Numerikus módszerek C

3. előadás: A GE alkalmazásai, a GE kicsit másképp

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

- LER megoldása (láttuk példán is)
- Determináns meghatározása: mivel a GE lépései determináns tartók, ezért

$$\det(A) = \det(\Delta\text{alak}) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k-1)}$$

  Vigyázzunk : ha sort vagy oszlopot cserélünk, a determináns értéke változik.
- Több jobb oldallal (b) megoldás: lehet egyszerre, így a mátrixon csak egyszer eliminálunk.

$$[A|b_1|b_2|b_3] \to \text{GE} \to \text{visszahely} \to [I|x_1|x_2|x_3]$$

- Mátrix inverzének meghatározása az $A \cdot X = I$ mátrixegyenlet megoldását jelenti.

$$A \cdot [x_1 | \dots | x_n] = [e_1 | \dots | e_n] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} Ax_1 &= e_1 \\ \dots & \\ Ax_n &= e_n \end{aligned}$$

Visszavezettük az előző pontra. A GE-t kiterjesztett mátrixon hajtjuk végre

$$[A \,|\, I] \to \text{GE} \to \text{visszahely} \to [I \,|\, A^{-1}],$$

visszahelyettesítés után jobb oldalon kapjuk az inverz mátrixot. Sor csere esetén az inverz nem változik, oszlopcsere esetén változik (lásd gyak.).

Példa: mátrix determinánsának és inverzének számítása GE-val

Mi az előző példa mátrixának determinánsa és inverze?

$$\det(A) = \det(\Delta\text{alak}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-1) = -10$$

Gauss-elimináció: inverzre példa

Az elimináció:

1. lépés:

$$2.\ \text{sor} \underbrace{-\left(\frac{-4}{2}\right)}_{+2} *\ 1.\ \text{sor}$$

$$3.\ \text{sor} - \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)}_{3} *\ 1.\ \text{sor}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

2. lépés:

3. sor $\underbrace{-\left(\frac{-5}{5}\right)}_{+1}$ $*$ 2. sor

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to$$

A visszahelyettesítés:

3. sor $/(-1)$
2. sor $-$ 4 $*$ új 3. sor.
1. sor $-$ 3 $*$ új 3. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

2. sor $/5$
1. sor $/2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

Az inverz a jobb oldalon álló mátrix.

Gauss-elimináció: megjegyzések

Megoldható-e egyáltalán a LER? Vizsgáljuk?

Majd GE közben kiderül.

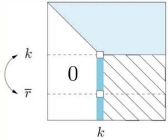
Megoldható, de mégsem tudjuk a GE-t végigcsinálni?

Előfordulhat... $\rightsquigarrow$ *sort cserélünk* $\rightsquigarrow$ *nem változik a megoldás. Ha oszlopot cserélünk, akkor a megoldás komponensei a cserének megfelelően változnak.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Biztos és stabil megoldás a főelemkiválasztás.

Főelemkiválasztás

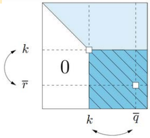


Definíció: részleges főelemkiválasztás

A k-adik lépésben válasszunk egy olyan m indexet, melyre $\left|a_{mk}^{(k-1)}\right|$ maximális ($m \in \{ k, k+1, \ldots, n \}$), majd cseréljük ki a k-adik és m-edik sort.

Definíció: teljes főelemkiválasztás

A k-adik lépésben válasszunk egy olyan (m_1, m_2) indexpárt, melyre $\left|a_{m_1 m_2}^{(k-1)}\right|$ maximális ($m_1, m_2 \in \{ k, k+1, \ldots, n \}$), majd cseréljük ki a k-adik és m_1-edik sort, valamint a k-adik és m_2-edik oszlopot.



Tétel:

A GE elvégezhető sor és oszlopcsere nélkül
$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, n-1).$

Biz.: trivi a rekurzióból. $\square$

Definíció: főminorok

Az A főminorai a

$$D_k = \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix} \right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

determinánsok. Ezek az A bal felső $k \times k$-s részmátrixaimak determinánsai.

