Numerikus módszerek C

5. előadás: Mátrixnormák, a LER érzékenysége

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Definíció: mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Definíció: mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Ugyanaz, mint a vektornormáknál, plusz: „szubmultiplikativitás”. Ezek a mátrixnormák axiómái.

Definíció: Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|.\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Állítás: Frobenius-norma

A $\|.\|_F$ függvény valóban mátrixnorma.

Definíció: Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|.\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \boxed{\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.}$$

Állítás: Frobenius-norma

A $\|.\|_F$ függvény valóban mátrixnorma.

Biz.: 1–4. következik a $\|.\|_2$ vektornorma tulajdonságaiból.
Az 5. belátható CBS segítségével. $\square$

Példa: egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Példa: egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2 + 2^2} = 5$$

$$\|B\|_F = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 5^2} = 6$$

Tartalomjegyzék

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Definíció: indukált norma, természetes mátrixnormák

Legyen $\|.\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges vektornorma. Ekkor a

$$\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

függvényt a $\|.\|_v$ *vektornorma által indukált mátrixnormának* hívjuk. Egy mátrixnormát *természetesnek* nevezünk, ha van olyan vektornorma, ami indukálja.

Tétel: indukált normák

Az „indukált mátrixnormák” valóban mátrixnormák.

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.
2. Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprémum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprémum 0, akkor minden x-re Ax-nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.
2. Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprémum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprémum 0, akkor minden x-re Ax-nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.
3. $$\|\lambda A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \|A\| .$$

Biz. (folytatás):

4.

$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$

Biz. (folytatás):

4.
$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$
$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$

5. $B = 0 \quad \Rightarrow \quad \|B\| = 0$, valamint
$A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|AB\| = 0.$
Az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, tehát igaz az állítás.

Biz. (folytatás): Ha $B \neq 0$, akkor

$$\|A \cdot B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0, Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

$$\leq \sup_{Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\| \, .$$

Meggondolható, hogy a $Bx \neq 0$ feltétel nem változtatja meg a szuprémum értékét; közben bevezettük az $y := Bx$ jelölést. $\square$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v .$$

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v \, .$$

- A sup helyett max is írható.

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v \,.$$

- A sup helyett max is írható.
- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \implies \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \implies \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \,.$$

Sőt: $\|A\|$ a legkisebb ilyen felső korlát.

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Állítás: természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Állítás: természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

Biz.: Láttuk az előbb. Az $x = 0$ eset meggondolandó. $\square$

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma),

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$ (spektrálnorma).

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$ (spektrálnorma).

Jel.: $\lambda_i(M)$: az M mátrix i-edik sajátértéke $(Mv = \lambda v,\ v \neq 0)$.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

A bizonyítás „dallama":

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \le f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|} \right) \leq \underbrace{\left(\max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)} \cdot \|x\|_1 .$$

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|} \right) \leq \underbrace{\left(\max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)} \cdot \|x\|_1 .$$

Legyen $x = e_k$, ahol a k-adik oszlopösszeg maximális. Ekkor

$$\|Ae_k\|_1 = \underbrace{\ldots} \underbrace{\|e_k\|_1}_{1} .$$

Bizonyítás $\|.\|_\infty$ esetén:

Állítás: $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint $\|.\|_1$ esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az

$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel...

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Bizonyítás $\|.\|_\infty$ esetén:

Állítás: $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint $\|.\|_1$ esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az
$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$
vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel...

Bizonyítás $\|.\|_2$ esetén:

Állítás: $\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$.

- Előbb belátjuk, hogy a sajátértékek nemnegatívak.
- A becslés a diagonalizálás alapján adódik.
- Válasszuk a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektort az egyenlőséghez.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^\top A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$, azaz $A^\top A$ szimmetrikus, vagyis $A^\top A$ sajátértékei valósak.

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^\top A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$, azaz $A^\top A$ szimmetrikus, vagyis $A^\top A$ sajátértékei valósak.
- Legyen $y \neq 0$ az $A^\top A$ mátrix λ-hoz tartozó sajátvektora, azaz
$$A^\top A y = \lambda \cdot y.$$
Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az $y^\top$ vektorral:
$$y^\top A^\top A y = \lambda \cdot y^\top y.$$
Innen

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^\top A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$, azaz $A^\top A$ szimmetrikus, vagyis $A^\top A$ sajátértékei valósak.

