Számítógépes Grafika

Bán Róbert
robert.ban102+cg@gmail.com

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2021-2022. tavaszi félév

Tartalom

Tartalom

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y)$

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y)$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0$

Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y)$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$, ahol általában $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintősík normálvektora (síkra merőleges vektor)

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintősík normálvektora (síkra merőleges vektor)
- Általában egységhosszú vektort szoktunk felírni

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintősík normálvektora (síkra merőleges vektor)
- Általában egységhosszú vektort szoktunk felírni
- A különböző felírásokban a (nem egységhosszú) felületi normális

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintősík normálvektora (síkra merőleges vektor)
- Általában egységhosszú vektort szoktunk felírni
- A különböző felírásokban a (nem egységhosszú) felületi normális
  - implicit: $\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix}$

Felületi normális

- A felületre pontban vett érintősík normálvektora (síkra merőleges vektor)
- Általában egységhosszú vektort szoktunk felírni
- A különböző felírásokban a (nem egységhosszú) felületi normális
  - implicit: $\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{bmatrix}$
  - parametrikus: $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{p}_u(u,v) \times \mathbf{p}_v(u,v)$

Tartalom

Bilineáris felület

- Adott négy kontrollpont, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \in \mathbb{E}^3$

Bilineáris felület

- Adott négy kontrollpont, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \in \mathbb{E}^3$
- Keressük a legegyszerűbb parametrikus felületet $[0, 1] \times [0, 1]$ felett, ami a sarokpontokban interpolálja a fenti négy pontot

Bilineáris felület

- Adott négy kontrollpont, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \in \mathbb{E}^3$
- Keressük a legegyszerűbb parametrikus felületet $[0,1] \times [0,1]$ felett, ami a sarokpontokban interpolálja a fenti négy pontot
- Három lineáris interpolációval egy egyszerű felületület kapunk:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s,t) = (1-t)((1-s)\mathbf{p}_1 + s\mathbf{p}_3) \\ +t((1-s)\mathbf{p}_2 + s\mathbf{p}_4) \end{aligned}$$

ahol $s, t \in [0,1]$.

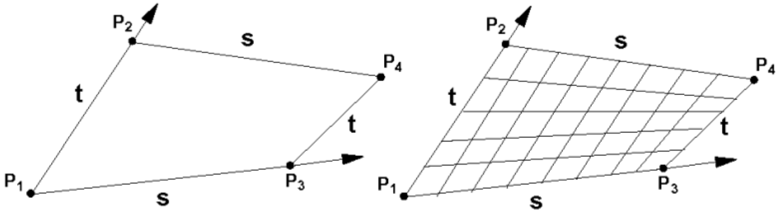
Bilineáris felület

- Adott négy kontrollpont, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \in \mathbb{E}^3$
- Keressük a legegyszerűbb parametrikus felületet $[0,1] \times [0,1]$ felett, ami a sarokpontokban interpolálja a fenti négy pontot
- Három lineáris interpolációval egy egyszerű felületület kapunk:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(s,t) = (1-t)((1-s)\mathbf{p}_1 + s\mathbf{p}_3) \\ +t((1-s)\mathbf{p}_2 + s\mathbf{p}_4)\end{aligned}$$

  ahol $s, t \in [0,1]$.
- Lényegében: két szakaszt „írtunk be” a t szerinti lineáris interpoláció képletébe

Bilineáris felület



Tartalom

Görbék mátrix alakja

- Egy n-edfokú egész polinom koordinátájú görbe hatványbázis alakban $\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i \cdot u^i, \;\; u \in \mathbb{R}$ alakú

Görbék mátrix alakja

- Egy n-edfokú egész polinom koordinátájú görbe hatványbázis alakban $\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i \cdot u^i, \ u \in \mathbb{R}$ alakú
- Figyeljünk arra, hogy $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{E}^3$ és $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, .., n$

Görbék mátrix alakja

- Egy n-edfokú egész polinom koordinátájú görbe hatványbázis alakban $\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i \cdot u^i,\ \ u \in \mathbb{R}$ alakú
- Figyeljünk arra, hogy $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{E}^3$ és $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, .., n$
- A fenti egyszerűen felírható mátrix alakban is, például harmadfokú egész polinom esetén

$$\mathbf{r}(u) = \underbrace{[u^3, u^2, u, 1]}_{\mathbf{u}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}$$

Görbék mátrix alakja – példa

- Az $y = x^2$ parabola parametrikus alakja hatványbázisban

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Görbék mátrix alakja – példa

- Az $y = x^2$ parabola parametrikus alakja hatványbázisban

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

- Mátrix alakja pedig

$$\mathbf{p}(u) = [u^2, u, 1] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$$

ahol

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Görbék mátrix alakja más bázisban

