

Numerikus módszerek C

4. előadás: Az LU-felbontás, Vektornormák

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 2 Műveletigény
- 3 Megmaradási tételek
- 4 Rövidített GE (progonka módszer)
- 5 Vektornormák

- 1 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 2 Műveletigény
- 3 Megmaradási tételek
- 4 Rövidített GE (progonka módszer)
- 5 Vektornormák

Definíció: LU -felbontás

Az A mátrix LU -felbontásának nevezzük az $L \cdot U$ szorzatot, ha

$$A = LU, \quad L \in \mathcal{L}_1, \quad U \in \mathcal{U}.$$

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_y = b$ helyett

- 1 oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű,
- 2 majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t.

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_y = b$ helyett $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

- 1 oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $(n^2 + \mathcal{O}(n))$
- 2 majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_y = b$ helyett $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

- 1 oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $(n^2 + \mathcal{O}(n))$
- 2 majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Összehasonlításul: egy mátrix-vektor szorzás műveletigénye:
 $n \cdot (2n - 1) = 2n^2 + \mathcal{O}(n)$.

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_y = b$ helyett $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

- 1 oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $(n^2 + \mathcal{O}(n))$
- 2 majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Összehasonlításul: egy mátrix-vektor szorzás műveletigénye:
 $n \cdot (2n - 1) = 2n^2 + \mathcal{O}(n)$.

Persze valamikor elő kell állítani az LU -felbontást. $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$
Előnyös, ha sokszor ugyanaz A .

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

- Nem ismerjük L -t és U -t: ismeretlenek a mátrixokban.
- Viszont szorzatukat ismerjük: $LU = A$.
- A egyes elemeit a mátrixszorzás alapján felírva egyenleteket kapunk L és U elemeire.
- *Jó sorrendben* felírva az egyenleteket, mindig megkapjuk egy-egy új ismeretlen értékét.
- A GE-nál láttuk, hogy U 1. sora azonos A 1. sorával (a GE az 1.sort nem változtatja).
- L 1. oszlopát úgy kapjuk, hogy A 1. oszlopát leosztjuk a_{11} -gyel.

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 4. & 4. & 5. & 5. \\ 6. & 6. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

sorfolytonosan

$$\begin{pmatrix} 1. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

oszlopfolytonosan

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 2. & 4. & 5. & 5. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

parkettaszerűen

Példa: LU -felbontás közvetlenül

- a Készítsük el a példamátrixunk LU -felbontását közvetlenül a mátrixszorzás alapján.
- b Nézzünk egy újabb példát is. (Vigyázat, $\det(B_2) = 0$.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolyonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{21} \cdot 2 = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{21} \cdot 2 = -4$$

$$l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} = 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{21} \cdot 2 = -4$$

$$l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} = 5$$

$$l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$l_{31} \cdot 2 = 6$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 \end{aligned}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 \end{aligned}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & l_{32} &= \frac{-5}{5} = -1 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 & u_{33} &= 4 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = -1 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad l_{21} \cdot 2 = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$l_{31} \cdot 2 = 6$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 \\ l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 \end{aligned}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & \rightsquigarrow & \text{ellentmondásos egyenlet} \end{aligned}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & \rightsquigarrow & \text{ellentmondásos egyenlet} \end{aligned}$$

Mivel $D_2 = \det(B_2) = 0$, így $u_{22} = 0$ lesz. Az LU -felbontás nem készíthető el. GE-t alkalmazva $a_{22}^{(1)} = 0$ lenne, emiatt sort kéne cserélni.

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Tétel: az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$\begin{aligned} i \leq j \text{ (felső)} \quad & u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \\ i > j \text{ (alsó)} \quad & l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right). \end{aligned}$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i -edik sorának j -edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i -edik sorának j -edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i \leq j$, azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$, valamint $l_{ii} = 1$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^i l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i -edik sorának j -edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i \leq j$, azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$, valamint $l_{ii} = 1$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^i l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ebből u_{ij} kifejezhető

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha $u_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha $u_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd az előadás diásorát) megyünk végig az (i, j) indexekkel A elemein, akkor az l_{ij} illetve u_{ij} értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. □

- 1 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 2 Műveletigény**
- 3 Megmaradási tételek
- 4 Rövidített GE (progonka módszer)
- 5 Vektornormák

Az LU -felbontás műveletigénye

Tétel: Az LU -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Az LU -felbontás műveletigénye

Tétel: Az LU -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: A GE-ből trivi, mert vele az LU -felbontás is előállítható.

