \frac{e^x}{1+x} + c \quad (-1 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

5. (a) $\displaystyle\int f(x)\,dx =$

$$\begin{aligned}
= \int \ln\left(\frac{2x-5}{3-x}\right)dx &= \int \{\ln(2x-5) - \ln(3-x)\}\,dx = \\
&= x\ln(2x-5) - \int \frac{2x}{2x-5}\,dx - x\ln(3-x) + \int \frac{-x}{3-x}\,dx = \\
&= x\ln\left(\frac{2x-5}{3-x}\right) - \int \frac{2x-5+5}{2x-5}\,dx + \int \frac{3-x-3}{3-x}\,dx = \\
&= x\ln\left(\frac{2x-5}{3-x}\right) - \int \frac{5}{2x-5}\,dx - \int \frac{3}{3-x}\,dx = \\
&= x\ln\left(\frac{2x-5}{3-x}\right) - \frac{5}{2}\ln(2x-5) + 3\ln(3-x) + c \\
&\quad \left(x \in \left(\frac{5}{2}, 3\right),\ c \in \mathbb{R}\right).
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int f(x)\,dx =$

$$\begin{aligned}
= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x^2\,dx = x^2\sqrt{x^2+1} - \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \\
&= x^2\sqrt{x^2+1} - \frac{2\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

(c) Emlékeztetünk arra, hogy korábban kiszámoltuk, hogy

$$\int (\mathrm{tg}(x))^2\,dx = \mathrm{tg}(x) - x + c \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right),$$

így $\int f(x)\,dx =$

$$= \int x(\mathrm{tg}(x))^2\,dx \quad = \quad \int (\mathrm{tg}(x))^2 \cdot x\,dx = (\mathrm{tg}(x) - x)x - \int (\mathrm{tg}(x) - x)\,dx =$$

$$= \quad (\mathrm{tg}(x) - x)x + \ln(\cos(x)) + \frac{x^2}{2} \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right).$$

(d) $\int f(x)\,dx = \int x^2\cos^2(x)\,dx = \int x^2\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\int x^2\cos(2x)\,dx =$

$$= \int x^2\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\int x^2\cos(2x)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2\sin(2x)}{2} - \int x\sin(2x)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{1}{4}\int \cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\sin(2x)}{8} + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

(e) $\int f(x)\,dx =$

$$= \int x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx \quad = \quad \frac{x^3}{3}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\int x^3\frac{1}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\int x\frac{x^2-1+1}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\int\left(-x + \frac{x}{1-x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{2}{3}\left\{-\frac{x^2}{2} - \ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right\} + c$$

$$(1 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

(f) $\int f(x)\,dx =$

$$= \int x^2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)dx \quad = \quad \frac{x^3}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\int x\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) + c$$

$$(0 < x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

(g) $\int f =$

$$= \int \cos^4 = \int \cos^3 \cdot \cos = \sin \cdot \cos^3 + 3 \int \sin^2 \cdot \cos^2 =$$

$$= \sin \cdot \cos^3 + 3 \int (1 - \cos^2) \cdot \cos^2 = \sin \cdot \cos^3 + 3 \int \cos^2 - 3 \int \cos^4,$$

innen

$$\int \cos^4 = \frac{1}{4}\left(\sin \cdot \cos^3 + 3 \int \cos^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin(x)\cos^3(x) + 3 \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin(x)\cos^3(x) + \frac{3}{2}\left[\sin(x)\cos(x) + x\right]\right) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

(h) $\int f(x)\, dx =$

$$= \int \frac{1}{\sin(x)}\, dx = \int \sin(x) \frac{1}{\sin^2(x)}\, dx = \int \sin(x) \frac{1}{\sin^2(x)}\, dx =$$

$$= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - 2 \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^3(x)}\, dx = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - 2 \int \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^3(x)}\, dx =$$

$$= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - 2\left(\int \frac{1}{\sin^3(x)}\, dx - \int \frac{1}{\sin(x)}\, dx\right) \quad (x \in (0, \pi)),$$

amiből

$$\int \frac{1}{\sin^3(x)}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sin(x)}\, dx - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right) \qquad (x \in (0, \pi)),$$

Korábbról tudjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\, dx = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c \qquad (x \in (0, \pi),\ c \in \mathbb{R}),$$

így

$$\int \frac{1}{\sin^3(x)}\, dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right) + c \qquad (x \in (0, \pi),\ c \in \mathbb{R}).$$

(i) Két lépésben számoljuk ki az integrált:

1. lépés.

$$\operatorname{arctg} \in \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2}{x^2+1}\, dx - \int \frac{2}{(x^2+1)^2}\, dx,$$

így

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

2. lépés.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4 \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4 \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^3}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^2} + \int \frac{4}{(x^2+1)^2}\, dx - \int \frac{4}{(x^2+1)^3}\, dx,$$

így

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)\right) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

(j) $\int f(x)\,dx =$

$$= \int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2(-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2x^2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \frac{1}{3}\int(-2x)\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx =$$

$$= -\frac{x^2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{(1-x^2)^5}}{15} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}).$$

6. (a) $\int \cos^n(x)\,dx = \int \cos^{n-1}(x)\cos(x)\,dx = \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,dx =$
$= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\,dx =$
$= \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \cos^n(x)\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$, innen

$$n\int \cos^n(x)\,dx = \sin(x)\cos^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan n-nel való átosztással a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

(b) $\int \sin^n(x)\,dx = \int \sin^{n-1}(x)\sin(x)\,dx = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\cdot$
$\cdot\int \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\,dx =$
$= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \sin^n(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,
innen

$$n\int \sin^n(x)\,dx = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan n-nel való átosztással a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

(c) $\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx =$
$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (n-1)\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^n}\,dx =$
$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{n-1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx - (n-1)\int \frac{n-1}{(x^2+1)^n}\,dx,$

így

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

1.12. 12. oktatási hét (2020.11.25.)

Az óra anyaga.

Tétel (integrálás helyettesítéssel). Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum,

$$g : I \to J, \quad g \in \mathfrak{D}, \qquad f : J \to \mathbb{R}.$$

Ekkor igazak az alábbi állítások.

1. Ha $\int f \neq \emptyset$, akkor $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$ és

$$\boxed{\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g} \qquad \Big/ \boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(y)\, dy\Big|_{y=g(x)}} \Big/$$

(az ún. **első alak**, amikor „**függvényt helyettesítünk változóval**: $g(x) =: y$”).

2. Ha g bijekció és $\int (f \circ g) \cdot g' \neq \emptyset$, akkor $\int f \neq \emptyset$ és

$$\boxed{\int f = \left(\int (f \circ g) \cdot g'\right) \circ g^{-1}} \qquad \Big/ \boxed{\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}} \Big/$$

(az ún. **második alak**, amikor „**változót helyettesítünk függvénnyel**: $x =: g(t)$”).

Természetsen mindkét alak alkalmazása ugyanarra az integrálra vezet, legfeljebb az egyik alak (általában a második alak) alkalmazására könyebb rájönni.

Példa. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$ $(x \in \mathbb{R})$ kiszámítása:

1. alak:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx &= \int \frac{e^x}{1+e^x} \cdot e^x\, dx = \int \frac{y}{1+y}\, dy\Big|_{y=e^x} = \\
&= \int \frac{y+1-1}{1+y}\, dy\Big|_{y=e^x} = \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy\Big|_{y=e^x} = \\
&= (y - \ln(1+y))|_{y=e^x} + c = \\
&= e^x - \ln(1+e^x) + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Itt

$$f(y) := \frac{y}{1+y} \qquad (y \in (-1, \infty) =: J),$$

ill.

$$g(x) := e^x \qquad (x \in \mathbb{R} =: I).$$

2. alak:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx \quad = \quad \int \frac{\exp(2\ln(t))}{1+\exp(\ln(t))} \cdot \frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{t}{1+t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \ldots$$

Itt

$$f(x) := \frac{e^{2x}}{1+e^x} \qquad (x \in \mathbb{R} =: J)$$

ill.

$$g(t) := \ln(t) \qquad (t \in (0, +\infty) =: I),$$

így $g : I \longrightarrow J$ bijekció,

$$g'(t) = \frac{1}{t} \quad (t \in I), \qquad g^{-1}(x) = e^x \quad (x \in J).$$

Példa. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $(x \in (-1,1))$ kiszámítása:

1. alak:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad &= \quad \int (1-x^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \\
&= \int (1-\sin^2)(\arcsin(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \\
&= \int \cos^2(y)\,dy\Big|_{y=\arcsin(x)} = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2y)\right)\,dy\Big|_{y=\arcsin(x)} = \\
&= \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y)\right)_{y=\arcsin(x)} = \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + c = \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c \quad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Itt

$$f(y) := 1 - \sin^2(y) \qquad (y \in \mathbb{R} =: J),$$

ill.

$$g(x) := \arcsin(x) \qquad (x \in (-1,1) =: I).$$

2. alak:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,dt\Big|_{t=\arcsin(x)} = \ldots$$

Itt

$$f(x) := \sqrt{1-x^2} \qquad (x \in (-1,1) =: J),$$

ill.

$$g(t) := \sin(t) \qquad \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =: I\right),$$

így $g : I \to J$ bijekció,

$$g'(t) = \cos(t) \quad (t \in I), \qquad g^{-1}(x) = \arcsin(x) \quad (x \in J).$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

1. $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx \quad (x \in (0,+\infty));$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx \quad (x \in \mathbb{R});$
3.

Útm.

1. Világos, hogy

$$\int \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{u}\right) \cdot \sqrt[3]{1+u} \cdot 2u\,du\Big|_{u=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\int (u+1) \cdot \sqrt[3]{1+u}\,du\Big|_{u=\sqrt{x}} = 2\int \sqrt[3]{(1+u)^4}\,du\Big|_{u=\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{6}{7} \cdot \left(\sqrt[3]{(1+u)^7}\right)\Big|_{u=\sqrt{x}} + c = \frac{6}{7} \cdot \sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^7} + c \qquad (x \in (0,+\infty))$$

2. Szintén a helyettesítés módszerét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{e^x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+u}\cdot\frac{2}{u}\,du\Big|_{u=\sqrt{e^x}} = 2\cdot\int \frac{1+u-u}{(1+u)u}\,du\Big|_{u=\sqrt{e^x}} = 2\cdot\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du\Big|_{u=\sqrt{x}} = \\ &= 2\,(\ln(u)-\ln(1+u))|_{u=\sqrt{e^x}} + c = 2\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\Big|_{u=\sqrt{e^x}} + c = \\ &= 2\ln\left(\frac{\sqrt{e^x}}{1+\sqrt{e^x}}\right)+c.\end{aligned}$$

3.

A leggyakoribb helyettesítések a következők.

1. $\boxed{f(ax+b) \text{ alakú integrandus}}$ (lineáris helyettesítés):

   Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ és $F : I \to \mathbb{R}$ az f primitív függvénye. Ekkor minden olyan $a, b \in \mathbb{R}$: $a \neq 0$ esetén, amelyre $ax+b \in I$ $(x \in I)$ teljesül, fennáll az

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx =} \frac{1}{a}\int f(ax+b)a\,dx = \boxed{\frac{F(ax+b)}{a}+c} \qquad (x\in\mathbb{R}:\ ax+b\in I,\ c\in\mathbb{R})$$

   egyenlőség. **Példa.** $\int \frac{1}{x^2+10x+29}\,dx$ $(x\in\mathbb{R})$ kiszámítása:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+10x+29}\,dx &= \int\frac{1}{(x+5)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{\frac{(x+5)^2}{4}+1}\,dx = \\ &= \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x+5}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+5}{2}\right)+c \quad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

2. $\boxed{S(e^x) \text{ alakú integrandus}}$ (az exp függvény racionális kifejezéseinek integrálja):

   Legyen $S \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ racionális függvény, $I \subset \mathbb{R}$ olyan intervallum, hogy

$$e^x \in \mathcal{D}_S \qquad (x\in I).$$

   Ekkor

$$\boxed{\int S(e^x)\,dx = \int \frac{S(t)}{t}\,dt\Big|_{t=e^x}} \qquad (x\in I).$$

Példa. $\displaystyle\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx$ $(x \in (-\infty, \ln(2)))$ kiszámítása:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx &= \int \frac{4}{e^{2\ln(t)}-4}\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{4}{t(t^2-4)}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \int \frac{4}{t(t-2)(t+2)}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \int \left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t-2}+\frac{C}{t+2}\right)dt\Big|_{t=e^x} = \ldots + c \quad (x \in (-\infty, \ln(2)),\ c \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

3. $\boxed{R(\sin(x), \cos(x)) \text{ alakú integrandus}}$ (trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálja):
Ha

$$t := \operatorname{tg}(x/2) \qquad (x \in I \subset (-\pi, \pi)),$$

akkor $x = 2\operatorname{arctg}(t)$,

$$\sin(x) = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos(x) = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

így

$$\boxed{\int R(\sin(x), \cos(x))\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)}} \qquad (x \in I).$$

Megjegyzések.

