Numerikus módszerek C

4. előadás: Az LU-felbontás, Vektornormák

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Definíció: LU-felbontás

Az A mátrix LU-felbontásának nevezzük az $L \cdot U$ szorzatot, ha

$$A = LU, \quad L \in \mathcal{L}_1, \;\; U \in \mathcal{U}.$$

Miért jó az LU-felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b$ helyett

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű,
2. majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t.

Miért jó az LU-felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b$ helyett $\left(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)\right)$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $\left(n^2 + \mathcal{O}(n)\right)$
2. majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $\left(n^2 + \mathcal{O}(n)\right)$

Miért jó az LU-felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b$ helyett $\left(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)\right)$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $(n^2 + \mathcal{O}(n))$
2. majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Összehasonlításul: egy mátrix-vektor szorzás műveletigénye:
$n \cdot (2n - 1) = 2n^2 + \mathcal{O}(n)$.

Miért jó az LU-felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b$ helyett $\quad (\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$
2. majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$

Összehasonlításul: egy mátrix-vektor szorzás műveletigénye:
$n \cdot (2n - 1) = 2n^2 + \mathcal{O}(n)$.

Persze valamikor elő kell állítani az LU-felbontást. $\quad (\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$
Előnyös, ha sokszor ugyanaz A.

Az LU-felbontás „közvetlen” kiszámítása

- Nem ismerjük L-t és U-t: ismeretlenek a mátrixokban.
- Viszont szorzatukat ismerjük: $LU = A$.
- A egyes elemeit a mátrixszorzás alapján felírva egyenleteket kapunk L és U elemeire.
- *Jó sorrendben* felírva az egyenleteket, mindig megkapjuk egy-egy új ismeretlen értékét.
- A GE-nál láttuk, hogy U 1. sora azonos A 1. sorával (a GE az 1.sort nem változtatja).
- L 1. oszlopát úgy kapjuk, hogy A 1. oszlopát leosztjuk a_{11}-gyel.

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 4. & 4. & 5. & 5. \\ 6. & 6. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

sorfolytonosan

$$\begin{pmatrix} 1. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

oszlopfolytonosan

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 2. & 4. & 5. & 5. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

parkettaszerűen

Példa: LU-felbontás közvetlenül

a) Készítsük el a példamátrixunk LU-felbontását közvetlenül a mátrixszorzás alapján.

b) Nézzünk egy újabb példát is. (Vigyázat, $\det(B_2) = 0$.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{21} \cdot 2 = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{21} \cdot 2 = -4$$

$$l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} = 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} = -2 - (-2) \cdot 3 &= 4 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} = -2 - (-2) \cdot 3 &= 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} = -2 - (-2) \cdot 3 &= 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$l_{31} \cdot 2 = 6$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21}\cdot 2 &= -4 \\ l_{21}\cdot 0 + 1\cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21}\cdot 3 + 1\cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} = -2-(-2)\cdot 3 &= 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31}\cdot 2 &= 6 \\ l_{31}\cdot 0 + l_{32}\cdot u_{22} &= -5 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} = -2 - (-2) \cdot 3 &= 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l_{31} &= 3 \\ l_{32} &= \frac{-5}{5} = -1 \\ u_{33} &= 4 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = -1 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{21} \cdot 2 = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &l_{21} = -2 \\ &u_{22} = 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ &u_{23} = -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

Példa (b)

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$l_{31} \cdot 2 = 6$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 \\ l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & &\rightsquigarrow \text{ellentmondásos egyenlet} \end{aligned}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$l_{31} \cdot 2 = 6 \qquad\qquad l_{31} = 3$$

$$l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} = -5 \qquad \rightsquigarrow \text{ellentmondásos egyenlet}$$

Mivel $D_2 = \det(B_2) = 0$, így $u_{22} = 0$ lesz. Az LU-felbontás nem készíthető el. GE-t alkalmazva $a_{22}^{(1)} = 0$ lenne, emiatt sort kéne cserélni.