Tétel:

$D_k \neq 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \Leftrightarrow \quad a_{kk}^{k-1} \neq 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n-1).$

Biz.: A GE átalakításai determináns tartók, ezért

$$D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{kk}^{(k-1)} = D_{k-1} \cdot a_{kk}^{(k-1)},$$

amiből az állítás adódik. A $D_n \neq 0$ illetve az $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ feltétel nem szükséges a GE-hoz, csak a LER megoldhatóságához. $\square$

Megj.:

- Numerikus szempontból jobb, ha alkalmazunk főelemkiválasztást. Ezzel a GE-s hányadosaink pontosabbak lesznek.
- Determináns számításakor a cserékkel vigyázni kell!

Tartalomjegyzék

Tétel: A Gauss-elimináció műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: Rögzített k-ra: a k. lépés képletéből számolva

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \qquad \begin{array}{l} k = 1, \ldots, n-1; \\ i = k+1, \ldots, n; \\ j = k+1, \ldots, n, n+1. \end{array}$$

$(n-k)$ osztás, $(n-k)(n-k+1)$ szorzás és $(n-k)(n-k+1)$ összeadás kell.
Összesen $(n-k)(2(n-k)+3)$ művelet. $(n-k =: s)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(2(n-k)+3) = \sum_{s=1}^{n-1} s(2s+3) = 2\sum_{s=1}^{n-1} s^2 + 3\sum_{s=1}^{n-1} s =$$

$$= 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 3\frac{(n-1)n}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \quad \square$$

Definíció: $\mathcal{O}(n^2)$ függvény

Az $f(n)$ függvényt $\mathcal{O}(n^2)$-es nagyságrendűnek nevezzük, ha $\frac{f(n)}{n^2}$ korlátos minden $n \in \mathbb{N}$-re.

A felső háromszögmátrixú LER megoldásának műveletigénye.

Tétel: A visszahelyettesítés műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.:

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \;\; x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \;\; (i = n-1, \ldots, 1).$$

Rögzített i. sorra 1 db osztás, $(n-i)$ szorzás és $(n-i)$ összeadás.
Összesen: $2(n-i)+1$ művelet $(n-i =: s)$.

$$1 + \sum_{s=1}^{n-1} (2s+1) = 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = n^2 + \mathcal{O}(n). \quad \square$$

Mi történik, ha az alábbi $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixszal megszorzunk egy $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot balról?

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{array}$$

Az 1. sor kétszeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz.

Balról szorzás alsó háromszögmátrixokkal

Mi történik, ha az alábbi $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixszal megszorzunk egy $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot balról?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 1. sor kétszeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz, valamint az 1. sor háromszorosát levonjuk a 3. sorból. ($\sim$ GE 1. lépése volt)

A Gauss-elimináció lépései mátrixszorzással

Írjuk fel a GE k-adik lépését ugyanilyen módszerrel! ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{pmatrix} = I - \ell_k e_k^\top, \quad \ell_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1k} \\ \vdots \\ l_{nk} \end{pmatrix}.$$

(A zérus elemek nincsenek feltüntetve L_k-ban.)

Tehát ha $l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (k = 1, \ldots, n-1; \;\; i = k+1, \ldots, n)$,

akkor $L_k \cdot A^{(k-1)} = A^{(k)}$, vagyis megkaptuk a GE k-adik lépését.

Példa

Példa: GE az L_k mátrixokkal

Írjuk fel a Gauss-elimináció lépéseit mátrixszorzások segítségével a következő mátrix esetén (ua. mint az előző előadáson)!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: **1. lépés**

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

2. lépés

$$A^{(2)} = L_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: U$$

Tehát $A^{(2)} = L_2 \cdot L_1 \cdot A =: U$, a kapott felsőháromszög alakot U-val jelöljük.
Fejezzük ki A-t a képletből:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}}_{=:L} \cdot U = L \cdot U.$$

Ezzel megkaptuk az A mátrix LU-felbontását. Ennek az elméletét tárgyaljuk a következőkben.

