Numerikus módszerek C

12. előadás: Numerikus integrálás

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Feladat: az

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{illetve az} \quad \int_a^b f(x)w(x)\,dx$$

Riemann integrál közelítő kiszámítása, ahol $w(x) \geq 0$ súlyfüggvény.

Feladat: az

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{illetve az} \quad \int_a^b f(x)w(x)\,dx$$

Riemann integrál közelítő kiszámítása, ahol $w(x) \geq 0$ súlyfüggvény.

Kézenfekvő lenne a definícióval (alsó- és felső közelítő összegekkel vagy Riemann közelítő összeggel) számolni, azonban így túl sokat kellene számolnunk a pontosabb eredmény eléréséhez.
$\rightarrow$ Nem gazdaságos.

Alkalmazási területei a matematikában:

- Amikor a primitív függvény nem állítható elő zárt alakban.

Alkalmazási területei a matematikában:

- Amikor a primitív függvény nem állítható elő zárt alakban.
- Az analitikus integrálás túl bonyolult lenne.

Alkalmazási területei a matematikában:

- Amikor a primitív függvény nem állítható elő zárt alakban.
- Az analitikus integrálás túl bonyolult lenne.
- Terület, térfogat, ívhossz számításnál.

Alkalmazási területei a matematikában:

- Amikor a primitív függvény nem állítható elő zárt alakban.
- Az analitikus integrálás túl bonyolult lenne.
- Terület, térfogat, ívhossz számításnál.
- Differenciálegyeletek numerikus módszereinél a módszerek konstrukciójakor.

Alkalmazási területei a matematikában:

- Amikor a primitív függvény nem állítható elő zárt alakban.
- Az analitikus integrálás túl bonyolult lenne.
- Terület, térfogat, ívhossz számításnál.
- Differenciálegyeletek numerikus módszereinél a módszerek konstrukciójakor.

Példa: Számítsuk ki a következő integrálok értékét!

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?, \quad \int_0^{\pi} \cos(x^2)\,dx = ?$$

Alkalmazási területei a fizikában:

- Pl. forgatónyomaték, sűrűség, görbület számításnál.

Alkalmazási területei a fizikában:

- Pl. forgatónyomaték, sűrűség, görbület számításnál.
- Ha a függvény csak mintavételezéssel adott.

Alkalmazási területei a fizikában:

- Pl. forgatónyomaték, sűrűség, görbület számításnál.
- Ha a függvény csak mintavételezéssel adott.

Példa: Egy gazdaság területe egy folyó egyenes 10 km hosszú partszakaszának egyik partján fekszik. A folyó mentén kilométerenként megmérték, hogy a folyóra merőleges irányban hány kilométerre nyúlik a gazdaság területe. A kapott 11 értékből számítsuk ki közelítően a gazdaság területét!

Ötlet:

Tekintsük az $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ felosztást és az általánosabb tárgyalásmódhoz a $w(x) \geq 0$ súlyfüggvényt. Feltesszük, hogy $\int_a^b w(x)\,dx < \infty$. Közelítsük az $f(x)$ függvényt az interpolációs polinomjának Lagrange-alakjával, $L_n(x)$-el.

Ötlet:

Tekintsük az $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ felosztást és az általánosabb tárgyalásmódhoz a $w(x) \geq 0$ súlyfüggvényt. Feltesszük, hogy $\int_a^b w(x)\,dx < \infty$. Közelítsük az $f(x)$ függvényt az interpolációs polinomjának Lagrange-alakjával, $L_n(x)$-el.

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)w(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x)w(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b \ell_k(x)w(x)\,dx}_{=:A_k} = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Ötlet:

Tekintsük az $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ felosztást és az általánosabb tárgyalásmódhoz a $w(x) \geq 0$ súlyfüggvényt. Feltesszük, hogy $\int_a^b w(x)\,dx < \infty$. Közelítsük az $f(x)$ függvényt az interpolációs polinomjának Lagrange-alakjával, $L_n(x)$-el.

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)w(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k)\ell_k(x)w(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^n f(x_k) \underbrace{\int_a^b \ell_k(x)w(x)\,dx}_{=:A_k} = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

Megj.: A_k csak az alappontoktól és a súlyfüggvénytől függ, f-től nem. Szingularitással rendelkező függvények esetén lesz szerepe a súlyfüggvénynek.

