.Gráfok ábrázolása- gyakorlati anyag[1]

TARTALOMJEGYZÉK

[1] Készítette: Veszprémi Anna

DEFINÍCIÓK ÁTISMÉTLÉSE

Mielőtt megnézzük az ábrázolással kapcsolatos feladatokat, ismételjük át az előadáson hallott, gráfokkal kapcsolatos fontosabb, ide vágó definíciókat:

Gráf definíciója:

Gráf alatt egy G = (V,E) rendezett párost értünk, ahol V a csúcsok (vertices) tetszőleges, véges halmaza, $E \subseteq V \times V \setminus \{(u,u) : u \in V\}$ *pedig az élek (edges) halmaza. Ha V = { }, akkor üres gráfról, ha V* $\neq$ *{ }, akkor nemüres gráfról beszélünk.*

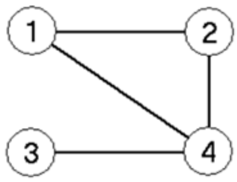
Megjegyzés: a definícióból két fontos dolog következik: a gráfokban, amelyekkel foglalkozni fogunk, nincsenek hurokélek, és nincsenek párhuzamos élek, azaz bármely két csúcs között legfeljebb egy éle lehet a gráfnak.

Az ábrázolásnál lényeges lesz, hogy a gráfunk irányított, vagy irányítatlan. Nézzük a definíciókat:

Irányítatlan gráf definíciója:

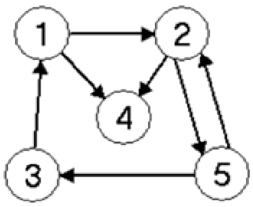
A G = (V,E) gráf irányítatlan, ha tetszőleges $(u,v) \in E$ *élre (u, v) = (v, u).*

Azaz, ha (u, v) létezik, akkor (v, u) él is létezik, mindkét élt ábrázolni kell!



Irányított gráf definíciója:

A G = (V,E) gráf irányított, ha tetszőleges (u, v); (v, u) $\in$ *E élpárra (u, v)* $\neq$ *(v, u). Ilyenkor azt mondjuk, hogy az (u, v) él fordítottja a (v, u) él, és viszont.*



Út definíciója:

A G = (V;E) gráf csúcsainak (V) egy $\langle u_0; u_1; : : : u_n \rangle$ $(n \in N)$ *sorozata a gráf egy útja, ha tetszőleges* $i \in 1..n$*-re* $(u_{i-1}, u_i) \in E$ *(tetszőleges* $i \in 1..n-1$*-re* $u_i \neq u_{i+1}$*). Ezek az* (u_{i-1}, u_i) *élek az út élei. Az út hossza ilyenkor n, azaz az utat alkotó élek számával egyenlő.*

ÁBRÁZOLÁSI MÓDOK

A gráfábrázolásoknál a G = (V,E) gráfról általában föltesszük, hogy V = {1, … ,n}, ahol n = |V|, azaz hogy a gráf csúcsait egyértelműen azonosítják az 1..n sorszámok.

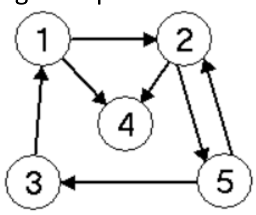
Jelölhetjük a gráf csúcsait az angol ábécé kisebtűivel is: a=1…v=26 azonosítják a gráf csúcsait.

Az ábrázolásainknál, és az ezeken futó algoritmusoknál a hatékonyság miatt nagyon lényeges, hogy a csúcs egyben egy sorszámot is jelent, azaz konstans időben tudunk tetszőleges csúcsot beazonosítani a gráfban.

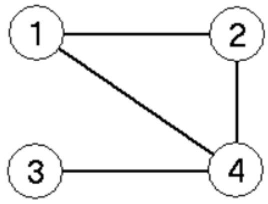
A gráf szöveges megadása

Egy gráfot megadhatunk szöveges leírással, vagy rajzzal szemléltethetjük. A tárgy a következő szöveges leírást használja:

G irányított gráf

Szöveges megadás:	A gráf képe:
$1 \rightarrow 2;4.$ $2 \rightarrow 4;5.$ $3 \rightarrow 1.$ $5 \rightarrow 2;3.$	

G irányítatlan gráf

Szöveges megadás:	A gráf képe:
1 – 2;4. 2 – 4. 3 – 4.	

