Számítógépes Grafika

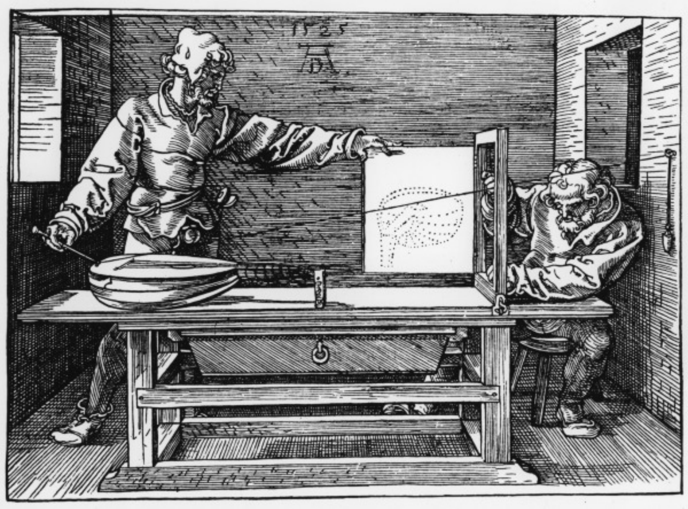
Bán Róbert
robert.ban102+cg@gmail.com

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

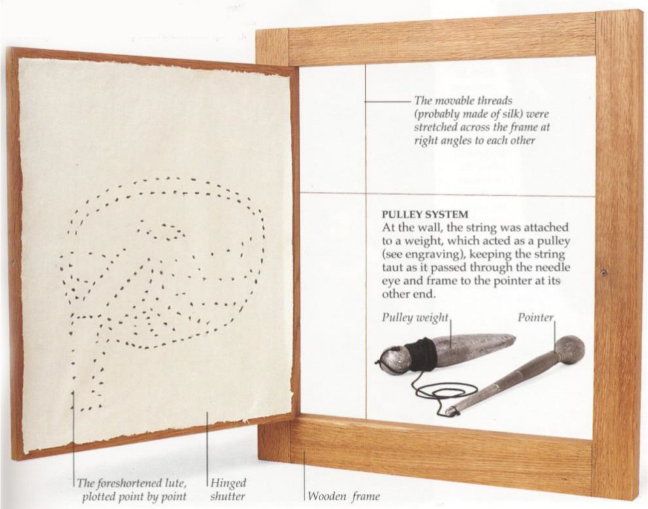
2021-2022. tavaszi félév

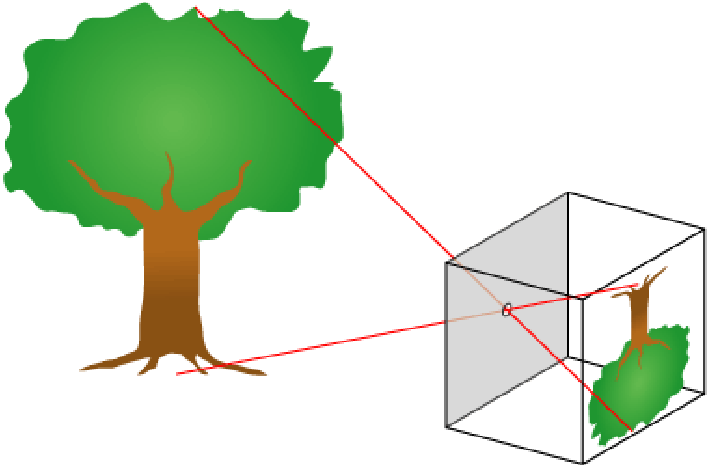
Tartalom

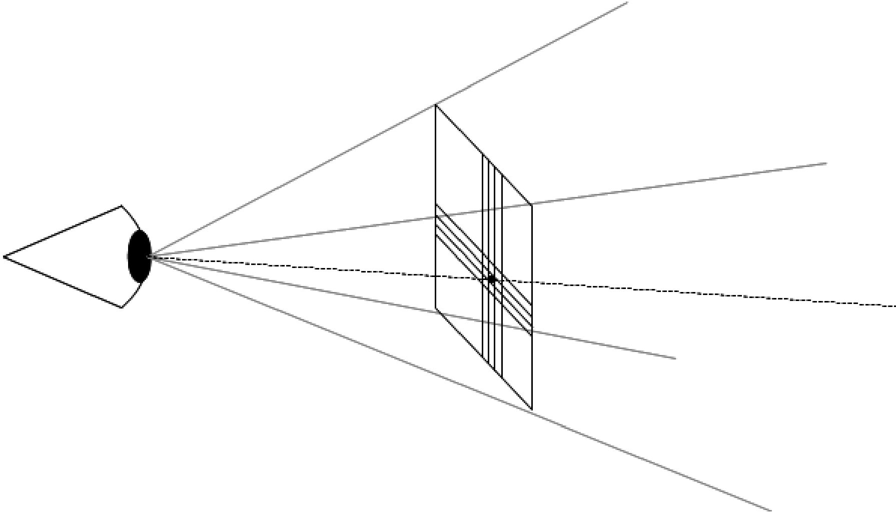
Tartalom



Albrecht Dürer, 1525


The movable threads (probably made of silk) were stretched across the frame at right angles to each other
PULLEY SYSTEM
At the wall, the string was attached to a weight, which acted as a pulley (see engraving), keeping the string taut as it passed through the needle eye and frame to the pointer at its other end.
Pulley weight
Pointer
The foreshortened lute, plotted point by point
Hinged shutter
Wooden frame





Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra

Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra
- Milyen színértéket vegyen fel ez a pixel?

Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra
- Milyen színértéket vegyen fel ez a pixel? $\rightarrow$ Nézzük meg, mi látszik onnan a világból és az alapján rendeljünk hozzá a pixelhez egy színt!

Tartalom

Raycasting

```
Minden pixelre:
   Indítsunk egy sugarat a színtérbe

   Minden objektumra a színtérben:
      Nézzük meg, hogy metszi-e a sugár az objektumot

   A legközelebbi metszett objektum
   színével színezzük ki a pixelt
```

Sugár

- A sugárnak van
  - egy $\mathbf{p}_0$ kiindulási pontja
  - és egy $\mathbf{v}$ iránya

Sugár

- A sugárnak van
  - egy $\mathbf{p}_0$ kiindulási pontja
  - és egy $\mathbf{v}$ iránya
- A parametrikus sugár:

  $$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v},$$

  ahol $t > 0$ (félegyenes!).
- $t = 0$?, $t < 0$?

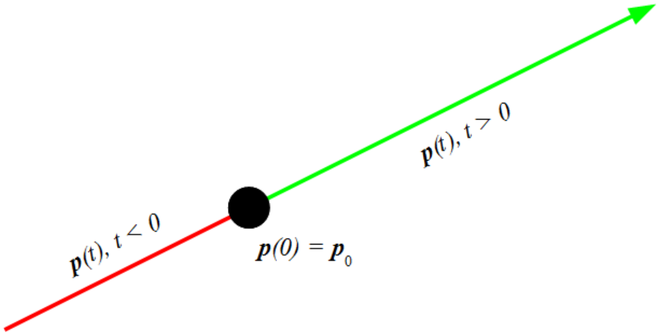
Sugár

- A sugárnak van
  - egy $\mathbf{p}_0$ kiindulási pontja
  - és egy $\mathbf{v}$ iránya
- A parametrikus sugár:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v},$$

  ahol $t > 0$ (félegyenes!).
- $t = 0$?, $t < 0$? sugár kezdőpontja, sugár mögötti részek

Sugár



Kérdés

- Honnan indítsuk a sugarat?

Kérdés

- Honnan indítsuk a sugarat?
- Milyen irányba küldjük a sugarat?

Kérdés

- Honnan indítsuk a sugarat?
- Milyen irányba küldjük a sugarat?
- Hogyan metsszük el a sugarat akármivel?

Tartalom

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),

Sugarak indítása

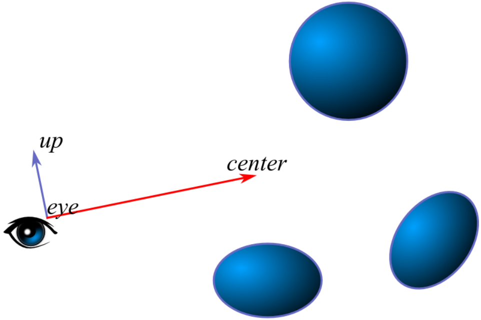
- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
  - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx*, *fovy*).

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
  - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx*, *fovy*).
  - (vetítővászon mérete. Most legyen adott: $2\tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \times 2\tan\left(\frac{fovy}{2}\right)$ nagyságú)

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
  - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx*, *fovy*).
  - (vetítővászon mérete. Most legyen adott: $2\tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \times 2\tan\left(\frac{fovy}{2}\right)$ nagyságú)
- Ezek segítségével fogjuk megadni az (i, j) pixel világbeli koordinátáit


up
center
eye

Sugarak indítása

Keressük a kamera saját $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (jobbkezes!) koordináta-rendszerét!

- Nézzen a kamera $-Z$ irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

Sugarak indítása

Keressük a kamera saját $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (jobbkezes!) koordináta-rendszerét!

- Nézzen a kamera $-Z$ irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

- Az X tengely legyen merőleges mind **w**-re, mind az **up** irányra!

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{w}|}$$

Sugarak indítása

Keressük a kamera saját $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (jobbkezes!) koordináta-rendszerét!

- Nézzen a kamera $-Z$ irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

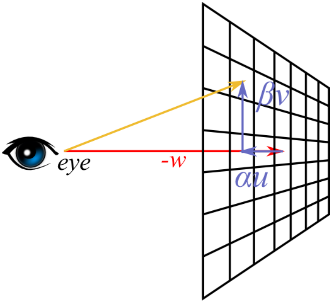
- Az X tengely legyen merőleges mind **w**-re, mind az **up** irányra!

