

# Numerikus módszerek C

## 5. előadás: Mátrixnormák, a LER érzékenysége

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

**Definíció:** mátrixnorma

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  rögzített. Az  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

- ❶  $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❷  $\|A\| = 0 \iff A = 0,$
- ❸  $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❹  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❺  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}).$

**Definíció:** mátrixnorma

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  rögzített. Az  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

- ❶  $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❷  $\|A\| = 0 \iff A = 0,$
- ❸  $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❹  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❺  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}).$

Ugyanaz, mint a vektornormáknál, plusz: „szubmultiplikativitás”. Ezek a mátrixnormák axiómái.

**Definíció:** Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

**Állítás:** Frobenius-norma

A  $\|\cdot\|_F$  függvény valóban mátrixnorma.

**Definíció:** Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:



$$\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

**Állítás:** Frobenius-norma

A  $\|\cdot\|_F$  függvény valóban mátrixnorma.

**Biz.:** 1–4. következik a  $\|\cdot\|_2$  vektornorma tulajdonságaiból.  
Az 5. belátható CBS segítségével.



**Példa:** egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$



**Példa:** egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2 + 2^2} = 5$$

$$\|B\|_F = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 5^2} = 6$$



- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák**
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák



## **Definíció:** indukált norma, természetes mátrixnormák

Legyen  $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges vektornorma. Ekkor a

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

függvényt a  $\|\cdot\|_v$  *vektornorma által indukált mátrixnormának* hívjuk. Egy mátrixnormát *természetesnek* nevezünk, ha van olyan vektornorma, ami indukálja.

## **Tétel:** indukált normák

Az „indukált mátrixnormák” valóban mátrixnormák.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz.:** Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

- 1 Az  $\|A\|$  értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprénuma.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz.:** Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

- 1 Az  $\|A\|$  értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprénuma.
- 2 Ha  $A = 0$ , azaz nullmátrix, akkor  $\|Ax\|_v = 0$  minden  $x$  vektorra, így a szuprénum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprénum 0, akkor minden  $x$ -re  $Ax$ -nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha  $A$  nullmátrix.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz.:** Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

- 1 Az  $\|A\|$  értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprénuma.
- 2 Ha  $A = 0$ , azaz nullmátrix, akkor  $\|Ax\|_v = 0$  minden  $x$  vektorra, így a szuprénum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprénum 0, akkor minden  $x$ -re  $Ax$ -nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha  $A$  nullmátrix.

3

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

**Biz. (folytatás):**

4

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \\ &\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

**Biz. (folytatás):**

4

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|_v}{\|x\|_v} \stackrel{\text{}}{\leq} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \\ &\stackrel{\text{}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

5  $B = 0 \Rightarrow \|B\| = 0$ , valamint

$$A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow \|AB\| = 0.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, tehát igaz az állítás.



# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Ha  $B \neq 0$ , akkor

$$\begin{aligned}\|A \cdot B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0, Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \\ &\leq \sup_{Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

Meggondolható, hogy a  $Bx \neq 0$  feltétel nem változtatja meg a szupréмум értékét; közben bevezettük az  $y := Bx$  jelölést.  $\square$

## Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v=1} \|Ay\|_v.$$

## Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v=1} \|Ay\|_v.$$

- A sup helyett max is írható.

## Megjegyzések:

- Átfogalmazás:



$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v=1} \|Ay\|_v.$$

- A sup helyett max is írható.
- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \implies \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \implies \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v.$$

Sőt:  $\|A\|$  a legkisebb ilyen felső korlát.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## **Definíció:** illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## **Definíció:** illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

## **Állítás:** természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## **Definíció:** illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

## **Állítás:** természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

**Biz.:** Láttuk az előbb. Az  $x = 0$  eset meggondolandó.



# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?



# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

**Tétel:** Nevezetes mátrixnormák  $(1, 2, \infty)$

A  $\|\cdot\|_p$  ( $p = 1, 2, \infty$ ) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  (oszlopnorma),

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

**Tétel:** Nevezetes mátrixnormák  $(1, 2, \infty)$

A  $\|\cdot\|_p$  ( $p = 1, 2, \infty$ ) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  (sornorma),

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

**Tétel:** Nevezetes mátrixnormák  $(1, 2, \infty)$

A  $\|\cdot\|_p$  ( $p = 1, 2, \infty$ ) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$  (spektrálnorma).

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

**Tétel:** Nevezetes mátrixnormák  $(1, 2, \infty)$

A  $\|\cdot\|_p$  ( $p = 1, 2, \infty$ ) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$  (spektrálnorma).

**Jel.:**  $\lambda_i(M)$ : az  $M$  mátrix  $i$ -edik sajátértéke ( $Mv = \lambda v$ ,  $v \neq 0$ ).

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## A bizonyítás „dallama”:

- Az adott  $f(A)$  értékre:  $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Van olyan  $x$  vektor, hogy  $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Ekkor az  $f(A)$  érték, tényleg a  $\|\cdot\|_v$  vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így:  $\|A\|_v$ .

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## A bizonyítás „dallama”:

- Az adott  $f(A)$  értékre:  $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Van olyan  $x$  vektor, hogy  $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Ekkor az  $f(A)$  érték, tényleg a  $\|\cdot\|_v$  vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így:  $\|A\|_v$ .

## Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## A bizonyítás „dallama”:

- Az adott  $f(A)$  értékre:  $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Van olyan  $x$  vektor, hogy  $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Ekkor az  $f(A)$  érték, tényleg a  $\|\cdot\|_v$  vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így:  $\|A\|_v$ .

## Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## A bizonyítás „dallama”:

- Az adott  $f(A)$  értékre:  $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Van olyan  $x$  vektor, hogy  $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Ekkor az  $f(A)$  érték, tényleg a  $\|\cdot\|_v$  vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így:  $\|A\|_v$ .

## Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( |x_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right) \leq \underbrace{\left( \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)} \cdot \|x\|_1.\end{aligned}$$



# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## A bizonyítás „dallama”:

- Az adott  $f(A)$  értékre:  $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Van olyan  $x$  vektor, hogy  $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Ekkor az  $f(A)$  érték, tényleg a  $\|\cdot\|_v$  vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így:  $\|A\|_v$ .

## Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( |x_j| \cdot \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq \left( \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \|x\|_1.\end{aligned}$$

Legyen  $x = e_k$ , ahol a  $k$ -adik oszlopösszeg maximális. Ekkor

$$\|Ae_k\|_1 = \underbrace{\dots}_{1} \underbrace{\|e_k\|_1}_{1}.$$

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Bizonyítás  $\|\cdot\|_\infty$  esetén:**

$$\text{Állítás: } \|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint  $\|\cdot\|_1$  esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az

$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel. . .

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Bizonyítás  $\|\cdot\|_\infty$  esetén:**



$$\text{Állítás: } \|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint  $\|\cdot\|_1$  esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az

$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$



vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel. . .

**Bizonyítás  $\|\cdot\|_2$  esetén:**

$$\text{Állítás: } \|A\|_2 = \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}.$$

- Előbb belátjuk, hogy a sajátértékek nemnegatívak.
- A becslés a diagonalizálás alapján adódik.
- Válasszuk a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektort az egyenlőséghez.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Először belátjuk, hogy  $A^T A$  szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz  $A^T A$  pozitív szemidefinit).

- $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ , azaz  $A^T A$  szimmetrikus, vagyis  $A^T A$  sajátértékei valósak.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Először belátjuk, hogy  $A^T A$  szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz  $A^T A$  pozitív szemidefinit).

- $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ , azaz  $A^T A$  szimmetrikus, vagyis  $A^T A$  sajátértékei valósak.
- Legyen  $y \neq 0$  az  $A^T A$  mátrix  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektora, azaz

$$A^T A y = \lambda \cdot y.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az  $y^T$  vektorral:

$$y^T A^T A y = \lambda \cdot y^T y.$$

Innen

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Először belátjuk, hogy  $A^T A$  szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz  $A^T A$  pozitív szemidefinit).

- $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ , azaz  $A^T A$  szimmetrikus, vagyis  $A^T A$  sajátértékei valósak.
- Legyen  $y \neq 0$  az  $A^T A$  mátrix  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektora, azaz

$$A^T A y = \lambda \cdot y.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az  $y^T$  vektorral:

$$y^T A^T A y = \lambda \cdot y^T y.$$

Innen

$$\lambda = \frac{y^T A^T A y}{y^T y} = \frac{(Ay)^T (Ay)}{y^T y} = \frac{\|Ay\|_2^2}{\|y\|_2^2} \geq 0.$$

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve  $Ax$  normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy  $A^T A$  szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik  $U$  ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^T A = U^T D U \quad \Leftrightarrow \quad U A^T A U^T = D$$

úgy, hogy a diagonálisban  $A^T A$  sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az  $y = Ux$  jelölést.

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = x^T U^T D U x = (Ux)^T D (Ux) \\ &= y^T D y = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^n d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A) \cdot \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve  $Ax$  normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy  $A^T A$  szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik  $U$  ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^T A = U^T D U \quad \Leftrightarrow \quad U A^T A U^T = D$$

úgy, hogy a diagonálisban  $A^T A$  sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az  $y = Ux$  jelölést.

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = x^T U^T D U x = (Ux)^T D (Ux) \\ &= y^T D y = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^n d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A) \cdot \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy  $\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2$ .



# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2$ , ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \dots \leq \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2.$$

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2$ , ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \dots \leq \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2.$$

$x \neq 0$  esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan  $x \neq 0$  vektor, amire a szuprénum felvétel.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2$ , ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \dots \leq \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2.$$

$x \neq 0$  esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan  $x \neq 0$  vektor, amire a szuprémum felvételik.

Legyen  $\lambda_m = \max \lambda_i(A^\top A)$  és  $v_m \neq 0$ ,  $\|v_m\|_2 = 1$  a hozzá tartozó sajátvektor.

$$\|Av_m\|_2^2 = (Av_m)^\top (Av_m) = v_m^\top \underbrace{A^\top A}_{\lambda_m \cdot v_m} v_m = \lambda_m \cdot \underbrace{v_m^\top v_m}_{=1} = \lambda_m.$$

**Definíció:** spektrálsugár

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix *spektrálsugara*  $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$ .

**Definíció:** spektrálsugár

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix *spektrálsugara*  $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$ .

**Megj.:** A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

**Definíció:** spektrálsugár

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix *spektrálsugara*  $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$ .