Ez utóbbinál figyeljük meg, hogy a szöveges megadás az (u,v) = (v,u) élt csak egyszer adja meg.

Gráf ábrázolása a számítógépeken

Olyan ábrázolásra van szükség, melyet a gráfokkal kapcsolatos algoritmusok hatékonyan tudnak használni. Az algoritmusok, amelyeket tanulni fogunk, a gráf egy csúcsának feldolgozáskor a csúcs „szomszédait" fogják meglátogatni. (Egy *u* csúcs szomszédjainak azokat a csúcsokat tekintjük, melyekhez vezet él a gráfban, azaz ha létezik (*u*,v) él, akkor *v* az *u* szomszédja.) Így az ábrázolásnak ezt kell hatékonyan támogatnia.

Két ilyen gyakran használt, hatékony ábrázolást fogunk tanulni:

- Szomszédossági mátrixos (csúcsmátrixos, vagy adjacency mátrixos) ábrázolás: a gráfot egy *n* x *n*-es bitmátrix ábrázolja ($n=|V|$), legyen a neve: A. $A \in bit^{n \times n}$, A[i,j] = 1, ha van (*i*,*j*) él a gráfban, 0 egyébként. Az *i* csúcs szomszédjainak bejárása $\Theta(n)$ költségű: a mátrix *i*-dik sorát kell végig járni. Úgynevezett „sűrű" gráfoknál célszerű ezt az ábrázolást használni, amikor $|E| \in \Theta(n^2)$.
- Szomszédossági listás ábrázolás (éllistás listás): az *i* csúcs szomszédjait egy egyszerű lista (fejelem nélküli, egyirányú) ábrázolja. A lista elemek Edge típusúak. A listák kezdő pointerei *(nem fejelemei!)* egy *n* méretű, Edge* típusú tömbben vannak, legyen a neve: A. $A \in (Edge^*)^n$. Az *i* csúcs szomszédjait úgy érhetjük el, hogy bejárjuk az A[i] pointerű listát. Ennek költsége: O(*n*). Fontos, hogy a listák első elemére mutató pointerek egy tömbben vannak elhelyezve, így konstans időben érhetjük el a listák kezdő pointerét.

  Az Edge típus UML leírása:

Edge
+v : N +next: Edge*

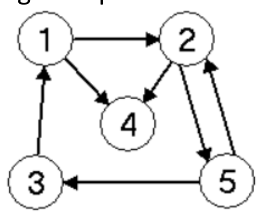
  Nem lényeges tulajdonság, de az áttekinthetőség miatt a listákat csúcs szerint növekvően rendezve szoktuk ábrázolni. Ez egy adott szomszéd keresését még gyorsíthatja is.

Nézzük meg a példa gráfok ábrázolását:

Irányított gráf

Szöveges megadás:
1 → 2;4.
2 → 4;5.
3 →1.
5 →2;3.

A gráf képe:

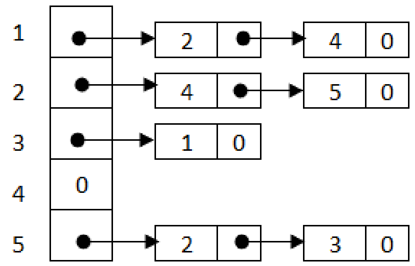


Csúcsmátrix:

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	0	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0

A[i,j] = 1 ↔ (i,j) ∈ E
A/1 jelzi majd, hogy A egy egytől indexelt mátrix.

Szomszédossági lista:

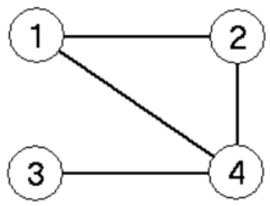


A[i] azon egyszerű lista első elemére mutat, amely i csúcs szomszédjait tartalmazza. A lista elemei Edge típusúak, így a tömb egy eleme, azaz A[i]: Edge* típusú!
A/1 jelzi majd, hogy A egy egytől indexelt tömb.