Tétel: Az LU -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: A GE-ből trivi, mert vele az LU -felbontás is előállítható.

A képletekből: Rögzített j -re:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

u_{ij} -hez $(i - 1)$ szorzás és $(i - 1)$ összeadás kell. Összesen $2(i - 1)$ művelet.

Tétel: Az LU -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: A GE-ből trivi, mert vele az LU -felbontás is előállítható.

A képletekből: Rögzített j -re:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

u_{ij} -hez $(i-1)$ szorzás és $(i-1)$ összeadás kell. Összesen $2(i-1)$ művelet. Rögzített i -re:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right),$$

l_{ij} -hez 1 osztás, $(j-1)$ szorzás és $(j-1)$ összeadás kell. Összesen $2j-1$ művelet.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j 2(i-1) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} (2j-1) = \\
 & \sum_{j=1}^n 2 \cdot \frac{(j-1)j}{2} + \sum_{i=2}^n \left(2 \cdot \frac{(i-1)i}{2} - (i-1) \right) = \\
 & \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j + \sum_{i=2}^n (i-1)^2 = \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\
 & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \\
 & = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \quad \square
 \end{aligned}$$

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: lásd GE visszahelyettesítés.

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: lásd GE visszahelyettesítés.

Tétel: Az $Lx = b$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: lásd GE visszahelyettesítés.

Tétel: Az $Ly = b$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: Rögzített i . sorra $(i - 1)$ szorzás és $(i - 1)$ összeadás.
Összesen: $2(i - 1)$ művelet.

$$\sum_{i=2}^n 2(i - 1) = \sum_{s=1}^{n-1} 2s = 2 \cdot \frac{n(n - 1)}{2} = n^2 + \mathcal{O}(n). \quad \square$$

- 1 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 2 Műveletigény
- 3 Megmaradási tételek**
- 4 Rövidített GE (progonka módszer)
- 5 Vektornormák

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^T$.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^T$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

- 1 $\langle Ax, x \rangle = x^T Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
- 2 minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
- 3 minden sajátértéke pozitív.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^T$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

- 1 $\langle Ax, x \rangle = x^T Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
- 2 minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
- 3 minden sajátértéke pozitív.

Állítás: pozitív definit mátrixok ekvivalens jellemzése

Az előző **1. 2. 3.** feltételek ekvivalensek.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^T$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

- 1 $\langle Ax, x \rangle = x^T Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
- 2 minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
- 3 minden sajátértéke pozitív.

Állítás: pozitív definit mátrixok ekvivalens jellemzése

Az előző **1. 2. 3.** feltételek ekvivalensek.

Biz.: nélkül.



Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira**, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ji}| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaire**, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ji}| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Példa:

A következő mátrix szigorúan diagonálisan domináns a soraira és oszlopaire is.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definíció:

Az A mátrix **fél sávszélessége** $s \in \mathbb{N}$, ha

$$\forall i, j : |i - j| > s : a_{ij} = 0 \text{ és}$$

$$\exists k, l : |k - l| = s : a_{kl} \neq 0.$$

Definíció:

Az A mátrix **fél sávszélessége** $s \in \mathbb{N}$, ha

$$\forall i, j : |i - j| > s : a_{ij} = 0 \text{ és}$$

$$\exists k, l : |k - l| = s : a_{kl} \neq 0.$$



Példa:

A következő mátrix szimmetrikus, pozitív definit és fél sávszélessége 1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Definíció:

Az A mátrix **profilja** sorokra a (k_1, \dots, k_n) , oszlopokra az (l_1, \dots, l_n) szám n -sek, melyekre

$$\forall j = 1, \dots, k_i : a_{ij} = 0 \text{ és } a_{i, k_i+1} \neq 0,$$

$$\forall i = 1, \dots, l_j : a_{ij} = 0 \text{ és } a_{l_j+1, j} \neq 0.$$

Soronként és oszloponként az első nem nulla elemig a nullák száma.

Definíció:

Az A mátrix **profilja** sorokra a (k_1, \dots, k_n) , oszlopokra az (l_1, \dots, l_n) szám n -sek, melyekre

$$\forall j = 1, \dots, k_i : a_{ij} = 0 \text{ és } a_{i, k_i+1} \neq 0,$$

$$\forall i = 1, \dots, l_j : a_{ij} = 0 \text{ és } a_{l_j+1, j} \neq 0.$$

Soronként és oszloponként az első nem nulla elemig a nullák száma.


