

## A kiegyensúlyozott bináris keresőfa – AVL fák

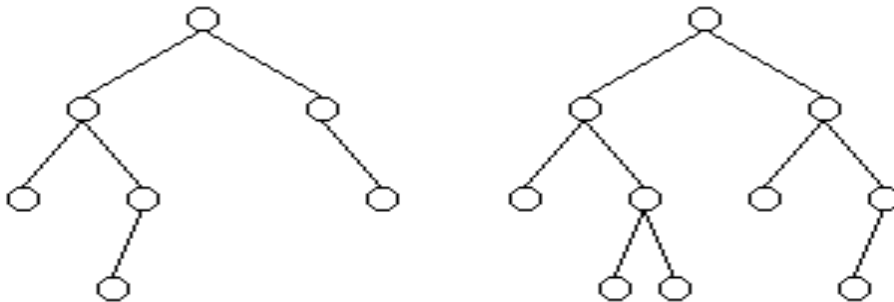
(Avl-fa; Adelszon-Velszkij és Landisz, 1962)

**Definíció:** Az AVL fák magasság szerint kiegyensúlyozott bináris keresőfák.

**Definíció:**  $t$  kiegyensúlyozott bináris fa (KBF)  $\Leftrightarrow t$  minden  $(*p)$  csúcsára:

$$|h(p \rightarrow \text{right}) - h(p \rightarrow \text{left})| \leq 1$$

**Feladat:** Döntsük el, hogy az alábbi bináris fák kiegyensúlyozottak-e!



**Tétel:** Tetszőleges nem üres  $n$  csúcsú AVL fa  $h$  magasságára igaz, hogy

$$\lfloor \log n \rfloor \leq h \leq 1,45 \log n$$

### Megjegyzések:

- Az AVL-fára, mint speciális alakú keresőfára, változatlanul érvényesek a keresőfákra bevezetett műveletek.
- Minden művelet (beszúrás és törlés) után ellenőrizzük, és ha kell, helyreállítjuk az AVL-tulajdonságot.
- Az AVL fát láncoltan reprezentáljuk és a csúcsban tároljuk az egyensúlyt (balance), ahol  $p \rightarrow b := h(p \rightarrow \text{right}) - h(p \rightarrow \text{left})$  és  $p \rightarrow b \in \{-1, 0, +1\}$

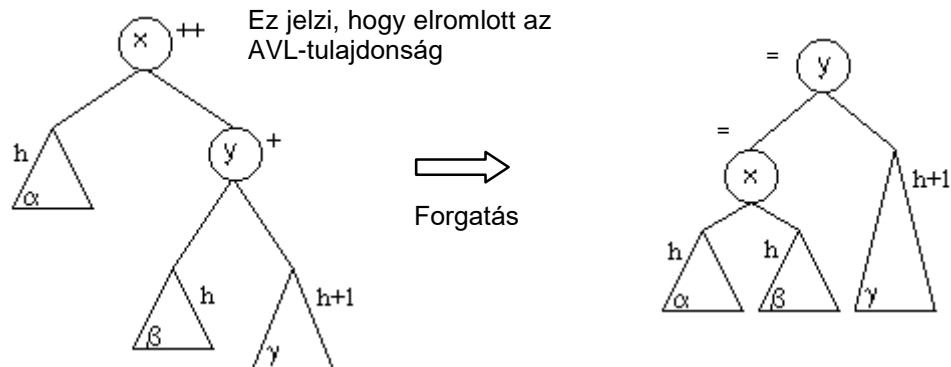
### Jelölések:

- A csúcs jelzője (indikátora) az '=', ha a csúcs két részfájának magassága egyenlő.
- A csúcs jelzője a '-', ha a csúcs baloldali részfájának magassága eggyel nagyobb, mint a jobboldali részfáé.
- A csúcs jelzője a '+', ha a csúcs jobboldali részfájának magassága eggyel nagyobb, mint a baloldali részfáé.