Definíció: Interpolációs kvadratúra formulák

1. A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ formulát *kvadratúra formulának* nevezzük.

Definíció: Interpolációs kvadratúra formulák

1. A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ formulát *kvadratúra formulának* nevezzük.
2. A kvadratúra formula *interpolációs típusú*, ha
   $A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\,dx \quad (k = 0, \ldots, n)$.

Definíció: Interpolációs kvadratúra formulák

1. A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ formulát *kvadratúra formulának* nevezzük.
2. A kvadratúra formula *interpolációs típusú*, ha
   $A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx \ \ (k = 0, \ldots, n)$.

Tétel: Pontossági tétel

$$\forall\, f \in P_n\text{-re} \quad \int_a^b f(x) w(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$
$$\Leftrightarrow \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx \ \ (k = 0, \ldots, n)$$

Definíció: Interpolációs kvadratúra formulák

1. A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ formulát *kvadratúra formulának* nevezzük.
2. A kvadratúra formula *interpolációs típusú*, ha $A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx \ \ (k = 0, \ldots, n)$.

Tétel: Pontossági tétel

$$\forall\, f \in P_n\text{-re} \quad \int_a^b f(x) w(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx \ \ (k = 0, \ldots, n)$$

Biz.: Táblán.

Következmény:

1. $f \equiv 1$-re pontos a formula:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b w(x)\,dx =: \mu_0.$$

Következmény:

1. $f \equiv 1$-re pontos a formula:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b w(x)\, dx =: \mu_0.$$

2. Ha $w(x) \equiv 1$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = b - a.$$

Megjegyzés.: A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ képletben $2(n+1)$ szabad paraméter van: A_k, x_k, így a legfeljebb n-edfokú polinomokra való pontosság kevésnek tűnik.

Megjegyzés.: A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ képletben $2(n+1)$ szabad paraméter van: A_k, x_k, így a legfeljebb n-edfokú polinomokra való pontosság kevésnek tűnik.

Kvadratúra formula típusok:

Megjegyzés.: A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ képletben $2(n+1)$ szabad paraméter van: A_k, x_k, így a legfeljebb n-edfokú polinomokra való pontosság kevésnek tűnik.

Kvadratúra formula típusok:

1. **Newton–Cotes típus:**
   $w(x) \equiv 1$ és az $\{x_i : i = 0, \dots, n\}$ alappontok egyenletes felosztású pontok $[a; b]$-n.

Megjegyzés.: A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ képletben $2(n+1)$ szabad paraméter van: A_k, x_k, így a legfeljebb n-edfokú polinomokra való pontosság kevésnek tűnik.

Kvadratúra formula típusok:

1. **Newton–Cotes típus:**
   $w(x) \equiv 1$ és az $\{x_i : i = 0, \dots, n\}$ alappontok egyenletes felosztású pontok $[a; b]$-n.
2. **Csebisev típus:**
   $A_k \equiv A \ (k = 0, \dots, n)$.

Megjegyzés.: A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ képletben $2(n+1)$ szabad paraméter van: A_k, x_k, így a legfeljebb n-edfokú polinomokra való pontosság kevésnek tűnik.

Kvadratúra formula típusok:

1. **Newton–Cotes típus:**
   $w(x) \equiv 1$ és az $\{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ alappontok egyenletes felosztású pontok $[a; b]$-n.
2. **Csebisev típus:**
   $A_k \equiv A$ $(k = 0, \ldots, n)$.
3. **Gauss típus:**
   maximális fokszámig $(2n+1)$ pontos formulák.

