2. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 2.

Érintő

Emlékeztető.

Definició. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban* **van érintője**, *ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli* **érintőjén** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

1. Feladat. *Legyen*

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x}}{\big(x^2+1\big)^5} \qquad (x > -1).$$

a) *Vizsgáljuk meg deriválhatóság szempontjából az f függvényt, és határozzuk meg az f' deriváltfüggvényét!*

b) *Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának a $\Big(0, f(0)\Big)$ pontban van érintője, és írjuk fel az érintőegyenes egyenletét!*

Megoldás.

a) Az elemi függvények deriválhatóságából és a deriválási szabályokból következik, hogy $f \in D(-1, +\infty)$, ezért $\mathcal{D}_{f'} = (-1, +\infty)$. $f'(x)$-et két függvény hányadosára vonatkozó deriválási szabályt felhasználva számíthatjuk ki, de ez sok számítással jár. Ehelyett alkalmazzuk a következő ***ötletet***: mivel f pozitív és előáll elemi függvények hatványainak szorzataként (hányadosaként), ezért *vegyük az f függvény logaritmusát*.

$$\ln\Big(f(x)\Big) = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\big(x^2+1\big)^5} = \ln \sqrt{1+x} - \ln\Big(x^2+1\Big)^5 = \frac{1}{2}\,\ln(1+x) - 5\,\ln\Big(x^2+1\Big),$$

ahol $x > -1$. Ezt már könnyebben tudjuk deriválni:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \underline{\Big(\ln\Big(f(x)\Big)\Big)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - 5 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2\,x} = \frac{1}{2\,(1+x)} - \frac{10\,x}{x^2+1} \qquad (x > -1)$$

Ezért minden $x > -1$ esetén

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{2\,(1+x)} - \frac{10\,x}{x^2+1}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{1+x}}{\big(x^2+1\big)^5} \cdot \left(\frac{1}{2\,(1+x)} - \frac{10\,x}{x^2+1}\right)}}.$$

b) Az érintő definíciója szerint a függvény grafikonjának *van érintője* a $\big(0, f(0)\big)$ pontban, mert $f \in D\{0\}$. Mivel

$$f(0) = \frac{\sqrt{1+0}}{\big(0^2+1\big)^5} = 1 \quad \text{és} \quad f'(0) = f(0) \cdot \left(\frac{1}{2\,(1+0)} - \frac{10 \cdot 0}{0^2+1}\right) = \frac{1}{2},$$

ezért az érintőegyenes egyenlete:

$$y = f'(0) \cdot (x-0) + f(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{y = \frac{x}{2} + 1}}\,.$$

Megjegyzés. Az előző feladatban alkalmazott deriválási módszert ***logaritmikus deriválásnak*** nevezzük. Ezzel a módszerrel az előző gyakorlatban szereplő

$$f(x) = \big(g(x)\big)^{h(x)} \qquad (g > 0)$$

alakú függvényeket is tudjuk deriválni, hiszen ha a fenti kifejezés két oldalának vesszük a logaritmusát, és utána deriváljuk mindkét oldalt, akkor

$$\ln\big(f(x)\big) = h(x)\ln\big(g(x)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\ln\big(g(x)\big) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)},$$

amiből az

$$f'(x) = \big(g(x)\big)^{h(x)} \cdot \left(h'(x)\ln\big(g(x)\big) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

formulát kapjuk.

Inverz függvény deriváltja

Emlékeztető. Az inverz függvényre vonatkozó szabály:

Tétel. *Legyen I egy nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) f szigorúan monoton és folytonos az I intervallumon,

b) valamilyen $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az f^{-1} függvény deriválható a $b = f(a)$ pontban és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

A differenciálhatóságból következik a folytonosság: $\quad f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f \in C\{a\}$.

A szigorú monotonitás megállapítható a függvény deriváltjával: Ha $f \in D(a,b)$, akkor

ha $f' > 0$ [illetve $f' < 0$] (a,b)-n $\quad \Longrightarrow \quad f \ \uparrow$ [illetve $\downarrow$] (a,b)-n.

