Analízis 2 (F)

2. zh megoldott feladatai

(2020.12.01)

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$a)\ \int (x^2+1)\sin 2x\,dx \qquad (x\in\mathbb{R}), \qquad\qquad b)\ \int \frac{\sqrt{3x+1}}{x}\,dx \qquad (x>0).$$

Megoldás:

a) A feladat megoldásában kétszer egymásután fogunk parciálisan integrálni. Először

$$\int (x^2+1)\sin 2x\,dx = \int (x^2+1)\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)'\,dx =$$

$$= (x^2+1)\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) - \int 2x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{(x^2+1)\cos 2x}{2} + \int x\cos 2x\,dx.$$

Másrészt

$$\int x\cos 2x\,dx = \int x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'\,dx = x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \int 1\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c.$$

Így

$$\int (x^2+1)\sin 2x\,dx = -\frac{(x^2+1)\cos 2x}{2} + \int x\cos 2x\,dx =$$

$$= -\frac{(x^2+1)\cos 2x}{2} + \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c.$$

b) A feladatot a második helyettesítési szabály segítségével fogjuk megoldani. Legyen

$$t := \sqrt{3x+1} \qquad (t>1,\ \text{hiszen}\ x>0).$$

Ebből

$$x = \frac{t^2-1}{3} := g(t) \qquad (t>1).$$

A g függvény differenciálható és

$$g'(t) = \frac{2t}{3} > 0 \qquad (t>1),$$

ezért g szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható és

$$g^{-1}(x) = t = \sqrt{3x+1} \qquad (x>0).$$

Ezért a második helyettesítési szabály a $t=\sqrt{3x+1}$ helyettesítés esetén alkalmazható:

$$\int \frac{\sqrt{3x+1}}{x} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{3}}\cdot\frac{2t}{3}\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt = \int \frac{2(t^2-1)+2}{t^2-1}\,dt = \int 2+\frac{2}{t^2-1}\,dt.$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{(A+B)t+A-B}{(t-1)(t+1)},$$

amiből az $A+B=0$, $A-B=2$ egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldása $A=1$ és $B=-1$, azaz

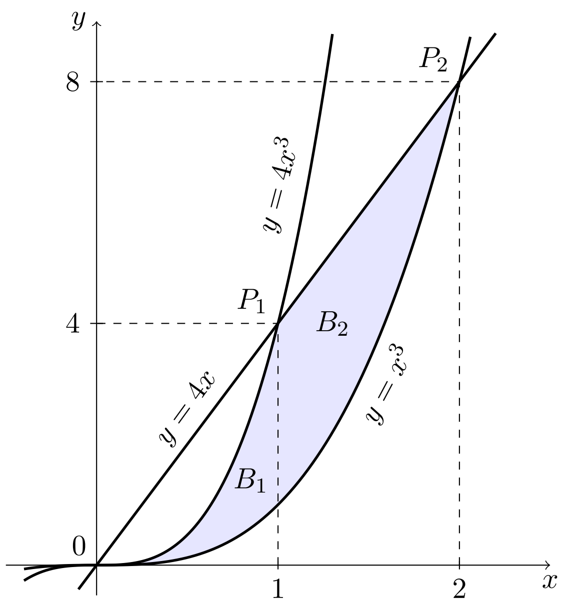
$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}.$$

Így a $t=\sqrt{3x+1}$ helyettesítés mellett

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{3x+1}}{x} &= \int 2 + \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int 2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt \\ &= 2t + \ln(t-1) - \ln(t+1) + c\Big|_{t=\sqrt{3x+1}} \\ &= 2\sqrt{3x+1} + \ln(\sqrt{3x+1}-1) - \ln(\sqrt{3x+1}+1) + c \qquad (x>0).\end{aligned}$$

2. Feladat. Ábrázolja az $y=x^3$, az $y=4x^3$ és az $y=4x$ egyenletű görbék által közrezárt első síknegyedbe eső korlátos síkidomot, és számítsa ki a területét.