Newton–Cotes típusú kvadratúra formulák:

$$w(x) \equiv 1 \quad \text{és} \quad x_k = x_0 + kh$$

Newton–Cotes típusú kvadratúra formulák:

$$w(x) \equiv 1 \quad \text{és} \quad x_k = x_0 + kh$$

- **Zárt formulák** $(Z(n))$**:** a és b alappont

$$x_0 = a,\, x_n = b, \;\; h = \frac{b-a}{n} \;\text{ és }\; x_k = a + kh \;\; (k = 0, \ldots, n)$$

Newton–Cotes típusú kvadratúra formulák:

$$w(x) \equiv 1 \quad \text{és} \quad x_k = x_0 + kh$$

- **Zárt formulák** $(Z(n))$**:** a és b alappont

$$x_0 = a,\, x_n = b,\ \ h = \frac{b-a}{n} \ \text{ és } \ x_k = a + kh \ \ (k = 0, \ldots, n)$$

- **Nyílt formulák** $(Ny(n))$**:** a és b *nem* alappont

$$h = \frac{b-a}{n+2},\ \ x_k = a+kh \ \ (k = 1, \ldots, n+1) \ \text{ így } \ x_0 = a+h,\, x_n = b-h$$

A zárt N-C együtthatók számítása:

$$\begin{aligned} x &= a + th, \quad t \in [0; n] \\ x - x_j &= (t - j)h \\ x_k - x_j &= (k - j)h \end{aligned}$$

A zárt N-C együtthatók számítása:

$$x = a + th, \quad t \in [0; n]$$

$$x - x_j = (t - j)h$$

$$x_k - x_j = (k - j)h$$

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x)\, dx = \int_a^b \frac{(x - x_0) \dots \sqrt[k]{} \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots \sqrt[k]{} \dots (x_k - x_n)}\, dx$$

A zárt N-C együtthatók számítása:

$$
\begin{aligned}
x &= a + th, \quad t \in [0; n] \\
x - x_j &= (t - j)h \\
x_k - x_j &= (k - j)h
\end{aligned}
$$

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x - x_0)\dots\sqrt[k]{\ }\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots\sqrt[k]{\ }\dots(x_k - x_n)}\,dx$$

A $t = \frac{x-a}{h}$ helyettesítést bevezetve $a \mapsto 0$, $b \mapsto n$ és $dx = h\,dt$:

$$A_k = h \cdot \int_0^n \frac{(t - 0)(t - 1)\dots\sqrt[k]{\ }\dots(t - n)}{(k - 0)(k - 1)\dots\sqrt[k]{\ }\dots(k - n)}\,dt$$

$$\begin{aligned}
A_k &= h \cdot \int_0^n \frac{(t-0)(t-1)\ldots \sqrt[k]{} \ldots (t-n)}{(k-0)(k-1)\ldots \sqrt[k]{} \ldots (k-n)}\, dt = \\
&= h \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-k)}\, dt = \\
&= (b-a) \underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-k)}\, dt}_{=B_k^{(z)}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_k &= h \cdot \int_0^n \frac{(t-0)(t-1)\dots \overset{k}{\surd} \dots (t-n)}{(k-0)(k-1)\dots \overset{k}{\surd} \dots (k-n)}\, dt = \\
&= h \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-k)}\, dt = \\
&= (b-a) \underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-k)}\, dt}_{=B_k^{(z)}}
\end{aligned}
$$

A $B_k^{(z)}$ együtthatók függetlenek az $[a;b]$ intervallumtól.

A nyílt N-C együtthatók számítása.

$$
\begin{aligned}
x &= a + th, \quad t \in [0; n+2] \\
x - x_j &= (a + th) - (a + (j+1)h) = (t - (j+1))\, h \\
x_k - x_j &= (a + (k+1)h) - (x_0 + (j+1)h) = (k-j)h
\end{aligned}
$$

A nyílt N-C együtthatók számítása.

$$\begin{aligned} x &= a + th, \quad t \in [0; n+2] \\ x - x_j &= (a + th) - (a + (j+1)h) = (t - (j+1))\, h \\ x_k - x_j &= (a + (k+1)h) - (x_0 + (j+1)h) = (k-j)h \end{aligned}$$

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x)\, dx = \int_a^b \frac{(x - x_0) \dots \sqrt[k]{} \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots \sqrt[k]{} \dots (x_k - x_n)}\, dx$$

A nyílt N-C együtthatók számítása.