### Megjegyzések:

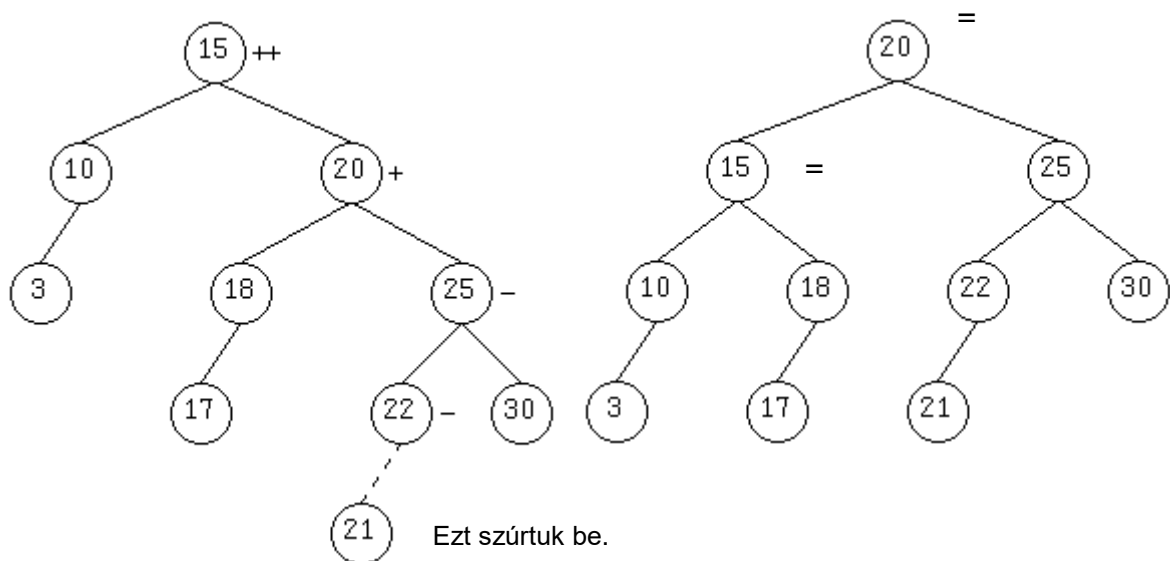
- A levelek jelzője mindig az '='. (Ezért a leveleknél nem jelezzük az egyensúlyt.)
- Ha egy csúcs jelzője beszúrás vagy törlés miatt '++', vagy '--' lesz (ez jelzi, hogy elromlott az AVL-tulajdonság), javítanunk kell!

# 1. A ( ++, + ) szabály (tükörképe a ( - -, - ) szabály)



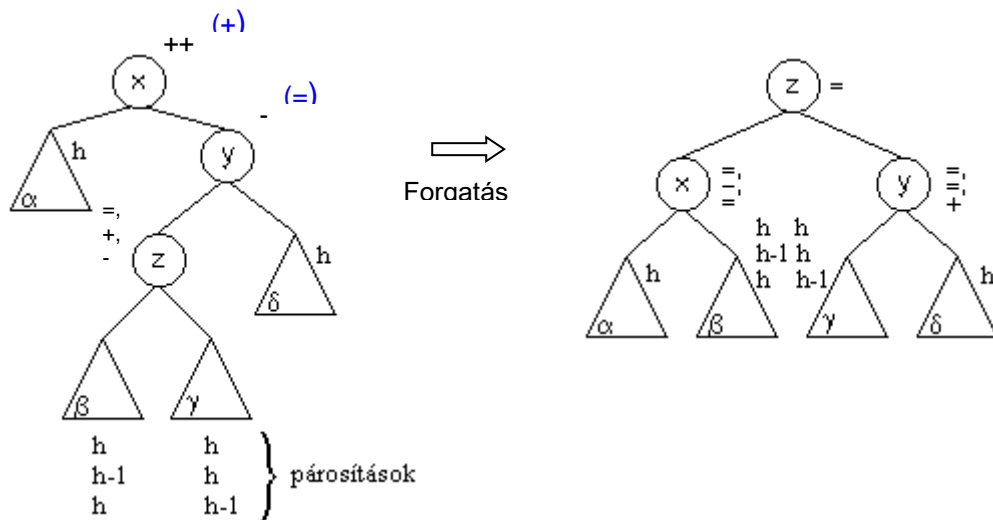
$\alpha < x < \beta < y < \gamma$  ( a reláció az  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  részfák minden csúcsára igaz )

## Példa:



- Induljunk el a beszúrt csúcs szülőjétől a gyökér felé.
- Addig menjünk, amíg ( a jelzők korrekcióját elvégezve ) ' $=$ ' vagy ' $++$ ' ( ' $-$ ' - ' $-$ ' ) nem alakul ki, illetve a gyökérig nem érünk.
- A ' $++$ ' ( ' $-$ ' - ' $-$ ' ) esetében javítunk (forgatunk), és tovább már nem kell nézni.