2. Feladat. *Igazoljuk, hogy az alábbi függvények invertálhatók és inverzei differenciálhatók! Számítsuk ki az $\left(f^{-1}\right)'$ függvény értékét a megadott b pontban!*

a) $f(x) := x^3 + x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad b := -2,$

b) $f(x) := 2x + \ln(x^2+1) \quad (x > 0), \qquad b := 2 + \ln 2.$

Megoldás.

a) Világos, hogy $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért f szigorúan monoton növekvő függvény $\mathbb{R}$-en, és így invertálható.

f folytonos $\mathbb{R}$-en, mert differenciálható minden $x \in \mathbb{R}$ pontban. Legyen $a := -1$. Ekkor

$$f(a) = f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2 = b \quad \text{és} \quad f'(a) = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4.$$

Ekkor az inverz függvényre vonatkozó szabály feltételei teljesülnek, és így

$$\left(f^{-1}\right)'(-2) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{4}.$$

b) Világos, hogy $f \in D(0, +\infty)$, és

$$f'(x) = (2x + \ln(x^2 + 1))' = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} > 0 \qquad (x > 0).$$

Ezért f szigorúan monoton növekvő függvény $(0, +\infty)$-en, és így invertálható.

f folytonos $(0, +\infty)$-en, mert differenciálható minden $x > 0$ pontban. Legyen $a := 1$. Ekkor

$$f(a) = f(1) = 2 + \ln 2 = b \quad \text{és} \quad f'(a) = f'(1) = 2 + \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} = 3.$$

Ekkor az inverz függvényre vonatkozó szabály feltételei teljesülnek, és így

$$\left(f^{-1}\right)'(2 + \ln 2) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy az*

$$f(x) := \sqrt{e^{2x-1} + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvények invertálható, inverze differenciálható és határozzuk meg az inverz függvényének deriváltját!

Megoldás. A feladat megoldható az inverz függvény közvetlen kiszámításával. Ehelyett az inverz függvényre vonatkozó szabályt fogjuk alkalmazni.

A deriválási szabályok szerint $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x-1} + 1}} \cdot \left(e^{2x-1} + 1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x-1} + 1}} \cdot 2\, e^{2x-1} = \frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x-1} + 1}} > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért f szigorúan monoton növekvő függvény $\mathbb{R}$-en, és így invertálható. Mivel $e^{2x-1} > 0$ és felvesz minden pozitív értéket, így $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = (1, +\infty)$. f folytonos $\mathbb{R}$-en, mert differenciálható minden $x \in \mathbb{R}$ pontban.

Legyen $y > 1$ valós szám, és $x := f^{-1}(y)$, azaz $y = f(x) > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$y = \sqrt{e^{2x-1}+1}, \qquad e^{2x-1} = y^2 - 1 \qquad \text{és} \qquad f'(x) = \frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x-1}+1}} = \frac{y^2-1}{y} \neq 0.$$

Ekkor az inverz függvényre vonatkozó szabály feltételei teljesülnek, és így $f^{-1} \in D(1, +\infty)$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{y}{y^2-1} \qquad (y > 1).$$

Egyoldali pontbeli deriváltak

Emlékeztető. Legyen $b, j \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olyan pont, hogy $\exists \delta > 0$: $(a-\delta, a) \subseteq \mathcal{D}_b$, $(a, a+\delta) \subseteq \mathcal{D}_j$, és $A \in \mathbb{R}$. Milyen legyenek a b és j függvények ahhoz, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} b(x), & \text{ha } x < a \ (x \in \mathcal{D}_b), \\ A, & \text{ha } x = a, \\ j(x), & \text{ha } x > a \ (x \in \mathcal{D}_j) \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az a pontban? Ehhez szükséges, hogy $f \in C\{a\}$, és így

$$\boxed{\text{I.} \quad \exists \lim_{a-0} b,\ \exists \lim_{a+0} j \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} b = A = \lim_{a+0} j}\ .$$

Pl. ha b balról, j jobbról folytonos a-ban és $b(a) = j(a) = A$, akkor I. teljesül.

Ha az I. feltétel teljesül, és $b(a) = j(a) = A$, akkor $f \in D\{a\} \iff \boxed{\text{II.} \quad b'_+(a) = j'_+(a)} = f'(a)$.

Pl. ha $b \in D\{a\}$ és $j \in D\{a\}$, akkor a II. feltétel ekvivalens azzal, hogy $b'(a) = j'(a)$.

