

# Numerikus módszerek C

## 6. előadás: Nemlineáris egyenletek numerikus megoldása

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- 2 Fixponttételek, egyszerű iterációk
- 3 Konvergencia rend
- 4 Matlab példák

## Feladat

Keressük meg egy  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ( $\exists?$ , 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \quad x^* = ?$$

## Feladat



Keressük meg egy  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ( $\exists?$ , 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \quad x^* = ?$$

Ekvivalens módon átfogalmazható (általában): keressük meg egy  $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nemlineáris függvény fixpontját.

$$x^* = \varphi(x^*), \quad x^* = ?$$

- 1 Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- 2 Fixponttételek, egyszerű iterációk
- 3 Konvergencia rend
- 4 Matlab példák

Lásd Analízis...

**Tétel:** Bolzano-tétel

Ha  $f \in C[a; b]$  és  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , akkor  $\exists x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$ .

Lásd Analízis...

### **Tétel:** Bolzano-tétel

Ha  $f \in C[a; b]$  és  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , akkor  $\exists x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$ .

### **Megjegyzés:**

- $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $[a; b]$  zárt intervallum,

Lásd Analízis...

### **Tétel:** Bolzano-tétel

Ha  $f \in C[a; b]$  és  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , akkor  $\exists x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$ .

### **Megjegyzés:**

- $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $[a; b]$  zárt intervallum,
- $C[a; b]$ : az  $[a; b]$  (zárt) intervallumon folytonos függvények halmaza,



Lásd Analízis...

### **Tétel:** Bolzano-tétel

Ha  $f \in C[a; b]$  és  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , akkor  $\exists x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$ .

### **Megjegyzés:**

- $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $[a; b]$  zárt intervallum,
- $C[a; b]$ : az  $[a; b]$  (zárt) intervallumon folytonos függvények halmaza,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ :  $f(a)$  és  $f(b)$  különböző előjelűek

Lásd Analízis...



### **Tétel:** Bolzano-tétel

Ha  $f \in C[a; b]$  és  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , akkor  $\exists x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$ .

### **Megjegyzés:**

- $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $[a; b]$  zárt intervallum,
- $C[a; b]$ : az  $[a; b]$  (zárt) intervallumon folytonos függvények halmaza,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ :  $f(a)$  és  $f(b)$  különböző előjelűek
- van gyök az  $(a; b)$  (nyílt) intervallumban

**Biz.** (Bolzano-tétel): az intervallumfelezés módszerével

- 1 Legyen  $x_0 := a$ ,  $y_0 := b$ .

**Biz.** (Bolzano-tétel): az intervallumfelezés módszerével

- ① Legyen  $x_0 := a$ ,  $y_0 := b$ .
- ② Ismételjük:
  - Legyen  $s_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k)$ , az intervallum fele.
  - Ha  $f(x_k) \cdot f(s_k) < 0$ , akkor  $x_{k+1} := x_k$ ,  $y_{k+1} := s_k$ .
  - Ha  $f(x_k) \cdot f(s_k) > 0$ , akkor  $x_{k+1} := s_k$ ,  $y_{k+1} := y_k$ .

**Biz.** (Bolzano-tétel): az intervallumfelezés módszerével

- ① Legyen  $x_0 := a$ ,  $y_0 := b$ .
- ② Ismételjük:
  - Legyen  $s_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k)$ , az intervallum fele.
  - Ha  $f(x_k) \cdot f(s_k) < 0$ , akkor  $x_{k+1} := x_k$ ,  $y_{k+1} := s_k$ .
  - Ha  $f(x_k) \cdot f(s_k) > 0$ , akkor  $x_{k+1} := s_k$ ,  $y_{k+1} := y_k$ .
- ③ Álljunk meg, ha
  - egyenlőség teljesül, ekkor  $x^* = s_k$ , vagy

**Biz.** (Bolzano-tétel): az intervallumfelezés módszerével

- ① Legyen  $x_0 := a$ ,  $y_0 := b$ .
- ② Ismételjük:
  - Legyen  $s_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k)$ , az intervallum fele.
  - Ha  $f(x_k) \cdot f(s_k) < 0$ , akkor  $x_{k+1} := x_k$ ,  $y_{k+1} := s_k$ .
  - Ha  $f(x_k) \cdot f(s_k) > 0$ , akkor  $x_{k+1} := s_k$ ,  $y_{k+1} := y_k$ .
- ③ Álljunk meg, ha
  - egyenlőség teljesül, ekkor  $x^* = s_k$ , vagy
  - elértük a kívánt pontosságot, ekkor  $x^* \in (x_k, y_k)$ , és

$$y_k - x_k = \frac{y_{k-1} - x_{k-1}}{2}$$

teljesül.



## Megjegyzés:

- Általában nem tapasztalunk egyenlőséget.


## Megjegyzés:

- Általában nem tapasztalunk egyenlőséget.
- Az  $(x_k)$  és  $(y_k)$  sorozatok konvergenciájának részletes tárgyalása: Analízis. . .



## Megjegyzés:

- Általában nem tapasztalunk egyenlőséget.
- Az  $(x_k)$  és  $(y_k)$  sorozatok konvergenciájának részletes tárgyalása: Analízis...
- **Hibabecslések:**


$$|x_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k}, \quad |y_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k},$$
$$|s_k - x^*| < \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

## Példa

Közelítsük a  $P(x) = x^3 + 3x - 2$  polinom egyik gyökét 0.1 pontossággal. Hány lépés szükséges?