## 2. A ( ++, - ) szabály (tükörképe a ( - -, + ) szabály)

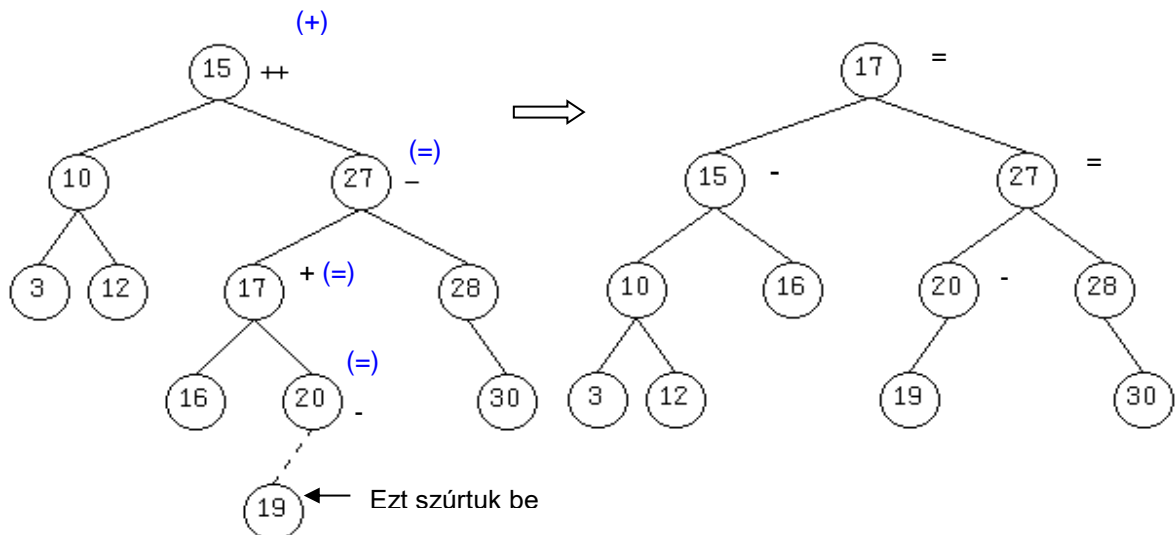


$\alpha < x < \beta < z < \gamma < y < \delta$  ( a reláció az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  és  $\delta$  részfák minden csúcsára igaz )

**Megjegyzés:** A ( ++, - ) eset háromféleképpen állhat elő:

- A 'z' az új elem, részfák nincsenek ( h , h )
- Az új elem a  $\gamma$  rész fába került ( h-1 , h )
- Az új elem a  $\beta$  rész fába került ( h , h-1 )

**Példa:**



**Megjegyzések:**

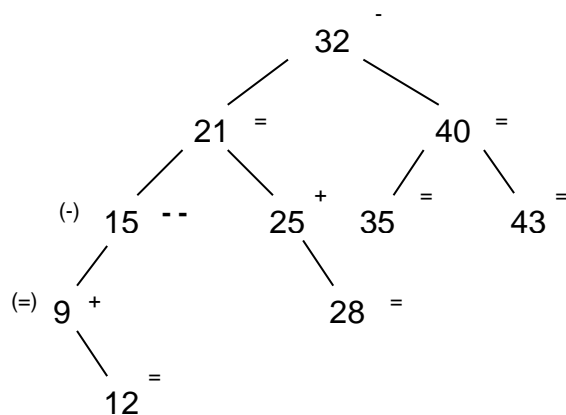
- A beszúrás műveletigénye:
  - Beszúrás helyének megkeresése:  $\log_2 n$  -nel arányos
  - AVL tulajdonság ellenőrzése:  $\log_2 n$ -nel arányos (max. a gyökérig)
  - Pointer állítás '++', '+' esetén: 6 (konstans)
  - Pointer állítás '++', '-' esetén: 10 (konstans)

⇒ A teljes műveletigény:  $\log_2 n + \log_2 n + \text{konstans} \approx \log_2 n$

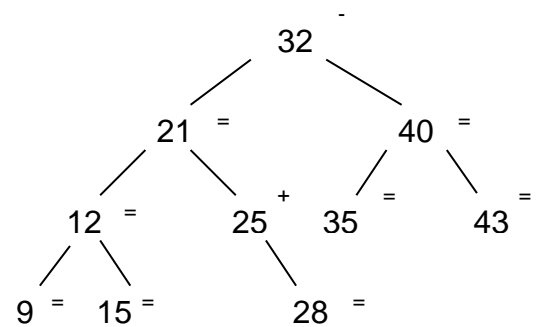
## Feladatok:

1. Építsünk AVL-fát a következő adatokból: 32, 40, 21, 15, 43, 25, 9, 28, 35, 12, 14!  
Ha elromlott a fa kiegyensúlyozása, lássuk el címkékkel a csúcsokat és állítsuk helyre az AVL-tulajdonságot a megfelelő forgatással!