Irányítatlan gráf

Szöveges megadás:
1 – 2;4.
2 – 4.
3 – 4.

A gráf képe:

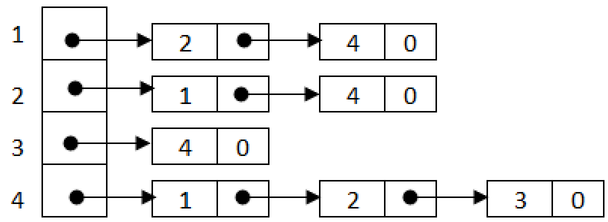


Csúcsmátrix:

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	1	0	0	1
3	0	0	0	1
4	1	1	1	0

Mindig szimmetrikus mátrix, így nagy gráfok esetén helytakarékosan szokták a mátrixot ábrázolni: csak a főátló alatti elemeket ábrázoljuk egy egydimenziós tömbben, sorfolytonosan elhelyezve.

Szomszédossági lista:



FONTOS: az élek mindkét irányban szerepelnek.

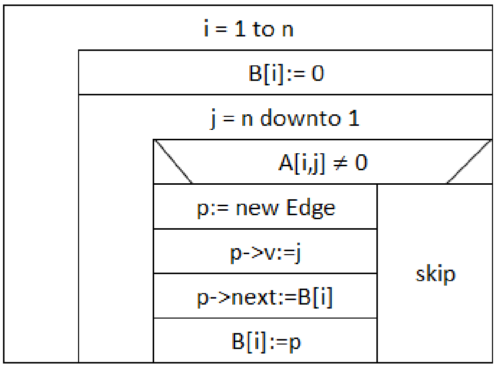
ÁBRÁZOLÁSSAL KAPCSOLATOS GYAKORLÓ FELADATOK

Szomszédossági listás (éllistás) ábrázolás felépítése csúcsmátrixból

Adott egy irányított gráf csúcsmátrixos ábrázolása az A/1 : bit[n,n] mátrixban. Készítsük el a gráf szomszédossági listás ábrázolását a B/1 : Edge*[n] tömbben. Az éllisták legyenek csúcs szerint rendezettek. Műveletigény. O(n^2), ahol n=|V|.

Megoldás ötlete: soronként bejárjuk a mátrixot. Az i-dik sor feldolgozásakor az i csúcsból induló éllistát kell előállítani. Ha az i-dik sort 1..n irányban járjuk be, akkor az új elemet mindig a lista végére kellene fűzni, hogy növekvően rendezett listát kapjunk. Ezért kellene egy plusz pointer, ami mindig a lista utolsó elemére mutat. Ha a sort fordítva, n..1 irányban dolgozzuk fel, akkor viszont mindig a lista elejére kell fűzni az új elemet, így nincs szükség a lista végének nyilvántartására.

Csúcsm_éllista(A/1:bit[n,n],B/1:Edge*[n])



i-dik csúcs éllistájának felépítése
pointer null-ra állítása
fordítva haladunk, így ha mindig az éllista elejére vesszük fel az új elemet, csúcs szerint növekvően rendezett listát kapunk.
(i,j) élt találtunk a gráfban: új listaelem létrehozása, befűzése az éllista elejére.

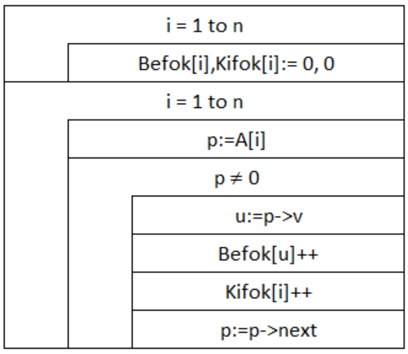
A műveletigény könnyen látszik: a külső ciklus n iterációt végez, a belső ciklus szintén, az él előállítására viszont csak akkor van szükség, ha a mátrix elem 1 értékű, ezért a belső ciklus igaz ága legfeljebb n^2-szer hajtódik végre.