Próbálkozhatunk a  $[0; 1]$  intervallummal...

A  $P(x) = x^3 + 3x - 2$  polinom gyökét keressük  
intervallumfelezéssel a  $[0; 1]$  intervallumon:

A  $P(x) = x^3 + 3x - 2$  polinom gyökét keressük  
intervallumfelezéssel a  $[0; 1]$  intervallumon:

$$\begin{aligned} P(0) &= -2 < 0, & P(1) &= 1 + 3 - 2 = 2 > 0 \\ \Rightarrow \quad \exists x^* \in (0; 1) : P(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

A  $P(x) = x^3 + 3x - 2$  polinom gyökét keressük intervallumfelezéssel a  $[0; 1]$  intervallumon:

$$P(0) = -2 < 0, \quad P(1) = 1 + 3 - 2 = 2 > 0$$

$$\Rightarrow \exists x^* \in (0; 1) : P(x^*) = 0. \quad \text{☐}$$

Hibabecslés:

$$\frac{1}{2^k} < \frac{1}{10} \quad \text{☐} \quad \Leftrightarrow \quad k > 3,$$

tehát legalább 4 lépésre van szükségünk. Lassú ...

☐

**Tétel:** gyök egyértelmű létezéséről

① Ha  $f \in C[a; b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,

**Tétel:** gyök egyértelmű létezéséről

- ❶ Ha  $f \in C[a; b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,
- ❷ valamint  $f \in D(a; b)$  és  $f' > 0$  (vagy  $< 0$ ),

**Tétel:** gyök egyértelmű létezéséről

- ❶ Ha  $f \in C[a; b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,
- ❷ valamint  $f \in D(a; b)$  és  $f' > 0$  (vagy  $< 0$ ),

akkor  $\exists! x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$ .



**Tétel:** gyök egyértelmű létezéséről

① Ha  $f \in C[a; b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,



② valamint  $f \in D(a; b)$  és  $f' > 0$  (vagy  $< 0$ ),



akkor  $\exists! x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$ .

**Biz.:** A Bolzano-tételből következik, hogy van gyök.  
 $f$  szigorúan monoton, ezért egyértelmű is.



- 1 Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- 2 Fixponttételek, egyszerű iterációk**
- 3 Konvergencia rend
- 4 Matlab példák

**Emlékeztető:** Iterációs módszerek LER-ek esetén.

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = Bx + c$$
$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) = B \cdot x^{(k)} + c$$


**Emlékeztető:** Iterációs módszerek LER-ek esetén.

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff x = Bx + c \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) &= B \cdot x^{(k)} + c \end{aligned}$$

**Ötlet:** Most, nemlineáris függvények zérushelyéhez:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x = \varphi(x) \\ x_{k+1} &= \varphi(x_k) = \dots \end{aligned}$$

## Emlékeztető: fixpont

Az  $x^* \in \mathbb{R}^n$  pontot a  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha  $x^* = \varphi(x^*)$ . 

## Emlékeztető: kontrakció

A  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  leképezés *kontrakció*, ha  $\exists q \in [0, 1)$ , hogy

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Megj.:

- kontrakció  $\approx$  összehúzás,  $q$ : kontrakciós együttható
- most  $n = 1$ ,  $\|\cdot\| = |\cdot|$ ;  $\mathbb{R}$  helyett  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ , így jobban használható

## **Definíció:** kontrakció

A  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés *kontrakció*  $[a; b]$ -n, ha  $\exists q \in [0, 1)$ , hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in [a; b].$$

## **Definíció:** kontrakció

A  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés *kontrakció*  $[a; b]$ -n, ha  $\exists q \in [0, 1)$ , hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in [a; b].$$

## **Állítás**

- 1  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény,  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 2  $|\varphi'(x)| < 1$  ( $\forall x \in [a; b]$ ),

## **Definíció:** kontrakció

A  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés *kontrakció*  $[a; b]$ -n, ha  $\exists q \in [0, 1)$ , hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in [a; b].$$

## **Állítás**

- 1  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény,  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 2  $|\varphi'(x)| < 1$  ( $\forall x \in [a; b]$ ),

akkor  $\varphi$  kontrakció  $[a; b]$ -n.



## Definíció: kontrakció

A  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés *kontrakció*  $[a; b]$ -n, ha  $\exists q \in [0, 1)$ , hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in [a; b].$$

## Állítás

- 1  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény,  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 2  $|\varphi'(x)| < 1$  ( $\forall x \in [a; b]$ ),

akkor  $\varphi$  kontrakció  $[a; b]$ -n.

## Megj.:

- $C^1$ : egyszer folytonosan differenciálható, vagyis a deriváltja folytonos.

## Definíció: kontrakció



A  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés *kontrakció*  $[a; b]$ -n, ha  $\exists q \in [0, 1)$ , hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in [a; b].$$

## Állítás



- 1  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény,  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 2  $|\varphi'(x)| < 1$  ( $\forall x \in [a; b]$ ),

akkor  $\varphi$  kontrakció  $[a; b]$ -n.

## Megj.:

- $C^1$ : egyszer folytonosan differenciálható, vagyis a deriváltja folytonos.
- A kontrakciós tulajdonság függ az intervallumtól.

