Számítógépes Grafika

Bán Róbert
robert.ban102+cg@gmail.com

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2021-2022. őszi félév

Tartalom

Tartalom

Modellezés feladata

- Hogyan írjuk le a virtuális világunkat?

Modellezés feladata

- Hogyan írjuk le a virtuális világunkat?
  - A virtuális terünk egy-egy pontját miként adjuk meg, hogyan tároljuk a számítógépen?

Modellezés feladata

- Hogyan írjuk le a virtuális világunkat?
  - A virtuális terünk egy-egy pontját miként adjuk meg, hogyan tároljuk a számítógépen?
    $\rightarrow$ Koordináta-rendszerek

Modellezés feladata

- Hogyan írjuk le a virtuális világunkat?
  - A virtuális terünk egy-egy pontját miként adjuk meg, hogyan tároljuk a számítógépen?
    $\rightarrow$ Koordináta-rendszerek
  - Az egyszerű geometriai építőelemeket (egyenes, sík, háromszög stb.) hogyan adjuk meg?

Modellezés feladata

- Hogyan írjuk le a virtuális világunkat?
  - A virtuális terünk egy-egy pontját miként adjuk meg, hogyan tároljuk a számítógépen?
    $\rightarrow$ Koordináta-rendszerek
  - Az egyszerű geometriai építőelemeket (egyenes, sík, háromszög stb.) hogyan adjuk meg?
    $\rightarrow$ Leírás különböző koordináta-rendszerekben

Pontok, vektorok

- Pont: az euklideszi sík/tér egy eleme, amelynek semmiféle kiterjedése sincs.

Pontok, vektorok

- Pont: az euklideszi sík/tér egy eleme, amelynek semmiféle kiterjedése sincs.
- Vektor:

Pontok, vektorok

- Pont: az euklideszi sík/tér egy eleme, amelynek semmiféle kiterjedése sincs.
- Vektor:
  - algebrailag: egy vektortér eleme.

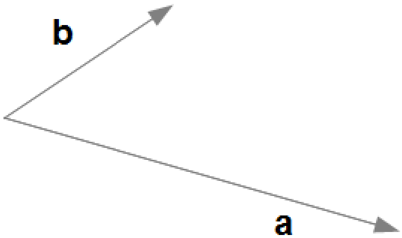
Pontok, vektorok

- Pont: az euklideszi sík/tér egy eleme, amelynek semmiféle kiterjedése sincs.
- Vektor:
  - algebrailag: egy vektortér eleme.
  - geometriailag: egy eltolás, aminek *iránya* és *hossza* van

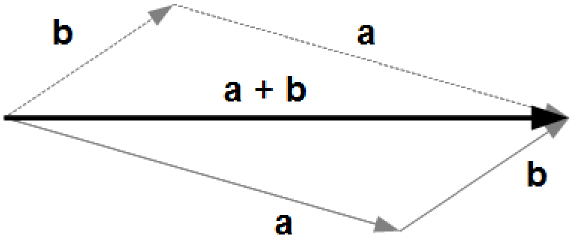
Pontok, vektorok

- Pont: az euklideszi sík/tér egy eleme, amelynek semmiféle kiterjedése sincs.
- Vektor:
  - algebrailag: egy vektortér eleme.
  - geometriailag: egy eltolás, aminek *iránya* és *hossza* van
  - értelmezve vannak rá további műveletek: összeadás, kivonás, skalárral szorzás, vektoriális szorzat (eredményük vektorok), skaláris szorzat (eredménye skalár)

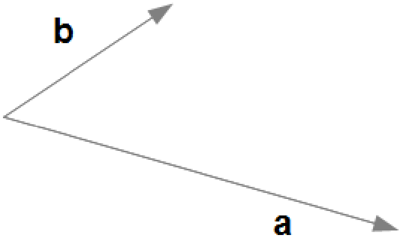
Vektorok összeadása



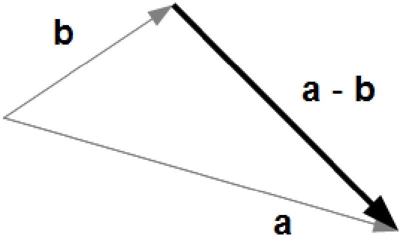
Vektorok összeadása



Vektorok kivonása



Vektorok kivonása



Vektorok skaláris szorzata

Legyen adott két vektor, $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ és $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$. Jelölje a skaláris szorzatukat $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, azaz legyen

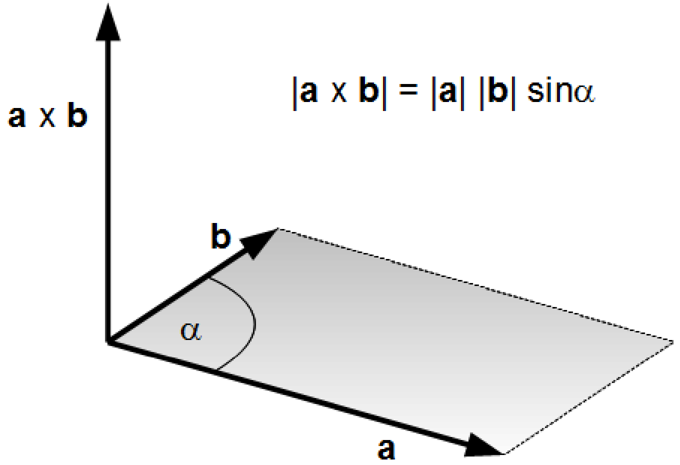
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Ez kifejezhető úgy is, hogy

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha),$$

ahol α az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög.

Vektorok vektoriális szorzata



Vektorok vektoriális szorzata

A vektoriális szorzat determinánssal kifejezve:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

Pontok, vektorok

- Egy pont és egy vektor a választott koordináta-rendszerbeli koordinátáinak megadásával definiálható.

Pontok, vektorok

- Egy pont és egy vektor a választott koordináta-rendszerbeli koordinátáinak megadásával definiálható. DE: figyeljünk az elvégezhető műveletekre!

Pontok, vektorok

- Egy pont és egy vektor a választott koordináta-rendszerbeli koordinátáinak megadásával definiálható. DE: figyeljünk az elvégezhető műveletekre!
- Műveletek pontok és vektorok között:
  - $\rightarrow$ pont $+$ vektor $=$ pont

Pontok, vektorok

- Egy pont és egy vektor a választott koordináta-rendszerbeli koordinátáinak megadásával definiálható. DE: figyeljünk az elvégezhető műveletekre!
- Műveletek pontok és vektorok között:
  - $\rightarrow$ pont $+$ vektor $=$ pont
  - $\rightarrow$ pont $-$ pont $=$ vektor

Pontok, vektorok

- A továbbiakban, ha két pontot veszünk, akkor feltesszük, hogy azok nem esnek egybe (tehát két *különböző* pontról beszélhetünk)

Pontok, vektorok

- A továbbiakban, ha két pontot veszünk, akkor feltesszük, hogy azok nem esnek egybe (tehát két *különböző* pontról beszélhetünk)
- Ugyanígy, három pontnál feltesszük, hogy nem esnek egy egyenesbe

Pontok, vektorok

- A továbbiakban, ha két pontot veszünk, akkor feltesszük, hogy azok nem esnek egybe (tehát két *különböző* pontról beszélhetünk)
- Ugyanígy, három pontnál feltesszük, hogy nem esnek egy egyenesbe
- Ha egyeneseket, síkokat veszünk őket is különbözőnek tekintjük, illetve ha több síkot veszünk, azt is kizárjuk, hogy mind egyező állású legyen

Jelölés

- Pontok: $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$, ...

Jelölés

- Pontok: $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$, ...
- Vektorok: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n = 2, 3, \ldots$

Jelölés

- Pontok: $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$, ...
- Vektorok: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n = 2, 3, \ldots$
  - spec.: $[\mathbf{v}]_0 \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, amely egység hosszú, azaz $|\,[\mathbf{v}]_0\,| = ||\,[\mathbf{v}]_0\,||_2 = 1$.
- Egyenesek: e, f, g, ...