Befok-kifok előállítása szomszédossági listával ábrázolt gráfon

Adott egy irányított gráf szomszédossági listás ábrázolása az A/1 : Edge*[n] tömbben. Adottak még a Befok/1 : N[n] és Kifok/1 : N[n] tömbök. Állítsuk elő a gráf csúcsainak befokát és kifokát a Befok és Kifok tömbökben. Befok[i]= hány él mutat i csúcsba, Kifok[i]= hány él indul i csúcsból. A példa gráfra Befok[1]=1 és Kifok[1]=2 lenne. Műveletigény: $\Theta(n+m)$, ahol n=|V| és m=|E|.

Megoldás ötlete: feltöltjük nullával a kifok, befok tömböket. Egyszer végig járjuk az éllistákat. Amikor az A[i] éllistát dolgozzuk fel, akkor a listában szereplő élek (i,p->v) élt jelentenek, tehát i csúcs kifokát és p->v csúcs befokát kell megnövelni.

Befok_kifok(A/1:Edge*[n],Befok/1:N[n],Kifok/1:N[n])

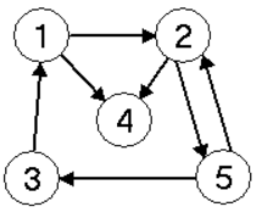


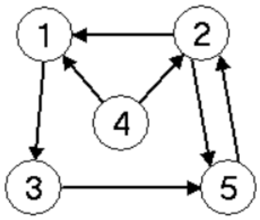
Eredmény tömbök feltöltése nullával.
Éllista bejárása p pointerrel.
(i,u) élt találtunk: u befokát, i kifokát növeljük.
p pointer tovább lép.

Műveletigény: az első ciklus műveletigénye $\Theta(n)$, a második ciklus első lépése n-szer fog végrehajtódni, míg a belső ciklus az élek számával arányos, azaz $\Theta(m)$ műveletigényű, azaz összességében: $\Theta(n+m)$

Transzponált gráf felépítése

Adott egy irányított gráf szomszédossági listás ábrázolása az A/1 : Edge*[n] tömbben. Állítsuk elő a gráf transzponáltját az AT/1 : Edge*[n] tömbben. Az éllisták legyenek csúcs szerint rendezettek mindkét ábrázolásban. Irányított gráf transzponáltja: a csúcsok ugyanazok, de az élek iránya fordított, azaz ha az eredeti gráfnak volt (u,v) éle, akkor és csak akkor a transzponált gráfnak lesz (v,u) éle. Műveletigény: $\Theta(n+m)$, ahol $n=|V|$ és $m=|E|$.





Megoldás ötlete: feltöltjük null pointerrel az AT tömböt. Bejárjuk a gráf éllistáit. Az A[i] éllista feldolgozása közben (i,p->v) éleket dolgozunk fel (p pointer mutat az éppen feldolgozott lista elemre), azaz a transzponált gráfot ábrázoló adatszerkezetbe egy (p->v,i) élt kell felvennünk. Rendezettség kérdése: ha i-vel 1..n irányban járjuk be az A[] tömböt, akkor a transzponált gráfban mindig a p->v csúcs éllistájának végére kellene fűzni az új listaelemet. Ha minden esetben elmegyünk a lista végére egy pointerrel, megnöveljük a futási időt. Ha nyilvántartjuk a lista végeket, plusz $\Theta(n)$ tárigénye lenne az algoritmusnak. Viszont, ha egy ügyes trükkel fordítva, n..1 irányban járjuk be az eredeti gráf éllistáit, akkor i csökkenő, így mindig a lista elejére kell felvenni az új élt, így nem nő a tárigény, és a kívánt műveletigény is megvalósul.

Transzponál(A/1:Edge*[n],AT/1:Edge*[n])

i = 1 to n	*AT pointer tömb feltöltése null értékkel.*
AT[i]:=0	
i = n downto 1	*Visszafelé haladunk az eredeti gráf csúcsain.*
p:=A[i]	*i csúcs éllistájának bejárása p pointerrel.*
p ≠ 0	
u:=p->v	*(i,u) él volt az eredeti gráfban, tehát egy*
q:=new Edge	*(u,i) élt kell létrehozni a transzponált*
q->v:=i	*gráfban. Új listaelemet hozunk létre, kitöltjük,*
q->next:=AT[u]	*majd befűzzük az u csúcs éllistájának*
AT[u]:=q	*elejére.*
p:=p->next	*A listát bejáró pointert tovább léptetjük.*

Műveletigény: első ciklus $\Theta(n)$, második ciklus $\Theta(n+m)$, tehát összességében az algoritmus $\Theta(n+m)$.