**Biz.:** A Lagrange-féle középértéktétel segítségével.

**Biz.:** A Lagrange-féle középértéktétel segítségével.

$$q := \max_{x \in [a; b]} |\varphi'(x)| < 1$$

**Biz.:** A Lagrange-féle középértéktétel segítségével.

$$q := \max_{x \in [a; b]} |\varphi'(x)| < 1$$

$$\forall x, y \in [a; b] \ (x < y) : \exists \xi \in (x; y) :$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y|.$$



## Tétel: Brouwer-féle fixponttétel

1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$

## Tétel: Brouwer-féle fixponttétel

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$
- 2 és  $\varphi \in C[a; b]$ ,

## Tétel: Brouwer-féle fixponttétel

① Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$

② és  $\varphi \in C[a; b]$ ,

akkor  $\exists x^* \in [a; b] : \varphi(x^*) = x^*$ .



## Tétel: Brouwer-féle fixponttétel

① Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$

② és  $\varphi \in C[a; b]$ ,

akkor  $\exists x^* \in [a; b] : \varphi(x^*) = x^*$ .

**Biz.:** Definiáljuk a  $g(x) = x - \varphi(x)$  függvényt, majd alkalmazzuk a Bolzano-tételt.

**Biz. folyt.:**

① Mivel  $\varphi(a), \varphi(b) \in [a; b] \Rightarrow$

$$\begin{aligned} g(a) = a - \varphi(a) &\leq 0, & g(b) = b - \varphi(b) &\geq 0 \\ \Rightarrow g(a) \cdot g(b) &\leq 0. \end{aligned}$$

**Biz. folyt.:**

① Mivel  $\varphi(a), \varphi(b) \in [a; b] \Rightarrow$

$$g(a) = a - \varphi(a) \leq 0, \quad g(b) = b - \varphi(b) \geq 0 \\ \Rightarrow g(a) \cdot g(b) \leq 0.$$

② Ha  $g(a) \cdot g(b) = 0$ , akkor  $g(a) = 0$  vagy  $g(b) = 0$ .  
Ez azt jelenti, hogy első esetben  $a$ , második esetben  $b$  fixpont.

**Biz. folyt.:**

- ① Mivel  $\varphi(a), \varphi(b) \in [a; b] \Rightarrow$

$$g(a) = a - \varphi(a) \leq 0, \quad g(b) = b - \varphi(b) \geq 0 \\ \Rightarrow g(a) \cdot g(b) \leq 0.$$

- ② Ha  $g(a) \cdot g(b) = 0$ , akkor  $g(a) = 0$  vagy  $g(b) = 0$ .  
Ez azt jelenti, hogy első esetben  $a$ , második esetben  $b$  fixpont.

- ③ Ha  $g(a) \cdot g(b) < 0$ , akkor a Bolzano-tétel miatt van  $g$ -nek gyöke  $(a; b)$ -ben, azaz

$$\exists x^* \in (a; b) : g(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x^*) = x^*$$



## **Tétel:** Banach-féle fixponttétel $[a; b]$ -re

Ha a  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  függvény kontrakció  $[a; b]$ -n  $q$  kontrakciós együtthatóval, akkor

❶  $\exists! x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$ , azaz létezik fixpont,

## Tétel: Banach-féle fixponttétel $[a; b]$ -re

Ha a  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  függvény kontrakció  $[a; b]$ -n  $q$  kontrakciós együtthatóval, akkor

- 1  $\exists! x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$ , azaz létezik fixpont,
- 2  $\forall x_0 \in [a; b]$  esetén az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ,

## Tétel: Banach-féle fixponttétel $[a; b]$ -re

Ha a  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  függvény kontrakció  $[a; b]$ -n  $q$  kontrakciós együtthatóval, akkor

- 1  $\exists! x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$ , azaz létezik fixpont,
- 2  $\forall x_0 \in [a; b]$  esetén az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ,
- 3 továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
  - $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k(b - a)$ ,
  - $|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|$ .

## Tétel: Banach-féle fixponttétel $[a; b]$ -re

Ha a  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  függvény kontrakció  $[a; b]$ -n  $q$  kontrakciós együtthatóval, akkor

- 1  $\exists! x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$ , azaz létezik fixpont,
- 2  $\forall x_0 \in [a; b]$  esetén az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ,
- 3 továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
  - $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k(b - a)$ ,
  - $|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|$ .

**Biz.:** Már volt, csak most  $\mathbb{R}^n$  helyett  $\mathbb{R}$  ( $n = 1$ ), sőt  $[a; b]$ .





**Következmény:** iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$ ,

## Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$ ,
- 2  $\varphi \in C^1[a; b]$  és

## Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$ ,
- 2  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 3  $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a; b]$ ,

akkor az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  iteráció konvergens  $\forall x_0 \in [a; b]$  esetén.

## Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$ ,
- 2  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 3  $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a; b]$ ,

akkor az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  iteráció konvergens  $\forall x_0 \in [a; b]$  esetén.

**Megj.:** Attól még lehet konvergens a sorozat, ha valahol  $|\varphi'| \geq 1$ .  
(Nem szükséges feltétel.)

## **Tétel** Lokális fixponttétel

Legyen  $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény.

- 1 Ha  $\varphi \in C^1[a; b]$  és

**Tétel** Lokális fixponttétel

Legyen  $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény.

- 1 Ha  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 2  $\exists \xi \in [a; b]$  és  $\delta > 0$ , melyre

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in [\xi - \delta; \xi + \delta] \subset [a; b].$$

**Tétel** Lokális fixponttétel

Legyen  $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény.

