6. Polinomok gyökei, Horner-algoritmus

6.1. Feladat

Számítsuk ki a $P(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ polinom értékeit a megadott ξ helyeken a Horner-algoritmus segítségével:

(a) $\xi = \frac{1}{2}$,

(b) $\xi = 2$.

(a) $P\left(\frac{1}{2}\right)$ értékének meghatározásához írjuk fel a következő táblázatot:

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i					
$a_i^{(1)}$					

Itt az $a_i =: a_i^{(0)}$ számok a polinom együtthatóit jelölik, azaz $P(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i$. Az első oszlop megfelelő soraiba írjuk be a ξ helyettesítendő értéket, illetve a polinom főegyütthatóját, azaz $a_n^{(1)} := a_n^{(0)}$.

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	$\frac{1}{2}$				
$a_i^{(1)}$	3				

A további oszlopok kitöltéséhez használjuk a következő szabályokat:

$$\xi_i := a_{i+1}^{(1)} \cdot \xi,$$
$$a_i^{(1)} := \xi_i + a_i^{(0)}.$$

A fentiek szerint balról jobbra haladva minden üres cella kitölthető.

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	$\frac{1}{2}$	$3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$			
$a_i^{(1)}$	3	$\frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$			

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$		
$a_i^{(1)}$	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{4} + 0 = \frac{7}{4}$		

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$	
$a_i^{(1)}$	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{8} + 1 = \frac{15}{8}$	

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{16}$
$a_i^{(1)}$	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{16} + 2 = \frac{47}{16}$

A polinom helyettesítési értékét a táblázat jobb alsó sarkából tudjuk leolvasni, eszerint $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{16}$.

(b) $P(2)$ meghatározásához az előző feladatrészhez hasonlóan járunk el.

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2				
$a_i^{(1)}$	3				

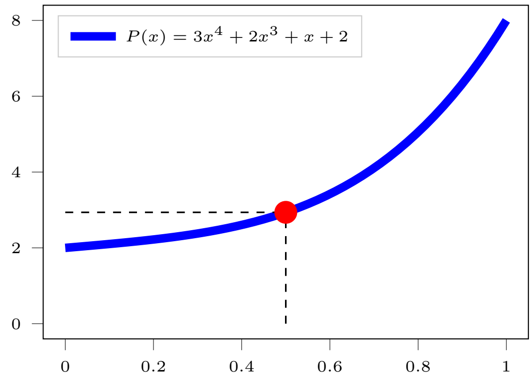
a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2	$3 \cdot 2 = 6$			
$a_i^{(1)}$	3	$6 + 2 = 8$			

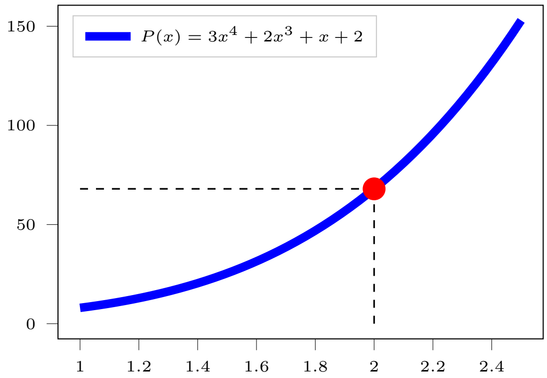
a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2	6	$8 \cdot 2 = 16$		
$a_i^{(1)}$	3	8	$16 + 0 = 16$		

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2	6	16	$16 \cdot 2 = 32$	
$a_i^{(1)}$	3	8	16	$32 + 1 = 33$	

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2	6	16	32	$33 \cdot 2 = 66$
$a_i^{(1)}$	3	8	16	33	$66 + 2 = 68$

Így $P(2) = 68$.





6.2. Feladat

Írjuk fel az előző feladatban megadott P polinom első deriváltjának értékét a $\xi = 2$ helyen!