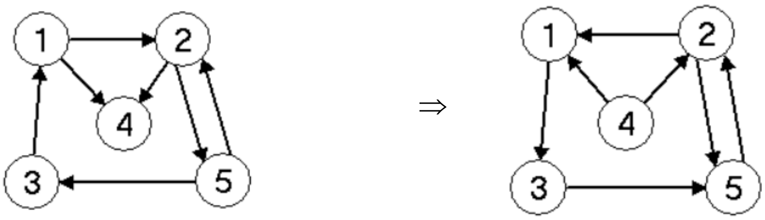
Transzponálás „helyben” (haladóbb feladat)

Nagy gráfok esetén a memória kímélése miatt transzponálás esetén az eredeti gráfot lebontják, és annak listaelemeit felhasználva állítják elő a transzponált gráfot. Így kicsit nehezebb a feladat. Készítsük el a „helyben” transzponálás algoritmusát. Az éllisták növekvőleg rendezettek az eredeti adatszerkezetben, és azt szeretnénk, ha a transzponált gráfot leíró adatszerkezet listái is csúcs szerint növekvően rendezettek lennének. Műveletigény: $\Theta(n+m)$, ahol $n=|V|$ és $m=|E|$.

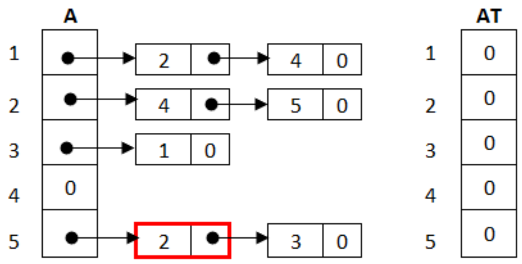
Megoldás ötlete: az előző feladatban leírtakhoz hasonlóan járunk el, csak nem új listaelemet foglalunk, hanem az eredeti listaelemet kifűzzük, átírjuk a csúcsot, és befűzzük a helyére. Ha a ciklus n..1 irányú, akkor most is mindig a lista elejére kell befűzzük az új elemet.

Szemléltető ábra az algoritmus működéséhez:

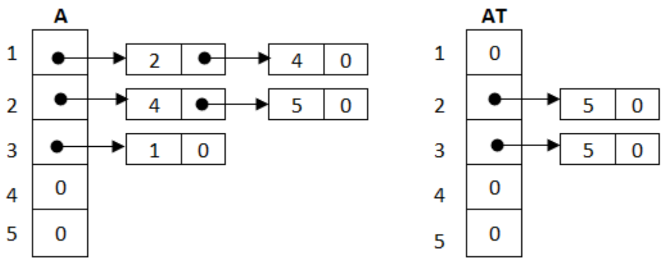
Transzponáljuk a példa gráfunkat:



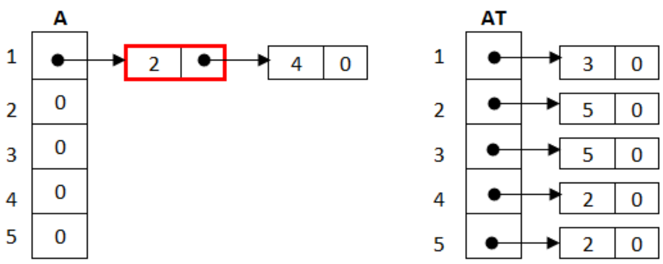
Induló helyzet. A pirossal jelzett listaelemmel indul a feldolgozás: (5,2) élből a transzponált gráfban egy (2,5) élt hozunk létre.



