

Numerikus módszerek C

5. előadás: Mátrixnormák, a LER érzékenysége

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

Definíció: mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

- ❶ $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❷ $\|A\| = 0 \iff A = 0,$
- ❸ $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❹ $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❺ $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}).$

Definíció: mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

- ❶ $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❷ $\|A\| = 0 \iff A = 0,$
- ❸ $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❹ $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❺ $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}).$

Ugyanaz, mint a vektornormáknál, plusz: „szubmultiplikativitás”.
Ezek a mátrixnormák axiómái.

Definíció: Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Állítás: Frobenius-norma

A $\|\cdot\|_F$ függvény valóban mátrixnorma.

Definíció: Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:



$$\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Állítás: Frobenius-norma

A $\|\cdot\|_F$ függvény valóban mátrixnorma.

Biz.: 1–4. következik a $\|\cdot\|_2$ vektornorma tulajdonságaiból.
Az 5. belátható CBS segítségével.



Példa: egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Példa: egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2 + 2^2} = 5$$

$$\|B\|_F = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 5^2} = 6$$



- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák**
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák



Definíció: indukált norma, természetes mátrixnormák

Legyen $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges vektornorma. Ekkor a

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

függvényt a $\|\cdot\|_v$ *vektornorma által indukált mátrixnormának* hívjuk. Egy mátrixnormát *természetesnek* nevezünk, ha van olyan vektornorma, ami indukálja.

Tétel: indukált normák

Az „indukált mátrixnormák” valóban mátrixnormák.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

- 1 Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprénuma.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

- 1 Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprénuma.
- 2 Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprénum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprénum 0, akkor minden x -re Ax -nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

- 1 Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprénuma.
- 2 Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprénum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprénum 0, akkor minden x -re Ax -nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.

3

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

Biz. (folytatás):

4

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \\ &\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

Biz. (folytatás):

4

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|_v}{\|x\|_v} \stackrel{\text{}}{\leq} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \\ &\stackrel{\text{}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

5 $B = 0 \Rightarrow \|B\| = 0$, valamint

$$A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow \|AB\| = 0.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, tehát igaz az állítás.

Biz. (folytatás): Ha $B \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}\|A \cdot B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0, Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \\ &\leq \sup_{Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

Meggondolható, hogy a $Bx \neq 0$ feltétel nem változtatja meg a szupréмум értékét; közben bevezettük az $y := Bx$ jelölést. \square

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v=1} \|Ay\|_v.$$

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v=1} \|Ay\|_v.$$

- A sup helyett max is írható.

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:



$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v=1} \|Ay\|_v.$$

- A sup helyett max is írható.
- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \implies \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \implies \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v.$$

Sőt: $\|A\|$ a legkisebb ilyen felső korlát.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Állítás: természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Állítás: természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

Biz.: Láttuk az előbb. Az $x = 0$ eset meggondolandó.



Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|\cdot\|_p$ ($p = 1, 2, \infty$) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (oszlopnorma),

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|\cdot\|_p$ ($p = 1, 2, \infty$) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (sornorma),

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|\cdot\|_p$ ($p = 1, 2, \infty$) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$ (spektrálnorma).

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|\cdot\|_p$ ($p = 1, 2, \infty$) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$ (spektrálnorma).

Jel.: $\lambda_i(M)$: az M mátrix i -edik sajátértéke ($Mv = \lambda v$, $v \neq 0$).

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|\cdot\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|\cdot\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|\cdot\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|\cdot\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right) \leq \underbrace{\left(\max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)} \cdot \|x\|_1.\end{aligned}$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|\cdot\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \cdot \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq \left(\max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \|x\|_1.\end{aligned}$$

Legyen $x = e_k$, ahol a k -adik oszlopösszeg maximális. Ekkor

$$\|Ae_k\|_1 = \underbrace{\dots}_{1} \underbrace{\|e_k\|_1}_{1}.$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Bizonyítás $\|\cdot\|_\infty$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint $\|\cdot\|_1$ esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az

$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel. . .

