

# **A számításelmélet alapjai I.**

## **3. előadás**

**előadó: Tichler Krisztián**  
**[ktichler@inf.elte.hu](mailto:ktichler@inf.elte.hu)**

# Lineáris grammatikák

## Definíció

Egy  $G = \langle N, T, P, S \rangle$  környezetfüggetlen grammatikát **lineárisnak** nevezünk, ha minden szabálya vagy

- a)  $A \rightarrow u, A \in N, u \in T^*$  vagy
- b)  $A \rightarrow u_1 B u_2$  alakú, ahol  $A, B \in N$  és  $u_1, u_2 \in T^*$ .

A  $G$  lineáris grammatikát **bal-lineárisnak** nevezzük, ha minden b) alakú szabályában  $u_1 = \varepsilon$ .

A  $G$  lineáris grammatikát **jobb-lineárisnak** mondjuk, ha minden b) alakú szabályában  $u_2 = \varepsilon$ .

**Megjegyzés:** A jobb-lineáris grammatika egy másik elnevezés a reguláris (3-típusú) grammatikákra.

## Példa:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$ | lineáris, de nem bal- és nem jobblinéaris |
| 2. $S \rightarrow Saa \mid b$           | bal-lineáris                              |
| 3. $S \rightarrow aS \mid bbS \mid c$   | jobb-lineáris                             |

# Lineáris grammatikák és nyelvek

## Definíció

Egy  $L$  nyelvet lineárisnak, bal-lineárisnak, illetve jobb-lineárisnak mondunk, ha van olyan  $G$  lineáris, bal-lineáris, illetve jobb-lineáris grammatika, amelyre  $L = L(G)$  teljesül.

**Megjegyzés:** A jobb-lineáris nyelvek tehát azonosak a reguláris (3-típusú) nyelvekkel.

## Tétel

Minden bal-lineáris grammatika reguláris (3-típusú) nyelvet generál.

# Bal- és jobblineáris nyelvek

**Bizonyítás:** Legyen  $G = \langle N, T, P, S \rangle$  bal-lineáris grammatika és legyen  $N = \{S, A_1, \dots, A_n\}$ .

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $S$  nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy  $G' = \langle N, T, P', S \rangle$  jobb-lineáris grammatikát, amelyre  $L(G) = L(G')$  teljesül.

1.  $S \rightarrow u : \in P'$  akkor és csak akkor, ha  $S \rightarrow u \in P$ ,
2.  $S \rightarrow uA_k : \in P'$  akkor és csak akkor, ha  $A_k \rightarrow u \in P$ ,
3.  $A_j \rightarrow uA_k : \in P'$  akkor és csak akkor, ha  $A_k \rightarrow A_ju \in P$ ,
4.  $A_j \rightarrow u : \in P'$  akkor és csak akkor, ha  $S \rightarrow A_ju \in P$ .

( $u \in T^*$  minden a 4 pontban)

Megmutatjuk, hogy  $L(G) = L(G')$ .

# Bal- és jobblineáris nyelvek

$L(G) \subseteq L(G')$ :

Legyen  $w \in L(G)$ .

|                                 |                   |                                |
|---------------------------------|-------------------|--------------------------------|
| $S \rightarrow u : \in P'$      | $\leftrightarrow$ | $S \rightarrow u \in P,$       |
| $S \rightarrow uA_k : \in P'$   | $\leftrightarrow$ | $A_k \rightarrow u \in P,$     |
| $A_j \rightarrow uA_k : \in P'$ | $\leftrightarrow$ | $A_k \rightarrow A_j u \in P,$ |
| $A_j \rightarrow u : \in P'$    | $\leftrightarrow$ | $S \rightarrow A_j u \in P.$   |

**1. eset** Ha  $S \rightarrow w \in P$ , akkor  $S \rightarrow w \in P'$ , így  $w \in L(G')$ .

**2. eset** Egyébként  $w$ -hez van  $G$ -ben egy

$$S \Rightarrow A_{i_1} w_1 \Rightarrow A_{i_2} w_2 w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_{i_{m-1}} w_{m-1} \dots w_1 \Rightarrow w_m w_{m-1} \dots w_1 = w$$

levezetés ( $m \geq 2$ ). Azonban ekkor  $G'$ -ben létezik egy

$$S \Rightarrow w_m A_{i_{m-1}} \Rightarrow w_m w_{m-1} A_{i_{m-2}} \Rightarrow \dots \Rightarrow w_m \dots w_2 A_{i_1} \Rightarrow w_m \dots w_1 = w$$

levezetés, azaz  $w \in L(G')$ .