4. Feladat. *Állapítsuk meg, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvények a megadott a pontokban!*

a) $f(x) := \begin{cases} x^2+1, & \textit{ha } x < 0, \\ \ln(x^2+1), & \textit{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad a = 0,$

b) $f(x) := \begin{cases} 2^x, & \textit{ha } x < 1, \\ 2, & \textit{ha } x = 1, \\ \sqrt{x^3+3}, & \textit{ha } x > 1, \end{cases} \qquad a = 1,$

c) $f(x) := \begin{cases} \cos^2 x, & \textit{ha } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ (x - \frac{\pi}{2})^2, & \textit{ha } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad a = \dfrac{\pi}{2},$

d) $f(x) := \begin{cases} x^3+1, & \textit{ha } x \leq 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \textit{ha } x > 0, \end{cases} \qquad a = 0.$

Megoldás. Alkalmazzuk az emlékeztetőben szereplő jelöléseket!

a) $A := f(0) = \ln(0^2+1) = 0$, illetve legyen

$$b(x) := x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := \ln(x^2+1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Igaz, hogy $b, j \in C\{0\}$, azonban $1 = b(0) \neq j(0) = 0$. Ezért I. ***nem*** teljesül, azaz $f \notin C\{0\}$, és így $f \notin D\{0\}$.

Fontos megjegyezni, hogy a feladatban $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$$b'(x) = 2x, \qquad j'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz II. teljesül, hiszen $b, j \in D\{0\}$ és $b'(0) = 0 = j'(0)$, de $f \notin D\{0\}$.

b) $A = 2$, illetve legyen

$$b(x) := 2^x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := \sqrt{x^3+3} \quad (x > 0).$$

A deriválási szabályok alapján $b \in D(\mathbb{R})$, $j \in D(0, +\infty)$ és

$$b'(x) = 2^x \ln 2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad j'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+3}} \quad (x > 0).$$

- I. teljesül, hiszen $b, j \in C\{1\}$, és $b(1) = j(1) = 2 = A$.
- II. ***nem*** teljesül, hiszen $b, j \in D\{1\}$, de $2\ln 2 = b'(1) \neq j'(1) = 3/4$.

Ezért $f \notin D\{1\}$.

c) $A := f(\pi/2) = \cos^2(\pi/2) = 0$, illetve legyen

$$b(x) := \cos^2 x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A deriválási szabályok alapján $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$$b'(x) = -2\cos x \sin x, \qquad j'(x) = 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- I. teljesül, hiszen $b, j \in C\{\pi/2\}$, és $b(\pi/2) = j(\pi/2) = 0 = A$.
- II. teljesül, hiszen $b, j \in D\{\pi/2\}$ és $b'(\pi/2) = 0 = j'(\pi/2)$.

Ezért $f \in D\{\pi/2\}$ és $f'(\pi/2) = 0$.

d) $A := f(0) = 0^3 + 1 = 1$, illetve legyen

$$b(x) := x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

A deriválási szabályok alapján $b \in D(\mathbb{R})$ és $b'(x) = 3x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$. A j függvény esetében igaz, hogy $j \in C\{0\}$, hiszen ismert a nevezetes határérték:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Másrészt $j \in D\{0\}$ és $j'(0) = 0$, hiszen a hatványsorok határértéke alapján

$$j'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{x}{3!} + \frac{x^3}{5!} - \frac{x^5}{7!} + \cdots\right) = 0.$$

- I. teljesül, hiszen $b, j \in C\{0\}$, $b(0) = j(0) = 1 = A$.
- II. teljesül, hiszen $b, j \in D\{0\}$ és $b'(0) = 0 = j'(0)$.

Ezért $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = 0$.

5. Feladat. *Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?*

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 + b, & \text{ha } x < 1, \\ \dfrac{a}{x}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases} \qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} \sin ax + b & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{x^2} + x & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Megoldás. A deriválási szabályok szerint a feladatban szereplő függvények mindenütt differenciálhatók a paraméterek értékeitől függetlenül, kivéve az átmeneti pontban, ahol külön meg kell vizsgálni a differenciálhatóságot.

(a) Legyen

$$b(x) = x^2 + b \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) = \frac{a}{x} \quad (x > 0).$$

A deriválási szabályok alapján $b \in D(\mathbb{R})$, $j \in D(0, +\infty)$, valamint

$$b'(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j'(x) = -\frac{a}{x^2} \quad (x > 0).$$

Mivel $f(x) = b(x)\ \ (x < 1)$ és $f(x) = j(x)\ \ (x > 1)$, így $f \in D\{x\}\ \ (x \neq 1)$.