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Bizonyítás $\|\cdot\|_\infty$ esetén:



$$\text{Állítás: } \|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint $\|\cdot\|_1$ esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az

$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$



vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel. . .

Bizonyítás $\|\cdot\|_2$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}.$$

- Előbb belátjuk, hogy a sajátértékek nemnegatívak.
- A becslés a diagonalizálás alapján adódik.
- Válasszuk a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektort az egyenlőséghez.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^T A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^T A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, azaz $A^T A$ szimmetrikus, vagyis $A^T A$ sajátértékei valósak.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^T A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^T A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, azaz $A^T A$ szimmetrikus, vagyis $A^T A$ sajátértékei valósak.
- Legyen $y \neq 0$ az $A^T A$ mátrix λ -hoz tartozó sajátvektora, azaz

$$A^T A y = \lambda \cdot y.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az y^T vektorral:

$$y^T A^T A y = \lambda \cdot y^T y.$$

Innen

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^T A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^T A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, azaz $A^T A$ szimmetrikus, vagyis $A^T A$ sajátértékei valósak.
- Legyen $y \neq 0$ az $A^T A$ mátrix λ -hoz tartozó sajátvektora, azaz

$$A^T A y = \lambda \cdot y.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az y^T vektorral:

$$y^T A^T A y = \lambda \cdot y^T y.$$

Innen

$$\lambda = \frac{y^T A^T A y}{y^T y} = \frac{(Ay)^T (Ay)}{y^T y} = \frac{\|Ay\|_2^2}{\|y\|_2^2} \geq 0.$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz. (folytatás): Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve Ax normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy $A^T A$ szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik U ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^T A = U^T D U \quad \Leftrightarrow \quad U A^T A U^T = D$$

úgy, hogy a diagonálisban $A^T A$ sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az $y = Ux$ jelölést.

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = x^T U^T D U x = (Ux)^T D (Ux) \\ &= y^T D y = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^n d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A) \cdot \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Biz. (folytatás): Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve Ax normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy $A^T A$ szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik U ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^T A = U^T D U \quad \Leftrightarrow \quad U A^T A U^T = D$$

úgy, hogy a diagonálisban $A^T A$ sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az $y = Ux$ jelölést.

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = x^T U^T D U x = (Ux)^T D (Ux) \\ &= y^T D y = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^n d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A) \cdot \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy $\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2$.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2, \text{ ezért}$$

$$\|Ax\|_2^2 \leq \dots \leq \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2.$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2$, ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \dots \leq \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2.$$

$x \neq 0$ esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left(\max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan $x \neq 0$ vektor, amire a szuprénum felvételük.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2$, ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \dots \leq \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2.$$

$x \neq 0$ esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left(\max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan $x \neq 0$ vektor, amire a szuprémum felvételik.

Legyen $\lambda_m = \max \lambda_i(A^\top A)$ és $v_m \neq 0$, $\|v_m\|_2 = 1$ a hozzá tartozó sajátvektor.

$$\|Av_m\|_2^2 = (Av_m)^\top (Av_m) = v_m^\top \underbrace{A^\top A}_{\lambda_m \cdot v_m} v_m = \lambda_m \cdot \underbrace{v_m^\top v_m}_{=1} = \lambda_m.$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$.

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Állítás:

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Állítás:

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

Biz.: Trivi.

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Biz.: Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátrixok esetén létezik U unitér hasonlósági transzformáció, mellyel A diagonális alakra hozható.

$$\begin{aligned}U^*AU &= D = \text{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^* \\A^*A &= (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^* \\ \lambda_i(A^*A) &= \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2 \\ \varrho(A^*A) &= \varrho(A)^2\end{aligned}$$

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Biz.: Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátrixok esetén létezik U unitér hasonlósági transzformáció, mellyel A diagonális alakra hozható.

$$\begin{aligned}U^*AU &= D = \text{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^* \\A^*A &= (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^* \\ \lambda_i(A^*A) &= \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2 \\ \varrho(A^*A) &= \varrho(A)^2\end{aligned}$$

Innen $\|A\|_2 = \varrho(A^*A)^{1/2} = \varrho(A)$.