- Amennyiben ismert egy, a hatványbázisból egy másik bázisba vivő **M** transzformációs mátrix, akkor az új bázisbeli **G** görbekoordinátákkal a következő alakú a görbe:

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}}_{\mathbf{A}}$$

Görbék mátrix alakja más bázisban

- Amennyiben ismert egy, a hatványbázisból egy másik bázisba vivő **M** transzformációs mátrix, akkor az új bázisbeli **G** görbekoordinátákkal a következő alakú a görbe:

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}}_{\mathbf{A}}$$

- Itt $\mathbf{u}^T\mathbf{M}$ eredménye a másik bázis, a **G**-ben pedig a neki megfelelő adatok vannak a görbéről (pl. Bernstein bázis esetén a Bézier vezérlőpontokból áll a **G**).

Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- Például a másodfokú Bernstein bázispolinomok

$$
\begin{aligned}
B_0^2(u) &= (1-u)^2 = u^2 - 2u + 1 \\
B_1^2(u) &= 2(1-u)u = -2u^2 + 2u \\
B_2^2(u) &= u^2
\end{aligned}
$$

Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- Például a másodfokú Bernstein bázispolinomok

$$B_0^2(u) = (1-u)^2 = u^2 - 2u + 1$$
$$B_1^2(u) = 2(1-u)u = -2u^2 + 2u$$
$$B_2^2(u) = u^2$$

- Így a hatványbázisból a Bernstein bázisba vivő transzformációs mátrix alakja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- Ekkor tehát a másik bázis a képletünkből

$$[u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B_2^2(u), B_1^2(u), B_0^2(u)]$$

tehát a $\mathbf{G}$-ben a kontrollpontokat $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0$ sorrendben kell eltárolni

Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- Ekkor tehát a másik bázis a képletünkből

$$[u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B_2^2(u), B_1^2(u), B_0^2(u)]$$

  tehát a **G**-ben a kontrollpontokat $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0$ sorrendben kell eltárolni

- A görbénk alakja ekkor

$$\mathbf{r}(u) = [u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix}$$

*Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- A harmadfokú Hermite görbe $\mathbf{r}(u) = H_0^3(u)\mathbf{r}_0 + H_3^3(u)\mathbf{r}_1 + H_1^3(u)\mathbf{t}_0 + H_2^3(u)\mathbf{t}_1$ bázisára

$$H_0^3(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1 \ , \ H_1^3(u) = u^3 - 2u^2 + u$$
$$H_2^3(u) = u^3 - u^2 \ , \ H_3^3(u) = -2u^3 + 3u^2$$

*Görbék mátrix alakja más bázisban – példa

- A harmadfokú Hermite görbe
  $\mathbf{r}(u) = H_0^3(u)\mathbf{r}_0 + H_3^3(u)\mathbf{r}_1 + H_1^3(u)\mathbf{t}_0 + H_2^3(u)\mathbf{t}_1$ bázisára

$$H_0^3(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1\ ,\ \ H_1^3(u) = u^3 - 2u^2 + u$$
$$H_2^3(u) = u^3 - u^2\ ,\ \ H_3^3(u) = -2u^3 + 3u^2$$

- Ezért a harmadfokú Hermite görbe mátrix alakja a következő:

$$\mathbf{r}(u) = [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{t}_0 \\ \mathbf{t}_1 \end{bmatrix}$$
$$= [H_0^3(u), H_3^3(u), H_1^3(u), H_2^3(u)] \cdot G = \mathbf{h}^T(u) \cdot G$$

Báziskonverziók

- Amennyiben ismert egy $\mathbf{u}^T\mathbf{M}_1$ bázisban a görbénk $\mathbf{G}_1$ geometriai adatait tartalmazó tömb és ki akarjuk számítani, hogy $\mathbf{u}^T\mathbf{M}_2$ bázisban mik lesznek a görbénk $\mathbf{X}$ koordinátái, akkor megoldandó

$$\mathbf{u}^T\mathbf{M}_1\mathbf{G}_1 = \mathbf{u}^T\mathbf{M}_2\mathbf{X}$$

egyenletrendszer az ismeretlen együtthatókra $\mathbf{X}$-ből

Báziskonverziók

- Amennyiben ismert egy $\mathbf{u}^T\mathbf{M}_1$ bázisban a görbénk $\mathbf{G}_1$ geometriai adatait tartalmazó tömb és ki akarjuk számítani, hogy $\mathbf{u}^T\mathbf{M}_2$ bázisban mik lesznek a görbénk $\mathbf{X}$ koordinátái, akkor megoldandó

$$\mathbf{u}^T\mathbf{M}_1\mathbf{G}_1 = \mathbf{u}^T\mathbf{M}_2\mathbf{X}$$

  egyenletrendszer az ismeretlen együtthatókra $\mathbf{X}$-ből
- Ebből a megoldásra adódik, hogy

