

# Numerikus módszerek C

## 10. előadás: Csebisev polinomok

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései
- 3 A Lagrange-interpoláció öröklött hibája
- 4 Inverz interpoláció

- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései
- 3 A Lagrange-interpoláció öröklött hibája
- 4 Inverz interpoláció

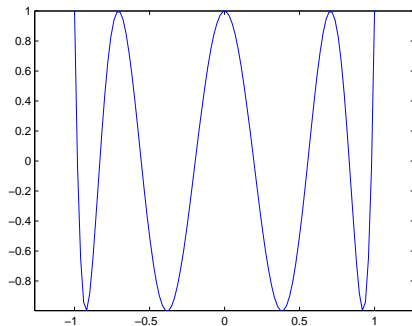
## **Definíció:** Csebisev-polinom

A  $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$ ,  $x \in [-1; 1]$  függvényt  $n$ -edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

## Definíció: Csebisev-polinom

A  $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$ ,  $x \in [-1; 1]$  függvényt  $n$ -edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

A 8-adfokú Csebisev-polinom:



**1. Tétel:** Rekurzió

$$\begin{aligned}T_0(x) &:= 1, \quad T_1(x) := x, \\T_{n+1}(x) &:= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

## 1. Tétel: Rekurzió

$$\begin{aligned}T_0(x) &:= 1, \quad T_1(x) := x, \\T_{n+1}(x) &:= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

**Biz.:** Vezessük be az  $\alpha = \arccos(x)$  jelölést ( $x = \cos(\alpha)$ ):

$$\begin{aligned}2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) &= 2 \cos(\alpha) \cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) = \\&= 2 \cos(\alpha) \cos(n\alpha) - [\cos(n\alpha) \cos(\alpha) + \sin(n\alpha) \sin(\alpha)] = \\&= \cos(n\alpha) \cos(\alpha) - \sin(n\alpha) \sin(\alpha) = \cos((n+1)\alpha) = T_{n+1}(x).\end{aligned}$$

## 1. Tétel: Rekurzió

$$\begin{aligned}T_0(x) &:= 1, \quad T_1(x) := x, \\T_{n+1}(x) &:= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

**Biz.:** Vezessük be az  $\alpha = \arccos(x)$  jelölést ( $x = \cos(\alpha)$ ):

$$\begin{aligned}2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) &= 2 \cos(\alpha) \cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) = \\&= 2 \cos(\alpha) \cos(n\alpha) - [\cos(n\alpha) \cos(\alpha) + \sin(n\alpha) \sin(\alpha)] = \\&= \cos(n\alpha) \cos(\alpha) - \sin(n\alpha) \sin(\alpha) = \cos((n+1)\alpha) = T_{n+1}(x).\end{aligned}$$

## 2. Tétel:

$T_n \in P_n$  és főegyütthatója:  $2^{n-1}$  ( $n \geq 1$ )-re.



**Definíció:**

$$\tilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom.  $\tilde{T}_n \in P_n^{(1)}$ , ahol  $P_n^{(1)}$ : az 1 főegyütthatós  $n$ -edfokú polinomok halmaza.

**Definíció:**

$$\tilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom.  $\tilde{T}_n \in P_n^{(1)}$ , ahol  $P_n^{(1)}$ : az 1 főegyütthatós  $n$ -edfokú polinomok halmaza.

**3. Tétel:**

- $T_n$ -nek  $n$  db különböző valós gyöke van  $[-1; 1]$ -en.

## Definíció:

$$\tilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom.  $\tilde{T}_n \in P_n^{(1)}$ , ahol  $P_n^{(1)}$ : az 1 főegyütthatós  $n$ -edfokú polinomok halmaza.

## 3. Tétel:

- $T_n$ -nek  $n$  db különböző valós gyöke van  $[-1; 1]$ -en.
- A gyökök a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el.

**Definíció:**

$$\tilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom.  $\tilde{T}_n \in P_n^{(1)}$ , ahol  $P_n^{(1)}$ : az 1 főegyütthatós  $n$ -edfokú polinomok halmaza.

