5. előadás

TAYLOR POLINOMOK ÉS TAYLOR-SOROK

Lineáris közelítés

Gyakori jelenség, hogy valamely problémánál fellépő függvénnyel dolgozva egyszerűbb és áttekinthetőbb eredményhez juthatunk, ha a függvény helyett egy másik, az eredetit „jól közelítő”, de egyszerűbb típusú függvényt tekintünk. Az egyik legegyszerűbb függvénytípus az elsőfokú polinom (vagyis az $mx + b \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény). Megmutatjuk, hogy *egy f függvény deriválhatósága az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban éppen azt jelenti, hogy a függvény bizonyos értelemben „jól közelíthető” elsőfokú polinommal.*

1. Tétel (Lineáris közelítés). *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \ \ \textit{és} \ \ \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \ \lim\limits_{a} \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad \big(x \in \mathcal{D}_f\big). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Bizonyítás. $\boxed{\Rightarrow}$

$$f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$$

Ha $\varepsilon(a) := 0$ és

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big),$$

akkor $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\boxed{\Leftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ebből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x) \ \longrightarrow A + 0 = A, \quad \text{ha} \ \ x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$.

Megjegyzés. Az

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f\big)$$

felírásban a jobb oldal az $f(a)+f'(a)(x-a)$ lineáris függvény és az $\varepsilon(x)(x-a)$ tag összegéből áll, amely tag $\lim_a \varepsilon = 0$ és $\lim_{x\to a}(x-a) = 0$ miatt „meglehetősen gyorsan" tart nullához, ha $x \to a$. Az f függvény ***a pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény az a pont környezetében „jól" közelíthető lineáris függvénnyel.*** Ezt a közelítést gyakran az

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a) \quad (\text{ha } x \sim a)$$

jelöléssel fejezzük ki. A szóban forgó lineáris függvény grafikonja az

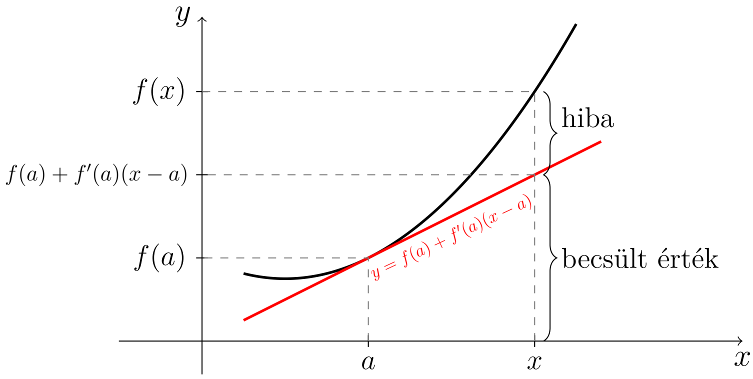
$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

egyenletű egyenes, ami az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli *érintője.*

A lineáris közelítés alkalmazható értékbecslésben. Ha ismerjük egy differenciálható f függvény és f' deriváltja pontos értékeit egy „nevezetes" a pontban, akkor az

$$f(a) + f'(a)(x-a)$$

értékkel becsülhetjük az f függvény értékét minden olyan x pontban, amely az a pont „kis sugarú" környezetében van.



1. Feladat. *Milyen lineáris becslést tudunk adni az $f(x) = \sqrt{1+x}$ függvényre az $a = 0$ pont környezetében? Becsüljük vele a $\sqrt{1,1}$ értéket!*

Megoldás. $\mathcal{D}_f = [-1, +\infty)$, $a = 0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D(-1, +\infty)$ és

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

Mivel $f(0) = 1$ és a $f'(0) = 1/2$, így a keresett becslés

$$\sqrt{1+x} \sim f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Ha $x = 0,1$, akkor

$$\sqrt{1,1} = \sqrt{1+0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{2} = 1,05.$$

Megjegyzés. A kapott $1,05$ eredmény nem olyan rossz közelítés, hiszen a valódi érték első 10 tizedesjegye $1,0488088480$.