(a) Ha minden $(x, y) \in \mathcal{D}_R$ esetén

$$(-x, -y) \in \mathcal{D}_R \qquad \text{és} \qquad R(-x, -y) = R(x, y),$$

akkor a

$$t := \operatorname{tg}(x) \qquad \text{vagy a} \qquad t := \operatorname{ctg}(x)$$

helyettesítés is célhoz vezet.

(b) Ha minden $(x, y) \in \mathcal{D}_R$ esetén

$$(x, -y) \in \mathcal{D}_R \qquad \text{és} \qquad R(x, -y) = -R(x, y),$$

akkor a

$$t := \sin(x)$$

helyettesítés is célhoz vezet.

(c) Ha minden $(x, y) \in \mathcal{D}_R$ esetén

$$(-x, y) \in \mathcal{D}_R \qquad \text{és} \qquad R(-x, y) = -R(x, y),$$

akkor a

$$t := \cos(x)$$

helyettesítés is célhoz vezet.

Példa. $\displaystyle\int \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx$ $(x \in (0, \pi))$ kiszámítása:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx &= \int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} = \int \frac{t^2-2t+1}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} = \\
&= \int \frac{t^2+1-2t}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} = \int \left(1 - \frac{2t}{t^2+1}\right)\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} = \\
&= \left[t - \ln(t^2+1)\right]_{t=\operatorname{tg}(x/2)} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + c
\end{aligned}$$

$$(x \in (0, \pi),\ c \in \mathbb{R}).$$

Példa. $\displaystyle\int \frac{2}{2+2\operatorname{tg}(x)}\,dx$ $(x \in (0, \pi))$ kiszámítása:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{2+2\operatorname{tg}(x)}\,dx &= \int \frac{2}{1+2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} = \int \frac{1}{(t+1/2)(t^2+1)}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} = \\
&= \ldots + c \quad (x \in (0, \pi),\ c \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

4. $\boxed{R(\operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x)) \text{ alakú integrandus}}$ (hiperbolikus függvények racionális kifejezéseinek integrálja): Ha

$$t := e^x \qquad (x \in I \subset \mathbb{R}: \ (\operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x)) \in \mathcal{D}_R \quad (x \in I)),$$

akkor $x = \ln(t)$ és

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

így

$$\boxed{\int R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))\,dx = \int R\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) \cdot \frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x}} \qquad (x \in I).$$

Megjegyzések. Vegyük észre, hogy mivel a hiperbolikus függvények az exponenciális függvényből „épülnek fel”, ezért az integrandus tulajdonképpen $S(e^x)$ alakú, ahol $S \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ racionális függvény.

Példa.

- $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\,dx = \ldots + c \ (x \in (0, +\infty),\ c \in \mathbb{R});$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,dx = \ldots + c \ (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R});$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{ch}^2(x)}\,dx = \ldots + c \ (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$

5. $\boxed{R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) \ (a, b \in \mathbb{R} :\ a \neq 0) \text{ alakú integrandus}}$:

Ha

$$t := \sqrt[n]{ax+b}, \qquad \text{akkor} \qquad x = \frac{1}{a}(t^n - b),$$

így

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)\,dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) \cdot \frac{nt^{n-1}}{a}\,dt\Big|_{t=\sqrt[n]{ax+b}}}.$$

Példa. $\displaystyle\int x\sqrt{5x+3}\,dx \ (x \in (-3/5, +\infty))$ kiszámítása:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{5x+3}\,dx &= \int \frac{t^2 - 3}{5} \cdot t \cdot \frac{2t}{5}\,dt\Big|_{t=\sqrt{5x+3}} = \ldots = \\ &= \frac{2}{25}\left(\frac{\sqrt{(5x+3)^5}}{5} - \sqrt{(5x+3)^3}\right) + c \quad (x \in (-3/5, +\infty),\ c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

6. $\boxed{R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \ (a, b, c, d \in \mathbb{R} :\ ad \neq bc) \text{ alakú integrandus}}$:

Ha

$$t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad \text{akkor} \qquad x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a},$$

így

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right) \cdot \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}\, dt\Big|_{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}}.$$

Példa.

$$\int \sqrt{\frac{x-3}{x-1}}\, dx = \int t \cdot \frac{2t(2)}{(t^2-1)^2}\, dx = \int \frac{4t^2}{(t^2-1)^2}\, dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}} = \ldots + c \ (x > 3,\ c \in \mathbb{R}).$$

Példa.

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int t \cdot \frac{2t(2)}{(-t^2-1)^2}\, dx = \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\, dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \ldots + c \ (|x| < 1,\ c \in \mathbb{R}).$$

Példa.

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\, dx = \int \left(\frac{1-t^3}{1+t^3}\right)^2 \cdot t \cdot \frac{3t^2 \cdot 2}{(t^3-1)^2}\, dt\Big|_{t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}} = \ldots + c \ (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}).$$

7. $\boxed{R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) \text{ alakú integrandus}}$:

Példa.

8. $\boxed{R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) \text{ alakú integrandus}}$:

Példa.

9. $\boxed{R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) \text{ alakú integrandus}}$:

Példa.

10. $\boxed{R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \ (a,b,c \in \mathbb{R}:\ a \neq 0) \text{ alakú integrandus}}$:

Ha

- $a > 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} =: \sqrt{a}x + t \qquad \Big/ \text{vagy} \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} =: \sqrt{a}x - t \Big/$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor ui.

$$ax^2+bx+c = (\sqrt{a}x+t)^2 \qquad /\text{vagy} \qquad ax^2+bx+c = (\sqrt{a}x-t)^2/,$$

ahonnan

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} =: \mu(t), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{-2\sqrt{a}t^2+2bt-2c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2} =: \nu(t)$$

következik. Így, ha

$$\varphi(x) :\equiv \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x,$$

akkor

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(\mu(t), t+\sqrt{a}\mu(t)\right) \nu(t)\, dt\Big|_{t=\varphi(x)}};$$

- $c > 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} =: tx + \sqrt{c} \qquad \Big/ \text{vagy} \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} =: tx - \sqrt{c} \Big/$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor ui.