Példa:

A mátrix profilja sorokra $(0, 0, 2, 1)$, oszlopokra $(0, 1, 1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$



Készítsük el az $Ax = b$ LER k . sor utáni particionálását ($k < n$, $k \in \mathbb{N}$) és tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható.



$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$


Particionált alakban a LER:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

Végezzünk el egy blokkos GE-s lépést:

2. egyenlet $- (A_{21} \cdot A_{11}^{-1})$ 1. egyenlet



$$\underbrace{(A_{21} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{11})}_0 x_1 + (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1$$

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1.$$

Particionálva a LER:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{bmatrix}$$

- Most már csak az $(n - k) \times (n - k)$ -s jobb alsó mátrix részen kell folytatnunk a GE-t.
- $k = 1$ esetén $A_{11} = (a_{11})$. Feltéve, hogy $a_{11} \neq 0$, akkor a fenti lépés a (blokk nélküli) 1. GE-s lépést írja le.

Definíció: Schur-komplementer

Tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható mátrix. Az A mátrix A_{11} -re **vonatkozó Schur-komplementere** az


$$[A|A_{11}] := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$(n - k) \times (n - k)$ -s mátrix.

A Schur komplementer azt mutatja, hogy az A_{11} -gyel végzett GE után mely mátrixon kell folytatni az eliminációt. Az új fogalom segítségével könnyebben fogalmazhatjuk meg, hogy a GE mely tulajdonságokat örökíti tovább.


Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A -ról a Schur-komplementerre:

- 1 $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det([A|A_{11}]) \neq 0$
- 2 A szimmetrikus $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szimmetrikus 
- 3 A pozitív definit $\Rightarrow [A|A_{11}]$ pozitív definit
- 4 A szig. diag. dom. $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
- 5 $[A|A_{11}]$ fél sáv szélessége $\leq A$ fél sáv szélessége
- 6 A GE során a profilnál a soronkénti és oszloponkénti nullák az első nem nulla elemig megmaradnak.

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A -ról a Schur-komplementerre:

- 1 $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det([A|A_{11}]) \neq 0$
- 2 A szimmetrikus $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szimmetrikus
- 3 A pozitív definit $\Rightarrow [A|A_{11}]$ pozitív definit
- 4 A szig. diag. dom. $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
- 5 $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq A$ fél sávszélessége 
- 6 A GE során a profilnál a soronkénti és oszloponkénti nullák az első nem nulla elemig megmaradnak.

Gondoljuk végig az LU-felbontás L, U mátrixára a megfelelő tulajdonságokat.

Biz.: 1.) Determináns:

Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array} \right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \Leftrightarrow \det([A|A_{11}]) \neq 0$$



2.) Szimmetria:

Ha A szimmetrikus, akkor A_{11} és A_{22} is az, továbbá $A_{21}^\top = A_{12}$.

$$\begin{aligned} [A|A_{11}]^\top &= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^\top = A_{22}^\top - A_{12}^\top(A_{11}^{-1})^\top A_{21}^\top = \\ &= A_{22}^\top - A_{12}^\top(A_{11}^\top)^{-1}A_{21}^\top = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = [A|A_{11}] \end{aligned}$$



Biz.: 3.) Pozitív definittség:

Tudjuk, hogy $\langle Ax, x \rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.

Be kell látnunk, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2 \rangle > 0$ minden $x_2 \neq 0$ vektorra.

Vegyük észre, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ és $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

$$Ax = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{array} \right]$$

Legyen $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ tetszőleges, válasszuk meg $x_1 \in \mathbb{R}^k$ vektort úgy, hogy Ax első k komponense 0 legyen:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 := -A_{11}^{-1}A_{12}x_2.$$

$$x_1 := -A_{11}^{-1}A_{12}x_2$$

Helyettesítsük be a skaláris szorzatba:

$$\begin{aligned} 0 < \langle Ax, x \rangle &= \underbrace{\langle A_{11}x_1 + A_{12}x_2, x_1 \rangle}_0 + \langle A_{21}x_1 + A_{22}x_2, x_2 \rangle = \\ &= \langle A_{21}(-A_{11}^{-1}A_{12}x_2) + A_{22}x_2, x_2 \rangle = \\ &= \langle (-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})x_2, x_2 \rangle = \\ &= \langle (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x_2, x_2 \rangle = \langle [A|A_{11}]x_2, x_2 \rangle \end{aligned}$$