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{w}|}$$

- Az Y tengely merőleges **u**-ra és **w**-re is:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

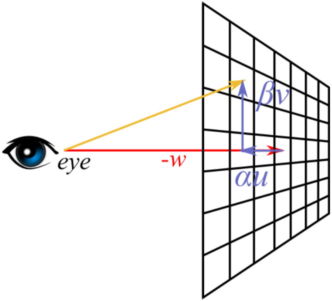
(i, j) pixel koordinátái



- Legyen **p** az i, j pixel középpontja, a vetítősík egységnyi távolságra a nézőponttól! Ekkor

$$\mathbf{p}(i,j) = \mathbf{eye} + (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

(i, j) pixel koordinátái



- Legyen **p** az i, j pixel középpontja, a vetítősík egységnyi távolságra a nézőponttól! Ekkor

$$\mathbf{p}(i,j) = \mathbf{eye} + (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

- Ahol

$$\alpha = \tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \cdot \frac{i - width/2}{width/2},$$

$$\beta = \tan\left(\frac{fovy}{2}\right) \cdot \frac{height/2 - j}{height/2}.$$

A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.

A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen $\mathbf{p}_0$ a sugár kezdőpontja, $\mathbf{v}$ pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

megadja a sugár összes pontját.

A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen $\mathbf{p}_0$ a sugár kezdőpontja, $\mathbf{v}$ pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

  megadja a sugár összes pontját.
- Most a sugarak kezdőpontját az előbbieknek megfelelően számoljuk, azaz $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(i, j)$

A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen $\mathbf{p}_0$ a sugár kezdőpontja, $\mathbf{v}$ pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

  megadja a sugár összes pontját.
- Most a sugarak kezdőpontját az előbbieknek megfelelően számoljuk, azaz $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(i,j)$
- A sugár irányvektora pedig $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}}{|\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}|}$

Tartalom

1. Raycasting
   - Motiváció
   - Raycasting
   - Sugarak indítása
   - Metszések

Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni

Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak

Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak
- A sugarunk mindig a korábban is látott $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol feltesszük a továbbiakban, hogy $|\mathbf{v}| = 1$

Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak
- A sugarunk mindig a korábban is látott $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol feltesszük a továbbiakban, hogy $|\mathbf{v}| = 1$
- Ekkor a t sugárparaméter éppen a $\mathbf{p}(t)$ pont távolsága $\mathbf{p}_0$-tól!

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t-re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t-re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott t-től függően a következő esetek állhatnak fenn:

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t-re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott t-től függően a következő esetek állhatnak fenn:
  - Ha $t > 0$, akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t-re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott t-től függően a következő esetek állhatnak fenn:
  - Ha $t > 0$, akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi
  - Ha $t = 0$ a sugár kezdőpontja a felületen van

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t-re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott t-től függően a következő esetek állhatnak fenn:
  - Ha $t > 0$, akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi
  - Ha $t = 0$ a sugár kezdőpontja a felületen van
  - Ha $t < 0$, akkor a sugár „mögött" van a felület és metszi a sugár egyenese a felületet (de nekünk $t > 0$ kell!)

Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$ parametrikus felület

Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$ parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan t sugárparamétert, amihez létezik (u, v), hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$

Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$ parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan t sugárparamétert, amihez létezik (u, v), hogy
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$
- Ez három ismeretlenes (t, u, v), három egyenletes $(x, y, z$ koordinátánként egy) egyenletrendszer

Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$ parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan t sugárparamétert, amihez létezik (u, v), hogy
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$
- Ez három ismeretlenes (t, u, v), három egyenletes $(x, y, z$ koordinátánként egy) egyenletrendszer
- A t ugyanúgy ellenőrizendő, mint előbb, de most az (u, v)-re is figyeljünk, hogy a felületünk paramétertartományának megengedett részén van-e (általában $(u, v) \in [0, 1]^2$ kell)!

Sugár és implicit sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk implicit alakban: $Ax + By + Cz + D = 0$

Sugár és implicit sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk implicit alakban: $Ax + By + Cz + D = 0$
- A

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sugár egyenese metszi a síkot, ha

$$A(x_0 + tx) + B(y_0 + ty) + C(z_0 + tz) + D = 0$$

Sugár és implicit sík metszéspontja

- Ezt t-re átrendezve adódik

$$t(Ax + By + Cz) + x_0 + y_0 + z_0 + D = 0$$

$$t = -\frac{x_0 + y_0 + z_0 + D}{Ax + By + Cz}$$

Sugár és implicit sík metszéspontja

- Ezt t-re átrendezve adódik

$$t(Ax + By + Cz) + x_0 + y_0 + z_0 + D = 0$$
$$t = -\frac{x_0 + y_0 + z_0 + D}{Ax + By + Cz}$$

- Látható a sík a nézőpontunkból, ha $t > 0$

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen $\mathbf{q}_0$ a sík egy pontja, $\mathbf{n}$ a normálvektora,

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen $\mathbf{q}_0$ a sík egy pontja, $\mathbf{n}$ a normálvektora,
- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen $\mathbf{q}_0$ a sík egy pontja, $\mathbf{n}$ a normálvektora,
- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen $\mathbf{q}_0$ a sík egy pontja, $\mathbf{n}$ a normálvektora,
- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- A sík egyenlete:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0$$

  – minden $\mathbf{q}$ pontja a síknak kielégíti ezt az egyenletet.

