

7. előadás

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 2.

Az integrálfüggvény

A határozott integrál értelmezésével és tulajdonságai ismeretében már érdemben tudunk foglalkozni a területmérő függvénnyel, két apró megjegyzéssel. Az egyik, hogy az $\int_a^b f$ integrált érdemes az $a \geq b$ esetekre is értelmezni a következő módon:

$$\int_a^a f := 0, \quad \text{és} \quad \int_a^b f := -\int_b^a f, \quad \text{ha } a > b.$$

Ezzel értelmeztük a területmérést „visszafelé” is. A másik, hogy a területmérő elnevezést már nem fogjuk többet használni.

1. Definíció. Tegyük fel, hogy $f \in R[a, b]$ és $x_0 \in [a, b]$. Az

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

függvényt az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvényének nevezzük.

Megjegyzések.

1. F jól értelmezett, mert azt tanultuk, hogy $f \in R[a, b] \implies f \in R[x_0, x]$.
2. az „ x_0 pontban eltűnő” kifejezés arra utal, hogy $F(x_0) = 0$.

1. Tétel (Az integrálfüggvény folytonossága). Legyen $f \in R[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ és F az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvénye. Ekkor $F \in C[a, b]$.

Bizonyítás. Mivel f korlátos függvény, hiszen $f \in R[a, b]$, így $\exists K > 0$, hogy

$$|f(x)| \leq K \quad (x \in [a, b]).$$

Legyen $x \in [a, b]$ egy tetszőleges pont és $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$ olyan sorozat, hogy $\lim(x_n) = x$. Tegyük fel, hogy $x_n \geq x$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor a határozott integrál tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} |F(x_n) - F(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x_n} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x_n} |f(t)| dt \leq \int_x^{x_n} K dt = \\ &= K(x_n - x) \rightarrow 0, \quad \text{azaz} \quad F(x_n) \rightarrow F(x), \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ezért az átviteli elv szerint F jobbról folytonos az x pontban.

Hasonlóan igazolható, hogy F balról folytonos az x pontban. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

2. Tétel (Az integrálfüggvény deriválhatósága). Legyen $f \in R[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ és F az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvénye. Tegyük fel, hogy $x \in (a, b)$ olyan pont, amire $f \in C\{x\}$ teljesül. Ekkor $F \in D\{x\}$ és $F'(x) = f(x)$.

Bizonyítás. Legyen $h > 0$ olyan szám, amire $x + h < b$ teljesül. Ekkor a határozott integrál tulajdonságai alapján

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Mivel x egy rögzített szám, így

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt = f(x) \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} 1 dt = f(x) \cdot \frac{1}{h} \cdot (x+h-x) = f(x).$$

Ezért az integrál linearitása alapján

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) + f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt + f(x) = \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt + f(x). \end{aligned}$$

Mivel $f \in C\{x\}$, így a definíció szerint

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall t \in [a, b], |t - x| < \delta: |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ekkor a fentiek alapján, ha $h < \delta$, akkor minden $x \leq t < x + h$ szám esetén

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt < \\ &< \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot (x+h-x) = \varepsilon \quad \implies \quad \exists F'_+(x) = f(x). \end{aligned}$$

Hasonlóan igazolható, hogy létezik F bal oldali deriváltja az x pontban, és $F'_-(x) = f(x)$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

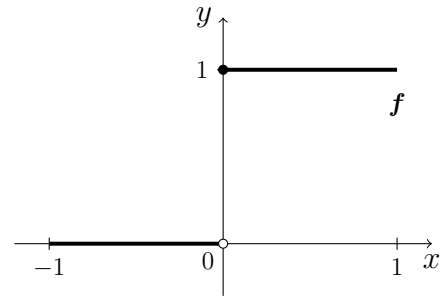
Megjegyzések.

1. Az előző állításokat így foglalhatjuk össze: az integrálfüggvény minden pontban folytonos, és olyan pontokban differenciálható, ahol az eredeti függvény folytonos. Ezekben a pontokban az integrálfüggvény deriváltja az eredeti függvény értékével egyenlő.