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt + c \qquad /\text{vagy} \qquad ax^2+bx+c = 2t^2 - 2\sqrt{c}xt + c/,$$

ahonnan

$$x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2} =: \mu(t), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2} =: \nu(t)$$

következik. Így, ha

$$\varphi(x) :\equiv \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}}{x},$$

akkor

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(\mu(t), \sqrt{c}+t\mu(t)\right) \nu(t)\, dt\Big|_{t=\varphi(x)}};$$

- valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, akkor a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} =: t(x-\alpha)$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor ui. alkalmas $\beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = t^2(x - \alpha)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan

$$x = \frac{a\beta - t^2\alpha}{a - t^2} =: \mu(t), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2at(\beta - \alpha)}{(a - t^2)^2} =: \nu(t)$$

következik. Így, ha

$$\varphi(x) :\equiv \frac{\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}}{x - \alpha},$$

akkor

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\, dx = \int R\left(\mu(t), t(\mu(t) - \alpha)\right) \nu(t)\, dt\Big|_{t=\varphi(x)}}$$

(**Euler-féle helyettesítés**ek).

Példa. Ha $I := (0, +\infty)$ és

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} =: x - t, \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{t^2 - 4}{2(t + 1)},$$

akkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{t^2 + 2t + 4}{t(1 + t)^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{4}{t} - \frac{3}{1 + t} - \frac{3}{(1 + t)^2}\right) dt = \\
&= 2\ln(-t) - \frac{3}{2}\ln(-1 - t) + \frac{3}{2(1 + t)} + c = \\
&= 2\ln(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x) - \frac{3}{2}\ln(-1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x) + \\
&\quad + \frac{3}{2(1 + x - \sqrt{x^2 + 2x + 4})} + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Példa. Ha $I := (2, 5)$ és

$$\sqrt{7x - 10 - x^2} =: t(x - 5), \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{5t^2 + 2}{t^2 + 1},$$

akkor

$$\int \frac{x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}\,dx = -\frac{2}{9}\int \frac{5t^2+2}{t^2}\,dt = -\frac{10}{9}t + \frac{4}{9t} + c\Big|_{t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-5}} =$$

$$= \frac{10\sqrt{7x-10-x^2}}{45-9x} + \frac{4x-20}{9\sqrt{7x-10-x^2}} + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$

Példa. Ha $I := (-1-\sqrt{2}, 0)$ és

$$\sqrt{1-2x-x^2} =: tx - 1,$$

akkor

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1+2t-t^2}{t(t-1)(t+1)}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= -\ln(-t) + \ln(1-t) - 2\,\mathrm{arctg}(t) + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

Spec. esetek:

(a) $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ alakú integrandus}}$:

(b) $\boxed{\dfrac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ alakú integrandus}}$:

Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $p_n : I \to \mathbb{R}$ n-edfokú polinom $(n \in \mathbb{N})$. Ha

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (x \in I),$$

akkor van olyan $q_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-edfokú polinom és $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$\boxed{\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx} \quad (x \in I).$$

A p_{n-1} polinom együtthatóit és λ-t mindkét oldal differenciálása és a megfelelő együtthatók összehasonlítása után kaphatjuk meg.

Példa. Ha $I := (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyekkel

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2} + \int \frac{d}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx,$$

akkor differenciálással azt kapjuk, hogy

$$x^2 = (2ax+b)(1+2x-x^2) + (ax^2+bx+c)(1-x) + d \qquad (x \in I),$$

ahonnan

$$a = -\frac{1}{3}, \qquad b = -\frac{5}{6}, \qquad c = -\frac{19}{6}, \qquad d = 4.$$

Így

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx &= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right) + \sqrt{1+2x-x^2} + \\ &\quad +4\int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx = \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{6}\right) + \sqrt{1+2x-x^2} + \\ &\quad +4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + c \quad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

2020.12.13.

1.13. 13. oktatási hét (2020.12.02.)

Feladat. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n\cdot(n+1)} \qquad (x \in (0,2))$$

összeget!

Útm.

1. lépés. Mivel $\lim\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\right) = 1$, ezért a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara 1.

2. lépés. Ha

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)} \qquad (x \in (0,2)),$$

akkor $f \in \mathfrak{D}^2$ és tetzsőleges $x \in (0,2)$ esetén

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}, \qquad \text{ill.} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n-1} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}.$$

Következésképpen

$$f' \in \int f''(x)\,dx = \ln(x) + c \qquad (x \in (0,2),\ c \in \mathbb{R}).$$

Az $x := 1$ helyettesítéssel $0 = f'(1) = 0 + c = c$, azaz $c = 0$ adódik. Mivel

$$f \in \int f'(x)\,dx = x\ln(x) - x + d \qquad (x \in (0,2),\ d \in \mathbb{R}),$$

ezért az $x := 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $0 = f(1) = 0 - 1 + d$, azaz $d = 1$. Következésképpen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)} = x\ln(x) - x \qquad (x \in (0,2)). \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. A binomiális tétel következményeként azt kapjuk, hogy hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

ahol

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & (k=0), \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!} & (k \in \{1,\ldots,n\}) \end{cases}$$

és $0^0 := 1$.

Feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, ill. vezessük be a következő jelölést:

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1 & (n=0), \\ \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)}{n!} & (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Számítsuk ki a

$$\sum_{n=0} \left(\binom{\alpha}{n} x^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugarát, majd mutassuk meg, hogy minden $x \in (-1,1)$ esetén teljesül az

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

egyenlőség!

Útm.

1. lépés. Ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$: $n > \alpha$ esetén $\binom{\alpha}{n} = 0$, így a hatványsor nem más mint egy polinom. Következésképpen $R = +\infty$.

2. lépés. Ha $\alpha \notin \mathbb{N}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot \left|\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)\right|}{k! \cdot \left|\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha-k|} = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\alpha-n}\right| = |-1| = 1,$$

így $R = 1$.

3. lépés. Megmutatjuk, hogy ha $\alpha \in \mathbb{R}$, ill.