**3. Tétel:**

- $T_n$ -nek  $n$  db különböző valós gyöke van  $[-1; 1]$ -en.
- A gyökök a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el.
- Ha  $n$  páros, akkor  $T_n$  páros függvény,  
ha  $n$  páratlan, akkor  $T_n$  páratlan függvény.

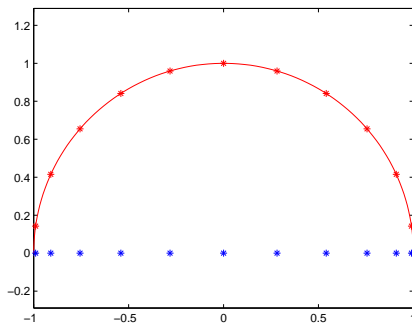
**Biz.:**  $\cos(n \arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

**Biz.:**  $\cos(n \arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom gyökei:



## 4. Tétel:

$T_n$ -nek  $n + 1$  db szélsőérték helye van  $[-1; 1]$ -en.

**4. Tétel:**

$T_n$ -nek  $n + 1$  db szélsőérték helye van  $[-1; 1]$ -en.

**Biz.:**  $\cos(n \arccos(x)) = (-1)^k \Leftrightarrow n \arccos(\xi_k) = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$\xi_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), (k = 0, 1, \dots, n)$$



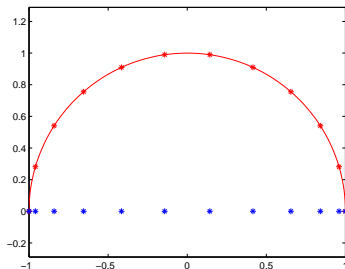
#### 4. Tétel:

$T_n$ -nek  $n + 1$  db szélsőérték helye van  $[-1; 1]$ -en.

**Biz.:**  $\cos(n \arccos(x)) = (-1)^k \Leftrightarrow n \arccos(\xi_k) = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$\xi_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), (k = 0, 1, \dots, n)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom szélsőérték helyei:



**5. Tétel:**  $(T_n, n \in \mathbb{N})$  ortogonális polinomrendszer

A Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak  $[-1; 1]$ -en a  $w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  súlyfüggvénnyel, azaz

$$\langle T_n, T_k \rangle_w = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) \cdot T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad n \neq k.$$

**5. Tétel:**  $(T_n, n \in \mathbb{N})$  ortogonális polinomrendszer

A Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak  $[-1; 1]$ -en a  $w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  súlyfüggvénnyel, azaz

$$\langle T_n, T_k \rangle_w = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) \cdot T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad n \neq k.$$

**Biz.:** Hf. Helyettesítéses integrállal  $y := \arccos(x)$  változó bevezetésével.

**6. Tétel:** Csebisev-tétel

A  $(T_n, n \in \mathbb{N})$  rendszer extrémális tulajdonsága:

$$\min_{\tilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\tilde{Q}\|_{\infty} = \|\tilde{T}_n\|_{\infty} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol  $\|\tilde{Q}\|_{\infty} := \|\tilde{Q}\|_{C[-1;1]}$ .

**6. Tétel:** Csebisev-tétel

A  $(T_n, n \in \mathbb{N})$  rendszer extrémális tulajdonsága:

$$\min_{\tilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\tilde{Q}\|_{\infty} = \|\tilde{T}_n\|_{\infty} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol  $\|\tilde{Q}\|_{\infty} := \|\tilde{Q}\|_{C[-1;1]}$ .

**Biz.:** Táblán.

## 6. Tétel: Csebisev-tétel

A  $(T_n, n \in \mathbb{N})$  rendszer extrémális tulajdonsága:

$$\min_{\tilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\tilde{Q}\|_{\infty} = \|\tilde{T}_n\|_{\infty} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol  $\|\tilde{Q}\|_{\infty} := \|\tilde{Q}\|_{C[-1;1]}$ .