2. Következmény: minden nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van primitív függvénye.

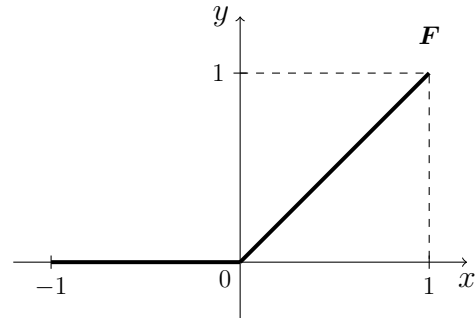
Példa. Ha $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$



akkor az $x_0 = 0$ pontban eltűnő integrálfüggvény

$$F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



A határozott integrál kiszámítása

Az előzőek szerint, ha $f \in C[a, b]$, akkor tetszőleges $x_0 \in [a, b]$ pontban eltűnő F integrálfüggvényre igaz, hogy $F \in C[a, b]$, $F \in D(a, b)$ és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in (a, b)$ esetén. Az ilyen függvényekre érdemes külön elnevezést bevezetni.

2. Definíció. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény egy **primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon**, ha

- $F \in C[a, b]$,
- $F \in D(a, b)$ és $F'(x) = f(x)$ ($x \in (a, b)$).

A következő rendkívül fontos tételt a kalkulus alaptételének is nevezik.

3. Tétel (Newton–Leibniz-formula). Tegyük fel, hogy

- $f \in R[a, b]$ és
- az f függvénynek van primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon.

Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b,$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy tetszőlegesen megválasztott $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ felosztását. A Lagrange-féle középértéktétel szerint minden $i = 0, 1, \dots, n-1$ indexre van olyan $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ pont, amelyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül. Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeadjuk minden $i = 0, 1, \dots, n-1$ indexre, akkor a bal oldalon minden tag kiesik, kivéve az $F(x_n) = F(b)$ és az $F(0) = F(a)$ tagokat. Így azt kapjuk, hogy

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Mivel $\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \leq f(\xi_i) \leq \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), ezért a

$$s(f, \tau) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, \tau)$$

egyenlőtlenség minden $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztásra teljesül. Következésképpen

$$I_*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a, b]} s(f, \tau) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a, b]} S(f, \tau) = I^*(f).$$

Az $f \in R[a, b]$ (azaz az $I_*(f) = I^*(f)$) feltételünkből így az következik, hogy

$$F(b) - F(a) = I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Megjegyzés. A Newton–Leibniz-formula feltételei közül egyik sem hagyható el. Belátható, hogy ezek egymástól függetlenek (egyikből sem következik a másik): Létezik ui. olyan integrálható függvény, amelynek nincs primitív függvénye (ilyen pl. a szignum függvény a $[-1, 1]$ intervallumon). Jóval nehezebb annak a megmutatása, hogy van olyan nem integrálható függvény, amelynek van primitív függvénye.

Példa. Számítsuk ki a

$$\int_0^{\pi} \sin x dx$$

határozott integrált! Világos, hogy a $\sin x$ ($x \in [0, \pi]$) függvényre teljesülnek a Newton–Leibniz-formula feltételei, és $F(x) = -\cos x$ ($x \in [0, \pi]$) a \sin függvény egy primitív függvénye $[0, \pi]$ -n. Így

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2.$$

Ezzel megkaptuk a $\sin|_{[0, \pi]}$ függvény grafikonja alatti síkidom területét.

A HATÁROZOTT INTEGRÁL NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

Ebben a pontban a határozott integrál néhány geometriai alkalmazását mutatjuk be.

Síkidom területe

Emlékeztetünk arra, hogy ha a korlátos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon és $f(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$), akkor az f grafikonja alatti

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidom területét így értelmeztük:

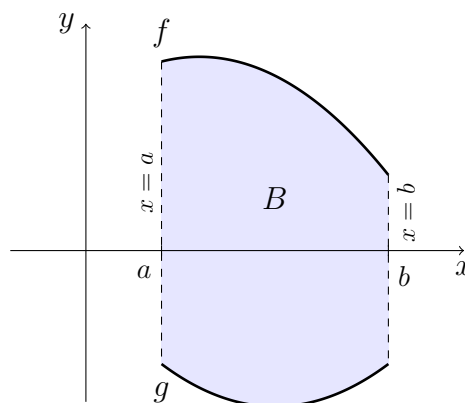
$$T(A) := \int_a^b f(x) dx.$$

Két $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és Riemann-integrálható függvény esetében, ha $g(x) \leq f(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor a függvények az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel által közrezárt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

síkidom területét a

$$T(B) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



határozott integrállal célszerű értelmezni.