Tétel: az LU-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$i \le j \text{ (felső)} \qquad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \qquad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i-edik sorának j-edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i-edik sorának j-edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i \leq j$, azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$, valamint $l_{ii} = 1$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i-edik sorának j-edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i \leq j$, azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$, valamint $l_{ii} = 1$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ebből u_{ij} kifejezhető

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha $u_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha $u_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd az előadás diasorát) megyünk végig az (i, j) indexekkel A elemein, akkor az l_{ij} illetve u_{ij} értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. $\square$

Az LU-felbontás műveletigénye

Tétel: Az LU-felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Tétel: Az LU-felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: A GE-ból trivi, mert vele az LU-felbontás is előállítható.

Tétel: Az LU-felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: A GE-ból trivi, mert vele az LU-felbontás is előállítható.
A képletekből: Rögzített j-re:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

u_{ij}-hez $(i-1)$ szorzás és $(i-1)$ összeadás kell. Összesen $2(i-1)$ művelet.

Tétel: Az LU-felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: A GE-ból trivi, mert vele az LU-felbontás is előállítható.
A képletekből: Rögzített j-re:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

u_{ij}-hez $(i-1)$ szorzás és $(i-1)$ összeadás kell. Összesen $2(i-1)$ művelet. Rögzített i-re:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right),$$

l_{ij}-hez 1 osztás, $(j-1)$ szorzás és $(j-1)$ összeadás kell. Összesen $2j-1$ művelet.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}2(i-1)+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(2j-1)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}2\cdot\frac{(j-1)j}{2}+\sum_{i=2}^{n}\left(2\cdot\frac{(i-1)i}{2}-(i-1)\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{i=2}^{n}(i-1)^2=\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{i=1}^{n-1}s^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=$$

$$=\frac{2}{3}n^3+\mathcal{O}(n^2). \quad \square$$

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: lásd GE visszahelyettesítés.

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: lásd GE visszahelyettesítés.

Tétel: Az $Ly = b$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: lásd GE visszahelyettesítés.

Tétel: Az $Ly = b$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: Rögzített i. sorra $(i-1)$ szorzás és $(i-1)$ összeadás.
Összesen: $2(i-1)$ művelet.

$$\sum_{i=2}^{n} 2(i-1) = \sum_{s=1}^{n-1} 2s = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + \mathcal{O}(n). \quad \square$$

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

1. $\langle Ax, x\rangle = x^\top Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
2. minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
3. minden sajátértéke pozitív.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

1. $\langle Ax, x\rangle = x^\top Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
2. minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
3. minden sajátértéke pozitív.

Állítás: pozitív definit mátrixok ekvivalens jellemzése

Az előző **1. 2. 3.** feltételek ekvivalensek.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

1. $\langle Ax, x\rangle = x^\top Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
2. minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
3. minden sajátértéke pozitív.

Állítás: pozitív definit mátrixok ekvivalens jellemzése

Az előző **1. 2. 3.** feltételek ekvivalensek.

Biz.: nélkül. $\square$

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha
$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ji}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ji}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Példa:

A következő mátrix szigorúan diagonálisan domináns a soraira és oszlopaira is.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definíció:

Az A mátrix **fél sávszélessége** $s \in \mathbb{N}$, ha

$$\forall\ i,j : |i-j| > s : \quad a_{ij} = 0 \ \text{ és}$$
$$\exists\ k,l : |k-l| = s : a_{kl} \neq 0.$$

Definíció:

Az A mátrix **fél sávszélessége** $s \in \mathbb{N}$, ha

$$\begin{aligned} &\forall \ i,j : |i-j| > s : \quad a_{ij} = 0 \ \text{ és} \\ &\exists \ k,l : |k-l| = s : a_{kl} \neq 0. \end{aligned}$$

Példa:

A következő mátrix szimmetrikus, pozitív definit és fél sávszélessége 1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Definíció:

Az A mátrix **profilja** sorokra a $(k_1, \ldots, k_n)$, oszlopokra az $(l_1, \ldots, l_n)$ szám n-sek, melyekre

$$\forall \; j = 1, \ldots, k_i : \quad a_{ij} = 0 \text{ és } a_{i,k_i+1} \neq 0,$$
$$\forall \; i = 1, \ldots, l_j : \quad a_{ij} = 0 \text{ és } a_{l_j+1,j} \neq 0.$$

Soronként és oszloponként az első nem nulla elemig a nullák száma.