**Biz.:** Táblán.

**Köv.:** Az interpolációs hibaformulában az  $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$  függvény 1 főegyütthatós  $n + 1$ -edfokú polinom, alkalmazhatjuk rá a Csebisev-tételt. Ha a  $[-1; 1]$ -en vett interpoláció során az alappontok az  $n + 1$ -edfokú Csebisev-polinom gyökei, vagyis  $\omega_n(x) \equiv \tilde{T}_{n+1}(x)$ , akkor a hiba a  $[-1; 1]$  intervallumon minimális lesz.

**6. Tétel:** Az interpoláció hibája  $[-1; 1]$ -en

A  $[-1; 1]$ -en vett interpoláció és  $f \in C^{(n+1)}[-1; 1]$  függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyökei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

**6. Tétel:** Az interpoláció hibája  $[-1; 1]$ -en

A  $[-1; 1]$ -en vett interpoláció és  $f \in C^{(n+1)}[-1; 1]$  függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyökei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

**Biz.:** Lásd a Csebisev-tételt és a következményét.



**6. Tétel:** Az interpoláció hibája  $[-1; 1]$ -en

A  $[-1; 1]$ -en vett interpoláció és  $f \in C^{(n+1)}[-1; 1]$  függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyökei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

**Biz.:** Lásd a Csebisev-tételt és a következményét.

**Megj.:** Ha az interpolációs alappontokat választhatjuk, akkor azok a Csebisev-polinom gyökei legyenek.

**7. Tétel:** Az interpoláció hibája  $[a; b]$ -n

Az  $[a; b]$ -n vett interpoláció és  $f \in C^{(n+1)}[a; b]$  függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok az  $[a; b]$ -be transzformált Csebisev gyökök. Ekkor

$$\begin{aligned}\|f - L_n\|_\infty &\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \\ &= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

## 7. Tétel: Az interpoláció hibája $[a; b]$ -n

Az  $[a; b]$ -n vett interpoláció és  $f \in C^{(n+1)}[a; b]$  függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok az  $[a; b]$ -be transzformált Csebisev gyökök. Ekkor

$$\begin{aligned} \|f - L_n\|_\infty &\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \\ &= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

**Biz.:** Lásd a Csebisev-tételt és a  $\varphi : [-1; 1] \rightarrow [a; b]$  lineáris transzformációt:

$$\varphi(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad x \in [-1; 1].$$

- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései**
- 3 A Lagrange-interpoláció öröklött hibája
- 4 Inverz interpoláció

# Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az  $(x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontsorozat esetén jelöljük  $(L_n)$ -nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$(x_0^{(0)}) \rightarrow L_0$$

$$(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \rightarrow L_1$$

$$(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \rightarrow L_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \rightarrow L_n$$

# Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az  $(x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontsorozat esetén jelöljük  $(L_n)$ -nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$(x_0^{(0)}) \rightarrow L_0$$

$$(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \rightarrow L_1$$

$$(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \rightarrow L_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \rightarrow L_n$$

**Kérdések:**

# Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az  $(x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontsorozat esetén jelöljük  $(L_n)$ -nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$(x_0^{(0)}) \rightarrow L_0$$

$$(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \rightarrow L_1$$

$$(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \rightarrow L_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \rightarrow L_n$$

## Kérdések:

- ①  $(L_n)$  egyenletesen konvergál-e  $f$ -hez?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} = 0 \quad ?$$

# Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az  $(x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontsorozat esetén jelöljük  $(L_n)$ -nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$(x_0^{(0)}) \rightarrow L_0$$

$$(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \rightarrow L_1$$

$$(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \rightarrow L_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \rightarrow L_n$$

## Kérdések:

- ❶  $(L_n)$  egyenletesen konvergál-e  $f$ -hez?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} = 0 \quad ?$$

- ❷ Milyen  $f$ -re?



# Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az  $(x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontsorozat esetén jelöljük  $(L_n)$ -nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$(x_0^{(0)}) \rightarrow L_0$$

$$(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \rightarrow L_1$$

$$(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \rightarrow L_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \rightarrow L_n$$

## Kérdések:

- ❶  $(L_n)$  egyenletesen konvergál-e  $f$ -hez?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} = 0 \quad ?$$

- ❷ Milyen  $f$ -re?  
❸ Milyen alappontrendszer esetén?