- Legyen $y \neq 0$ az $A^\top A$ mátrix λ-hoz tartozó sajátvektora, azaz

$$A^\top A y = \lambda \cdot y.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az $y^\top$ vektorral:

$$y^\top A^\top A y = \lambda \cdot y^\top y.$$

Innen

$$\lambda = \frac{y^\top A^\top A y}{y^\top y} = \frac{(Ay)^\top (Ay)}{y^\top y} = \frac{\|Ay\|_2^2}{\|y\|_2^2} \geq 0.$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz. (folytatás): Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve Ax normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik U ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^\top A = U^\top D U \quad \Leftrightarrow \quad U A^\top A U^\top = D$$

úgy, hogy a diagonálisban $A^\top A$ sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az $y = Ux$ jelölést.

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^\top (Ax) = x^\top A^\top A x = x^\top U^\top D U x = (Ux)^\top D (Ux)$$

$$= y^\top D y = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^{n} d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \cdot \|y\|_2^2 \,.$$

Biz. (folytatás): Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve Ax normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik U ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^\top A = U^\top DU \quad \Leftrightarrow \quad UA^\top AU^\top = D$$

úgy, hogy a diagonálisban $A^\top A$ sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az $y = Ux$ jelölést.

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^\top (Ax) = x^\top A^\top Ax = x^\top U^\top DUx = (Ux)^\top D(Ux)$$

$$= y^\top Dy = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^{n} d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \cdot \|y\|_2^2 \,.$$

Belátjuk, hogy $\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2$.

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top U x = x^\top x = \|x\|_2^2$, ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \ldots \leq \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2 .$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2$, ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \ldots \leq \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2 \,.$$

$x \neq 0$ esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan $x \neq 0$ vektor, amire a szuprémum felvétetik.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top U x = x^\top x = \|x\|_2^2$, ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \ldots \leq \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2 \,.$$

$x \neq 0$ esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan $x \neq 0$ vektor, amire a szuprémum felvétetik.

Legyen $\lambda_m = \max \lambda_i(A^\top A)$ és $v_m \neq 0$, $\|v_m\|_2 = 1$ a hozzá tartozó sajátvektor.

$$\|Av_m\|_2^2 = (Av_m)^\top (Av_m) = v_m^\top \underbrace{A^\top A\, v_m}_{\lambda_m \cdot v_m} = \lambda_m \cdot \underbrace{v_m^\top v_m}_{=1} = \lambda_m .$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Állítás:

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Állítás:

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

Biz.: Trivi.

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Biz.: Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátixok esetén létezik U unitér hasonlósági transzformáció, mellyel A diagonális alakra hozható.

$$U^*AU = D = \operatorname{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^*$$

$$A^*A = (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$$

$$\lambda_i(A^*A) = \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2$$

$$\varrho(A^*A) = \varrho(A)^2$$

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Biz.: Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátixok esetén létezik U unitér hasonlósági transzformáció, mellyel A diagonális alakra hozható.

$$U^*AU = D = \operatorname{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^*$$

$$A^*A = (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$$

$$\lambda_i(A^*A) = \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2$$

$$\varrho(A^*A) = \varrho(A)^2$$

Innen $\|A\|_2 = \varrho(A^*A)^{1/2} = \varrho(A)$.

Példa: $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Példa: $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{1+2, |-4|+2\} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1+|-4|, 2+2\} = 5$$

Példa: $\|.\|_2$ mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix $\|.\|_2$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Példa: $\|.\|_2$ mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix $\|.\|_2$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix},$$

Szerencsénkre látjuk a sajátértékeit...

$$\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2} = \sqrt{\max\{5, 20\}} = \sqrt{20} \approx 4.4721.$$

Tartalomjegyzék

Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.

Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.

Biz.: Tekintsük az $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egységmátrix normáját.

- Indukált mátrixnormák esetén $\|I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v} = 1$.
- Másrészt $\|I\|_F = \sqrt{n}$.
- Tehát nincs olyan vektornorma, ami a Frobenius-normát indukálná (ha $n > 1$). $\square$

Állítás: spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

Állítás: spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

Biz.: Belátjuk, hogy $|\lambda| \leq \|A\|$.
(Legyen λ tetszőleges sajátérték és $v \neq 0$ a hozzátartozó sajátvektor.)

$$Av = \lambda v$$

$$Avv^\top = \lambda vv^\top$$

$$\|A\| \cdot \left\|vv^\top\right\| \geq \left\|Avv^\top\right\| = \left\|\lambda vv^\top\right\| = |\lambda| \cdot \left\|vv^\top\right\|$$

Leosztva $\left\|vv^\top\right\| \neq 0$-val $\|A\| \geq |\lambda|$. $\square$

Feladatok gyakorlatra

Igazoljuk a következő állításokat.

a) Ha Q ortogonális (unitér), akkor
   - $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$,
   - $\|Q\|_2 = 1$,
   - $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$.