Példa: $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_\infty$ mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_\infty$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Példa: $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_\infty$ mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_\infty$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{1 + 2, |-4| + 2\} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + |-4|, 2 + 2\} = 5$$

Példa: $\|\cdot\|_2$ mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix $\|\cdot\|_2$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Példa: $\|\cdot\|_2$ mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix $\|\cdot\|_2$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix},$$

Szerencsénkre látjuk a sajátértékeit...

$$\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A) \right)^{1/2} = \sqrt{\max\{5, 20\}} = \sqrt{20} \approx 4.4721.$$

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai**
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.

Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.

Biz.: Tekintsük az $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egységmátrix normáját.

- Indukált mátrixnormák esetén $\|I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v} = 1$.
- Másrészt $\|I\|_F = \sqrt{n}$.
- Tehát nincs olyan vektornorma, ami a Frobenius-normát indukálná (ha $n > 1$).



Állítás: spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

Állítás: spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

Biz.: Belátjuk, hogy $|\lambda| \leq \|A\|$.

(Legyen λ tetszőleges sajátérték és $v \neq 0$ a hozzá tartozó sajátvektor.)

$$Av = \lambda v$$

$$Avv^T = \lambda vv^T$$

$$\|A\| \cdot \|vv^T\| \geq \|Avv^T\| = \|\lambda vv^T\| = |\lambda| \cdot \|vv^T\|$$

Leosztva $\|vv^T\| \neq 0$ -val $\|A\| \geq |\lambda|$.



Feladatok gyakorlatra

Igazoljuk a következő állításokat.

a Ha Q ortogonális (unitér), akkor

- $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$,
- $\|Q\|_2 = 1$,
- $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$.

Feladatok gyakorlatra

- b** $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^\top A)$, ahol $\text{tr}(B) := \sum_{k=1}^n b_{kk}$ a mátrix *nyoma*.
- c** Ha Q ortogonális (unitér), akkor $\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$.
- d** $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A)$.
- e** $\|\cdot\|_F$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens mátrixnormák.
- f** A Frobenius-norma illeszkedik a kettes vektornormához.

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma**
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén a $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén a $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciós számának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén a $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.
- Értéke függ a norma választásától.
(Pl. $\text{cond}_1(A)$, $\text{cond}_2(A)$, \dots)

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- b $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- b $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Állítás: a kondíciósám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- b $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

a $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- b $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

- a $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$.
- b
$$\begin{aligned} \text{cond}(cA) &= \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| = \\ &= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A). \end{aligned}$$

Állítás: a kondíciósza tulajdonságai – 1. rész

- a** Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- b** $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c** Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

- a** $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$.
- b** $\text{cond}(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| =$
 $= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$.
- c** $\|Q\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T Q^T Q x}}{\sqrt{x^T x}} = 1$
 $\|Q^{-1}\|_2 = \|Q^T\|_2 = 1, \quad \text{cond}_2(Q) = 1$



Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

d Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- e Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f** Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f** Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

d Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.

De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f** Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- d** Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
 De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.
 Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f** Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- d** Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
 De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.
 Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- e** A pozitív definitség miatt nem kell abszolút érték.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f** Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- d** Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.
Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- e** A pozitív definitség miatt nem kell abszolút érték.
- f** $\|A\| \geq \varrho(A) = \max |\lambda_i(A)|$, $\|A^{-1}\| \geq \varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$.



- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása**
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1 Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

① Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

② Módosult:

adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

① Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

② Módosult:

adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

① Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

4 Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a jobb oldal:

$$\delta b := \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 9.4959e - 004.$$

- Emiatt mennyire változik a megoldás: $\delta x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 1.1732.$
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát: $\frac{\delta x}{\delta b} = 1235.5.$
- $\text{cond}(A) = 1623$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

- 1 $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$ -ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A\Delta x = \Delta b$.