Definíció:

Az A mátrix **profilja** sorokra a $(k_1, \ldots, k_n)$, oszlopokra az $(l_1, \ldots, l_n)$ szám n-sek, melyekre

$$\forall\ j = 1, \ldots, k_i: \quad a_{ij} = 0 \ \text{ és } \ a_{i,k_i+1} \neq 0,$$
$$\forall\ i = 1, \ldots, l_j: \quad a_{ij} = 0 \ \text{ és } \ a_{l_j+1,j} \neq 0.$$

Soronként és oszloponként az első nem nulla elemig a nullák száma.

Példa:

A mátrix profilja sorokra $(0, 0, 2, 1)$, oszlopokra $(0, 1, 1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Készítsük el az $Ax = b$ LER k. sor utáni particionálását ($k < n$, $k \in \mathbb{N}$) és tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

Készítsük el az $Ax = b$ LER k. sor utáni particionálását ($k < n$, $k \in \mathbb{N}$) és tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

Particionált alakban a LER:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Készítsük el az $Ax = b$ LER k. sor utáni particionálását ($k < n$, $k \in \mathbb{N}$) és tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

Particionált alakban a LER:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Végezzünk el egy blokkos GE-s lépést:
2. egyenlet $-$ $(A_{21} \cdot A_{11}^{-1})$ 1. egyenlet

$$\underbrace{\left(A_{21} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{11}\right)}_{0} x_1 + \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right) x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1$$

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1.$$

Particionálva a LER:

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 .$$

Particionálva a LER:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{array}\right]$$

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1.$$

Particionálva a LER:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{array}\right]$$

- Most már csak az $(n-k) \times (n-k)$-s jobb alsó mátrix részen kell folytatnunk a GE-t.

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right) x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1.$$

Particionálva a LER:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & \boxed{A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{array}\right]$$

- Most már csak az $(n-k) \times (n-k)$-s jobb alsó mátrix részen kell folytatnunk a GE-t.
- $k = 1$ esetén $A_{11} = (a_{11})$. Feltéve, hogy $a_{11} \neq 0$, akkor a fenti lépés a (blokk nélküli) 1. GE-s lépést írja le.

Definíció: Schur-komplementer

Tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható mátrix. Az A mátrix A_{11}**-re vonatkozó Schur-komplementere** az

$$[A|A_{11}] := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$(n-k) \times (n-k)$-s mátrix.

Definíció: Schur-komplementer

Tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható mátrix. Az A mátrix A_{11}**-re vonatkozó Schur-komplementere** az

$$[A|A_{11}] := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$(n-k) \times (n-k)$-s mátrix.

A Schur komplementer azt mutatja, hogy az A_{11}-gyel végzett GE után mely mátrixon kell folytatni az eliminációt. Az új fogalom segítségével könnyebben fogalmazhatjuk meg, hogy a GE mely tulajdonságokat örökíti tovább.

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szimmetrikus

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ pozitív definit

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szig. diag. dom.

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow [A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
5. $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq A$ fél sávszélessége

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow [A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
5. $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq A$ fél sávszélessége
6. A GE során a profilnál a soronkénti és oszloponkénti nullák az első nem nulla elemig megmaradnak.

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow [A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
5. $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq A$ fél sávszélessége
6. A GE során a profilnál a soronkénti és oszloponkénti nullák az első nem nulla elemig megmaradnak.

Gondoljuk végig az LU-felbontás L, U mátrixára a megfelelő tulajdonságokat.

Biz.: 1.) Determináns:

Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{r|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

Biz.: 1.) Determináns:
Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \quad \Leftrightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$$

$\square$

Biz.: 1.) Determináns:
Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{r|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \quad \Leftrightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$$

$\square$

2.) Szimmetria:
Ha A szimmetrikus, akkor A_{11} és A_{22} is az, továbbá $A_{21}^{\top} = A_{12}$.