Taylor-polinomok

Ha a lineáris közelítés nem elég pontos, akkor magasabb fokszámú polinomokkal is próbálkoztunk. Jobbnak tűnik az

$$(*) \qquad f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x)(x-a)^n \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

típusú közelítés, ahol $\varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim_a \varepsilon = 0$ és P_n egy legfeljebb n-ed fokú polinom, hiszen az a pont közelében $(x-a)^n$ „jobban tart” nullához, mint $x-a$. Ez persze függ az új ε függvénytől is, ezért fogjuk közelebbről megvizsgálni a fenti közelítést. Mindenesetre, a polinomokkal történő közelítés azért jó választás, mert a polinomok értékeinek kiszámításához csak az alapműveletek kellenek.

A vizsgálathoz feltételezzük, hogy az f függvény n-szer differenciálható az a pontban. Ekkor értelmezhető az alábbi polinom.

1. Definíció. *Ha $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^n\{a\}$, akkor a*

$$T_{n,a}f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot az ***f* függvény *a* ponthoz tartozó *n*-edik Taylor-polinomjának** *nevezzük.*

Megjegyzések.

1. Ne felejtsük el, hogy az f^0 jelölés maga az f függvényt jelenti.
2. A Taylor-polinom úgy van ügyesen kialakítva, hogy i-dik deriváltja megegyezzen a függvény i-dik deriváltjával az a pontban minden $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén, azaz

   $$(\#) \qquad \big(T_{n,a}f\big)^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

   Valóban, ha $x = a$, akkor $T_{n,a}f(x)$ mindegyik tagja nulla a nulladik tag ($k = 0$) kivételével, azaz $T_{n,a}f(a) = f^{(0)}(a) = f(a)$. Mivel

   $$\big(T_{n,a}f\big)'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k \cdot f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

   így ha $x = a$, akkor $\big(T_{n,a}f\big)'(x)$ mindegyik tagja nulla a nulladik tag ($k = 0$) kivételével, azaz $\big(T_{n,a}f\big)'(a) = f^{(0+1)}(a) = f'(a)$. Ha egymás után deriválunk i-szer, akkor

   $$\big(T_{n,a}f\big)^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{f^{(k+i)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

   Ha $x = a$, akkor $\big(T_{n,a}f\big)^{(i)}(x)$ mindegyik tagja nulla a nulladik tag ($k = 0$) kivételével, azaz $\big(T_{n,a}f\big)^{(i)}(a) = f^{(0+i)}(a) = f^{(i)}(a)$.
3. Igazolható, hogy ha $f \in D^n\{a\}$, akkor $T_{n,a}f$ az egyetlen legfeljebb n-edfokú polinom, amire $(*)$ teljesül.

Ahhoz, hogy becsülni tudjuk a Taylor-polinommal történő közelítést, szükségünk lenne a következő állításra.

2. Tétel (Taylor-formula). *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}\big(K(a)\big)$. Ekkor*

$$\forall\, x \in K(a) \quad \textit{ponthoz} \quad \exists\, \xi \quad \textit{a és x között:}$$

$$f(x) - T_{n,a}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

A fenti képlet jobb oldalán álló függvényt **Lagrange-féle maradéktagnak** *nevezzük.*

Bizonyítás. A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni. Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{n,a}f(x) \qquad \big(x \in K(a)\big).$$

(#)-ből következik, hogy

$$F^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) - \Big(T_{n,a}f\Big)^{(i)}(a) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Továbbá, $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, hiszen $\Big(T_{n,a}f\Big)^{(n+1)} \equiv 0$, mert $T_{n,a}f$ egy legfeljebb n-edfokú polinom.