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

- 1 $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$ -ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A\Delta x = \Delta b$.
- 2 Viszont $x = A^{-1}b$ és $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ is teljesül.

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Biz. (folytatás):

- ③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

- ④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$\text{a} \quad \|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

a $\|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$

b $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$\text{a} \quad \|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

$$\text{b} \quad \|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$$

$$\text{c} \quad \|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$$

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

a $\|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$

b $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$

c $\|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$

d $\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$

Biz. (folytatás):

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségénél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

a $\|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$

b $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$

c $\|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$

d $\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$

⑤ Az alsó becslés (b) és (c) alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Biz. (folytatás):

- ⑥ A felső becslés (a) $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$ és (d) $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$ alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

□

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása**
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1 Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1 Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

2 Módosult:

adott $A + \Delta A$ és b , kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

① Eredeti:

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

② Módosult:

adott $A + \Delta A$ és b , kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

① Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$

Példa:

1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$

4 Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a mátrix: $\delta A := \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 7.8495e - 004$.
- Emiatt mennyire változik a megoldás: $\delta x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 3.4507$.
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát: $\frac{\delta x}{\delta A} = 4396.1$.
- $\text{cond}(A) = 1623$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Megj: A lemmához kell az indukált mátrixnorma.

Biz. lemma:

- Az $I + M$ mátrix tényleg invertálható, hiszen $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$, azaz M sajátértékeire: $|\lambda_i(M)| < 1$, vagyis az egységsugarú körön belül helyezkednek el. Meggondolható, hogy $I + M$ sajátvektorai ugyanazok, mint M sajátvektorai, a sajátértékekre pedig $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$ teljesül, így $I + M$ minden sajátértéke pozitív, következésképpen $I + M$ invertálható.

Biz. lemma:

- Az $I + M$ mátrix tényleg invertálható, hiszen $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$, azaz M sajátértékeire: $|\lambda_i(M)| < 1$, vagyis az egységsugarú körön belül helyezkednek el. Meggondolható, hogy $I + M$ sajátvektorai ugyanazok, mint M sajátvektorai, a sajátértékekre pedig $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$ teljesül, így $I + M$ minden sajátértéke pozitív, következésképpen $I + M$ invertálható.
- Vizsgáljuk most $I + M$ inverzét, majd ennek normáját.

$$\begin{aligned}(I + M)^{-1} &= I \cdot (I + M)^{-1} = (I + M - M)(I + M)^{-1} = \\ &= I - M \cdot (I + M)^{-1},\end{aligned}$$

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \|I\| + \|M\| \cdot \|(I + M)^{-1}\|,$$

$$(1 - \|M\|) \cdot \|(I + M)^{-1}\| \leq \|I\| = 1 \Rightarrow \|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Biz. tétel: Az $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ LER-ből $Ax = b$ -t kivonva $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$, másképp

$$(A + \Delta A) \cdot \Delta x = -\Delta A \cdot x,$$

$$A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x = -\Delta A \cdot x.$$

Biz. tétel: Az $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ LER-ből $Ax = b$ -t kivonva $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$, másképp

$$\begin{aligned}(A + \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x, \\ A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x.\end{aligned}$$

Mivel feltevésünk szerint $\|A^{-1} \cdot \Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, a lemma alapján mondhatjuk, hogy $(I + A^{-1} \cdot \Delta A)$ invertálható.

$$\Delta x = -(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1} A^{-1} \Delta A \cdot x$$

Biz. tétel: Az $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ LER-ből $Ax = b$ -t kivonva $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$, másképp

$$\begin{aligned}(A + \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x, \\ A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x.\end{aligned}$$

Mivel feltevésünk szerint $\|A^{-1} \cdot \Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, a lemma alapján mondhatjuk, hogy $(I + A^{-1} \cdot \Delta A)$ invertálható.

$$\Delta x = -(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1} A^{-1} \Delta A \cdot x$$