Jelölés

- Pontok: $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$, ...
- Vektorok: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n = 2, 3, \ldots$
  - spec.: $[\mathbf{v}]_0 \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, amely egység hosszú, azaz $|\,[\mathbf{v}]_0\,| = ||\,[\mathbf{v}]_0\,||_2 = 1$.
- Egyenesek: e, f, g, ...
- Síkok: S, ...
- Mátrixok: $M, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Tartalom

Koordináta-rendszer

- A tér pontjainak egyértelmű leírására szám n-esek segítségével

Koordináta-rendszer

- A tér pontjainak egyértelmű leírására szám n-esek segítségével

  pl.: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^3$

Koordináta-rendszer

- A tér pontjainak egyértelmű leírására szám n-esek segítségével

  pl.: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^3$

- Lehetővé teszi az algebrai és analitikus eszköztár felhasználását geometriai problémák megoldására

Koordináta-rendszer

- A tér pontjainak egyértelmű leírására szám n-esek segítségével
  pl.: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^3$
- Lehetővé teszi az algebrai és analitikus eszköztár felhasználását geometriai problémák megoldására
- Egy, a problémához jól illeszkedő koordináta-rendszerben a probléma leírása egyszerűbb lehet

Tartalom

Descartes-féle, derékszögű koordináta-rendszer

- Descartes, 1637.: *értekezés a módszerről* (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences)

Descartes-féle, derékszögű koordináta-rendszer

- Descartes, 1637.: *értekezés a módszerről* (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences)
- Legtöbbször ezzel találkozunk, ez a legegyszerűbb és legelterjedtebb megadási mód

Descartes koordináta-rendszer

- Az euklidészi tér [sík] minden véges pontjához egyértelműen hozzárendel egy rendezett, valós (x, y, z) számhármast [(x, y) számpárt].

Descartes koordináta-rendszer

- Az euklidészi tér [sík] minden véges pontjához egyértelműen hozzárendel egy rendezett, valós (x, y, z) számhármast $[(x, y)$ számpárt].
- A térben derékszögű koordináta-rendszert határoz meg egy kezdőpont (origó, $\mathbf{o}$), és egy ortonormált bázis: három egymásra páronként merőleges egységvektor: $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ (utóbbiak az x, y, z tengelyek irányát adják meg).

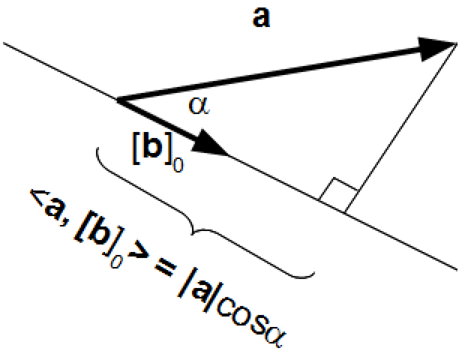
Descartes koordináta-rendszer

- Az euklidészi tér [sík] minden véges pontjához egyértelműen hozzárendel egy rendezett, valós (x, y, z) számhármast $[(x, y)$ számpárt].
- A térben derékszögű koordináta-rendszert határoz meg egy kezdőpont (origó, $\mathbf{o}$), és egy ortonormált bázis: három egymásra páronként merőleges egységvektor: $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ (utóbbiak az x, y, z tengelyek irányát adják meg).
- Ekkor egy $\mathbf{p}$ pont x, y, z koordinátái sorban az origóból a $\mathbf{p}$-be mutató vektor $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokra vett előjeles merőleges vetületével egyezik meg.

Descartes koordináta-rendszer

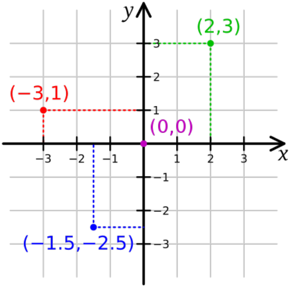
- Az euklidészi tér [sík] minden véges pontjához egyértelműen hozzárendel egy rendezett, valós (x, y, z) számhármast $[(x, y)$ számpárt].
- A térben derékszögű koordináta-rendszert határoz meg egy kezdőpont (origó, $\mathbf{o}$), és egy ortonormált bázis: három egymásra páronként merőleges egységvektor: $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ (utóbbiak az x, y, z tengelyek irányát adják meg).
- Ekkor egy $\mathbf{p}$ pont x, y, z koordinátái sorban az origóból a $\mathbf{p}$-be mutató vektor $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokra vett előjeles merőleges vetületével egyezik meg.
- *Emlékeztető*: az $\mathbf{a}$ vektor előjeles merőleges vetülete a $[\mathbf{b}]_0$ egységvektorra $\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}]_0 \rangle = |\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]_0)$

Előjeles merőleges vetület



Geometriai értelmezés

- *Szemléletesebben*: A $\mathbf{p}(a, b, c)$ az a pont, amit az origóból az x tengely mentén a egységet lépve, majd az y tengely mentén b egységet lépve, végül a z tengely mentén c egységet lépve kapunk.



Geometriai értelmezés

- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató **i**, **j**, **k** bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

Geometriai értelmezés

- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató **i**, **j**, **k** bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

$$\mathbf{p} =$$

Geometriai értelmezés

- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató **i**, **j**, **k** bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} +$$

Geometriai értelmezés

- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató **i**, **j**, **k** bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + a\mathbf{i} +$$

Geometriai értelmezés

- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató **i**, **j**, **k** bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} +$$

Geometriai értelmezés

- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató **i**, **j**, **k** bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Geometriai értelmezés

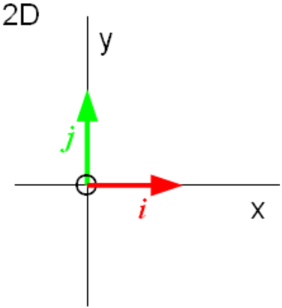
- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató **i**, **j**, **k** bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

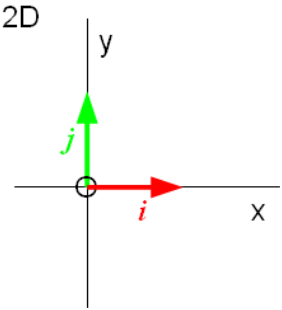
$$= \mathbf{o} + a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

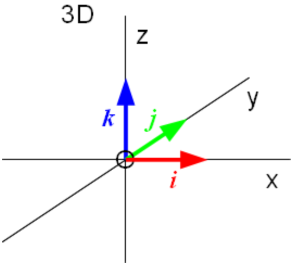
Sodrásirány – jobbsodrású rendszer

Sodrásirány – jobbsodrású rendszer



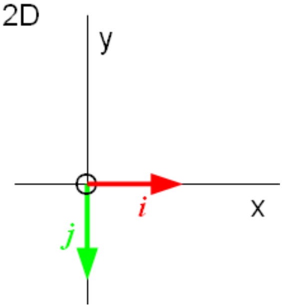
Sodrásirány – jobbsodrású rendszer



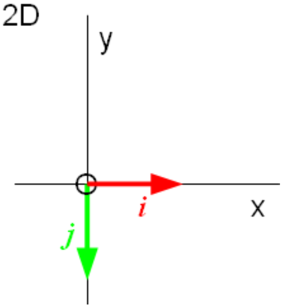


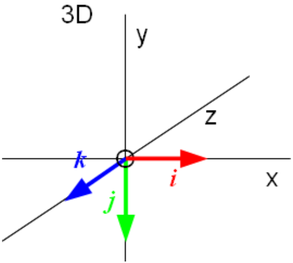
Sodrásirány – balsodrású rendszer

Sodrásirány – balsodrású rendszer

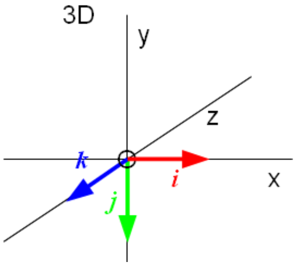


Sodrásirány – balsodrású rendszer

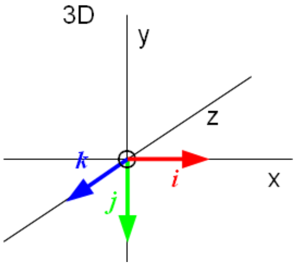


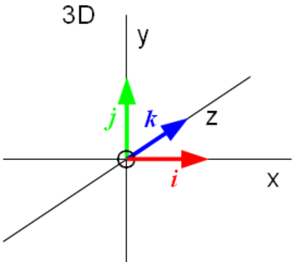


Sodrásirány – balsodrású rendszer



Sodrásirány – balsodrású rendszer





Koordináta-rendszer

- Két pont távolsága számítható: $d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$

