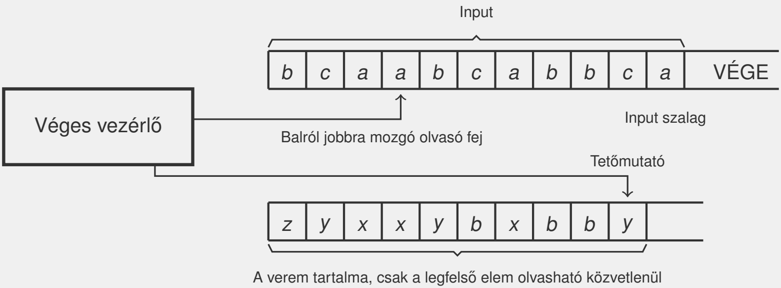
A számításelmélet alapjai I

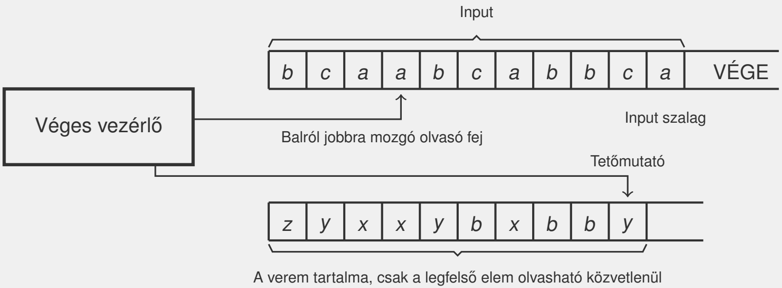
9. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Veremautomata

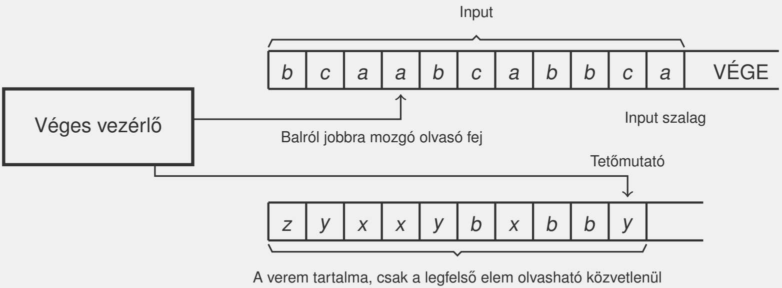


Veremautomata



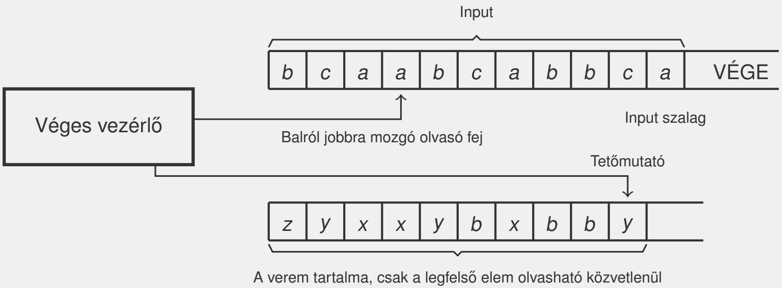
- A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.

Veremautomata



- A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.
- A verem esetében az új adat mindig a már meglévő veremtartalom tetejéhez adódik, kivétele fordított sorrendben történik.

Veremautomata



- A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.
- A verem esetében az új adat mindig a már meglévő veremtartalom tetejéhez adódik, kivétele fordított sorrendben történik.
- alapértelmezetten nemdeterminisztikus

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),
- $F \subseteq Q$ az elfogadó állapotok vagy végállapotok halmaza.

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),
- $F \subseteq Q$ az elfogadó állapotok vagy végállapotok halmaza.

Veremautomata

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),
- $F \subseteq Q$ az elfogadó állapotok vagy végállapotok halmaza.

Veremautomata

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.

Veremautomata

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.

Veremautomata

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. $(0, 1, 2, \dots$ darabot)

Veremautomata

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. $(0, 1, 2, \ldots$ darabot$)$

Veremautomata

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. $(0, 1, 2, \ldots$ darabot)
- Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε-átmenet** (ε-lépés, ε-mozgás) hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát és/vagy a verem tartalmát, hogy az inputszalagról betűt olvasna be.

Veremautomata

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. $(0, 1, 2, \ldots$ darabot)
- Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε-átmenet** (ε-lépés, ε-mozgás) hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát és/vagy a verem tartalmát, hogy az inputszalagról betűt olvasna be.

Veremautomata

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. $(0, 1, 2, \ldots$ darabot)
- Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε-átmenet** (ε-lépés, ε-mozgás) hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát és/vagy a verem tartalmát, hogy az inputszalagról betűt olvasna be.
- ε-mozgásra lehetőség van már az első inputszimbólum elolvasása előtt is illetve még az utolsó inputszimbólum elolvasása után is.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy *zqw* alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Így a q baloldalán lévő szimbólum van a verem tetején, míg a jobboldalán lévő szimbólum az input következő feldolgozandó betűje.

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Így a q baloldalán lévő szimbólum van a verem tetején, míg a jobboldalán lévő szimbólum az input következő feldolgozandó betűje.

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomata $w \in T^*$ bemenethez tartozó **kezdőkonfigurációja** $z_0 q_0 w$.