**Megj.:** A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

**Állítás:**

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

**Definíció:** spektrálsugár

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix *spektrálsugara*  $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$ .

**Megj.:** A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

**Állítás:**

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

**Biz.:** Trivi.

## Állítás:

Ha  $A$  normális ( $A^*A = AA^*$ ), akkor  $\|A\|_2 = \varrho(A)$ .  
(Spec.: ha  $A$  önadjungált, akkor normális.)



## Állítás:

Ha  $A$  normális ( $A^*A = AA^*$ ), akkor  $\|A\|_2 = \varrho(A)$ .  
(Spec.: ha  $A$  önadjungált, akkor normális.)

**Biz.:** Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátrixok esetén létezik  $U$  unitér hasonlósági transzformáció, mellyel  $A$  diagonális alakra hozható.

$$\begin{aligned}U^*AU &= D = \text{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^* \\A^*A &= (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^* \\ \lambda_i(A^*A) &= \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2 \\ \varrho(A^*A) &= \varrho(A)^2\end{aligned}$$

## Állítás:



Ha  $A$  normális ( $A^*A = AA^*$ ), akkor  $\|A\|_2 = \varrho(A)$ .  
(Spec.: ha  $A$  önadjungált, akkor normális.)

**Biz.:** Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátrixok esetén létezik  $U$  unitér hasonlósági transzformáció, mellyel  $A$  diagonális alakra hozható.

$$\begin{aligned}U^*AU &= D = \text{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^* \\A^*A &= (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^* \\ \lambda_i(A^*A) &= \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2 \\ \varrho(A^*A) &= \varrho(A)^2\end{aligned}$$

Innen  $\|A\|_2 = \varrho(A^*A)^{1/2} = \varrho(A)$ .

**Példa:**  $\|\cdot\|_1$  és  $\|\cdot\|_\infty$  mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix  $\|\cdot\|_1$  és  $\|\cdot\|_\infty$  mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

**Példa:**  $\|\cdot\|_1$  és  $\|\cdot\|_\infty$  mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix  $\|\cdot\|_1$  és  $\|\cdot\|_\infty$  mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{1 + 2, |-4| + 2\} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + |-4|, 2 + 2\} = 5$$

**Példa:**  $\|\cdot\|_2$  mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix  $\|\cdot\|_2$  mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

**Példa:**  $\|\cdot\|_2$  mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix  $\|\cdot\|_2$  mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix},$$

Szerencsénkre látjuk a sajátértékeit...

$$\|A\|_2 = \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A) \right)^{1/2} = \sqrt{\max\{5, 20\}} = \sqrt{20} \approx 4.4721.$$

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai**
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

## Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.



## Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.

**Biz.:** Tekintsük az  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  egységmátrix normáját.

- Indukált mátrixnormák esetén  $\|I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v} = 1$ .
- Másrészt  $\|I\|_F = \sqrt{n}$ .
- Tehát nincs olyan vektornorma, ami a Frobenius-normát indukálná (ha  $n > 1$ ).



**Állítás:** spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

**Állítás:** spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

**Biz.:** Belátjuk, hogy  $|\lambda| \leq \|A\|$ .

(Legyen  $\lambda$  tetszőleges sajátérték és  $v \neq 0$  a hozzá tartozó sajátvektor.)

$$Av = \lambda v$$

$$Avv^T = \lambda vv^T$$

$$\|A\| \cdot \|vv^T\| \geq \|Avv^T\| = \|\lambda vv^T\| = |\lambda| \cdot \|vv^T\|$$

Leosztva  $\|vv^T\| \neq 0$ -val  $\|A\| \geq |\lambda|$ .



## Feladatok gyakorlatra

Igazoljuk a következő állításokat.

**a** Ha  $Q$  ortogonális (unitér), akkor

- $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ ,
- $\|Q\|_2 = 1$ ,
- $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$ .

## Feladatok gyakorlatra

- b**  $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^\top A)$ , ahol  $\text{tr}(B) := \sum_{k=1}^n b_{kk}$  a mátrix *nyoma*.
- c** Ha  $Q$  ortogonális (unitér), akkor  $\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$ .
- d**  $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A)$ .
- e**  $\|\cdot\|_F$  és  $\|\cdot\|_2$  ekvivalens mátrixnormák.
- f** A Frobenius-norma illeszkedik a kettes vektornormához.

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma**
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

## **Definíció:** mátrixok kondíciószáma

Adott  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertálható mátrix és  $\|\cdot\|$  mátrixnorma esetén a  $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  mennyiséget az  $A$  mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha  $\kappa(A)$ . [kappa])

## Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertálható mátrix és  $\|\cdot\|$  mátrixnorma esetén a  $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  mennyiséget az  $A$  mátrix *kondíciós számának* nevezzük. (Jele néha  $\kappa(A)$ . [kappa])

## Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.



## Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertálható mátrix és  $\|\cdot\|$  mátrixnorma esetén a  $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  mennyiséget az  $A$  mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha  $\kappa(A)$ . [kappa])

## Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.
- Értéke függ a norma választásától.  
(Pl.  $\text{cond}_1(A)$ ,  $\text{cond}_2(A)$ ,  $\dots$ )

## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén  $\text{cond}(A) \geq 1$ .

## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén  $\text{cond}(A) \geq 1$ .
- b  $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$ ,  $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$ .

## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén  $\text{cond}(A) \geq 1$ .
- b  $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$ ,  $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$ .
- c Ha  $Q$  ortogonális, akkor  $\text{cond}_2(Q) = 1$ .

## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén  $\text{cond}(A) \geq 1$ .
- b  $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$ ,  $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$ .
- c Ha  $Q$  ortogonális, akkor  $\text{cond}_2(Q) = 1$ .

**Biz.:**

a  $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$

## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a Indukált mátrixnorma esetén  $\text{cond}(A) \geq 1$ .
- b  $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$ ,  $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$ .
- c Ha  $Q$  ortogonális, akkor  $\text{cond}_2(Q) = 1$ .

**Biz.:**

- a  $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$ .
- b 
$$\begin{aligned} \text{cond}(cA) &= \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| = \\ &= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A). \end{aligned}$$

## Állítás: a kondíciósza tulajdonságai – 1. rész

- a** Indukált mátrixnorma esetén  $\text{cond}(A) \geq 1$ .
- b**  $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$ ,  $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$ .
- c** Ha  $Q$  ortogonális, akkor  $\text{cond}_2(Q) = 1$ .

**Biz.:**

- a**  $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$ .
- b**  $\text{cond}(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| =$   
 $= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$ .
- c**  $\|Q\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T Q^T Q x}}{\sqrt{x^T x}} = 1$   
 $\|Q^{-1}\|_2 = \|Q^T\|_2 = 1, \quad \text{cond}_2(Q) = 1$



## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

d Ha  $A$  szimmetrikus, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .



## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d Ha  $A$  szimmetrikus, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .
- e Ha  $A$  szimm., pozitív definit, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$ .

## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha  $A$  szimmetrikus, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .
- e** Ha  $A$  szimm., pozitív definit, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$ .
- f** Ha  $A$  invertálható, akkor  $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .

## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha  $A$  szimmetrikus, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .
- e** Ha  $A$  szimm., pozitív definit, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$ .
- f** Ha  $A$  invertálható, akkor  $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .

**Biz.:**

**d** Eml.:  $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$ .

De  $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$ , így  $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$ .

## Állítás: a kondíciósza tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha  $A$  szimmetrikus, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .
- e** Ha  $A$  szimm., pozitív definit, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$ .
- f** Ha  $A$  invertálható, akkor  $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .

**Biz.:**

- d** Eml.:  $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$ .  
 De  $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$ , így  $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$ .  
 Az inverzre:  $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$ .

## Állítás: a kondíciósza tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha  $A$  szimmetrikus, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .
- e** Ha  $A$  szimm., pozitív definit, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$ .
- f** Ha  $A$  invertálható, akkor  $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .

**Biz.:**

- d** Eml.:  $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$ .  
 De  $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$ , így  $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$ .  
 Az inverzre:  $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$ .
- e** A pozitív definitség miatt nem kell abszolút érték.

## Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d** Ha  $A$  szimmetrikus, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .
- e** Ha  $A$  szimm., pozitív definit, akkor  $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$ .
- f** Ha  $A$  invertálható, akkor  $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$ .

**Biz.:**

- d** Eml.:  $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$ .  
De  $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$ , így  $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$ .  
Az inverzre:  $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$ .
- e** A pozitív definitség miatt nem kell abszolút érték.
- f**  $\|A\| \geq \varrho(A) = \max |\lambda_i(A)|$ ,  $\|A^{-1}\| \geq \varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$ .



- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása**
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!  
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)



$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!  
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

## 1 Eredeti:

adott  $A$  és  $b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x$ .

$$Ax = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!  
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

**① Eredeti:**

adott  $A$  és  $b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x$ .

$$Ax = b$$

**② Módosult:**

adott  $A$  és  $b + \Delta b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x + \Delta x$ .

$$A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!  
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

**① Eredeti:**

adott  $A$  és  $b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x$ .

$$Ax = b$$

**② Módosult:**

adott  $A$  és  $b + \Delta b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x + \Delta x$ .

$$A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

## Példa:

### ① Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Példa:

### 1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

## Példa:

### 1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

### 3

A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

## Példa:

### 1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

### 3

A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

### 4 Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a jobb oldal:

$$\delta b := \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 9.4959e - 004.$$

- Emiatt mennyire változik a megoldás:  $\delta x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 1.1732.$
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát:  $\frac{\delta x}{\delta b} = 1235.5.$
- $\text{cond}(A) = 1623$



## **Tétel:** LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha  $A$  invertálható és  $b \neq 0$ , akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

## **Tétel:** LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha  $A$  invertálható és  $b \neq 0$ , akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

**Biz.:**

- ①  $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$ -ből vonjuk ki az  $Ax = b$  LER-t, így  $A\Delta x = \Delta b$ .

## Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha  $A$  invertálható és  $b \neq 0$ , akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

**Biz.:**

- 1  $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$ -ből vonjuk ki az  $Ax = b$  LER-t, így  $A\Delta x = \Delta b$ .
- 2 Viszont  $x = A^{-1}b$  és  $\Delta x = A^{-1}\Delta b$  is teljesül.