Másrészt, legyen $G(x) := (x-a)^{n+1}$ $\big(x \in K(a)\big)$. Ekkor minden $x \in K(a)$ esetén

$$G'(x) = (n+1)(x-a)^n, \quad G''(x) = n(n+1)(x-a)^{n-1}, \quad \ldots \quad, G^{(n)}(x) = (n+1)!(x-a),$$

amiből következik, hogy $G^{(i)}(a) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, és $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Tegyük fel, hogy $x \in K(a)$ és például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az F és a G függvényekre az $[a, x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists\, \xi_1 \in (a, x)\colon \frac{f(x) - T_{n,a}f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

A Cauchy-féle középértéktételt most az F' és a G' függvényekre az $[a, \xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk:

$$\exists\, \xi_2 \in (a, \xi_1) \subseteq (a, x)\colon \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

A fenti gondolatmenetet n-szer megismételve adódik, hogy

$$\exists\, \xi_{n+1} \in (a, \xi_n) \subseteq (a, x)\colon \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

A bizonyítás során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{a,n}(f, x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!},$$

hiszen minden $x \in K(a)$ esetén $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ és $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. A konstrukcióból látható, hogy ξ_{n+1} az a pont és x között van, ezért a $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk.

2. Feladat. *Írjuk fel az*

$$f(x) := \sqrt{1+x} \qquad (x > -1)$$

függvény 0 pont körüli másodfokú Taylor-polinomját! Becsüljük vele a $\sqrt{1,1}$ *értéket és a közelítés hibáját!*

Megoldás. A másodfokú Taylor-polinom

$$T_{2,a}f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $a = 0$. Minden $x > -1$ esetén

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+x}, & f(0) &= 1, & f(a) &= 1,\\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, & f'(0) &= \frac{1}{2}, & f'(a) &= \frac{1}{2},\\
f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}, & f''(0) &= -\frac{1}{4}, & \frac{f''(a)}{2} &= -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Ebből

$$T_{2,0}f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A keresett érték becslése:

$$\sqrt{1,1} = f(0,1) \approx T_{2,0}f(0,1) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0,1 - \frac{1}{8}\cdot(0,1)^2 = 1,04875.$$

A hibabecsléshez legyen $x = 0,1$. A Taylor-formula szerint $\exists\ 0 < \xi < 0,1$, hogy

$$f(x) - T_{2,0}f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3.$$

Mivel

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}} \qquad (x > -1),$$

így

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_{2,0}f(x)| &= \frac{|f'''(\xi)|}{3!}|x|^3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8\sqrt{(1+\xi)^5}}\cdot(0,1)^3 < \\
&< \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8\sqrt{(1+0)^5}}\cdot(0,1)^3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1000} = 0,000375
\end{aligned}$$

Megjegyzés. A $\sqrt{1,1}$ érték becslésében alkalmazott másodfokú közelítés jobb, mint a lineáris közelítés. Felmerül a kérdés, hogy az n érték növelésével az n-edik Taylor-polinommal egyre kisebb hibakorlátot kapunk-e. Ez sajnos nem minden esetben igaz, ahogy az sem, hogy minden rögzített a pont esetén a Lagrange-féle maradéktag tart nullához a $K(a)$ környezet minden pontjában, ha $n \to +\infty$.

Taylor-sorok

A $\sum\limits_{k=0} \alpha_k(x-a)^k$ hatványsor konvergenciahalmazán értelmezett

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(x-a)^k$$

összegfüggvénynek nagyon jó tulajdonságai vannak. Ez a függvény többek között folytonos a konvergenciahalmaz minden pontjában, és tagonként differenciálható a belsejében. Helyettesítési értékeit (elvben) tetszőleges pontossággal meg lehet határozni csupán a négy alapművelet felhasználásával. Nem véletlen, hogy az exp, a sin, a cos, a sh, valamint a ch függvényeket hatványsorok összegfüggvényként értelmeztük. Ezért (is) fontos a következő kérdésfelvetés.

Probléma. *Egy adott függvényt vajon elő lehet-e állítani hatványsor összegfüggvényeként? Ha igen, akkor a függvény ismeretében hogyan lehet az együtthatókat meghatározni?*

A hatványsor összegfüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel azt mondja ki, hogy ha a hatványsor R konvergenciasugara pozitív, akkor összegfüggvénye differenciálható minden $x \in K_R(a)$ pontban, és

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k(x-a)^{k-1} \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Így f' egy újabb hatványsor összegfüggvénye, ami a fenti tétel alapján szintén differenciálható $K_R(a)$-n, vagyis $f \in D^2\big(K_R(a)\big)$ és