$L(G') \subseteq L(G)$ :

Következik a szimmetriából.

# Bal- és jobblineáris nyelvek

**Példa:**

$$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}.$$

|                                 |                   |                                |
|---------------------------------|-------------------|--------------------------------|
| $S \rightarrow u : \in P'$      | $\leftrightarrow$ | $S \rightarrow u \in P,$       |
| $S \rightarrow uA_k : \in P'$   | $\leftrightarrow$ | $A_k \rightarrow u \in P,$     |
| $A_j \rightarrow uA_k : \in P'$ | $\leftrightarrow$ | $A_k \rightarrow A_j u \in P,$ |
| $A_j \rightarrow u : \in P'$    | $\leftrightarrow$ | $S \rightarrow A_j u \in P.$   |

$P$

$S \rightarrow \varepsilon$

$S \rightarrow A_1 b$

$S \rightarrow A_2 a$

$A_1 \rightarrow A_1 b$

$A_1 \rightarrow A_2$

$A_2 \rightarrow A_2 a$

$A_2 \rightarrow \varepsilon$

$P'$

$S \rightarrow \varepsilon$

$A_1 \rightarrow b$

$A_2 \rightarrow a$

$A_1 \rightarrow bA_1$

$A_2 \rightarrow A_1$

$A_2 \rightarrow aA_2$

$S \rightarrow A_2$

$$S \Rightarrow A_1 b \Rightarrow A_2 b \Rightarrow A_2 ab \Rightarrow ab.$$

$$S \Rightarrow A_2 \Rightarrow aA_2 \Rightarrow aA_1 \Rightarrow ab.$$

## $\mathcal{L}_3$ tükrözésre való zártsága

**Állítás:** Minden  $G = \langle N, T, P, S \rangle$  jobb-lineáris grammatikához meg tudunk konstruálni egy  $G'$  bal-lineáris grammatikát, amely  $L(G)$  tükörképét generálja.

**Bizonyítás:**  $G'$ -ben vegyünk a  $G$ -beli  $A \rightarrow u$  és  $A \rightarrow uB$  alakú szabályok helyett az  $A \rightarrow u^{-1}$  illetve  $A \rightarrow Bu^{-1}$  szabályokat ( $A, B \in N, u \in T^*$ ).

### Következmény:

1.  $\mathcal{L}_3$  zárt a tükrözés (megfordítás) műveletére nézve.
2. Minden reguláris nyelv generálható bal-lineáris grammatikával.

### Bizonyítás:

1. Ha  $L \in \mathcal{L}_3$ , akkor az állítás miatt  $L^{-1}$  generálható egy bal-lineáris  $G$  grammatikával. Az előző tétel alapján  $L^{-1} \in \mathcal{L}_3$ .
2. Ha  $L \in \mathcal{L}_3$ , akkor az épp most bizonyított **1.** miatt  $L^{-1} \in \mathcal{L}_3$  is igaz, így  $L^{-1}$  jobb-lineáris grammatikával generálható. Az állítás miatt  $(L^{-1})^{-1} = L$  bal-lineáris grammatikával generálható.

# 3-típusú grammatikák normálformája

## Tétel

Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy

- ▶  $X \rightarrow aY$ ,  $X, Y \in N$ ,  $a \in T$  vagy
- ▶  $X \rightarrow \varepsilon$  alakúak, ahol  $X \in N$ .

**Bizonyítás:** Legyen  $G = \langle N, T, P, S \rangle$  3-típusú grammatika. Ismeretes, hogy  $G$  szabályai vagy

- a)  $A \rightarrow uB$  vagy
- b)  $A \rightarrow u$  alakúak ( $A, B \in N$ ,  $u \in T^*$ ).

A  $G$  grammatikát a megfelelő alakra transzformáljuk, figyelve arra hogy az eredmény  $G$ -vel ekvivalens legyen.