Egy tetszőleges P polinomot fel tudunk írni

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \underbrace{\left(a_1^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)} x^{n-1}\right)}_{P_1(x)}$$

alakban, ahol az $a_i^{(1)}$ együtthatókat a Horner-algoritmus adja. Vegyük észre, hogy

$$P'(\xi) = P_1(\xi) = a_1^{(2)}$$

ahol $a_i^{(2)}$ ugyanúgy Horner-algoritmussal számolható, ahogy $a_i^{(1)}$. Tehát a korábbiakhoz hasonlóan legyen $a_n^{(2)} := a_n^{(1)} = a_n$, valamint

$$\begin{aligned} \xi_i &:= a_{i+1}^{(2)} \cdot \xi, \\ a_i^{(2)} &:= a_i^{(1)} + \xi_i. \end{aligned}$$

A fenti formulát, valamint az előző feladatban kiszámított $a_i^{(1)}$ együtthatókat felhasználva írjuk fel a kibővített táblázatot!

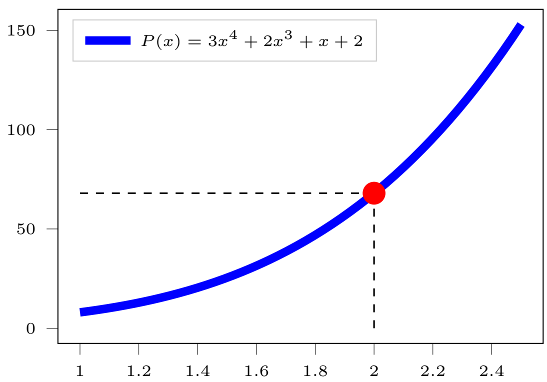
a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2	6	16	32	66
$a_i^{(1)}$	3	8	16	33	68
ξ_i	2				
$a_i^{(2)}$	3				

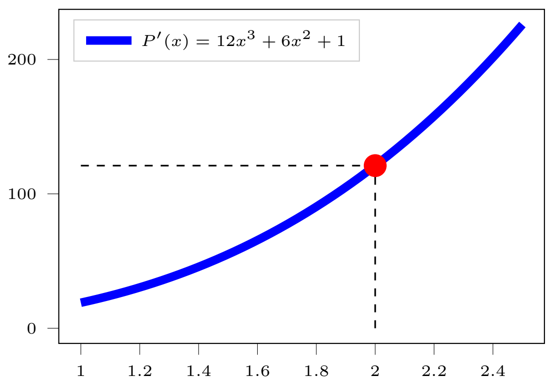
a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2	6	16	32	66
$a_i^{(1)}$	3	8	16	33	68
ξ_i	2	$3 \cdot 2 = 6$			
$a_i^{(2)}$	3	$6 + 8 = 14$			

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2	6	16	32	66
$a_i^{(1)}$	3	8	16	33	68
ξ_i	2	6	$14 \cdot 2 = 28$		
$a_i^{(2)}$	3	14	$28 + 16 = 44$		

a_i	3	2	0	1	2
ξ_i	2	6	16	32	66
$a_i^{(1)}$	3	8	16	33	68
ξ_i	2	6	28	$44 \cdot 2 = 88$	
$a_i^{(2)}$	3	14	44	$88 + 33 = 121$	

Azaz $P'(2) = 121$.





6.3. Feladat

Határozzuk meg a $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ polinom $\xi = 3$ körüli Taylor-polinomját a Horner-algoritmus segítségével!

Tudjuk, hogy a Taylor-polinom

$$\frac{P^{(j)}(\xi)}{j!} = P_j(\xi) = a_j^{(j+1)}$$

együtthatói előállíthatók a Horner-algoritmus segítségével, az együtthatók ismeretében pedig felírható a P polinom tetszőleges ξ pont körüli Taylor-polimomja. Legyen most $\xi = 3$ és számítsuk ki $P(3)$-at:

a_i	1	-1	1	-1
ξ_i	3	$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 3 = 6$	$7 \cdot 3 = 21$
$a_i^{(1)}$	1	$3 + (-1) = 2$	$6 + 1 = 7$	$21 + (-1) = 20$

Tehát $P(3) = 20$. Felhasználva az $a_i^{(1)}$ együtthatókat határozzuk meg $P'(3)$-at.

a_i	1	-1	1	-1
ξ_i	3	$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 3 = 6$	$7 \cdot 3 = 21$
$a_i^{(1)}$	1	2	7	20
ξ_i	3	$1 \cdot 3 = 3$	$5 \cdot 3 = 15$	
$a_i^{(2)}$	1	$3 + 2 = 5$	$15 + 7 = 22$	

Eszerint $P'(3) = 22$, továbbá a most meghatározott $a_i^{(2)}$ együtthatók segítségével kiszámíthatjuk $\frac{P''(3)}{2!}$ értékét.