Feladatok gyakorlatra

b) $\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^\top A)$, ahol $\operatorname{tr}(B) := \sum\limits_{k=1}^{n} b_{kk}$ a mátrix *nyoma*.

c) Ha Q ortogonális (unitér), akkor $\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$.

d) $\|A\|_F^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A)$.

e) $\|.\|_F$ és $\|.\|_2$ ekvivalens mátrixnormák.

f) A Frobenius-norma illeszkedik a kettes vektornormához.

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\mathrm{cond}\,(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.
- Értéke függ a norma választásától.
  (Pl. $\operatorname{cond}_1(A), \operatorname{cond}_2(A), \dots$)

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

a) Indukált mátrixnorma esetén $\mathrm{cond}\,(A) \geq 1$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

(a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}\,(A) \geq 1$.

(b) $\text{cond}\,(c \cdot A) = \text{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}\,(A) \geq 1$.

b) $\text{cond}\,(c \cdot A) = \text{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}\,(A) \geq 1$.

b) $\text{cond}\,(c \cdot A) = \text{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}\,(A)$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

a) Indukált mátrixnorma esetén $\operatorname{cond}(A) \geq 1$.

b) $\operatorname{cond}(c \cdot A) = \operatorname{cond}(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

c) Ha Q ortogonális, akkor $\operatorname{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \operatorname{cond}(A)$.

b) $\operatorname{cond}(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\|\frac{1}{c}A^{-1}\right\| =$

$$= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \operatorname{cond}(A).$$

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}\,(A) \geq 1$.
- b) $\text{cond}\,(c \cdot A) = \text{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}\,(A)$.

b) $\text{cond}\,(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\|\frac{1}{c}A^{-1}\right\| =$

$$= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}\,(A).$$

c) $$\|Q\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^\top Q^\top Qx}}{\sqrt{x^\top x}} = 1$$

$$\|Q^{-1}\|_2 = \left\|Q^\top\right\|_2 = 1, \quad \text{cond}_2(Q) = 1$$

$\square$

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d) Ha A szimmetrikus, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- **d** Ha A szimmetrikus, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- **e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f) Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d) Ha A szimmetrikus, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f) Ha A invertálható, akkor $\mathrm{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
  De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d) Ha A szimmetrikus, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f) Ha A invertálható, akkor $\mathrm{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
  De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.
  Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max|\lambda_i(A^{-1})| = \dfrac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d) Ha A szimmetrikus, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f) Ha A invertálható, akkor $\operatorname{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
  De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.
  Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max|\lambda_i(A^{-1})| = \dfrac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) A pozitiv definitség miatt nem kell abszolút érték.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d) Ha A szimmetrikus, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f) Ha A invertálható, akkor $\mathrm{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
  De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.
  Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max|\lambda_i(A^{-1})| = \dfrac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) A pozitiv definitség miatt nem kell abszolút érték.
- f) $\|A\| \geq \varrho(A) = \max|\lambda_i(A)|$, $\|A^{-1}\| \geq \varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.

$\square$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk"! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás:} \;\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3.

$$\text{A módosult LER megoldása:} \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \to \quad \text{megoldás:} \;\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3. $$\text{A módosult LER megoldása:} \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

4. Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a jobb oldal: $\delta b := \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 9.4959e - 004.$
- Emiatt mennyire változik a megoldás: $\delta x := \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 1.1732.$
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát: $\dfrac{\delta x}{\delta b} = 1235.5.$
- $\operatorname{cond}(A) = 1623$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\mathrm{cond}\,(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \mathrm{cond}\,(A) \cdot \delta b.$$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

1. $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$-ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A\Delta x = \Delta b$.

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\mathrm{cond}\,(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \mathrm{cond}\,(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

1. $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$-ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A\Delta x = \Delta b$.
2. Viszont $x = A^{-1}b$ és $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ is teljesül.