Biz.: 4.) Szigorúan diagonálisan domináns a soraira $k = 1$ esetén:

A GE az első sort nem változtatja, ezen a szig. diag. dom. megmarad. Be kellene látnunk, hogy $i = 2, \dots, n$ -re

$$|a_{ii}^{(1)}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{ij}^{(1)}|.$$

A GE képleteit behelyettesítve

$$\left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| > \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right|.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $|a_{11}| \neq 0$ -val

$$|a_{ii} a_{11} - a_{i1} a_{1i}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{ij} a_{11} - a_{i1} a_{1j}| \quad (i = 2, \dots, n).$$

Megmaradási tételek bizonyítása

A kapott egyenlőtlenség bal oldalát lefelé, jobb oldalát felfelé becsljük

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{i1}a_{1i}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n (|a_{ij}a_{11}| + |a_{i1}a_{1j}|) \quad (i = 2, \dots, n).$$

A továbbiakban ezt fogjuk belátni. Az 1. sort a GE helyben hagyja, ezért itt továbbra is igaz, hogy $|a_{11}| > \sum_{j=2}^n |a_{1j}|$
Szorozzuk $|a_{i1}| \neq 0$ -val és vegyük külön az i . tagot:

$$|a_{11}a_{i1}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{1j}a_{i1}|.$$

Írjuk fel a szigorúan diagonálisan dominanciát az $i = 2, \dots, n$ -re
 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| = |a_{i1}| + \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{ij}|.$
Szorozzuk $|a_{11}|$ -gyel mindkét oldalt:

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{i1}a_{11}| + \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{ij}a_{11}|.$$

Becsüljük $|a_{ij}a_{11}|$ -t alulról

$$|a_{ij}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j \neq i}^n (|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ij}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n (|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

- Ha $a_{i1} = 0$, akkor ezen a soron nem változtat a GE, tehát a diag. dominancia nem változik.
- $a_{11} \neq 0$, mivel ez feltétele a GE-nak.

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$ -t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j \neq i}^n (|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j \neq i}^n (|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

- Ha $a_{i1} = 0$, akkor ezen a soron nem változtat a GE, tehát a diag. dominancia nem változik.
- $a_{11} \neq 0$, mivel ez feltétele a GE-nak.

Az oszlopokra vonatkozó bizonyítás analóg módon elvégezhető. \square

- 1 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 2 Műveletigény
- 3 Megmaradási tételek
- 4 Rövidített GE (progonka módszer)
- 5 Vektornormák

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett 3 átlóban $3n - 2$ elem.

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett 3 átlóban $3n - 2$ elem.
- Műveletigény: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ helyett $8n + \mathcal{O}(1)$.

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett 3 átlóban $3n - 2$ elem.
- Műveletigény: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ helyett $8n + \mathcal{O}(1)$.

Mivel a GE a sávszélességet megtartja, tridiagonális esetben a három átlón kívül mindig nulla lesz. A GE végén kapott U mátrix is csak két átlót tartalmaz, ezért a visszahelyettesítés i . egyenlete

$$a_{ii}^{(i-1)} x_i + a_{i,i+1}^{(i-1)} x_{i+1} = a_{i,n+1}^{(i-1)}.$$

Ebből x_i -t kifejezve, új jelölésrendszerrel $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ ($i = 1, \dots, n$) alakú.

Rövidített GE (progonka módszer)

Jelölések: $A = \text{tridiag}(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Rövidített GE (progonka módszer)

Jelölések: $A = \text{tridiag}(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A LER 1. egyenlete:

$$\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1 \rightarrow \alpha_1 x_1 = -\gamma_1 x_2 + b_1 \rightarrow x_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} x_2 + \frac{b_1}{\alpha_1}$$

Rövidített GE (progonka módszer)

Jelölések: $A = \text{tridiag}(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A LER 1. egyenlete:

$$\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1 \rightarrow \alpha_1 x_1 = -\gamma_1 x_2 + b_1 \rightarrow x_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} x_2 + \frac{b_1}{\alpha_1}$$

Az $x_1 = f_1 x_2 + g_1$ alakot keresve $f_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ és $g_1 = \frac{b_1}{\alpha_1}$.

Rövidített GE (progonka módszer)

Tegyük fel, hogy f_1, \dots, f_{i-1} és g_1, \dots, g_{i-1} , továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ ($k = 1, \dots, i-1$) rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni.

