Numerikus módszerek C

2. előadás: Hibaszámítás, Lineáris egyenletrendszerek megoldása, Gauss-elimináció

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Definíció: Hibák jellemzése

Legyen A egy pontos érték, a pedig egy közelítő értéke. Ekkor:

$\Delta a := A - a$	a közelítő érték (pontos) hibája,
$\lvert\Delta a\rvert := \lvert A - a\rvert$	a közelítő érték abszolút hibája,
$\Delta_a \geq \lvert\Delta a\rvert$	az a egy abszolút hibakorlátja,
$\delta a := \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$	az a relatív hibája,
$\delta_a \geq \lvert\delta a\rvert$	az a egy relatív hibakorlátja.

Példa

Nézzük végig a fogalmakat π két tizedesjegyre kerekített értékén, vagyis a 3.14 közelítésen!

Példa

Mennyi $\sqrt{2020} - \sqrt{2019}$ értéke?

Más alakban is számolható:

$$\sqrt{2020} - \sqrt{2019} = (\sqrt{2020} - \sqrt{2019}) \cdot \frac{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}} = \\ = \frac{2020 - 2019}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}} = \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}.$$

Próbáljuk ki mindkét számolási módot! Melyik ad pontosabb eredményt?

```
0.011126230000002
0.011126231166003
```

Tétel: az alapműveletek hibakorlátai

$$\Delta_{a\pm b} = \Delta_a + \Delta_b \qquad \delta_{a\pm b} = \frac{|a|\cdot\delta_a + |b|\cdot\delta_b}{|a\pm b|}$$

$$\Delta_{a\cdot b} = |b|\cdot\Delta_a + |a|\cdot\Delta_b \qquad \delta_{a\cdot b} = \delta_a + \delta_b$$

$$\Delta_{a/b} = \frac{|b|\cdot\Delta_a + |a|\cdot\Delta_b}{b^2} \qquad \delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$$

Megjegyzés: a kapott korlátok két esetben lehetnek nagyságrendileg nagyobbak, mint a kiindulási értékek hibái:

1. $\delta_{a\pm b}$ esetén, amikor közeli számokat vonunk ki egymásból.
2. $\Delta_{a/b}$ esetén, amikor kicsi számmal osztunk.

Ezeket az eseteket az algoritmusok implementálásakor el kell kerülni.

Biz.: az összeadást és kivonást azonos előjelű számok között értjük. Az $a \pm b$ hibája

$$\Delta(a \pm b) = (A \pm B) - (a \pm b) = (A - a) \pm (B - b) = \Delta a \pm \Delta b$$

$$|\Delta(a \pm b)| = |\Delta a \pm \Delta b| \leq |\Delta a| + |\Delta b| \leq \Delta_a + \Delta_b = \Delta_{a \pm b}.$$

Nézzük a relatív hibát

$$\frac{\Delta(a \pm b)}{a \pm b} = \frac{\Delta a \pm \Delta b}{a \pm b} = \frac{a \cdot \delta a \pm b \cdot \delta b}{a \pm b}$$

$$\frac{|\Delta(a \pm b)|}{|a \pm b|} = \frac{|a \cdot \delta a \pm b \cdot \delta b|}{|a \pm b|} \leq \frac{|a| \cdot |\delta a| + |b| \cdot |\delta b|}{|a \pm b|} \leq$$
$$\leq \frac{|a| \cdot \delta_a + |b| \cdot \delta_b}{|a \pm b|} = \delta_{a \pm b}$$

A szorzás hibája

$$\begin{aligned}\Delta(a\cdot b) &= A\cdot B - a\cdot b = A\cdot B - A\cdot b + A\cdot b - a\cdot b = \\ &= A(B-b) + b(A-a) = A\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a = \\ &= (a+\Delta a)\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a \approx a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a \\ &(\Delta a\cdot\Delta b \text{ elhanyagolható})\end{aligned}$$

$$|\Delta(a\cdot b)| \le |a|\cdot|\Delta b| + |b|\cdot|\Delta a| \le |a|\cdot\Delta_b + |b|\cdot\Delta_a = \Delta_{a\cdot b}$$

A relatív hiba

$$\delta(a\cdot b) = \frac{\Delta(a\cdot b)}{a\cdot b} \approx \frac{a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a}{a\cdot b} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} = \delta b + \delta a$$

$$|\delta(a\cdot b)| \le |\delta a| + |\delta b| \le \delta_a + \delta_b = \delta_{a\cdot b}$$