Definíció: alsó háromszögmátrix

Az $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot *alsó háromszögmátrixnak* nevezzük, ha $i < j$ esetén $l_{ij} = 0$. (A főátló felett csupa nulla.)

$$\mathcal{L} := \{\, L \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\; l_{ij} = 0 \;(i<j) \,\},$$
$$\mathcal{L}_1 := \{\, L \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\; l_{ij} = 0 \;(i<j),\;\; l_{ii} = 1 \,\}.$$

Definíció: felső háromszögmátrix

Az $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot *felső háromszögmátrixnak* nevezzük, ha $i > j$ esetén $u_{ij} = 0$. (A főátló alatt csupa nulla.)

$$\mathcal{U} := \{\, U \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\; u_{ij} = 0 \;(i>j) \,\},$$
$$\mathcal{U}_1 := \{\, U \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\; u_{ij} = 0 \;(i>j),\;\; u_{ii} = 1 \,\}.$$

Háromszögmátrixok halmazának zártsága

Állítás: háromszögmátrixról

1. Ha $L', L'' \in \mathcal{L}$, akkor $L' \cdot L'' \in \mathcal{L}$.
2. Ha $U', U'' \in \mathcal{U}$, akkor $U' \cdot U'' \in \mathcal{U}$.
3. Ha $L', L'' \in \mathcal{L}_1$, akkor $L' \cdot L'' \in \mathcal{L}_1$.
4. Ha $U', U'' \in \mathcal{U}_1$, akkor $U' \cdot U'' \in \mathcal{U}_1$.
5. Ha $L \in \mathcal{L}$ és $\exists L^{-1}$, akkor $L^{-1} \in \mathcal{L}$.
6. Ha $U \in \mathcal{U}$ és $\exists U^{-1}$, akkor $U^{-1} \in \mathcal{U}$.
7. Ha $L \in \mathcal{L}_1$, akkor $\exists L^{-1}$ és $L^{-1} \in \mathcal{L}_1$.
8. Ha $U \in \mathcal{U}_1$, akkor $\exists U^{-1}$ és $U^{-1} \in \mathcal{U}_1$.

Biz.: házi feladat (beadható). $\square$

Definíció: L_k

$L_k := I - \ell_k e_k^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ahol $\ell_k \in \mathbb{R}^n$, $(\ell_k)_i = 0$ $(i \le k)$ és $e_k \in \mathbb{R}^n$ a k-adik egységvektor.

Állítás: L_k inverze

$$L_k^{-1} = I + \ell_k e_k^\top .$$

Biz.:

$$L_k \cdot L_k^{-1} = (I - \ell_k e_k^\top)(I + \ell_k e_k^\top) = I \underbrace{- \ell_k e_k^\top + \ell_k e_k^\top}_{0} - \ell_k \underbrace{e_k^\top \ell_k}_{0} e_k^\top = I. \quad \square$$

Szemléletesen?

Hogyan szorzunk össze két ilyen mátrixot?

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \color{red}{2} & 1 & 0\\ \color{red}{1} & \color{red}{3} & 1\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \color{red}{2} & 1 & 0\\ \color{red}{7} & \color{red}{3} & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

A bal oldali sorrendben „szépen” szorzódik. Általában is.

Állítás: L_k mátrixok szorzata

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_{n-1} e_{n-1}^\top.$$

Szemléletesen?

Biz.: Indukcióval.

-
$$\begin{aligned} L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} &= (I + \ell_1 e_1^\top)(I + \ell_2 e_2^\top) = \\ &= I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ell_1 \underbrace{(e_1^\top \ell_2)}_{0} e_2^\top = \\ &= I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top \end{aligned}$$

- Tegyük fel, hogy $k+1 \le n-1$ és

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} = I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top .$$

- $L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} \cdot L_{k+1}^{-1} =$

$$= (I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top)(I + \ell_{k+1} e_{k+1}^\top) =$$

$$= I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top + \ell_{k+1} e_{k+1}^\top +$$

$$+ \underbrace{\ell_1 e_1^\top \ell_{k+1} e_{k+1}^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top \ell_{k+1} e_{k+1}^\top}_{\text{kiesnek}} =$$

$$= I + \ell_1 e_1^\top + \ell_2 e_2^\top + \ldots + \ell_k e_k^\top + \ell_{k+1} e_{k+1}^\top = \checkmark . \qquad \square$$