$$x = a + th, \quad t \in [0; n+2]$$

$$x - x_j = (a + th) - (a + (j+1)h) = (t - (j+1))\,h$$

$$x_k - x_j = (a + (k+1)h) - (x_0 + (j+1)h) = (k - j)h$$

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x - x_0)\ldots \not{k} \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots \not{k} \ldots (x_k - x_n)}\,dx$$

A $t = \frac{x-a}{h}$ helyettesítést bevezetve $a \mapsto 0, b \mapsto n+2$ és $dx = h\,dt$:

$$A_k = h \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\ldots(t-k)(t-(k+2))\ldots(t-(n+1))}{k(k-1)\ldots 1 \cdot (k-(k+1))\ldots(k-n)}\,dt$$

$$A_k = h \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\dots(t-k)(t-(k+2))\dots(t-(n+1))}{k(k-1)\dots 1 \cdot (k-(k+1))\dots(k-n)}\,dt =$$

$$= h \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\dots(t-(n+1))}{(t-(k+1))}\,dt =$$

$$= (b-a)\underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{(n+2)\cdot k!(n-k)!} \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\dots(t-(n+1))}{(t-(k+1))}\,dt}_{=B_k^{(ny)}}$$

A $B_k^{(ny)}$ együtthatók függetlenek az $[a;b]$ intervallumtól.

Tétel:

1. $\sum_{k=0}^{n} B_k = 1$

Tétel:

1. $\sum_{k=0}^{n} B_k = 1$
2. $B_k = B_{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$

Tétel:

1. $\sum_{k=0}^{n} B_k = 1$
2. $B_k = B_{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$

Biz:

Tétel:

1. $\sum_{k=0}^{n} B_k = 1$
2. $B_k = B_{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$

Biz:

1. $f \equiv 1$-re pontos a formula illetve

Tétel:

1. $\sum_{k=0}^{n} B_k = 1$
2. $B_k = B_{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$

Biz:

1. $f \equiv 1$-re pontos a formula illetve
2. az alappontok szimmetriájából következik.
   ($y := n - t$ változó bevezetésével az integrálból.)

A N-C formulák együtthatóit más módon is meghatározhatjuk. A P_n-re való pontosság az integrál linearitása miatt azonos az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ hatványfüggvényekre való pontossággal. Ebből A_k-ra LER-t írhatunk fel:

A N-C formulák együtthatóit más módon is meghatározhatjuk. A P_n-re való pontosság az integrál linearitása miatt azonos az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ hatványfüggvényekre való pontossággal. Ebből A_k-ra LER-t írhatunk fel:

$$\int_a^b 1\,dx = b - a = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n$$

$$\ldots\ldots$$

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) = A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \ldots + A_n x_n^n$$

A N-C formulák együtthatóit más módon is meghatározhatjuk. A P_n-re való pontosság az integrál linearitása miatt azonos az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ hatványfüggvényekre való pontossággal. Ebből A_k-ra LER-t írhatunk fel:

$$\int_a^b 1\,dx = b - a = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n$$

$$\ldots\ldots$$

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) = A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \ldots + A_n x_n^n$$

A kapott LER mátrixa a Vandermonde-mátrix transzponáltja, tehát a fenti módszer csak kézi számolásra használható.

Érintő formula (Ny(0))

$$\int_a^b f \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: E(f)$$

Érintő formula (Ny(0))

$$\int_a^b f \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: E(f)$$

Biz: A Newton–Cotes együtthatók tulajdonsága alapján

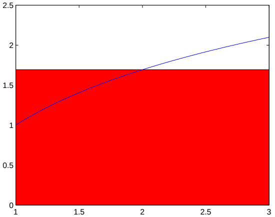
$$A_0 = b - a.$$

Érintő formula (Ny(0))

$$\int_a^b f \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: E(f)$$

Biz: A Newton–Cotes együtthatók tulajdonsága alapján

$$A_0 = b - a.$$



Trapéz formula (Z(1))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) =: T(f)$$

Trapéz formula (Z(1))

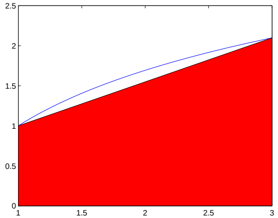
$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) =: T(f)$$

Biz: A Newton–Cotes együtthatók tulajdonsága alapján $A_0 = A_1$ és $A_0 + A_1 = b - a$. Innen $A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$.