Koordináta-rendszer

- Két pont távolsága számítható: $d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$
- Egyrészt ez: lemérendő távolság – a fenti pedig a háromszög oldalaira emelt négyzetek lemért területe

Koordináta-rendszer

- Két pont távolsága számítható: $d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$
- Egyrészt ez: lemérendő távolság – a fenti pedig a háromszög oldalaira emelt négyzetek lemért területe
- Descartes-koordinátákkal: algebrai egyenlet, ami $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ismeretében kiszámítható

Koordináta-rendszer

- Két pont távolsága számítható: $d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$
- Egyrészt ez: lemérendő távolság – a fenti pedig a háromszög oldalaira emelt négyzetek lemért területe
- Descartes-koordinátákkal: algebrai egyenlet, ami $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ismeretében kiszámítható
- $\rightarrow$ új alakzatok leírására is megnyílt a lehetőség

Koordináta-rendszer

- Két pont távolsága számítható: $d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$
- Egyrészt ez: lemérendő távolság – a fenti pedig a háromszög oldalaira emelt négyzetek lemért területe
- Descartes-koordinátákkal: algebrai egyenlet, ami $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ismeretében kiszámítható
- $\rightarrow$ új alakzatok leírására is megnyílt a lehetőség
- Átalánosan:
  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n : d = \sqrt{\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$

Tartalom

Síkbeli polárkoordináta-rendszer

- Egy **o** kezdőpont (referenciapont) és egy abból induló félegyenes (polártengely) határozza meg.

Síkbeli polárkoordináta-rendszer

- Egy **o** kezdőpont (referenciapont) és egy abból induló félegyenes (polártengely) határozza meg.
- Egy **p** pont helyét két adat azonosítja: (r, θ)

Síkbeli polárkoordináta-rendszer

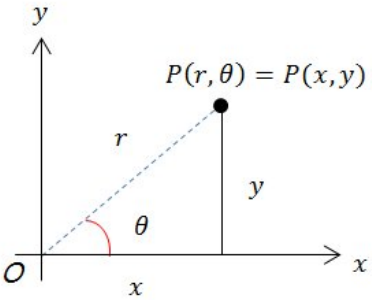
- Egy **o** kezdőpont (referenciapont) és egy abból induló félegyenes (polártengely) határozza meg.
- Egy **p** pont helyét két adat azonosítja: (r, θ)
  - $r \geq 0$: a **p** pont **o**-tól vett távolsága

Síkbeli polárkoordináta-rendszer

- Egy **o** kezdőpont (referenciapont) és egy abból induló félegyenes (polártengely) határozza meg.
- Egy **p** pont helyét két adat azonosítja: (r, θ)
  - $r \geq 0$: a **p** pont **o**-tól vett távolsága
  - $\theta \in [0, 2\pi)$: az **o**-ból induló **p**-n átmenő félegyenes polártengellyel bezárt szöge

Síkbeli polárkoordináta-rendszer

- Egy **o** kezdőpont (referenciapont) és egy abból induló félegyenes (polártengely) határozza meg.
- Egy **p** pont helyét két adat azonosítja: (r, θ)
  - $r \geq 0$: a **p** pont **o**-tól vett távolsága
  - $\theta \in [0, 2\pi)$: az **o**-ból induló **p**-n átmenő félegyenes polártengellyel bezárt szöge



Konverziók

- Polár $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$

Konverziók

- Polár $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$
  - $x = r\cos\theta$

Konverziók

- Polár $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$
  - $x = r \cos \theta$
  - $y = r \sin \theta$

Konverziók

- Polár $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$
  - $x = r \cos \theta$
  - $y = r \sin \theta$
- Descartes $\rightarrow$ polár: $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$

Konverziók

- Polár $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$
  - $x = r \cos \theta$
  - $y = r \sin \theta$
- Descartes $\rightarrow$ polár: $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$
  - $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Konverziók

- Polár $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$
  - $x = r \cos \theta$
  - $y = r \sin \theta$
- Descartes $\rightarrow$ polár: $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$
  - $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - $$\theta = \begin{cases} arctg(\frac{y}{x}), & x > 0 \wedge y \geq 0 \\ arctg(\frac{y}{x}) + 2\pi, & x > 0 \wedge y < 0 \\ arctg(\frac{y}{x}) + \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$
    $$= atan2(y, x)$$

Konverziók

- A fentiek teljesülnek, amennyiben a Descartes origó és a polár referenciapont, illetve a Descartes x-tengely és a polártengely megegyezik.

Konverziók

- A fentiek teljesülnek, amennyiben a Descartes origó és a polár referenciapont, illetve a Descartes x-tengely és a polártengely megegyezik.
- De mi van, ha $x = 0, y = 0$?

Konverziók

- A fentiek teljesülnek, amennyiben a Descartes origó és a polár referenciapont, illetve a Descartes x-tengely és a polártengely megegyezik.
- De mi van, ha $x = 0, y = 0$? Ilyenkor $r = 0$ mellett tetszőleges szöggel visszakapjuk az origót! Nem egyértelmű a polár szög, az $r = 0$-át még azelőtt ellenőrizzük, hogy a fenti konverziós képleteket próbálnánk használni

Megjegyzések

- Általában akkor használjuk, hogy az ábrázolni kívánt dolgokhoz jól illeszkedik, pl. körmozgás

Megjegyzések

- Általában akkor használjuk, hogy az ábrázolni kívánt dolgokhoz jól illeszkedik, pl. körmozgás
- Hátrányai: egyik PKR-ből a másikba áttérni költséges, deriváltak számítása költséges, ...

Gömbi koordináták

- Térbeli polár-koordináták; egy alapsík (és annak PKR-e) illetve egy arra merőleges „Z tengely”

Gömbi koordináták

- Térbeli polár-koordináták; egy alapsík (és annak PKR-e) illetve egy arra merőleges „Z tengely”
- Egy térbeli **p** pontot három adat reprezentál: (r, θ, ϕ)

Gömbi koordináták

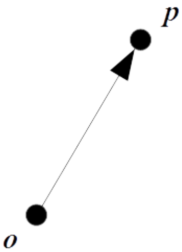
- Térbeli polár-koordináták; egy alapsík (és annak PKR-e) illetve egy arra merőleges „Z tengely"
- Egy térbeli **p** pontot három adat reprezentál: (r, θ, ϕ)
  - (ϱ, ϕ): a **p** pont alapsíkra vett vetületének polárkoordinátái

Gömbi koordináták

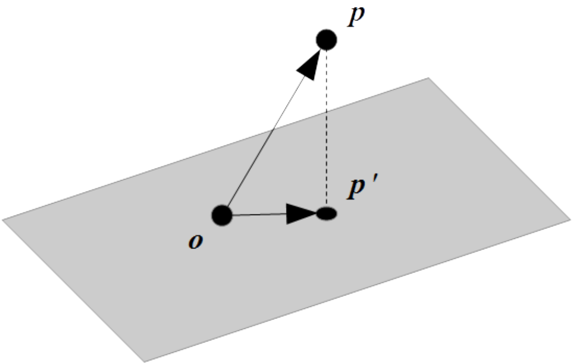
- Térbeli polár-koordináták; egy alapsík (és annak PKR-e) illetve egy arra merőleges „Z tengely"
- Egy térbeli **p** pontot három adat reprezentál: (r, θ, ϕ)
  - (ϱ, ϕ): a **p** pont alapsíkra vett vetületének polárkoordinátái
  - $\theta \in [0, \pi]$: az **o**-ból kiinduló és **p**-n áthaladó félegyenes Z tengellyel bezárt szöge
  - r: a **p** pont és az origó távolsága (ha $r = 0$ akkor ismét bármi lehet a két polárszög! Konverziók előtt ezt ellenőrizni kell)