Az inverz normájára adott becslésünket is felhasználva:

$$\begin{aligned}\|\Delta x\| &\leq \|(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x\| \\ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1} \cdot \Delta A\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.\end{aligned}$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

$$= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

Tétel átfogalmazás:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \\
 &= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \\
 &= \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.
 \end{aligned}$$

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása**
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

LU -felbontás hatása a LER érzékenységére

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow L U x = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}(A) \leq \text{cond}(L) \cdot \text{cond}(U)$



Példa

Hogyan befolyásolja az LU -felbontás a feladat kondicionáltságát?
Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}(A) \leq \text{cond}(L) \cdot \text{cond}(U)$ □

Sőt előfordulhat, hogy $\text{cond}(L), \text{cond}(U) \gg \text{cond}(A)$, azaz bizonyos mátrixok esetén előfordulhat, hogy a Gauss-elimináció nagyon pontatlan eredményt ad.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR -felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Ez is mutatja a QR - és Cholesky-felbontáson alapuló módszerek stabilitását.

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék**
- 9 Matlab példák

A kondíciós szám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységet jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységet jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

Definíció: reziduum- vagy maradékvektor

Legyen \tilde{x} az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása. Ekkor az $r := b - A\tilde{x}$ vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységet jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

Definíció: reziduum- vagy maradékvektor

Legyen \tilde{x} az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása. Ekkor az $r := b - A\tilde{x}$ vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

Látjuk, hogy a reziduum vektor könnyen számolható, alkalmazható direkt- és iterációs módszerek esetén is. Az utóbbi esetben leállási feltétel is készíthető a segítségével.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az \tilde{x} közelítő megoldáshoz tartozó $(A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = b$ LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az \tilde{x} közelítő megoldáshoz tartozó $(A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = b$ LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.

η értéke a közelítő megoldás ismeretében könnyen számolható. A továbbiakban ΔA ismerete nélkül szeretnénk becsléseket adni a nem ismert $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ mennyiségre.

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Biz.: $b = (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = A \cdot \tilde{x} + \Delta A \cdot \tilde{x}$, innen
 $b - A \cdot \tilde{x} = r = \Delta A \cdot \tilde{x}$, a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|.$$

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Biz.: $b = (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = A \cdot \tilde{x} + \Delta A \cdot \tilde{x}$, innen
 $b - A \cdot \tilde{x} = r = \Delta A \cdot \tilde{x}$, a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|.$$

A relatív maradékot becslülve

$$\eta = \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Biz.: Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top \tilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis \tilde{x} egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása.

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Biz.: Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top \tilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis \tilde{x} egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása. Végezzük el a behelyettesítést:

$$\begin{aligned} (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} &= \left(A + \frac{r\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top \tilde{x}} \right) \cdot \tilde{x} = \\ &= A\tilde{x} + \frac{r\tilde{x}^\top \tilde{x}}{\tilde{x}^\top \tilde{x}} = A\tilde{x} + (b - A\tilde{x}) = b. \end{aligned}$$

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\tilde{x}^T \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r \tilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becslve

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\left\| r \tilde{x}^\top \right\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \|\tilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2} = \eta_2.$$



Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\|r\tilde{x}^\top\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becsülve

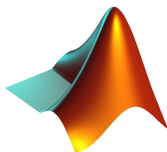
$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\|r\tilde{x}^\top\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \|\tilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2} = \eta_2.$$



Ha η_2 kicsi, akkor $\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$ is kicsi.

Ha $\eta_2 < \varepsilon_1$, akkor ebben az adott aritmetikában pontosabb megoldás nem adható.