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t lecserélhetjük z'-re a verem tetején ($z' \in Z$)

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t lecserélhetjük z'-re a verem tetején ($z' \in Z$)
- $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z'-t a verem tetejére (z-re rá) tehetjük ($z' \in Z$) (PUSH művelet)

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t lecserélhetjük z'-re a verem tetején ($z' \in Z$)
- $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z'-t a verem tetejére (z-re rá) tehetjük ($z' \in Z$) (PUSH művelet)
- Egyéb lehetőségek, például $(zz'z'', r) \in \delta(z, q, t)$: $z'z''$-t a verem tetejére tehetjük, z'' lesz a tetején ($z', z'' \in Z$) .

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t lecserélhetjük z'-re a verem tetején $(z' \in Z)$
- $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z'-t a verem tetejére (z-re rá) tehetjük $(z' \in Z)$ (PUSH művelet)
- Egyéb lehetőségek, például $(zz'z'', r) \in \delta(z, q, t)$: $z'z''$-t a verem tetejére tehetjük, z'' lesz a tetején $(z', z'' \in Z)$.
- Általánosan $(w, r) \in \delta(z, q, t)$, ahol $w \in Z^*$ tetszőleges Z feletti szó. A w szó kerül z helyére és w utolsó betűje lesz a verem tetején.

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, \; r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ha A-ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor
  $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2babba$ és
  $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$ is teljesül,

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ha A-ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor
  $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2babba$ és
  $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$ is teljesül,
- ha A-ban $\delta(c, q_3, \varepsilon) = \{(dd, q_2)\}$ és $z_0cddcq_3ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_3ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2ababba$

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ha A-ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor
  $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2babba$ és
  $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$ is teljesül,
- ha A-ban $\delta(c, q_3, \varepsilon) = \{(dd, q_2)\}$ és $z_0cddcq_3ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_3ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2ababba$
- ha A-ban $\delta(c, q_5, \varepsilon) = \emptyset$ és $\delta(c, q_5, a) = \emptyset$, akkor nem létezik olyan C konfiguráció, melyre $z_0ccq_5aab \Rightarrow_A C$

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Tehát $\Rightarrow_A^* \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow^*_A \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Tehát $\Rightarrow^*_A \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa:

Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Tehát $\Rightarrow_A^* \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa:

Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor
$\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$ és
$\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cq_4ab$.
Tehát $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cddq_2ab$ és $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cq_4ab$.

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Tehát $\Rightarrow_A^* \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa:
Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor
$\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$ és
$\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cq_4ab$.
Tehát $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cddq_2ab$ és $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cq_4ab$.

Definíció

Az A veremautomata által **elfogadó állapottal (végállapottal) elfogadott nyelv**
$L(A) = \{w \in T^* \mid z_0q_0w \Rightarrow_A^* up$, ahol $u \in Z^*, p \in F\}$.

Nemdeterminisztikus működés

Legyen $a \in T$, $q \in Q$ és $z \in Z$ tetszőleges és tegyük fel, hogy $\delta(z, q, a) = \{(u_1, r_1), \ldots, (u_k, r_k)\}$, továbbá $\delta(z, q, \varepsilon) = \{(u_{k+1}, r_{k+1}), \ldots, (u_n, r_n)\}$, ahol $k \leq n$, $u_i \in Z^*$ és $r_i \in Q$, $1 \leq i \leq n$.

Nemdeterminisztikus működés

Legyen $a \in T$, $q \in Q$ és $z \in Z$ tetszőleges és tegyük fel, hogy $\delta(z, q, a) = \{(u_1, r_1), \ldots, (u_k, r_k)\}$, továbbá $\delta(z, q, \varepsilon) = \{(u_{k+1}, r_{k+1}), \ldots, (u_n, r_n)\}$, ahol $k \leq n$, $u_i \in Z^*$ és $r_i \in Q$, $1 \leq i \leq n$.

Ha az A veremautomata olvasófeje az $a \in T$ inputszimbólumon áll, a $q \in Q$ állapotban van, valamint a verem tetején levő szimbólum $z \in Z$, akkor az A veremautomata következő állapota valamelyik r_i lesz, és egyidejűleg a veremautomata z-t az u_i szóval helyettesíti, továbbá $1 \leq i \leq k$ esetén az olvasófej egy cellával jobbra lép az inputszalagon, míg $k + 1 \leq i \leq n$ esetén az olvasófej nem mozdul.

Nemdeterminisztikus működés

Legyen $a \in T$, $q \in Q$ és $z \in Z$ tetszőleges és tegyük fel, hogy $\delta(z,q,a) = \{(u_1,r_1),\ldots,(u_k,r_k)\}$, továbbá $\delta(z,q,\varepsilon) = \{(u_{k+1},r_{k+1}),\ldots,(u_n,r_n)\}$, ahol $k \leq n$, $u_i \in Z^*$ és $r_i \in Q$, $1 \leq i \leq n$.

Ha az A veremautomata olvasófeje az $a \in T$ inputszimbólumon áll, a $q \in Q$ állapotban van, valamint a verem tetején levő szimbólum $z \in Z$, akkor az A veremautomata következő állapota valamelyik r_i lesz, és egyidejűleg a veremautomata z-t az u_i szóval helyettesíti, továbbá $1 \leq i \leq k$ esetén az olvasófej egy cellával jobbra lép az inputszalagon, míg $k+1 \leq i \leq n$ esetén az olvasófej nem mozdul.

Determinisztikus automatáról akkor beszélhetünk, ha $n = 1$ minden $a \in T$, $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén.

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Észrevétel: Ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| \leq 1$ akkor a veremautomata a felismert nyelv módosulása nélkül kiegészíthető determinisztikus veremautomatává. Így tágabb értelemben az ezt a feltételt teljesítő veremautomatákat is tekinthetjük determinisztikus veremautomatának.

