Numerikus Módszerek Gyakorlat
Beadható házi feladatok

1. A sin függvény x-beli helyettesítési értékének kiszámításához legtöbbször Taylor-sorának n-edik részletösszegét használjuk, azaz a következő közelítést alkalmazzuk

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \approx S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

egy rögzített $n \in \mathbb{N}$ mellett. Tekintsük a következő rekurzív sorozatot:

$$y_0 := x \qquad y_k := y_{k-1} \cdot \left(-\frac{x^2}{2k+1}\right) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Könnyen látható, hogy (y_k) éppen a Tayolor-sor generáló sorozata, azaz

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

Tegyük fel, hogy $x \in [-1, 1]$, továbbá $\delta_x = \delta_{2k+1} = \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, n)$. Adjunk rekurzív formulát δ_{y_k}-ra, majd ennek segítéségével becsüljük Δ_{S_n}-t! A becslés legyen $\Delta_{S_n} \leq P(n)\varepsilon$ alakú, ahol P egy alkalmas n-től függő (x-től független) polinom.

(3 pont)

2. Határozzuk meg az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix inverzét Gauss-elimináció segítségével:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

(2 pont)

3. Tekintsük az alábbi mátrixot!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

(a) Határozzuk meg az A mátrix LU felbontását! Adjunk rekurzív formulát az L és U mátrixok egyes elemeinek kiszámítására!

(2 pont)

(b) Az LU-felbontás segítségével lássuk be, hogy $\det(A) = n+1$, ahol n a mátrix sorainak (és oszlopainak) száma!

(1 pont)

4. Tekintsük az

$$\mathcal{L} := \Big\{ L \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\Big|\; \forall i,j = 1,\dots,n \quad i < j \quad : \quad \ell_{ij} = 0 \Big\}$$

$$\mathcal{L}_1 := \Big\{ L \in \mathcal{L} \;\Big|\; \forall i = 1,\dots,n \quad : \quad \ell_{ii} = 1 \Big\}$$

mátrixosztályokat. Lássuk be, hogy $\mathcal{L}$ és $\mathcal{L}_1$ zártak a szorzásra és az inverzképzésre nézve, azaz

(a) $\forall L, L' \in \mathcal{L} \quad : \quad LL' \in \mathcal{L}$

(1 pont)

(b) $\forall L \in \mathcal{L} \quad : \quad L^{-1} \in \mathcal{L}$

(1 pont)

(c) $\forall L, L' \in \mathcal{L}_1 \quad : \quad LL' \in \mathcal{L}_1$

(1 pont)

(d) $\forall L \in \mathcal{L}_1 \quad : \quad L^{-1} \in \mathcal{L}_1$

(1 pont)

5. Legyen $\varepsilon > 0$ kicsi pozitív szám (sokkal kisebb, mint 1), és tekintsük a következő mátrixot

$$A(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

és annak LU-felbontását:

$$L(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \qquad U(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Az A, L, U mátrixok tehát ε-tól függő mennyiségek, így azok kondíciószáma is függ ε-tól. Lássuk be a következő állításokat:

(a) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \operatorname{cond}_2\big(A(\varepsilon)\big) < +\infty$

(1 pont)

(b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \operatorname{cond}_2\big(L(\varepsilon)\big) = +\infty$

(1 pont)

(c) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \operatorname{cond}\big(U(\varepsilon)\big) = +\infty$ tetszőleges normában számolva a kondíciószámot.

(2 pont)

(d) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \operatorname{cond}\big(L(\varepsilon)\big) = +\infty$ bármely olyan normában számolva a kondíciószámot, amelyhez létezik illeszkedő vektornorma.

(2 pont)

6. Legyen (P_n) polinomok sorozata, ahol

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k \qquad (n \in \mathbb{N},\ \ a_k^{(n)} \in \mathbb{R},\ a_0^{(n)} \neq 0,\ a_n^{(n)} \neq 0)$$

Tudjuk, hogy a P_n polinomok $x_k^{(n)}$ gyökeire teljesül a következő:

$$r_n < x_k^{(n)} < R_n$$

ahol

$$R_n = 1 + \frac{\max_{i \neq n} |a_i^{(n)}|}{|a_n|} \qquad r_n = \frac{1}{1 + \frac{\max_{i \neq 0} |a_i^{(n)}|}{|a_0|}}$$

és az is világos, hogy a fenti feltételek mellett $r_n < 1$ és $R_n > 1$. Igazoljuk, hogy *nem létezik* olyan polinomsorozat, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} R_n = 1$$

(2 pont)

7. Legyen $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, és tekintsük a következő fixpont-egyenletet:

$$\varphi(x) = rx(1-x)$$

ahol $r \in [0,4]$ rögzített konstans. A következő kérdések megválaszolásához szükségünk lesz a fixpont stabilitásának fogalmára. Azt mondjuk, hogy φ leképezés x^* fixpontja *stabil*, ha $|\varphi'(x^*)| < 1$. Hasonlóan, ha $|\varphi'(x^*)| > 1$, akkor azt mondjuk, hogy az x^* fixpont *instabil*. Igazoljuk a következő állításokat!

(a) A φ leképezés bármely $r \in [0,4]$ esetén a $[0,1]$ intervallumot önmagára képezi.

(1 pont)

(b) A φ leképezésnek az $x^* = 0$ az *egyetlen* fixpontja, ha $r \in [0,1)$, továbbá az $x^* = 0$ fixpont stabil.

(2 pont)

(c) A φ leképezésnek megjelenik még egy fixpontja, amint $r > 1$, továbbá $r \in (1,3)$ esetén a 0 fixpont instabil, míg az újonnan keletkezett fixpont stabil!

(2 pont)

8. Legyen $1 \leq a < b$ és $p \in P_\ell$ legfeljebb ℓ-edfokú polinom. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := e^x p(x)$$

függvényt az $[a,b]$ intervallumon interpoláló Lagrange-interpolációs polinomok sorozata bármely alappontrendszer-sorozat esetén egyenletesen konvergens (azaz tetszőlegesen választott $(x_i^{(n)},\ i = 0,\ldots,n)$ sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$)!

(4 pont)

9. Egy csillapítatlan harmonikus rezgőmozgást végző test elmozdulását leíró egyenletet a következő alakban keressük:

$$r(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

ahol $A, B \in \mathbb{R}$ valós paraméterek, ω pedig a rezgés körfrekvenciája, amelyet pontosan ismerünk: $\omega = \frac{\pi}{12}$. Egy mérés során (tökéletesen pontos mérőeszközünk segítségével) a következő adatokat rögzítjük:

t_i	2	3	4
$r(t_i)$	$\sqrt{3} - 3$	$-2\sqrt{2}$	$1 - 3\sqrt{3}$

Határozzuk meg az A, B paraméterek *pontos értékét* a diszkrét legkisebb négyzetek módszere segítségével!

(3 pont)

10. Tekintsük az

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx A \cdot \Big(f(x_0) + f(x_1)\Big)$$

kvadratúraformulát (melyben tehát a két alapponthoz tartozó súly egyenlő egymással). Hogyan válasszuk meg a kvadratúraformula *alappontjait*, hogy maximális (harmadfokú) pontosságot érjünk el?

(4 pont)