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{G}_1$$

Báziskonverziók – példa

- Legyen adott az előbb látott parabola $\mathbf{p}(u) = [u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$ alakja, ahol $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ feletti részét fel akarjuk írni Bézier vezérlőpontokkal

Báziskonverziók – példa

- Legyen adott az előbb látott parabola $\mathbf{p}(u) = [u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$ alakja, ahol $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ feletti részét fel akarjuk írni Bézier vezérlőpontokkal
- Kellenek tehát a $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{E}^3$ Bézier vezérlőpontok

Báziskonverziók – példa

- Legyen adott az előbb látott parabola $\mathbf{p}(u) = [u^2, u, 1] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$ alakja, ahol $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ feletti részét fel akarjuk írni Bézier vezérlőpontokkal
- Kellenek tehát a $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{E}^3$ Bézier vezérlőpontok
- Megoldandó

$$[u^2, u, 1] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} = [u^2, u, 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix}$$

Báziskonverziók – példa

- Azaz a Bézier vezérlőpontokra adódik

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix}$$

Báziskonverziók – példa

- Így a keresett vezérlőpontok a következőek:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Báziskonverziók – példa

- Így a keresett vezérlőpontok a következőek:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ell.: a $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ tényleg pontok (pont + vektor)

Báziskonverziók – példa

- Így a keresett vezérlőpontok a következőek:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ell.: a $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ tényleg pontok (pont + vektor)
- HF: kiszámolni a parabola $[-2, 2]$ feletti darabjának Bézier kontrollpontjait!

Felületek mátrix alakja

- Egy egész polinom koordinátájú négyoldalú felület hatványbázis alakban $\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{a}_{ij} u^i v^j, \ \ u, v \in \mathbb{R}$

Felületek mátrix alakja

- Egy egész polinom koordinátájú négyoldalú felület hatványbázis alakban $\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \mathbf{a}_{ij}u^i v^j, \ u,v \in \mathbb{R}$
- Figyeljünk arra, hogy $\mathbf{a}_{00} \in \mathbb{E}^3$ és $\mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{R}^3, \ (ij) \neq (00)$

Felületek mátrix alakja

- Egy egész polinom koordinátájú négyoldalú felület hatványbázis alakban $\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \mathbf{a}_{ij} u^i v^j, \ \ u,v \in \mathbb{R}$
- Figyeljünk arra, hogy $\mathbf{a}_{00} \in \mathbb{E}^3$ és $\mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{R}^3, \ (ij) \neq (00)$
- Mindkét paraméterirányban harmadfokú felületek esetén ez

$$\mathbf{r}(u,v) = \underbrace{[u^3, u^2, u, 1]}_{\mathbf{u}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{30} \\ \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{20} \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{a}_{03} & \mathbf{a}_{02} & \mathbf{a}_{01} & \mathbf{a}_{00} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v}$$

Felületek más bázisban

- A görbéknél látottakhoz hasonlóan, általános bázisban felírva egy felület mátrix alakját, a következő adódik:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{v} \ ,$$

ahol az $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ az n és m-edfokú hatvány $\rightarrow$ általános bázis konverziós mátrixok

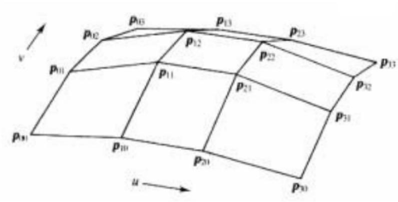
Tartalom

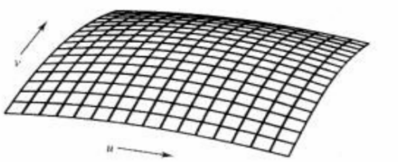
Bézier felület

- A $\mathbf{b}_{ij} \in \mathbb{E}^3$, $i = 0, .., n, j = 0, .., m$ kontrollpoligon által meghatározott $n \times m$-edfokú Bézier-felület

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{b}_{ij}$$

alakú, ahol $u, v \in [0, 1]$.





*Bézier felület – deriváltak

- A görbéknél látottakat felhasználva az u paraméterirányban:

$$\partial_u \mathbf{b}(u,v) = \sum_{j=0}^{m} \partial_u \Big(\sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) \mathbf{b}_{ij} \Big) B_j^m(v)$$

$$= n \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{ij} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v)$$

ahol $\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$

*Bézier felület – deriváltak

- Ugyanez v szerint

$$\partial_v \mathbf{b}(u,v) = m \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n} \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v)$$

ahol $\Delta^{0,1}\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}$

*Bézier felület – deriváltak

- Egy adott felületi pontban a parciális deriváltak által kifeszített síkot *érintősíknak* nevezzük