Gömbi koordináták

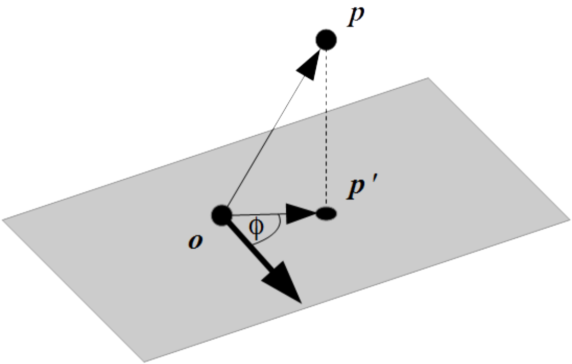
Gömbi koordináták



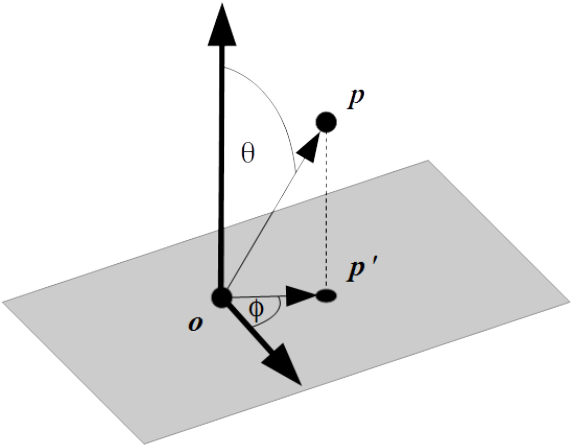
Gömbi koordináták



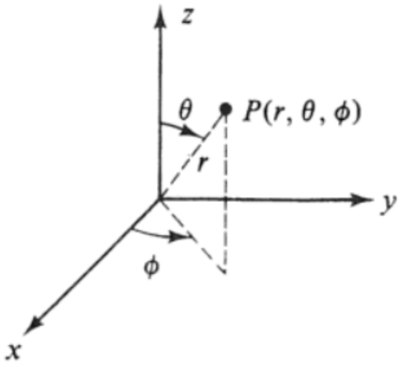
Gömbi koordináták



Gömbi koordináták



Gömbi koordináták



Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:

Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi → Descartes: $(r, \theta, \phi) \to (x, y, z)$

Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \;\; y = r \sin\theta \sin\phi$$

Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta$$

Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \;\; y = r \sin\theta \sin\phi, \;\; z = r\cos\theta$$

- Descartes $\rightarrow$ gömbi: $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$

Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

- Descartes $\rightarrow$ gömbi: $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi &= atan2(y, x) \\ \theta &= \arccos\frac{z}{r}, && r \neq 0 \end{aligned}$$

Megjegyzés

- Hasznos például a földfelszín pontjainak azonosítására (de ott $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$).

Tartalom

Baricentrikus koordináták – intuitív kép

Baricentrikus koordináták – intuitív kép

Baricentrikus koordináták

- August Ferdinand Möbius [1827]

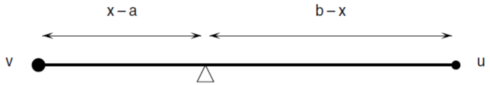
Baricentrikus koordináták

- August Ferdinand Möbius [1827]
- Motiváció: sokszor egy konkrét, véges része érdekes csak számunkra a térnek. Ennek a Descartes-félénél egy „kiegyensúlyozottabb” reprezentációját keressük.

Baricentrikus koordináták

- August Ferdinand Möbius [1827]
- Motiváció: sokszor egy konkrét, véges része érdekes csak számunkra a térnek. Ennek a Descartes-félénél egy „kiegyensúlyozottabb” reprezentációját keressük.
- A baricentrikus koordináták nem függnek egy pont önkényes origónak választásától

Motiváció: intervallumok



Milyen u, v súlyokat helyezzünk a rúd végére, hogy kiegyensúlyozott legyen ha a háromszöggel jelzett pontnál emeljük fel?

Motiváció: intervallumok

- Akkor nem billen el, ha $(x-a)v=(b-x)u$, ahol x a háromszög pozíciója

Motiváció: intervallumok

- Akkor nem billen el, ha $(x - a)v = (b - x)u$, ahol x a háromszög pozíciója
- Az u, v-nek csak az arányát köti meg a fenti, tegyük fel a továbbiakban, hogy $u + v = 1$

Motiváció: intervallumok

- Akkor nem billen el, ha $(x-a)v=(b-x)u$, ahol x a háromszög pozíciója
- Az u, v-nek csak az arányát köti meg a fenti, tegyük fel a továbbiakban, hogy $u+v=1$
- Ekkor a súlyok a következők kell, hogy legyenek:

$$u=\frac{x-a}{b-a}, v=\frac{b-x}{b-a}$$

Tömegközéppont

- Mechanikai analógia: pontrendszer tömegközéppontja

Tömegközéppont

- Mechanikai analógia: pontrendszer tömegközéppontja
- Legyen a síkban 3 pontunk és helyezzünk minden $\mathbf{p}_i$ pontba $m_i \in \mathbb{R}$ súlyt. Ekkor a tömegközéppont:

Tömegközéppont

- Mechanikai analógia: pontrendszer tömegközéppontja
- Legyen a síkban 3 pontunk és helyezzünk minden $\mathbf{p}_i$ pontba $m_i \in \mathbb{R}$ súlyt. Ekkor a tömegközéppont:

$$\mathbf{m} = \sum_{i=0}^{2} \frac{m_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} \mathbf{p}_i$$

Tömegközéppont

- Mechanikai analógia: pontrendszer tömegközéppontja
- Legyen a síkban 3 pontunk és helyezzünk minden $\mathbf{p}_i$ pontba $m_i \in \mathbb{R}$ súlyt. Ekkor a tömegközéppont:

$$\mathbf{m} = \sum_{i=0}^{2} \frac{m_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} \mathbf{p}_i$$

- *Homogén jellegű* megadás: egy $h \neq 0$ számmal megszorozva a súlyokat is ugyanazt a pontot kapjuk.

Baricentrikus koordináták

- Ha $\mathbb{E}^n$ -ben az $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n$ pontok kifeszítik a teret (azaz nem esnek egy $n-1$ dimenziós altérbe), akkor a tér bármely $\mathbf{x}$ pontjához találhatóak $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ valós számok úgy, hogy

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i,$$

ahol a λ_i baricentrikus koordinátákra teljesül, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Megjegyzés

- Síkban tehát 3 általános állású pont kell (olyanok, amelyek nem esnek sem egy egyenesbe, sem egy pontba), a térben 4 általános állású pont

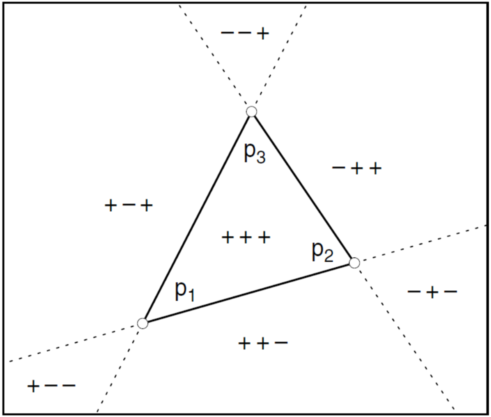
Megjegyzés

- Síkban tehát 3 általános állású pont kell (olyanok, amelyek nem esnek sem egy egyenesbe, sem egy pontba), a térben 4 általános állású pont
- Ha $\forall i$-re $\lambda_i \geq 0$, akkor konvex kombinációról beszélünk és a pontok konvex burkába esnek a kombináció eredményei.

Megjegyzés

- Síkban tehát 3 általános állású pont kell (olyanok, amelyek nem esnek sem egy egyenesbe, sem egy pontba), a térben 4 általános állású pont
- Ha $\forall i$-re $\lambda_i \geq 0$, akkor konvex kombinációról beszélünk és a pontok konvex burkába esnek a kombináció eredményei.
- Az affin transzformációk nem változtatják meg a baricentrikus koordinátákat (lásd később)

Síkbeli baricentrikus koordináta-rendszer



Baricentrikus $\to$ Descartes konverzió

- Legyenek (u, v, w) egy pont baricentrikus koordinátái a $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{p}_2 = (x_2, y_2), \mathbf{p}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{E}^2$ általános állású pontokra vonatkoztatva.