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$-t a $\mathbf{q}$ helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$-t a $\mathbf{q}$ helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$-t a $\mathbf{q}$ helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$-t a $\mathbf{q}$ helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

  ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.

- A sugár metszi a síkot, ha: $t > 0$.

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$-t a $\mathbf{q}$ helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

  ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.
- A sugár metszi a síkot, ha: $t > 0$.
- Ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal, és így vagy nincs metszéspontjuk, vagy az egyenes a síkon fut

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy $\mathbf{q}$ pontjával és $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ kifeszítő vektorokkal is: $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy $\mathbf{q}$ pontjával és $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ kifeszítő vektorokkal is: $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugár egyenesével: keressük t és u, v-t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy $\mathbf{q}$ pontjával és $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ kifeszítő vektorokkal is: $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugár egyenesével: keressük t és u, v-t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

- Beírva a képleteket adódik

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy $\mathbf{q}$ pontjával és $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ kifeszítő vektorokkal is: $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugár egyenesével: keressük t és u, v-t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

- Beírva a képleteket adódik

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

- Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_0 - \mathbf{q} = -t\mathbf{v} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ lineárisan nem összefüggő

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ lineárisan nem összefüggő
- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} p_{0x} - q_x \\ p_{0y} - q_y \\ p_{0z} - q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & i_x & j_x \\ -v_y & i_y & j_y \\ -v_z & i_z & j_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ lineárisan nem összefüggő
- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} p_{0x} - q_x \\ p_{0y} - q_y \\ p_{0z} - q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & i_x & j_x \\ -v_y & i_y & j_y \\ -v_z & i_z & j_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

- Látjuk a síkot, ha $t > 0$ (most $u, v \in \mathbb{R}$ a felület paramétertartománya, ez teljesülni fog)

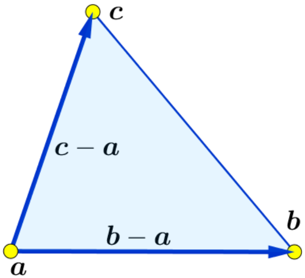
Sugár és háromszög metszéspontja I.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.

Sugár és háromszög metszéspontja I.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík egy parametrikus megadása

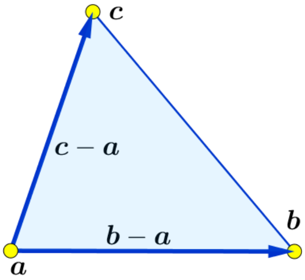
$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$



Sugár és háromszög metszéspontja I.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík egy parametrikus megadása

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$



- A korábbi jelölésekkel: $\mathbf{q} = \mathbf{a}$, $\mathbf{i} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $\mathbf{j} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$.

Sugár és háromszög metszéspontja I.

- Ez egyben egy baricentrikus megadás is, hiszen átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{s}(u,v) = (1-u-v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

ahol az együtthatók 1-re összegződnek.

Sugár és háromszög metszéspontja I.

- Ez egyben egy baricentrikus megadás is, hiszen átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{s}(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

ahol az együtthatók 1-re összegződnek.

- Elvégezve tehát a parametrikus síkkal a metszést, megkapjuk a baricentrikus koordinátáit a sugár síkkal való metszéspontjának.

Sugár és háromszög metszéspontja I.

- Ez egyben egy baricentrikus megadás is, hiszen átrendezve kapjuk, hogy

  $$\mathbf{s}(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

  ahol az együtthatók 1-re összegződnek.
- Elvégezve tehát a parametrikus síkkal a metszést, megkapjuk a baricentrikus koordinátáit a sugár síkkal való metszéspontjának.
- Utolsó lépésként ellenőriznünk kell, hogy a metszéspont a háromszögön belül van-e. Ez pontosan akkor teljesül, ha

  $$0 \leq u \leq 1 \text{ és } 0 \leq v \leq 1.$$

Sugár és háromszög metszéspontja II.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.

Sugár és háromszög metszéspontja II.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík pont-normálvektoros implicit megadásához a sík
  - egy pontja $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bármelyike

Sugár és háromszög metszéspontja II.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík pont-normálvektoros implicit megadásához a sík
  - egy pontja $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bármelyike
  - normálvektora

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\|(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|},$$

  ahol $\times$ a vektoriális szorzást jelöli, és ekkor $\mathbf{n}$ egységnyi hosszúságú.