*Bézier felület – deriváltak

- Egy adott felületi pontban a parciális deriváltak által kifeszített síkot *érintősíknak* nevezzük
- Ennek normálisa – és egyúttal a felületünk normálisa az adott paraméterértékekhez tartozó pontban – pedig $[\partial_u \mathbf{p} \times \partial_v \mathbf{p}]_0$, ami a sarokpontokban szépen felírható a vezérlőpontokkal

*Bézier felület – deriváltak

A görbéknél látottakat felhasználva a deriváltak általánosan a következőképpen néznek ki:

$$\partial_{u^r,v^s}\mathbf{b}(u,v) = \frac{m!n!}{(n-r)!(m-s)!}\sum_{j=0}^{m-s}\sum_{i=0}^{n-r}\Delta^{r,s}\mathbf{b}_{ij}B_i^{n-r}(u)B_j^{m-s}(v)$$

ahol

$$\begin{aligned}\Delta^{i,j}\mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{i-1,j}\mathbf{b}_{i+1,j} - \Delta^{i-1,j}\mathbf{b}_{i,j}\\ &= \Delta^{i,j-1}\mathbf{b}_{i,j+1} - \Delta^{i,j-1}\mathbf{b}_{i,j}\end{aligned}$$

Tartalom

Spline felület

- Alacsonyabb fokszámú felületdarabokat, felületfoltokat (patch-eket) illesztünk egymáshoz

Spline felület

- Alacsonyabb fokszámú felületdarabokat, felületfoltokat (patch-eket) illesztünk egymáshoz
- Csatlakozások folytonosságára figyelni kell

Spline felület

- Alacsonyabb fokszámú felületdarabokat, felületfoltokat (patch-eket) illesztünk egymáshoz
- Csatlakozások folytonosságára figyelni kell
- Több erről: Geometriai Modellezés, Felület és Testmodellezés - MSc.

Tartalom

Metszés sugárral

- Például egérrel történő kijelölés eldöntésekor lehet szükség arra, hogy megkeressük a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugarunk metszetét a $\mathbf{b}(u, v)$ felületünkkel

Metszés sugárral

- Például egérrel történő kijelölés eldöntésekor lehet szükség arra, hogy megkeressük a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugarunk metszetét a $\mathbf{b}(u, v)$ felületünkkel
- Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldani: $\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}(u, v)$, ahol az ismeretlenek t, u, v (figyeljünk a megkötéseikre!)

Metszés sugárral

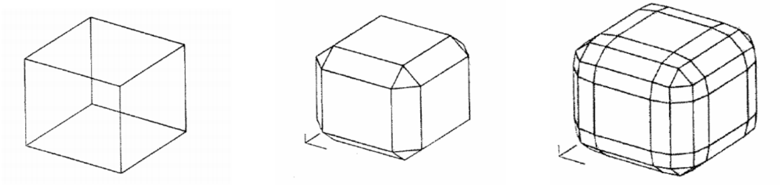
- Például egérrel történő kijelölés eldöntésekor lehet szükség arra, hogy megkeressük a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugarunk metszetét a $\mathbf{b}(u, v)$ felületünkkel
- Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldani: $\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}(u, v)$, ahol az ismeretlenek t, u, v (figyeljünk a megkötéseikre!)
- Többváltozós Newton és egyebek...

Tartalom

Tartalom

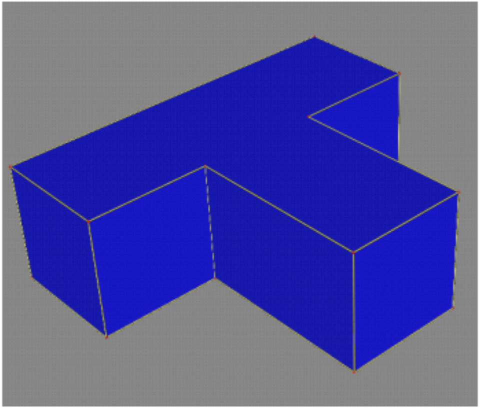
SIGGRAPH Subdivision tutorial a téma iránt mélyebben érdeklődőknek: `http://www.mrl.nyu.edu/publications/subdiv-course2000/`

Subdivision felületek – Doo-Sabin



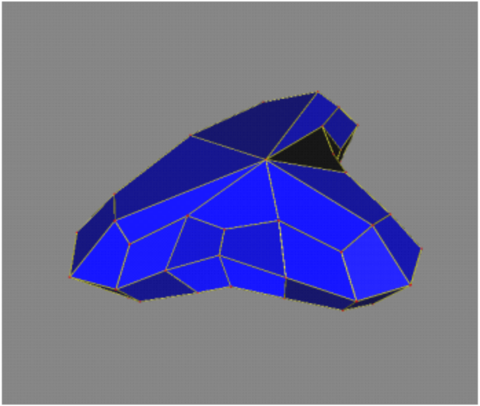
Subdivision felületek – Catmull-Clark

2001: Oscar Catmull-nak „for significant advancements to the field of motion picture rendering as exemplified in Pixar's RenderMan"