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (x \in (-1,1)) \qquad \text{és} \qquad g(x) := (1+x)^{\alpha} \quad (x \in (-1,1)),$$

továbbá $\varphi \in \{f, g\}$, akkor

$$(1+x) \cdot \varphi'(x) = \alpha \cdot \varphi(x) \qquad (x \in (-1,1)).$$

Valóban

- tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$g'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1},$$
ezért
$$\boxed{(1+x) \cdot g'(x)} = (1+x) \cdot \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha} = \boxed{\alpha \cdot g(x)} \qquad (x \in (-1,1)).$$

- bármely $x \in (-1,1)$ számra
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n,$$

így

$$\boxed{(1+x)\cdot f'(x) = f'(x) + x\cdot f'(x)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} =$$

$$= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} =$$

$$= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right]x^n =$$

$$= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{n}(n-1) + n\binom{\alpha}{n}\right]x^n =$$

$$= \alpha\binom{\alpha}{0} + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \boxed{\alpha\cdot f(x)}.$$

4. lépés. Mivel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{\frac{\alpha f(x)g(x)}{1+x} - \frac{\alpha f(x)g(x)}{1+x}}{g^2(x)} = 0 \qquad (x\in(-1,1)),$$

így $\frac{f}{g}$ állandófüggvény. Mivel

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1,$$

ezért $f = g$. ■

Definíció. Legyen $n\in\mathbb{N}$. Ekkor

$$(2n)!! := \prod_{k=1}^{n}(2k) = (2n)(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2, \qquad (2n-1)!! := \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1.$$

(ejtsd: **szemifaktoriális**)).

Példa. Világos, hogy tetszőleges $x\in(-1,1)$ esetén

- $\boxed{\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\cdot x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n};$

- $\boxed{\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\cdot(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot x^n=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}x^n};$
- $\boxed{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot x^n=\boxed{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\cdot x^n};$
- $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}=(1-x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\cdot(-x)^n=\boxed{1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^n};$
- $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\cdot(-x^2)^n=\boxed{1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n}};$
- $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x}}}=(1+x)^{-1/4}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/4}{n}\cdot x^n=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(4n-3)!!}{4^n\cdot n!}\cdot x^n};$
- $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}}=(1+x^4)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\cdot x^{4n}=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n+1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^{4n}}$

Feladat. Írjuk fel az arcsin függvényt 0-körüli hatványsor összegeként a $(-1,1)$ intervallumon!
Útm. Mivel

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2k)!!}x^{2n}\qquad(x\in(-1,1)),$$

és

$$\arcsin\in\int\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2k)!!}\cdot x^{2n}\right)dx=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+c\qquad(x\in(-1,1),\ c\in\mathbb{R}),$$

így az $x:=0$ helyettesítéssel $0=\arcsin(0)=c$, azaz $c=0$ adódik, ahonnan

$$\boxed{\arcsin(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad(x\in(-1,1))}$$

következik. ■

Megjegyezzük (vö. 10. gyakorlat), hogy innen tetszőleges $k\in\mathbb{N}_0$ index esetén

$$\arcsin^{(2k)}(0)=0\qquad\text{és}\qquad\arcsin^{(2k+1)}(0)=((2k-1)!!)^2$$

következik.

Feladat. Írjuk fel az

$$f(x) := \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \qquad (x \in (-1,1))$$

függvényt 0-körüli hatványsor összegeként!
Útm. A fentiek következtében tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot x^{n+1} = \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left\{\binom{-1/2}{n}-\binom{-1/2}{n-1}\right\} = \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(-\frac{1}{2}-n+2)}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1-n\right) = \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-2n}\cdot\binom{-1/2}{n}\cdot x^n. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Házi feladatok.

1. Fejtsük 0-körüli hatványsorba a következő függvényeket vagy alkalmas leszűkítésüket!

   (a) $f(x) := \ln(1-x^2) \quad (x \in (-1,1))$;

   (b) $f(x) := \ln(x^2-5x+6) \quad (x \in (-\infty,2)\cup(3,+\infty))$.

2. Állítsuk elő az alábbi f függvényeket 0-körüli hatványsor összegfüggvényeként/

$$\text{(a) } f(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in (-1,1)); \qquad \text{(b) } f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-1,1));$$

$$\text{(c) } f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (x \in (-1,1)); \qquad \text{(f) } f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in (-1,1));$$

$$\text{(e) } f(x) := \arccos(x) \quad (x \in (-1,1)); \quad \text{(f) } f(x) := \mathrm{arctg}(x) \quad (x \in (-1,1));$$

$$\text{(g) } f(x) := \mathrm{arcctg} \quad (x \in (-1,1)); \qquad \text{(h) } f(x) := \mathrm{arsh}(x) \quad (x \in (-1,1));$$

$$\text{(i) } f(x) := \mathrm{arth}(x) \quad (x \in (-1,1)).$$

Útm.

1. (a) Mivel

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} -2x^{2n+2} \qquad (x \in (-1,1))$$

és

$$f \in \int \left(-\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n+2} \right) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} + c \qquad (x \in (-1,1),\ c \in \mathbb{R}),$$

ezért az $x := 0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $0 = f(0) = -0 + c$, azaz $c = 0$. Következésképen

$$\ln(1-x^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Megjegyezzük, hogy ugyanerre ar eredményre jutunk, ha a

$$g(x) := \ln(1-x) \qquad (x \in (-1,1))$$

függvénynt írjuk fel 0-körüli hatványsor összegeként, hiszen

$$f(x) = g(x^2) \qquad (x \in (-1,1)).$$

(b) Mivel bármely $|x| < \min\{2,3\}$, azaz $x \in (-2,2)$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x-5}{x^2-5x+6} = \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)+(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

és

$$f \in \int \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \right) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (x \in (-2,2),\ c \in \mathbb{R}),$$

ezért az $x := 0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $\ln(6) = f(0) = 0 + c$, azaz $c = \ln(6)$. Következésképpen

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(6) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x \in (-2, 2)).$$

2. (a) Tetszőleges $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

(b) Bármely $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k.$$

(c) Minden $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k.$$

(d) Ha $x \in (-1, 1)$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (x^2)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k}.$$

(e) Mivel

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \qquad (x \in (-1, 1)),$$

és

$$\arccos \in \int \left(-1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \right) dx = -x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c \qquad (x \in (-1, 1),\ c \in \mathbb{R}),$$

így az $x := 0$ helyettesítéssel $\frac{\pi}{2} = \arccos(0) = c$, azaz $c = \frac{\pi}{2}$ adódik, ahonnan

$$\boxed{\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in (-1, 1))}$$

következik.

(f) coming soon

(g) coming soon

(h) coming soon

(i) coming soon

1.14. A zárthelyik feladatainak megoldása

Az 1. zh feladatai

1. A definíció alapján **számítsa ki** a
$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{x^2-1}$$
határértéket!

2. **Számítsa ki** a következő határértékeket, ha léteznek! Ha valamelyik nem létezik, akkor **adja meg** az egyoldali határértékeket!
(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2019x-2020}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{\sin(2x)}$.