Sugár és háromszög metszéspontja II.

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen **p** (már ha létezik).

Sugár és háromszög metszéspontja II.

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen $\mathbf{p}$ (már ha létezik).
- Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a $\mathbf{p}$ pont $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$-re vonatkoztatott baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

Sugár és háromszög metszéspontja II.

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen $\mathbf{p}$ (már ha létezik).
- Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a $\mathbf{p}$ pont $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$-re vonatkoztatott baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

- $\mathbf{p}$ Akkor, és csak akkor van a $\triangle$-ön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$
$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$
$$z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z,$$

  ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$

- A gyorsabb számolásért vegyük a fentinek egy síkra vett vetületét

Pont a háromszögön vizsgálat

- Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\
y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \\
z =& \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z,
\end{aligned}
$$

  ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$
- A gyorsabb számolásért vegyük a fentinek egy síkra vett vetületét
- A koordinátasíkok közül (XY, XZ vagy YZ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb!

Pont a háromszögön vizsgálat

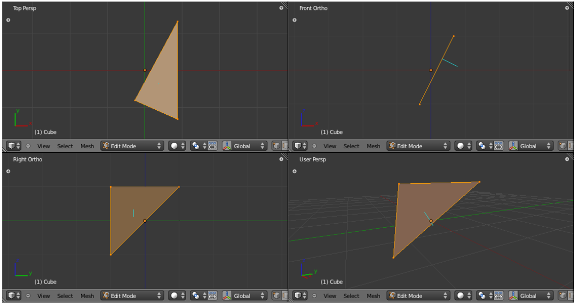
- Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$\begin{aligned} x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\ y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \\ z =& \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z, \end{aligned}$$

  ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$
- A gyorsabb számolásért vegyük a fentinek egy síkra vett vetületét
- A koordinátasíkok közül (XY, XZ vagy YZ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb! $\rightarrow$ a háromszög és a sík normálisa leginkább „egyállású”
- A vetülethez egyszerűen elhagyjuk z, y vagy x egyenletét, megfelelően.

Pont a háromszögön vizsgálat

Azt tengely kell választani, amelyik mentén a legnagyobb a háromszög normálvektorának abszolút értéke.
(Így biztos nem fordulhat elő, hogy a háromszög merőleges a síkra, és csak egy szakasz marad belőle!)



Pont a háromszögön vizsgálat

- Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x$$
$$y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$
\begin{aligned}
x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\
y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y
\end{aligned}
$$

- Behelyettesítve $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$-t, és rendezve:

$$
\begin{aligned}
x =& \lambda_1(a_x - c_x) + \lambda_2(b_x - c_x) + c_x \\
y =& \lambda_1(a_y - c_y) + \lambda_2(b_y - c_y) + c_y
\end{aligned}
$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve λ_1, λ_2-re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) - (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve λ_1, λ_2-re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) - (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.

Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve λ_1, λ_2-re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) - (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.
- **p** akkor és csak akkor van a háromszögön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Sugár metszése poligonnal

- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben

Sugár metszése poligonnal

- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
  - A sugarunkat metsszük el a poligon síkjával

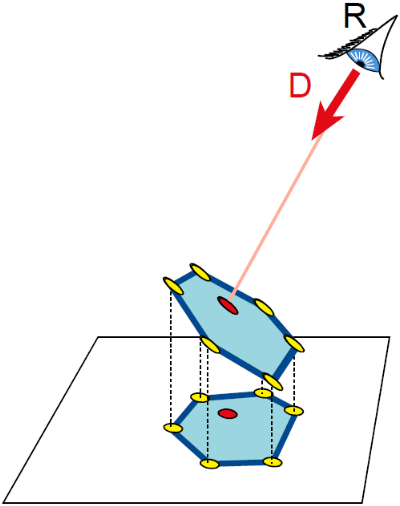
Sugár metszése poligonnal

- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
  - A sugarunkat metsszük el a poligon síkjával
  - Döntsük el, hogy a metszéspont a poligonon belül van-e

Sugár metszése poligonnal

- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
  - A sugarunkat metsszük el a poligon síkjával
  - Döntsük el, hogy a metszéspont a poligonon belül van-e
- A másodikat egy síkban érdemes csinálni (vagy a poligon síkjában, vagy a poligon valamely koordinátatengelyre vett vetületének síkjában)

Sugár metszése poligonnal

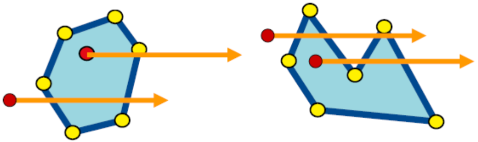


Pont-poligon tartalmazás teszt síkban

- A pont a poligonon belül van, ha tetszőleges irányú, belőle indított sugárnak páratlan számú metszéspontja van a poligon oldalaival (azaz a sugarat a poligon összes oldalszakaszával el kell metszeni)