Subdivision felületek – Catmull-Clark

2001: Oscar Catmull-nak „for significant advancements to the field of motion picture rendering as exemplified in Pixar's RenderMan"



Fogalmak – séma mesh-típusa

- A legtöbb subdivision séma valamilyen reguláris felosztási/finomítási sémán alapszik

Fogalmak – séma mesh-típusa

- A legtöbb subdivision séma valamilyen reguláris felosztási/finomítási sémán alapszik
- Amikor egy séma mesh-ének típusáról beszélünk erre az őssémára gondolunk

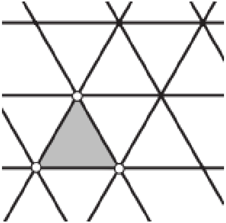
Fogalmak – séma mesh-típusa

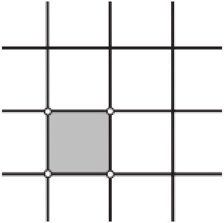
- A legtöbb subdivision séma valamilyen reguláris felosztási/finomítási sémán alapszik
- Amikor egy séma mesh-ének típusáról beszélünk erre az ősémára gondolunk
- A síkban regulárisan elhelyezett pontokat szabályos háromszögekkel, négyzetekkel, vagy szabályos hatszögekkel fedhetjük le

Fogalmak – séma mesh-típusa

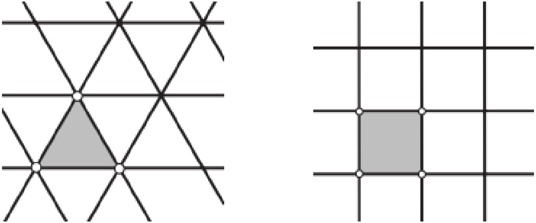
- A legtöbb subdivision séma valamilyen reguláris felosztási/finomítási sémán alapszik
- Amikor egy séma mesh-ének típusáról beszélünk erre az ősémára gondolunk
- A síkban regulárisan elhelyezett pontokat szabályos háromszögekkel, négyzetekkel, vagy szabályos hatszögekkel fedhetjük le
- Ennek megfelelően nevezünk egy sémát *háromszög*-, *négyszög*- vagy *hatszög-alapúnak* (gyakorlatban utóbbi ritka)

Mesh-típus



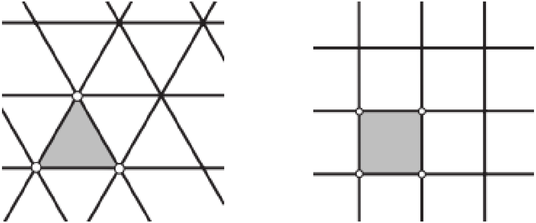


Mesh-típus



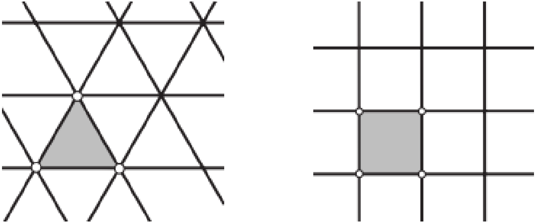
- Vigyázzunk: „szép" (teljes oldalakban illeszkedő), 6-reguláris háromszög vagy „szép", 4-reguláris négyszöghálóval nem lehet bármit lefedni degenerált esetek nélkül!

Mesh-típus



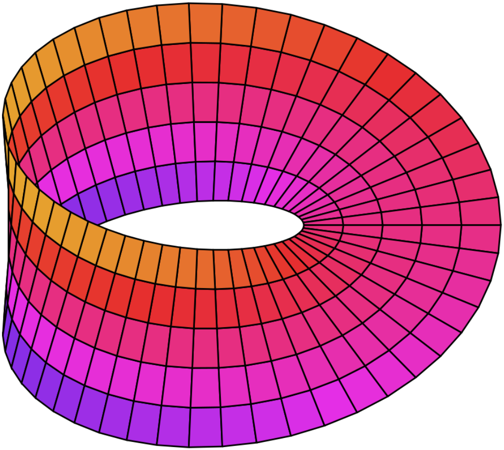
- Vigyázzunk: „szép” (teljes oldalakban illeszkedő), 6-reguláris háromszög vagy „szép”, 4-reguláris négyszöghálóval nem lehet bármit lefedni degenerált esetek nélkül!
- A fenti reguláris topológiákkal a végtelen síklap, vagy a végtelen hengerpalást, vagy pedig a tórusz topológiájának megfelelő felületek írhatóak le