Ez könnyen látható, ha $g \geq 0$, hiszen ekkor az f függvény grafikonja alatti A_f síkidom tartalmazza a g függvény grafikonja alatti A_g síkidomot, azaz $A_g \subseteq A_f$, és így

$$T(B) = T(A_f \setminus A_g) = T(A_f) - T(A_g) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ha a $g \geq 0$ feltétel nem teljesül, akkor a függvény korlátossága miatt $\exists c > 0$ szám, hogy $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén. Ezzel feltöltük a B síkidomot az x tengely fölé, amit az $f + c, g + c$ függvények az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel zárnak közre. Ezért területe

$$T(B) = \int_a^b f(x) + c dx - \int_a^b g(x) + c dx = \int_a^b (f(x) + c - (g(x) + c)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Példa (A kör területe). Helyezzük el az $R > 0$ sugarú körlapot a koordináta-rendszerben úgy, hogy az origó legyen a körlap középpontja. Ekkor a körvonal egyenlete $x^2 + y^2 = R^2$. Világos, hogy elég a felső félsíkba eső félkör lap területét meghatározni. A körvonal felső félsíkba eső része az

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \quad (x \in [-R, R])$$

függvény grafikonja.

Mivel az f függvény folytonos, ezért Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, következésképpen a szóban forgó félkör lapnak *van* területe, és az egyenlő a következő határozott integrállal:

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

A Newton–Leibniz-tétel szerint először az integrandus egy primitív függvényét kell meghatározni. Ez létezik, mert a szóban forgó függvény folytonos.

Mivel

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{1 - x^2} + c \quad (x \in (-1, 1)),$$

ezért lineáris helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \int \sqrt{R^2 - x^2} dx &= R \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} dx = R \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right) + c = \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{R} + \frac{Rx}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} + c \quad (x \in (-R, R)). \end{aligned}$$

Így a Newton–Leibniz-tétel szerint

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \left[\frac{R^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{R} + \frac{Rx}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right]_{-R}^R = \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot \arcsin 1 - \frac{R^2}{2} \cdot \arcsin(-1) = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R^2\pi}{2}, \end{aligned}$$

vagyis az R sugarú félkör lap területe $R^2\pi/2$. Ezzel megkaptuk az R sugarú kör lap területének ismert képletét: $R^2\pi$.

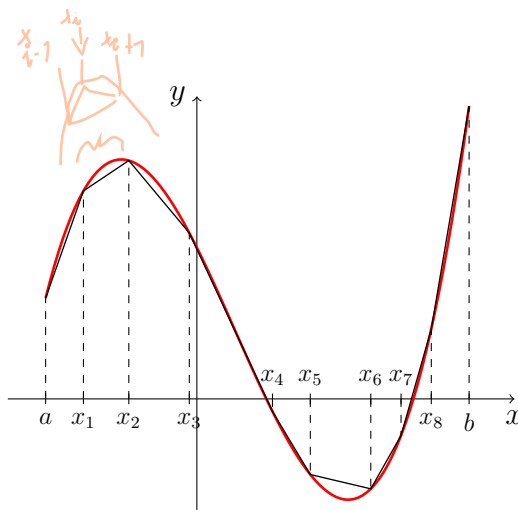
Síkbeli görbe ívhossza

Az ívhossz problémájánál a terület definíciója során megismert gondolatmenetet követjük. A görbét egy felosztáshoz tartozó törtvonallal közelítjük. A szemléletre hivatkozva azt várjuk, hogy egy „élég finom” beírt törtvonal annyira megközelíti a görbét, hogy a hosszúsága is közel lesz a görbe hosszához. Mindezekből azt szűrhetjük le, hogy a görbe ívhossza egyenlő a beírt törtvonal hosszainak a szuprémumával. Ezt a megállapítást fogjuk definícióként elfogadni.