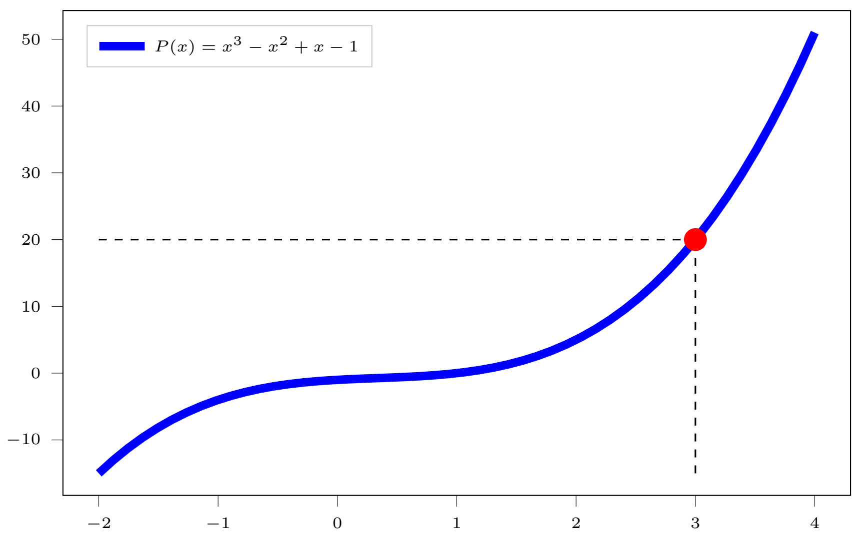
a_i	1	-1	1	-1
ξ_i	3	3	6	21
$a_i^{(1)}$	1	2	7	20
ξ_i	3	3	15	
$a_i^{(2)}$	1	5	22	
ξ_i	3	$1 \cdot 3 = 3$		
$a_i^{(3)}$	1	$3 + 5 = 8$		

Vagyis $\frac{P''(3)}{2!} = 8$, végül pedig kiszámíthatjuk $\frac{P'''(3)}{3!}$ értékét.

a_i	1	-1	1	-1
ξ_i	3	3	6	21
$a_i^{(1)}$	1	2	7	20
ξ_i	3	3	15	
$a_i^{(2)}$	1	5	22	
ξ_i	3	3		
$a_i^{(3)}$	1	8		
ξ_i	3			
$a_i^{(4)}$	1			

A kiszámított együtthatók segítségével felírhatjuk a P polinom $\xi = 3$ körüli Taylor-polinomját:

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = \\ 20 + 22 \cdot (x-3) + 8 \cdot (x-3)^2 + 1 \cdot (x-3)^3.$$



6.4. Feladat

Vizsgáljuk meg a $P(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$ gyökeinek elhelyezkedését.

P bármely (komplex) gyökének abszolútértékét becsülhetjük az alábbi tétel segítségével.

6.1. Tétel (Polinomok gyökeinek elhelyezkedéséről)

Ha $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0$, valamint $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$, akkor P bármely x_k gyökére:

$$r < |x_k| < R,$$

ahol

$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|}}, \qquad R = 1 + \frac{\max\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|}.$$

6.1. Megjegyzés

A tételben az $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$ feltételek nem jelentik azt, hogy ezekben az esetekben nem mondhatunk semmit a gyökök elhelyezkedéséről.