Megoldás: A szóban forgó síkidom meghatározásához először meg kell keresnünk a görbék metszéspontjait. Mivel a síkidom az első síknegyedben található, ezért $x \geq 0$. Az $y=x^3$ és $y=4x^3$ egyenletű görbék olyan $P(x,y)$ pontban metszik egymást, amelyre $x^3=4x^3$ teljesül, azaz $x=0$, és így $y=0$. Ez a pont az origó. Hasonlóan az $y=4x^3$ és az $y=4x$ egyenletű görbék esetén az $4x^3=4x$ egyenlethez jutunk, amelynek nem negatív megoldásai $x=0$ és $x=1$. Így két metszéspontot kapunk: az origót és a $P_1(1,4)$ pontot. Végül az $y=x^3$ és az $y=4x$ egyenletű görbék esetén az $x^3=4x$ egyenlethez jutunk, amelynek nem negatív megoldásai $x=0$ és $x=2$. Így két metszéspontot kapunk: az origót és a $P_2(2,8)$ pontot. Az előző eredmények alapján kapott síkidom az alábbi ábrán látható kék színnel jelölve.



A síkidom területének kiszámításához ketté fogjuk darabolni az $x=1$ egyenessel az alábbiak szerint

$$\begin{aligned}B_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ x^3\leq y\leq 4x^3\},\\ B_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x\leq 2,\ x^3\leq y\leq 4x\}.\end{aligned}$$

Az előző két síkidom területét már ki tudjuk számítani integrálszámítással:

$$T(B_1) = \int_0^1 4x^3 - x^3\,dx = \int_0^1 3x^3\,dx = \left[3\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4},$$

$$T(B_2) = \int_1^2 4x - x^3\,dx = \left[4\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = (8-4) - (2-\frac{1}{4}) = \frac{9}{4}.$$

Az előző két terület összege adja a keresett síkidom területét:

$$T(B_1) + T(B_2) = 3.$$

3. Feladat. Lássa be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, a

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6+y^3}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény pedig nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

Megoldás: Először az f függvény folytonosságát fogjuk igazolni a $(0,0)$ pontban. A folytonosság definíciója szerint azt kell megmutatni, hogy

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\delta > 0 : \forall(x,y) \in D_f, \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \text{ pontban } |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon, \qquad (1)$$

ahol $D_f = \mathbb{R}^2$ és $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot.

Ha $(x,y) = 0$, akkor nyilván $|f(x,y) - f(0,0)| = |0-0| = 0 < \varepsilon$. Ha $(x,y) \neq 0$, akkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+2xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+2|xy|+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Alkalmazzuk az x^2 és y^2 számok számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, azaz

$$|xy| = \sqrt{x^2y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Ekkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{x^2+2|xy|+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+(x^2+y^2)+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= 2\frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} = 2\|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így (1) rögzített $\varepsilon > 0$ esetén $\delta = \varepsilon/2$ számmal teljesül, és ez az állítás bizonyítását jelenti.

Most azt fogjuk igazolni, hogy a g függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint, ha van olyan $\mathbb{R}^2$-beli (x_n, y_n) sorozat, amely a $(0,0)$ ponthoz konvergál, de a $g(x_n, y_n)$ képsorozata nem tart a 0-hoz, akkor g nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

Egy ilyen sorozat megkereséséhez vizsgáljuk meg a g függvény értékeit az $y = mx^2$ parabola mentén, ahol $m \in \mathbb{R}$ egy rögzített paraméter:

$$g(x,y) = g(x, mx^2) = \frac{x^4(mx^2)}{x^6 + (mx^2)^3} = \frac{mx^6}{x^6 + m^3x^6} = \frac{m}{1+m^3} \qquad (x \neq 0).$$

Látható, hogy ekkor a g függvény értéke csak az m paramétertől függ. Például $m = 1$ esetén g értéke az $y = x^2$ parabola mentén állandó, és $1/2$-vel egyenlő, ha $x \neq 0$. Ezért az

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \to (0,0), \text{ ha } n \to \infty$$

sorozat képsorozata $g(x_n, y_n) = g(x_n, x_n^2) = 1/2$, ami nem tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. Tehát g nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

4. Feladat. Határozza meg az

$$f(x,y) := 1 + 4xy - x^4 - y^4 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

Megoldás: Az f függvény kétszer deriválhatón $\mathbb{R}^2$-ön.