A definíciót csak függvénygrafikonokra fogalmazzuk meg. Legyen valamilyen korlátos és zárt $[a, b]$ intervallum esetén adott az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Emlékeztetünk arra, hogy a

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$$

síkbeli halmazt (görbét) neveztük f grafikonjának.



Tetszőleges $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztás esetén (alkalmas $n \in \mathbb{N}^+$ mellett) tekintsük az

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$$

pontokat összekötő szakaszokat; ezt nevezzük az f függvénygrafikon τ felosztáshoz tartozó **beírt törtvonalának**. Világos, hogy ennek hossza a következő összeg:

$$\ell_f(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$

Az előzőek alapján elég természetes a következő definíció.

3. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. Azt mondjuk, hogy a

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$$

függvénygrafikon **rektifikálható** (vagy más szóval **van ívhossza**), ha

$$\ell(\Gamma_f) := \sup\{\ell_f(\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} < +\infty.$$

Ezt a valós számot a szóban forgó függvénygrafikon **ívhosszának** nevezzük.

A terület problémájához hasonlóan a következő kérdéseket is felvetjük:

1. Milyen Γ_f görbének van ívhossza?
2. Hogyan lehet ℓ_f -et kiszámolni?

A válaszok motiválásához az egyszerűség kedvéért tegyük fel azt, hogy az f függvény folytonosan deriválható az $[a, b]$ intervallumon (röviden $f \in C^1[a, b]$), és tekintsük az $\ell_f(\tau)$ összeg i -edik tagját:

$$\ell_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} = (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2}.$$

A Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ pont, amelyre

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül, ezért

$$\ell_i = (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.$$

Így az f függvény grafikonjához közel eső törtvonal hossza

$$\sum_{i=0}^{n-1} \ell_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal a $\varphi(x) := \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ ($x \in [a, b]$) függvény egy integrálközelítő összege. Várható tehát az, hogy a szóban forgó görbének van ívhossza, és az egyenlő az $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ határozott integrállal.

A részletek mellőzésével itt csak azt jegyezzük meg, hogy az imént vázolt gondolatmenet precíz formában is „végigvihető”, ezért igaz a következő állítás.

4. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ és tegyük fel, hogy $f \in C^1[a, b]$. Ekkor az f függvény

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$$

grafikonjának van ívhossza, és az egyenlő az

$$\ell(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

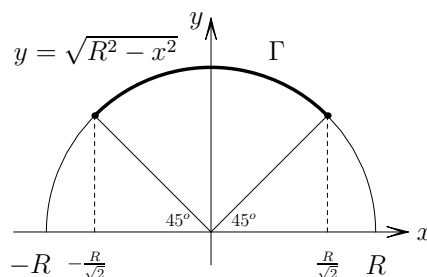
határozott integrállal.

Példa (A kör kerülete). Az alábbi ábrán jelzett negyedkör ívhosszát fogjuk kiszámolni. Legyen

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \quad (|x| \leq \frac{R}{\sqrt{2}})$$

Világos, hogy $f \in C^1[-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}]$ és

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) \quad (|x| < R)$$



Így

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}.$$

Az előző tétel szerint a Γ görbének van ívhossza és

$$(1) \quad \ell(\Gamma) = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} dx = \left[R \arcsin \frac{x}{R} \right]_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} =$$