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   a. $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$,

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   a. $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \le \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|},$
   b. $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \le \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \ge \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   - a) $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$
   - b) $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$
   - c) $\|x\| = \left\|A^{-1}b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\|,$

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   a. $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$,
   b. $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}$,
   c. $\|x\| = \left\|A^{-1}b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\|$,
   d. $\|\Delta x\| = \left\|A^{-1}\Delta b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|$.

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
   (A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   a. $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$
   b. $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$
   c. $\|x\| = \left\|A^{-1}b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\|,$
   d. $\|\Delta x\| = \left\|A^{-1}\Delta b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|.$

5. Az alsó becslés (b) és (c) alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Biz. (folytatás):

6. A felső becslés (a) $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$ és (d) $\|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|$ alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

$\square$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk"!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott $A + \Delta A$ és b, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott $A + \Delta A$ és b, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás:} \;\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás:} \;\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3. $$\text{A módosult LER megoldása:} \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \to \quad \text{megoldás:} \;\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3. $$\text{A módosult LER megoldása:} \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$$

4. Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a mátrix: $\delta A := \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 7.8495e - 004.$
- Emiatt mennyire változik a megoldás: $\delta x := \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 3.4507.$
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát: $\dfrac{\delta x}{\delta A} = 4396.1.$
- $\text{cond}\,(A) = 1623$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\left\|(I + M)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\left\|(I + M)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Megj: A lemmához kell az indukált mátrixnorma.

Biz. lemma:

- Az $I+M$ mátrix tényleg invertálható, hiszen $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$, azaz M sajátértékeire: $|\lambda_i(M)| < 1$, vagyis az egységsugarú körön belül helyezkednek el. Meggondolható, hogy $I+M$ sajátvektorai ugyanazok, mint M sajátvektorai, a sajátértékekre pedig $\lambda_i(I+M) = 1 + \lambda_i(M)$ teljesül, így $I+M$ minden sajátértéke pozitív, következésképpen $I+M$ invertálható.

Biz. lemma:

- Az $I + M$ mátrix tényleg invertálható, hiszen $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$, azaz M sajátértékeire: $|\lambda_i(M)| < 1$, vagyis az egységsugarú körön belül helyezkednek el. Meggondolható, hogy $I + M$ sajátvektorai ugyanazok, mint M sajátvektorai, a sajátértékekre pedig $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$ teljesül, így $I + M$ minden sajátértéke pozitív, következésképpen $I + M$ invertálható.
- Vizsgáljuk most $I + M$ inverzét, majd ennek normáját.

$$(I + M)^{-1} = I \cdot (I + M)^{-1} = (I + M - M)(I + M)^{-1} =$$
$$= I - M \cdot (I + M)^{-1},$$
$$\left\|(I + M)^{-1}\right\| \leq \|I\| + \|M\| \cdot \left\|(I + M)^{-1}\right\|,$$
$$(1 - \|M\|) \cdot \left\|(I + M)^{-1}\right\| \leq \|I\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left\|(I + M)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Biz. tétel: Az $(A+\Delta A)(x+\Delta x)=b$ LER-ből $Ax=b$-t kivonva $(A+\Delta A)\cdot\Delta x+\Delta A\cdot x=0$, másképp

$$\begin{aligned}(A+\Delta A)\cdot\Delta x &= -\Delta A\cdot x,\\ A\cdot(I+A^{-1}\cdot\Delta A)\cdot\Delta x &= -\Delta A\cdot x.\end{aligned}$$

Biz. tétel: Az $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b$ LER-ből $Ax = b$-t kivonva $(A+\Delta A)\cdot\Delta x + \Delta A \cdot x = 0$, másképp

$$\begin{aligned}(A+\Delta A)\cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x,\\ A\cdot(I + A^{-1}\cdot \Delta A)\cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x.\end{aligned}$$

Mivel feltevésünk szerint $\|A^{-1}\cdot \Delta A\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\| < 1$, a lemma alapján mondhatjuk, hogy $(I + A^{-1}\cdot\Delta A)$ invertálható.

$$\Delta x = -(I + A^{-1}\cdot \Delta A)^{-1}A^{-1}\Delta A \cdot x$$

Biz. tétel: Az $(A+\Delta A)(x+\Delta x)=b$ LER-ből $Ax=b$-t kivonva $(A+\Delta A)\cdot\Delta x+\Delta A\cdot x=0$, másképp

$$(A+\Delta A)\cdot\Delta x=-\Delta A\cdot x,$$
$$A\cdot(I+A^{-1}\cdot\Delta A)\cdot\Delta x=-\Delta A\cdot x.$$