**Biz. (folytatás):**

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

**Biz. (folytatás):**

- ③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

- ④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.  
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$\text{a} \quad \|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

**Biz. (folytatás):**

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.  
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

**a**  $\|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$

**b**  $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$

**Biz. (folytatás):**

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.  
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

$$\text{a} \quad \|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$$

$$\text{b} \quad \|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$$

$$\text{c} \quad \|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$$

**Biz. (folytatás):**

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.  
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

**a**  $\|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$

**b**  $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$

**c**  $\|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$

**d**  $\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$



**Biz. (folytatás):**

③ Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \quad x = A^{-1}b, \quad \Delta b = A\Delta x, \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

④ Bármely egyenlőségénél vehetjük a normát.  
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)

**a**  $\|b\| = \|Ax\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$

**b**  $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \Rightarrow \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$

**c**  $\|x\| = \|A^{-1}b\| \Rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|,$

**d**  $\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$

⑤ Az alsó becslés (b) és (c) alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

**Biz. (folytatás):**

- ⑥ A felső becslés (a)  $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$  és (d)  $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$  alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$



- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása**
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!  
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!  
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

## 1 Eredeti:

adott  $A$  és  $b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x$ .

$$Ax = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!  
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

**1 Eredeti:**

adott  $A$  és  $b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x$ .

$$Ax = b$$

**2 Módosult:**

adott  $A + \Delta A$  és  $b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x + \Delta x$ .

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!  
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

**① Eredeti:**

adott  $A$  és  $b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x$ .

$$Ax = b$$

**② Módosult:**

adott  $A + \Delta A$  és  $b$ , kiszámíthatjuk a megoldást:  $x + \Delta x$ .

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

## Példa:

### 1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Példa:

### 1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

## Példa:

### 1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

### 3

A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$

## Példa:

### 1 Eredeti:

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2 Módosult:

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

### 3

A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$

### 4 Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a mátrix:  $\delta A := \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 7.8495e - 004$ .
- Emiatt mennyire változik a megoldás:  $\delta x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 3.4507$ .
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát:  $\frac{\delta x}{\delta A} = 4396.1$ .
- $\text{cond}(A) = 1623$

## **Tétel:** LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha  $A$  invertálható,  $b \neq 0$  és  $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ , akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

## **Tétel:** LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha  $A$  invertálható,  $b \neq 0$  és  $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ , akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

## **Lemma**

Ha  $\|M\| < 1$ , akkor  $(I + M)$  invertálható és indukált mátrixnormában

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

## **Tétel:** LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha  $A$  invertálható,  $b \neq 0$  és  $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ , akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

## **Lemma**

Ha  $\|M\| < 1$ , akkor  $(I + M)$  invertálható és indukált mátrixnormában

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

**Megj:** A lemmához kell az indukált mátrixnorma.

## Biz. lemma:

- Az  $I + M$  mátrix tényleg invertálható, hiszen  $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$ , azaz  $M$  sajátértékeire:  $|\lambda_i(M)| < 1$ , vagyis az egységsugarú körön belül helyezkednek el. Meggondolható, hogy  $I + M$  sajátvektorai ugyanazok, mint  $M$  sajátvektorai, a sajátértékekre pedig  $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$  teljesül, így  $I + M$  minden sajátértéke pozitív, következésképpen  $I + M$  invertálható.



## Biz. lemma:

- Az  $I + M$  mátrix tényleg invertálható, hiszen  $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$ , azaz  $M$  sajátértékeire:  $|\lambda_i(M)| < 1$ , vagyis az egységsugarú körön belül helyezkednek el. Meggondolható, hogy  $I + M$  sajátvektorai ugyanazok, mint  $M$  sajátvektorai, a sajátértékekre pedig  $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$  teljesül, így  $I + M$  minden sajátértéke pozitív, következésképpen  $I + M$  invertálható.
- Vizsgáljuk most  $I + M$  inverzét, majd ennek normáját.

$$\begin{aligned}(I + M)^{-1} &= I \cdot (I + M)^{-1} = (I + M - M)(I + M)^{-1} = \\ &= I - M \cdot (I + M)^{-1},\end{aligned}$$

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \|I\| + \|M\| \cdot \|(I + M)^{-1}\|,$$

$$(1 - \|M\|) \cdot \|(I + M)^{-1}\| \leq \|I\| = 1 \Rightarrow \|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

**Biz. tétel:** Az  $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$  LER-ből  $Ax = b$ -t kivonva  $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$ , másképp

$$(A + \Delta A) \cdot \Delta x = -\Delta A \cdot x,$$

$$A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x = -\Delta A \cdot x.$$

**Biz. tétel:** Az  $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$  LER-ből  $Ax = b$ -t kivonva  $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$ , másképp

$$\begin{aligned}(A + \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x, \\ A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x.\end{aligned}$$

Mivel feltevésünk szerint  $\|A^{-1} \cdot \Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$ , a lemma alapján mondhatjuk, hogy  $(I + A^{-1} \cdot \Delta A)$  invertálható.

$$\Delta x = -(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1} A^{-1} \Delta A \cdot x$$

**Biz. tétel:** Az  $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$  LER-ből  $Ax = b$ -t kivonva  $(A + \Delta A) \cdot \Delta x + \Delta A \cdot x = 0$ , másképp

$$\begin{aligned}(A + \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x, \\ A \cdot (I + A^{-1} \cdot \Delta A) \cdot \Delta x &= -\Delta A \cdot x.\end{aligned}$$