3. Legyen $a\in\mathbb{R}$. **Vizsgálja** az
$$f(x):=\begin{cases} ax^2+5ax+4\cos^2(x+1) & (x\in(-\infty,-1]),\\ \dfrac{3x^3}{2x+3}+a^2+2 & (x\in(-1,+\infty)) \end{cases}$$
függvényt folytonosság és deriválhatóság szempontjából! Ahol nem folytonos, ott **adja meg** a szakadások típusát, és ahol deriválható, ott **számítsa ki** a derivált értékét!

4. Legyen $a\in\mathbb{R}$, ill.
$$f(x):=x^2-a\cdot\ln(x)\qquad(0<x\in\mathbb{R}).$$
   (a) **Írja fel** az $a:=3$ esetben az f függvény grafikonjának az $x_0:=1$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!
   (b) Mely $a\in\mathbb{R}$ esetén lesz az előző pontbeli érintőegyenes meredeksége (-2)-vel egyenlő? Mi ebben az esetben az érintési pont abszcisszája?

5. **Keresse meg** azt a maximális területű téglalapot az első síknegyedben, amelynek az egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló két oldala a koordinátatengelyekre, az origóval szemközti csúcs pedig az
$$f(x):=e^{-3x}\qquad(0<x\in\mathbb{R})$$
függvény grafikonjára illeszkedik!

6. **Vizsgálja meg** az
$$f(x):=\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}\qquad(x\in\mathbb{R}\backslash\{1;2\})$$
függvényt monotonitás szempontjából! **Adja meg** az f lokális szésőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

Útm.

1. Legyen

$$f(x) := \frac{3x-3}{x^2-1} \qquad \left(x \in \mathbb{R},\, x^2 \neq 1\right).$$

Ekkor $1 \in \mathcal{D}_f'$ és bármely $1 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{3}{x+1}.$$

Látható tehát, hogy ha „x közel van 1-hez, akkor $f(x)$ közel van $\frac{3}{2}$-hez". Így sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{3}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{1+x} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6-3-3x}{2\cdot(x+1)}\right| = \left|\frac{3(x-1)}{2\cdot(x+1)}\right| = \frac{3}{2\cdot|x+1|}\cdot|x-1|.$$

Ha $\varepsilon > 0$ és

$$0 < |x-1| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \neq x \in (0,2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 \neq x+1 \in (1,3),$$

akkor $|x+1| = x+1 > 1$, ill.

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2\cdot|x+1|}\cdot|x-1| < \frac{3}{2\cdot 1}\cdot|x-1| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-1| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Elmondható tehát, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta := \min\left\{1, \frac{2\varepsilon}{3}\right\} > 0\; \forall x \in \mathcal{D}_f: \quad \left(0 < |x-1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon\right),$$

azaz

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{3}{2}.$$

2. (a) Mivel bármely $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-2019x-2020}{\sqrt{x^2+x+1}+x} &= \frac{x^2-2019x-2020}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \\
&= \frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-2020)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\cancel{x+1}} = \\
&= (x-2020)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right),
\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2019x-2020}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to-1}(x-2020)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=(-2021)\cdot(1+1)=-4042.$$

(b) Mivel bármely $x\in\mathbb{R}$: $\sin(2x)\neq 0$ esetén

$$\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{\sin(2x)}=\frac{\sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-x-1}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\frac{\sqrt{x^2\cdot\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}}}{2x\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n+1)!}}=:\frac{\sqrt{x^2\cdot f(x)}}{2x\cdot g(x)},$$

és

$$\frac{\sqrt{x^2\cdot f(x)}}{2x\cdot g(x)}=\frac{|x|}{2x}\cdot\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}=\frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}\cdot\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)},$$

ill.

$$\lim_{x\to0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(0)}=\sqrt{\frac{1}{2!}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\text{és}\qquad\lim_{x\to0}g(x)=g(0)=1,$$

továbbá

$$\lim_{x\to0\pm0}\operatorname{sgn}(x)=\pm1,$$

ezért

$$\lim_{x\to0\pm0}\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{\sin(2x)}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Következésképpen

$$\nexists\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{\sin(2x)}.$$

3. Bontsuk fel a $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ értelmezési tartományt intervallumokra:

$$\mathbb{R}=(-\infty,-1)\cup[-1,-1]\cup(-1,+\infty)=:I_b\cup I_c\cup I_j.$$

- Vizsgáljuk f-et az I_b intervallumon. Mivel a

$$(-\infty,-1)\ni x\mapsto ax^2+5ax+4\cos^2(x+1)$$

függvény deriválható, így folytonos is, ezért bármely $x\in(-\infty,-1)$ esetén $f\in\mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x)=2ax+5a-8\sin(x+1)\cos(x+1)=2ax+5a-4\sin(2x+2).$$

- Vizsgáljuk f-et az I_j intervallumon. Mivel a

$$(-1,+\infty)\ni x\mapsto\frac{3x^3}{2x+3}+a^2+2$$

függvény deriválható, így folytonos is, ezért bármely $x \in (-1, +\infty)$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = \frac{9x^2 \cdot (2x+3) - 3x^3 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{3x^2 \cdot [3(2x+3) - 2x]}{(2x+3)^2} = \frac{3x^2 \cdot [4x+9]}{(2x+3)^2}.$$

- Vizsgáljuk f-et az I_c intervallumon, azaz a (-1) pontban.
  (a) Vizsgáljuk f folytonosságát a (-1) pontban! Mivel

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \left(ax^2 + 5ax + 4\cos^2(x+1)\right) = a - 5a + 4 \cdot 0^2 = 4 - 4a = f(-1)$$

  és

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \left(\frac{3x^3}{2x+3} + a^2 + 2\right) = \frac{3}{-2+3} + a^2 + 2 = -3 + a^2 + 2 = a^2 - 1,$$

  ezért

$$f \in \mathfrak{C}[-1] \quad \iff \quad 4-4a = a^2-1 \quad \iff \quad a^2+4a-4 = 0 \quad \iff \quad a = -2 \pm \sqrt{4+5} \in \{-5; 1\}.$$

  Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$, akkor az f függvénynek (-1)-ben elsőfajú szakadása (ugrása) van.