Pont-poligon tartalmazás teszt síkban

- A pont a poligonon belül van, ha tetszőleges irányú, belőle indított sugárnak páratlan számú metszéspontja van a poligon oldalaival (azaz a sugarat a poligon összes oldalszakaszával el kell metszeni)
- Konkáv és csillag alakú poligonra is működik



Sugár metszése szakasszal

- A poligon $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T, \mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja: $\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0,1]$

Sugár metszése szakasszal

- A poligon $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T, \mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja: $\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0,1]$
- Ezt kell metszeni a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú sugárral

Sugár metszése szakasszal

- A poligon $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T, \mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja: $\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0,1]$
- Ezt kell metszeni a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú sugárral
- Most: a $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e, $\mathbf{v}$ tetszőleges

Sugár metszése szakasszal

- A poligon $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T, \mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja: $\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0,1]$
- Ezt kell metszeni a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú sugárral
- Most: a $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e, $\mathbf{v}$ tetszőleges
- Legyen $\mathbf{v} = (1,0)$!

Sugár metszése szakasszal

- A poligon $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T, \mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja: $\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0,1]$
- Ezt kell metszeni a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú sugárral
- Most: a $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e, $\mathbf{v}$ tetszőleges
- Legyen $\mathbf{v} = (1, 0)$!
- Így a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ egyenletet csak y koordinátára kell megoldani

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s-re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s-re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s-re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- s-t kifejezve: $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s-re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- s-t kifejezve: $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az x koordinátát $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$-be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s-re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- s-t kifejezve: $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az x koordinátát $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$-be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt
- Ha $s \notin [0, 1]$: a sugár nem metszi a szakaszt (csak az egyenesét)

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s-re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- s-t kifejezve: $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az x koordinátát $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$-be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt
- Ha $s \notin [0,1]$: a sugár nem metszi a szakaszt (csak az egyenesét)
- Ha $t \leq 0$: a sugár egybeesik a szakasszal, vagy mögötte van a metszéspont

Sugár és gömb metszéspontja

- Az r sugarú, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ középpontú gömb implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0$$

Sugár és gömb metszéspontja

- Az r sugarú, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ középpontú gömb implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0$$

- Ugyanez skalárszorzattal felírva:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{p} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0,$$

ahol $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$.

Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.

Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- Behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$\langle \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- Behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$\langle \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Kifejtve:

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t-re (minden más ismert).

Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t-re (minden más ismert).
- Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2)$

Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t-re (minden más ismert).
- Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2)$
- Ha $D > 0$: két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.

Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t-re (minden más ismert).
- Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2)$
- Ha $D > 0$: két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha $D = 0$: egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.

Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t-re (minden más ismert).
- Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2)$
- Ha $D > 0$: két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha $D = 0$: egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.
- Ha $D < 0$: nincs valós megoldás, az egyenes nem metszi a gömböt.

Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t-re (minden más ismert).
- Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2)$
- Ha $D > 0$: két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha $D = 0$: egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.
- Ha $D < 0$: nincs valós megoldás, az egyenes nem metszi a gömböt.
- Sugárparamétert ezután ellenőrizni kell ($t > 0$).

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha $a \approx 0$

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha $a \approx 0$
  - Átalakítással kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

  formában felírható a két gyök (Citardauq Formula)

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha $b >> 4ac$

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha $b >> 4ac$
  - Ekkor $b^2 - 4ac \approx b^2$ (sőt!), vagyis b előjelétől függően vagy $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ vagy pedig $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ elveszti az értékes tizedesjegyeket

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha $b >> 4ac$
  - Ekkor $b^2 - 4ac \approx b^2$ (sőt!), vagyis b előjelétől függően vagy $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ vagy pedig $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ elveszti az értékes tizedesjegyeket
  - Számítsuk ki az egyik gyököt azon az ágon, amelyiken nem vonunk ki egymásból két közel azonos pozitív számot, a másik gyököt pedig a Viète-formulákból

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha $b >> 4ac$
  - Ekkor $b^2 - 4ac \approx b^2$ (sőt!), vagyis b előjelétől függően vagy $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ vagy pedig $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ elveszti az értékes tizedesjegyeket
  - Számítsuk ki az egyik gyököt azon az ágon, amelyiken nem vonunk ki egymásból két közel azonos pozitív számot, a másik gyököt pedig a Viète-formulákból
  - Azaz például ha $b > 0$, akkor $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ és $x_2 = \frac{c}{ax_1}$

Sugár és transzformált objektumok metszése

- Legyen **M** egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük **r** sugár és az **M**-mel transzformált objektum metszéspontját!

Sugár és transzformált objektumok metszése

- Legyen **M** egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük **r** sugár és az **M**-mel transzformált objektum metszéspontját!
- Probléma: Hogyan transzformálunk egy gömböt? Pontonként? Képletet írjuk át? ...