Mivel feltevésünk szerint  $\|A^{-1} \cdot \Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$ , a lemma alapján mondhatjuk, hogy  $(I + A^{-1} \cdot \Delta A)$  invertálható.

$$\Delta x = -(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1} A^{-1} \Delta A \cdot x$$

Az inverz normájára adott becslésünket is felhasználva:

$$\begin{aligned}\|\Delta x\| &\leq \|(I + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x\| \\ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1} \cdot \Delta A\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.\end{aligned}$$

**Tétel átfogalmazás:**

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

## Tétel átfogalmazás:

$$\begin{aligned} & \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \\ & = \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \end{aligned}$$

## Tétel átfogalmazás:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \\
 &= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \\
 &= \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.
 \end{aligned}$$

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása**
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák



# Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

# Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

# $LU$ -felbontás hatása a LER érzékenységére

## Példa

Hogyan befolyásolja az  $LU$ -felbontás a feladat kondicionáltságát?  
Mutassuk meg, hogy nem javul.

## Példa

Hogyan befolyásolja az  $LU$ -felbontás a feladat kondicionáltságát?  
Mutassuk meg, hogy nem javul.

**Biz.:**

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$

## Példa

Hogyan befolyásolja az  $LU$ -felbontás a feladat kondicionáltságát?  
Mutassuk meg, hogy nem javul.

**Biz.:**

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$

## Példa

Hogyan befolyásolja az  $LU$ -felbontás a feladat kondicionáltságát?  
Mutassuk meg, hogy nem javul.

**Biz.:**

- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$

## Példa

Hogyan befolyásolja az  $LU$ -felbontás a feladat kondicionáltságát?  
Mutassuk meg, hogy nem javul.

**Biz.:**

- $Ax = b \Rightarrow L U x = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}(A) \leq \text{cond}(L) \cdot \text{cond}(U)$



## Példa

Hogyan befolyásolja az  $LU$ -felbontás a feladat kondicionáltságát?  
Mutassuk meg, hogy nem javul.

**Biz.:**

- $Ax = b \Rightarrow L U x = b \Rightarrow Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \Rightarrow \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}(A) \leq \text{cond}(L) \cdot \text{cond}(U)$  □

Sőt előfordulhat, hogy  $\text{cond}(L), \text{cond}(U) \gg \text{cond}(A)$ , azaz bizonyos mátrixok esetén előfordulhat, hogy a Gauss-elimináció nagyon pontatlan eredményt ad.



## Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

## Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

## Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

## Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a  $QR$ -felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

## Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Ez is mutatja a  $QR$ - és Cholesky-felbontáson alapuló módszerek stabilitását.

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék**
- 9 Matlab példák

A kondíciós szám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységet jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységet jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

**Definíció:** reziduum- vagy maradékvektor

Legyen  $\tilde{x}$  az  $Ax = b$  LER egy közelítő megoldása. Ekkor az  $r := b - A\tilde{x}$  vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

### **Definíció:** reziduum- vagy maradékvektor

Legyen  $\tilde{x}$  az  $Ax = b$  LER egy közelítő megoldása. Ekkor az  $r := b - A\tilde{x}$  vektort **reziduum- vagy maradékvektornak** nevezzük.

Látjuk, hogy a reziduum vektor könnyen számolható, alkalmazható direkt- és iterációs módszerek esetén is. Az utóbbi esetben leállási feltétel is készíthető a segítségével.

## Definíció: relatív maradék

- Az  $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$  ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.



## Definíció: relatív maradék

- Az  $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$  ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az  $\tilde{x}$  közelítő megoldáshoz tartozó  $(A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = b$  LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz  $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$  kicsi.

## Definíció: relatív maradék

- Az  $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|}$  ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján **a módszer stabil**, ha az  $\tilde{x}$  közelítő megoldáshoz tartozó  $(A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = b$  LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz  $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$  **kicsi**.

$\eta$  értéke a közelítő megoldás ismeretében könnyen számolható. A továbbiakban  $\Delta A$  ismerete nélkül szeretnénk becsléseket adni a nem ismert  $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$  mennyiségre.

**Tétel:** becslés a relatív maradékra

Ha  $A$  invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha  $\eta$  nagy, akkor  $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$  is nagy.

**Tétel:** becslés a relatív maradékra

Ha  $A$  invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha  $\eta$  nagy, akkor  $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$  is nagy.

**Biz.:**  $b = (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = A \cdot \tilde{x} + \Delta A \cdot \tilde{x}$ , innen  
 $b - A \cdot \tilde{x} = r = \Delta A \cdot \tilde{x}$  , a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|.$$

**Tétel:** becslés a relatív maradékra

Ha  $A$  invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha  $\eta$  nagy, akkor  $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$  is nagy.



**Biz.:**  $b = (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} = A \cdot \tilde{x} + \Delta A \cdot \tilde{x}$ , innen  
 $b - A \cdot \tilde{x} = r = \Delta A \cdot \tilde{x}$  , a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|.$$

A relatív maradékot becslve

$$\eta = \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\| \cdot \|\tilde{x}\|}{\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

**Tétel:** relatív maradék 2-es normában

Ha  $A$  invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

**Tétel:** relatív maradék 2-es normában

Ha  $A$  invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

**Biz.:** Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\tilde{x}^\top}{\tilde{x}^\top \tilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis  $\tilde{x}$  egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása.

