2. Hibaszámítás

2.1. Feladat

Legyen A pontos érték, a közelítő érték, melyre $A = a + \Delta a$. Bizonyítsuk, hogy a relatív hiba számításakor alkalmazott

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$$

közelítés $(\Delta a)^2$ nagyságrendű hibát okoz!

A hibaformulákban alkalmazott közelítések alapja az, hogy feltételeztük, a $|\Delta a|$ mennyiség lényegesen (nagyságrendekkel) kisebb, mint $|a|$. A hibaformuláink úgynevezett elsőrendű hibaformulák, ami azt jelenti, hogy a közelítés nagyságrendjének jelenlétében a hiba első hatványának nagyságrendjébe eső tagokat hagyjuk csak meg, a $(\Delta a)^k$-nal arányos tagokat ($k \geq 2$) elhagyjuk (egy $a \circ b$ típusú kétoperandusú művelet esetén ilyen pl. a $\Delta a \Delta b$ is). Tekintsük most a relatív hiba definíció szerinti alakját:

$$\begin{aligned}
\delta_a &= \frac{\Delta a}{A} = \frac{\Delta a}{a + \Delta a} = \frac{\Delta a}{a + \Delta a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a}{a + \Delta a} = \\
&= \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a + \Delta a - \Delta a}{a + \Delta a} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \left(1 - \frac{\Delta a}{a + \Delta a}\right) = \\
&= \frac{\Delta a}{a} - \frac{(\Delta a)^2}{a^2 + a\Delta a} \approx \frac{\Delta a}{a}
\end{aligned}$$

Az utolsó, közelítő egyenlőség előtt a számlálóban $(\Delta a)^2$ áll, míg a nevezőben $a^2 + a\Delta a$. A nevező tehát nem a hiba nagyságrendjébe esik, míg a számlálóban a hiba nagyságrendjének négyzetével arányos tagot kaptunk, ami elsőrendű közelítés esetén az előzőek szerint elhagyható.

2.2. Feladat

Tegyük fel, hogy az a valami mérésből származó mennyiség. Mérésünk szerint $a = 10$, míg a abszolút hibakorlátja $\Delta_a = 1$. Szeretnénk abszolút hibakorlátot adni az a^2 mennyiségre.

(a) Számítsuk ki Δ_{a^2}-et az $f(x) = x^2$ függvény függvényértékére vonatkozó hibaformulával,

(b) majd az $a \cdot a$ szorzásra vonatkozó formula segítségével!

(c) Mindkét esetben teljesül, hogy $A \in k_{\Delta_a}(a)$ esetén $A^2 \in k_{\Delta_{a^2}}(a^2)$? Mi okozza a két formula közötti eltérést?

(a) Ha $f \in C^1(k_{\Delta_a}(a))$, ahol $k_{\Delta_a}(a) := [a - \Delta_a, a + \Delta_a]$, akkor a függvényérték hibájára vonatkozó elsőrendű hibaformula szerint:

$$\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a,$$

ahol

$$M_1 = \max\left\{ |f'(\xi)| \;\middle|\; \xi \in k_{\Delta_a}(a) \right\}.$$

Esetünkben:

$$a = 10, \qquad \Delta_a = 1, \qquad k_{\Delta_a}(a) = k_1(10) = [9, 11],$$

továbbá

$$f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x,$$

ezért

$$M_1 = \max\left\{ |2\xi| \;\middle|\; \xi \in [9, 11] \right\} = 22.$$

Mindezek alapján

$$\Delta_{a^2} = \Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a = 22 \cdot 1 = 22.$$

(b) Adjunk most hibakorlátot az a^2 mennyiségre a szorzásra vonatkozó formula alapján. Eszerint

$$\Delta_{a \cdot b} = |a|\Delta_b + |b|\Delta_a,$$

a $b = a$ választással

$$\Delta_{a^2} = \Delta_{a \cdot a} = 2|a|\Delta_a.$$

Esetünkben

$$\Delta_{a^2} = \Delta_{a \cdot a} = 2 \cdot 10 \cdot 1 = 20.$$

A két külön számítási eljárással két különböző hibakorlátot kaptunk, ami nem meglepő, hiszen a hibaterjedési formuláink közelítőek. De vajon mindkét hibaformula helyes?