A transzformáció lépései:

- 1. lépés:** Hosszredukció
- 2. lépés:** Láncmentesítés



# 3-típusú grammatikák normálformája

## 1. lépés: Hosszredukció

### a) típusú szabályok:

Ha  $A \rightarrow uB \in P$  ( $A, B \in N, u \in T^*$ ),  $|u| > 1$  és  $u = a_1 \cdots a_n, n \geq 2$ , akkor helyettesítsük az  $A \rightarrow a_1 \cdots a_n B$  szabályt az  $\{A \rightarrow a_1 Z_1, Z_1 \rightarrow a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \rightarrow a_n B\}$  szabályhalmazzal, ahol  $Z_1, \dots, Z_{n-1}$  új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok.

### b) típusú szabályok:

Hasonlóan, Ha  $A \rightarrow u \in P$  ( $A \in N, u \in T^*$ ),  $|u| > 0$  és  $u = a_1 \cdots a_m, m \geq 1$ , akkor helyettesítsük az  $A \rightarrow a_1 \cdots a_m$  szabályt az  $\{A \rightarrow a_1 Y_1, Y_1 \rightarrow a_2 Y_2, \dots, Y_{m-1} \rightarrow a_m E, E \rightarrow \varepsilon\}$  szabályhalmazzal, ahol  $Y_1, \dots, Y_{m-1}$  új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok.  $E$  szintén új nemterminális, de elég a b) típusú szabályok hosszredukciójához egy közös új  $\varepsilon$  szabály.

Az eddigi szavakat az átalakítás után is generálni lehet. Mivel az új nemterminálisok szabályonként egyediek, így nem lehetséges az eddigieken felül további szó generálása.

# 3-típusú grammatikák normálformája

## 2. lépés: Láncmentesítés

A hosszredukció után kapott  $P_1$  szabályhalmaz elemei  $X \rightarrow aY, X \rightarrow Y, X \rightarrow \varepsilon$  alakúak, ahol  $X, Y \in N$  és  $a \in T$ . Már csak az  $X \rightarrow Y$  alakú, ún. láncszabályokat kell eliminálni. Jelölje  $P_0$  a  $P_1$ -beli láncszabályok halmazát.

Első lépésben meghatározzuk minden  $A \in N$  esetén a  $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$  halmazokat.

$H(A)$  hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a  $H_i(A)$  ( $i \geq 0$ ) halmazokat az alábbiak szerint:

$$H_0(A) := \{A\}$$

$$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \rightarrow B \in P\}.$$

$$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \dots \subseteq H_k(A) \subseteq \dots \subseteq N$$

$$k := \min\{0 \leq i \leq n-1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}.$$

$$H(A) := H_k(A).$$

$$P' := \{A \rightarrow w \mid \exists B \in H(A), \text{ amelyre } B \rightarrow w \in P\} \setminus P_0.$$