Alternatív reprezentációk

- **Átírási szabályokkal:**
  A δ leképezést szabályok formájában is megadhatjuk. Az így nyert szabályhalmazt M_δ -val jelöljük. Tehát ezzel az alternatív jelöléssel:

  $$zqa \to up :\in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, a),$$
  $$zq \to up :\in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, \varepsilon).$$
  $$(p, q \in Q, a \in T, z \in Z, u \in Z^*)$$

Alternatív reprezentációk

- **Átírási szabályokkal:**
  A δ leképezést szabályok formájában is megadhatjuk. Az így nyert szabályhalmazt M_δ -val jelöljük. Tehát ezzel az alternatív jelöléssel:

  $$zqa \to up :\in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, a),$$

  $$zq \to up :\in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, \varepsilon).$$

  $(p, q \in Q, a \in T, z \in Z, u \in Z^*)$

- **Átmenetdiagrammal:**

  $p, q \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, z \in Z, u \in Z^*$ esetén:

  $$q \xrightarrow{a;\, z \to u} p \qquad \iff (u, p) \in \delta(z, q, a)$$

  A végállapotokat duplán karikázzuk. A kezdőállapotot $\to$ jelöli.

Veremautomata

1. Példa: Legyen $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a,b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Veremautomata

1. Példa: Legyen $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a,b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$, ahol:

$$
\begin{array}{rl}
(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) & \forall z, t \in \{a, b\} \\
(z, q_2) \in \delta(z, q_1, c) & \forall z \in \{a, b\} \\
(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon) &
\end{array}
$$

Veremautomata

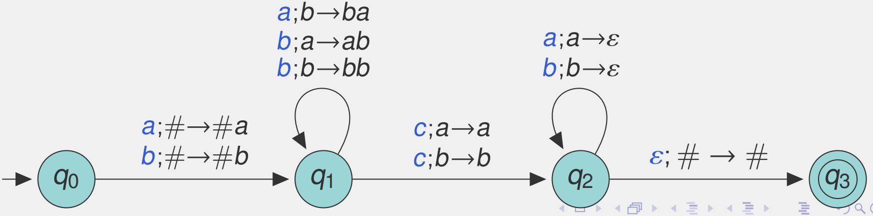
1. Példa: Legyen $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$, ahol:

$$
\begin{array}{rl}
(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) & \forall z, t \in \{a, b\} \\
(z, q_2) \in \delta(z, q_1, c) & \forall z \in \{a, b\} \\
(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon) &
\end{array}
$$

DETERMINISZTIKUS



Veremautomata

2. Példa: Legyen $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_2$.

Megoldás:

$A = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\}\rangle$, ahol:

$$
\begin{array}{rl}
(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) & \forall z, t \in \{a, b\} \\
(z, q_2) \in \delta(z, q_1, \varepsilon) & \forall z \in \{a, b\} \\
(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon) &
\end{array}
$$

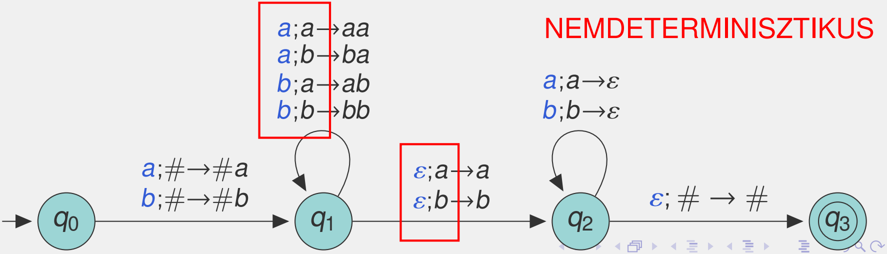
Veremautomata

2. Példa: Legyen $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_2$.

Megoldás:

$A = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\}\rangle$, ahol:

$$
\begin{aligned}
(\#t, q_1) &\in \delta(\#, q_0, t) && \forall t \in \{a, b\} \\
(zt, q_1) &\in \delta(z, q_1, t) && \forall z, t \in \{a, b\} \\
(z, q_2) &\in \delta(z, q_1, \varepsilon) && \forall z \in \{a, b\} \\
(\varepsilon, q_2) &\in \delta(t, q_2, t) && \forall t \in \{a, b\} \\
(\#, q_3) &\in \delta(\#, q_2, \varepsilon) &&
\end{aligned}
$$



Veremautomata

Nyilván a determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek halmaza részhalmaza a veremautomatával felismerhető nyelvek halmazának.

Veremautomata

Nyilván a determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek halmaza részhalmaza a veremautomatával felismerhető nyelvek halmazának.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a tartalmazás valódi (ellentétben a véges automatáknál látottakkal). A tételt nem bizonyítjuk.

Veremautomata

Nyilván a determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek halmaza részhalmaza a veremautomatával felismerhető nyelvek halmazának.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a tartalmazás valódi (ellentétben a véges automatáknál látottakkal). A tételt nem bizonyítjuk.

Tétel

A determinisztikus veremautomaták számítási ereje kisebb, mint a (nemdeterminisztikus) veremautomatáké, de nagyobb a véges automatáknál, azaz van olyan nyelv, amelyik felismerhető veremautomatával, de nem ismerhető fel determinisztikus veremautomatával.

Veremautomata

Nyilván a determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek halmaza részhalmaza a veremautomatával felismerhető nyelvek halmazának.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a tartalmazás valódi (ellentétben a véges automatáknál látottakkal). A tételt nem bizonyítjuk.