Baricentrikus $\to$ Descartes konverzió

- Legyenek (u, v, w) egy pont baricentrikus koordinátái a $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{p}_2 = (x_2, y_2), \mathbf{p}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{E}^2$ általános állású pontokra vonatkoztatva.
- Ekkor az (u, v, w)-vel azonosított $\mathbf{x}(x, y)$ pont Descartes koordinátái $\mathbf{x} = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3$, azaz

$$
\begin{aligned}
x &= ux_1 + vx_2 + wx_3 \\
y &= uy_1 + vy_2 + wy_3
\end{aligned}
$$

Síkbeli baricentrikus koordináta-rendszer

- Legyen $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{vmatrix}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$

Síkbeli baricentrikus koordináta-rendszer

- Legyen $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{vmatrix}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$
- A $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ mennyiség az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ pontok által meghatározott háromszög előjeles területének duplája (pozitív, ha óra járásával ellentétes irányban adottak a csúcspontok, különben negatív)

Síkbeli baricentrikus koordináta-rendszer

- Legyen $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{vmatrix}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$
- A $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ mennyiség az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ pontok által meghatározott háromszög előjeles területének duplája (pozitív, ha óra járásával ellentétes irányban adottak a csúcspontok, különben negatív)
- Ha $\mathbb{E}^3$-ban vagyunk: $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \langle(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}), \mathbf{n}\rangle$, ahol $\mathbf{n}$ a három pont síkjának egység hosszú normálisa.

Descartes $\to$ baricentrikus konverzió

- Egy $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2$ pont baricentrikus koordinátái a következők lesznek a $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{p}_2 = (x_2, y_2), \mathbf{p}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{E}^2$ általános állású pontokra vonatkoztatva:

$$u = \frac{\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}$$

$$v = \frac{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}, \mathbf{p}_3)}{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}$$

$$w = \frac{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{x})}{\Delta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}$$

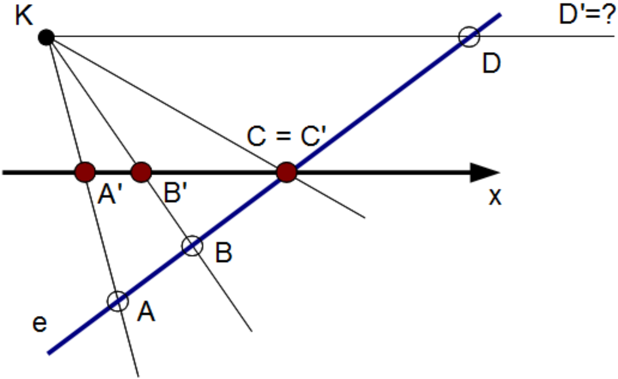
Tartalom

Motiváció

- Vetítsük egy e egyenes pontjait az x tengelyre egy **k** pontból!

Motiváció

- Vetítsük egy e egyenes pontjait az x tengelyre egy **k** pontból!



Motiváció

- A $\mathbf{d}'$ pont nincs az euklideszi síkon ($\mathbb{E}^2$), mivel a **k**-n és **d**-n áthaladó vetítősugár párhuzamos az x tengellyel

Motiváció

- A $\mathbf{d}'$ pont nincs az euklideszi síkon $(\mathbb{E}^2)$, mivel a **k**-n és **d**-n áthaladó vetítősugár párhuzamos az x tengellyel
- Ötlet: bővítsük ki $\mathbb{E}^2$-t!

Motiváció

- A $\mathbf{d}'$ pont nincs az euklideszi síkon $(\mathbb{E}^2)$, mivel a **k**-n és **d**-n áthaladó vetítősugár párhuzamos az x tengellyel
- Ötlet: bővítsük ki $\mathbb{E}^2$-t!
- $\rightarrow$ tekintsük „pontnak” az egyenesek egyező állását (irányát) is, azaz minden egyenesen legyen még egy „pontja”

Motiváció

- A $\mathbf{d}'$ pont nincs az euklideszi síkon ($\mathbb{E}^2$), mivel a **k**-n és **d**-n áthaladó vetítősugár párhuzamos az x tengellyel
- Ötlet: bővítsük ki $\mathbb{E}^2$-t!
- $\rightarrow$ tekintsük „pontnak” az egyenesek egyező állását (irányát) is, azaz minden egyenesen legyen még egy „pontja”
- Ez a pont az egyenes *ideális pontja*.

Definíció

- Egyenes = egyenes + 1 ideális pont úgy, hogy:

Definíció

- Egyenes = egyenes + 1 ideális pont úgy, hogy:
  - Párhuzamos egyenesek ideális pontja megegyezik („találkoznak a végtelenben”)

Definíció

- Egyenes = egyenes + 1 ideális pont úgy, hogy:
  - Párhuzamos egyenesek ideális pontja megegyezik („találkoznak a végtelenben”)
  - Egy sík ideális pontjai egy egyenesen vannak, ez a *sík ideális egyenese*

Definíció

- Egyenes = egyenes + 1 ideális pont úgy, hogy:
  - Párhuzamos egyenesek ideális pontja megegyezik („találkoznak a végtelenben")
  - Egy sík ideális pontjai egy egyenesen vannak, ez a *sík ideális egyenese*
  - Párhuzamos síkok ideális egyenese megegyezik

Definíció

- Egyenes = egyenes + 1 ideális pont úgy, hogy:
    - Párhuzamos egyenesek ideális pontja megegyezik („találkoznak a végtelenben")
    - Egy sík ideális pontjai egy egyenesen vannak, ez a *sík ideális egyenese*
    - Párhuzamos síkok ideális egyenese megegyezik
    - A tér ideális elemei (pontok, egyenesek) egy síkban vannak, ez a *tér ideális síkja*

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
  - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
  - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
  - Két egyenes meghatároz egy pontot (!)

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
  - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
  - Két egyenes meghatároz egy pontot (!)
  - ...

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
  - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
  - Két egyenes meghatároz egy pontot (!)
  - ...
- Homogén tér: az $\mathbb{E}^3$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^3$ egy kitüntetett ideális síkkal

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
    - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
    - Két egyenes meghatároz egy pontot (!)
    - ...
- Homogén tér: az $\mathbb{E}^3$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^3$ egy kitüntetett ideális síkkal
    - Három pont meghatároz egy síkot

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
  - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
  - Két egyenes meghatároz egy pontot (!)
  - ...
- Homogén tér: az $\mathbb{E}^3$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^3$ egy kitüntetett ideális síkkal
  - Három pont meghatároz egy síkot
  - Három sík meghatároz egy pontot (!)

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
  - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
  - Két egyenes meghatároz egy pontot (!)
  - ...
- Homogén tér: az $\mathbb{E}^3$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^3$ egy kitüntetett ideális síkkal
  - Három pont meghatároz egy síkot
  - Három sík meghatároz egy pontot (!)
  - (HF: igaz az, hogy *bármely* (tetszőleges) három sík meghatároz egy pontot a projektív térben, ami mind a három síkon rajta van? Milyen esetekben nem?)

Tulajdonságok

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
  - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
  - Két egyenes meghatároz egy pontot (!)
  - ...
- Homogén tér: az $\mathbb{E}^3$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^3$ egy kitüntetett ideális síkkal
  - Három pont meghatároz egy síkot
  - Három sík meghatároz egy pontot (!)
  - (HF: igaz az, hogy *bármely* (tetszőleges) három sík meghatároz egy pontot a projektív térben, ami mind a három síkon rajta van? Milyen esetekben nem?)
  - ...