(c) A hibaterjedés a következőképpen képzelhető el. Az A pontos értéket nem ismerjük, de ismerjük az a közelítő értéket és annak hibakorlátját Δ_a-t. Feltételezésünk szerint a pontos érték az a érték Δ_a sugarú környezetében van, azaz

$$A \in k_{\Delta_a}(a).$$

Ha most az f függvényt alkalmazzuk az A (nem ismert) pontos értékre, akkor elméletileg $f(A)$-t kapnánk. Viszont a rendelkezésre álló ismereteink szerint csak $f(a)$-t számolhatjuk ki, továbbá a $\Delta_{f(a)}$ hibakorlátot. Ha a hibakorlát helyes, akkor

$$f(A) \in k_{\Delta_{f(a)}}(f(a)).$$

Vizsgáljuk meg jelen feladat esetén, hogy a kapott hibakorlátok helyesek-e a fenti értelmeben. A függvényérték hibájára vonatkozó formulából a következőt kaptuk:

$$\Delta_{a^2} = \Delta_{f(a)} = 22$$

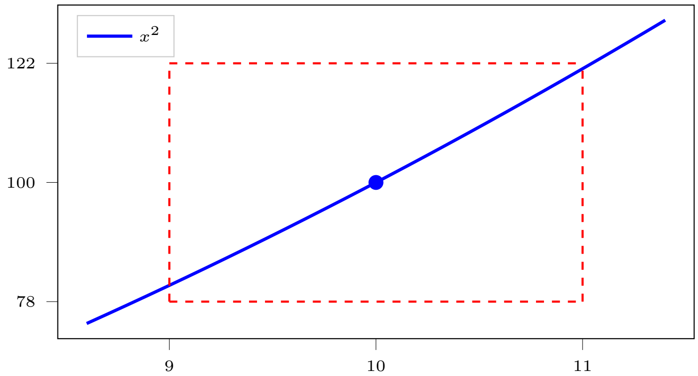
Eszerint

$$f(A) \in k_{\Delta_{f(a)}}(f(a)) \iff A^2 \in [10^2 - 22, 10^2 + 22] = [78, 122],$$

ami valóban teljesül, hiszen az f függvény szigorú monotonintása miatt

$$A \in [9, 11] \quad \Longrightarrow \quad A^2 \in [81, 121] \subset [78, 122],$$

vagyis a hibakorlát helyes, ahogy az a következő ábráról is leolvasható.



Azonban a szorzásra vonatkozó formulából a következőt kaptuk:

$$\Delta_{a^2} = \Delta_{a \cdot a} = 20,$$

ami nem helyes, hiszen

$$A \in [9, 11] \quad \not\Longrightarrow \quad A^2 \in [80, 120]$$

mivel

$$[80, 120] \not\subset [81, 121].$$

Emlékeztetünk arra, hogy Δ_{ab} definíciójában elhagyott tag ($\Delta_a\Delta_b$, lásd: előadás anyaga) éppen 1 nagyságrendű, ezzel magyarázható a formula pontatlansága.

Fontos azonban felhívnunk a figyelmet arra, hogy a fentiekből nem következik, hogy a szorzásra vonatkozó hibaformula rosszul, a függvényértékre vonatkozó pedig jól használható. Egyszerűen arról van szó, hogy például a szorzás esetén a könnyebb számolás érdekében elhagyunk olyan tagokat, amelyek járuléka a többihez képest elhanyagolható, amennyiben bizonyos észszerű feltételek teljesülnek ($\Delta_a \ll |a|$). Jelen feladatban a hibakorlát és a közelítő érték alig különbözik egymástól, ezért a hibaterjedést közelítőleg leíró formula hibája is nagy.