Tétel

A determinisztikus veremautomaták számítási ereje kisebb, mint a (nemdeterminisztikus) veremautomatáké, de nagyobb a véges automatáknál, azaz van olyan nyelv, amelyik felismerhető veremautomatával, de nem ismerhető fel determinisztikus veremautomatával.

Megjegyzés: Az előbb látott $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$ nyelv ilyen. Míg $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$ felismerhető determinisztikus veremautomatával, addig L_2 nem. (Ez nem következik az előzőekből.)

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv**
$N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Szintén a blokkolás elkerülése végett definiáltuk úgy a kezdőkonfigurációt, hogy a veremábécé egy eleme (z_0) már eleve a veremben van.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Megjegyzés:
Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Szintén a blokkolás elkerülése végett definiáltuk úgy a kezdőkonfigurációt, hogy a veremábécé egy eleme (z_0) már eleve a veremben van.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az elfogadó állapotok halmaza irreleváns $N(A)$ szempontjából.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle\{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \,|\, n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle\{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$$
\begin{aligned}
\$q_0 a &\to \$aq_0\\
aq_0 a &\to aaq_0\\
aq_0 b &\to q_1\\
aq_1 b &\to q_1\\
\$q_1 \quad &\to q_1.
\end{aligned}
$$

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \,|\, n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$\$ q_0 a \rightarrow \$ a q_0$
$a q_0 a \rightarrow a a q_0$
$a q_0 b \rightarrow q_1$
$a q_1 b \rightarrow q_1$
$\$ q_1 \quad \rightarrow q_1.$

A determinisztikus, $a^2 b^3$-re:

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle\{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \,|\, n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$$
\begin{aligned}
\$q_0 a &\to \$aq_0 \\
aq_0 a &\to aaq_0 \\
aq_0 b &\to q_1 \\
aq_1 b &\to q_1 \\
\$q_1 \quad &\to q_1.
\end{aligned}
$$

A determinisztikus, a^2b^3-re:

$\$q_0aabbb \Rightarrow \$aq_0abbb \Rightarrow \$aaq_0bbb \Rightarrow \$aq_1bb \Rightarrow \$q_1b \Rightarrow q_1b.$

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle\{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\ \}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \,|\, n \geq 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$$
\begin{aligned}
\$q_0 a &\rightarrow \$aq_0 \\
aq_0 a &\rightarrow aaq_0 \\
aq_0 b &\rightarrow q_1 \\
aq_1 b &\rightarrow q_1 \\
\$q_1 \quad &\rightarrow q_1.
\end{aligned}
$$

A determinisztikus, a^2b^3-re:

$\$q_0aabbb \Rightarrow \$aq_0abbb \Rightarrow \$aaq_0bbb \Rightarrow \$aq_1bb \Rightarrow \$q_1b \Rightarrow q_1b.$

A elutasítja *aabbb*-t, mivel hiába lett üres a verem, még volt hátra az inputból.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$ veremautomata. Legyen $z_0' \notin Z, q_0', q_h' \notin Q$. Az $A' = \langle Z \cup \{z_0'\}, Q \cup \{q_0', q_h'\}, T, \delta', z_0', q_0', \{\,\}\rangle$ veremautomatát a következőképpen definiáljuk:

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$ veremautomata. Legyen $z_0' \notin Z, q_0', q_h' \notin Q$. Az $A' = \langle Z \cup \{z_0'\}, Q \cup \{q_0', q_h'\}, T, \delta', z_0', q_0', \{\,\}\rangle$ veremautomatát a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{gathered}
\delta'(z_0', q_0', \varepsilon) := \{(z_0' z_0, q_0)\}, \\
\delta'(z, q, a) := \delta(z, q, a), \qquad z \in Z, q \in Q, a \in T, \\
\delta'(z, q, \varepsilon) :\supseteq \delta(z, q, \varepsilon), \qquad z \in Z, q \in Q, \\
(\varepsilon, q_h') :\in \delta'(z, q, \varepsilon), \qquad z \in Z \cup \{z_0'\}, q \in F \cup \{q_h'\}.
\end{gathered}$$

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $N(A') = L(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$ veremautomata. Legyen $z_0' \notin Z, q_0', q_h' \notin Q$. Az $A' = \langle Z \cup \{z_0'\}, Q \cup \{q_0', q_h'\}, T, \delta', z_0', q_0', \{\,\}\rangle$ veremautomatát a következőképpen definiáljuk:

$$
\begin{gathered}
\delta'(z_0', q_0', \varepsilon) := \{(z_0' z_0, q_0)\}, \\
\delta'(z, q, a) := \delta(z, q, a), \qquad z \in Z, q \in Q, a \in T, \\
\delta'(z, q, \varepsilon) :\supseteq \delta(z, q, \varepsilon), \qquad z \in Z, q \in Q, \\
(\varepsilon, q_h') :\in \delta'(z, q, \varepsilon), \qquad z \in Z \cup \{z_0'\}, q \in F \cup \{q_h'\}.
\end{gathered}
$$

A' szimulálja A működését; a $z_0' \neq z_0$ veremszimbólum azért szükséges, hogy A' ne fogadja el az olyan szavakat, amelyek kiürítik az A automata vermét anélkül, hogy teljesen feldolgoznák a bemenetet és F-beli állapotba jutnának.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*, q \in F$-re.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*, q \in F$-re. Ekkor

$$z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'} z_0' z_0 q_0 w \Rightarrow_{A'}^* z_0' uq \Rightarrow_{A'}^* z_0' q_h' \Rightarrow_{A'} q_h',$$

tehát $w \in N(A')$.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*, q \in F$-re. Ekkor

$$z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'} z_0' z_0 q_0 w \Rightarrow_{A'}^* z_0' uq \Rightarrow_{A'}^* z_0' q_h' \Rightarrow_{A'} q_h',$$

tehát $w \in N(A')$.