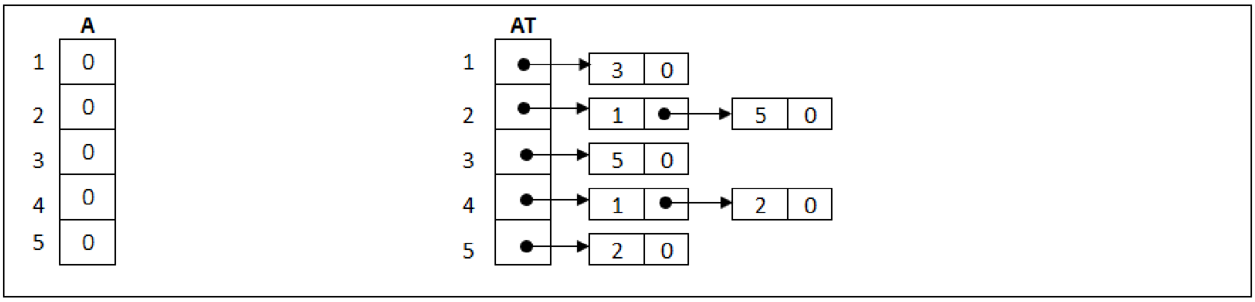
Az 5-ös csúcs éllistáját lebontottuk, a transzponált gráfban létrehoztuk a (2,5), majd (3,5) éleket.



Folytatva az algoritmust, a 3-as és 2-es csúcsok éllistáit is lebontottuk, a transzponált gráfban létrejöttek az (1,3), (4,2) és (5,2) élek. Most fogjuk látni, az n..1 irányú ciklus előnyét, a pirossal bekeretezett (1,2) élt megfordítva (2,1) éle lesz a transzponált gráfnak, és ez pont a 2-es csúcs listájának elejére illik, a következő (1,4) él fordítottja pedig a 4-es csúcs listájának elejére kerül majd.



Elkészült a transzponált gráfot leíró adatszerkezet:



És most lássuk az algoritmust:

HelybenTranszponál(A/1:Edge*[n],AT/1:Edge*[n])

```
i = 1 to n                      AT pointer tömb feltöltése null értékkel.
    AT[i]:=0
i = n downto 1                  Visszafelé haladunk az eredeti gráf csúcsain.
    A[i] ≠ 0                    Amíg A[i] lista el nem fogy:
        p:=A[i]                     p pointerben megjegyezzük az első listaelem címét,
        A[i]:=p->next               kifűzzük a lista első elemét,
        u:=p->v                     (i,u) él volt a gráfban, (u,i) élt kell létrehozni,
        p->next:=AT[u]              p című elem befűzése u csúcs éllistájába, a
        AT[u]:=p                    lista elejére,
        p->v:=i                     i-be mutató élt hozunk létre.
```

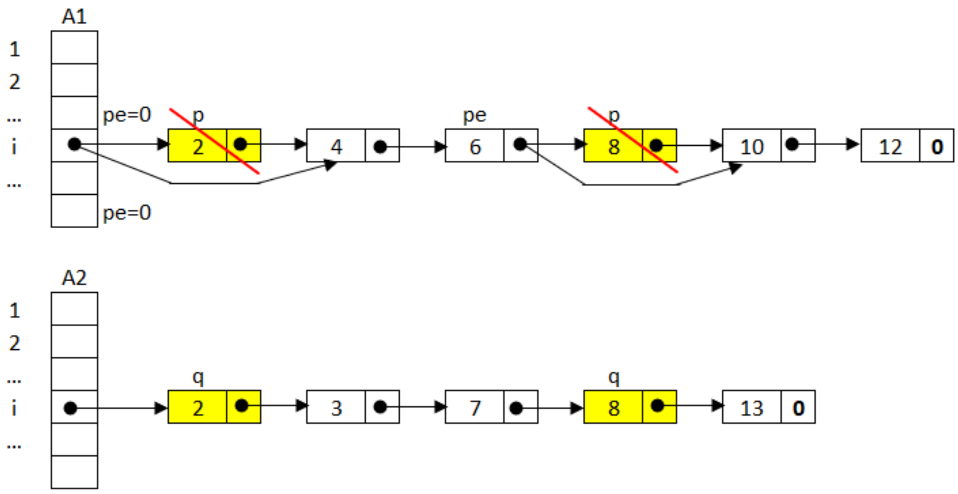
Műveletigény: az előző megoldáshoz hasonlóan könnyen látszik a $\Theta(n+m)$ műveletigény.