Biz.: 1.) Determináns:
Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{r|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \quad \Leftrightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$$

$\square$

2.) Szimmetria:
Ha A szimmetrikus, akkor A_{11} és A_{22} is az, továbbá $A_{21}^\top = A_{12}$.

$$\begin{aligned} [A|A_{11}]^\top &= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^\top = A_{22}^\top - A_{12}^\top (A_{11}^{-1})^\top A_{21}^\top = \\ &= A_{22}^\top - A_{12}^\top (A_{11}^\top)^{-1} A_{21}^\top = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = [A|A_{11}] \end{aligned}$$

$\square$

Biz.: 3.) Pozitív definitség:

Tudjuk, hogy $\langle Ax, x\rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.

Biz.: 3.) Pozitív definitség:
Tudjuk, hogy $\langle Ax, x \rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.
Be kell látnunk, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2 \rangle > 0$ minden $x_2 \neq 0$ vektorra.
Vegyük észre, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ és $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Biz.: 3.) Pozitív definitség:
Tudjuk, hogy $\langle Ax, x\rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.
Be kell látnunk, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle > 0$ minden $x_2 \neq 0$ vektorra.
Vegyük észre, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ és $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

$$Ax = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \hline A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{array}\right]$$

Biz.: 3.) Pozitív definitség:
Tudjuk, hogy $\langle Ax, x\rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.
Be kell látnunk, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle > 0$ minden $x_2 \neq 0$ vektorra.
Vegyük észre, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ és $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

$$Ax = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \hline A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{array}\right]$$

Legyen $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ tetszőleges, válasszuk meg $x_1 \in \mathbb{R}^k$ vektort úgy, hogy Ax első k komponense 0 legyen:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 := -A_{11}^{-1}A_{12}x_2.$$

$$x_1 := -A_{11}^{-1} A_{12} x_2$$

Helyettesítsük be a skaláris szorzatba:

$$x_1 := -A_{11}^{-1}A_{12}x_2$$

Helyettesítsük be a skaláris szorzatba:

$$\begin{aligned} 0 < \langle Ax, x\rangle &= \langle \underbrace{A_{11}x_1 + A_{12}x_2}_{0}, x_1\rangle + \langle A_{21}x_1 + A_{22}x_2, x_2\rangle = \\ &= \langle A_{21}(-A_{11}^{-1}A_{12}x_2) + A_{22}x_2, x_2\rangle = \\ &= \langle(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})x_2, x_2\rangle = \\ &= \langle(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x_2, x_2\rangle = \langle[A|A_{11}]x_2, x_2\rangle \end{aligned}$$

$\square$

Biz.: 4.) Szigorúan diagonálisan domináns a soraira $k = 1$ esetén:
A GE az első sort nem változtatja, ezen a szig. diag. dom. megmarad. Be kellene látnunk, hogy $i = 2, \ldots, n$-re

$$\left|a_{ii}^{(1)}\right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}^{(1)}\right|.$$

Biz.: 4.) Szigorúan diagonálisan domináns a soraira $k = 1$ esetén:
A GE az első sort nem változtatja, ezen a szig. diag. dom. megmarad. Be kellene látnunk, hogy $i = 2, \ldots, n$-re

$$\left| a_{ii}^{(1)} \right| > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} \left| a_{ij}^{(1)} \right| .$$

A GE képleteit behelyettesítve

$$\left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| .$$

Biz.: 4.) Szigorúan diagonálisan domináns a soraira $k = 1$ esetén:
A GE az első sort nem változtatja, ezen a szig. diag. dom. megmarad. Be kellene látnunk, hogy $i = 2, \ldots, n$-re

$$\left|a_{ii}^{(1)}\right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}^{(1)}\right|.$$

A GE képleteit behelyettesítve

$$\left|a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i}\right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right|.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $|a_{11}| \neq 0$-val

$$|a_{ii}a_{11} - a_{i1}a_{1i}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}a_{11} - a_{i1}a_{1j}| \quad (i = 2, \ldots, n).$$

A kapott egyenlőtlenség bal oldalát lefelé, jobb oldalát felfelé becsüljük

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{i1}a_{1i}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} (|a_{ij}a_{11}| + |a_{i1}a_{1j}|) \quad (i = 2, \ldots, n).$$

A továbbiakban ezt fogjuk belátni.

