4. gyakorlat

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTTAL 2.

L'Hospital szabály

Emlékeztető. ***Tétel.*** **(L'Hospital szabály)** *Legyen* $(-\infty \leq a < b < +\infty)$, *illetve* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0, \quad \textit{vagy} \quad \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}\right\} \implies \quad \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

A L'Hospital szabály átfogalmazható ***bal oldali és (kétoldali) határértékre***, valamint $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ***típusú határértékre***. A többi típusú ***kritikus határértéket*** (pl. $\boldsymbol{(+\infty) + (-\infty)}$, $\boldsymbol{0 \cdot (\pm\infty)}$, $\boldsymbol{0^0}$, $\boldsymbol{1^{+\infty}}$) vezessük vissza $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

A feladatmegoldások során először döntsük el, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó, ezután ellenőrizzük a L'Hospital-szabály feltételeit.

1. Feladat. *L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!*

$$a) \quad \lim_{x \to 1} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2}, \qquad b) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2},$$

$$c) \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^3 - 8}, \qquad d) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

Megoldás.

a) A feladat az $x - 1$ tényező kiemelésével és egyszerűsítésével is megoldható. L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x \to 1} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{15x^2 - 8}{7x^6 + 1} = \frac{15 - 8}{7 + 1} = \frac{7}{8}.$$

b) A feladat az x^7 tényező kiemelésével és egyszerűsítésével is megoldható. L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{15x^2 - 8}{7x^6 + 1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{30x}{42x^5} =$$

$$= \frac{30}{42} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0.$$

c) A feladat gyöktelenítéssel is megoldható. L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^3-8}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot 2x}{3x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{3x\sqrt{x^2+5}}=\frac{1}{6\sqrt{9}}=\frac{1}{18}.$$

d) A feladat a hatványsorok határértékéről szóló tétellel is megoldható. L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cdot\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cdot\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1+1}{1}=2$$

Megjegyzés. A feladat a L'Hospital-szabály többszörös alkalmazásával is megoldható, azonban ez most hosszú számításokkal járna.

A 4-edik előadáson értelmeztük a tangens függvényt, amelynek deriváltja:

$$\operatorname{tg}' x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\sin' x\cos x-\sin x\cos' x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Feladat. *L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$.

Megoldás.

a) Az összeg egyik tagjának sincs határértéke a 0 pontban. Először alakítsuk át a kifejezést! Mivel

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)},$$

ezért ez már egy $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határérték 0-ban, és a L'Hospital-tétel feltételei is teljesülnek. Így

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1\cdot(e^x-1)+x\cdot e^x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+1\cdot e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

b) Mivel $\exp\in C\{0\}$, ezért

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}\overset{y=1/x}{=}\lim_{y\to 0+0}e^y=e^0=1\qquad\text{és}\qquad\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Tehát $(+\infty)-(+\infty)$ típusú határértékről van szó. Ezt $\frac{0}{0}$ típusú határértékre alakítjuk át:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}=1.$$

c) Mivel $\ln\in C\{1\}$, ezért

$$\lim_{x\to1-0}\ln x=\ln 1=0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to1-0}\ln(1-x)\overset{y=1-x}{=}\lim_{y\to0+0}\ln y=-\infty.$$

Tehát $0\cdot(-\infty)$ típusú határértékről van szó. Ezt $\frac{-\infty}{-\infty}$ típusú határértékre alakítjuk át:

$$\lim_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{x}{1-x}\ln^2 x=\lim_{x\to1-0}x\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{\ln^2 x}{1-x}=1\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{\ln^2 x}{1-x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to1-0}\frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1}=(-2)\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{\ln x}{x}=(-2)\cdot\frac{0}{1}=0.$$

d) Mivel

$$\lim_{x\to1}(1-x)=0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to1\mp0}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=\pm\infty$$

$0\cdot(\pm\infty)$ típusú határértékről van szó. Az átalakításokban felhasználjuk a tangens értelmezését:

$$\lim_{x\to1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to1}(1-x)\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to1}\frac{-1}{\left(-\sin\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