Különbség gráf

Adott két irányított gráf G1 és G2 szomszédossági listás ábrázolásban, G1 az A1: Edge*[n], G2 az A2[n] tömbben. A két gráf csúcsai ugyanazok, az élek mások. Az éllisták csúcs szerint növekvően rendezett listák. Készítse el A1 tömbben a G1\G2 gráfot. G1\G2 gráf csúcsai ugyanazok, mint a két bemeneti gráfnak, élei pedig G1 élei közül azok, amelyek, G2 gráfban nem szerepelnek. A megoldásban használja ki, hogy az éllisták rendezettek! Műveletigény $O(n^2)$

Ötlet: Mivel az éllisták rendezettek, a leghatékonyabb megoldást, a két lista összefésülésével kapjuk. Ennek szemléltetése az i-dik csúcsra:

- *A1[i] listán p, A2[i] listán q pointerrel haladunk.*
- *Három eset lehetséges ($p \to v < q \to v$; $p \to v = q \to v$; $p \to v > q \to v$)*
- *A1[i] listából törlünk elemeket, a törléshez kell az előző listaelem elem címe, ez lesz majd pe pointerben. Ha az elsőt töröljük, akkor viszont A1[i] módosul!*
- *Ha bármelyik listán végig értünk, az összefésülés leállhat.*



A megoldás (az összefésülés algoritmusát kiemeltük):

KülönbségGráf(A1/1:Edge*[n]; A2/1:Edge*[n])

i = 1 to n
Összefésül(A1, A2,i)

Összefésül(A1/1:Edge*[n]; A2/1:Edge*[n]; i:N)

pe:=0; p:=A1[i]; q:= A2[i]

$p \neq 0 \quad \wedge \quad q \neq 0$

p->v < q->v	p->v = q->v	p->v > q->v
pe := p p := p->next	r := p->next pe = 0 ? A1[i]:=r : pe->next:=r delete p p := r q := q->next	q := q->next

Műveletigény: egy éllista hossza O(n), a listák összefésülése O(n), n csúcsra elvégezve a listák összefésülését: $O(n^2)$

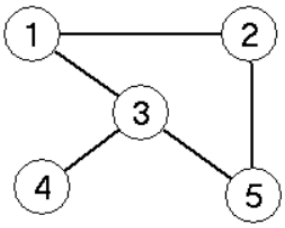
Komplementer gráf

Adott egy irányítatlan gráf szomszédossági listás reprezentációja az A/1:Edge*[n] tömbben. Az A tömb az éllisták első elemére mutató pointereket vagy 0 értéket tartalmaz. Az éllisták csúcs szerint növekvően rendezett listák. Készítsen algoritmust, mely az éllistákat egyszer bejárva, hasonló ábrázolással, az AK:Edge*[n] tömbben létrehozza a komplementer gráfot. Műveletigény: $O(n^2)$, O(n) segédmemória használható.

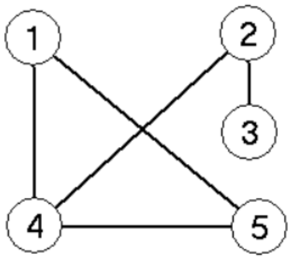
Definíció: Valamely G=(V,E) irányítatlan gráf komplementer gráfja az a gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik a G gráf csúcshalmazával, az élhalmaza pedig a G gráf élhalmazának a komplementer halmaza (a teljes gráf élhalmazára, mint alaphalmazra nézve).

Megjegyzés: Hurokélt nem tartalmaznak a gráfok, ügyeljünk rá, hogy a komplementer gráfba se kerüljön be hurokél.

G gráf:



G komplementer gráfja:



Megoldás ötlete:

A[i] (1≤ i≤ n) éllistákat bejárva, egy sz[1..n] segéd tömbbe a k-dik helyre 1-et írunk, ha i csúcsnak van k szomszédja (azaz (i,k) él van a gráfban), és 0-át, ha nincs. Ezt a segéd tömböt felhasználva könnyen előállítható a komplementer gráf i csúcsának éllistája: azokat az éleket kell felvenni, ahol sz[i]=0. Ügyelni kell két dologra: a kapott AK[i] éllista csúcs szerint rendezve legyen, valamint, hogy hurokélt ne hozzunk létre!