Legyen most $w \in N(A')$, tehát $z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'}^* p$, valamely $p \in Q \cup \{q_0', q_h'\}$-ra.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*, q \in F$-re. Ekkor

$$z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'} z_0' z_0 q_0 w \Rightarrow_{A'}^* z_0' uq \Rightarrow_{A'}^* z_0' q_h' \Rightarrow_{A'} q_h',$$

tehát $w \in N(A')$.

Legyen most $w \in N(A')$, tehát $z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'}^* p$, valamely $p \in Q \cup \{q_0', q_h'\}$-ra.

Az első lépés $z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'} z_0' z_0 q_0 w$. Mivel a z_0' szimbólum csak valamely $(\varepsilon, q_h') \in \delta'(z_0', q, \varepsilon)$ átmenetet alkalmazó lépéssel törölhető a veremből, ezért $p = q_h'$ és lennie kell olyan $q \in F, z \in Z, u \in Z^*$-nak, amelyre

$$z_0' z_0 q_0 w \Rightarrow_{A'}^* z_0' uzq \Rightarrow_{A'} z_0' uq_h' \Rightarrow_{A'}^* z_0' q_h' \Rightarrow_{A'} q_h',$$

ahol az első $\Rightarrow_{A'}^*$ csak A-beli átmeneteket használ,

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Legyen $w \in L(A)$, tehát $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uq$ valamely $u \in Z^*, q \in F$-re. Ekkor

$$z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'} z_0' z_0 q_0 w \Rightarrow_{A'}^* z_0' uq \Rightarrow_{A'}^* z_0' q_h' \Rightarrow_{A'} q_h',$$

tehát $w \in N(A')$.

Legyen most $w \in N(A')$, tehát $z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'}^* p$, valamely $p \in Q \cup \{q_0', q_h'\}$-ra.

Az első lépés $z_0' q_0' w \Rightarrow_{A'} z_0' z_0 q_0 w$. Mivel a z_0' szimbólum csak valamely $(\varepsilon, q_h') \in \delta'(z_0', q, \varepsilon)$ átmenetet alkalmazó lépéssel törölhető a veremből, ezért $p = q_h'$ és lennie kell olyan $q \in F, z \in Z, u \in Z^*$-nak, amelyre

$$z_0' z_0 q_0 w \Rightarrow_{A'}^* z_0' uzq \Rightarrow_{A'} z_0' uq_h' \Rightarrow_{A'}^* z_0' q_h' \Rightarrow_{A'} q_h',$$

ahol az első $\Rightarrow_{A'}^*$ csak A-beli átmeneteket használ, azaz $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* uzq$, tehát $w \in L(A)$.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat: Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata, amely üres veremmel az $N(A)$ nyelvet fogadja el. Megkonstruáljuk az A' veremautomatát, amely elfogadó állapottal az $L(A') = N(A)$ nyelvet fogadja el. Legyen $z_0' \notin Z$, $q_0', q_f' \notin Q$ és $A' = \langle Z \cup \{z_0'\}, Q \cup \{q_0', q_f'\}, T, \delta', z_0', q_0', \{q_f'\}\rangle$.

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat: Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{\,\} \rangle$ veremautomata, amely üres veremmel az $N(A)$ nyelvet fogadja el. Megkonstruáljuk az A' veremautomatát, amely elfogadó állapottal az $L(A') = N(A)$ nyelvet fogadja el. Legyen $z_0' \notin Z$, $q_0', q_f' \notin Q$ és $A' = \langle Z \cup \{z_0'\}, Q \cup \{q_0', q_f'\}, T, \delta', z_0', q_0', \{q_f'\} \rangle$.

$$\delta'(z_0', q_0', \varepsilon) := \{(z_0' z_0, q_0)\},$$
$$\delta'(z, q, a) := \delta(z, q, a), \quad z \in Z, q \in Q, a \in (T \cup \{\varepsilon\}),$$
$$\delta'(z_0', q, \varepsilon) := \{(z_0', q_f')\}, \quad q \in Q.$$

Végállapottal vs üres veremmel elfogadás

Lemma

Bármely A veremautomatához meg tudunk adni egy A' veremautomatát úgy, hogy $L(A') = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat: Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata, amely üres veremmel az $N(A)$ nyelvet fogadja el. Megkonstruáljuk az A' veremautomatát, amely elfogadó állapottal az $L(A') = N(A)$ nyelvet fogadja el. Legyen $z_0' \notin Z$, $q_0', q_f' \notin Q$ és $A' = \langle Z \cup \{z_0'\}, Q \cup \{q_0', q_f'\}, T, \delta', z_0', q_0', \{q_f'\}\rangle$.

$$\begin{gathered}
\delta'(z_0', q_0', \varepsilon) := \{(z_0' z_0, q_0)\}, \\
\delta'(z, q, a) := \delta(z, q, a), \quad z \in Z, q \in Q, a \in (T \cup \{\varepsilon\}), \\
\delta'(z_0', q, \varepsilon) := \{(z_0', q_f')\}, \quad q \in Q.
\end{gathered}$$