Az osztás hibája

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{A \cdot b - a \cdot B}{Bb} =$$
$$= \frac{A \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot B}{Bb} = \frac{b \cdot (A - a) - a \cdot (B - b)}{Bb} =$$
$$= \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{(b + \Delta b) \cdot b} \approx \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{b^2}$$

($\Delta b \cdot b$ elhanyagolható)

$$\left|\Delta\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leq \frac{|b| \cdot |\Delta a| + |a| \cdot |\Delta b|}{b^2} \leq \frac{|b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b}{b^2} = \Delta_{a/b}$$

Az osztás relatív hibája

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{\Delta(\frac{a}{b})}{\frac{a}{b}} \approx \frac{b\cdot\Delta a - a\cdot\Delta b}{b^2}\cdot\frac{b}{a} = \\ &= \frac{b\cdot\Delta a - a\cdot\Delta b}{b\cdot a} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} = \\ &= \delta a - \delta b = \delta\left(\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

$\left|\delta\left(\frac{a}{b}\right)\right| \le |\delta a| + |\delta b| \le \delta_a + \delta_b = \delta_{a/b}$ $\square$

Példa

1. Mennyi $\exp(\pi)$ értéke?

π-t közelítsük 2 és 15 tizedesjeggyel:

```
23.140692632779267
23.103866858722185
```

Példa

2. Mennyi $log(\pi)$ értéke?

π-t közelítsük 2 és 15 tizedesjeggyel:

```
1.144729885849400
1.144222799920162
```

Melyik függvény tolerálja jobban a hibát?

1. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^1(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a,$$

ahol $M_1 = \max\{\, |f'(\xi)| \,:\, \xi \in k_{\Delta_a}(a)\,\}$.

Biz.: a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával.

$$\Delta f(a) = f(A) - f(a) = f'(\xi) \cdot (A - a) = f'(\xi) \cdot \Delta a,$$

valamely $\xi \in k_{\Delta_a}(a)$ értékre. Vizsgáljuk az abszolút hibát.

Jó felső becslést adva nyerjük az abszolút hibakorlátot:

$$|\Delta f(a)| = |f'(\xi)| \cdot |\Delta a| \le M_1 \cdot \Delta_a = \Delta_{f(a)},$$

2. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^2(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = |f'(a)|\,\Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2,$$

ahol $M_2 = \max\{\,|f''(\xi)|\ :\ \xi \in k_{\Delta_a}(a)\,\}$.

Biz.: a Taylor-formula felhasználásával.

$$\Delta f(a) = f(A) - f(a) = f'(a)\cdot(A-a) + \frac{f''(\xi)}{2}\cdot(A-a)^2,$$

valamely $\xi \in k_{\Delta_a}(a)$ értékre. Vizsgáljuk az abszolút hibát.

Jó felső becslést adva nyerjük az abszolút hibakorlátot:

$$|\Delta f(a)| = |f'(a)| \cdot |\Delta a| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \cdot |\Delta a|^2 \leq$$
$$\leq |f'(a)| \cdot \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2 = \Delta_{f(a)},$$

$\square$

Következmény: függvényérték relatív hibája

Ha Δ_a kicsi, akkor $\delta_{f(a)} = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a$.

Definíció: Az f függvény a-beli kondíciószáma

A $c(f,a) = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|}$ mennyiséget az f függvény a-beli kondíciószámának nevezzük.

Biz.: Ha Δ_a kicsi, akkor a 2. tételben szereplő eredményben a Δ_a^2-es tagot elhanyagolhatjuk, így felhasználva, hogy $\Delta_a = |a| \cdot \delta_a$

$$|\delta f(a)| \approx \frac{|f'(a)| \cdot \Delta_a}{|f(a)|} = \frac{|a|\,\delta_a \cdot |f'(a)|}{|f(a)|} = \frac{|a|\,|f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a.$$

$\square$

Tartalomjegyzék

- **Általános iskolában:**
  Matematikai versenyfeladat 3. osztály

  A MATEK szó minden betűje egy-egy számjegyet jelöl. A számjegyekre igazak a következő állítások:

$$\begin{aligned} M+A+T+E+K &= 25 \\ M+A &= 11 \\ A+T &= 10 \\ T+E &= 12 \\ E+K &= 10 \end{aligned}$$

  Melyik betű melyik számjegyet jelöli, ha az öt betű öt különböző számjegyet jelöl?