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha_k(x-a)^{k-2} \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Világos, hogy f''-re mindaz elmondható, ami f'-re. Ebben az esetben $f \in D^3\big(K_R(a)\big)$ és

$$f'''(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\alpha_k(x-a)^{k-3} \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ezt a gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy minden $n = 1, 2, \dots$ esetén $f \in D^n\big(K_R(a)\big)$ és

$$(\star) \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)\alpha_k(x-a)^{k-n} \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Azt a tényt, hogy az f függvény n-szer deriválható minden $n \in \mathbb{N}$ esetén úgy fejeztünk ki, hogy f végtelen sokszor (vagy akárhányszor) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty$ szimbólumot vezettük be.

Ha $(\star)$-ban $x = a$, akkor a sor minden tagja nulla a $k = n$-re vonatkozó tag kivételivel. Ebből következik, hogy $f^{(n)}(a) = n! \cdot \alpha_n$, azaz

$$\boxed{\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).}$$

Ezzel sikerült megoldanunk a kérdésfelvetés második részét, azaz az összegfüggvény ismeretében meghatározni a hatványsor együtthatóit. De ilyen együtthatókat már láttuk ezelőtt, ezek éppen a Taylor-polinom együtthatói. Olyan sorokkal van tehát dolgunk, amelynek részletösszegei a függvény Taylor-polinomjai.

2. Definíció. *Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^{\infty}\{a\}$, akkor a*

$$T_a f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots =$$
$$= \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

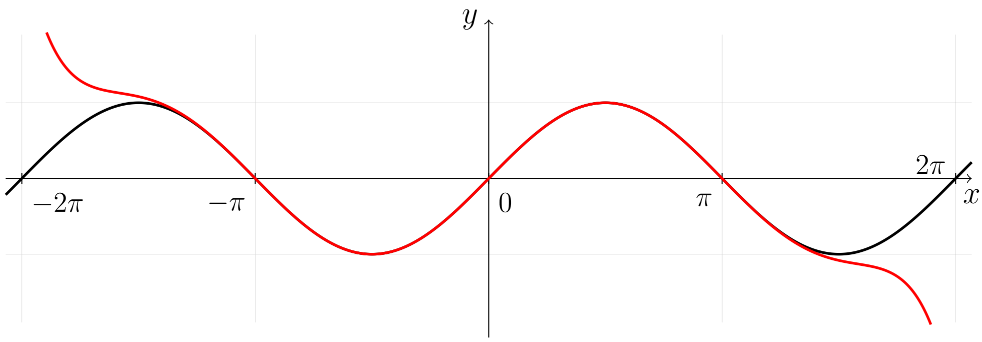
hatványsort az ***f* függvény *a* ponthoz tartozó Taylor-sorának** *nevezzük.*

Az $a = 0$ esetben használatos a **Maclaurin-sor** *elnevezés is.*

Megjegyzés. Az exp, sin, cos, sh, ch függvények definícióiban megadott hatványsorok a szóban forgó függvények $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorai. Az animációban példaként látjuk, hogy a szinusz függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-polinomjai milyen közel kerülnek a Taylor-sorhoz, azaz az $f(x) := \sin x \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényhez a

$$\sin x = T_0 f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \lim_{n\to\infty} T_{n,0} f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

határérték értelmében.



$f(x) = \sin x$ és $T_{11,0} f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$ Taylor-polinomja

A kérdésfelvetés második részére a következő választ adjuk.

3. Tétel. *Minden pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor összegfüggvénye a Taylor-sorával egyenlő a konvergenciahalmaz belsejében.*

Bizonyítás. Azonnal következik a fenti fogalmakból és eredményekből.

Azt mondjuk, hogy egy függvény ***hatványsorba fejthető*** egy intervallumon, ha megegyezik egy hatványsor összegfüggvényével ezen az intervallumon. A tétel tehát azt is állítja, hogy ha f hatványsorba fejthető egy nyílt intervallumon, akkor a szóban forgó hatványsor szükségképpen az f függvény Taylor-sora. Ez azt jelenti, hogy a kérdésfelvetés első részének megválaszolásához vizsgálni kell a Taylor-sorok tulajdonságait.