**Tétel:** relatív maradék 2-es normában

Ha  $A$  invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

**Biz.:** Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\tilde{x}^T}{\tilde{x}^T\tilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis  $\tilde{x}$  egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása. Végezzük el a behelyettesítést:

$$\begin{aligned} (A + \Delta A) \cdot \tilde{x} &= \left( A + \frac{r\tilde{x}^T}{\tilde{x}^T\tilde{x}} \right) \cdot \tilde{x} = \\ &= A\tilde{x} + \frac{r\tilde{x}^T\tilde{x}}{\tilde{x}^T\tilde{x}} = A\tilde{x} + (b - A\tilde{x}) = b. \end{aligned}$$



**Biz.: folyt.** Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\tilde{x}^T \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

**Biz.: folyt.** Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\tilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becsülve

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\left\| r\tilde{x}^\top \right\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \|\tilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2} = \eta_2.$$



**Biz.: folyt.** Felhasználjuk, hogy

$$\|r\tilde{x}^\top\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\tilde{x}\|_2.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becsülve

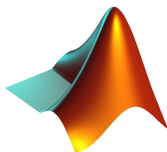
$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\|r\tilde{x}^\top\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \|\tilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \|\tilde{x}\|_2} = \eta_2.$$



Ha  $\eta_2$  kicsi, akkor  $\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$  is kicsi.

Ha  $\eta_2 < \varepsilon_1$ , akkor ebben az adott aritmetikában pontosabb megoldás nem adható.

- 1 Mátrixnormák
- 2 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 3 Mátrixnormák további tulajdonságai
- 4 Mátrixok kondíciószáma
- 5 LER vektorának megváltozása
- 6 LER mátrixának megváltozása
- 7 Egyesített tétel, szorzatfelbontások hatása
- 8 Relatív maradék
- 9 Matlab példák**



- 1 Indukált mátrixnorma szemléltetése  $\mathbb{R}^2$ ,  $p = 2$  esetén.
- 2 Indukált mátrixnormák közelítő számítása tetszőleges  $\mathbb{R}^n$  és  $p$  esetén ( $m = 100, \dots, 1000$  vektor próbájával).
- 3 Egy perturbált LER (jobboldala változik, mátrixa a Hilbert mátrix).
- 4  $\text{cond}_2(H_n)$  változása a méret függvényében.
- 5  $\text{cond}_2(V_n)$  változása a méret függvényében.
- 6  $\text{cond}_2(\text{tridiag}(-1, 2, -1))$  változása a méret függvényében.
- 7  $\text{cond}_2(\text{rand}_n)$  változása a méret függvényében.

## 1. Példa:

Jelöljük  $H_5$ -tel az  $5 \times 5$ -ös Hilbert mátrixot.

$$H_5 = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$$

# 1. Példa:

## ① Eredeti LER:

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 1. Példa:

## ① Eredeti LER:

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## ② Módosult LER:

$$H_5 \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 + 1/1000 \end{bmatrix}$$



A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- 1  $\delta b = 0.0029$ : a jobboldal relatív hibája

A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- ❶  $\delta b = 0.0029$ : a jobboldal relatív hibája
- ❷  $\delta x = 114.4469$  a megoldás relatív hibája

A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- ❶  $\delta b = 0.0029$ : a jobboldal relatív hibája
- ❷  $\delta x = 114.4469$  a megoldás relatív hibája
- ❸ a két mennyiség hányadosa:  $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$

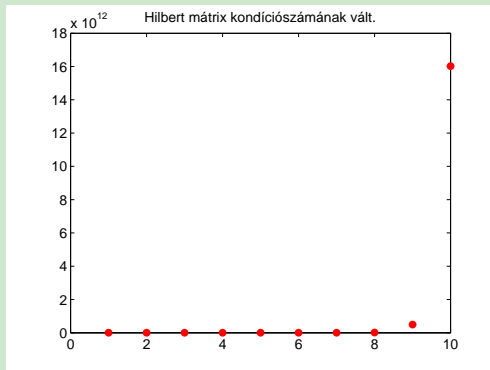
A módosult LER megoldása:  $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

- ❶  $\delta b = 0.0029$ : a jobboldal relatív hibája
- ❷  $\delta x = 114.4469$  a megoldás relatív hibája
- ❸ a két mennyiség hányadosa:  $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$
- ❹ ennek becslése a tétellel:  $\text{cond}_2(H_5) = 4.7661e + 005$ .

## 2. Példa:

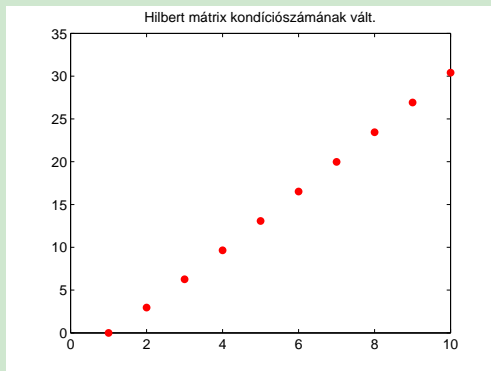
A Hilbert mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

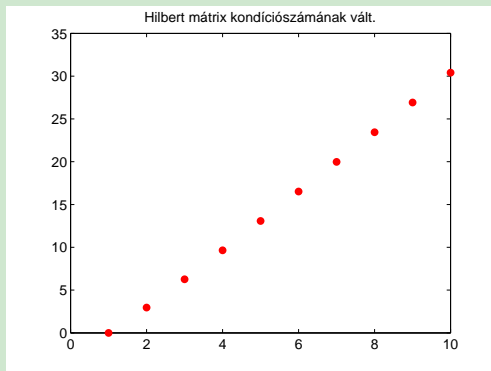
## 2. Példa:

Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



## 2. Példa:

Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!