Definíció: LU-felbontás

Az A mátrix LU-felbontásának nevezzük az $L \cdot U$ szorzatot, ha

$$A = LU, \quad L \in \mathcal{L}_1, \; U \in \mathcal{U}.$$

LU-felbontás Gauss-eliminációval

A Gauss-eliminációt felírhatjuk alsó háromszögmátrixok segítségével:

$$L_{n-1} \cdots L_2 \cdot L_1 \cdot A = U,$$

majd az inverzekkel egyesével átszorozva:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_{L} \cdot U = LU.$$

A fenti szorzat is alsó háromszögmátrix. Láttuk az előző tételből, hogy az L mátrix elemeit egy egységmátrixból kapjuk úgy, hogy minden oszlopba ez egyesek alá beletesszük a neki megfelelő ℓ_k vektor nem nulla elemeit (ezek a GE-s hányadosok). Tehát ennek előállításához nem kell több művelet, mint amit a GE-val végzünk.

Példa: LU-felbontás GE-val

Készítsük el a példamátrixunk LU-felbontását

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

a) részletezve az L_k mátrixokat, a számítás menetét,
b) majd „tömör” írásmóddal!

Megoldás: (a) 1. lépés

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

L_1^{-1}-et úgy kapjuk, hogy L_1 1. oszlopában az átló alatti elemeket (-1)-szeresére változtatjuk. Megfigyelhetjük, hogy ezek a tényleges GE-s hányadosok. Láttuk, hogy L meghatározáshoz csak ℓ_1-re van szükségünk.

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {\color{red}-2} & 1 & 0 \\ {\color{red}3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés

$$A^{(2)} = L_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: U$$

L_2^{-1}-et úgy kapjuk, hogy L_2 2. oszlopában az átló alatti elemeket (-1)-szeresére változtatjuk. Megfigyelhetjük, hogy ez a tényleges GE-s hányados. Láttuk, hogy L meghatározáshoz csak ℓ_2-re van szükségünk.

$$L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $A^{(2)} = L_2 \cdot L_1 \cdot A =: U$

Fejezzük ki A-t a képletből:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}}_{=:L} \cdot U = L \cdot U.$$

Tehát $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$. Az L_k mátixok szorzatára felírt tétel alapján ehhez nem kell mátrixot szoroznunk, csak az ℓ_k vektorokból kell összeraknunk L-et.

$$L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A kapott eredményt szorzással is ellenőrizhetjük.

(b) Tömör írásmódban: 1. lépés

A GE-s hányadosokat minden lépésben az eliminált pozíciókon tudjuk tárolni (éppen ennyi nulla van az oszlopban). Könnyen megjegyezhető ezek képzése: az eliminálandó mátrix rész 1. oszlopában az első elemmel leosztjuk az alatta levőket. Ezzel minden a helyére került. Vonalakkal jelezzük, hogy itt már tárolásról is szó van. A jobb alsó 2×2-es mátrix részen elvégezzük az eliminációt.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 3 \\ \hline \frac{-4}{2} & 5 & 4 \\ \frac{6}{2} & -5 & -5 \end{array}\right] \rightarrow$$

Példa

2. lépés:

Ugyanúgy dolgozunk tovább, de most már csak a jobb alsó 2×2-es mátrix részen, a többit változatlanul leírjuk.

$$
\left[\begin{array}{r|rr}
\multicolumn{1}{r}{2} & 0 & 3 \\
\hline
-2 & 5 & 4 \\
3 & -5 & -5
\end{array}\right]
\to
\left[\begin{array}{r|r|r}
\multicolumn{1}{r}{2} & \multicolumn{1}{r}{0} & 3 \\
\hline
-2 & \multicolumn{1}{r}{5} & 4 \\
\cline{2-3}
3 & \frac{-5}{5} & -1
\end{array}\right]
$$

Olvassuk ki a keresett mátrixokat!