- **Gazdasági számítások:**

  Tegyük fel, hogy egy üzem kétféle végterméket állít elő négyféle alkatrész felhasználásával. Jelölje $A_1, A2$ a végtermékeket, az A_3, A_4 a félkész termékeket és A_5, A_6 az alapanyagokat. Az egyes alapanyagok és félkész termékek egymásba és a végtermékbe való beépülését a **közvetlen ráfordítás mátrix (K)** adja meg. A mátrix k_{ij} eleme azt mutatja, hogy az i. termékből közvetlenül (nem más terméken keresztül) mennyi épül be a j. termékbe.

  A **teljes ráfordítások mátrixában (T)** a t_{ij} elem azt mutatja, hogy egy darab A_j termék összesen hány darab A_i elemet tartalmaz. Ennek meghatározása a $T = (I - K)^{-1}$ képletből történik. A kétféle mátrix alkalmazása:
  x alapanyagból $y = (I - K) \cdot x$ végtermék lesz és
  y végtermékhez $x = T \cdot y = (I - K)^{-1} \cdot x$ alapanyag kell.

3-5. Példa

- Mérnöki feladatok numerikus megoldása (lásd a bevezető példát)
- Interpolációs spline-ok megadása
- Approximációs feladatok megoldása

- **Hálózatok stacionárius modellezése:** villamos hálózatok, áramkörök, víz- és gázellátó csőrendszerek irányított gráffal történő leírása után. Az él iránya megfelel a várt áramlási iránynak. Minden élhez tartozik egy szám, az ott szállított áram (víz stb.) mennyiségét adja. Egyes csomópontokhoz is tartozhat áram, ezek a külső pontok. Ilyen áram a ponton keresztül be ill. kifolyó áram, amely ugyancsak ismeretlen lehet.

  A gráf minden csomópontjában felírjuk az első Kirchhoff–féle törvényt, amely szerint - figyelembe véve az élek irányát - a csomópontban találkozó élek áramainak összege nulla. Ez az anyag-megmaradási törvény egy lineáris reláció, és a minden csomóponthoz tartozó relációk összessége adja a lineáris egyenletrendszert.

Lineáris egyenletrendszer (LER)

Hagyományos alak:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

n egyenlet, n ismeretlen

Megj.: Fontos, hogy négyzetes a mátrix.

Mátrix alak:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

vagyis

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b, x \in \mathbb{R}^n.$$

Feladat:

A és b adottak, keressük x-et.

Tétel: emlékeztető Mat.alapokból

- LER megoldható $\iff$ b felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás $\iff$ A oszlopai lineárisan függetlenek $\iff$ $\mathrm{rang}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A$ invertálható ($x = A^{-1}b$).

Megj.:

- Ha A speciális alakú (pl. diagonális vagy háromszög alakú), akkor egyszerűen megkapható a megoldás. Ez az alapötlet a direkt módszerek esetén.
- Cramer-szabályt max. 3×3-as mátrixokra alkalmazunk.

LER-k megoldási módszerei általában

- Direkt módszerek, felbontások (véges lépésszám, „pontos" megoldás)
  - Gauss-elimináció, Progonka módszer
  - LU-felbontás, LDU, $LL^\top$, Cholesky
  - QR-felbontás (Gram–Schmidt ort., Householder trf.)
  - ILU-felbontás
- Iterációs módszerek (vektor sorozat, mely a megoldáshoz „tart")
  - mátrixnormák, Banach-féle fixponttétel
  - Jacobi-iteráció
  - Gauss–Seidel-iteráció
  - Richardson-iteráció
  - ILU-algoritmus
- Variációs módszerek (egy „célfüggvény" minimalizálása által)
  - Gradiens-módszer
  - Konjugált gradiens-módszer

Direkt módszerek, felbontások

- Gauss-elimináció,
- Progonka módszer,
- LU-felbontás.

Jellemzők:

- Pontos számolás esetén pontos megoldás.
- Véges lépésszám.
- Pontatlan számolás (pl. véges aritmetika) esetén a megoldás az algoritmussal nem javítható.