- 1 Ha  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 2  $\exists \xi \in [a; b]$  és  $\delta > 0$ , melyre

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in [\xi - \delta; \xi + \delta] \subset [a; b].$$

- 3 Ha  $\exists r: 0 < r \leq \delta$ , melyre

$$|\varphi(\xi) - \xi| \leq (1 - q)r,$$

(azaz  $\xi$  a fixpont egy elég jó közelítése,)

## Tétel Lokális fixponttétel

Legyen  $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény.

- 1 Ha  $\varphi \in C^1[a; b]$  és
- 2  $\exists \xi \in [a; b]$  és  $\delta > 0$ , melyre

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [a; b].$$

- 3 Ha  $\exists r: 0 < r \leq \delta$ , melyre

$$|\varphi(\xi) - \xi| \leq (1 - q)r,$$

(azaz  $\xi$  a fixpont egy elég jó közelítése,)

akkor  $\varphi$  kontrakció  $[\xi - r; \xi + r]$ -n és

$$\forall x \in [\xi - r; \xi + r]: \varphi(x) \in [\xi - r; \xi + r].$$



**Biz.:** A tétel feltételeiből következik, hogy  $\varphi$  kontrakció  $[\xi - \delta; \xi + \delta]$ -n.

**Biz.:** A tétel feltételeiből következik, hogy  $\varphi$  kontrakció  $[\xi - \delta; \xi + \delta]$ -n.

Gondoljuk meg, hogy a kontrakciós tulajdonság a  $[\xi - r; \xi + r] \subset [\xi - \delta; \xi + \delta]$  részintervallumra is teljesül a  $q$  kontrakciós együtthatóval.

**Biz.:** A tétel feltételeiből következik, hogy  $\varphi$  kontrakció  $[\xi - \delta; \xi + \delta]$ -n.

Gondoljuk meg, hogy a kontrakciós tulajdonság a  $[\xi - r; \xi + r] \subset [\xi - \delta; \xi + \delta]$  részintervallumra is teljesül a  $q$  kontrakciós együtthatóval.

Tetszőleges  $x \in [\xi - r; \xi + r]$  esetén

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \xi| &= |\varphi(x) - \varphi(\xi) + \varphi(\xi) - \xi| \leq \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi(\xi)| + |\varphi(\xi) - \xi| \leq \\ &\leq q \cdot \underbrace{|x - \xi|}_{\leq r} + (1 - q) \cdot r = r \end{aligned}$$

Tehát  $\varphi$  az  $x \in [\xi - r; \xi + r]$  intervallumba beleképez.



## Következmény:

Ha a lokális fixponttétel feltételei teljesülnek, akkor valójában a Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek az  $[\xi - r; \xi + r]$  intervallumra, így

## Következmény:

Ha a lokális fixponttétel feltételei teljesülnek, akkor valójában a Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek az  $[\xi - r; \xi + r]$  intervallumra, így

- 1  $\exists! x^* \in [\xi - r; \xi + r] : x^* = \varphi(x^*)$ , azaz létezik fixpont,

## Következmény:

Ha a lokális fixponttétel feltételei teljesülnek, akkor valójában a Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek az  $[\xi - r; \xi + r]$  intervallumra, így

- 1  $\exists! x^* \in [\xi - r; \xi + r] : x^* = \varphi(x^*)$ , azaz létezik fixpont,
- 2  $\forall x_0 \in [\xi - r; \xi + r]$  esetén az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ,

## Következmény:

Ha a lokális fixponttétel feltételei teljesülnek, akkor valójában a Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek az  $[\xi - r; \xi + r]$  intervallumra, így

- ❶  $\exists! x^* \in [\xi - r; \xi + r] : x^* = \varphi(x^*)$ , azaz létezik fixpont,
- ❷  $\forall x_0 \in [\xi - r; \xi + r]$  esetén az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ,
- ❸ továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
  - $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k(b - a),$
  - $|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|.$

## 1. Példa

A zsebszámológépünkbe írjunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg az  $x^2$  billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?



## 1. Példa

A zsebszámológépünkbe írunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg az  $x^2$  billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az  $x = x^2$  egyenlet fixpontját keressük az


$$x_{k+1} = x_k^2$$

iterációval. Két fixpontja van 0 és 1, de

- $0 \leq x_0 < 1$  esetén  $\lim(x_k) = 0$ .
- $x_0 = 1$  esetén  $\lim(x_k) = 1$ .

## 2. Példa

A zsebszámológépünkbe írjunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg a  $\sqrt{x}$  billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

## 2. Példa

A zsebszámológépünkbe írunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg a  $\sqrt{x}$  billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az  $x = \sqrt{x}$  egyenlet fixpontját keressük az

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k}$$

iterációval. Két fixpontja van 0 és 1, de

- $x_0 = 0$  esetén  $\lim(x_k) = 0$ .
- $0 < x_0 \leq 1$  esetén  $\lim(x_k) = 1$ .

## 3. Példa

A zsebszámológépünkbe írjunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg a  $\cos(x)$  billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

### 3. Példa

A zsebszámológépünkbe írjunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg a  $\cos(x)$  billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az  $x = \cos(x)$  fixpontegyenlet megoldását keressük a  $[0, 1]$  intervallumon az

$$x_{k+1} := \cos(x_k), \quad x_0 \in [0, 1]$$

iterációval. Egyértelmű-e a megoldás? Konvergens ez a sorozat? Adjunk hibabecslést! Hány lépés után kapjuk a megoldást 0.1-es pontossággal?