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot U
$$

Tétel: LU-felbontás létezése

Ha a Gauss-elimináció végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül (azaz $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$), akkor az A mátrix LU-felbontása létezik.

Biz.: Ha a GE végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül, akkor az L_k mátrixok felírhatók és L, U előállítható. $\square$

Megj.:

- $u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)}$ és $D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)}$
- Ha van A-nak LU-felbontása, ahol U átlójában nem nullák állnak, akkor $u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.
- $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) = D_n \neq 0$.
- Ha a GE végrehajtható, de $a_{nn}^{(n-1)} = 0$, akkor létezik LU-felbontás, de $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U) = 0$-ból $u_{nn} = 0$. Ebben az esetben a LER vagy nem oldható meg vagy nem egyértelműen.

LU-felbontás létezése és egyértelműsége

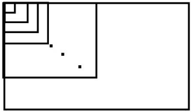
Tétel: LU-felbontás létezése és egyértelműsége (főminorokkal)

- Ha $D_k \neq 0 \ (k = 1, \ldots, n-1)$, akkor létezik az A mátrix LU-felbontása és $u_{kk} \neq 0 \ (k = 1, \ldots, n-1)$.
- Ha $\det(A) \neq 0$, akkor a felbontás egyértelmű.

Biz.: létezés: az LU-felbontás létezése a GE-nál tanult tételünkből következik. $D_k \neq 0 \Leftrightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ a megadott indexekre, ezért a GE végrehajtható és az L, U mátrixok előállíthatóak.

Egyértelműség: indirekt tegyük fel, hogy az A invertálható mátrix LU-felbontása nem egyértelmű, azaz legalább két különböző felbontás létezik:

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$



LU-felbontás egyértelműsége

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$

Az egyenlőséget U_2^{-1}-zel jobbról, majd L_1^{-1}-zel balról szorozva kapjuk, hogy

$$U_1 \cdot U_2^{-1} = L_1^{-1} \cdot L_2.$$

A szóban forgó inverzek léteznek, hiszen
$\det(A) = \det(L_i) \cdot \det(U_i) = \det(U_i) \neq 0$, $i = 1, 2$-re.
Az egyenlőség bal oldalán egy felső háromszögmátrix, jobb oldalán pedig egy 1 főátlójú alsó háromszögmátrix áll. Ez csak úgy lehet, ha az egységmátrixról van szó. Tehát

$$\begin{aligned} U_1 \cdot U_2^{-1} = I \quad &\Longrightarrow \quad U_1 = U_2, \\ L_1^{-1} \cdot L_2 = I \quad &\Longrightarrow \quad L_1 = L_2. \end{aligned}$$

Ellentmondásra jutottunk, vagyis az LU-felbontás egyértelmű. $\square$

L és U megadása GE-val

Az eddigieket összefoglalva felírhatjuk az $A = LU$ felbontást:

$$L \in \mathcal{L}_1 \text{ és } l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \; (i > j), \qquad U \in \mathcal{U} \quad \text{és} \quad u_{ij} = a_{ij}^{(i-1)} \; (i \leq j).$$

Miért jó az LU-felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b$ helyett $\quad (\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$
2. majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$

Összehasonlításul: egy mátrix-vektor szorzás műveletigénye:
$n \cdot (2n - 1) = 2n^2 + \mathcal{O}(n)$.

Persze valamikor elő kell állítani az LU-felbontást. $\quad (\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$
Előnyös, ha sokszor ugyanaz A.

Példák Matlab-ban

1. Az LU-felbontás működése „kisebb” ($n \approx 7$) mátrixokra,
2. valamint „nagyobb” mátrixokra ($n \approx 50$) színkóddal.
3. LER megoldása LU-felbontás segítségével.
4. Sok LER ($m \approx 10, 100$) megoldása futási idejének összevetése nagyobb mátrixok ($n \approx 50, 100, 200$) esetén: GE-val valamint az LU-felbontás kihasználásával.