Homogén koordináták

- Az euklideszi tér minden pontjához hozzárendelünk egy számnégyest, *homogén koordinátákat*:

Homogén koordináták

- Az euklideszi tér minden pontjához hozzárendelünk egy számnégyest, *homogén koordinátákat*:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x, y, z) &\rightarrow [x, y, z, 1] \\ &\approx h[x, y, z, 1] \\ &= [hx, hy, hz, h], \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

Homogén koordináták

- Az euklideszi tér minden pontjához hozzárendelünk egy számnégyest, *homogén koordinátákat*:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x,y,z) &\to [x,y,z,1] \\ &\approx h[x,y,z,1] \\ &= [hx,hy,hz,h],\ \ h\neq 0\end{aligned}$$

- az összes $\mathbf{v} = [x,y,z]^T$ vektorhoz pedig:

Homogén koordináták

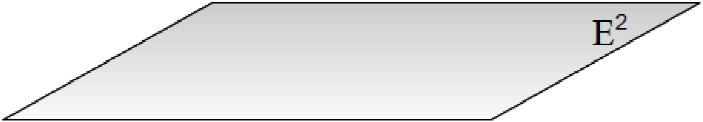
- Az euklideszi tér minden pontjához hozzárendelünk egy számnégyest, *homogén koordinátákat*:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x, y, z) &\to [x, y, z, 1] \\ &\approx h[x, y, z, 1] \\ &= [hx, hy, hz, h], \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

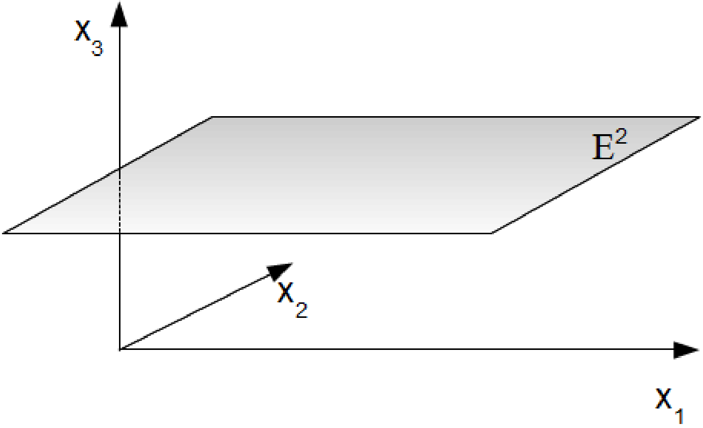
- az összes $\mathbf{v} = [x, y, z]^T$ vektorhoz pedig:

$$\begin{aligned} [x, y, z] &\to [x, y, z, 0] \\ &\approx h[x, y, z, 0] \\ &= [hx, hy, hz, 0], \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

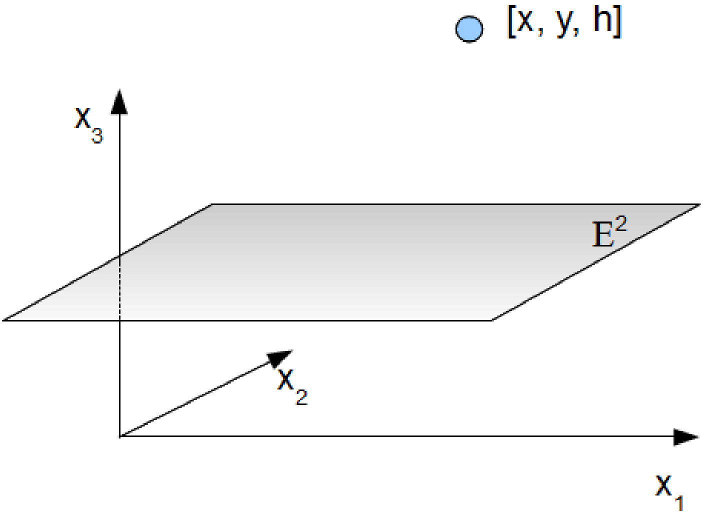
$\mathbb{E}^2$ beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba



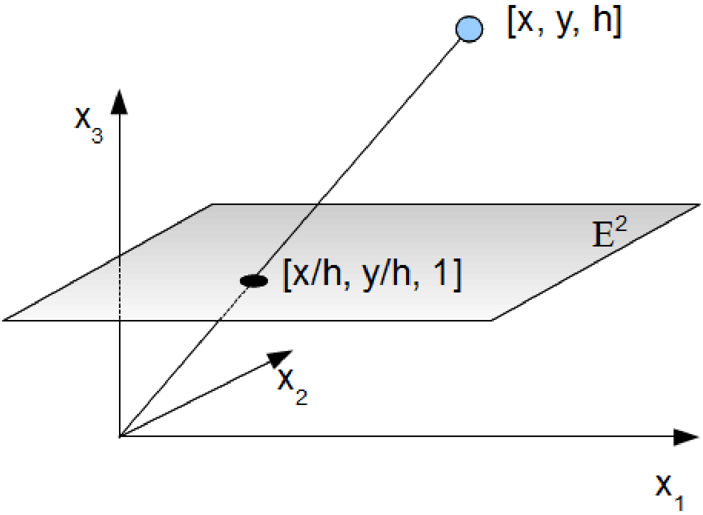
$\mathbb{E}^2$ beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba



$\mathbb{E}^2$ beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba



$\mathbb{E}^2$ beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba



Visszatérés Descartes koordináta-rendszerbe

- Mit ábrázol az $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ projektív térbeli elem?

Visszatérés Descartes koordináta-rendszerbe

- Mit ábrázol az $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ projektív térbeli elem?
  - Ha $x_4 \neq 0$, akkor egy közönséges pontról van szó, aminek koordinátái homogén (vagy projektív) osztás után

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \approx \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1\right]$$

Visszatérés Descartes koordináta-rendszerbe

- Mit ábrázol az $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ projektív térbeli elem?
  - Ha $x_4 \neq 0$, akkor egy közönséges pontról van szó, aminek koordinátái homogén (vagy projektív) osztás után

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \approx \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1\right] = \mathbf{p}\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right)$$

Visszatérés Descartes koordináta-rendszerbe

- Mit ábrázol az $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ projektív térbeli elem?
  - Ha $x_4 \neq 0$, akkor egy közönséges pontról van szó, aminek koordinátái homogén (vagy projektív) osztás után

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \approx \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1\right] = \mathbf{p}\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right)$$

  - Ha $x_4 = 0$, de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ (=nem mind nulla), akkor egy ideális pontról van szó, az $[x_1, x_2, x_3]$ vektorral egyező állású egyenesekhez rendeltről.

Visszatérés Descartes koordináta-rendszerbe

- Mit ábrázol az $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ projektív térbeli elem?
  - Ha $x_4 \neq 0$, akkor egy közönséges pontról van szó, aminek koordinátái homogén (vagy projektív) osztás után

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \approx \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1\right] = \mathbf{p}\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right)$$

  - Ha $x_4 = 0$, de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ (=nem mind nulla), akkor egy ideális pontról van szó, az $[x_1, x_2, x_3]$ vektorral egyező állású egyenesekhez rendeltről.
  - Ha $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, akkor nincs értelmezve.

Nevezetes homogén alakok

- Legyen $c \neq 0$ tetszőleges, nem nulla valós szám. Ekkor a következő néhány példa nevezetes pontokra:

Nevezetes homogén alakok

- Legyen $c \neq 0$ tetszőleges, nem nulla valós szám. Ekkor a következő néhány példa nevezetes pontokra:
  - $[0, 0, 0, c]$ az origó

Nevezetes homogén alakok

- Legyen $c \neq 0$ tetszőleges, nem nulla valós szám. Ekkor a következő néhány példa nevezetes pontokra:
  - $[0, 0, 0, c]$ az origó
  - $[c, 0, 0, 0]$ az x tengely ideális pontja

Nevezetes homogén alakok

- Legyen $c \neq 0$ tetszőleges, nem nulla valós szám. Ekkor a következő néhány példa nevezetes pontokra:
  - $[0, 0, 0, c]$ az origó
  - $[c, 0, 0, 0]$ az x tengely ideális pontja
  - $[0, c, 0, 0]$ az y tengely ideális pontja

Nevezetes homogén alakok

- Legyen $c \neq 0$ tetszőleges, nem nulla valós szám. Ekkor a következő néhány példa nevezetes pontokra:
  - $[0, 0, 0, c]$ az origó
  - $[c, 0, 0, 0]$ az x tengely ideális pontja
  - $[0, c, 0, 0]$ az y tengely ideális pontja
  - $[0, 0, c, 0]$ az z tengely ideális pontja