3. Feladat. *L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!*

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

Megoldás. Az $f(x)^{g(x)}$ alakú kifejezésekben az alap és a kitevő is változik. Ebben az esetben is a már ismert

$$f(x)^{g(x)}=\left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)} \qquad (g>0)$$

átalakítást fogjuk alkalmazni. Ezután meghatározzuk a kitevőben lévő kifejezés határértékét, és az exponenciális függvény folytonossága alapján következtetünk a teljes kifejezés határértékére az összetett függvényre vonatkozó határérték alapján.

a) $1^{+\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó. Az ismert átalakítással:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^x = e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \qquad (x>0).$$

Nézzük először a kitevő határértékét:

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Az exp függvény folytonos az 1 pontban, ezért

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e.$$

A megadott határérték tehát létezik és az e számmal egyenlő.

Megjegyzés. A határértékre vonatkozó átviteli elvet a $(+\infty)$-hez tartó $x_n = n$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Emlékeztetünk arra, hogy az Analízis I kurzuson megmutattuk, hogy fenti sorozat konvergens, és az e számot ennek a határértékével *definiáltuk*.

b) $(+\infty)^0$ típusú kritikus határértékről van szó. Az ismert átalakítással:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \left(e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-\operatorname{tg} x\cdot\ln x} \qquad (x>0).$$

Nézzük először a kitevő határértékét:

$$\lim_{x\to0+0}(-\operatorname{tg} x\cdot\ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to0+0}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to0+0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to0+0}\frac{\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^2 x}{x} = \lim_{x\to0+0}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x}{x} = \lim_{x\to0+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x = 1\cdot 0 = 0$$

Az exp függvény folytonos a 0 pontban, ezért

$$\lim_{x\to0+0} e^{-\operatorname{tg} x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0+0}(-\operatorname{tg} x\cdot\ln x)} = e^0 = 1.$$

A megadott határérték tehát létezik és 1-gyel egyenlő.

Konvex és konkáv függvények

Emlékeztető. A konvexitás-konkávitás a második derivált előjelével jellemezhető:

Tétel. *Legyen $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f\in D^2(a,b)$. Ekkor*

1. *f konvex [illetve f konkáv] (a,b)-n $\iff$ $f''\ge 0$ [illetve $f''\le 0$] (a,b)-n;*
2. *ha $f''>0$ [illetve $f''<0$] (a,b)-n $\implies$ f szigorúan konvex [illetve f szigorúan konkáv] (a,b)-n.*

Ha $f \in D(a,b)$ és $c \in (a,b)$, akkor c az f függvény inflexiós pontja, ha f konvexitása megváltozik a c pontban, azaz

$$\exists \delta > 0 \colon f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n és konkáv } [c, c+\delta)\text{-n}, \quad \text{vagy fordítva.}$$

Ha $f \in D^2(a,b)$ és $c \in (a,b)$ inflexiós pont, akkor f'' előjele különbözik c egy bal és egy jobb oldali környezetében. Ha még $f'' \in C\{c\}$, akkor ez csak akkor lehetséges, ha $f''(c) = 0$. Ezt hívjuk ***az inflexiós pontra vonatkozó másodrendű szükséges feltételnek***.

4. Feladat. *Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?*

a) $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R})$, *b)* $f(x) := \ln(x^2 + 2x + 2) \quad (x \in \mathbb{R})$,

c) $f(x) := \dfrac{x^3}{4 - x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}\big)$, *d)* $f(x) := \dfrac{e^x}{x+1} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$.

Megoldás. A konvexitás jellemzésére vonatkozó tétel szerint azokat a legbővebb intervallumokat kell megkeresni, amelyeken az f'' függvény állandó előjelű. Érdemes a monotonitáshoz hasonló táblázatot készíteni, de ennek első sorában most f'' szerepel. A táblázatból rögtön leolvasható, mely intervallumokon lesz konvex ($\smile$) vagy konkáv ($\frown$) a függvény, illetve hol van inflexiós pontja és mennyi az inflexiós pontokhoz tartozó érték.

a) A deriválási szabályok szerint tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36 \qquad \Longrightarrow \qquad f''(x) = 12x - 42.$$

Így $f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 7/2.$

	$x < 7/2$	$7/2$	$x > 7/2$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$-91/2$	$\smile$
		infl.	

b) A függvény valóban értelmezhető minden x valós számra, hiszen

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$$

vagy másképpen $D = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$ diszkriminánsa negatív.