Trapéz formula (Z(1))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) =: T(f)$$

Biz: A Newton–Cotes együtthatók tulajdonsága alapján $A_0 = A_1$ és $A_0 + A_1 = b - a$. Innen $A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$.



Simpson formula (Z(2))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) =: S(f)$$

Simpson formula (Z(2))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) =: S(f)$$

Biz: Elég A_1-et a definícióból számolni.

$$A_1 = \int_a^b \ell_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\,dx =$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2} \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx =$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2} \int_a^b (x^2-(a+b)x+ab)\,dx$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2}\left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + ab\cdot x\right]_a^b =$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{3}(b^3-a^3) - \frac{1}{2}(a+b)(b^2-a^2) + ab(b-a)\right) =$$

$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(2(b^3-a^3) - 3(a+b)(b^2-a^2) + 6ab(b-a)\right) =$$

$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(2b^3 - 2a^3 - (3ab^2 - 3a^3 + 3b^3 - 3a^2b) + 6ab^2 - 6a^2b\right) =$$

$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(-b^3 + a^3 + 3ab^2 - 3a^2b\right) = \frac{4(b-a)^3}{6(b-a)^2} = \frac{4}{6}(b-a) = A_1$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2}\left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + ab\cdot x\right]_a^b =$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{3}(b^3-a^3) - \frac{1}{2}(a+b)(b^2-a^2) + ab(b-a)\right) =$$

$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(2(b^3-a^3) - 3(a+b)(b^2-a^2) + 6ab(b-a)\right) =$$

$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(2b^3 - 2a^3 - (3ab^2 - 3a^3 + 3b^3 - 3a^2b) + 6ab^2 - 6a^2b\right) =$$

$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(-b^3 + a^3 + 3ab^2 - 3a^2b\right) = \frac{4(b-a)^3}{6(b-a)^2} = \frac{4}{6}(b-a) = A_1$$

Innen

$$A_0 = A_2 \text{ és } A_0 + A_1 + A_2 = b - a \quad \Rightarrow \quad A_0 = A_2 = \frac{1}{6}(b-a).$$

Tartalomjegyzék

Tétel (Emlékeztető): Az integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in C[a;b]$ és $g \geq 0$, ekkor $\exists \xi \in (a;b)$:

$$\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Tétel (Emlékeztető): Az integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in C[a;b]$ és $g \geq 0$, ekkor $\exists\, \xi \in (a;b)$:

$$\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Tétel: Az érintő formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta).$$

Tétel (Emlékeztető): Az integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in C[a;b]$ és $g \geq 0$, ekkor $\exists\, \xi \in (a;b)$:

$$\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Tétel: Az érintő formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Tétel: A trapéz formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Tétel: A trapéz formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Tétel: A trapéz formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Tétel: A Simpson formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Tétel: A trapéz formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Tétel: A Simpson formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Tétel: A N-C formulák hibája

Jelölje $I(f)$ jelöli a N-C kvadratúra formulát.

1. Ha n páratlan és $f \in C^{n+1}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega_n(x)\,dx.$$

Tétel: A N-C formulák hibája

Jelölje $I(f)$ jelöli a N-C kvadratúra formulát.

1. Ha n páratlan és $f \in C^{n+1}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega_n(x)\,dx.$$

2. Ha n páros és $f \in C^{n+2}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \cdot \omega_n(x)\,dx.$$

Tétel: A N-C formulák hibája

Jelölje $I(f)$ jelöli a N-C kvadratúra formulát.

1. Ha n páratlan és $f \in C^{n+1}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega_n(x)\,dx.$$

2. Ha n páros és $f \in C^{n+2}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \cdot \omega_n(x)\,dx.$$

Megjegyzés: Vagyis páros n esetén a formula nagyobb pontosságot tud, mint amit elvárunk tőle. (Lásd érintő és Simpson formula.) Nem biz.

Tartalomjegyzék

$[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon trapéz formulát ($T(f)$) alkalmazunk.

$[a; b]$-t m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon trapéz formulát ($T(f)$) alkalmazunk.