Tegyük fel, hogy f_1, \dots, f_{i-1} és g_1, \dots, g_{i-1} , továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ ($k = 1, \dots, i-1$) rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i . egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$\beta_{i-1} x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i$$

$$\beta_{i-1} (f_{i-1} x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i$$

$$(\beta_{i-1} f_{i-1} + \alpha_i) x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}$$

Tegyük fel, hogy f_1, \dots, f_{i-1} és g_1, \dots, g_{i-1} , továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ ($k = 1, \dots, i-1$) rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i . egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$\beta_{i-1} x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i$$

$$\beta_{i-1} (f_{i-1} x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i$$

$$(\beta_{i-1} f_{i-1} + \alpha_i) x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}$$

$$(\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}) x_i = -\gamma_i x_{i+1} + (b_i - \beta_{i-1} g_{i-1})$$

$$x_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}} x_{i+1} + \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}.$$

Rövidített GE (progonka módszer)

Tegyük fel, hogy f_1, \dots, f_{i-1} és g_1, \dots, g_{i-1} , továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ ($k = 1, \dots, i-1$) rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i . egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$\beta_{i-1} x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i$$

$$\beta_{i-1}(f_{i-1} x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i$$

$$(\beta_{i-1} f_{i-1} + \alpha_i) x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}$$

$$(\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}) x_i = -\gamma_i x_{i+1} + (b_i - \beta_{i-1} g_{i-1})$$

$$x_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}} x_{i+1} + \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}.$$

Innen $f_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$ és $g_i = \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}.$

Írjuk fel az n . egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

Írjuk fel az n . egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

$$\beta_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n = b_n$$

$$\beta_{n-1}(f_{n-1}x_n + g_{n-1}) + \alpha_n x_n = b_n$$

$$(\beta_{n-1}f_{n-1} + \alpha_n)x_n = b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}$$

Írjuk fel az n . egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

$$\beta_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n = b_n$$

$$\beta_{n-1}(f_{n-1}x_n + g_{n-1}) + \alpha_n x_n = b_n$$

$$(\beta_{n-1}f_{n-1} + \alpha_n)x_n = b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}$$

$$x_n = \frac{b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1}f_{n-1}} =: g_n$$



Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \dots, n-1: \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1}f_{n-1}}$$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \dots, n-1: \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1}f_{n-1}}$$

2. lépés: $x_n := g_n$

$$i = n-1, n-2, \dots, 1: \quad x_i = f_i x_{i+1} + g_i$$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$i = 2, \dots, n-1:$ $f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}$

$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}$

$g_n := \frac{b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1}f_{n-1}}$

2. lépés: $x_n := g_n$

$i = n-1, n-2, \dots, 1:$ $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$

Megj.: 3 művelettel több, de könnyebben megjegyezhető az algoritmus, ha f_n értékét is meghatározzuk.

Ekkor $x_{n+1} := 0$ -val indítjuk a 2. lépést.

Műveletigény:

1. lépés (előre):

f_1, g_1 : 2 művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):

f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i . lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i -ben 1 db, g_i -ben 3 db, tehát $i = 2, \dots, n - 1$ -re összesen $6(n - 2)$ db.

g_n -ben 5 db művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):

f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i . lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i -ben 1 db, g_i -ben 3 db, tehát $i = 2, \dots, n - 1$ -re összesen $6(n - 2)$ db.

g_n -ben 5 db művelet.

2. lépés (vissza):

$i = n - 1, n - 2, \dots, 1$ -re $2(n - 1)$ db művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):

f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i . lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i -ben 1 db, g_i -ben 3 db, tehát $i = 2, \dots, n-1$ -re összesen $6(n-2)$ db.

g_n -ben 5 db művelet.

2. lépés (vissza):

$i = n-1, n-2, \dots, 1$ -re $2(n-1)$ db művelet.

Összesen:

$$2 + 6(n-2) + 5 + 2(n-1) = 8n - 7 = 8n + \mathcal{O}(1) \text{ művelet.}$$



- 1 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 2 Műveletigény
- 3 Megmaradási tételek
- 4 Rövidített GE (progonka módszer)
- 5 Vektornormák**

Definíció: vektorok „hossza”

Az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját” jelölje $\|\cdot\|_2$.

A következőképpen számolható:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^\top x} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A (vektor)norma a „hossz”, „nagyság” általánosítása.