- ① Belátjuk, hogy a  $\varphi(x) := \cos(x)$  függvény a  $[0; 1]$  intervallumot a  $[0; 1]$ -be képezi:
- Mivel  $\varphi'(x) = -\sin(x) < 0$ ,  $\forall x \in [0; 1]$ , ezért  $\varphi$  szigorúan monoton fogyó  $[0; 1]$ -en.
  - $\varphi([0; 1]) = [\varphi(1); \varphi(0)] = [\cos(1), 1] \subset [0; 1]$ , tehát  $\varphi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ .

① Belátjuk, hogy a  $\varphi(x) := \cos(x)$  függvény a  $[0; 1]$  intervallumot a  $[0; 1]$ -be képezi:

- Mivel  $\varphi'(x) = -\sin(x) < 0$ ,  $\forall x \in [0; 1]$ , ezért  $\varphi$  szigorúan monoton fogyó  $[0; 1]$ -en.
- $\varphi([0; 1]) = [\varphi(1); \varphi(0)] = [\cos(1), 1] \subset [0; 1]$ , tehát  $\varphi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ .

② Belátjuk, hogy a  $\varphi(x) = \cos(x)$  függvény kontrakció  $[0; 1]$ -en. Tetszőleges  $x, y \in [0; 1]$ -re a Lagrange-középértéktételt alkalmazva  $\exists \xi \in (0; 1)$ , melyre

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y|,$$

ahol a kontrakciós együttható

$$q := \max_{\xi \in [0; 1]} |-\sin(\xi)| = \sin(1) \approx 0.8415 < 1.$$

- ③ A Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek, így annak állításai felhasználhatóak, ezzel a fixpont létezését, egyértelműségét és a konvergenciát beláttuk.



- ③ A Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek, így annak állításai felhasználhatóak, ezzel a fixpont létezését, egyértelműségét és a konvergenciát beláttuk.
- ④ Hibabecslése:

$$|x_k - x^*| \leq 0.8415^k \cdot \underbrace{|x_0 - x^*|}_{<1} \leq 0.8415^k.$$

- ③ A Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek, így annak állításai felhasználhatóak, ezzel a fixpont létezését, egyértelműségét és a konvergenciát beláttuk.
- ④ Hibabecslése:

$$|x_k - x^*| \leq 0.8415^k \cdot \underbrace{|x_0 - x^*|}_{<1} \leq 0.8415^k.$$

- ⑤ A megadott pontosság eléréséhez szükséges lépésszám:

$$0.8415^k < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{-1}{\lg(0.8415)} \approx 13.34.$$

Nagyon lassú ...

- 1 Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- 2 Fixponttételek, egyszerű iterációk
- 3 Konvergencia rend**
- 4 Matlab példák

## **Definíció:** konvergencia rend

Az  $(x_k)$  konvergens sorozat – határértékét jelölje  $x^*$  –  $p$ -edrendben konvergens, ha  $\exists c \in (0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ , hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

## **Definíció:** konvergenca rend

Az  $(x_k)$  konvergens sorozat – határértékét jelölje  $x^*$  –  *$p$ -edrendben konvergens*, ha  $\exists c \in (0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ , hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

## **Megjegyzés:**

- $p$  egyértelmű,  $p \geq 1$ ,

## **Definíció:** konvergenca rend

Az  $(x_k)$  konvergens sorozat – határértékét jelölje  $x^*$  –  *$p$ -edrendben konvergens*, ha  $\exists c \in (0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ , hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

## **Megjegyzés:**

- $p$  egyértelmű,  $p \geq 1$ ,
- $p$  nem feltétlenül egész (A szelőmódszernél  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .)

## **Definíció:** konvergenca rend

Az  $(x_k)$  konvergens sorozat – határértékét jelölje  $x^*$  –  $p$ -edrendben konvergens, ha  $\exists c \in (0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ , hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

## **Megjegyzés:**

- $p$  egyértelmű,  $p \geq 1$ ,
- $p$  nem feltétlenül egész (A szelőmódszernél  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .)
- $p = 1$ : elsőrendű vagy lineáris konvergenca (ekkor  $c \leq 1$ )  
 $p = 2$ : másodrendű vagy kvadratikus konvergenca

## Definíció: konvergencia rend

Az  $(x_k)$  konvergens sorozat – határértékét jelölje  $x^*$  –  $p$ -edrendben konvergens, ha  $\exists c \in (0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ , hogy



$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

## Megjegyzés:

- $p$  egyértelmű,  $p \geq 1$ ,
- $p$  nem feltétlenül egész (A szelőmódszernél  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .)
- $p = 1$ : elsőrendű vagy lineáris konvergencia (ekkor  $c \leq 1$ )  
 $p = 2$ : másodrendű vagy kvadratikus konvergencia
- $p > 1$ : szuperlineáris konvergencia



## Megjegyzés folyt.:

- Gyakorlatban a legalább  $p$ -edrendű konvergenca megfogalmazása:

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}_0 : |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^p$$

## Megjegyzés folyt.:

- Gyakorlatban a legalább  $p$ -edrendű konvergenca megfogalmazása:

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}_0 : |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^p$$

- A fixponttételek nem mondanak konvergenca rendet.  
(Csak annyit, hogy legalább elsőrendű.)

## Megjegyzés folyt.:

- Gyakorlatban a legalább  $p$ -edrendű konvergenca megfogalmazása:

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}_0 : |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^p$$

- A fixponttételek nem mondanak konvergenca rendet. (Csak annyit, hogy legalább elsőrendű.)
- Ha  $c = 0$ , akkor a keresett konvergenca rend nagyobb a megadottnál.