Mivel feltevésünk szerint $\left\|A^{-1}\cdot\Delta A\right\|\le\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|<1$, a lemma alapján mondhatjuk, hogy $(I+A^{-1}\cdot\Delta A)$ invertálható.

$$\Delta x=-(I+A^{-1}\cdot\Delta A)^{-1}A^{-1}\Delta A\cdot x$$

Az inverz normájára adott becslésünket is felhasználva:

$$\|\Delta x\|\le\left\|(I+A^{-1}\cdot\Delta A)^{-1}\right\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|\cdot\|x\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le\frac{1}{1-\|A^{-1}\cdot\Delta A\|}\cdot\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|\le\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

$$= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

Tétel átfogalmazás:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\|\Delta A\|\cdot\|A^{-1}\|}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}=\\
=&\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\cdot\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}=\\
=&\frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.
\end{aligned}
$$

Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységéről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységéről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}\,(A)}{1 - \text{cond}\,(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b,\ Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b,\, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}\,(A) \leq \text{cond}\,(L) \cdot \text{cond}\,(U)$ $\square$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\mathrm{cond}\,(A) \leq \mathrm{cond}\,(L) \cdot \mathrm{cond}\,(U)$ $\square$

Sőt előfordulhat, hogy $\mathrm{cond}\,(L), \mathrm{cond}\,(U) >> \mathrm{cond}\,(A)$, azaz bizonyos mátrixok esetén előfordulhat, hogy a Gauss-elimináció nagyon pontatlan eredményt ad.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Ez is mutatja a QR- és Cholesky-felbontáson alapuló módszerek stabilitását.

Tartalomjegyzék

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

Definíció: reziduum- vagy maradékvektor

Legyen $\widetilde{x}$ az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása. Ekkor az $r := b - A\widetilde{x}$ vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

Definíció: reziduum- vagy maradékvektor

Legyen $\widetilde{x}$ az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása. Ekkor az $r := b - A\widetilde{x}$ vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

Látjuk, hogy a reziduum vektor könnyen számolható, alkalmazható direkt- és iterációs módszerek esetén is. Az utóbbi esetben leállási feltétel is készíthető a segítségével.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az $\widetilde{x}$ közelítő megoldáshoz tartozó $(A + \Delta A) \cdot \widetilde{x} = b$ LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az $\widetilde{x}$ közelítő megoldáshoz tartozó $(A + \Delta A) \cdot \widetilde{x} = b$ LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.

η értéke a közelítő megoldás ismeretében könnyen számolható. A továbbiakban ΔA ismerete nélkül szeretnénk becsléseket adni a nem ismert $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ mennyiségre.

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Biz.: $b = (A + \Delta A) \cdot \widetilde{x} = A \cdot \widetilde{x} + \Delta A \cdot \widetilde{x}$, innen
$b - A \cdot \widetilde{x} = r = \Delta A \cdot \widetilde{x}$, a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\widetilde{x}\|\,.$$

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Biz.: $b = (A + \Delta A) \cdot \widetilde{x} = A \cdot \widetilde{x} + \Delta A \cdot \widetilde{x}$, innen
$b - A \cdot \widetilde{x} = r = \Delta A \cdot \widetilde{x}$, a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\widetilde{x}\| \,.$$

A relatív maradékot becsülve

$$\eta = \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\| \cdot \|\widetilde{x}\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Biz.: Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\widetilde{x}^\top}{\widetilde{x}^\top \widetilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis $\widetilde{x}$ egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása.

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\boxed{\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.}$$

Biz.: Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top\tilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis $\tilde{x}$ egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása. Végezzük el a behelyettesítést:

$$(A+\Delta A)\cdot\tilde{x} = \left(A + \frac{r\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top\tilde{x}}\right)\cdot\tilde{x} =$$

$$= A\tilde{x} + \frac{r\tilde{x}^\top\tilde{x}}{\tilde{x}^\top\tilde{x}} = A\tilde{x} + (b - A\tilde{x}) = b.$$

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\widetilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\widetilde{x}\|_2 \, .$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\widetilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\widetilde{x}\|_2 \,.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becsülve

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\left\| r\widetilde{x}^\top \right\|_2}{\|A\|_2 \, \|\widetilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \, \|\widetilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \, \|\widetilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \, \|\widetilde{x}\|_2} = \eta_2.$$

$\square$

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\widetilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\widetilde{x}\|_2 .$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becsülve

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\left\| r\widetilde{x}^\top \right\|_2}{\|A\|_2 \|\widetilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \|\widetilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \|\widetilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \|\widetilde{x}\|_2} = \eta_2.$$

□

Ha η_2 kicsi, akkor $\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$ is kicsi.
Ha $\eta_2 < \varepsilon_1$, akkor ebben az adott aritmetikában pontosabb megoldás nem adható.