**Divergencia példák egyenletes felosztásra:**

①  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , ( $f \in C[-1; 1]$ )

## Divergencia példák egyenletes felosztásra:

- ①  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , ( $f \in C[-1; 1]$ )
- ② Runge példája:  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , ( $f \in C^\infty[-1; 1]$ )

## Divergencia példák egyenletes felosztásra:

- 1  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , ( $f \in C[-1; 1]$ )
- 2 Runge példája:  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , ( $f \in C^\infty[-1; 1]$ )

## Matlab:

- 1 Növekvő számú alappont esetén egyenletes felosztásokra megnézni a példákat. Az intervallum mely részén divergál az interpolációs polinomok sorozata?

## Divergencia példák egyenletes felosztásra:

- 1  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , ( $f \in C[-1; 1]$ )
- 2 Runge példája:  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , ( $f \in C^\infty[-1; 1]$ )

## Matlab:

- 1 Növekvő számú alappont esetén egyenletes felosztásokra megnézni a példákat. Az intervallum mely részén divergál az interpolációs polinomok sorozata?
- 2 Csebisev alappontrendszeren mindkét függvényre igaz az egyenletes konvergencia.

## Tétel:

① Tegyük fel, hogy  $f \in C^\infty[a; b]$  és

Ekkor  $\forall (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

## Tétel:

- 1 Tegyük fel, hogy  $f \in C^\infty[a; b]$  és
- 2  $\exists M > 0 : \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n \ (\forall n \in \mathbb{N})$ .

Ekkor  $\forall (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

## Tétel:

- 1 Tegyük fel, hogy  $f \in C^\infty[a; b]$  és
- 2  $\exists M > 0 : \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n \ (\forall n \in \mathbb{N})$ .

Ekkor  $\forall (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

**Biz.:** Táblán a hibaformulából.



## **Tétel:** Marcinkiewicz

$\forall f \in C[a; b]$  esetén  $\exists (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} = 0.$$

## **Tétel:** Marcinkiewicz

$\forall f \in C[a; b]$  esetén  $\exists (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} = 0.$$

## **Tétel:** Faber

$\forall (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat esetén  
 $\exists f \in C[a; b]$ , hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} \neq 0.$$

## **Tétel:** Marcinkiewicz

$\forall f \in C[a; b]$  esetén  $\exists (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} = 0.$$

## **Tétel:** Faber

$\forall (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat esetén  
 $\exists f \in C[a; b]$ , hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} \neq 0.$$

**Nem biz.**

- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései
- 3 A Lagrange-interpoláció öröklött hibája**
- 4 Inverz interpoláció

# A Lagrange-interpoláció öröklött hibája

**Kérdés:** Ha az interpolációs feladatban a függvényértékeket csak közelítően ismerjük, akkor a hibás adatokból készített interpolációs polinomnak mennyi a hibája?

**Kérdés:** Ha az interpolációs feladatban a függvényértékeket csak közelítően ismerjük, akkor a hibás adatokból készített interpolációs polinomnak mennyi a hibája?

- 1 Az  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  értékekhez elkészítjük az  $L_n$  interpolációs polinomot.

**Kérdés:** Ha az interpolációs feladatban a függvényértékeket csak közelítően ismerjük, akkor a hibás adatokból készített interpolációs polinomnak mennyi a hibája?

- 1 Az  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  értékekhez elkészítjük az  $L_n$  interpolációs polinomot.
- 2 Az  $\tilde{f}(x_0), \dots, \tilde{f}(x_n)$  értékekhez elkészítjük az  $\tilde{L}_n$  interpolációs polinomot.

**Kérdés:** Ha az interpolációs feladatban a függvényértékeket csak közelítően ismerjük, akkor a hibás adatokból készített interpolációs polinomnak mennyi a hibája?