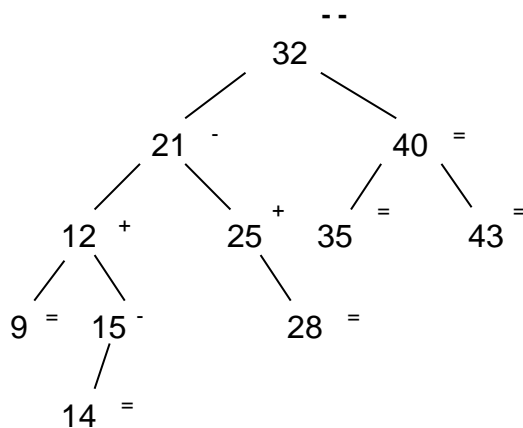
Építés:



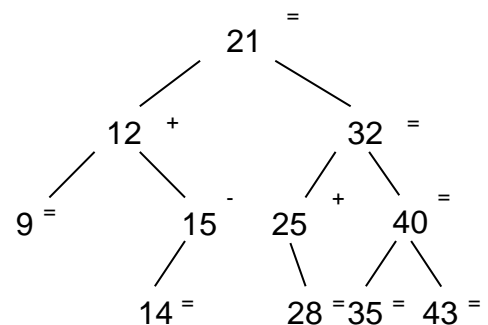
Forgatás (- -; +):



Építés:

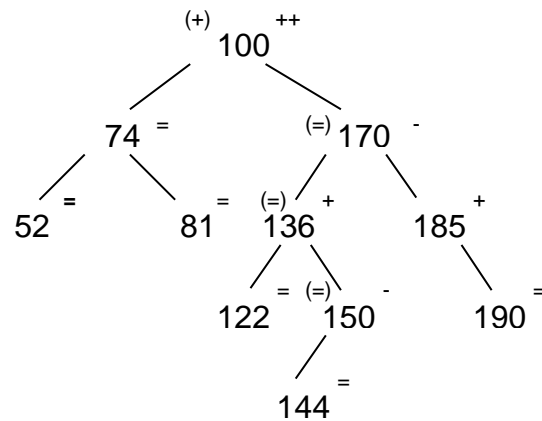


Forgatás (- -; -):

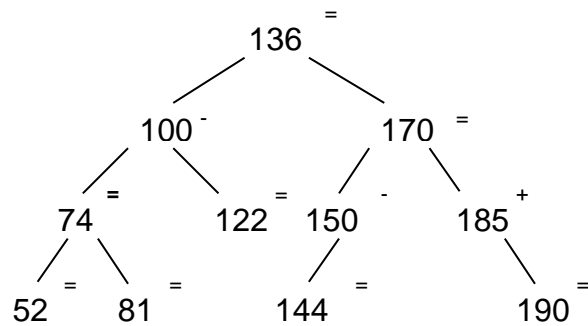


2. Építsünk AVL-fát a következő adatokból: 100, 170, 74, 81, 136, 185, 150, 122, 52, 190, 144! Ha elromlott a fa kiegyensúlyozása, lássuk el címkékkel a csúcsokat és állítsuk helyre az AVL-tulajdonságot a megfelelő forgatással!

Építés:



Forgatás ( ++; -):

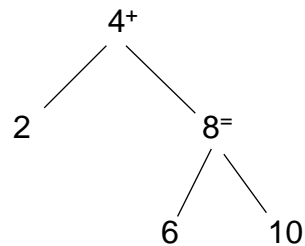


### Jelölések:

- A továbbiakban a (*bal\_részfa gyökér jobb\_részfa*) jelölést használjuk, ahol az üresrészfákat elhagyjuk és a könnyebb olvashatóság kedvéért [ ] és { } zárójeleket is alkalmazunk.
- A belső csúcsok egyensúlyait az értékek mellett tüntetjük fel.
- A levelek súlya mindig '=', ezért azt nem tüntetjük fel.

### Példa:

A következő { [2] 4+ [ (6) 8= (10) ] } AVL fa ábrája az alábbi:



### Feladat:

1. Szúrjuk be a fenti fába a 3-as értéket! Írjuk le a kapott fát a fenti jelöléssel is!
2. Szúrjuk be a fenti fába a 15-ös értéket! Írjuk le a kapott fát a fenti jelöléssel is!
3. Szúrjuk be a fenti fába a 7-es értéket! Írjuk le a kapott fát a fenti jelöléssel is!