

Numerikus Módszerek Gyakorlat

2. zárthelyi (minta)

1. Az $f(x) = x^3 - 8x + 4$ egyenlet $[0, 1]$ intervallumbeli megoldásának közelítésére az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 4}{8}$$

iterációt használjuk.

- (a) Bizonyítsuk az iterációs sorozat konvergenciáját az intervallumon!
- (b) Írjuk fel a hibabecslést!

(6+2 pont)

2. Tekintsük a következő nemlineáris egyenletet:

$$f(x) = e^{3x} - \cos(x) - 42 = 0$$

- (a) Igazoljuk, hogy az $[1, 2]$ intervallum tartalmaz gyököt!
- (b) Írjuk fel az f függvényre a Newton-módszert!
- (c) Lássuk be, hogy a Newton-módszer monoton konvergenciatételének feltételei a megadott intervallumon teljesülnek! Hogyan kell megválasztanunk az x_0 kezdőpontot?

(2+2+4 pont)

3. Tekintsük az $f(x) = 2^x - x^2$ függvényt és a 0, 1, 2, 3, 4 alappontokat!

- (a) Írjuk fel az f -et a megadott alappontokon interpoláló polinom Newton-alakját (a polinomot nem kell algebrai alakra hozni)!
- (b) Tegyük fel, hogy ugyanezt a függvényt másodfokú polinommal szeretnénk interpolálni a $[0, 4]$ intervallumon. Hogyan kell megválasztanunk az alappontokat, ha azt szeretnénk, hogy az interpolációs polinom intervallumra vonatkozó hibabecslése optimális legyen? Becsüljük is a hibát!

(8+6 pont)

4. Írjuk fel az (x_i, y_i) pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes és parabola egyenletét!

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	1	-1	0	2

(4+6 pont)

5. Tekintsük a következő határozott integrált:

$$\int_{-1}^1 \frac{1-x}{x+2} dx$$

- (a) Közelítsük az integrált érintő-, trapéz- és Simpson-formulával!
- (b) Becsüljük a Simpson-formula hibáját!
- (c) Hányszorosan összetett Simpson-formulát kell alkalmaznunk, ha azt szeretnénk, hogy a közelítés hibája 10^{-3} alá csökkenjen?

(3+3+4 pont)