A sorfejtés problémája. Legyen $f \in D^{\infty}\{a\}$ egy adott függvény.

1. ***A konvergencia problémája:*** Konvergens-e a $T_a f$ Taylor-sor az a pont egyik környezetébe?

2. ***Az előállítás problémája:*** Ha a Taylor-sor konvergens egy $a \in I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumon, akkor vajon fennáll-e az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in I)$$

egyenlőség? Ha ez igaz, akkor azt mondjuk, hogy a Taylor-sor előállítja az f függvényt az I intervallumon.

Sajnálatos módon a sorfejtés problémájára nem adhatunk pozitív válasz minden akárhányszor deriválható függvény esetében.

- Bonyolult konstrukcióval lehet példát adni olyan akárhányszor deriválható f függvényre, amelynek *bármely* a ponthoz tartozó Taylor-sora az a ponton kívül sehol sem konvergens.

- Van olyan függvény, amelynek Taylor-sora konvergenciasugara végtelen, de csak egy pontban (a középpontban) állítja elő a függvényt. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

  Bebizonyítható, hogy $f \in D^{\infty}(\mathbb{R})$ és $f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$. Ebből következik, hogy f Taylor-sorának minden együtthatója 0, ezért az mindenütt konvergens, és az összegfüggvénye az azonosan 0 függvény, ami nyilván csak a 0 pontban egyenlő f-fel.

Ettől függetlenül kereshetünk olyan függvényosztályokat, ahol pozitív válasz tudunk adni a sorfejtés problémájára. A következő tételben adunk erre egy jól kezelhető feltételt.

4. Tétel (Elégséges feltétel függvények Taylor-sorral történő előállítására). *Legyen $f \in D^{\infty}\big(K(a)\big)$, és tegyük fel, hogy $\exists M > 0$ valós szám, amire*

$$\forall x \in K(a),\ \forall n \in \mathbb{N}\colon \ \left|f^{(n)}(x)\right| \le M$$

teljesül. Ekkor f-nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll a következő egyenlőség

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \big(x \in K(a)\big).$$

Bizonyítás. Legyen $x \in K(a)$ egy tetszőleges pont. Azt kell igazolni, hogy

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} T_{n,a}(x) \qquad \big(x \in K(a)\big).$$

Ez a Taylor-formula szerint igaz, hiszen létezik olyan ξ pont a és x között, hogy

$$\left|f(x) - T_{n,a}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \le M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

Megjegyzések.

1. Az Analízis I. kurzuson tanultuk a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$$
nevezetes határértéket. Ebből következik a tétel bizonyításában alkalmazott
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$
határérték.

2. A sin és a cos függvény teljesíti az előző tétel feltételeit minden $a \in \mathbb{R}$, $K(a) = \mathbb{R}$ és $M = 1$ esetén, hiszen
$$|\sin x| \le 1, \qquad |\cos x| \le 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Ezért is tudjuk mindkét függvényt előállítani egy tetszőleges a ponthoz tartozó Taylor-sorral. Pl. ha $a = \pi/2$, akkor
$$\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1, \quad \sin'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0, \quad \sin''\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = -1, \quad \sin'''\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0, \quad \ldots,$$
és így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\sin(x) = 1 - \frac{1}{2!}\Big(x - \frac{\pi}{2!}\Big)^2 + \frac{1}{4!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^4 - \frac{1}{6!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^{2k}.$$
Ez az előállítás nem annyira meglepő, mert rögtön következik a
$$\sin(x) = \cos\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
azonosságból, és így a 3. Tételből következik, hogy ez a sin függvény $\pi/2$ ponthoz tartozó Taylor-sora.

3. Az exp függvény nem korlátos $\mathbb{R}$-n, ezért nem teljesíti az előző tétel feltételeit $K(a) = \mathbb{R}$-en. Azonban minden $a \in \mathbb{R}$ és $R > 0$ valós szám esetén az exp függvény korlátos a $K_R(a) = (a - R, a + R)$ intervallumon. Így $\exists M > 0$ valós szám, amire
$$\forall x \in K_R(a),\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \Big|\exp^{(n)}(x)\Big| = \Big|\exp(x)\Big| \le M$$
teljesül. Tehát exp teljesíti az előző tétel feltételeit, és így előállítható egy tetszőleges a ponthoz tartozó Taylor-sorral minden $(a - R, a + R)$ intervallumon. Ez azt jelenti, hogy előállítható ezzel a Taylor-sorral a teljes való számok halmazán.