2.1. Megjegyzés

Természetesen a kétoperandusú műveletek is leírhatók egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénnyel, például a szorzás esetén $f(a, b) := ab$. Ekkor használhatjuk a Lagrange-féle középértéktétel többdimenziós változatát a hiba becslésére:

$$\Delta f(a, b) = f(A, B) - f(a, b) = \partial_a f(\xi, \eta) \cdot \Delta a + \partial_b f(\xi, \eta) \cdot \Delta b$$

Az egydimenziós esethez hasonlóan, mindkét oldalon vehetünk abszolútértéket, a jobb oldalon alkalmazhatjuk a háromszög egyenlőtlenséget, majd becsülhetjük a parciális deriváltak abszolútértékét a kijelölt kétdimenziós intervallumon. Érdemes azonban meggondolni, hogy ez nem minden esetben egyszerű, továbbá $\Delta_a \ll |a|$ és $\Delta_b \ll |b|$ esetén feleslegesen bonyolítja a problémát. Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\partial_a f(\xi, \eta) \approx \partial_a f(a, b), \qquad \partial_b f(\xi, \eta) \approx \partial_b f(a, b)$$

közelítések alkalmazásával az alapműveletek esetén visszakapjuk az „elemi úton" levezetett hibaformuláinkat.

2.3. Feladat

Legyen $a = 100$, $b = 200$, $\Delta_a = 2$, $\Delta_b = 3$. A függvényérték hibájára vonatkozó elsőrendű formula segítségével adjunk abszolút hibakorlátot a $\sqrt{a \cdot a + b \cdot b}$ mennyiségre!

Az előzőek szerint:

$$\begin{aligned}
a &= 100 && \Longrightarrow && a \cdot a = 10000, \\
\Delta_a &= 2 && \Longrightarrow && \Delta_{a \cdot a} = 2a\Delta_a = 2 \cdot 100 \cdot 2 = 400, \\
b &= 200 && \Longrightarrow && b \cdot b = 40000, \\
\Delta_b &= 3 && \Longrightarrow && \Delta_{b \cdot b} = 2b\Delta_b = 2 \cdot 200 \cdot 3 = 1200.
\end{aligned}$$

Továbbá

$$\Delta_{a \cdot a + b \cdot b} = \Delta_{a \cdot a} + \Delta_{b \cdot b} = 400 + 1200 = 1600.$$

Vagyis a gyök alatt álló mennyiség és $c := a \cdot a + b \cdot b$ mennyiség hibája a következő:

$$\begin{aligned}
& c := a \cdot a + b \cdot b = 10000 + 40000 = 50000, \\
& \Delta_c = \Delta_{a \cdot a + b \cdot b} = 1600.
\end{aligned}$$

Ezután a függvényérték elsőrendű hibájára vonatkozó formulát fogjuk használni. Legyen $f(x) := \sqrt{x}$, ekkor $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$, ezért

$$\begin{aligned}
M_1 &= \max \left\{ |f'(\xi)| \;\middle|\; \xi \in k_{\Delta_c}(c) \right\} = \\
&= \max \left\{ \frac{1}{2} \cdot \xi^{-1/2} \;\middle|\; \xi \in [48400, 51600] \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 48400^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{48400}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{220} = \frac{1}{440}.
\end{aligned}$$

A fentiek alapján hibakorlátot adhatunk a teljes kétoperandusú műveletre:

$$\Delta_{\sqrt{a \cdot a + b \cdot b}} = \Delta_{f(c)} = M_1 \cdot \Delta_c = 1600 \cdot \frac{1}{440} = \frac{40}{11} \approx 3.64.$$

2.4. Feladat*

Számítsuk ki az exp és ln függvények $a > 1$ pontbeli kondíciószámát! Ha $x \in (1, +\infty)$ és (pl. a számábrázolás pontatlanságából következően) $\Delta_x = \frac{1}{2}\varepsilon_1 |x|$, akkor mit mondhatunk a függvények relatív hibájáról az x pontban?

