4. LU-felbontás

4.1. Feladat

Határozzuk meg az A mátrix LU-felbontását Gauss-elimináció segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Végezzük el az A mátrixon a Gauss-elimináció lépéseit!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\substack{(2)+2\cdot(1) \\ (3)+(-1)\cdot(1)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{(3)+\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

A Gauss-eliminácó utolsó lépésében kapott $A^{(2)}$ mátrix az LU-felbontás U felsőháromszögmátrixa. Az L mátrixot pedig a GE egyes lépéseit leíró L_k mátrixok ismeretében tudjuk meghatározni. Az L_k mátrixok elemei a GE lépéseiből leolvashatók, az L_k mátrixok inverzeit pedig úgy kapjuk, hogy az L_k mátrix főátlón kívüli elemeit (-1)-gyel szorozzuk.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} \implies L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

Az L mátrix az L_k^{-1} mátrixok összemásolásával kapható, így tehát az A mátrix LU-felbontása:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}.$$

4.1. Megjegyzés

Az LU-felbontás L mátrixának elemei könnyen meghatározhatók a GE lépéseiből. Tegyük fel, hogy a k-adik lépésben a k-adik sor c-szeresét adjuk hozzá az i-edik sorhoz, azaz a fenti jelöléseket használva elvégezzük az

$$(i) + c \cdot (k)$$

átalakítást. Ekkor az LU-felbontás L mátrixa k-adik oszlopának i-edik eleme éppen a fenti c (-1)-szerese, azaz

$$\ell_{ik} = -c$$

Jelen feladatban a színek segítik az eligazodást.

4.2. Feladat

Számítsuk ki az A mátrix LU-felbontását Gauss-elimináció segítségével „helyben tárolva" az L mátrix elemeit!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Az LU-felbontás elvégezhető helyben, azaz nem kell külön memóriaterületet lefoglalnunk az L és U mátrixok tárolásához. Mivel az U mátrix alsóháromszög részében 0-k vannak, az L mátrix pedig kizárólag itt tartalmaz értékes elemeket (hiszen a főátlójában 1-ek vannak), így az L mátrix elemeit már a GE közben beírhatjuk a 0-k helyére. Itt arra kell figyelni, hogy ne a GE aktuális lépését leíró L_k mátrix elemeit írjuk be, hanem azok (-1)-szereseit, vagyis az L_k^{-1} elemeit. Megkülönböztetésképpen, az egyesített mátrixban az L mátrix főátló alatti elemeit színes betűkkel szedtük.

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\begin{matrix} (2)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1) \\ (3)+2\cdot(1) \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ -2 & -8 & 5 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{(3)+\frac{16}{11}\cdot(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ -2 & -\frac{16}{11} & 13 \end{bmatrix}$$

Olvassuk le a kapott L és U mátrixokat:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

4.3. Feladat

(a) Határozzuk meg az A mátix LU-felbontását elemenként, Gauss-elimináció használata nélkül!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

(b) