# 8. előadás

## TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK.

Eddigi tanulmányaink során ***egyváltozós analízissel***, vagyis $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú (vagy másképpen fogalmazva valós-valós) függvényekkel foglalkoztunk. Láttuk, hogy az alapvető fogalmak a szóban forgó függvényeknek a *határértéke, folytonossága, deriváltja és integrálja.* A továbbiakban a ***többváltozós analízis*** alapjaival fogunk megismerkedni. Az egyváltozós analízis alapvető fogalmainak és eredményeinek az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le n, m \in \mathbb{N})$ típusú (az ún. vektor-vektor) függvényekre való kiterjesztéséről lesz szó.

De mi az alapja ennek a kiterjesztésnek? Elevenítsük fel újra a *függvény pontbeli határértékének* fogalmát! Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}'_f$. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvénynek az $a$ pontban vett határértéke az $A$ szám, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta \colon |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ugyanez ***környezetekkel*** kifejezve:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \Big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\Big) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

ahol

$$K_r(x) := \{y \in \mathbb{R} \colon |x - y| < r\} = (x - r, x + r)$$

az $x$ valós szám $r > 0$ sugarú környezetét jelenti. Látható, hogy a fenti fogalom (még az $a \in \mathcal{D}'_f$ torlódási pont fogalma is) teljesen leírható környezetekkel. Ez azt jelenti, hogy ha bevezetnénk a környezet fogalmát $\mathbb{R}^n$-ben, akkor változtatás nélkül általánosítani tudnánk a függvény pontbeli határértékének fogalmát.

### Metrikus és normált terek

A környezet fogalma nem lehet akármilyen, mert akkor nem fogjuk tudni a határértéktől „elvárt" tulajdonságokat igazolni. A valós számok halmazán a $K_r(x)$ környezet nem más, mint azon pontok halmaza, amelyeknek távolsága az $x$ ponttól kisebb, mint $r$. Ha ezen az úton maradunk, akkor csak egy *távolságfüggvényre* vagy más néven *metrikára* lesz szükségünk.

Mit jelent az, hogy metrika? Gondolhatunk arra, hogy a valós térben, ahol élünk, két pont távolsága mindig a két pontot összekötő egyenes szakasz hossza. Sajnos nem mindig tudunk egyenes úton eljutni az egyik ponttól a másikig, ezért sokszor szükséges egy ettől eltérő metrikát értelmezni. A matematikai analízis különböző metrikákat enged alkalmazni, azonban ezekkel szemben megkövetel néhány tulajdonságot.

Legyen $M \neq \emptyset$ egy adott halmaz és $d : M \times M \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre teljesül

$$\begin{array}{lll} i. & d(x,y) \ge 0 \quad \text{és} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y, & \\ ii. & d(x,y) = d(y,x) & \text{(szimmetrikus)}, \\ iii. & d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) & \text{(háromszög egyenlőtlenség)} \end{array}$$

minden $x, y, z \in M$ esetén. Ekkor az $(M, d)$ együttest ***metrikus térnek*** nevezzük. Ugyanakkor azt mondjuk, hogy $d$ ***metrika*** vagy ***távolságfüggvény*** $M$-en.

A $d(x,y) := |x-y|$ függvény metrika $\mathbb{R}$-en, és ***természetes távolságnak*** fogjuk nevezni, de ettől lényegesen eltérő metrikák is értelmeztetők. Pl. igazolható, hogy a

$$d_1(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x = y, \\ 1 & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

függvény metrika (ún. diszkrét metrika) $\mathbb{R}$-en, illetve a

$$d_2(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \qquad \text{és} \qquad d_3(x,y) := |e^x - e^y|$$

függvények szintén metrikák $\mathbb{R}$-en.

Ha az $(M,d)$ metrikus tér egyben lineáris tér (vektortér), akkor minden $x$ elem (vektor) nagyságát (hosszát) úgy értelmezzük, mint az elem nullától való távolságát. Erre a $\|x\|$ jelölést alkalmazzuk, azaz $\|x\| := d(x,0)$. Tudjuk, hogy $\mathbb{R}$ egy 1 dimenziós vektortérnek tekinthető, így ha $d$ a természetes metrika, akkor $\|x\| = |x|$. Csak hogy az abszolút értéknek a következő tulajdonságai vannak:

a) $|x| \geq 0, \qquad \text{és} \qquad |x| = 0 \iff x = 0,$

b) $|xy| = |x||y|,$

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$

minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén. Ezeket az Analízis I. kurzuson igazoltuk, és számos állítás bizonyításában alkalmaztuk. Nem okoz meglepetést tehát a következő fogalom bevezetése.

Legyen $X \neq \emptyset$ egy lineáris tér $\mathbb{R}$-felett és $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ olyan függvény (ún. ***norma***), amelyre teljesül

$$\begin{array}{lll} i) & \|x\| \geq 0 \quad \text{és} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0, & \\ ii) & \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| & \text{(abszolút homogén)}, \\ iii) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| & \text{(szubadditív)} \end{array}$$

minden $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor az $(X, \|.\|)$ együttest ***normált térnek*** nevezzük. Ugyanakkor azt mondjuk, hogy ***$\|x\|$ az $x \in X$ elem normája***. Könnyen igazolható, hogy $(X,d)$ metrikus tér, ha a $d$ távolságot a norma segítségével értelmezzük:

$$d(x,y) := \|x-y\| \qquad (x \in X).$$

Igazolható, hogy egy normából származó metrika abszolút homogén és eltolás invariáns, azaz

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \qquad \text{és} \qquad d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

minden $x, y, z \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Az abszolút homogenitás nem érvényes a fenti példákban szereplő $d_1$, $d_2$ és $d_3$ metrikákra, de nyilván érvényes a természetes metrikára. A normákra még igazolható az

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x-y\| \qquad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenséget.

A fentiek értelmében normákat kell keresünk $\mathbb{R}^n$-en, és rögtön hármat meg is tudunk adni:

$$\|x\|_2 := \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad (\textbf{\textit{euklideszi norma}}),$$

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_k| : k = 1, 2, \ldots, n\} = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\},$$

ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

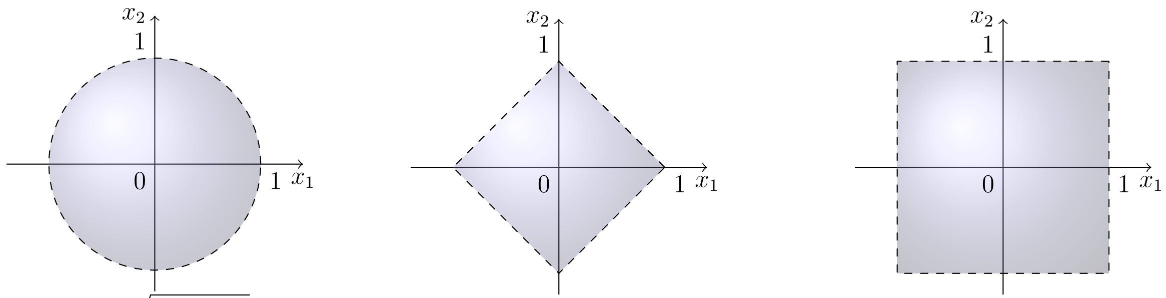
Mindhárom norma jó abban az értelemben, hogy visszaadják a szám abszolút értékét $n = 1$ esetén. Tehát mindhárom az abszolút érték általánosításának tekinthető. Akkor melyiket kellene használni? Ezek a normák egymással ekvivalensek, azaz bármelyik a másik konstansszorosával felülről becsülhető. Ez valóban így van, hiszen igazolható, hogy

$$\frac{1}{n}\,\|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

De az is igaz, hogy véges dimenziós térben bármely két norma egymással ekvivalens. Ez azt jelenti hogy mindegy melyiket használunk, de mi az $\|x\|_2$-t fogjuk preferálni. A normaekvivalencia nem azt jelenti, hogy hasonló környezeteket kapunk. A következő ábra mutatja a

$$K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x - 0\| < 1\}$$

környezetet $\mathbb{R}^2$-ben $\big(0 = (0,0)\big)$.



$\|.\|_2$ norma — $\{(x_1,x_2)\colon \sqrt{x_1^2+x_2^2} < 1\}$

$\|.\|_1$ norma — $\{(x_1,x_2)\colon |x_1|+|x_2| < 1\}$

$\|.\|_\infty$ norma — $\{(x_1,x_2)\colon \max\{|x_1|,|x_2|\} < 1\}$

## $\mathbb{R}^n$ mint euklideszi tér

A `Matematikai alapok` tantárgyban az $\mathbb{R}^n$ tér számos tulajdonságáról volt szó. Most felsoroljuk azokat az ismerteket, amelyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ egy adott pozitív természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ szimbólummal jelöljük a rendezett valós szám $n$-esek halmazát:

$$\mathbb{R}^n := \Big\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n\Big\}.$$

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pont (vektor) ***koordinátáinak*** vagy ***komponenseinek*** nevezzük.

$\mathbb{R}^1$-et azonosítjuk $\mathbb{R}$-rel. A sík pontjai rendezett valós számpárokkal (vagyis az $\mathbb{R}^2$ halmaz elemeivel), a tér pontjai pedig rendezett valós számhármasokkal (vagyis $\mathbb{R}^3$ elemeivel) azonosíthatók. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz tehát ezek „természetes” általánosításaként fogható fel. Az $n > 3$ esetben $\mathbb{R}^n$-nek nincs szemléletes jelentése, de a fogalom mégis nélkülönözhetetlen mind az elmélet, mind pedig az alkalmazások szempontjából.

A középiskolában a sík és a tér vektoraival több műveletet is értelmeztünk. Vektorok ***összeadásának***, valamint **vektor** (valós) ***számmal való szorzásának*** a mintájára vezetjük be az $\mathbb{R}^n$ halmazon az alábbi komponensenkénti műveleteket: ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \qquad \lambda \cdot x := (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n).$$

Ezek az $\mathbb{R}^n$-beli műveletek rendelkeznek a sík és a tér vektorainak a középiskolában megismert 10 alapvető tulajdonságával. Röviden ezt úgy fejezzük ki, hogy $\mathbb{R}^n$ ***ezekkel a műveletekkel lineáris tér*** (vagy ***vektortér*** $\mathbb{R}$ ***felett***). Ennek a vektortérnek a dimenziója pontosan $n$, azaz rendelkezik egy $n$ darab tagból álló bázissal.

(Kiemeljük azt fontos tényt is, hogy rögzített $n, m \in \mathbb{N}^+$ esetén az $n \times m$-es valós elemű mátrixok $\mathbb{R}^{n\times m}$ szimbólummal jelölt halmazában is értelmezzük az összeadás és a számmal való szorzás műveleteket, és $\mathbb{R}^{n\times m}$ ezekkel a műveletekkel $\mathbb{R}$ feletti lineáris tér.)

A középiskolában a sík és tér vektorainak az összeadásán és a számmal való szorzásán kívül megismerkedtünk még egy fontos művelettel, vektorok *skaláris szorzatával.* Ezt a fogalmat is fogjuk az $\mathbb{R}^n$ lineáris térre is kiterjeszteni: Az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektorok ***skaláris szorzatát*** az

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

valós számmal definiáljuk. A skaláris szorzat rendelkezik az euklideszi tér fogalmában szereplő 5 axiómával, ezért $\mathbb{R}^n$ egy $n$-dimenziós euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett.

A skaláris szorzat segítségével értelmezhetjük $\mathbb{R}^n$-beli vektorok szögét, merőlegességét, illetve a hosszát (normát) és a távolságot. Ezekre a geometriában megszokott tulajdonságok jelentős része megmarad. Az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor ***normáját*** (***hosszát*** vagy ***abszolút értékét***) az

$$\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdot + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

képlettel definiáljuk. Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok ***távolságán*** az $\|x - y\|$ számot értjük. Ha a továbbiakban az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térről beszélünk, akkor mindig az $\mathbb{R}^n$ lineáris térre és az azon értelmezett, a fenti skaláris szorzatból származó euklideszi normára gondolunk.

Egy $a \in \mathbb{R}^n$ pont $r$ $(> 0)$ sugarú ***környezetén*** a

$$K_r(a) := \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\| < r\Big\}$$

halmazt értjük. $n = 1$ esetén $K_r(a)$ az $a$ pontra szimmetrikus $(a - r, a + r)$ nyílt intervallum. Ha $n = 2$, akkor $K_r(a)$ az $a$ pont körüli $r$ sugarú nyílt körlap, $n = 3$ esetén pedig az $a$ pont körüli $r$ sugarú nyílt gömb. A „nyílt gömb” elnevezést használjuk akkor is, ha $n > 3$.

A $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt ***korlátosnak*** nevezzük, ha $\exists\, r > 0$ úgy, hogy $A \subseteq K_r(0)$, vagyis $A$ benne van egy 0 középpontú, alkalmas sugarú nyílt gömbben.

Környezetek segítségével (hasonlóan mint $\mathbb{R}$-ben) értelmezhetjük $\mathbb{R}^n$-ben is a következő „topológiai” fogalmakat. Tegyük fel, hogy $A$ az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térnek egy nem üres részhalmaza. Ekkor

- $a \in \mathbb{R}^n$ az $A$ halmaz ***torlódási pontja*** (jelekkel $a \in A'$), ha $\forall K(a) \colon K(a) \cap A$ végtelen halmaz, azaz az $a$ pont minden környezete végtelen sok $A$-beli pontot tartalmaz,
- $a \in A$ az $A$ halmaz ***belső pontja*** (jelekkel $a \in \operatorname{int} A$), ha $\exists K(a) \colon K(a) \subset A$,
- az $A$ halmaz ***nyílt halmaz***, ha minden pontja belső pont,
- az $A$ halmaz ***zárt halmaz***, ha $\mathbb{R}^n \setminus A$ nyílt halmaz.

Látható, hogy a környezettel kapcsolatos fogalmak és jelölés módja nem változtak a már ismert $\mathbb{R}$-beli fogalmakhoz és jelöléhez képes, de tulajdonságai különbözhetnek. A nyílt és zárt halmazok struktúrája jóval gazdagabb. Pl. $\mathbb{R}$-ben egy nyílt halmaz mindig előáll megszámlálhatóan sok nyílt intervallum uniójaként.

Többdimenziós térben nem fogunk rendezést értelmezni, így nem beszélhetünk alsó, felső korlátokról, maximum, minimumról, ill. szuprémum-, infimumról. A teret nem fogjuk bővíteni olyan ideális elemekkel, mint a $+\infty$ és a $-\infty$ szimbólumokkal tettük a valós számok halmazán.

## Konvergencia az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben

**1. Definíció.** *Az $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ függvényt* $\mathbb{R}^n$**-beli sorozatnak** *nevezzük. Az*

$$x(k) =: x_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

*helyettesítési érték a sorozat* ***k*-adik** *vagy* ***k*-indexű tagja**, *a tag sorszámát jelző szám a tag* **indexe**. *Lehetséges jelölései: $x$, $(x_k)$ vagy $(x_0, x_1, x_2, \dots)$.*

Mivel egy $\mathbb{R}^n$-beli pont koordinátáinak jelölésére szintén alsó indexet használunk, így a félreértések elkerülésére az $(x_k)$ sorozat $k$-adik tagjának $i$-edik koordinátájára az $x_k^{(i)}$ jelölést alkalmazzuk. Adott $(x_k)$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat és fix $i = 1, 2, \dots, n$ esetén beszélhetünk az $(x_k^{(i)})$ koordinátasorozatról, ami már valós sorozat lesz. A koordinátasorozatok fontos szerepet játszanak az $\mathbb{R}^n$-beli sorozatok vizsgálatában.

Azt mondjuk, hogy az $(x_k)$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat ***korlátos***, ha a sorozat értékkészlete korlátos, azaz ha az

$$\mathcal{R}_x = \{x_k \in \mathbb{R}^n \colon k \in \mathbb{N}\}$$

halmaz korlátos. Rendezés híján ***egy $\mathbb{R}^n$-beli sorozat monotonitása nem értelmezhető***, de a koordinátasorozatok esetében van értelme a monotonitásnak.

Emlékeztetünk arra, hogy az $(x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós sorozatot akkor neveztük *konvergensnek*, ha

$$\exists A \in \mathbb{R} \text{ úgy, hogy } \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, k > k_0 \text{ indexre } |x_k - A| < \varepsilon.$$

Látható, hogy a fogalom lényegében az $\mathbb{R}$-en értelmezett $d(x, y) = |x-y|$ természetes távolságon múlik. Ha ehelyett az $\mathbb{R}^n$ euklideszi téren értelmezett $d(x, y) = \|x - y\|$ távolságfüggvényt használjuk, akkor általánosíthatjuk a sorozatok konvergenciájának fogalmát $\mathbb{R}^n$-re.

**2. Definíció.** *Legyen $1 \le n \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér $(x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozata* **konvergens**, *ha*

$$\exists A \in \mathbb{R}^n \textit{ úgy, hogy } \forall \varepsilon > 0 \textit{ számhoz } \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k > k_0 \textit{ indexre } \|x_k - A\| < \varepsilon.$$

*Ha $A$ létezik, akkor az egyértelmű, és $A$-t az $(x_k)$ sorozat* **határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim\,(x_k) = A, \qquad \lim_{k\to+\infty} x_k = A, \qquad x_k \to A, \ \textit{ha } k \to +\infty.$$

*Az $(x_k)$ sorozat* **divergens**, *ha nem konvergens.*

Figyeljük meg, hogy az $(x_k)$ vektorsorozat pontosan akkor tart az $A$ vektorhoz, ha az $\|x_k - A\|$ $(k \in \mathbb{N})$ normák sorozata $\mathbb{R}$-beli nullsorozat, azaz

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} \|x_k - A\| = 0.$$

A következő tétel szerint egy vektorsorozat konvergenciája ekvivalens a koordináták sorozatainak a konvergenciájával.

**1. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Egy $\mathbb{R}^n$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátasorozata konvergens, és a határértéke a határvektor megfelelő koordinátája, azaz*

$$\mathbb{R}^n \ni x_k = \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) \to A = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\right), \quad \textit{ha} \;\; k \to +\infty$$

*pontosan akkor igaz, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ koordinátára*

$$x_k^{(i)} \to A^{(i)}, \quad \textit{ha} \;\; k \to +\infty.$$

***Bizonyítás.*** $\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = A$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - A\| = 0$. Rögzítsük az $i = 1, 2, \ldots, n$ indexet. Mivel

$$0 \le \left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_k^{(j)} - A^{(j)}\right|^2} = \|x_k - A\| \to 0, \text{ ha } k \to +\infty,$$

ezért a közrefogási elv szerint $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right| = 0$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = A^{(i)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = A^{(i)}$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} |x_k^{(i)} - A^{(i)}| = 0$. Ekkor az

$$0 \le \|x_k - A\| = \|x_k - A\|_2 \le \|x_k - A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right| \to 0, \text{ ha } k \to +\infty,$$

egyenlőtlenség és ismét a közrefogási elv alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\|x_k - A\| \to 0$, ha $k \to +\infty$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = A$.

***Példák:***

- $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) = (0, e)$, hiszen $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$ és $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$.
- Az $x_k := \left(\frac{1}{k^2}, \frac{\sin k}{k}, k\right)$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ sorozat divergens, mert $\lim\limits_{k\to+\infty} k = +\infty$.

A tétel segítségével a legtöbb számsorozatra vonatkozó állítást általánosíthatjuk $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra. A bizonyítás többnyire abból áll, hogy a koordináták sorozataira alkalmazzuk a megfelelő számsorozatokra vonatkozó tételt. Ezért $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra is igaz a határérték egyértelműségére vonatkozó tétel, az összegsorozat és a számszoros sorozat határértékére vonatkozó tétel, illetve a konvergens sorozat részsorozataira vonatkozó tétel.

A következő két állításban azt fogalmazzuk meg, hogy az $\mathbb{R}$-beli sorozatok konvergenciájára vonatkozó alapvető jelentőségű tételek az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben is érvényesek.

**2. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium).** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér $(x_k)$ sorozata akkor és csak akkor konvergens, ha $(x_k)$ Cauchy-sorozat, azaz*

$$\forall \varepsilon > 0 \textit{ számhoz } \exists k_0 \in \mathbb{N}, \textit{ hogy } \forall k, l > k_0 \textit{ indexre } \|x_k - x_l\| < \varepsilon.$$

**3. Tétel (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel).** *Az* $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *euklideszi térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

## Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények

Olyan függvényekkel fogunk foglalkozni, amelyeknek értelmezési tartományuk része az $\mathbb{R}^n$ halmaznak, és értékkészletük része az $\mathbb{R}^m$ halmaznak, ahol $n$ és $m$ pozitív egész számok. Tehát

$$f\colon \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Ha $n = 1$ vagy $m = 1$, akkor ezek a függvények leegyszerűsödnek, és speciális értelmezésekkel kerülünk szembe.

$\boxed{\textbf{1.}}$ $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ✓ A valós-valós függvényekkel már részletesen foglalkoztunk.

$\boxed{\textbf{2.}}$ $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$. Ekkor ***valós (egy)változós vektor értékű függvényekről*** beszélünk. Az ilyen függvények felírhatók

$$f(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)\big) \qquad (t \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R})$$

alakban, ahol az $x_i\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ valós-valós függvényeket ***koordinátafüggvényeknek*** nevezzük $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Ha $m = 2$, akkor úgy tudjuk szemléltetni egy ilyen függvény értékészletét, hogy a koordinátasíkon ábrázoljuk az $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ koordinátájú pontokat, ahol $t \in \mathcal{D}_f$. Ha egy síkbeli görbe pontjait ilyen módon előállítjuk, akkor ***paraméteres görbéről*** beszélünk, ahol $t$ a paraméter. Hasonlóan járunk el térbeli görbék esetén, ebben az esetben $m = 3$.

Matlab programmal a következő egyszerű kóddal tudunk paraméteres görbéket előállítani:

Síkbeli görbék

```
syms t
x1 = ...;            %x1(t) fv.
x2 = ...;            %x2(t) fv.
fplot(x1,x2,[a b])   %a<=t<=b
```

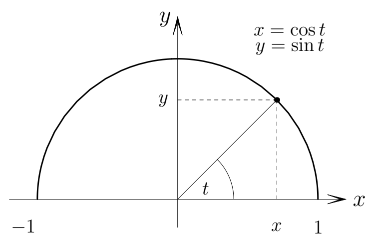
Térbeli görbék

```
syms t
x1 = ...;                 %x1(t) fv.
x2 = ...;                 %x2(t) fv.
x3 = ...;                 %x3(t) fv.
fplot3(x1,x2,x3,[a b])    %a<=t<=b
```

***Példák:***

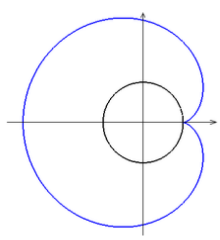
a) ***a félkörív:***

$$f(t) := (\cos t,\ \sin t) \qquad \big(t \in [0, \pi]\big)$$

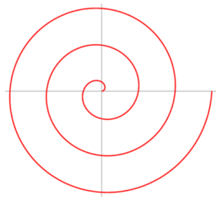



b) ***a kardiodid:***

$$f(t) := (2\cos t - \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t)$$
$$\big(t \in [0, 2\pi]\big)$$

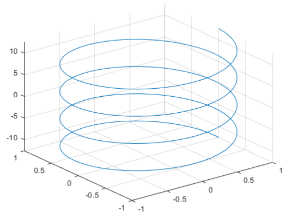


c) ***az arkhimédészi spirális:***



$$f(t) := (t \cos t,\, t \sin t) \quad (t \ge 0)$$

d) ***a hengerre írható csavarvonal:***
($a$ sugarú, $m$ menetemelkedésű csavarvonal)



$$f(t) := \left(a \cos t,\, a \sin t,\, \frac{m}{2\pi}\, t\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

***Megjegyzések.***

1. Itt hívjuk fel ismét a figyelmüket a `MacTutor` honlapra. Ezen – többek között – matematikusok (Arkhimédésztől napjainkig) életrajzáról és munkásságáról találhatnak részletes információkat. Ugyanezen az oldalon a „CURVES” menüpont alatt számos klasszikus görbe leírását találhatják meg.

2. A Néhány nevezetes síkgörbe című segédanyagban pedig bizonyos görbék származtatásáról olvashatnak.

$\boxed{\textbf{3.}}$ $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n > 1)$. Ekkor ***n változós valós értékű függvényekről*** beszélünk. Pl.

$$f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := f(x_1, x_2, x_3) := \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \sqrt{1 - \|x\|^2} \qquad (\|x\| \le 1)$$

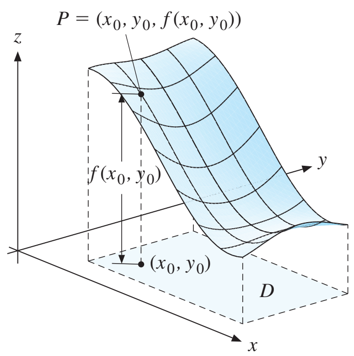
vagy

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^3 y - e^{xy} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ha $n = 2$, akkor ***kétváltozós valós értékű függvényekről*** beszélünk. Az ilyen függvényeket a

$$\mathrm{Gr}_f := \Big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f\Big\}$$

térbeli halmazzal, az ún. **függvény grafikonjával** tudjuk ábrázolni, ami egy térbeli felületet határoz meg. Ennek alakját úgy tudjuk szemléltetni, hogy a felületen olyan görbesereget rajzolunk fel, amelynek tagjai a felület és olyan sík metszete, amely az $xy$ síkra merőleges, de az $x$ vagy az $y$ tengellyel párhuzamos. Egy másik módszer olyan görbesereget felrajzolni, amelynek tagjai a felület és olyan sík metszete, amely párhuzamos az $xy$ síkkal. Adott $c \in \mathcal{R}_f$ az




$$\Big\{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f,\ f(x, y) = c\Big\}$$

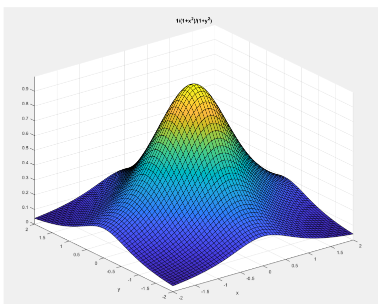
halmazt a grafikon $c$ paraméterhez tartozó ***szintvonalának*** nevezzük. Ilyen ábrázolást a térképészetben használnak.

Matlab programmal az `ezsurf` függvénnyel tudunk kétváltozós valós értékű függvények grafikonját ábrázolni. Pl. az

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény kódja:

```
ezsurf('1/(1+x^2)/(1+y^2)',[-2,2,-2,2])
```



Előfordul, hogy a kétváltozós $f$ függvény értéke minden $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ pontban csak az $x^2+y^2$ értéktől függ, azaz a $\|(x,y)\|$ értéktől, ami a pont nullától (origótól) való távolsága. Ekkor a függvény szintvonalai olyan körök (vagy egy pont), amiknek középpontja a $z$ tengelyen található. Elég lenne megtartani mindegyikből egyetlen egy pontot, és ezeket megforgatni a $z$ tengely körül, hogy előállítsuk a felületet. Legyen ez a pont az, amire $x \geq 0$ és $y = 0$ teljesül. Így az $f$ függvény grafikonját a

$$g(x) := f(x,0) \qquad \big((x,0) \in \mathcal{D}_f,\ x \geq 0\big)$$

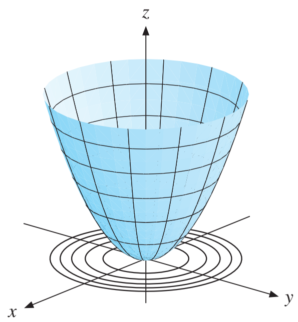
függvény a $z$ tengely körüli megforgatásával kapjuk.

***Példák:***

a) ***a forgásparaboloid:***

$$f(x,y) := x^2 + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

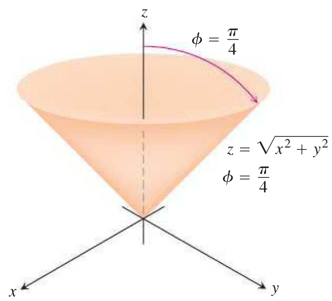
a $g(x) := x^2$ $(x \geq 0)$ parabolaág megforgatásával kapott forgásfelület.




b) ***a forgáskúp:***

$$f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

a $g(x) := \sqrt{x^2} = x$ $(x \geq 0)$ félegyenes megforgatásával kapott forgásfelület.




$\boxed{\textbf{4.}}$ $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m > 1)$. Ekkor ***$n$ változós $m$ dimenziós vektor értékű függvényekről*** beszélünk röviden ***vektor-vektor függvényekről***. Az ilyen függvények felírhatók

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\big) \qquad (x \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n)$$

alakban, ahol az $f_i\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ $n$ változós valós értékű függvényeket ***koordinátafüggvényeknek*** nevezzük $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Pl.

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x) := f(x_1,x_2) := (x_1^2,\ x_1+x_2, x_1x_2 - 3) \qquad \big((x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\big)$$

## Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények folytonossága

A sorozatok határértékéhez hasonlóan a többváltozós függvények folytonosságát is a valós-valós függvények folytonosságából nyerjük az euklideszi norma alkalmazásával.

**3. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvény* **folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban**, *(jelben $\boldsymbol{f \in C\{a\}}$), ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f,\ \|x-a\| < \delta \text{ pontban } \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

***Megjegyzések.***

1. Az euklideszi normára mindig a $\|\cdot\|$ jelölést alkalmazzuk függetlenül attól, hogy hány dimenziós a benne szereplő vektor.

2. A folytonosság fogalma leírható környezetekkel. $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathcal{D}_f$ és

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \text{ pontban } f(x) \in K_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

   Ez pontosan megegyezik a valós-valós függvényeknél tanult fogalmával.

3. A folytonosság most is az $f$ függvénynek azt a szemléletes tulajdonságát fejezi ki, hogy „ha $x$ közel van az $a$ ponthoz, akkor az $f(x)$ függvényérték közel van $f(a)$-hoz”. De a közelség most azt jelenti, hogy a két pont euklideszi távolsága kicsi.

Nem nehéz igazolni, hogy ***a norma folytonos függvény***. Ez azért igaz, mert ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$, akkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta := \varepsilon > 0$ úgy, hogy $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén ha $\|x - a\| < \delta$, akkor

$$\|f(x) - f(a)\| = \Big|\|x\| - \|a\|\Big| \leq \|x - a\| < \delta = \varepsilon.$$

Másrészt, a $\mathrm{pr}_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_i(x) := x_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ ún. ***projekciók*** (a ponthoz rendeli az $i$-dik koordinátáját) szintén folytonos függvények. Valóban, $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta := \varepsilon > 0$ úgy, hogy $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén ha $\|x - a\| < \delta$, akkor

$$\|\mathrm{pr}_i(x) - \mathrm{pr}_i(a)\| = |x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2} = \|x - a\| < \delta = \varepsilon.$$

Azt a tényt, hogy $\forall a \in \mathcal{D}_f \colon a \in C\{a\}$, azaz $f$ folytonos minden értelmezési tartománybeli pontjában, az $f \in C$ jelöléssel fogjuk rövidíteni. Az előzőek szerint $\|.\| \in C$ és $\mathrm{pr}_i \in C$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

**4. Tétel (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv).** *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (x_k) \colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \ \lim_{k \to +\infty} x_k = a \text{ esetén } \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a).$$

***Bizonyítás.*** Hasonlóan igazolható, mint valós-valós függvények esetén, a környezetekkel leírt folytonosság fogalmából kiindulva.

***Megjegyzés.*** Az átviteli elvből következik, hogy ha $\exists (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ sorozat, amely az $a$ ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) \neq f(a),$$

akkor az $f$ függvény nem folytonos $a$ pontban.

Az átviteli elvvel és a sorozatok határértékére vonatkozó műveleti tételekkel nem nehéz igazolni a következő állításokat.

**<u>Műveletek folytonos függvényekkel:</u>**

1. Ha $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $f, g \in C\{a\}$, akkor

   a) $f + g \in C\{a\}$ és $\lambda f \in C\{a\}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

   b) az $m = 1$ esetben $f \cdot g \in C\{a\}$ és $g(a) \neq 0$ esetén $\dfrac{f}{g} \in C\{a\}$.

2. Ha $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$, $g \in C\{a\}$ és $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ $(m, p \in \mathbb{N}^+)$, $f \in C\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in C\{a\}$.

***Példa:*** A fenti állításokból igazolható, hogy

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{x+y}{x^2+1} - \sin(xe^{x-y^3} + \pi) \in C$$

hiszen $\sin, \exp \in C$, illetve ha $\mathrm{pr}_1(x,y) := x$ és $\mathrm{pr}_2(x,y) := y$, akkor $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 \in C$.

***Példa:*** Az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban. Valóban az átviteli elv szerint $f \notin C\{(0,0)\}$, hiszen $(x_k, y_k) := \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0)$ ha $k \to +\infty$, de

$$f(x_k, y_k) = f\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0).$$

A következő tétel azt mondja ki, hogy az $n$ változós $m$ dimenziós vektor értékű függvények folytonossága visszavezethető $n$ változós valós értékű függvények folytonosságára.

**5. Tétel.** *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_i \in C\{a\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

*ahol $f_i \colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ az $f$ függvény koordinátafüggvényei.*

***Bizonyítás.*** A sorozatok konvergenciája visszavezethető a koordinátasorozatok konvergenciájára. Ez azt jelenti, hogy az átviteli elv a következő alakban írható:

$$f \in C\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (x_k)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \ \lim_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = a_i \text{ esetén } \lim_{k\to+\infty} \big(f(x_k)\big)^{(i)} = \big(f(a)\big)_i.$$

minden $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén. Ekkor a tétel állítása az $\big(f(x_k)\big)^{(i)} = f_i(x_k)$ egyenlőségből következik.

***Példa:*** A fenti állításból igazolható, hogy

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \left(\frac{x+y}{x^2+1}, \sin(xe^{x-y^3} + \pi)\right) \in C$$

hiszen az

$$f_1(x,y) := \frac{x+y}{x^2+1}, \quad f_2(x,y) := \sin(xe^{x-y^3} + \pi) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

koordinátafüggvényeiről a műveleti tétel alapján igazolhatjuk, hogy $f_1, f_2 \in C$.

Felmerül a kérdés, hogy az $n$ változós valós értékű függvények folytonosságát vissza tudjuk-e vezetni valós-valós függvények folytonosságára. Arra gondolnánk, hogy ha lerögzítjük az $a \in \mathcal{D}_f$ pont koordinátait az $i$-edik koordináta kivételével, akkor elegendő lenne megvizsgálni a

$$g_i^{(a)}(x) := f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \qquad \big(x \in \mathbb{R}\colon (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}_f\big)$$

függvényt minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ez sajnos ***nem igaz***. Pl. már láttuk, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos az $a = (0,0)$ pontban. Azonban a $g_1^{(a)}(x) = f(x,0) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ és a $g_2^{(a)}(y) = f(0,y) = 0$ $(y \in \mathbb{R})$ függvények folytonosak a $0$ pontban.

**6. Tétel (Weierstrass tétele.).** *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$ *és tegyük fel, hogy*

*a)* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

*b)* $\mathcal{D}_f$ *korlátos és zárt halmaz az* $\mathbb{R}^n$ *euklideszi térben,*

*c)* $f \in C$.

*Ekkor az* $f$ *függvénynek vannak abszolút szélsőértékhelyei, azaz*

$$\exists\, x_1 \in \mathcal{D}_f\colon \quad f(x) \le f(x_1) \quad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f) \quad (x_1 \text{ abszolút maximumhely}),$$

$$\exists\, x_2 \in \mathcal{D}_f\colon \quad f(x_2) \le f(x) \quad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f) \quad (x_2 \text{ abszolút minimumhely}).$$

***Bizonyítás.*** Az egyváltozós esetben bemutatott bizonyítás adaptálható többváltozós esetre.

## Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények határértéke

A függvény határértéke szintén a valós-valós eset általánosításaként kerül bevezetésre.

**4. Definíció.** *Az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ *függvénynek az* $a \in \mathcal{D}_f'$ *pontban* **van határértéke**, *ha* $\exists A \in \mathbb{R}^m$, *hogy*

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < \|x - a\| < \delta \text{ pontban } \|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

*Ekkor* $A$*–t a* **függvény *a* pontbeli határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \text{ ha } x \to a.$$

A határérték fogalma is megadható környezetekkel, ami pontosan megegyezik a valós-valós függvényeknél leírtakkal. A határérték egyértelműsége környezetekkel ugyanúgy igazolható, mint valós-valós függvények esetében. Ugyanez mondható az átviteli elvre.

**7. Tétel (A határértékre vonatkozó átviteli elv).** *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ *és* $a \in \mathcal{D}_f'$. *Ekkor*

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{k \to +\infty} (x_k) = a \text{ esetén } \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = A.$$

***Megjegyzés.*** Az átviteli elvből következik, hogy ha van két olyan $(x_k), (y_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ sorozat, amely az $a$ ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) \ne \lim_{k \to +\infty} f(y_k),$$

akkor az $f$ függvénynek nincs határértéke az $a$ pontban.

***Példa:*** Az

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban, hiszen ha $k \to +\infty$, akkor

$$\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) \to (0,0) \qquad \text{és} \qquad f\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\left(0, \tfrac{1}{k}\right) \to (0,0) \qquad \text{és} \qquad f\left(0, \tfrac{1}{k}\right) = \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{0 + \frac{1}{k^2}} = 0.$$

Tehát két, a $(0,0)$ ponthoz tartó sorozat képsorozatának határtétéke különbözik.

A folytonosság és a határérték kapcsolatát fejezi ki a következő állítás.

**8. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_a f \quad \text{és} \quad \lim_a f = f(a).$$