Trapéz összetett formula (Trapéz szabály)

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(b) \right) =: T_m(f)$$

$[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon trapéz formulát $(T(f))$ alkalmazunk.

Trapéz összetett formula (Trapéz szabály)

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(b) \right) =: T_m(f)$$

Megj.: A megjegyzendő együttható sorozat: $1, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1$.

$[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon trapéz formulát ($T(f)$) alkalmazunk.

Trapéz összetett formula (Trapéz szabály)

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(b) \right) =: T_m(f)$$

Megj.: A megjegyzendő együttható sorozat: $1, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1.$

Tétel: A trapéz összetett formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

Trapéz összetett formula

$[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon trapéz formulát ($T(f)$) alkalmazunk.

Trapéz összetett formula (Trapéz szabály)

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(b) \right) =: T_m(f)$$

Megj.: A megjegyzendő együttható sorozat: $1, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1$.

Tétel: A trapéz összetett formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Legyen m páros és $[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk, majd az $I_k := [x_{2k-2}, x_{2k}]$, $(k = 1, \ldots, \frac{m}{2})$ részintervallumokra Simpson formulát $(S(f))$ alkalmazunk. Vagyis a belső felezőpontokat is megszámoztuk, így $\frac{m}{2}$ Simpson formulát használunk.

Legyen m páros és $[a; b]$-t m egyenlő részre osztjuk, majd az $I_k := [x_{2k-2}, x_{2k}]$, $(k = 1, \ldots, \frac{m}{2})$ részintervallumokra Simpson formulát ($S(f)$) alkalmazunk. Vagyis a belső felezőpontokat is megszámoztuk, így $\frac{m}{2}$ Simpson formulát használunk.

A Simpson összetett formula (Simpson szabály)

$$S_m(f) := \frac{b-a}{3m} \cdot \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

$$\int_a^b f \approx S_m(f)$$

Legyen m páros és $[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk, majd az $I_k := [x_{2k-2}, x_{2k}]$, $(k = 1, \ldots, \frac{m}{2})$ részintervallumokra Simpson formulát ($S(f)$) alkalmazunk. Vagyis a belső felezőpontokat is megszámoztuk, így $\frac{m}{2}$ Simpson formulát használunk.

A Simpson összetett formula (Simpson szabály)

$$S_m(f) := \frac{b-a}{3m} \cdot \left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

$$\int_a^b f \approx S_m(f)$$

Megj.: A megjegyzendő együttható sorozat: $1, 4, 2, 4, \ldots, 4, 2, 4, 1$.

Tétel: A Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Tétel: A Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Tétel: A Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Megjegyzés:

Tétel: A Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Megjegyzés:

- Az érintő formulából is készíthető összetett formula az előzőekhez hasonlóan.

Tétel: A Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Biz.: Táblán.

Megjegyzés:

- Az érintő formulából is készíthető összetett formula az előzőekhez hasonlóan.
- Ha $f \in C^2[a;b]$ illetve $f \in C^4[a;b]$, akkor $m \to \infty$ esetén

$$T_m(f) \to \int_a^b f, \text{ illetve } S_m(f) \to \int_a^b f$$

m^2 illetve m^4 nagyságrendben.

Richardson-féle extrapoláció a trapéz összetett formulára:

Írjuk fel a trapéz összetett formulát m-re és $2m$-re:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta_1)$$
$$\int_a^b f - T_{2m}(f) = -\frac{(b-a)^3}{48m^2} \cdot f''(\eta_2)$$

Richardson-féle extrapoláció a trapéz összetett formulára:

Írjuk fel a trapéz összetett formulát m-re és $2m$-re:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta_1)$$
$$\int_a^b f - T_{2m}(f) = -\frac{(b-a)^3}{48m^2} \cdot f''(\eta_2)$$

Ha f'' elég sima, akkor $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$, így a 2. egyenlet 4-szereséből kivonva az 1. egyenletet

Richardson-féle extrapoláció a trapéz összetett formulára:

Írjuk fel a trapéz összetett formulát m-re és $2m$-re:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta_1)$$

$$\int_a^b f - T_{2m}(f) = -\frac{(b-a)^3}{48m^2} \cdot f''(\eta_2)$$

Ha f'' elég sima, akkor $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$, így a 2. egyenlet 4-szereséből kivonva az 1. egyenletet

$$3\int_a^b f - 4T_{2m}(f) + T_m(f) \approx 0$$

$$\int_a^b f \approx \frac{1}{3}\left(4T_{2m}(f) - T_m(f)\right)$$

A trapéz szabály javító formulája

$$\frac{1}{3}\left(4T_{2m}(f) - T_m(f)\right) = S_m(f)$$

A közelítés hibája $O(h^4)$.