A kapott egyenlőtlenség bal oldalát lefelé, jobb oldalát felfelé becsüljük

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{i1}a_{1i}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{ij}a_{11}| + |a_{i1}a_{1j}|\right) \quad (i = 2, \ldots, n).$$

A továbbiakban ezt fogjuk belátni. Az 1. sort a GE helyben hagyja, ezért itt továbbra is igaz, hogy $|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$ Szorozzuk $|a_{i1}| \neq 0$-val és vegyük külön az i. tagot:

$$|a_{11}a_{i1}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}a_{i1}|.$$

A kapott egyenlőtlenség bal oldalát lefelé, jobb oldalát felfelé becsüljük

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{i1}a_{1i}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{ij}a_{11}| + |a_{i1}a_{1j}|\right) \quad (i = 2, \ldots, n).$$

A továbbiakban ezt fogjuk belátni. Az 1. sort a GE helyben hagyja, ezért itt továbbra is igaz, hogy $|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$
Szorozzuk $|a_{i1}| \neq 0$-val és vegyük külön az i. tagot:

$$|a_{11}a_{i1}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}a_{i1}|.$$

Írjuk fel a szigorúan diagonálisan dominanciát az $i = 2, \ldots, n$-re
$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = |a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.
Szorozzuk $|a_{11}|$-gyel mindkét oldalt:

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{i1}a_{11}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}a_{11}|.$$

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2,j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2,j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

- Ha $a_{i1} = 0$, akkor ezen a soron nem változtat a GE, tehát a diag. dominancia nem változik.

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

- Ha $a_{i1} = 0$, akkor ezen a soron nem változtat a GE, tehát a diag. dominancia nem változik.
- $a_{11} \neq 0$, mivel ez feltétele a GE-nak.

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

- Ha $a_{i1} = 0$, akkor ezen a soron nem változtat a GE, tehát a diag. dominancia nem változik.
- $a_{11} \neq 0$, mivel ez feltétele a GE-nak.

Az oszlopokra vonatkozó bizonyítás analóg módon elvégezhető. $\square$

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett 3 átlóban $3n-2$ elem.

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett 3 átlóban $3n-2$ elem.
- Műveletigény: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ helyett $8n + \mathcal{O}(1)$.

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett 3 átlóban $3n - 2$ elem.
- Műveletigény: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ helyett $8n + \mathcal{O}(1)$.

Mivel a GE a sávszélességet megtartja, tridiagonális esetben a három átlón kívül mindig nulla lesz. A GE végén kapott U mátrix is csak két átlót tartalmaz, ezért a visszahelyettesítés i. egyenlete

$$a_{ii}^{(i-1)} x_i + a_{ii+1}^{(i-1)} x_{i+1} = a_{in+1}^{(i-1)}.$$

Ebből x_i-t kifejezve, új jelölésrendszerrel $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ alakú.

Jelölések: $A = \text{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Jelölések: $A = \text{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A LER 1. egyenlete:

$$\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 x_1 = -\gamma_1 x_2 + b_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} x_2 + \frac{b_1}{\alpha_1}$$

Jelölések: $A = \text{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A LER 1. egyenlete:

$$\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1 \quad \to \quad \alpha_1 x_1 = -\gamma_1 x_2 + b_1 \quad \to \quad x_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} x_2 + \frac{b_1}{\alpha_1}$$

Az $x_1 = f_1 x_2 + g_1$ alakot keresve $f_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ és $g_1 = \frac{b_1}{\alpha_1}$.

Tegyük fel, hogy $f_1, \dots, f_{i-1}$ és $g_1, \dots, g_{i-1}$, továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ $(k = 1, \dots, i-1)$ rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni.