- 1 Az  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  értékekhez elkészítjük az  $L_n$  interpolációs polinomot.
- 2 Az  $\tilde{f}(x_0), \dots, \tilde{f}(x_n)$  értékekhez elkészítjük az  $\tilde{L}_n$  interpolációs polinomot.
- 3 Milyen becslést adhatunk  $|L_n(x) - \tilde{L}_n(x)|$ -re?



## **Definíció:** Lebesgue-függvény

Legyen  $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ , az

$$\mathfrak{L}_n(x) := \sum_{k=0}^n |\ell_k(x)|, \quad x \in [a; b].$$

függvényt Lebesgue-függvénynek nevezzük.

## **Definíció:** Lebesgue-függvény

Legyen  $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ , az

$$\mathfrak{L}_n(x) := \sum_{k=0}^n |\ell_k(x)|, \quad x \in [a; b].$$

függvényt Lebesgue-függvénynek nevezzük.

## **Definíció:** Lebesgue-állandó

A Lebesgue-állandó a Lebesgue-függvény  $\infty$  normája:

$$\Lambda_n := \max_{x \in [a; b]} \mathfrak{L}_n(x) = \|\mathfrak{L}_n\|_{\infty}.$$

**Tétel:** A Lebesgue-állandó becslése

$$\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  állandó.

**Tétel:** A Lebesgue-állandó becslése

$$\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  állandó.

**Nem biz.**

**Tétel:** A Lebesgue-állandó becslése

$$\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  állandó.

**Nem biz.**

**Tétel:** Az interpoláció öröklött hibája

$$|L_n(x) - \tilde{L}_n(x)| \leq \varepsilon \cdot \Lambda_n, \quad (x \in [a; b])$$

ahol  $\varepsilon := \max_{i=0}^n |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)|$ .

**Tétel:** A Lebesgue-állandó becslése

$$\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$  állandó.

**Nem biz.**

**Tétel:** Az interpoláció öröklött hibája

$$|L_n(x) - \tilde{L}_n(x)| \leq \varepsilon \cdot \Lambda_n, \quad (x \in [a; b])$$

ahol  $\varepsilon := \max_{i=0}^n |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)|$ .

**Biz.:** Táblán.

- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései
- 3 A Lagrange-interpoláció öröklött hibája
- 4 Inverz interpoláció**

Az interpoláció alkalmazása  $f(x) = 0$  típusú egyenletek megoldására, az  $x^*$  gyök közelítésére.



Az interpoláció alkalmazása  $f(x) = 0$  típusú egyenletek megoldására, az  $x^*$  gyök közelítésére.

- 1 Az  $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$  alappontokra és  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  függvényértékekre felírjuk az  $L_n(x)$  interpolációs polinomot.

$$L_n(x^*) = 0 \text{ megoldjuk} \quad \rightarrow \quad x_{k+1} := x^*$$

Ezt alkalmaztuk a szelő-módszer és a Newton-módszer esetén is.  $n > 2$ -re problémás a gyökkeresés, nem általánosítható.

Az interpoláció alkalmazása  $f(x) = 0$  típusú egyenletek megoldására, az  $x^*$  gyök közelítésére.

- 1 Az  $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$  alappontokra és  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  függvényértékekre felírjuk az  $L_n(x)$  interpolációs polinomot.

$$L_n(x^*) = 0 \text{ megoldjuk} \rightarrow x_{k+1} := x^*$$

Ezt alkalmaztuk a szelő-módszer és a Newton-módszer esetén is.  $n > 2$ -re problémás a gyökkeresés, nem általánosítható.

- 2 Tegyük fel, hogy  $f$  invertálható  $[a; b]$ -n, ekkor az  $f$  függvény helyett az inverzét közelítjük.

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = f^{-1}(0) \text{ helyettesítés}$$

Az  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  alappontokra és  $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$  függvényértékekre felírjuk az  $Q_n(y)$  interpolációs polinomot.

$$Q_n(y) \approx f^{-1}(y), \rightarrow x_{k+1} := Q_n(0)$$