Az f függvény a pontbeli kondíciószámát a következőképpen értelmezzük:

$$c(f, a) = \frac{|a| \cdot |f'(a)|}{|f(a)|}.$$

Legyen most $f(x) := \exp(x) = e^x$ és $g(x) := \ln x$, ekkor

$$f'(x) = (e^x)' = e^x,$$
$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ezek alapján valamely $a > 1$ pontban:

$$c(f, a) = \frac{|a| \cdot |e^a|}{|e^a|} = a,$$
$$c(g, a) = \frac{|a| \cdot \frac{1}{|a|}}{|\ln a|} = \frac{1}{\ln a}.$$

Mint tudjuk, a kondíciószám az argumentum és a függvényérték relatív hibakorlátai arányát határozza meg:

$$\delta_{f(a)} = c(f, a) \cdot \delta_a.$$

Legyen most $x > 1$, melyre $\Delta_x = \frac{1}{2}\varepsilon_1 |x|$ ekkor

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} = \frac{\varepsilon_1}{2},$$

továbbá

$$\delta_{\exp(x)} = \delta_{f(x)} = c(f, x) \cdot \delta_x = \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot x$$
$$\delta_{\ln(x)} = \delta_{g(x)} = g(f, x) \cdot \delta_x = \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot \frac{1}{\ln x}$$

Szembeötlő különbség tapasztalható a két relatív hibakorlát között, míg

$$\lim_{x \to +\infty} \delta_{f(x)} = +\infty,$$

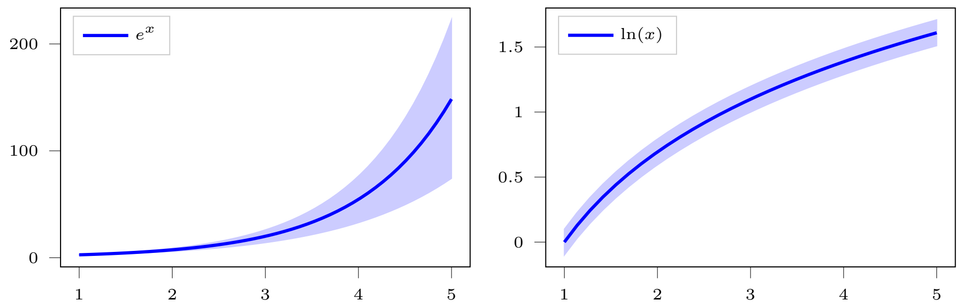
addig

$$\lim_{x \to +\infty} \delta_{g(x)} = 0,$$

ami azt jelenti, hogy az $f \equiv \exp$ függvény relatív hibája korlátlanul növekszik, míg a $g \equiv \ln$ függvény relatív hibája 0-hoz tart. Ez elvileg azt jelenti, hogy nagy x-ek esetén az $\exp(x)$ kiszámítása tetszőlegesen pontatlanná válhat, míg $\ln(x)$ értékei relatíve egyre pontosabban számolhatók. Érdemes lehet az előző relatív hibakorlátokból kiszámolni az abszolút hibakorlátokat:

$$\Delta_{\exp(x)} = \delta_{\exp(x)} \cdot |\exp(x)| = \frac{\varepsilon_1}{2} x e^x,$$
$$\Delta_{\ln(x)} = \delta_{\ln(x)} \cdot |\ln(x)| = \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x = \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

A fentiek szerint az exponenciális függvény értékének abszolút hibája még a függvényértéknél is gyorsabban növekszik, míg a logaritmus függvény abszolút hibája állandó, nem növekszik együtt a függvényértékkel, ez megtekinthető a következő ábrán.



Persze a helyzet a valóságban nem ilyen egyszerű, hiszen számítógépen az exp és ln függvények értékeit hatványsoruk valamely részletösszegével szoktuk becsülni, ezért maga a függvényértékképzés is hibával terhelt művelet. Az viszont igaz, hogy nagy x-ek esetén az exponenciális függvény relatív hibája nagyobb, mint a logaritmusé. Érdemes megjegyezni, hogy egyes függvények jobban, mások kevésbé jól tűrik a hibát. A hibatűrést pedig jól jellemzi a kondíciószám.