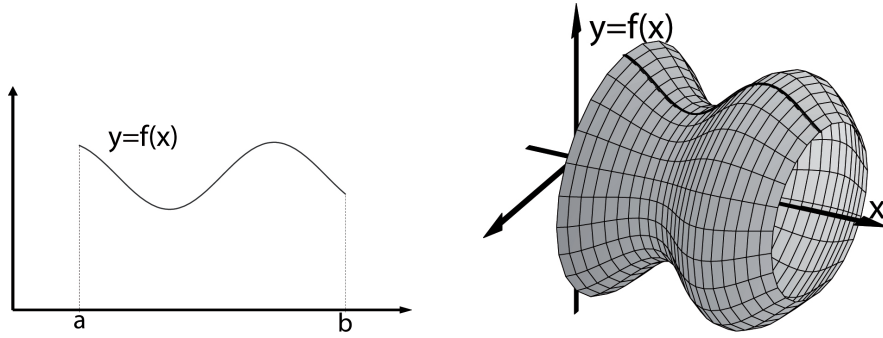
$$(2) \quad = R \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = R \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Az R sugarú kör kerülete tehát $4 \cdot R \cdot \frac{\pi}{2} = 2R\pi$.

Megjegyzés. A középiskolában a π számot az egységsugarú kör kerületének a felével értelmeztük. A 4. előadáson a (hatványsor összegfüggvényeként bevezetett) \cos függvény első pozitív zérushelyének a kétszeresével definiáltuk a π számot. A fentiek alapján a két definíció ekvivalens. Ebből az is következik, hogy a középiskolában bevezetett \sin , illetve \cos függvény valóban egyenlő az Analízis I. tantárgyban definiált \sin , illetve \cos függvénnyel.

Forgástest térfogata

A Riemann-integrál eszköztárát a térfogat problémájának a vizsgálatánál is felhasználhatjuk. A továbbiakban csak *forgástesteket* (vagyis olyan térrészt amelyet egy függvénygrafikon alatti tartomány x tengely körüli megforgatásával kapunk) fogunk vizsgálni. A terület és az ívhossz problémájánál alkalmazott gondolatmenetet követjük: a forgástestet beírt és körülírt hengerekkel (ezek térfogatát ismertnek tekintjük) közelítjük.



Tekintsünk egy nemnegatív f függvényt a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon. Ekkor az

$$A_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

halmazt az f függvény által meghatározott **forgástestnek** nevezzük.

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, akkor legyen

$$m_i := \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad \text{és} \quad M_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

A

$$h_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y^2 + z^2 \leq m_i^2\}$$

beírt hengerekre, illetve a

$$H_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y^2 + z^2 \leq M_i^2\}$$

körülírt hengerekre nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} h_i \subset A_f \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i.$$

Jelöljük $V(B)$ -vel a $B \subset \mathbb{R}^3$ test térfogatát. Az r alapsugarú és m magasságú henger térfogata $r^2\pi \cdot m$, ezért

$$V\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} h_i\right) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 \cdot (x_{i+1} - x_i) = \pi s(f^2, \tau),$$

illetve

$$V\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} H_i\right) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \cdot (x_{i+1} - x_i) = \pi S(f^2, \tau).$$

Ha tehát az A_f forgástestnek is akarunk a $V(A_f)$ -fel jelölt térfogatot tulajdonítani, akkor fenn kell állnia az alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$\pi \cdot s(f^2, \tau) \leq V(A_f) \leq \pi \cdot S(f^2, \tau) \quad (\tau \in \mathcal{F}[a, b])$$

Abban az esetben, ha f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f^2 \in R[a, b]$ is teljesül, azaz

$$I_*(f^2) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a, b]} s(f^2, \tau) = \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a, b]} S(f^2, \tau) = \int_a^b f^2.$$

Az előzőek alapján kézenfekvő az alábbi értelmezés.

4. Definíció. Legyen $0 \leq f \in R[a, b]$. Ekkor f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó

$$A_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

forgástestnek van térfogata, és az egyenlő a

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

integrállal.

Példa (A gömb térfogata). Tekintsük valamilyen $R > 0$ mellett az

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \quad (x \in [-R, R])$$

függvényt. Mivel f folytonos, ezért Riemann-integrálható $[-R, R]$ -en. Az A_f forgástest egy R sugarú gömb. A fenti definíció szerint ennek van térfogata, és a Newton–Leibniz-formula felhasználásával a térfogata

$$\begin{aligned} \pi \int_a^b f^2(x) dx &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \\ &= \pi \left(\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right) = \pi \left(\frac{2R^3}{3} - \left(-\frac{2R^3}{3} \right) \right) = \frac{4R^3\pi}{3}. \end{aligned}$$

Az R sugarú gömb térfogata tehát $4R^3\pi/3$, és ez megegyezik a korábbi tanulmányokban gyakran használt képlettel.



Forgástest felszíne

Felületek felszínének a problémája (még forgásfelület esetén is) jóval bonyolultabb, mint a terület vagy a térfogat problémája. A továbbiakban azonban az alkalmazások szempontjából jól használható eredményt fogunk ismertetni.

Legyen f a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezett nemnegatív függvény. Jelöljük \mathcal{A}_f -fel f grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott halmazt:

$$\mathcal{A}_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 = f^2(x) \ (y, z \in \mathbb{R})\},$$

amit az f függvény által meghatározott *forgásfelületnek* nevezünk.

Kézenfekvő az a feltételezés, hogy \mathcal{A}_f felszínét megközelítik az f grafikonjába beírt törtvonalak megforgatásával kapott halmazok (ezek *csonkakúp palástok* egyesítései) felszínei.

Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy τ felosztását, és jelöljük Φ_τ -val a szóban forgó csonkakúp palástok felszíneinek (ezt ismertnek tekintjük) az összegét. Mivel f grafikonjának ívhossza (ha létezik) egyenlő kell hogy legyen a beírt törtvonalak ívhosszai halmazának a szuprémumával, ezért első gondolatunk az lehetne, hogy az \mathcal{A}_f halmaz felszíne egyenlő kell hogy legyen a Φ_τ értékek ($\tau \in \mathcal{F}[a, b]$) szuprémumával. Ez azonban már egészen egyszerű függvények esetében sem igaz. Tekintsük például az $|x|$ függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon. Ekkor \mathcal{A}_f két egybevágó kúppalást egyesítése, ezért a felszíne $2 \cdot (2\pi \cdot \sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}\pi$. Ha azonban a τ felosztás csupán a -1 és 1 osztópontokból áll, akkor $\Phi_\tau = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$, ami nagyobb, mint \mathcal{A}_f felszíne.

Ez a példa a helyes definíciót is sugallja. A technikai nehézségeket elkerülendő azt az egyszerűbb utat választjuk, hogy az imént jelzett okoskodás végeredményeképpen kapott integrállal definiáljuk a felszínt.

5. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tegyük fel, hogy $0 \leq f \in C^1[a, b]$. Ekkor f grafikonjának az x -tengely körüli forgatásával adódó

$$\mathcal{A}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, \quad y^2 + z^2 = f^2(x) \quad (y, z \in \mathbb{R})\}$$

forgásfelületnek van felszíne, és értéke

$$2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Példa (A gömb felszíne). Az origó középpontú és R sugarú gömbfelületet az

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (x \in [-R, R])$$

függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapjuk. Legyen $0 < r < R$ és tekintsük az

$$f_r(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (x \in [-r, r]).$$

Ekkor $f_r \in C^1[-r, r]$ és

$$f'_r(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (x \in [-r, r]),$$

továbbá

$$1 + [f'_r(x)]^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2} \quad (x \in [-r, r]).$$

Ezért az f_r által a fentiekben meghatározott és \mathcal{A}_r -rel jelölt forgásfelület felszíne

$$F_r := 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_{-r}^r 1 dx = 4Rr\pi.$$

A „szemlélet alapján” könnyen elfogadható (az egzakt meggondolásokat nem részletezve), hogy az $r \rightarrow R$ határátmenettel $\mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_R$, ahol \mathcal{A}_R az R sugarú gömb felszíne. Ugyanakkor

$$\lim_{r \rightarrow R} F_r = \lim_{r \rightarrow R} 4Rr\pi = 4R^2\pi,$$

ami valóban nem más, mint az R sugarú gömb felszíne.

Improprius integrálok

A Riemann-integrál értelmezésénél a kiindulópontunk az volt, hogy csak olyan f függvényeket tekintettünk, amelyekre a következő két feltétel teljesül:

- f értelmezési tartománya egy **korlátos és zárt** $[a, b]$ intervallum,
- az **f függvény korlátos** $[a, b]$ -n.