Tegyük fel, hogy $f_1, \ldots, f_{i-1}$ és $g_1, \ldots, g_{i-1}$, továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ $(k = 1, \ldots, i-1)$ rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i. egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned} \beta_{i-1}x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\ \beta_{i-1}(f_{i-1}x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\ (\beta_{i-1}f_{i-1} + \alpha_i)x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i - \beta_{i-1}g_{i-1} \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $f_1, \ldots, f_{i-1}$ és $g_1, \ldots, g_{i-1}$, továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ $(k = 1, \ldots, i-1)$ rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i. egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned} \beta_{i-1}x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\ \beta_{i-1}(f_{i-1}x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\ (\beta_{i-1}f_{i-1} + \alpha_i)x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i - \beta_{i-1}g_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1})x_i &= -\gamma_i x_{i+1} + (b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}) \\ x_i &= -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}} x_{i+1} + \frac{b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}. \end{aligned}$$

Rövidített GE (progonka módszer)

Tegyük fel, hogy $f_1, \ldots, f_{i-1}$ és $g_1, \ldots, g_{i-1}$, továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ $(k = 1, \ldots, i-1)$ rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i. egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$
\begin{aligned}
\beta_{i-1}x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\
\beta_{i-1}(f_{i-1}x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\
(\beta_{i-1}f_{i-1} + \alpha_i)x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1})x_i &= -\gamma_i x_{i+1} + (b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}) \\
x_i &= -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}x_{i+1} + \frac{b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}.
\end{aligned}
$$

Innen $f_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i+\beta_{i-1}f_{i-1}}$ és $g_i = \frac{b_i-\beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i+\beta_{i-1}f_{i-1}}$.

Rövidített GE (progonka módszer)

Írjuk fel az n. egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

Írjuk fel az n. egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned} \beta_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n &= b_n \\ \beta_{n-1}(f_{n-1}x_n + g_{n-1}) + \alpha_n x_n &= b_n \\ (\beta_{n-1}f_{n-1} + \alpha_n)x_n &= b_n - \beta_{n-1}g_{n-1} \end{aligned}$$

Rövidített GE (progonka módszer)

Írjuk fel az n. egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned}\beta_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n &= b_n \\ \beta_{n-1}(f_{n-1}x_n + g_{n-1}) + \alpha_n x_n &= b_n \\ (\beta_{n-1}f_{n-1} + \alpha_n)x_n &= b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}\end{aligned}$$

$$x_n = \frac{b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1}f_{n-1}} =: g_n$$

$\square$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \dots, n-1: \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_i - \beta_{n-1} g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1} f_{n-1}}$$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \ldots, n-1: \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_i - \beta_{n-1} g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1} f_{n-1}}$$

2. lépés: $x_n := g_n$

$i = n-1, n-2, \ldots, 1: \quad x_i = f_i x_{i+1} + g_i$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \ldots, n-1: \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_i - \beta_{n-1} g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1} f_{n-1}}$$

2. lépés: $x_n := g_n$

$i = n-1, n-2, \ldots, 1: \quad x_i = f_i x_{i+1} + g_i$

Megj.: 3 művelettel több, de könnyebben megjegyezhető az algoritmus, ha f_n értékét is meghatározzuk.
Ekkor $x_{n+1} := 0$-val indítjuk a 2. lépést.

Műveletigény:

1. lépés (előre):
f_1, g_1 : 2 művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):
f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i. lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i-ben 1 db, g_i-ben 3 db, tehát $i = 2, \ldots, n-1$-re összesen $6(n-2)$ db.

g_n-ben 5 db művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):
f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i. lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i-ben 1 db, g_i-ben 3 db, tehát $i = 2, \dots, n-1$-re összesen $6(n-2)$ db.

g_n-ben 5 db művelet.

2. lépés (vissza):
$i = n-1, n-2, \dots, 1$-re $2(n-1)$ db művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):
f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i. lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i-ben 1 db, g_i-ben 3 db, tehát $i = 2, \ldots, n-1$-re összesen $6(n-2)$ db.

g_n-ben 5 db művelet.

2. lépés (vissza):
$i = n-1, n-2, \ldots, 1$-re $2(n-1)$ db művelet.

Összesen:
$2 + 6(n-2) + 5 + 2(n-1) = 8n - 7 = 8n + \mathcal{O}(1)$ művelet. $\square$

Definíció: vektorok „hossza”

Az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját” jelölje $\|.\|_2$.
A következőképpen számolható:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^\top x} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A *(vektor)norma* a „hossz”, „nagyság” általánosítása.

Definíció: vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$.

Definíció: vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$.