Könnyen látható, hogy valahányszor A kiüríti a vermét, akkor A' elfogadó állapotba kerül, továbbá A' csak ebben az esetben kerül elfogadó állapotba. Mivel q_f'-ből nincs átmenet $L(A') = N(A)$ teljesül.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Bármely G környezetfüggetlen grammatikához megkonstruálható egy olyan A veremautomata, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Bármely G környezetfüggetlen grammatikához megkonstruálható egy olyan A veremautomata, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ Chomsky normálformájú grammatika. Ha $\varepsilon \in L(G)$, akkor P tartalmazza az $S \to \varepsilon$ szabályt, de ebben az esetben S ne forduljon elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Bármely G környezetfüggetlen grammatikához megkonstruálható egy olyan A veremautomata, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ Chomsky normálformájú grammatika. Ha $\varepsilon \in L(G)$, akkor P tartalmazza az $S \to \varepsilon$ szabályt, de ebben az esetben S ne forduljon elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

Megkonstruálunk egy A veremautomatát, amelyre $L(A) = L(G)$ teljesül.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\} \rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\}\rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

(1) $z_0 q_0 \to z_0 q_S :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \to \varepsilon \in P$,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\}\rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

(1) $z_0 q_0 \to z_0 q_S :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \to \varepsilon \in P$,

(2) $z_0 q_0 a \to z_0 q_X :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \to a \in P$,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\}\rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

(1) $z_0 q_0 \to z_0 q_S :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \to \varepsilon \in P$,

(2) $z_0 q_0 a \to z_0 q_X :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \to a \in P$,

(3) $Z q_Y a \to ZY q_X :\in M_\delta$ minden $Z \in N \cup \{z_0\}$, $Y \in N$, $X \to a \in P$ esetén,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\} \rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

(1) $z_0 q_0 \to z_0 q_S :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \to \varepsilon \in P$,

(2) $z_0 q_0 a \to z_0 q_X :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \to a \in P$,

(3) $Z q_Y a \to Z Y q_X :\in M_\delta$ minden $Z \in N \cup \{z_0\}$,
$Y \in N$, $X \to a \in P$ esetén,

(4) $Z q_Y \to q_X :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \to ZY \in P$,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $A = \langle N \cup \{z_0\}, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{q_h\}\rangle$, ahol

$$Q = \bigcup_{X \in N} \{q_X\} \cup \{q_0, q_h\}$$

és a δ függvényt a következőképpen definiáljuk:

(1) $z_0 q_0 \to z_0 q_S :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $S \to \varepsilon \in P$,

(2) $z_0 q_0 a \to z_0 q_X :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \to a \in P$,

(3) $Z q_Y a \to Z Y q_X :\in M_\delta$ minden $Z \in N \cup \{z_0\}$,
$Y \in N$, $X \to a \in P$ esetén,

(4) $Z q_Y \to q_X :\in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $X \to ZY \in P$,

(5) $z_0 q_S \to q_h :\in M_\delta$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

M_δ szabályai lényegében a G invertált szabályai.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

M_δ szabályai lényegében a G invertált szabályai.

Például, ha $G = \langle\{S, X, Y, Z, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to XY, X \to AB, Y \to ZB, Z \to BA, A \to a, B \to b\}, S\rangle$, akkor az *abbab* **jobboldali**

$$S \Rightarrow XY \Rightarrow XZB \Rightarrow XZb \Rightarrow XBAb \Rightarrow$$

$$XBab \Rightarrow Xbab \Rightarrow ABbab \Rightarrow Abbab \Rightarrow abbab$$

levezetésének

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

M_δ szabályai lényegében a G invertált szabályai.

Például, ha $G = \langle\{S, X, Y, Z, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to XY, X \to AB, Y \to ZB, Z \to BA, A \to a, B \to b\}, S\rangle$, akkor az *abbab* **jobboldali**

$$S \Rightarrow XY \Rightarrow XZB \Rightarrow XZb \Rightarrow XBAb \Rightarrow$$

$$XBab \Rightarrow Xbab \Rightarrow ABbab \Rightarrow Abbab \Rightarrow abbab$$

levezetésének megfelel egy

$$z_0q_0abbab \Rightarrow z_0q_Abbab \Rightarrow z_0Aq_Bbab \Rightarrow z_0q_Xbab \Rightarrow z_0Xq_Bab \Rightarrow$$

$$z_0XBq_Ab \Rightarrow z_0Xq_Zb \Rightarrow z_0XZq_B \Rightarrow z_0Xq_Y \Rightarrow z_0q_S$$

redukció a veremautomatában és viszont.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

M_δ szabályai lényegében a G invertált szabályai.

Például, ha $G = \langle\{S, X, Y, Z, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to XY, X \to AB, Y \to ZB, Z \to BA, A \to a, B \to b\}, S\rangle$, akkor az $abbab$ **jobboldali**

$$S \Rightarrow XY \Rightarrow XZB \Rightarrow XZb \Rightarrow XBAb \Rightarrow$$

$$XBab \Rightarrow Xbab \Rightarrow ABbab \Rightarrow Abbab \Rightarrow abbab$$

levezetésének megfelel egy

$$z_0 q_0 abbab \Rightarrow z_0 q_A bbab \Rightarrow z_0 A q_B bab \Rightarrow z_0 q_X bab \Rightarrow z_0 X q_B ab \Rightarrow$$

$$z_0 XB q_A b \Rightarrow z_0 X q_Z b \Rightarrow z_0 XZ q_B \Rightarrow z_0 X q_Y \Rightarrow z_0 q_S$$

redukció a veremautomatában és viszont.