A trapéz szabály javító formulája

$$\frac{1}{3}\left(4T_{2m}(f) - T_m(f)\right) = S_m(f)$$

A közelítés hibája $O(h^4)$.

Példa: Az $\int_0^1 x^{1/3}\,dx$ integrál kiszámításához a Richardson-féle extrapoláció nem használható, mert f nem deriválható a 0-ban. Az ehhez hasonló szingularitások kezeléséhez más típusú módszerek kellenek. (Lásd Gauss-kvadratúra formulák.)

Richardson-féle extrapoláció a Simpson összetett formulára:

Írjuk fel a Simpson összetett formulát m-re és $2m$-re:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180\, m^4} \cdot f^{(4)}(\eta_1)$$

$$\int_a^b f - S_{2m}(f) = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot 16\, m^4} \cdot f^{(4)}(\eta_2)$$

Richardson-féle extrapoláció a Simpson összetett formulára:

Írjuk fel a Simpson összetett formulát m-re és $2m$-re:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180\, m^4} \cdot f^{(4)}(\eta_1)$$
$$\int_a^b f - S_{2m}(f) = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot 16\, m^4} \cdot f^{(4)}(\eta_2)$$

Ha $f^{(4)}$ elég sima, akkor $f^{(4)}(\eta_1) \approx f^{(4)}(\eta_2)$, így a 2. egyenlet 16-szorosából kivonva az 1. egyenletet

Richardson-féle extrapoláció a Simpson összetett formulára:

Írjuk fel a Simpson összetett formulát m-re és $2m$-re:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180\, m^4} \cdot f^{(4)}(\eta_1)$$

$$\int_a^b f - S_{2m}(f) = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot 16\, m^4} \cdot f^{(4)}(\eta_2)$$

Ha $f^{(4)}$ elég sima, akkor $f^{(4)}(\eta_1) \approx f^{(4)}(\eta_2)$, így a 2. egyenlet 16-szorosából kivonva az 1. egyenletet

$$15 \int_a^b f - 16\, S_{2m}(f) + S_m(f) \approx 0$$

$$\int_a^b f \approx \frac{1}{15} \left(16\, S_{2m}(f) - S_m(f)\right)$$

A Simpson szabály javító formulája

$$\frac{1}{15}\left(16\,S_{2m}(f) - S_m(f)\right)$$

A közelítés hibája $O(h^6)$.

Megjegyzés:

- A Richarson-féle extrapolációból készített rekurzió a Romberg integrálás alapja.

Megjegyzés:

- A Richarson-féle extrapolációból készített rekurzió a Romberg integrálás alapja.
- A gyakorlati számítások során jól használhatók a következő tételek:

Megjegyzés:

- A Richarson-féle extrapolációból készített rekurzió a Romberg integrálás alapja.
- A gyakorlati számítások során jól használhatók a következő tételek:

Tétel:

- Ha f'' korlátos $[a; b]$-n, akkor

$$\left|\int_a^b f - T_m(f)\right| \leq |T_m(f) - T_{2m}(f)|.$$

Megjegyzés:

- A Richarson-féle extrapolációból készített rekurzió a Romberg integrálás alapja.
- A gyakorlati számítások során jól használhatók a következő tételek:

Tétel:

- Ha f'' korlátos $[a;b]$-n, akkor

$$\left| \int_a^b f - T_m(f) \right| \leq |T_m(f) - T_{2m}(f)|.$$

- Ha $f^{(4)}$ korlátos $[a;b]$-n, akkor

$$\left| \int_a^b f - S_m(f) \right| \leq |S_m(f) - S_{2m}(f)|.$$