- Ha $a_0 = 0$, akkor P-nek gyöke a 0. Emeljük ki tehát a 0-hoz tartozó gyöktényezőt P-ből, legyen $P(x) = (x - 0)Q(x)$. A P-nek egy gyöke a 0, a többi pedig éppen Q gyökeivel esik egybe. Könnyen látható, hogy a felső becslésünk ebben a helyzetben is használható, és a P polinom x_k gyökeire $|x_k| < R$ teljesül.
- Ha $a_n = 0$, akkor a P polinom nem n-edfokú. Ha n-et a P polinom fokszámának rögzítjük, akkor a fenti képletek használhatók.

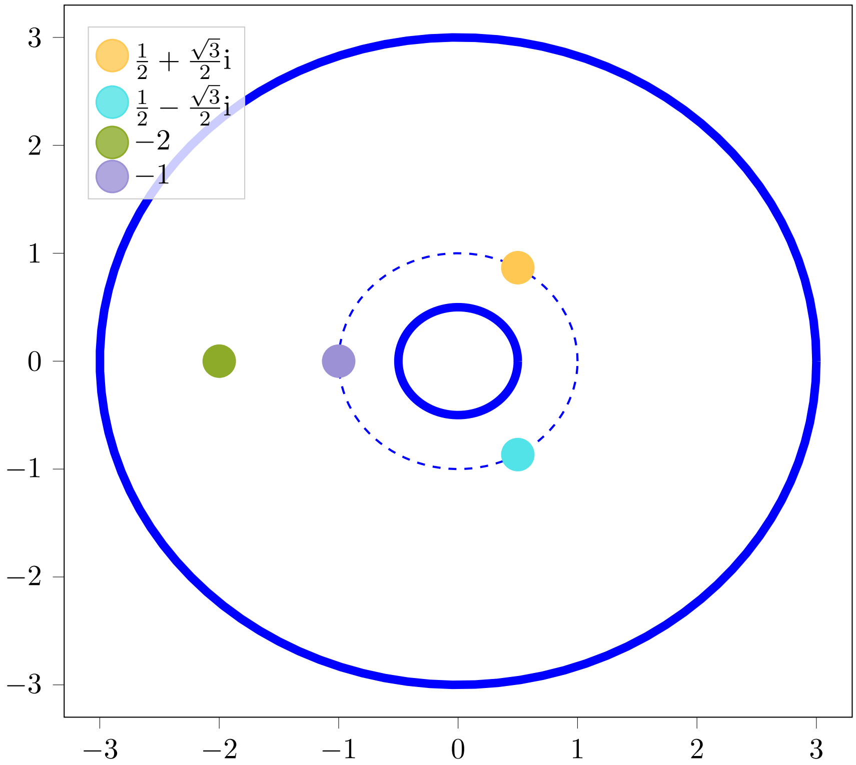
Alkalmazzuk a tételt a feladatban megadott P polinomra. Mivel jelen esetben

$$\max_{i=1}^{4} |a_i| = \max\left\{|1|, |0|, |2|, |1|\right\} = 2,$$
$$\max_{i=0}^{3} |a_i| = \max\left\{|2|, |1|, |0|, |2|\right\} = 2,$$

továbbá $|a_0| = 2$ és $|a_4| = 1$, ezért

$$r = \frac{1}{1 + \frac{2}{2}} = \frac{1}{2}, \qquad R = 1 + \frac{2}{1} = 3.$$

Ez azt jelenti, hogy P valamennyi (valós és komplex komplex) gyöke a $(0,0)$ középpontú, $\frac{1}{2}$, illetve 3 sugarú körök körvonalai között helyezkedik el a komplex számsíkon.



Könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott P polinom gyöke a -1 és a -2. Az $(x+1)$ és az $(x+2)$ gyöktényezők kiemelése után pedig a másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével meghatározhatjuk a maradék két gyököt, melyek $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A fenti ábrán megtekinthető, hogy a gyökök tényleg az origó középpontú $r = \frac{1}{2}$ és $R = 3$ sugarú körök között helyezkednek el. Szaggatott vonallal az egységkört is feltüntettük.

6.5. Feladat

Tekintsük a $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ polinomot. Tudjuk, hogy a P polinom gyökei nemnegatív egész számok. A gyökök elhelyezkedésére vonatkozó becslésekkel és a Horner-algoritmus segítségével határozzuk meg a gyököket!