## Megjegyzés folyt.:

- Gyakorlatban a legalább  $p$ -edrendű konvergenca megfogalmazása:



$$\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}_0 : |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^p$$

- A fixponttételek nem mondanak konvergenca rendet.  
(Csak annyit, hogy legalább elsőrendű.)
- Ha  $c = 0$ , akkor a keresett konvergenca rend nagyobb a megadottnál.
- Ha  $c = \infty$ , akkor a keresett konvergenca rend kisebb a megadottnál.

**Példa**

Mennyi a konvergenciarendje a következő nullsorozatoknak?

$$\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad \left(\frac{1}{2^n}\right); \quad (q^n) \ (|q| < 1); \quad \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right);$$

**Példa**

Mennyi a konvergenciarendje a következő nullsorozatoknak?

$$\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad \left(\frac{1}{2^n}\right); \quad (q^n) \ (|q| < 1); \quad \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right);$$

Vizsgáljuk az egyik sorozatot, a többit gyakorlalon..

Tekintsük az  $(x_k) = \left(\frac{1}{2^k}\right)$ ,  $(k \in \mathbb{N})$  sorozatot.

Tekintsük az  $(x_k) = \left(\frac{1}{2^k}\right)$ ,  $(k \in \mathbb{N})$  sorozatot.

❶ Típpeljük  $p = 2$ -re a konvergencia rendet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{k+1}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^k} - 0\right|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k}}{2^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k-1} = \infty.$$

Látjuk, hogy a határérték  $\infty$ , vagyis kisebb  $p$ -vel kell próbálkoznunk.



Tekintsük az  $(x_k) = \left(\frac{1}{2^k}\right)$ ,  $(k \in \mathbb{N})$  sorozatot.

- ① Tippeljük  $p = 2$ -re a konvergencia rendet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{k+1}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^k} - 0\right|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k}}{2^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k-1} = \infty.$$

Látjuk, hogy a határérték  $\infty$ , vagyis kisebb  $p$ -vel kell próbálkoznunk.

- ② Tippeljük  $p = 1$ -re a konvergencia rendet.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{k+1}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^k} - 0\right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Látjuk, hogy a határérték rendben van, a konvergencia elsőrendű.

Mit jelent az első- és másodrendű konvergenca számokban? ( $\sqrt{2}$ )

Mit jelent az első- és másodrendű konvergencia számokban? ( $\sqrt{2}$ )

①  $p = 1, |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^1$

1.414184570312500

1.414245605468750

1.414215087890625

Mit jelent az első- és másodrendű konvergencia számokban? ( $\sqrt{2}$ )

①  $p = 1, |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^1$

1.414184570312500

1.414245605468750

1.414215087890625

Minden lépésben kb. egy újabb tizedesjegy pontos.

Mit jelent az első- és másodrendű konvergenca számokban? ( $\sqrt{2}$ )

①  $p = 1, |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^1$

1.414184570312500

1.414245605468750

1.414215087890625

Minden lépésben kb. egy újabb tizedesjegy pontos.

②  $p = 2, |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^2$

1.4166666666666667

1.414215686274510

1.414213562374690

Mit jelent az első- és másodrendű konvergenca számokban? ( $\sqrt{2}$ )

①  $p = 1, |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^1$



1.414184570312500

1.414245605468750

1.414215087890625

Minden lépésben kb. egy újabb tizedesjegy pontos.

②  $p = 2, |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^2$

1.416666666666667

1.414215686274510

1.414213562374690

Minden lépésben kb. kétszer annyi tizedesjegy pontos.

**Tétel:**  $p$ -edrendben konvergens iterációk

## **Tétel:** $p$ -edrendben konvergens iterációk

1 Legyen  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C^p[a; b]$  és



## **Tétel:** $p$ -edrendben konvergens iterációk

- 1 Legyen  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C^p[a; b]$  és
- 2 az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  sorozat konvergens, határértéke  $x^*$ .

## Tétel: $p$ -edrendben konvergens iterációk

- 1 Legyen  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C^p[a; b]$  és
- 2 az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  sorozat konvergens, határértéke  $x^*$ .
- 3 Ha  $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ , de  $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$ ,

## Tétel: $p$ -edrendben konvergens iterációk

- 1 Legyen  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C^p[a; b]$  és
- 2 az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  sorozat konvergens, határértéke  $x^*$ .
- 3 Ha  $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ , de  $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$ ,



akkor a konvergencia  $p$ -edrendű és hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p,$$

ahol  $M_p = \max_{\xi \in [a; b]} |\varphi^{(p)}(\xi)|$ .

**Biz.:** Írjuk fel a  $\varphi$  függvény  $x^*$  körüli Taylor-polinomját a maradéktaggal.

$\exists \xi \in (x, x^*)$  (vagy  $(x^*, x)$ ) :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x - x^*) + \cdots + \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x - x^*)^{p-1} + \\ & + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - x^*)^p\end{aligned}$$

**Biz.:** Írjuk fel a  $\varphi$  függvény  $x^*$  körüli Taylor-polinomját a maradéktaggal.

$\exists \xi \in (x, x^*)$  (vagy  $(x^*, x)$ ) :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x - x^*) + \cdots + \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x - x^*)^{p-1} + \\ & + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - x^*)^p\end{aligned}$$

Vizsgáljuk ezt az  $x = x_k$  helyen, kihasználva a deriváltak zérus voltát is. ( $\exists \xi_k$ ):

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \underbrace{\varphi(x^*)}_{x^*} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

**Biz. folyt.:** átrendezve

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!} (x_k - x^*)^p.$$

**Biz. folyt.:** átrendezve

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!} (x_k - x^*)^p.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} = \frac{|\varphi^{(p)}(x^*)|}{p!} \neq 0.$$

Tehát  $(x_k)$  egy  $p$ -adrendben konvergens sorozat.