Általában is teljesül, hogy $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z_0 q_S \iff S \Rightarrow_G^* w$. Ez $w \neq \varepsilon$ esetén a (2),(3),(4) szabályok, $w = \varepsilon$ esetén (1) biztosítja.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $w \in L(A)$. Akkor $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* u q_h$ valamely u veremszimbólumokból álló szóra.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $w \in L(A)$. Akkor $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* u q_h$ valamely u veremszimbólumokból álló szóra.

Az M_δ konstrukciója alapján $u = \varepsilon$ kell, hogy teljesüljön, illetve, pontosabban

$$z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z_0 q_S \Rightarrow_A q_h$$

kell, hogy fennálljon. Tehát $S \Rightarrow_G^* w$ és így $L(A) \subseteq L(G)$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Legyen $w \in L(A)$. Akkor $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* u q_h$ valamely u veremszimbólumokból álló szóra.

Az M_δ konstrukciója alapján $u = \varepsilon$ kell, hogy teljesüljön, illetve, pontosabban

$$z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z_0 q_S \Rightarrow_A q_h$$

kell, hogy fennálljon. Tehát $S \Rightarrow_G^* w$ és így $L(A) \subseteq L(G)$.

Ha $S \Rightarrow_G^* w$, akkor $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* z_0 q_S$. Ekkor az (5) szabály alkalmazásával $z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* q_h$, tehát $L(G) \subseteq L(A)$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Minden A veremautomatához megadható egy környezetfüggetlen G grammatika úgy, hogy $L(G) = N(A)$ teljesül.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Minden A veremautomatához megadható egy környezetfüggetlen G grammatika úgy, hogy $L(G) = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{\,\} \rangle$ veremautomata.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Tétel

Minden A veremautomatához megadható egy környezetfüggetlen G grammatika úgy, hogy $L(G) = N(A)$ teljesül.

Bizonyításvázlat:

Legyen $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, \{\,\} \rangle$ veremautomata.

Definiáljuk a $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatikát úgy, hogy N elemei $[q, x, p]$ alakú rendezett hármasok, ahol $q, p \in Q$ és $x \in Z$. Ezen kívül bevezetjük az S új szimbólumot és legyen $N = Q \times Z \times Q \cup \{S\}$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Definiáljuk a P szabályhalmazt a következőképpen:

- Legyen $S \to [q_0, z_0, p] \in P$ minden $p \in Q$ állapotra.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Definiáljuk a P szabályhalmazt a következőképpen:

- Legyen $S \to [q_0, z_0, p] \in P$ minden $p \in Q$ állapotra.
- Ha $xqa \to y_1 \cdots y_m p_m \in M_\delta$, ahol $a \in (T \cup \{\varepsilon\})$, akkor minden $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1} \in Q$ állapotsorozatra legyen

  $$[q, x, p_0] \to a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0]$$

  szabály P -ben.

  Tehát, ha $m = 0$, azaz, az $xqa \to p_0 \in M_\delta$, akkor legyen $[q, x, p_0] \to a \in P$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Definiáljuk a P szabályhalmazt a következőképpen:

- Legyen $S \to [q_0, z_0, p] \in P$ minden $p \in Q$ állapotra.
- Ha $xqa \to y_1 \cdots y_m p_m \in M_\delta$, ahol $a \in (T \cup \{\varepsilon\})$, akkor minden $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1} \in Q$ állapotsorozatra legyen

  $$[q, x, p_0] \to a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0]$$

  szabály P -ben.

  Tehát, ha $m = 0$, azaz, az $xqa \to p_0 \in M_\delta$, akkor legyen $[q, x, p_0] \to a \in P$.
- A P szabályhalmaz ne tartalmazzon további szabályt.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \to p \in M_\delta$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \rightarrow p \in M_\delta$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb n lépésből álló levezetésre és álljon a $[q, x, p_0] \Rightarrow_G^* u$ levezetés $n + 1$ lépésből.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \to p \in M_\delta$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb n lépésből álló levezetésre és álljon a $[q, x, p_0] \Rightarrow_G^* u$ levezetés $n + 1$ lépésből.

Akkor a levezetés alakja

$$[q, x, p_0] \Rightarrow_G a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0] \Rightarrow_G^* u,$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Először az $L(G) \subseteq N(A)$ tartalmazást igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy minden x veremszimbólumra, q, p állapotpárra, valamint u inputszóra fennáll, hogyha $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ akkor, $xqu \Rightarrow_A^* p$.

A bizonyítást a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetében nyilvánvalóan $u = a \in T \cup \{\varepsilon\}$ és $xqa \to p \in M_\delta$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb n lépésből álló levezetésre és álljon a $[q, x, p_0] \Rightarrow_G^* u$ levezetés $n + 1$ lépésből.