  (b) Vizsgáljuk f deriválhatóságát a (-1) pontban! Mivel

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-0} (2ax + 5a - 4\sin(2x+2)) = -2a + 5a - 4\sin(0) = 3a$$

  és

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+0} \left(\frac{3x^2 \cdot [4x+9]}{(2x+3)^2}\right) = \frac{3 \cdot [-4+9]}{(-2+3)^2} = 15,$$

  ezért

$$f \in \mathfrak{D}[-1] \quad \iff \quad (a \in \{-5; 1\} \ \wedge \ 3a = 15) \quad \iff \quad (a \in \{-5; 1\} \ \wedge \ a = 5) \quad \iff \quad a \in \emptyset$$

  következtében tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén $f \notin \mathfrak{D}[-1]$.

4. (a) Mivel $a = 3$ esetén $f(1) = 1$

$$f'(x) = x^2 - \frac{3}{x} \qquad (0 > x \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad f'(1) = 2 - 3 = -1,$$

   ezért a keresett érintő egyenlete:

$$y = 1 - 1 \cdot (x-1) \qquad \iff \qquad y = 2 - x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   (b) Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $f \in \mathfrak{D}[x]$ és

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x} = -2 \qquad \iff \qquad 2x^2 2 + 2x - a = 0 \qquad \iff \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2a}}{2} \in (0, +\infty),$$

ezért pontosan abban az esetben létezik az érintő, ha

$$\left(1+2a>0 \ \wedge \ \frac{-1\pm\sqrt{1+2a}}{2}>0\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \left(a>-\frac{1}{2} \ \wedge \ a>0\right) \quad\Longleftrightarrow\quad a\in(0,+\infty).$$

Ekkor az érintő az

$$x=\frac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}$$

abszcisszájú pontba húzható.

5. Ha az origóval szemközti csúcs abszcisszája x, akkor ordinátája $f(x)$, így a kérdéses tégalalap területe:

$$T(x):=x\cdot e^{-3x} \qquad (x\in(0,+\infty)).$$

Látható, hogy $T\in\mathfrak{D}$ és

$$T'(x)=e^{-3x}+x\cdot e^{-3x}\cdot(-3)=(1-3x)\cdot e^{-3x} \qquad (x\in(0,+\infty)).$$

Mivel T'-nek az $\frac{1}{3}$ pontban $(+,-)$-jelváltása van, ezért az $\frac{1}{3}$ pont lokális maximumhelye T-nek. Mivel

$$\lim_{0+0}T=\lim_{x\to 0+0}x\cdot e^{-3x}=0 \qquad \text{és} \qquad 0<\lim_{+\infty}T=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{3x}}<\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(3x^2)/2!}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x}=0,$$

ezért az $\frac{1}{3}$ pont egyben abszolút maximumhely is, azaz $x=\frac{1}{3}$ esetén kapjuk a maximális területű téglalapot.

6. Világos, hogy $f\in\mathfrak{D}$ és tetszőleges $x\in\mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)(x^2-3x+2)-(x^2+3x+2)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{2x^3-3x^2-5x+6-(2x^3+3x^2-5x-6)}{(x-1)^2(x-2)^2}= \\ &= \frac{-6x^2+12}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{-6(x^2-2)}{(x-1)^2(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Így

	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},1)$	$(1,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},2)$	$(2,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	$\downarrow$

A f függvény lokális minimuma, ill. maximuma tehát

$$f(-\sqrt{2})=\frac{(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}, \qquad \text{ill.} \qquad f(\sqrt{2})=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}=\frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}.$$

A 2. zh feladatai

1. **Tekintse** az

$$f(x) := x^5 - e^{-2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt.

   (a) **Igazolja**, hogy f invertálható, és az inverzfüggvény differenciálható az egész valós számegyenesen!

   (b) **Határozza meg** az $\left(f^{-1}\right)'(-1)$ értéket!

2. **Végezzen** teljes vizsgálatot az

$$f(x) := \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvényen!

3. **Számítsa ki** a következő határértékeket!

$$\text{(a)} \ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2 + \sin(3x)}, \qquad \text{(b)} \ \lim_{x \to +\infty} \left(x - \ln(x^2 + 1)\right).$$

4. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, továbbá

$$f(x) := \sqrt{1 + ax} + bx^2 \qquad (x \in \mathbb{R} : \ 1 + ax > 0).$$

   (a) **Határozza meg** az a, b paramétereket úgy, hogy az f függvény 0-körüli második Taylor-polinomja

$$T_2(x) = 1 + 2x + 2x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   legyen!

   (b) A fent kapott a, b értékek mellett **adjon** felső becslést az $|f - T_2|$ eltérésre a $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ intervallumon!

5. **Határozza meg** az $\int f$ függvényosztályt!

$$\text{(a)} \ f(x) := \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad \text{(b)} \ f(x) := (3x + 1) \cdot e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6. **Határozza meg** az $\int f$ függvényosztályt!

$$\text{(a)} \ f(x) := \sin^2(1 - 2x) \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad \text{(b)} \ f(x) := \cos(2x) \cdot (\cos(x) - \sin(x))^{2020} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Útm.

1. Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 5x^4 + 2e^{-2x} > 0$. Következésképpen f szigorúan monoton növekedő, és így invertálható. Mivel f folytonos (hiszen differenciálható), továbbá $\lim_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$,

ezért az f^{-1} inverz értelmezési tartománya $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = \mathbb{R}$. Az inverz függvény differenciálására vonatkozó tétel szerin tehát $f^{-1} \in \mathfrak{D}$, és így $f(0) = -1$ következtében

$$\left(f^{-1}\right)'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5x^4 + 2e^{-2x}}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{5\cot 0 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

2. **1. lépés (kezdeti vizsgálatok).** Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^{\infty}$, továbbá

$$f(x) = \frac{x^3+8}{2x} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2.$$

Így

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
f	$+$	0	$-$	$+$

2. lépés (határérték, aszimptota). Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{0\pm 0} f = \pm\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{\pm\infty} f = +\infty,$$

továbbá

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2} \longrightarrow \pm\infty \qquad (x \to \pm\infty),$$

következtében f-nek nincsen aszimptotája sem a $(+\infty)$-ben, sem pedig a $(-\infty)$-ben.