Legyen $A := f(1) = a/1 = a$. $f \in D\{1\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha

- I. teljesül, azaz $f \in C\{1\}$. Tudjuk, hogy $b, j \in C\{1\}$. Szükséges még, hogy $b(1) = j(1) = A$. Mivel $b(1) = 1 + b$ és $j(1) = a$, így

$$1 + b = a.$$

- $b(1) = j(1) = A$ mellett II. teljesül. Tudjuk, hogy $b, j \in D\{1\}$. Szükséges még, hogy $b'(1) = j'(1)$. Mivel $b'(1) = 2$ és $j'(1) = -a$, így

$$2 = -a.$$

A kapott egyenletrendszer megoldása $a = -2$ és $b = -3$. Ekkor $f \in D(\mathbb{R})$.

(b) Legyen

$$b(x) = \sin ax + b \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) = e^{x^2} + x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A deriválási szabályok alapján $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$$b'(x) = a \cos ax \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j'(x) = e^{x^2} \cdot 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f(x) = b(x)\ \ (x < 0)$ és $f(x) = j(x)\ \ (x > 0)$, így $f \in D\{x\}\ \ (x \neq 0)$.

Legyen $A := f(0) = \sin(0) + b = b$. $f \in D\{0\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha

- I. teljesül, azaz $f \in C\{0\}$. Tudjuk, hogy $b, j \in C\{0\}$. Szükséges még, hogy $b(0) = j(0) = A$. Mivel $b(0) = b$ és $j(0) = 1$, így

$$b = 1.$$

- $b(0) = j(0) = A$ mellett II. teljesül. Tudjuk, hogy $b, j \in D\{0\}$. Szükséges még, hogy $b'(0) = j'(0)$. Mivel $b'(0) = a$ és $j'(0) = 1$, így

$$a = 1.$$

Ezért a feladat megoldása $a = 1$ és $b = 1$. Ekkor $f \in D(\mathbb{R})$.

A differenciálszámítás középértéktételei

Emlékeztető. A Rolle-féle középértéktétel:

Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b), \\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \xi \in (a,b) \colon f'(\xi) = 0.$$

A Lagrange-féle középértéktétel:

Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b) \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \xi \in (a,b) \colon\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

6. Feladat. *Legyen $a, b \neq 1$ két pozitív szám. Igazoljuk, hogy az*

$$f(x) := a^x + b^x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek legfeljebb két zérushelye lehet!

Megoldás. A Rolle-féle középértéktétel szerint, ha az $f \in D(a,b)$ függvénynek két különböző $x_1 < x_2$ zérushelye van az (a,b) intervallumon, akkor f'-nek van legalább olyan ξ zérushelye, amire $x_1 < \xi < x_2$ teljesül. Ha pedig három különböző $x_1 < x_2 < x_3$ zérushelye van az (a,b) intervallumon, akkor f'-nek van legalább két olyan ξ_1 és ξ_2 zérushelye, amire $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$ teljesül.

Világos, hogy $x = 0$ a feladatban szereplő f függvény egyik zérushelye. Legyen

$$g(x) := f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad g'(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy f-nek van legalább három zérushelye. Ekkor f'-nek, azaz g-nek lenne legalább két zérushelye, és így g'-nek lenne legalább egy zérushelye. Ez utóbbi nem lehetséges, mert $g' > 0$.

7. Feladat. *Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!*

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \qquad (x > 0).$$

Megoldás.

- $\boxed{\ln(x+1) < x \quad (x > 0)}$

  Legyen $x > 0$ egy tetszőleges rögzített szám, $a := 1$ és $b := x + 1$. Ha $f := \ln$, akkor $f \in C[a,b]$ és $f \in D(a,b)$, így a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $1 = a < \xi < b = x + 1$, hogy

  $$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1} = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

  De $\;f'(\xi) = \dfrac{1}{\xi} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{\ln(x+1)}{x} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(x+1) < x.$

- $\boxed{x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) \quad (x > 0)}$

  Legyen $x > 0$, és alkalmazzuk az előző módszert az
  $$f(t) := \ln t + \frac{(t-1)^2}{2} \qquad (t > 0)$$
  függvénnyel. Ekkor van olyan $1 < \xi < x+1$, hogy
  $$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(1)}{(x+1) - 1} = \frac{\ln(x+1) + \frac{x^2}{2}}{x}$$
  és
  $$f'(t) = \frac{1}{t} + t - 1 \quad (t > 0) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(\xi) = \underbrace{\frac{1}{\xi} + \xi}_{>2} -1 > 1,$$
  amiből az igazolandó egyenlőtlenség következik.