Tulajdonságok

- A projektív síkon a pont és az egyenes, a projektív térben a pont és a sík duális fogalmak

Tulajdonságok

- A projektív síkon a pont és az egyenes, a projektív térben a pont és a sík duális fogalmak
- Figyeljünk, hogy egyes tulajdonságok az euklideszi térből nem jönnek át:

Tulajdonságok

- A projektív síkon a pont és az egyenes, a projektív térben a pont és a sík duális fogalmak
- Figyeljünk, hogy egyes tulajdonságok az euklideszi térből nem jönnek át:
  - Egy egyenes egy pontja nem osztja két részre az egyenest! De: két különböző pontja már két részre osztja

Tulajdonságok

- A projektív síkon a pont és az egyenes, a projektív térben a pont és a sík duális fogalmak
- Figyeljünk, hogy egyes tulajdonságok az euklideszi térből nem jönnek át:
  - Egy egyenes egy pontja nem osztja két részre az egyenest! De: két különböző pontja már két részre osztja
  - Egy síkot egy egyenese nem osztja két részre! De: két különböző állású egyenese már két részre osztja

Tulajdonságok

- A projektív síkon a pont és az egyenes, a projektív térben a pont és a sík duális fogalmak
- Figyeljünk, hogy egyes tulajdonságok az euklideszi térből nem jönnek át:
  - Egy egyenes egy pontja nem osztja két részre az egyenest! De: két különböző pontja már két részre osztja
  - Egy síkot egy egyenese nem osztja két részre! De: két különböző állású egyenese már két részre osztja
  - Két pontot összekötő egyenes szakasz sem egyértelmű! (Az egyenes ideális pontja „összeragasztja” az egyenes két végét)

Tartalom

Tartalom

Motiváció

- Most már tudjuk a terünk pontjait több koordináta-rendszerben is reprezentálni

Motiváció

- Most már tudjuk a terünk pontjait több koordináta-rendszerben is reprezentálni
- Hogyan tudjuk az egyszerűbb dolgokat leírni, mint például az egyenes vagy a sík?

Motiváció

- Most már tudjuk a terünk pontjait több koordináta-rendszerben is reprezentálni
- Hogyan tudjuk az egyszerűbb dolgokat leírni, mint például az egyenes vagy a sík?
- Elsődlegesen a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben vizsgáljuk a fenti kérdést

Görbék, felületek

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.

Görbék, felületek

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
  - explicit: $y = f(x)$

Görbék, felületek

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
  - explicit: $y = f(x) \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?

Görbék, felületek

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
  - explicit: $y = f(x) \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?
  - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Görbék, felületek

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
  - explicit: $y = f(x) \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?
  - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$
  - implicit: $x^2 + y^2 - 9 = 0$

Tartalom

Egyenes megadása

- Középiskolában: $y = mx + b$

Egyenes megadása

- Középiskolában: $y = mx + b$
- Probléma: mi legyen a függőleges egyenesekkel?

Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:

Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- Az egyenes pontjai azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- Az egyenes pontjai azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

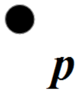
$$(x - p_x)n_x + (y - p_y)n_y = 0$$

egyenletet.

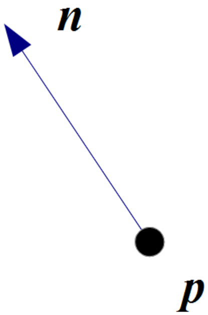
Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- Az egyenes pontjai azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$
$$(x - p_x)n_x + (y - p_y)n_y = 0$$
egyenletet.
- Az $\langle \mathbf{x}' - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle < 0$ és $\langle \mathbf{x}' - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle > 0$ az egyenesünk által meghatározott két félsík pontjainak jellemzése.

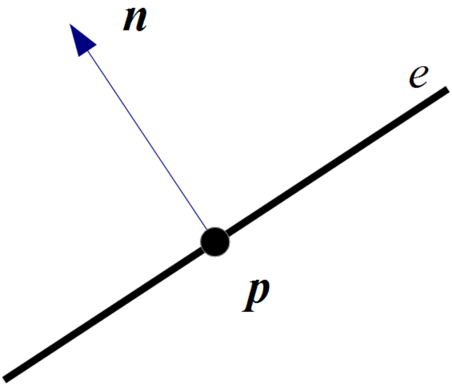
Az egyenes által meghatározott két félsík



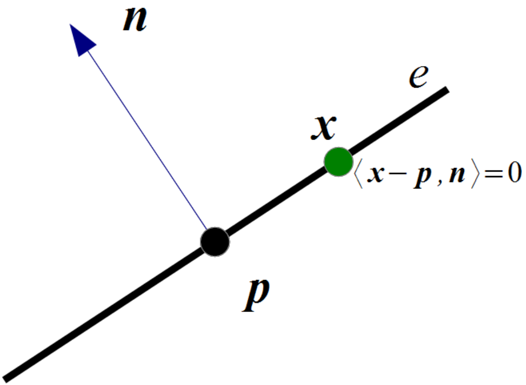
Az egyenes által meghatározott két félsík



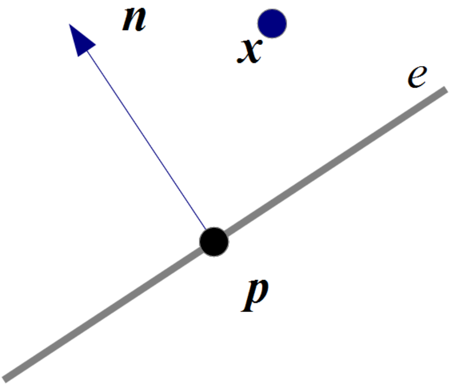
Az egyenes által meghatározott két félsík



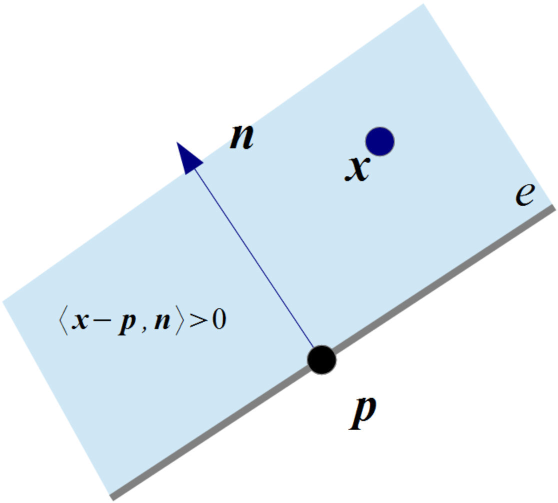
Az egyenes által meghatározott két félsík



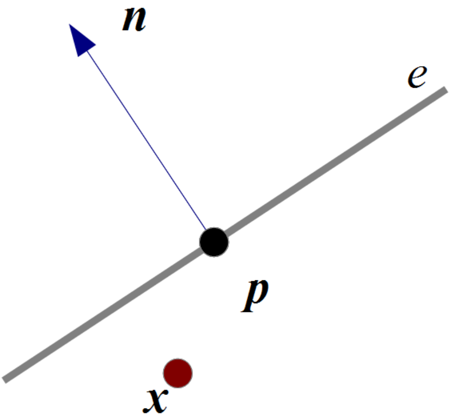
Az egyenes által meghatározott két félsík



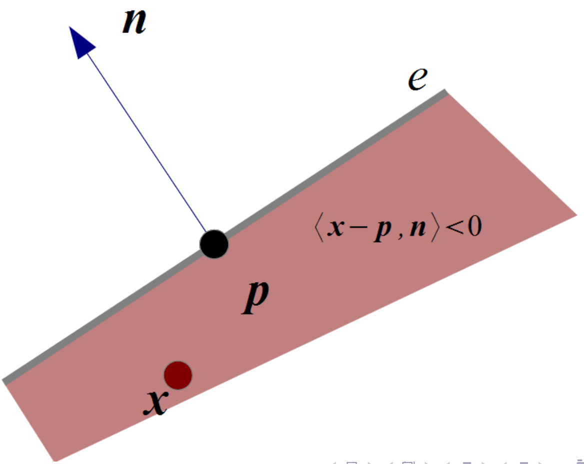
Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes homogén, implicit egyenlete a síkban

- Az $ax + by + c = 0$ alakot hívjuk az egyenes implicit egyenletének.