**Biz. folyt.:** átrendezve

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!} (x_k - x^*)^p.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} = \frac{|\varphi^{(p)}(x^*)|}{p!} \neq 0.$$

Tehát  $(x_k)$  egy  $p$ -adrendben konvergens sorozat.

Vegyük szemügyre a  $k + 1$ -edik és a  $k$ -edik tag hibáját.

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} \cdot |x_k - x^*|^p \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p,$$

ahol  $M_p = \max_{\xi \in [a, b]} |\varphi^{(p)}(\xi)|.$





## Következmény

① Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  kontrakció,

akkor

## Következmény

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  kontrakció,
- 2  $x^*$  a  $\varphi$  fixpontja és

akkor

## Következmény

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  kontrakció,
- 2  $x^*$  a  $\varphi$  fixpontja és
- 3  $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ , de  $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$ ,

akkor

## Következmény

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  kontrakció,
- 2  $x^*$  a  $\varphi$  fixpontja és
- 3  $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ , de  $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$ ,

akkor

- 1 a fixpont egyértelmű,

## Következmény

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  kontrakció,
- 2  $x^*$  a  $\varphi$  fixpontja és
- 3  $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ , de  $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$ ,

akkor

- 1 a fixpont egyértelmű,
- 2  $\forall x_0 \in [a; b]$  esetén az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ,

## Következmény

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  kontrakció,
- 2  $x^*$  a  $\varphi$  fixpontja és
- 3  $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ , de  $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$ ,

akkor

- 1 a fixpont egyértelmű,
- 2  $\forall x_0 \in [a; b]$  esetén az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ,
- 3 és a következő hibabecslés teljesül:  
$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p.$$

## Következmény

- 1 Ha  $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$  kontrakció,
- 2  $x^*$  a  $\varphi$  fixpontja és
- 3  $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ , de  $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$ ,

akkor

- 1 a fixpont egyértelmű,
- 2  $\forall x_0 \in [a; b]$  esetén az  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sorozat konvergens és  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ,
- 3 és a következő hibabecslés teljesül:  
$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p.$$

**Biz.:** Ez a Banach-féle fixponttétel és a  $p$ -edrendben konvergens iterációk tételének összeházasításaként adódik. □

## Példa

Írjunk fel fixpont-iteráció(ka)t az  $x^3 - x - 1 = 0$  egyenlet megoldására, bizonyítsuk a konvergenciát.

**a**  $x = x^3 - 1,$

**b**  $x = \sqrt[3]{x + 1}.$



## Példa

Írjunk fel fixpont-iteráció(ka)t az  $x^3 - x - 1 = 0$  egyenlet megoldására, bizonyítsuk a konvergenciát.

**a**  $x = x^3 - 1,$

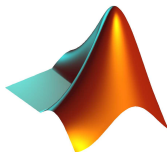
**b**  $x = \sqrt[3]{x + 1}.$

Lásd gyakorlat...

A két sorozat közül az egyik konvergens, a másik divergens.

Melyik-melyik? Milyen intervallumon konvergens? Indokoljuk.

- ① Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- ② Fixponttételek, egyszerű iterációk
- ③ Konvergencia rend
- ④ Matlab példák**

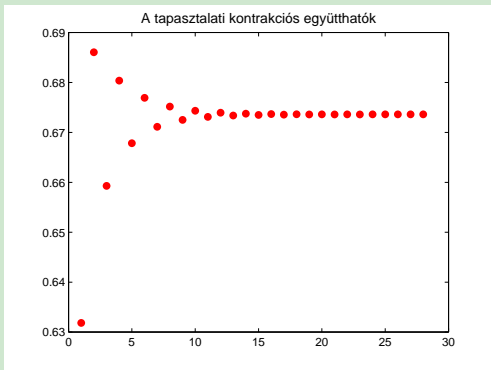


- 1 Intervallumfelezés számolása és szemléltetése.
- 2 Egyszerű iterációk és fixpontok elemzése az  $x = \cos(x)$  egyenlet példáján keresztül.
- 3 Tapasztalati kontrakciós együtthatók szemléltetése.
- 4  $\sqrt{2}$  közelítése különböző iterációkkal ( $p = 1, 2, 3$  rendűek).
- 5 A logisztikus leképezés viselkedésének bemutatása érdekességképpen.

# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

## 1. Példa:

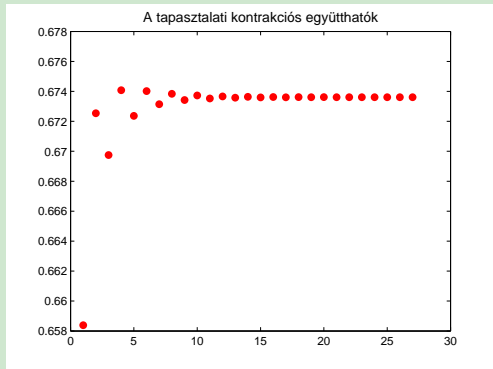
$$x_{k+1} := \cos(x_k), \quad x_0 \in [0, 1]$$



$$q \approx 0.6736$$

# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

## 1. Példa:



Az egymást követő tapasztalati kontrakciós együtthatók mértani közepét rajzoltuk ki.  $q \approx 0.6736$

## 2. Példa:

Matlab segítségével vizsgáljuk a következő sorozatokat:

- 1 A  $\sqrt{2}$  lánc törtekfejtéséből: ( $p = 1$ )

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_k}.$$

## 2. Példa:

Matlab segítségével vizsgáljuk a következő sorozatokat:

- ① A  $\sqrt{2}$  lánc törtkifejtéséből: ( $p = 1$ )

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_k}.$$

- ② Az  $f(x) = x^2 - 2$  függvényre alkalmaztuk a Newton-módszert, analízisből ismerős lehet... ( $p = 2$ )

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{2}{x_k} \right).$$

## 2. Példa:

Matlab segítségével vizsgáljuk a következő sorozatokat:

- ① A  $\sqrt{2}$  lánc törtekfejtéséből: ( $p = 1$ )

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_k}.$$

- ② Az  $f(x) = x^2 - 2$  függvényre alkalmaztuk a Newton-módszert, analízisből ismerős lehet... ( $p = 2$ )

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{2}{x_k} \right).$$

- ③ Másodfokú Taylor-polinom közelítéssel: ( $p = 3$ )

$$x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2 + 6}{3x_k^2 + 2}.$$



## Logisztikus leképezés

Az ökológusok gyakran vizsgálnak olyan - időszakosan szaporodó - populációkat (pl. gyümölcsöskerti kártevők), amelyekben nincs átfedés az egyes generációk között. A kutatások célja ilyenkor annak megértése, hogy az  $n + 1$ -edik generáció számossága ( $N_{n+1}$ ) hogyan függ az előző,  $n$ -edik generáció számosságától ( $N_n$ ). Az ismert tendenciát figyelembe véve, nevezetesen, hogy az utódok száma ( $N_{n+1}$ ) általában nő, ha a populáció számossága kicsi, és csökken, ha  $N_n$  értéke nagy, egy egyszerű nemlineáris differenciaegyenletet írhatunk fel:

$$N_{n+1} = kN_n - bN_n^2 = N_n(k - bN_n),$$

amelyet logisztikus differenciaegyenletnek neveznek, és amelyben  $k$  és  $b$  a populációk növekedésének, illetve csökkenésének mértékét megszabó paraméterek.

$$N_{n+1} = kN_n \left(1 - \frac{bN_n}{k}\right) \Leftrightarrow \frac{bN_{n+1}}{k} = k \frac{bN_n}{k} \left(1 - \frac{bN_n}{k}\right)$$

Az  $x_n = bN_n/k$  jelölést bevezetve az egyenlet a következő egyszerű alakra hozható:

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n),$$

amit logisztikus leképezésnek nevezünk.

$$N_{n+1} = kN_n \left(1 - \frac{bN_n}{k}\right) \Leftrightarrow \frac{bN_{n+1}}{k} = k \frac{bN_n}{k} \left(1 - \frac{bN_n}{k}\right)$$

Az  $x_n = bN_n/k$  jelölést bevezetve az egyenlet a következő egyszerű alakra hozható:

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n),$$

amit logisztikus leképezésnek nevezünk.

A logisztikus leképezés egyik nagy előnye az, hogy  $1 < k < 4$  esetén a megoldás mindig a  $0 < x < 1$  intervallumban marad. A  $k < 1$  esetben az összes megoldás az  $x = 0$  ponthoz tart, azaz a populáció kihal.

$k$  értéke és a megfigyelt dinamikai viselkedés:

- 3.0000 : a fixpont instabilissá válik, megjelenik az oszcilláció
- 3.4500 : a perióduskettőződés kezdete
- 3.5700 : a  $2n$  periódusú oszcillációk torlódási pontja, a kaotikus tartomány kezdete
- 3.6786 : az első páratlan periódusú oszcilláció megjelenése
- 3.8284 : a háromperiódusú oszcilláció megjelenése
- 4.0000 : a kaotikus tartomány vége.

$k$  értéke és a megfigyelt dinamikai viselkedés:

- 3.0000 : a fixpont instabilissá válik, megjelenik az oszcilláció
- 3.4500 : a perióduskettőződés kezdete
- 3.5700 : a  $2n$  periódusú oszcillációk torlódási pontja, a kaotikus tartomány kezdete
- 3.6786 : az első páratlan periódusú oszcilláció megjelenése
- 3.8284 : a háromperiódusú oszcilláció megjelenése
- 4.0000 : a kaotikus tartomány vége.

**Irodalom:** Gáspár Vilmos: Játsszunk káoszt! (Természet Világa cikk)

## Példa

Vizsgáljuk meg az  $x_0 \in [0, 1]$ ,  $x_{k+1} = \alpha \cdot x_k(1 - x_k)$  iterációk (logisztikus leképezés) viselkedését különböző  $\alpha \in [0, 4]$  paraméterek esetén.

## Példa

Vizsgáljuk meg az  $x_0 \in [0, 1]$ ,  $x_{k+1} = \alpha \cdot x_k(1 - x_k)$  iterációk (logisztikus leképezés) viselkedését különböző  $\alpha \in [0, 4]$  paraméterek esetén.

**Megj.:** Általában nem kontrakció. Könnyen eljuthatunk differenciaegyenletek bifurkációinak és a káoszelmélet alapjainak vizsgálatához. . .