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák**



- ❶ Indukált mátrixnorma szemléltetése \mathbb{R}^2 , $p = 2$ esetén.
- ❷ Indukált mátrixnormák közelítő számítása tetszőleges \mathbb{R}^n és p esetén ($m = 100, \dots, 1000$ vektor próbájával).
- ❸ Egy perturbált LER (jobboldala változik, mátrixa a Hilbert mátrix).
- ❹ $\text{cond}_2(H_n)$ változása a méret függvényében.
- ❺ $\text{cond}_2(V_n)$ változása a méret függvényében.
- ❻ $\text{cond}_2(\text{tridiag}(-1, 2, -1))$ változása a méret függvényében.
- ❼ $\text{cond}_2(\text{rand}_n)$ változása a méret függvényében.

1. Példa:

Jelöljük H_5 -tel az 5×5 -ös Hilbert mátrixot.

$$H_5 = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$$

1. Példa:

① Eredeti LER:

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Példa:

① Eredeti LER:

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

② Módosult LER:

$$H_5 \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 + 1/1000 \end{bmatrix}$$

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- 1 $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- ❶ $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
- ❷ $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- ❶ $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
- ❷ $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája
- ❸ a két mennyiség hányadosa: $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$

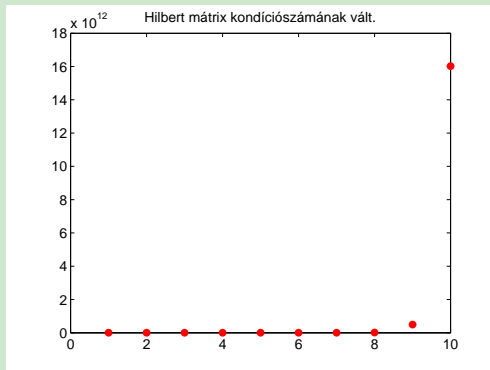
A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- ❶ $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
- ❷ $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája
- ❸ a két mennyiség hányadosa: $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$
- ❹ ennek becslése a tétellel: $\text{cond}_2(H_5) = 4.7661e + 005$.

2. Példa:

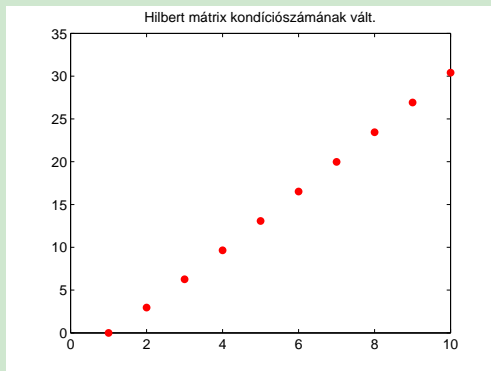
A Hilbert mátrix kondíciós számának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

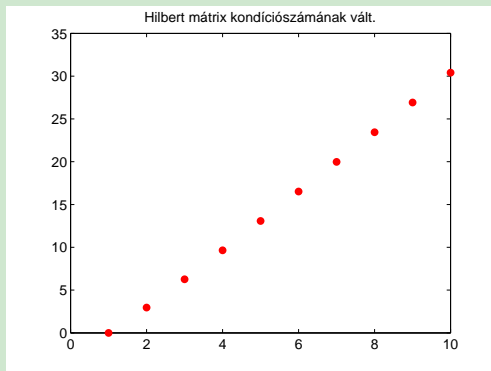
2. Példa:

Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!



2. Példa:

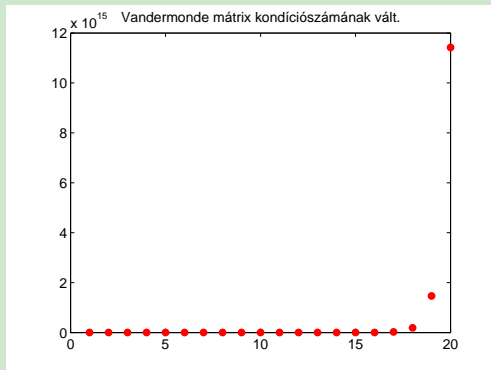
Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!