Sugár és transzformált objektumok metszése

- Legyen **M** egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük **r** sugár és az **M**-mel transzformált objektum metszéspontját!
- Probléma: Hogyan transzformálunk egy gömböt? Pontonként? Képletet írjuk át? ...
- Megoldás: Transzformáljuk inkább a sugarat!

Sugár és transzformált objektumok metszése

Tétel

Az $\mathbf{r}$ sugár és az $\mathbf{M}$-mel transzformált objektum metszéspontja $\equiv$ az $\mathbf{M}^{-1}$-zel transzformált $\mathbf{r}$ sugár és az objektum metszéspontja.

Sugár és transzformált objektumok metszése

Tétel

Az **r** sugár és az **M**-mel transzformált objektum metszéspontja $\equiv$ az $\mathbf{M}^{-1}$-zel transzformált **r** sugár és az objektum metszéspontja.

- $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, homogén transzformáció
- Sugár kezdőpontja: $\mathbf{p}_0 = (p_x, p_y, p_z) \to [p_x, p_y, p_z, 1]^T$
- Sugár iránya: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \to [v_x, v_y, v_z, 0]^T$. Így nem hat rá az eltolás.
- Transzformált sugár $\widehat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$

Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk $\widehat{\mathbf{r}}(t)$-t!

Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk $\widehat{\mathbf{r}}(t)$-t!
- Metszéspont: $\mathbf{q}$, akkor az eredeti térben $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$.

Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk $\widehat{\mathbf{r}}(t)$-t!
- Metszéspont: $\mathbf{q}$, akkor az eredeti térben $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$.
- Távolságokat újra kell számolni az eredeti térben!

Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk $\widehat{\mathbf{r}}(t)$-t!
- Metszéspont: $\mathbf{q}$, akkor az eredeti térben $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$.
- Távolságokat újra kell számolni az eredeti térben!
- Normálvektorok: $\mathbf{n}$ helyett $\mathbf{M}^{-T} \cdot \mathbf{n}$ (inverz-transzponált).

Sugár metszése AAB-vel

- AAB = axis aligned box, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak

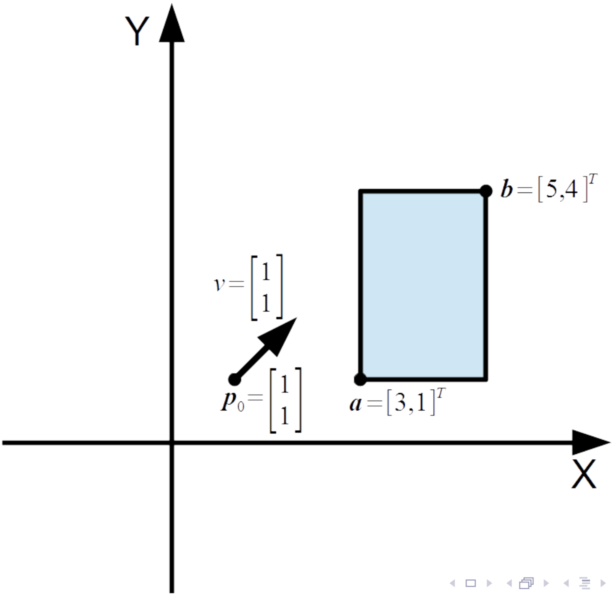
Sugár metszése AAB-vel

- AAB = axis aligned box, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak
- Legyen a sugarunk $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T, \mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ a téglatestet pedig adjuk meg átlójának két pontjával, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ segítségével $(\mathbf{a} < \mathbf{b})$!

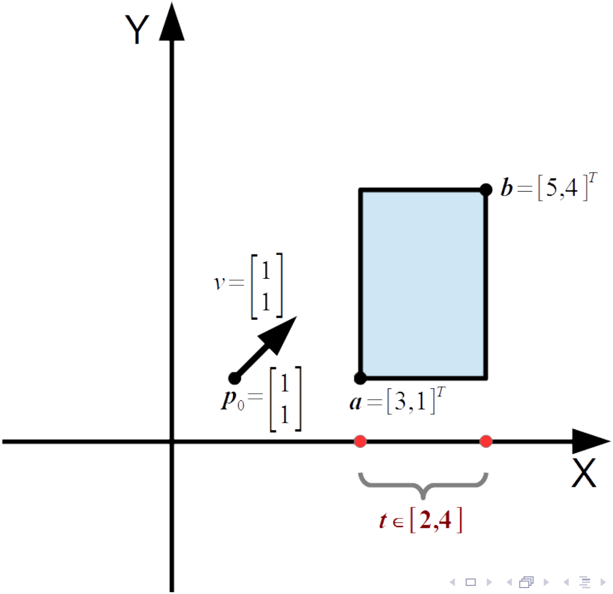
Sugár metszése AAB-vel

- AAB = axis aligned box, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak
- Legyen a sugarunk $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T, \mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ a téglatestet pedig adjuk meg átlójának két pontjával, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ segítségével ($\mathbf{a} < \mathbf{b}$)!
- Tegyük fel, hogy a sugár kiindulópontja a doboztól balra helyezkedik el