Először is a tételt felhasználva vizsgáljuk meg P gyökeinek elhelyezkedését:

$$R = 1 + \frac{23}{1} = 24, \qquad r = \frac{1}{1+\frac{23}{15}} = \frac{1}{\frac{38}{15}} = \frac{15}{38}.$$

Tudjuk tehát, hogy a keresett gyökök a $\left(\frac{15}{38}, 24\right)$ intervallumban vannak, valamint a feladat alapján egész számok. Vizsgáljuk meg az intervallum egész számait, legyen $\xi = 1$.

a_i	1	-9	23	-15
ξ_i	1	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot (-8) = -8$	$1 \cdot 15 = 15$
$a_i^{(1)}$	1	$1 + (-9) = -8$	$(-8) + 23 = 15$	$15 + (-15) = 0$

A fentiek alapján $\xi = 1$ az egyik (és a feladat feltételei alapján egyben a legkisebb) gyöke P-nek. Ezt felhasználva kiemelhetjük $P(x)$-ből $(x-1)$-et, azaz

$$\begin{aligned} P(x) =& (x-1) \cdot Q(x), \\ Q(x) =& x^2 - 8x + 15. \end{aligned}$$

Itt felhasználhatjuk, hogy az előző jelöléseink használatával:

$$P(x) = (x-1) \cdot Q(x) = 0 + (x-1) \cdot P_1(x).$$

azaz a $P_1 = Q$ maradék polinom együtthatói a táblázat alsó sorában található $a_i^{(1)}$ számok $(i > 0)$. P további gyökeinek megtalálásához elegendő Q gyökeit megtalálni. Ezt megtehetnénk a másodfokú egyenlet megoldóképletének használatával, de gondolkozzunk most algoritmikusan, és folytassuk az eljárásunkat. Becsüljük meg Q gyökeinek elhelyezkedését:

$$R = 1 + \frac{15}{1} = 16, \qquad r = \frac{1}{1+\frac{8}{15}} = \frac{1}{\frac{15}{15}+\frac{8}{15}} = \frac{1}{\frac{23}{15}} = \frac{15}{23}.$$

Az előzőeknek megfelelően a gyökök meghatározásához elegendő a $\left(\frac{15}{23}, 16\right)$ intervallum egészeit vizsgálni. Vizsgáljuk meg a $\xi = 1$ esetet Horner-algoritmussal.

a_i	1	-8	15
ξ_i	1	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot (-7) = -7$
$a_i^{(2)}$	1	$1 + (-8) = -7$	$(-7) + 15 = 8$

Tehát $Q(1) \neq 0$, vagyis Q-nak az 1 nem gyöke. Tekintsük most a $\xi = 2$ esetet.

a_i	1	-8	15
ξ_i	2	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot (-6) = -12$
$a_i^{(2)}$	1	$2 + (-8) = -6$	$(-12) + 15 = 3$

Mivel $Q(2) \neq 0$, ezért kénytelenek vagyunk tovább keresni. A meghatározott intervallumban a következő egész szám a $\xi = 3$, így folytassuk ezzel az eljárásunkat.

a_i	1	-8	15
ξ_i	3	$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot (-5) = -15$
$a_i^{(2)}$	1	$3 + (-8) = -5$	$(-15) + 15 = 0$

Ez azt jelenti, hogy $Q(3) = 0$, emiatt pedig az eddigieknek megfelelően $P(3) = 0$. Eszerint a Q polinomból az $(x-3)$ gyöktényező kiemelhető, és a kiemelés után kapott P_2 maradék polinom együtthatói éppen az $a_i^{(2)}$ számok $(i > 1)$, ezért tehát

$$Q(x) = 0 + (x-3) \cdot P_2(x) = (x-3)(x-5),$$

innen pedig:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-3) \cdot (x-5), \\ P(x) &= (x-1) \cdot Q(x) = (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5). \end{aligned}$$

Azaz a kiemeléssel megkaptuk P mindhárom keresett gyökét:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_1 &= 3, \\ x_2 &= 5. \end{aligned}$$