Gauss-elimináció: előkészületek

Legyen $a_{in+1} := b_i$, azaz $[A|b]$ a tárolási forma.
GE := Gauss-elimináció.

$$A^{(0)} := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n \end{array}\right]$$

Célunk: A LER-t egyszerűbb alakra hozni:

1. balról jobbra: a főátló alatt kinullázzuk az elemeket, „előre”, GE
2. jobbról balra: a főátló fölött nullázunk, „vissza”, visszahelyettesítés

Az 1. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{11}^{(0)} \neq 0$, akkor az i-edik egyenletből ($i = 2, 3, \ldots, n$) kivonjuk az 1. egyenlet $\left(\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\right)$-szeresét: hogy $a_{i1}^{(0)}$ kinullázódjon.
($\rightsquigarrow$ elimináció, kiküszöbölés)

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{nn+1}^{(1)} \end{array}\right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)} \qquad (i = 2, \ldots, n;\ j = 2, \ldots, n, n+1).$$

Az 1. és 2. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{22}^{(1)} \neq 0$, akkor az i-edik egyenletből ($i = 3, 4, \ldots, n$) kivonjuk a 2. egyenlet $\left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right)$-szeresét: hogy $a_{i2}^{(1)}$ kinullázódjon.

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{nn+1}^{(2)} \end{array}\right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)} \qquad (i = 3, \ldots, n;\ j = 3, \ldots, n, n+1).$$

Az $1., 2., \ldots, k$. egyenleteket változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, akkor az i-edik egyenletből $(i = k+1, \ldots, n)$ kivonjuk a k-adik egyenlet $\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$-szeresét: hogy $a_{ik}^{(k-1)}$ kinullázódjon. Ezt a lépést láttuk, amikor a 2. lépésben az 1. lépés eredményét felhasználtuk. Ha 2 helyére k-t írunk, akkor megkapjuk az általános képleteket.

Tétel: A Gauss-elimináció általános lépése

Ha $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$, akkor a k. lépés képletei

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \qquad \begin{aligned} k &= 1, \ldots, n-1; \\ i &= k+1, \ldots, n; \\ j &= k+1, \ldots, n, n+1. \end{aligned}$$

Így $n-1$ lépés után felső háromszögmátrix alakú LER-t kapunk:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & a_{n-1n+1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)} \end{array}\right].$$

Ezután visszafelé haladva: az aktuális egyenletet osztjuk a főátlóbeli elemmel, majd a főátló fölött kinullázzuk az elemeket, az eddigiekel analóg „sorműveletek” alkalmazásával.
Végül $[I|x]$ alakot nyerünk. ($I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egységmátrix.)

Az algoritmus második része („jobbról-balra”), a felső háromszög alakú LER megoldása képlettel is kifejezhető. Figyeljük meg, hogy a felső-háromszögmátrixú alaknál soronként azonos felső indexek vannak.

Az algoritmus második része („jobbról-balra”), a felső háromszög alakú LER megoldása képlettel is kifejezhető. Figyeljük meg, hogy a felső-háromszögmátrixú alaknál soronként azonos felső indexek vannak.

A visszahelyettesítés

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \qquad (i = n-1, \ldots, 1).$$

Példa: LER megoldása GE-val

Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció alkalmazásával!

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Az elimináció: Kézi számolásnál függőleges vonalat húzunk a jobboldali vektor elé, számítógéppel ezt programozással oldjuk meg.

1. lépés:

$$2.\ \text{sor} \underbrace{-\left(\frac{-4}{2}\right)}_{+2} * 1.\ \text{sor}$$

$$3.\ \text{sor} - \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)}_{+3} * 1.\ \text{sor}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \to$$

2. lépés:

$$3.\ \text{sor}\ \underbrace{-\ \left(\frac{-5}{5}\right)}_{+1}\ *\ 2.\ \text{sor}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

A visszahelyettesítés:

3. sor $/(-1)$
2. sor $-$ 4 $*$ új 3. sor.
1. sor $-$ 3 $*$ új 3. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

2. sor $/5$
1. sor $/2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{x} = [1, 1, -1]^T$ vektor.

Példák Matlab-ban

1. A Gauss-elimináció működése „kisebb” ($n \approx 7$) LER-ekre
2. A beépített megoldó rutin persze sokkal gyorsabb
3. Egyre nagyobb méretű ($n = 10, 20, 30, \ldots, 200$) mátrixokra a GE futási idejének viselkedése tényleg n^3-szerű