A deriválási szabályok szerint tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = \big(\ln(x^2 + 2x + 2)\big)' = 2 \cdot \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2},$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + 2x + 2) - (x+1) \cdot (2x+2)}{\big(x^2 + 2x + 2\big)^2} = -2 \cdot \frac{x(x+2)}{\big(x^2 + 2x + 2\big)^2}$$

Így $f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2$ vagy $x = 0$.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$x > 0$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	$\ln 2$	$\smile$	$\ln 2$	$\frown$
		infl.		infl.	

c) A deriválási szabályok szerint tetszőleges $x \neq \pm 2$ valós szám esetén

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2}\right)' = \frac{3x^2(4-x^2) - x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(24x - 4x^3)(4-x^2)^2 - (12x^2 - x^4)\cdot 2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4} =$$

$$= \frac{(24x - 4x^3)(4-x^2) - (12x^2 - x^4)\cdot 2(-2x)}{(4-x^2)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(4-x^2)^3}$$

Így $f''(x) = 0 \iff x = 0.$

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	$x > 2$
f''	$+$	$-$	0	$+$	$-$
f	$\smile$	$\frown$	0	$\smile$	$\frown$
			infl.		

d) A deriválási szabályok szerint tetszőleges $x \neq -1$ valós szám esetén

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - xe^x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - 2xe^x}{(x+1)^3} = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$$

Így $f''(x) \neq 0 \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big).$

	$x < -1$	$x > -1$
f''	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$

Aszimptoták

Emlékeztető. ***Definició.*** *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* **van aszimptotája $(+\infty)$-ben**, *ha*

$$\exists l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ekkor az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes az f függvény **aszimptotája $(+\infty)$-ben**. *A függvény* **$(-\infty)$-beli aszimptotáját** *is hasonló módon értelmezzük.*

Az aszimptoták meghatározására a következő állítást ismertük meg:

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

5. Feladat. *Van-e az alábbi függvényeknek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg az aszimptotákat.*

a) $f(x) := x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$, *b)* $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$,

c) $f(x) := x - 2\operatorname{arc\,tg} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. Az aszimptoták létezésére és meghatározására vonatkozó tételt alkalmazzuk. A tételből rögtön következik, hogy ha létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben vagy a $+\infty$-ben, és ez a B számmal egyenlő, akkor $y = B$ a függvény aszimptotája a $-\infty$-ben vagy a $+\infty$-ben.

a) Mivel a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+x^3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^3+x^2\right) = \pm\infty,$$

határértékek léteznek, de nem végesek, ezért f-nek sem $(+\infty)$-ben sem $(-\infty)$-ben nincs aszimptotája.

b) Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} =$$
$$= \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1} = 1 := B,$$

azaz létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben, és mindkettő a $B = 1$ számmal egyenlő. Tehát f-nek a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben van aszimptotája, és ez mindkét esetben az $y = 1$ egyenletű egyenes.

c) Előadáson tanultuk, hogy $\operatorname{arc\,tg}$ korlátos függvény, és

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Az $\operatorname{arc\,tg}$ függvény korlátossága miatt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right) = 1 - 0 = 1 := A.$$

- Mivel

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to+\infty} (x - 2\operatorname{arc\,tg} x - 1\cdot x) = -2 \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\pi := B_1$$

ezért f-nek $(+\infty)$-ben van aszimptotája, és ez az $y = x - \pi$ egyenletű egyenes.

- Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to-\infty} (x - 2\operatorname{arc\,tg} x - 1\cdot x) = -2 \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pi := B_2$$

ezért f-nek $(-\infty)$-ben van aszimptotája, és ez az $y = x + \pi$ egyenletű egyenes.