$$\text{cond}_2(H_n) \approx \exp(3.1n) \approx 22^n$$

3. Példa:

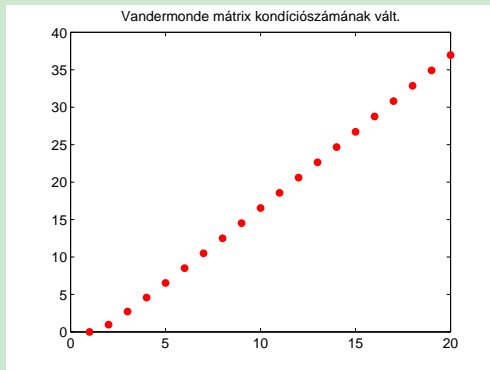
A $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztású pontjaiból képzett Vandermonde mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

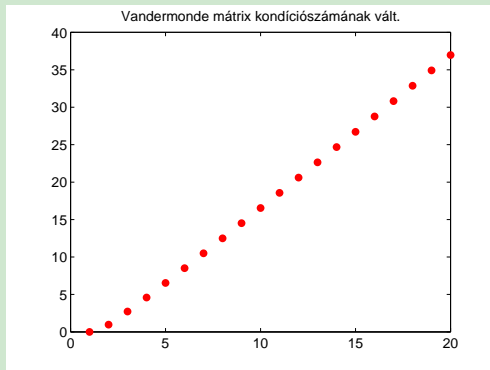
3. Példa:

Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



3. Példa:

Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!

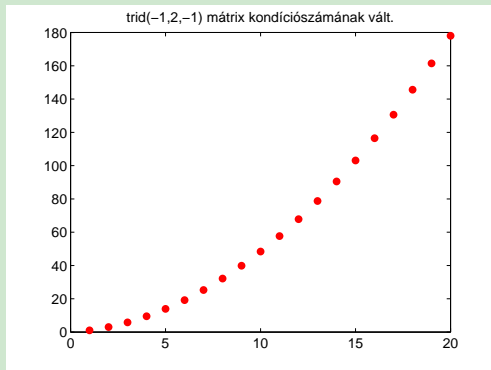


$$\text{cond}_2(V_n) \approx \exp(1.85n) \approx (6.4)^n$$

A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciószáma

4. Példa:

A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciószámanak változását vizsgáljuk:

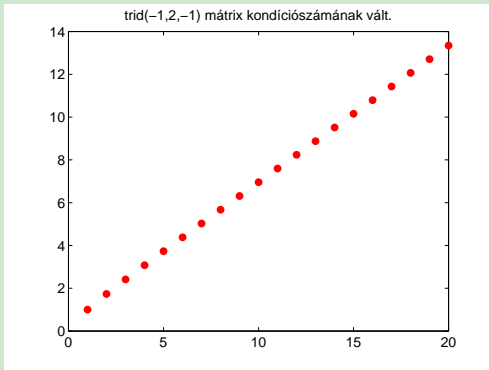


Az ábra alapján sejthető, hogy a növekedés a méret négyzetével arányos.

A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciósza

4. Példa:

Vegyük a kondíciósza

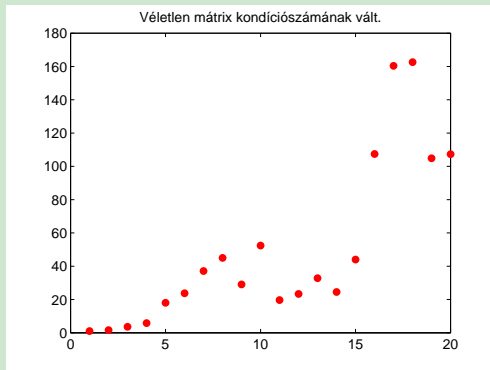


Elméletileg igazolható, hogy

$$\text{cond}_2(\text{tridiag}(-1, 2, -1)) \approx \left(\frac{2(n+1)}{\pi} \right)^2.$$

5. Példa:

Véletlen mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Az előző mátrixokhoz képest egész kicsi értékeket kaptunk.