Mesh-típus

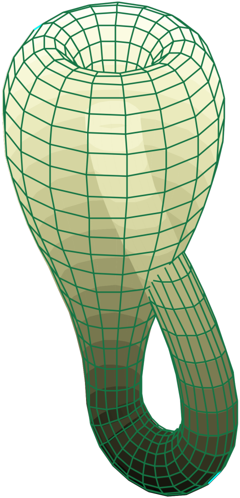


- Vigyázzunk: „szép” (teljes oldalakban illeszkedő), 6-reguláris háromszög vagy „szép”, 4-reguláris négyszöghálóval nem lehet bármit lefedni degenerált esetek nélkül!
- A fenti reguláris topológiákkal a végtelen síklap, vagy a végtelen hengerpalást, vagy pedig a tórusz topológiájának megfelelő felületek írhatóak le
- Nem fedhetők le például a gömb topológiájának megfelelő felületek

Mesh-típus – Möbius



Mesh-típus – Klein-kancsó



Fogalmak – face-split (primál)

- A mesh-típusának megfelelő lapok mindegyikét négyfelé osztjuk

Fogalmak – face-split (primál)

- A mesh-típusának megfelelő lapok mindegyikét négyfelé osztjuk
- Az előző lépés mesh-ének csúcspontjait megőrizzük (de módosíthatjuk a pozíciójukat – ha változtatás nélkül vesszük át a pontokat, akkor interpoláló sémáról beszélünk)

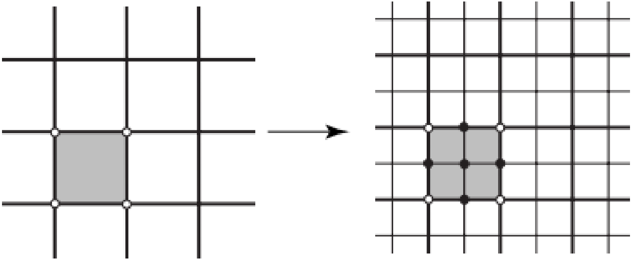
Fogalmak – face-split (primál)

- A mesh-típusának megfelelő lapok mindegyikét négyfelé osztjuk
- Az előző lépés mesh-ének csúcspontjait megőrizzük (de módosíthatjuk a pozíciójukat – ha változtatás nélkül vesszük át a pontokat, akkor interpoláló sémáról beszélünk)
- Új csúcspontokat szúrunk be minden élre (kettéosztva ezzel őket)

Fogalmak – face-split (primál)

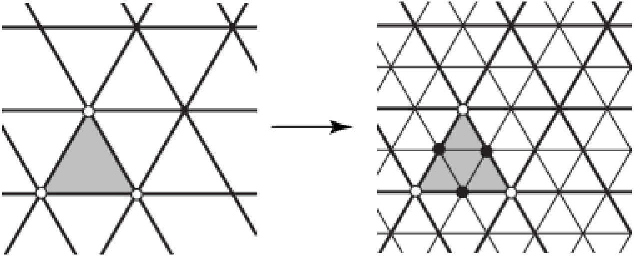
- A mesh-típusának megfelelő lapok mindegyikét négyfelé osztjuk
- Az előző lépés mesh-ének csúcspontjait megőrizzük (de módosíthatjuk a pozíciójukat – ha változtatás nélkül vesszük át a pontokat, akkor interpoláló sémáról beszélünk)
- Új csúcspontokat szúrunk be minden élre (kettéosztva ezzel őket)
- Négyszög alapú sémáknál a lapból is származtatunk egy új csúcspontot

Face-split 4-reguláris mesh-en



Face split for quads

Face-split 6-reguláris mesh-en



Face split for triangles

Fogalmak – páros csúcsok (even vertices)

- Laposztó (face-split) sémáknál a durvább felbontású mesh csúcspontjai megfelelnek a finomabb mesh csúcspontjainak

Fogalmak – páros csúcsok (even vertices)

- Laposztó (face-split) sémáknál a durvább felbontású mesh csúcspontjai megfelelnek a finomabb mesh csúcspontjainak
- Ezek a páros csúcsok

Fogalmak – páratlan csúcsok (odd vertices)

- Az újonnan létrejött csúcsok, amelyek nem feleltethetőek meg a finomítás előtti szint egyetlen csúcspontjának sem

Fogalmak – vertex-split (duál)

- Ilyenkor minden csúcspontból keletkezik egy új csúcs az összes, eredeti csúcsra illeszkedő lap mentén

Fogalmak – vertex-split (duál)

- Ilyenkor minden csúcspontból keletkezik egy új csúcs az összes, eredeti csúcsra illeszkedő lap mentén
- A régi lapból új lap származik közvetlenül