Elsőrendű szükséges feltétel: Mivel

$$\left.\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 4y - 4x^3 = 0 \\ \partial_y f(x,y) &= 4x - 4y^3 = 0 \end{aligned}\right\} \implies y = x^3 \implies 4x - 4(x^3)^3 = 0 \implies x(1-x^8) = 0.$$

Ennek három megoldása van: $x = 0$, $x = 1$ és $x = -1$. Ezekből az $y = x^3$ összefüggéssel megkapjuk a függvény stacionárius pontjait: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ és $P_3(-1,-1)$.

Másodrendű elégséges feltétel: Mivel

$$\partial_{xx} f(x,y) = -12x^2, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 4 = \partial_{yx} f(x,y), \qquad \partial_{yy} f(x,y) = -12y^2,$$

ezért az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}.$$

Ennek alapján

$$D_1(x,y) = -12x^2 \qquad \text{és} \qquad D_2(x,y) = \det f''(x,y) = 144x^2y^2 - 16.$$

A $P_1(0,0)$ pontban: $D_2(0,0) = -16 < 0$, ezért ebben a pontban az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

A $P_2(1,1)$ pontban: $D_2(1,1) = 128 > 0$ és $D_1(1,1) = -12 < 0$, ezért ebben a pontban az f függvénynek lokális maximuma van, amely $f(1,1) = 3$ értékkel egyenlő.

A $P_3(-1,-1)$ pontban: $D_2(-1,-1) = 128 > 0$ és $D_1(-1,-1) = -12 < 0$, ezért ebben a pontban az f függvénynek lokális maximuma van, amely $f(-1,-1) = 3$ értékkel egyenlő.

5. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := 12 - x^2 - y^2, \quad g(x,y) := x - y - 4 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

A Lagrange-szorzók módszerével határozza meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett.

Megoldás:
A szükséges feltétel: A szóban forgó módszer feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ és

$$g'(x,y) = (\partial_x g(x,y), \partial_y g(x,y)) = (1,-1) \neq (0,0) \qquad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 12 - x^2 - y^2 + \lambda(x - y - 4) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{L}(x,y) &= -2x + \lambda = 0 \\ \partial_y \mathcal{L}(x,y) &= -2y - \lambda = 0 \\ g(x,y) &= x - y - 4 = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai. Az első és a második egyenletből adódó $x = \lambda/2$ és $y = -\lambda/2$ értékeket a harmadik egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$$\frac{\lambda}{2} - \left(-\frac{\lambda}{2}\right) - 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 4.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát:

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -2, \quad \lambda_0 = 4.$$

Következésképpen csak az $(x_0, y_0) = (2,-2)$ pontban lehet lokális feltételes szélsőérték. A hozzá tartozó Lagrange-szorzó: $\lambda_0 = 4$.
Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_x g(x,y) = 1,\ \partial_y g(x,y) = -1,\ \partial_{xx}\mathcal{L}(x,y) = -2,\ \partial_{xy}\mathcal{L}(x,y) = 0 = \partial_{yx}\mathcal{L}(x,y),\ \partial_{yy}\mathcal{L}(x,y) = -2,$$

ezért

$$D(x,y,\lambda) = det \begin{pmatrix} 0 & \partial_x g(x,y) & \partial_y g(x,y) \\ \partial_x g(x,y) & \partial_{xx}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{xy}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_y g(x,y) & \partial_{yx}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{yy}\mathcal{L}(x,y) \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (-2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0) - 1 \cdot (1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 0) + (-1) \cdot (1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2)) = 4 > 0$$

Mivel $D(x_0, y_0, \lambda_0) = 4 > 0$, ezért az $(x_0, y_0) = (2,-2)$ pont feltételes lokális maximumhely, a hozzátartozó érték $f(2,-2) = 4$.