Akkor a levezetés alakja

$$[q, x, p_0] \Rightarrow_G a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0] \Rightarrow_G^* u,$$

ahonnan az adódik, hogy léteznek olyan $u_m, u_{m-1}, \ldots, u_1 \in T^*$ szavak, amelyekre $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és $[p_i, y_i, p_{i-1}] \Rightarrow_G^* u_i$, $1 \leq i \leq m$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Az indukciós hipotézis alapján fennáll az

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}$$

redukció és G definíciója alapján

$$xqa \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m.$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Az indukciós hipotézis alapján fennáll az

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}$$

redukció és G definíciója alapján

$$xqa \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m.$$

Így

$$xqu = xqau_m \cdots u_1 \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m u_m \cdots u_1 \Rightarrow_A^* \\ y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} u_{m-1} \cdots u_1 \Rightarrow_A^* p_0.$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Az indukciós hipotézis alapján fennáll az

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}$$

redukció és G definíciója alapján

$$xqa \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m.$$

Így

$$xqu = xqau_m \cdots u_1 \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m u_m \cdots u_1 \Rightarrow_A^* y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} u_{m-1} \cdots u_1 \Rightarrow_A^* p_0.$$

Ha $u \in L(G)$, akkor van olyan $p \in Q$, amelyre

$$S \Rightarrow_G [q_0, z_0, p] \Rightarrow_G^* u,$$

ahonnan az előbb bizonyított állítás miatt $z_0 q_0 u \Rightarrow_A^* p$, azaz $u \in N(A)$ adódik.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \to p \in M_\delta$, ahonnan $[q, x, p] \to a \in P$.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \rightarrow p \in M_\delta$, ahonnan $[q, x, p] \rightarrow a \in P$.

Egynél több lépés esetén az $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukció

$$xqu = xqav \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m v \Rightarrow_A^* p$$

alakú kell, hogy legyen.

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \rightarrow p \in M_\delta$, ahonnan $[q, x, p] \rightarrow a \in P$.

Egynél több lépés esetén az $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukció

$$xqu = xqav \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m v \Rightarrow_A^* p$$

alakú kell, hogy legyen.

A veremautomaták redukciójának definíciója miatt a redukció során mindenképp elő kell forduljon egy $y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} v_1$ konfiguráció, ahol $v = u_m v_1$ valamely $u_m, v_1 \in T^*$-ra és $p_{m-1} \in Q$,

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához először megmutatjuk, hogy a $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukcióból a $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ levezetés adódik.

A bizonyítást az automata lépéseinek (átmenetek) száma szerinti indukcióval végezzük.

Egyetlen lépés esetén $xqa \to p \in M_\delta$, ahonnan $[q, x, p] \to a \in P$.

Egynél több lépés esetén az $xqu \Rightarrow_A^* p$ redukció

$$xqu = xqav \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m v \Rightarrow_A^* p$$

alakú kell, hogy legyen.

A veremautomaták redukciójának definíciója miatt a redukció során mindenképp elő kell forduljon egy $y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} v_1$ konfiguráció, ahol $v = u_m v_1$ valamely $u_m, v_1 \in T^*$-ra és $p_{m-1} \in Q$, azaz

$$xqu = xqav \Rightarrow_A y_1 \cdots y_m p_m u_m v_1 \Rightarrow_A^* y_1 \cdots y_{m-1} p_{m-1} v_1 \Rightarrow_A^* p.$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan $u_{m-1}, \ldots, u_1$ szavak, hogy $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}, \text{ ha } i = 1, \ldots m.$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan $u_{m-1}, \ldots, u_1$ szavak, hogy $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}, \ \text{ha } i = 1, \ldots m.$$

és $p_0 = p$. Az indukciós hipotézis alapján ekkor

$$[p_i, y_i, p_{i-1}] \Rightarrow_G^* u_i, \ \text{ha } i = 1, \ldots m$$

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan $u_{m-1}, \ldots, u_1$ szavak, hogy $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}, \quad \text{ha } i = 1, \ldots m.$$

és $p_0 = p$. Az indukciós hipotézis alapján ekkor

$$[p_i, y_i, p_{i-1}] \Rightarrow_G^* u_i, \quad \text{ha } i = 1, \ldots m$$

és a G grammatika definíciója alapján

$$[q, x, p] = [q, x, p_0] \Rightarrow_G a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0]$$

teljesül

Veremautomaták és környezetfüggetlen grammatikák

Folytatva a gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy vannak olyan $u_{m-1}, \ldots, u_1$ szavak, hogy $u = au_m u_{m-1} \cdots u_1$ és

$$y_i p_i u_i \Rightarrow_A^* p_{i-1}, \text{ ha } i = 1, \ldots m.$$

és $p_0 = p$. Az indukciós hipotézis alapján ekkor

$$[p_i, y_i, p_{i-1}] \Rightarrow_G^* u_i, \text{ ha } i = 1, \ldots m$$

és a G grammatika definíciója alapján

$$[q, x, p] = [q, x, p_0] \Rightarrow_G a[p_m, y_m, p_{m-1}] \cdots [p_1, y_1, p_0]$$

teljesül, ahonnan $[q, x, p] \Rightarrow_G^* u$ következik.

Így, ha $u \in N(A)$, akkor $z_0 q_0 u \Rightarrow_A^* p$ valamely p állapotra, és így az imént bizonyított állítás alapján $S \Rightarrow_G [q_0, z_0, p] \Rightarrow_G^* u$, azaz, $N(A) \subseteq L(G)$.

Veremautomaták számítási ereje

Tehát beláttuk a következőt:
Bármely L nyelvre ekvivalensek a következő állítások

- L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható

Veremautomaták számítási ereje

Tehát beláttuk a következőt:
Bármely L nyelvre ekvivalensek a következő állítások

- L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető

Veremautomaták számítási ereje

Tehát beláttuk a következőt:
Bármely L nyelvre ekvivalensek a következő állítások

- L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával üres veremmel felismerhető

Veremautomaták számítási ereje

Tehát beláttuk a következőt:
Bármely L nyelvre ekvivalensek a következő állítások

- L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával üres veremmel felismerhető

Másrészt létezik olyan környezetfüggetlen nyelv, ami nem ismerhető fel determinisztikus veremautomatával.