Egy f függvény a-hoz tartozó Taylor-sorának a felírásához kétféle módon járhatunk el.

a) A definíció értelmében meghatározzuk a függvény *összes* magasabb rendű deriváltját az a pontban, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra az $f^{(n)}(a)$ függvényértékeket. Ezek meghatározása általában nem egyszerű feladat, de néhány esetben ki lehet következtetni az első néhány deriválás után. Ezzel fel tudjuk írni a keresett Taylor-sort, de még meg kell határozni a konvergenciahalmazát, illetve megvizsgálni milyen pontokban állítja elő a függvényt.

b) Egy ismert függvény hatványsoros előállításából kiindulva helyettesítéssel, tagonkénti deriválással vagy egyéb módon megkapjuk a függvény hatványsorba fejtését egy $K(a)$ környezetben, ami a 3. Tétel szerint a függvény Taylor-sora lesz. Ezzel rögtön kapunk egy konvergenciahalmazt, ahol a Taylor-sor előállítja a függvényt.

Hasonlítsuk össze a két módszert egyazon feladat megoldásában.

3. Feladat. *Legyen*

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \qquad \big(x \in (-1, +\infty)\big).$$

Állítsuk elő az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát, és vizsgáljuk meg az előállítás problémáját!

Megoldás.

a) Világos, hogy $f \in D^\infty\big(-1, +\infty\big)$, és

$$f(x) = (1+x)^{-1}, \quad f'(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f'''(x) = -6(1+x)^{-4}, \ldots$$

Sejthető, hogy minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1} \quad (x > -1), \qquad \text{és így} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n n!,$$

ami teljes indukcióval könnyen igazolható. A keresett Taylor-sor tehát

$$T_0(f, x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots,$$

ami konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon (az intervallum határait nem vesszük figyelembe), hiszen a Cauchy–Hadamard-tétel szerint konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n|}} = 1.$$

Az előállítás problémájához alkalmazzuk a Taylor-formulát. Minden $|x| < 1$ számhoz létezik olyan ξ pont 0 és x között, hogy

$$\Big|f(x) - T_{n,0}(x)\Big| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!(1+\xi)^{-n-2}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}.$$

Ekkor a mértani sorozat határértéke miatt ($q^n \to 0$, ha $|q| < 1$):

- ha $0 < \xi < x < 1$, akkor $\dfrac{1}{1+\xi} < 1$. Ezért

$$|f(x) - T_{n,0}(x)| < x^{n+1} \to 0,$$

- ha $-\dfrac{1}{2} < x < \xi < 0$, akkor $\dfrac{|x|}{1+\xi} < \dfrac{|x|}{1+x} = \dfrac{|x|}{1-|x|} < 1$. Ezért

$$|f(x) - T_{n,0}(x)| = \frac{1}{|x|} \cdot \left(\frac{|x|}{1+\xi}\right)^{n+2} < \frac{1}{|x|} \cdot \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+2} \to 0.$$

Ezért a Taylor-sor előállítja a függvényt a $(-1/2, 1)$ intervallumon.

Vegyük észre, hogy a Taylor-formula segítségével nem tudjuk igazolni az előállítást a teljes $(-1, 1)$ intervallumon.

b) Ismerjük a mértani sor összegfüggvényét:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

Ha ebben x helyett $-x$-et írunk, akkor

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad (\underbrace{-1 < -x < 1}_{-1<x<1})$$

Ezzel sikerült az f függvényt hatványsorba fejteni. Ekkor a 3. Tétel szerint ez a hatványsor a függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora, ami előállítja a függvényt a $(-1, 1)$ intervallumon.