Definíció: vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

- ❶ $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n),$
- ❷ $\|x\| = 0 \iff x = 0,$
- ❸ $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n),$
- ❹ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n).$

Definíció: vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

- ❶ $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n),$
- ❷ $\|x\| = 0 \iff x = 0,$
- ❸ $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n),$
- ❹ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n).$

Ezek a vektornormák *axiómái*.

Állítás: skaláris szorzat által generált vektornorma

Ha adott az $\langle ., . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skaláris szorzat, akkor az $f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ függvény *norma*. Jele: $\|x\|_2$.

Állítás: skaláris szorzat által generált vektornorma

Ha adott az $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skaláris szorzat, akkor az $f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ függvény *norma*. Jele: $\|x\|_2$.

Biz.: Nem kell.

Ez a „hagyományos hossz”.



Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle =$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \\ &= \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\|_2^2} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \\ &= \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\|_2^2} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Diszkrimináns nempozitív: $\langle x, y \rangle^2 - \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \leq 0$,

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \\ &= \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\|_2^2} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Diszkrimináns nempozitív: $\langle x, y \rangle^2 - \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \leq 0$, így

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2.$$



Állítás: Gyakori vektornormák $(1, 2, \infty)$

A következő formulák vektornormákat **definiálnak** \mathbb{R}^n felett:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ (Manhattan-norma),
- $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ (Euklideszi-norma),
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n |x_i|$ (Csebisev-norma).

Biz.: Hf.

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok 1, 2, ∞ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok 1, 2, ∞ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\|x\|_1 = 3 + 4 = 7, \quad \|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \|x\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4.$$

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok 1, 2, ∞ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\|x\|_1 = 3 + 4 = 7, \quad \|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \|x\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4.$$

$$\|y\|_1 = 4 + |-8| + 1 = 13, \quad \|y\|_2 = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{73}, \\ \|y\|_\infty = \max\{4, |-8|, 1\} = 8.$$

Állítás: p -normák

A következő $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty).$$

Állítás: p -normák

A következő $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty).$$

Biz.: Nem kell. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkovszki-egyenlőtlenség.



Állítás: p -normák

A következő $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty).$$

Biz.: Nem kell. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkovszki-egyenlőtlenség.

**Megjegyzések:**

- $0 \leq p < 1$ esetén nem norma,
- $p_1 \leq p_2 \implies \|x\|_{p_1} \geq \|x\|_{p_2}$,
- Speciális esetek: $p = 1 \rightsquigarrow \|x\|_1$, $p = 2 \rightsquigarrow \|x\|_2$,
- Sőt: $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Állítás: normák közötti egyenlőtlenségek

- $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_{\infty},$
- $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_{\infty},$
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2,$
- sőt ezek alapján $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$

Állítás: normák közötti egyenlőtlenségek

- $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_{\infty},$
- $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_{\infty},$
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2,$
- sőt ezek alapján $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$

Biz.: Nem kell.



(Az elsőbe könnyű belegondolni, a negyedike láttunk példát.)

Definíció: ekvivalens normák

Az $\|\cdot\|_a$ és $\|\cdot\|_b$ vektornormák *ekvivalensek*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$c_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \cdot \|x\|_b \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$



Definíció: ekvivalens normák

Az $\|\cdot\|_a$ és $\|\cdot\|_b$ vektornormák *ekvivalensek*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$c_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \cdot \|x\|_b \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Állítás: végesdimenziós normák ekvivalenciája

Tetszőleges \mathbb{R}^n -en értelmezett vektornorma ekvivalens az Euklideszi-vektornormával. (Azaz adott végesdimenziós térben minden norma ekvivalens.)

Definíció: konvergencia vektornormában

Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

x^* a sorozat határértéke.

Definíció: konvergencia vektornormában

Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

x^* a sorozat határértéke.

Megj.: Mivel \mathbb{R}^n -en a vektornormák ekvivalensek, ezért ha egy sorozat konvergens az egyik vektornormában, akkor mindegyikben.

Ekvivalens átfogalmazások a konvergenciára:

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq N_0 : \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

Ekvivalens átfogalmazások a konvergenciára:

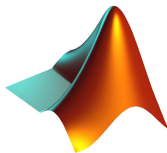
- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq N_0 : \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq N_0 : x_k \in K_\varepsilon(x^*).$$





- 1 Példák p -normákra, egységgömbökre ($p = 1, 2, \infty, \dots$).
- 2 Példák pozitív definit mátrixokra,