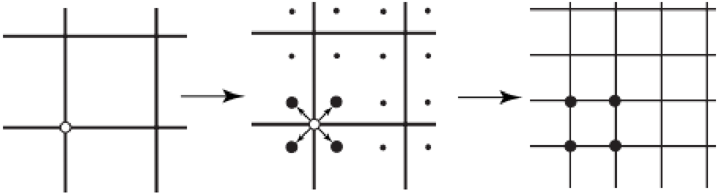
Fogalmak – vertex-split (duál)

- Ilyenkor minden csúcspontból keletkezik egy új csúcs az összes, eredeti csúcsra illeszkedő lap mentén
- A régi lapból új lap származik közvetlenül
- Az élek mentén új lapok születnek (az élek végpontjaiból az él által szétválasztott két lapra születő új csúcspontokat összekötve)

Fogalmak – vertex-split (duál)

- Ilyenkor minden csúcspontból keletkezik egy új csúcs az összes, eredeti csúcsra illeszkedő lap mentén
- A régi lapból új lap származik közvetlenül
- Az élek mentén új lapok születnek (az élek végpontjaiból az él által szétválasztott két lapra születő új csúcspontokat összekötve)
- A régi csúcspontok helyett egy új lap születik, a csúcsból született új csúcspontokkal

Vertex-split 4-reguláris mesh-en



Vertex split for quads

Fogalmak – face- és vertex-split

- Reguláris négyszöghálón mindkét esetben 4-reguláris lesz az új háló is $\rightarrow$ tartja a topológiát

Fogalmak – face- és vertex-split

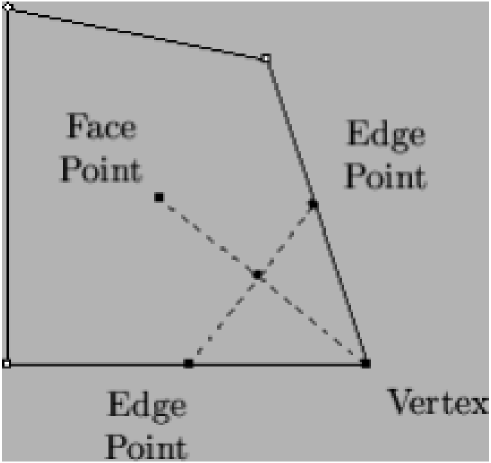
- Reguláris négyszöghálón mindkét esetben 4-reguláris lesz az új háló is $\rightarrow$ tartja a topológiát
- Figyeljünk: reguláris háromszöghálóknál vertex-split után három-, négy- és hatszögeket is kapunk!

Tartalom

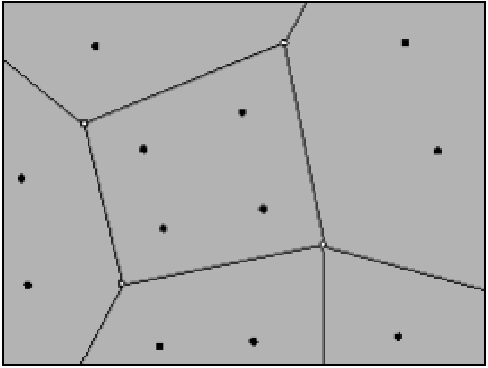
Doo-Sabin

Eredeti cikk:
http://trac2.assembla.com/DooSabinSurfaces/export/12/trunk/docs/Doo%201978%20Subdivision%20algorithm.pdf
Rövid leírás: http://www.cs.unc.edu/~dm/UNC/COMP258/LECTURES/Doo-Sabin.pdf