Felvethető az a **probléma**, hogy ezeket a feltételeket nem kielégítő függvényekre vajon értelmezhető-e az integrál fogalma. Egyfajta kiterjesztést tesznek lehetővé az ún. **improprius integrálok**.

6. Definíció. Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in R[x, b]$ minden $x \in (a, b)$ esetén. Vezessük be a

$$G(x) := \int_x^b f(t) dt \quad (x \in (a, b))$$

függvényt. Azt mondjuk, hogy az f függvény **impropriusan integrálható**, ha $\exists \lim_a G \in \mathbb{R}$ véges határérték. Ekkor az

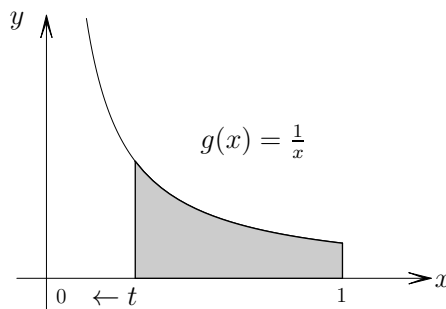
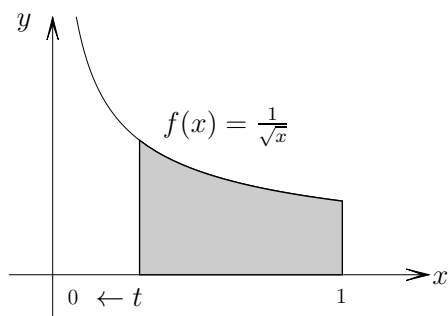
$$\int_a^b f := \lim_{x \rightarrow a} G(x)$$

számot az f **improprius integráljának** nevezzük.

Példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \in (0, 1]) \quad \text{és} \quad g(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in (0, 1]).$$

Tekintsük a következő ábrákat:



Ekkor

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0+0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0+0} [2\sqrt{x}]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0+0} (2 - 2\sqrt{t}) = 2,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0+0} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0+0} [\ln x]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0+0} (\ln 1 - \ln t) = +\infty.$$

Megjegyzések.

1. Vigyázat! Az improprius integrál jelöléseiből nem derül ki, hogy nem a szokásos határozott integrálról van szó.
2. Nem nehéz meggondolni, hogy ha $f \in R[a, b]$ akkor az improprius integrál megegyezik a szokásos határozott integrállal. Ennek oka, hogy ekkor az integrálfüggvény tulajdonságai szerint G folytonos lesz az a pontban.
3. Az improprius integrállal bizonyos nem korlátos síkidomok területét is értelmezhetjük.

Analóg módon értelmezhető $-\infty < a < b \leq +\infty$ esetén az $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja az

$$\int_a^b f := \lim_{x \rightarrow b} G(x), \quad G(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in (a, b))$$

összefüggéssel.

Példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \quad (x \in [1, +\infty)).$$

Ekkor

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} - (-1) \right) = 1.$$

Még egy harmadik eset marad, ahol szükséges értelmezni az improprius integrált.

7. Definíció. Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ és $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in R[x, y]$ minden $a < x < y < b$ esetén. Azt mondjuk, hogy az f függvény **impropriusan integrálható**, ha minden $c \in (a, b)$ esetén $f|_{(a, c]}$ és $f|_{[c, b)}$ impropriusan integrálható. Ekkor

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Megjegyzés. Nem nehéz meggondolni, hogy a c értéke nem befolyásolja az $\int_a^b f$ eredményét.

Példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, +\infty)).$$

Igaz, hogy

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\arctan t - 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctan x]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (0 - \arctan t) = \frac{\pi}{2}.$$

Ezért

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Az egyik legfontosabb eredmény az improprius integrálok körében az, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

ami a valószínűségi számításban játszik fontos szerepet. Mivel $\int e^{-x^2} dx$ nem elemi függvényekből áll, így nem tudjuk a Newton–Leibniz-formulával kiszámítani a fenti improprius integrál értékét. Egy későbbi előadáson, teljesen más eszközökkel megmutatjuk ennek az állításnak a bizonyítását.