Ezek a vektornormák *axiómái*.

Állítás: skaláris szorzat által generált vektornorma

Ha adott az $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat, akkor az $f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ függvény *norma*. Jele: $\|x\|_2$.

Állítás: skaláris szorzat által generált vektornorma

Ha adott az $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat, akkor az $f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ függvény *norma*. Jele: $\|x\|_2$.

Biz.: Nem kell.
Ez a „hagyományos hossz”. $\square$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle =$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \ge 0$.

$$\begin{aligned} 0 \le \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle = \\ = \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y\rangle}_{\|y\|_2^2} \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle =$$
$$= \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y\rangle}_{\|y\|_2^2} \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

Diszkrimináns nempozitív: $\langle x, y\rangle^2 - \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \leq 0$,

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \ge 0$.

$$0 \le \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle =$$
$$= \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y\rangle}_{\|y\|_2^2} \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

Diszkrimináns nempozitív: $\langle x, y\rangle^2 - \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \le 0$, így

$$\langle x, y\rangle^2 \le \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2.$$

$\square$

Állítás: Gyakori vektornormák $(1, 2, \infty)$

A következő formulák vektornormákat **definiálnak** $\mathbb{R}^n$ felett:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (Manhattan-norma),
- $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ (Euklideszi-norma),
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$ (Csebisev-norma).

Biz.: Hf.

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok $1, 2, \infty$ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok $1, 2, \infty$ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\|x\|_1 = 3 + 4 = 7,\ \|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,\ \|x\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4.$

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok $1, 2, \infty$ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\|x\|_1 = 3 + 4 = 7$, $\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\|x\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4$.

$\|y\|_1 = 4 + |-8| + 1 = 13$, $\|y\|_2 = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{73}$,
$\|y\|_\infty = \max\{4, |-8|, 1\} = 8$.

Állítás: *p*-normák

A következő $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R},\ 1 \leq p < \infty).$$

Állítás: *p*-normák

A következő $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R},\ 1 \leq p < \infty).$$

Biz.: Nem kell. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkovszki-egyenlőtlenség. $\square$

Állítás: *p*-normák

A következő $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R},\ 1 \le p < \infty).$$

Biz.: Nem kell. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkovszki-egyenlőtlenség. $\square$

Megjegyzések:

- $0 \le p < 1$ esetén nem norma,
- $p_1 \le p_2 \Longrightarrow \|x\|_{p_1} \ge \|x\|_{p_2}$,
- Speciális esetek: $p = 1 \rightsquigarrow \|x\|_1$, $\quad p = 2 \rightsquigarrow \|x\|_2$,
- Sőt: $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Állítás: normák közötti egyenlőtlenségek

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$,
- sőt ezek alapján $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Állítás: normák közötti egyenlőtlenségek

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$,
- sőt ezek alapján $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Biz.: Nem kell. $\square$

(Az elsőbe könnyű belegondolni, a negyedikre láttunk példát.)

Definíció: ekvivalens normák

Az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ vektornormák *ekvivalensek*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$c_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \cdot \|x\|_b \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Definíció: ekvivalens normák

Az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ vektornormák *ekvivalensek*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$c_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \cdot \|x\|_b \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Állítás: végesdimenziós normák ekvivalenciája

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-en értelmezett vektornorma ekvivalens az Euklideszi-vektornormával. (Azaz adott végesdimenziós térben minden norma ekvivalens.)

Definíció: konvergencia vektornormában

Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

x^* a sorozat határértéke.

Definíció: konvergencia vektornormában

Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

x^* a sorozat határértéke.

Megj.: Mivel $\mathbb{R}^n$-en a vektornormák ekvivalensek, ezért ha egy sorozat konvergens az egyik vektornormában, akkor mindegyikben.

Ekvivalens átfogalmazások a konvergenciára:

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N_0 : \ \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

Ekvivalens átfogalmazások a konvergenciára:

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N_0 : \ \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N_0 : \ x_k \in K_\varepsilon(x^*).$$

Példák Matlab-ban

1. Példák p-normákra, egységgömbökre ($p = 1, 2, \infty, \dots$).
2. Példák pozitív definit mátrixokra,