Megjegyzés. A helyettesítéses módszert már alkalmaztuk az Analízis I. kurzuson hatványsorok előállítására. Ehhez most hozzájön a hatványsor összegfüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel, amivel nagyon érdekes eredményekhez juthatunk.

4. Feladat. *Legyen*

$$f(x) := \ln(1+x) \qquad \big(x \in (-1, +\infty)\big).$$

Állítsuk elő az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát, és vizsgáljuk meg az előállítás problémáját!

Megoldás. Először vegyük észre, hogy $f \in D(-1, 1)$ és

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

Legyen

$$g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad \big(x \in (-1, 1]\big).$$

A fenti hatványsor konvergenciahalmaza valóban a $(-1, 1]$ intervallum, hiszen a Cauchy–Hadamard-tétel szerint konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|(-1)^{n+1}/n|}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

az $x = -1$ pontban divergens (harmonikus sor), és az $x = 1$ pontban konvergens (Leibniz-sor). A hatványsorok összegfüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel szerint $g \in D(-1, 1)$ és

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

Ezért $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (-1,1)$ pontban. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ állandó, hogy

$$f(x) - g(x) = c \quad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Ugyanakkor $f(0) - g(0) = 0$, így $c = 0$. Bebizonyítottuk tehát azt, hogy

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad \text{ha} \;\; x \in (-1,1).$$

Ezzel sikerült az f függvényt hatványsorba fejteni. Ekkor a 3. Tétel szerint ez a hatványsor a függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora, ami előállítja a függvényt a $(-1,1)$ intervallumon.

Megjegyzés. Az előző feladat megoldásában szereplő

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (-1 < x < +\infty) \quad \text{és} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (-1 < x \le 1)$$

függvények folytonosak az $x = 1$ pontban. A g függvény folytonossága abból következik, hogy minden hatványsor folytonos a konvergenciahalmazának bármely pontjában. Mivel $f(x) = g(x)$ minden $x \in (-1,1)$ esetén, így a folytonosság miatt

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = g(1) = \lim_{x \to 1-0} g(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1) = \ln 2.$$

Tehát

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2\,.}$$

Az Analízis I. kurzuson ennek a sornak a konvergenciáját már beláttuk (a Leibniz-sorról van szó), és most már a sor összegét is megismertük.

5. Feladat. *Legyen*

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Állítsuk elő az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát, és vizsgáljuk meg az előállítás problémáját!

Megoldás. Az arc tg függvény 0 pont körüli Taylor-sorának előállítása a definíció alapján nem egyszerű feladat, mert a magasabb rendű deriváltak (az előző két példával ellentétben) kiszámolása jóval bonyolultabb.

Először vegyük észre, hogy $f \in D(-1,1)$ és ha x helyett x^2-tet írünk az

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

egyenlőségbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad (\underbrace{-1 < x^2 < 1}_{-1<x<1}).$$

Legyen

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \big(x \in [-1,1]\big).$$

A fenti hatványsor konvergenciahalmaza valóban a $[-1,1]$ intervallum, hiszen ez hányadoskritériummal és a végpontokban Leibniz-kritériummal könnyen igazolható. A hatványsorok összegfüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel szerint $g \in D(-1,1)$ és

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,(2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Ezért $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (-1,1)$ pontban. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ állandó, hogy

$$f(x) - g(x) = c \quad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Ugyanakkor $f(0) - g(0) = 0$, így $c = 0$. Bebizonyítottuk tehát azt, hogy

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} \qquad \text{ha} \;\; x \in (-1,1).$$

Ezzel sikerült az f függvényt hatványsorba fejteni. Ekkor a 3. Tétel szerint ez a hatványsor a függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora, ami előállítja a függvényt a $(-1,1)$ intervallumon.

Megjegyzés. Az előző feladat megoldásában szereplő

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} \quad (-1 \le x \le 1)$$

függvények folytonosak az $x = -1$ és az $x = 1$ pontokban. Mivel $f(x) = g(x)$ minden $x \in (-1,1)$ esetén, így a folytonosság miatt

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = g(1) = \lim_{x \to 1-0} g(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1) = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Tehát

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.}$$

A fenti képletek alapján a π értéke tetszőleges pontossággal számolható.