### 3-típusú grammatikák normálformája

**Példa:**

$$S \rightarrow abS$$

$$S \rightarrow B$$

$$B \rightarrow bB$$

$$B \rightarrow V$$

$$V \rightarrow aa$$

$$V \rightarrow b$$

**1. lépés:** Hosszredukció

$$S \rightarrow aZ_1 \quad Z_1 \rightarrow bS$$

$$S \rightarrow B$$

$$B \rightarrow bB$$

$$B \rightarrow V$$

$$V \rightarrow aZ_2 \quad Z_2 \rightarrow aE$$

$$V \rightarrow bE \quad E \rightarrow \varepsilon$$

**2. lépés:** Láncmentesítés

$$S \rightarrow aZ_1 \quad Z_1 \rightarrow bS$$

$$S \rightarrow B$$

$$B \rightarrow bB$$

$$B \rightarrow V$$

$$V \rightarrow aZ_2 \quad Z_2 \rightarrow aE$$

$$V \rightarrow bE \quad E \rightarrow \varepsilon$$

$$S \rightarrow aZ_1 \quad Z_1 \rightarrow bS$$

$$S \rightarrow bB$$

$$S \rightarrow aZ_2 \quad S \rightarrow bE$$

$$B \rightarrow bB$$

$$B \rightarrow aZ_2 \quad B \rightarrow bE$$

$$V \rightarrow aZ_2 \quad Z_2 \rightarrow aE$$

$$V \rightarrow bE \quad E \rightarrow \varepsilon$$

$$H_0(X) = H_1(X) = H(X) = \{X\} \quad (X \in \{V, Z_1, Z_2, E\})$$

$$H_0(B) = \{B\}, H_1(B) = H_2(B) = H(B) = \{B, V\}.$$

$$H_0(S) = \{S\}, H_1(S) = \{S, B\}, H_2(S) = H_3(S) = H(S) = \{S, B, V\}.$$

# Reguláris kifejezések

## Motiváció:

Vegyük észre, hogy minden véges nyelv reguláris. Tudjuk továbbá, hogy az  $\mathcal{L}_3$  nyelvosztály (a reguláris nyelvek osztálya) zárt az unió, a konkatenáció és az iteratív lezárt műveletekre nézve.

Következésképpen, kiindulva véges számú véges nyelvből és az előzőekben felsorolt, ún. reguláris műveleteket véges sokszor alkalmazva reguláris nyelvet kapunk.

Kérdés az, hogy vajon ezzel az eljárással minden reguláris nyelvet elő tudunk-e állítani, azaz, ez a módszer elégséges-e az  $\mathcal{L}_3$  nyelvosztály leírására?

# Reguláris kifejezések

## Definíció

Legyenek  $V$  és  $V' = \{\emptyset, \varepsilon, \cdot, +, *, (, )\}$  diszjunkt ábécék. A  $V$  ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1.  $\emptyset$  reguláris kifejezés  $V$  felett,
2.  $\varepsilon$  reguláris kifejezés  $V$  felett,
3.  $a$  reguláris kifejezés  $V$  felett, ha  $a \in V$ ,
4. Ha  $R$  reguláris kifejezés  $V$  felett, akkor  $R^*$  is reguláris kifejezés  $V$  felett,
5. Ha  $Q$  és  $R$  reguláris kifejezések  $V$  felett, akkor  $(Q \cdot R)$  is,
6. Ha  $Q$  és  $R$  reguláris kifejezések  $V$  felett, akkor  $(Q + R)$  is.

# Reguláris kifejezések

Minden egyes  $R$  reguláris kifejezés egy-egy  $L(R)$ -rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

## Definíció

1.  $L(\emptyset) := \emptyset$ ,
2.  $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$ ,
3.  $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$ ,
4.  $L(R^*) := L(R)^*$ , ha  $R$  reguláris kifejezés,
5.  $L(Q \cdot R) := L(Q)L(R)$ , ha  $Q, R$  reguláris kifejezések,
6.  $L(Q + R) := L(Q) \cup L(R)$ , ha  $Q, R$  reguláris kifejezések.

Azaz a  $*$ ,  $\cdot$  és  $+$  szimbólumok jelölik rendre a lezárt, a konkatenáció és az unió műveleteket jelölik.

**Megjegyzés:**  $(Q + R)$  helyett használatosak még a  $(Q | R)$  illetve a  $(Q \cup R)$  jelölések is.

# Reguláris kifejezések

$R$ -et és  $L(R)$ -et sokszor azonosítjuk.

Például írunk olyat, hogy  $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Legyen  $P$ ,  $Q$  és  $R$  reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1.  $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

2.  $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$

3.  $P + Q = Q + P$

4.  $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$

5.  $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$

6.  $P^* = \varepsilon + P \cdot P^*$

7.  $\varepsilon \cdot P = P \cdot \varepsilon = P$

8.  $P^* = (\varepsilon + P)^*$

9.  $P \cdot \emptyset = \emptyset \cdot P = \emptyset$

# Reguláris kifejezések

A műveletek precedenciasorrendje  $*$ ,  $\cdot$ ,  $+$ , ennek és az asszociatív szabályok figyelembevételével bizonyos zárójelpárok elhagyhatók.

## Példa:

Az  $(a + b)a^*$  és  $aa^* + ba^*$  reguláris kifejezések által leírt nyelv ugyanaz:  $\{aa^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{ba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Viszont  $(a + b)a^* \neq a + ba^*$ , hiszen az utóbbi által leírt nyelv  $\{a, b, ba, ba^2, ba^3, \dots\}$ .