KomplementerGráf(A/1:Edge*[n]; AK/1: Edge*[n])

```
i = 1 to n
    AK[i]:=0                      AK[i] lista pointerét nullára állítjuk.
    sz|1,…,n] := [0,…,0]          A segéd tömböt feltöltjük nullával.
    p:=A[i]
    p ≠ 0                         Bejárjuk A[i] listát, azon csúcsoknál
        sz[p->v]:=1                   amelyek szerepelnek a listában,
        p:=p->next                    a segédtömbbe 1-et írunk.
    sz[i]:=1                      Nehogy hurokélt létrehozzunk.
    j = n downto 1
        sz[j] = 0                 Ott kell felvenni élt, ahol az eredeti gráfban nem volt,
                                      azaz sz[j]=0.
            p:=new Edge               Ha visszafele haladunk, mindig AK[i] lista
            p->v:=j                   elejére kell beszúrni az új élt, hogy végül
            p->next:=AK[i]            csúcs szerint rendezett listát kapjunk.
            AK[i]:=p
        else
            skip
```

SZORGALMI HÁZI FELADATOK

G^2 gráf előállítása csúcsmátrixra, szomszédossági listára

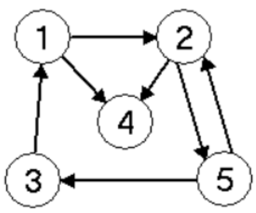
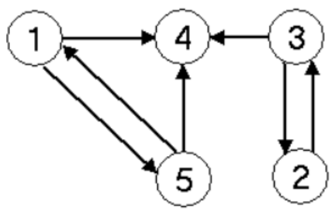
Legyen G=(V,E) egy irányított gráf. G^2 gráfnak nevezzük azt a $G^2=(V,E^2)$ gráfot, melynek csúcsai megegyeznek az G gráf csúcsaival, élei pedig a következők: $(u,v) \in E^2 \Leftrightarrow (u,w)$ és $(w,v) \in E$. Azaz (u,v) éle a G^2 gráfnak pontosan akkor, ha létezik u-ból v-be kettő hosszú út az eredeti gráfban. Ha hurokél keletkezne, azt ne ábrázoljuk a négyzet gráfban.

Készítsünk algoritmust, mely előállítja a G^2 gráfot

a) ha G csúcsmátrixszal van ábrázolva az A mátrixban, G^2 keletkezzen A2 mátrixban. Műveletigény: $O(n^3)$.

b) ha G szomszédossági listával van ábrázolva A pointer tömbbel. G^2 keletkezzen A2 tömbben. Műveletigény: $O(n*m)$

Nézzük meg példa gráfunk esetén mi lenne a négyzet gráf?

Eredeti gráf:	Négyzet gráf, hurokélek nélkül:
	

Abszolút nyelő csúcs keresése csúcsmátrixos ábrázolású irányított gráfban

Legyen G=(V,E) egy irányított gráf. Csúcsmátrixszal ábrázolva az A mátrixban. Határozzuk meg van-e abszolút nyelő csúcsa a gráfnak, ha van, adjuk is meg a csúcsot. A gráf *u* csúcsát abszolút nyelőnek nevezzük, ha az *u* csúcs befoka *n*-1, kifoka pedig 0. Azaz minden más csúcsból létezik *u*-ba mutató él, viszont *u*-ból nem indul ki egyetlen él sem. A feladat tehát a következő: egy olyan *i* indexű sort kell találni a mátrixban, hogy a sor csak nullát tartalmaz, de ugyanakkor az *i*-dik oszlop a főátlót kivéve csupa 1-est tartalmaz. Könnyű találni $O(n^2)$ műveletigényű algoritmust: keresünk egy csupa nulla sort (ez $O(n^2)$), ha találtunk, ellenőrizzük a megfelelő oszlopot, hogy a főátlót kivéve csupa egyes-e, ez $O(n)$, összességében $O(n^2)$. Oldjuk meg O(n) műveletigénnyel!