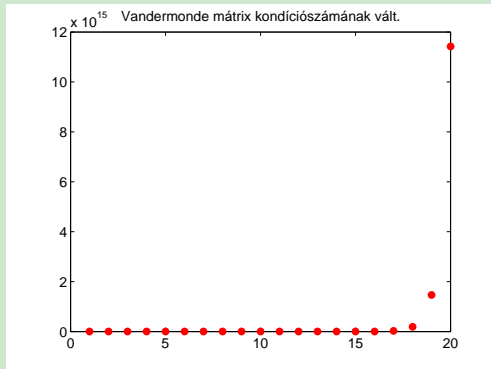


$$\text{cond}_2(H_n) \approx \exp(3.1n) \approx 22^n$$



## 3. Példa:

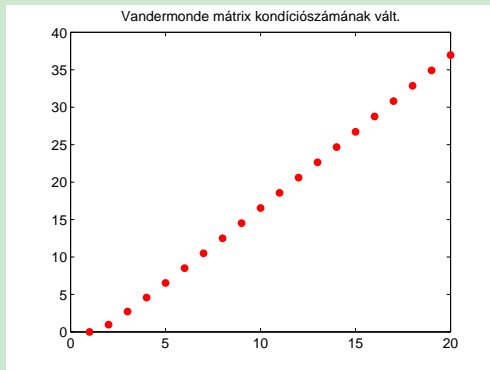
A  $[0, 1]$  intervallum egyenletes felosztású pontjaiból képzett Vandermonde mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

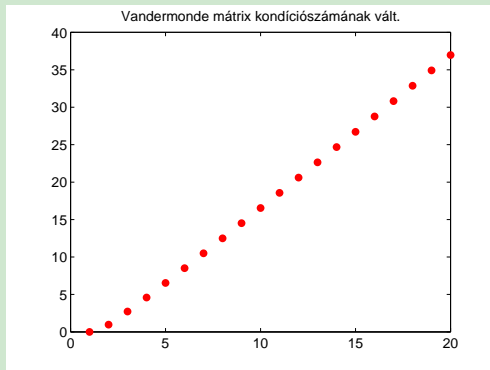
## 3. Példa:

Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!



## 3. Példa:

Vegyük a kondíciószaok logaritmusát!

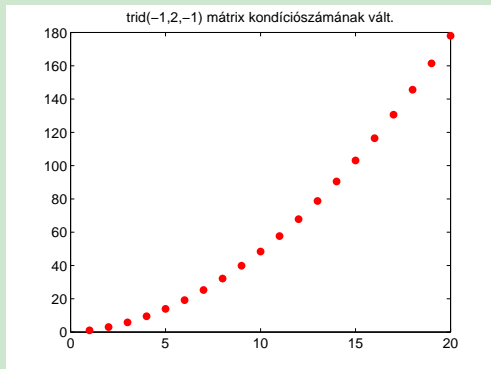


$$\text{cond}_2(V_n) \approx \exp(1.85n) \approx (6.4)^n$$

# A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciószáma

## 4. Példa:

A tridiag  $(-1, 2, -1)$  mátrix kondíciószámanak változását vizsgáljuk:

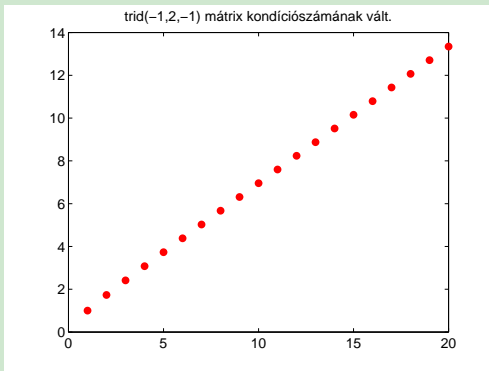


Az ábra alapján sejthető, hogy a növekedés a méret négyzetével arányos.

# A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciósza

## 4. Példa:

Vegyük a kondíciósza

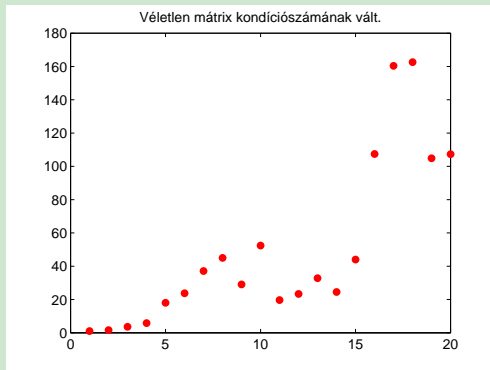


Elméletileg igazolható, hogy

$$\text{cond}_2(\text{tridiag}(-1, 2, -1)) \approx \left( \frac{2(n+1)}{\pi} \right)^2.$$

## 5. Példa:

Véletlen mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Az előző mátrixokhoz képest egész kicsi értékeket kaptunk.