# Reguláris kifejezések – Arden tétele

Az alábbi tételt később, a reguláris kifejezések véges automatákkal való kapcsolatának vizsgálatakor fogjuk használni:

## Arden tétele

Adottak az  $R$  és  $Q$  reguláris kifejezések. A  $P = R + P \cdot Q$  egyenletnek  $P$ -re vonatkozó megoldása  $P = R \cdot Q^*$ . Amennyiben  $\varepsilon \notin Q$ , akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

**Példa:** A  $P = ab^* + Pbc^*$  egyenlet egyértelmű megoldása  $P = ab^*(bc^*)^*$ .

## Bizonyítás:

(1)  $P = R \cdot Q^*$  megoldás:

$$\begin{aligned} R + P \cdot Q &= R + (R \cdot Q^*) \cdot Q = R + R \cdot (Q \cdot Q^*) = \\ &= R \cdot (\varepsilon + Q \cdot Q^*) = R \cdot Q^* = P. \end{aligned}$$

# Reguláris kifejezések – Arden tétele

(2) A megoldás egyértelműsége:

$P = R + P \cdot Q = R + (R + P \cdot Q) \cdot Q = R + RQ + PQ^2 = \dots = R + RQ + \dots RQ^n + PQ^{n+1}$ , ahol  $n$  tetszőleges nagy lehet, azaz

$$P = R(\varepsilon + Q + \dots Q^n) + PQ^{n+1}. \quad (*)$$

Legyen  $w \in P$  és  $n = |w|$  az előző (\*) képletben. Mivel  $\varepsilon \notin Q$  ezért  $w \notin PQ^{n+1}$  (minden szava legalább  $n + 1$  hosszú), tehát  $w \in R(\varepsilon + Q + \dots + Q^n) \subseteq RQ^*$ .

Fordítva, ha  $w \in RQ^*$ , akkor  $\exists n \in \mathbb{N}$ , hogy  $w \in RQ^n$ , azaz benne van (\*) jobboldalában, azaz  $P$ -ben is.

Tehát csak  $P = R \cdot Q^*$  lehetséges.

# Reguláris kifejezések leíró ereje

## Tétel

Minden reguláris kifejezés egy reguláris (3-típusú) nyelvet jelöl, és megfordítva, minden reguláris nyelvhez megadható egy, ezen nyelvet jelölő reguláris kifejezés.

## Bizonyítás:

1. Az, hogy reguláris kifejezések csak reguláris nyelvet jelölhetnek következik az  $\emptyset$ ,  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{a\}$  ( $a \in V$ ) nyelvek reguláris voltából és  $\mathcal{L}_3$  reguláris műveletekre való zártságából.
2. Megmutatjuk, hogy minden  $L$  reguláris nyelvhez, amelyet a  $G = \langle N, T, P, S \rangle$  normálformában adott reguláris grammatika generál, meg tudunk konstruálni egy reguláris kifejezést, amely az  $L$  nyelvet jelöli.

# Reguláris kifejezések leíró ereje

Legyen  $N = \{A_1, \dots, A_n\}$ ,  $n \geq 1$ ,  $S = A_1$ . ( $G$  minden szabálya vagy  $A_i \rightarrow aA_j$  vagy  $A_i \rightarrow \varepsilon$  alakú, ahol  $a \in T$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .)

Azt mondjuk, hogy az  $A_i \Rightarrow^* uA_j$  ( $u \in T^*$ ) levezetés **érinti** az  $A_m$  nemterminálist, ha  $A_m$  előfordul valamely közbülső mondatformában az  $A_i \Rightarrow^* uA_j$  levezetésben.

Az  $A_i \Rightarrow^* uA_j$  levezetést  **$\ell$ -megszorított** nevezzük, ha  $1 \leq m \leq \ell$  teljesül minden  $A_m$  nemterminálisra, amelyet a levezetés érint.

Definiáljuk a következő halmazokat  $0 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ -re:

$$E_{i,j}^k = \{u \in T^* \mid \text{létezik } A_i \Rightarrow^* uA_j \text{ } k\text{-megszorított levezetés}\}.$$

Az  $i \neq j$  esetben az  $E_{i,j}^0$  halmaz vagy üres vagy  $T$ -beli betűkből áll:  $a \in E_{i,j}^0$ , akkor és csak akkor, ha  $A_i \rightarrow aA_j \in P$ .

## Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha  $i = j$ , akkor  $E_{i,i}^0$  tartalmazza  $\varepsilon$ -t és nulla vagy több elemét  $T$ -nek (ha  $A_i \rightarrow aA_i \in P$ ).

$k$ -ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Látható, hogy  $E_{i,j}^0$  reguláris kifejezéssel jelölhető.

Tegyünk fel, hogy rögzített  $k$ -ra ( $0 < k \leq n$ ), az  $E_{i,j}^{k-1}$  nyelvek mindegyike jelölhető reguláris kifejezéssel.

Nyilvánvaló, hogy

$$E_{i,j}^k = E_{i,j}^{k-1} + E_{i,k}^{k-1} \cdot (E_{k,k}^{k-1})^* \cdot E_{k,j}^{k-1}$$

ezért az indukciós hipotézis alapján  $E_{i,j}^k$  szintén jelölhető reguláris kifejezéssel.

Legyen  $I_\varepsilon$  azon  $i$  indexek halmaza, amelyekre  $A_i \rightarrow \varepsilon \in P$ . Akkor  $L(G) = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} E_{1,i}^n$ , azaz  $L$  reguláris kifejezéssel jelölhető.

# Reguláris kifejezések leíró ereje

## 1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$ . Készítsünk 3-típusú grammatikát  $R$ -hez!

A zártsági tétel konstrukcióit alkalmazzuk.

Legyen  $R_1 = a$ ,  $R_2 = ba^*$ ,  $R_3 = R_1 + R_2$ ,  $R_4 = R_3^*$ .

$R_1 : A \rightarrow a$

$R_2 : B \rightarrow bC, C \rightarrow aC \mid \varepsilon$  (kezdőszimbólum:  $B$ )

$R_3 : D \rightarrow A \mid B, A \rightarrow a, B \rightarrow bC, C \rightarrow aC \mid \varepsilon$   
(kezdőszimbólum:  $D$ )

$R_4 : X \rightarrow D \mid \varepsilon, D \rightarrow A \mid B, A \rightarrow a \mid aD, B \rightarrow bC, C \rightarrow aC \mid \varepsilon \mid D$   
(kezdőszimbólum:  $X$ )

$R : S \rightarrow aX, X \rightarrow D \mid \varepsilon, D \rightarrow A \mid B, A \rightarrow a \mid aD, B \rightarrow bC,$   
 $C \rightarrow aC \mid \varepsilon \mid D$  (kezdőszimbólum:  $S$ )

# Reguláris kifejezések leíró ereje

**2. Példa:** [a példában az  $R^+ := RR^*$  rövidítést használjuk]

$$A_1 \rightarrow bA_1 \mid aA_2$$

$$A_2 \rightarrow bA_1 \mid \varepsilon$$

| $E_{i,j}^0$ | $j = 1$           | $j = 2$       | $E_{i,j}^1$ | $j = 1$ | $j = 2$              |
|-------------|-------------------|---------------|-------------|---------|----------------------|
| $i = 1$     | $\varepsilon + b$ | $a$           | $i = 1$     | $b^*$   | $b^*a$               |
| $i = 2$     | $b$               | $\varepsilon$ | $i = 2$     | $b^+$   | $\varepsilon + b^+a$ |

  

| $E_{i,j}^2$ | $j = 1$                 | $j = 2$        |
|-------------|-------------------------|----------------|
| $i = 1$     | $b^* + b^*a(b^+a)^*b^+$ | $b^*a(b^+a)^*$ |
| $i = 2$     | $(b^+a)^*b^+$           | $(b^+a)^*$     |

**Például:**

$$E_{12}^2 = E_{12}^1 + E_{12}^1(E_{22}^1)^*E_{22}^1 =$$

$$b^*a + b^*a(\varepsilon + b^+a)^*(\varepsilon + b^+a) = b^*a + b^*a(b^+a)^* = b^*a(b^+a)^*.$$

$$L(G) = E_{12}^2 = b^*a(b^+a)^*.$$