3. lépés (monotonitás, lokális szélsőérték). Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f'(x) = x - \frac{4}{x^2} = \frac{x^3-4}{x^2}$$

és

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{4},$$

ezért

	$(-\infty,0)$	$(0,\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4},+\infty)$
f'	$-$	0	$-$	$+$
f	$\downarrow$	$\downarrow$	lok min.	$\uparrow$

4. lépés (görbület, inflexió). Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$$

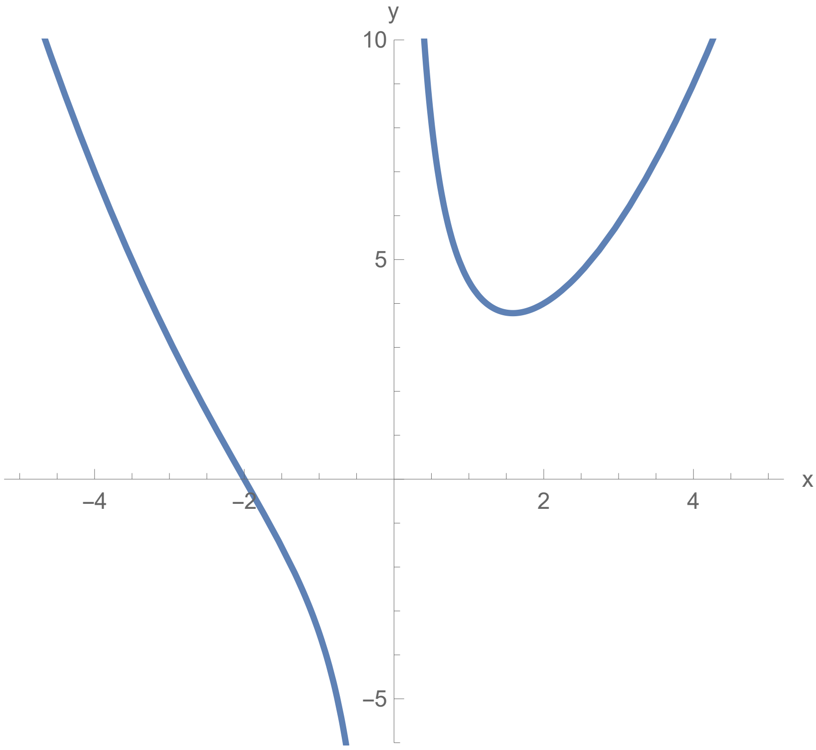
és

$$f''(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2,$$

ezért

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
f''	$+$	0	$-$	$+$
f	$\smile$	inflexió	$\frown$	$\smile$

5. lépés (grafikon). Az f függvény grafikonját az 1.15. ábra szemlélteti.



1.15. ábra. Az $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$ függvény grafikonja.

3. (a) Ha

$$f(x) := \operatorname{arctg}(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x) := x^2 + \sin(3x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x).$$

Kíséreljük meg alkalmazni a Bernoulli-L'Hospital-szabályt, azaz számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\cdot x + 3\cdot \cos(3\cdot x)} = \frac{\frac{1}{1+0^2}}{2\cdot 0 + 3\cdot\cos(3\cdot 0)} = \frac{1}{3}.$$

Így a szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{3}.$$

(b) **1. módszer.** Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x - \ln(x^2+1) = \ln(e^x) - \ln(x^2+1) = \ln\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right),$$

ezért először a $\frac{\cdots}{\infty}$-típusú

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$$

határérték kiszámításával foglalkozunk. A Bernoulli-L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Így

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \ln(x^2+1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right) = +\infty.$$

2. módszer. Mivel bármely $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x - \ln(x^2+1) = x \cdot \left(1 - \frac{\ln(x^2+1)}{x}\right),$$

ezért először a $\frac{\cdots}{\infty}$-típusú

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

határérték kiszámításával foglalkozunk. A Bernoulli-L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2x} = 0.$$

Következésképpen

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \ln(x^2+1)\right) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\ln(x^2+1)}{x}\right) = +\infty \cdot (1-0) = +\infty.$$

4. (a) Világos, hogy $f \in \mathfrak{D}^\infty$ és bármely $x \in \mathbb{R}$: $1 + ax > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+ax}} \cdot a + 2bx, \\
f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{(1+ax)^3}} \cdot a^2 + 2b, \\
f'''(x) &= \frac{3}{8\sqrt{(1+ax)^5}} \cdot a^3,
\end{aligned}$$

ill.

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{a}{2}, \qquad f''(0) = 2b - \frac{a^2}{4}.$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$1 + 2x + 2x^2 = T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2 = 1 + \frac{a}{2}x + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2,$$

ezért a polinomok azonossági tétele alapján

$$2 = \frac{a}{2}, \quad 2 = b - \frac{a^2}{4}, \qquad \text{azaz} \qquad a = 4 = b.$$

(b) Minden $x \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ esetén van tehát olyan $\xi \in (0,x) \cup (x,0)$ ($\xi := 0$, ha $x = 0$), hogy

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_2(x)| &= \left|\frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot x^3\right| = \left|\frac{3}{6 \cdot 8\sqrt{(1+4\xi)^5}} \cdot 4^3 \cdot x^3\right| = \\
&= \left|\frac{4}{\sqrt{(1+4\xi)^5}} \cdot x^3\right| < \frac{4}{\sqrt{\left(1+4\left(-\frac{1}{8}\right)\right)^5}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{4}{\sqrt{\frac{8^5-4}{8^5}}} \cdot \frac{1}{8^3} = \\
&= \frac{4}{\sqrt{8 \cdot (8^5 - 4)}} = \frac{1}{\sqrt{8^4 \cdot 4 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{16382}} \approx 0,0078.
\end{aligned}$$

5. (a) Világos, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2+1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2+1} = 1 - \frac{2x}{x^2+1},$$

ennélfogva

$$\int f(x)\,dx = x - \ln(x^2+1) + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

(b) Parciálisa integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int f(x)\,dx = \frac{(3x+1) \cdot e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{(3x+1) \cdot e^{2x}}{2} - \frac{3 \cdot e^{2x}}{4} + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

6. (a) A

$$\boxed{\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

linearizáló formulát használva azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin^2(1 - 2x) = \frac{1 - \cos(2 - 4x)}{2}.$$

Így lineáris helyettesítéssel

$$\int f(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2-4x)}{-8} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2-4x)}{8} + c \qquad (x \in \mathbb{R}\ c \in \mathbb{R}).$$

(b) Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = [\cos(x) - \sin(x)] \cdot [\cos(x) + \sin(x)],$$

ezért

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int (\cos(x) + \sin(x)) \cdot (\cos(x) - \sin(x))^{2021}\,dx = \\ &= -\int (-\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) - \sin(x))^{2021}\,dx = \\ &= -\frac{(\cos(x) - \sin(x))^{2022}}{2022} + c \quad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$