Az egyenes homogén, implicit egyenlete a síkban

- Az $ax + by + c = 0$ alakot hívjuk az egyenes implicit egyenletének.
- A fentiek alapján $a = n_x$, $b = n_y$ és $c = -(p_x n_x + p_y n_y)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ választással a $\mathbf{p}$ ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálisú egyenes implicit egyenletét kapjuk.

Az egyenes homogén, implicit egyenlete a síkban

- Az $ax + by + c = 0$ alakot hívjuk az egyenes implicit egyenletének.
- A fentiek alapján $a = n_x$, $b = n_y$ és $c = -(p_x n_x + p_y n_y)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ választással a $\mathbf{p}$ ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálisú egyenes implicit egyenletét kapjuk.
- Ha $a^2 + b^2 = 1$, akkor *Hesse-féle normalizált alakról* beszélünk

A homogén egyenlet determináns alakja

- Ha az egyenesünket két, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ pontjával adjuk meg, akkor azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok fekszenek az egyenesen, amelyekre

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p_x & p_y & 1 \\ q_x & q_y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A homogén egyenlet determináns alakja

- Ha az egyenesünket két, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ pontjával adjuk meg, akkor azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok fekszenek az egyenesen, amelyekre

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p_x & p_y & 1 \\ q_x & q_y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Megjegyzés: a fenti determináns az $\mathbf{x}(x, y)$, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ pontok által meghatározott háromszög előjeles területe (pontosabban a duplája), ami $=0 \equiv$ a három pont egy egyenesbe esik

Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

$$\mathbf{x}(t) \quad = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \end{bmatrix} \rightarrow$$

Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{p} + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \end{bmatrix} \rightarrow \\
x(t) &= p_x + tv_x \\
y(t) &= p_y + tv_y \\
z(t) &= p_z + tv_z
\end{aligned}
$$

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow$$

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow \\ \mathbf{x}(t) &= (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \rightarrow \end{aligned}$$

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor **p** és **q** pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow \\
\mathbf{x}(t) &= (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \rightarrow \\
x(t) &= (1-t)p_x + tq_x \\
y(t) &= (1-t)p_y + tq_y \\
z(t) &= (1-t)p_z + tq_z
\end{aligned}
$$

Homogén koordinátás alak

- A kibővített (projektív) sík egy egyenese megadható az $\mathbf{e} = [e1, e2, e3]$ valós számhármassal, úgynevezett *vonalkoordinátákkal*, amelyek felhasználásával az egyenes minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ pontjára
$$\mathbf{ex} = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 = 0$$

Homogén koordinátás alak

- A kibővített (projektív) sík egy egyenese megadható az $\mathbf{e} = [e1, e2, e3]$ valós számhármassal, úgynevezett *vonalkoordinátákkal*, amelyek felhasználásával az egyenes minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ pontjára
$$\mathbf{ex} = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$$
- Az sík minden $[x_1, x_2, 0]$ ideális pontjára illeszkedő ideális egyenes vonalkoordinátái $[0, 0, 1]$.

Az egyenes polár koordinátás alakja

- Az origón áthaladó, a polártengellyel θ szöget bezáró irányú egyenesek polárkoordinátás (implicit) egyenlete:

$$\phi = \theta$$

Az egyenes polár koordinátás alakja

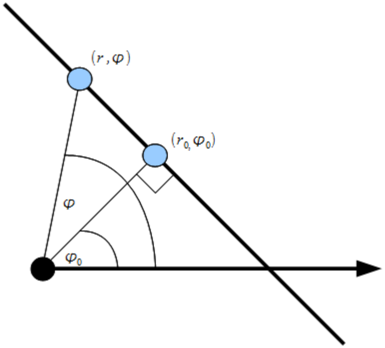
- Az origón áthaladó, a polártengellyel θ szöget bezáró irányú egyenesek polárkoordinátás (implicit) egyenlete:

$$\phi = \theta$$

- Ha az egyenesünk nem halad át az origón, akkor legyen (r_0, ϕ_0) a metszéspontja az egyenesünknek és egy arra merőleges, origón áthaladó egyenesnek. Ekkor az egyenesünk polárkoordinátái közül a sugár a polárszög függvényeként felírható a következő alakban:

$$r(\phi) = \frac{r_0}{\cos(\phi - \phi_0)}$$

Az egyenes polár koordinátás alakja



Tartalom

A sík normálvektoros egyenlete

- A sík megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és a síkra merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ normálvektorával. Ekkor a sík minden $\mathbf{x}$ pontjára:

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

A sík normálvektoros egyenlete

- A sík megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és a síkra merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ normálvektorával. Ekkor a sík minden $\mathbf{x}$ pontjára:

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Félterek: $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle < 0$, $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle > 0$

Az sík homogén, implicit egyenlete

- A sík implicit egyenletének alakja $ax + by + cz + d = 0$

Az sík homogén, implicit egyenlete

- A sík implicit egyenletének alakja $ax + by + cz + d = 0$
- Előbbiből $a = n_x$, $b = n_y$, $c = n_z$ és $d = -n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$ választásal a **p** ponton áthaladó, **n** normálvektorú sík egyenletét kapjuk

Az sík homogén, implicit egyenlete

- A sík implicit egyenletének alakja $ax + by + cz + d = 0$
- Előbbiből $a = n_x$, $b = n_y$, $c = n_z$ és $d = -n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$ választással a **p** ponton áthaladó, **n** normálvektorú sík egyenletét kapjuk
- Hesse normál-alak itt is, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

A homogén egyenlet determináns alakja

- Determináns segítségével is megadhatjuk a sík egyenletét, a következő determináns csak $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y, q_z)$, $\mathbf{r}(r_x, r_y, r_z)$ pontok által kifeszített sík X pontjaira lesz nulla:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \\ q_x & q_y & q_z & 1 \\ r_x & r_y & r_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A sík parametrikus egyenlete – kifeszítő vektorokkal

- A sík jellemezhető egy pontjával és két kifeszítő vektorával (bázisvektorával):
$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$
ahol $s, t \in \mathbb{R}$.

A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$. Ekkor a sík minden véges $\mathbf{x}$ pontja megkapható
$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$$
alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.

A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$. Ekkor a sík minden véges $\mathbf{x}$ pontja megkapható
$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q}-\mathbf{p}) + t(\mathbf{r}-\mathbf{p})$$
alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.
- Az előbbiből is kaphatjuk ezt $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$

A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$. Ekkor a sík minden véges $\mathbf{x}$ pontja megkapható
$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$$
alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.
- Az előbbiből is kaphatjuk ezt $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$
- Ez egy baricentrikus megadás:
$$\mathbf{x}(s,t) = (1 - s - t)\mathbf{p} + s\mathbf{q} + t\mathbf{r}$$
hiszen $(1 - s - t) + s + t = 1$

Homogén koordinátás alak

- A kibővített tér egy síkja is megadható „síkkordinátákkal”, egy olyan $\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3, s_4]$ négyessel, amely a sík minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ pontjára

$$\mathbf{sx} = s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 = 0$$

Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík

Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík
- $[c, 0, 0, 0]$ az YZ koordinátasík

Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík
- $[c, 0, 0, 0]$ az YZ koordinátasík
- $[0, c, 0, 0]$ az XZ koordinátasík

Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík
- $[c, 0, 0, 0]$ az YZ koordinátasík
- $[0, c, 0, 0]$ az XZ koordinátasík
- $[0, 0, c, 0]$ az XY koordinátasík

Tartalom

Összefoglalás

- Láttuk hogyan írhatunk le és tárolhatunk számítógépen pontokat és egyszerű geometriai ponthalmazokat

Összefoglalás

- Láttuk hogyan írhatunk le és tárolhatunk számítógépen pontokat és egyszerű geometriai ponthalmazokat
- Ajánlott olvasmány: Krammer Gergely oldala