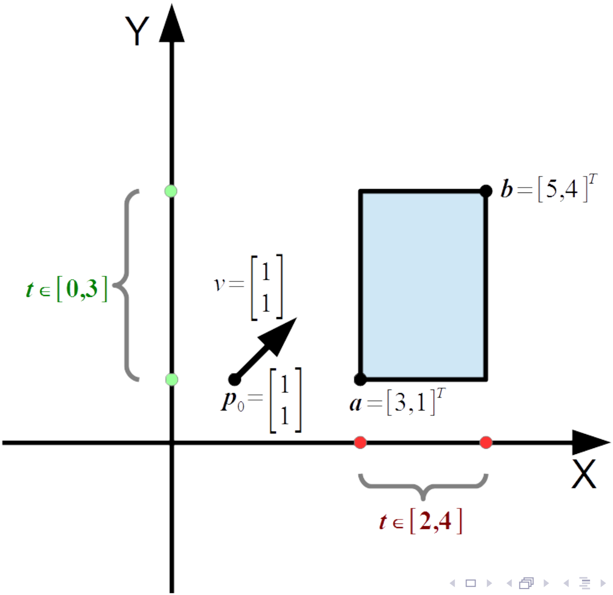
Sugár metszése AAB-vel



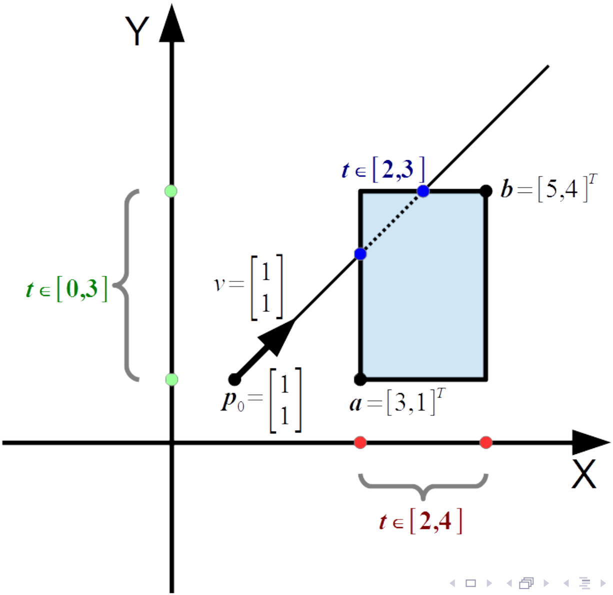
Sugár metszése AAB-vel



Sugár metszése AAB-vel



Sugár metszése AAB-vel



Sugár metszése AAB-vel

- Ha $v_x = 0$: vízszintes a sugarunk, nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben trivi eldönteni.

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $v_x = 0$: vízszintes a sugarunk, nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben trivi eldönteni.
- Ha $v_x \neq 0$, akkor legyen $t_n := -\infty$, $t_f := +\infty$ és $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$, $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $v_x = 0$: vízszintes a sugarunk, nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben trivi eldönteni.
- Ha $v_x \neq 0$, akkor legyen $t_n := -\infty$, $t_f := +\infty$ és $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$, $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha $t_1 > t_2$: cseréljük meg t_1, t_2-t!

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $v_x = 0$: vízszintes a sugarunk, nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben trivi eldönteni.
- Ha $v_x \neq 0$, akkor legyen $t_n := -\infty, t_f := +\infty$ és $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}, t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha $t_1 > t_2$: cseréljük meg t_1, t_2-t!
- Ha $t_n < t_1$: $t_n := t_1$

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $v_x = 0$: vízszintes a sugarunk, nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben trivi eldönteni.
- Ha $v_x \neq 0$, akkor legyen $t_n := -\infty, t_f := +\infty$ és $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}, t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha $t_1 > t_2$: cseréljük meg t_1, t_2-t!
- Ha $t_n < t_1$: $t_n := t_1$
- Ha $t_f > t_2$: $t_f := t_2$

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $v_x = 0$: vízszintes a sugarunk, nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben trivi eldönteni.
- Ha $v_x \neq 0$, akkor legyen $t_n := -\infty$, $t_f := +\infty$ és $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}$, $t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha $t_1 > t_2$: cseréljük meg t_1, t_2-t!
- Ha $t_n < t_1$: $t_n := t_1$
- Ha $t_f > t_2$: $t_f := t_2$
- A fentit végezzük el az y és z koordinátákra is

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $t_n > t_f$: nem találtuk el a dobozt

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $t_n > t_f$: nem találtuk el a dobozt
- Ha $t_f < 0$: a doboz mögöttünk van

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $t_n > t_f$: nem találtuk el a dobozt
- Ha $t_f < 0$: a doboz mögöttünk van
- Minden más esetben a sugarunk metszéspontjai a dobozzal t_n és t_f-ben lesznek (sorban a közelebbi és távolabbi metszéspontok)