Példák Matlab-ban

1. Indukált mátrixnorma szemléltetése $\mathbb{R}^2$, $p = 2$ esetén.
2. Indukált mátrixnormák közelítő számítása tetszőleges $\mathbb{R}^n$ és p esetén $(m = 100, \ldots, 1000$ vektor próbájával).
3. Egy perturbált LER (jobboldala változik, mátrixa a Hilbert mátrix).
4. $\mathrm{cond}_2(H_n)$ változása a méret függvényében.
5. $\mathrm{cond}_2(V_n)$ változása a méret függvényében.
6. $\mathrm{cond}_2(\mathrm{tridiag}\,(-1, 2, -1))$ változása a méret függvényében.
7. $\mathrm{cond}_2(rand_n)$ változása a méret függvényében.

1. Példa:

Jelöljük H_5-tel az 5×5-ös Hilbert mátrixot.

$$H_5 = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{5} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$$

1. Példa:

1. **Eredeti LER:**

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Példa:

1. **Eredeti LER:**

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \quad \to \quad \text{megoldás:} \;\; x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult LER:**

$$H_5 \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 + 1/1000 \end{bmatrix}$$

A módosult LER megoldása: $$x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$$

Mi történt?

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

1. $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája

A módosult LER megoldása: $$x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$$

Mi történt?

1. $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
2. $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája

1. Példa

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

1. $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
2. $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája
3. a két mennyiség hányadosa: $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$

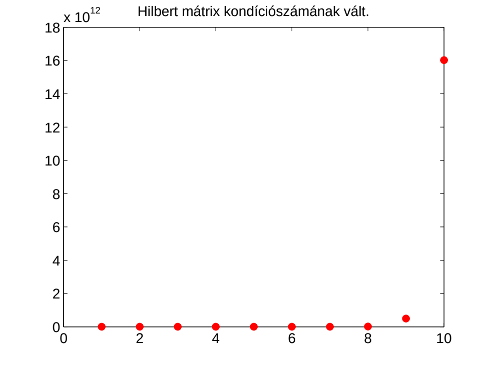
A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

1. $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
2. $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája
3. a két mennyiség hányadosa: $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$
4. ennek becslése a tétellel: $cond_2(H_5) = 4.7661e + 005$.

2. Példa:

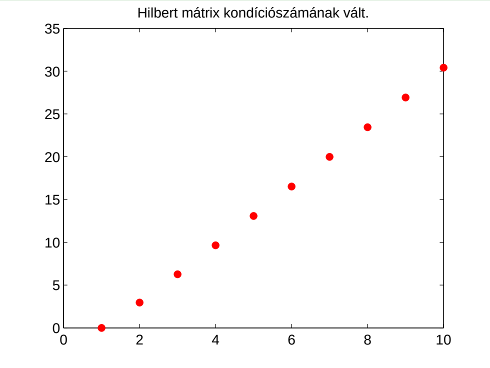
A Hilbert mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

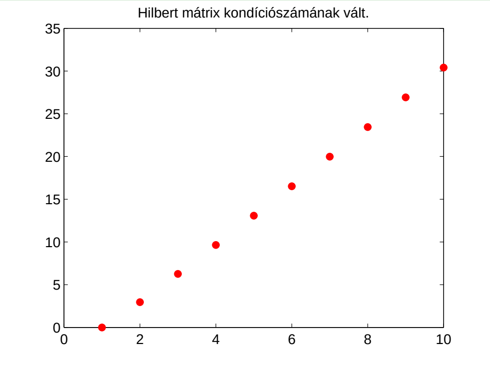
2. Példa:

Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



2. Példa:

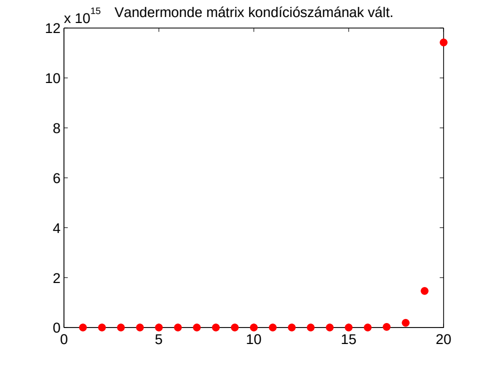
Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



$$\mathrm{cond}_2(H_n) \approx \exp(3.1n) \approx 22^n$$

3. Példa:

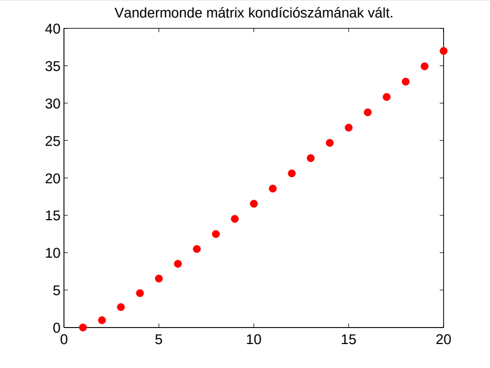
A $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztású pontjaiból képzett Vandermonde mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

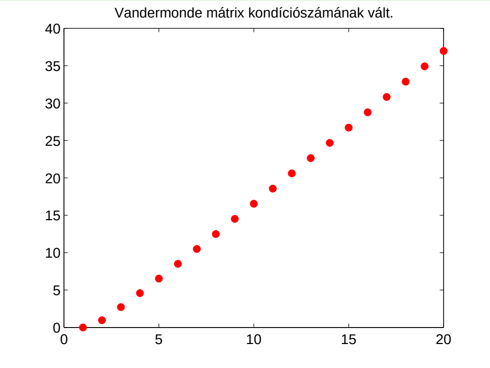
3. Példa:

Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



3. Példa:

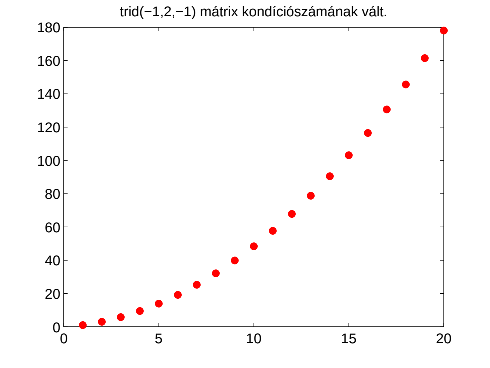
Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



$$\mathrm{cond}_2(V_n) \approx \exp(1.85n) \approx (6.4)^n$$

4. Példa:

A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:

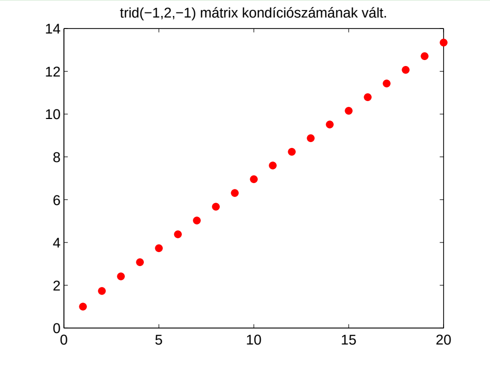


Az ábra alapján sejthető, hogy a növekedés a méret négyzetével arányos.

A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciószáma

4. Példa:

Vegyük a kondíciószámok gyökét!

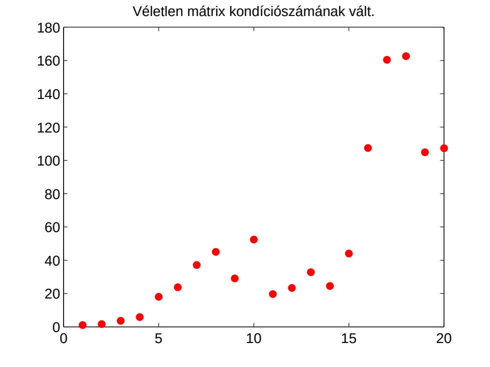


Elméletileg igazolható, hogy

$\mathrm{cond}_2(\mathrm{tridiag}\,(-1, 2, -1)) \approx \left(\frac{2(n+1)}{\pi}\right)^2.$

5. Példa:

Véletlen mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Az előző mátrixokhoz képest egész kicsi értékeket kaptunk.