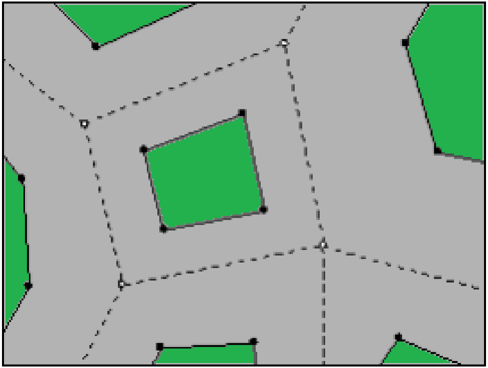
Doo-Sabin



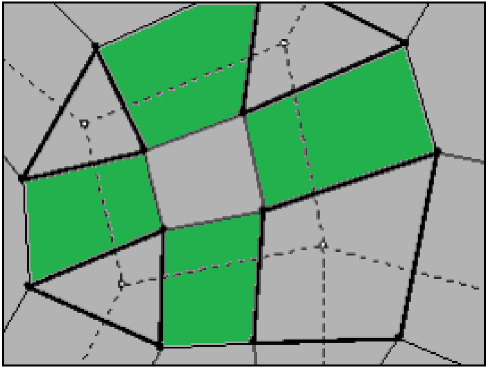
Doo-Sabin – új pontok számítása



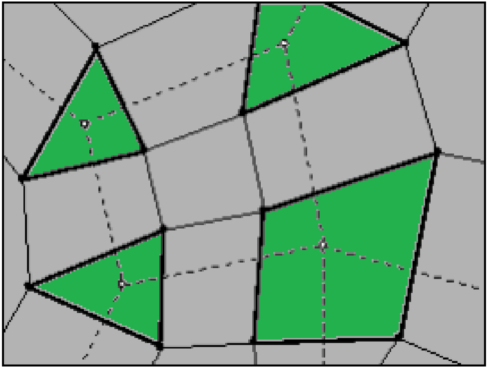
Doo-Sabin – lapokból származó lapok



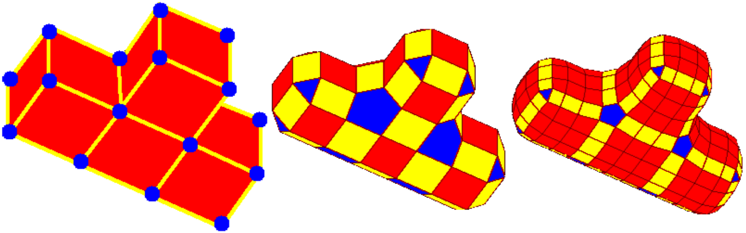
Doo-Sabin – Élekből származó lapok



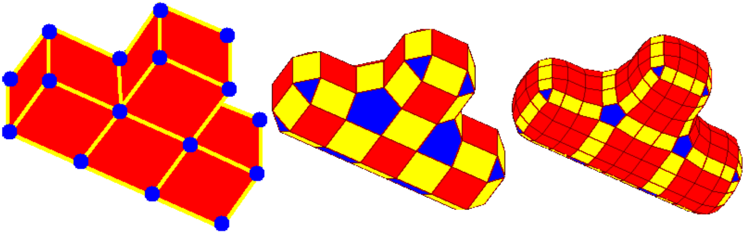
Doo-Sabin – Csúcsokból származó lapok



Doo-Sabin



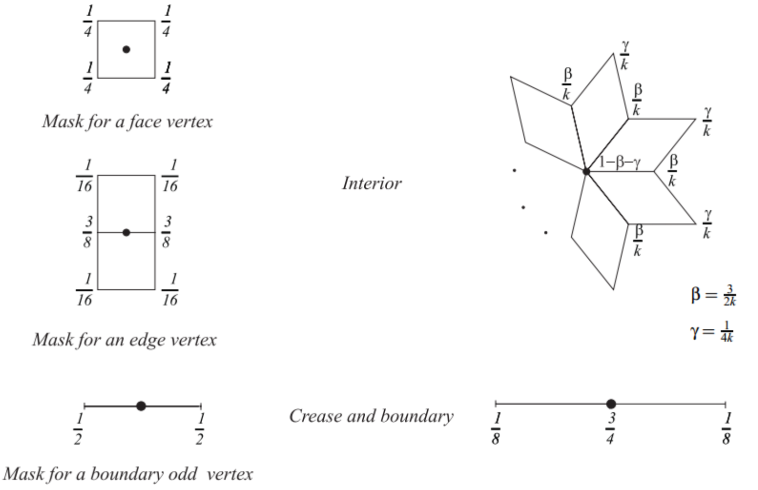
Doo-Sabin



Vigyázzunk, a kialakuló sokszögek nem biztos, hogy síkbeliek!

Tartalom

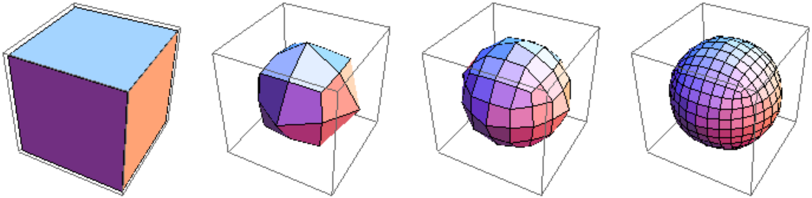
Catmull-Clark



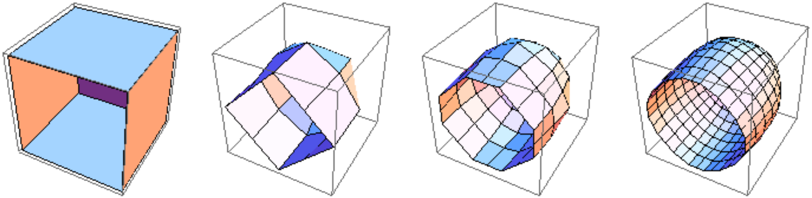
a. Masks for odd vertices

b. Mask for even vertices

Catmull-Clark



Catmull-Clark – boundary



Catmull-Clark – crease

Catmull-Clark with Sharp Creases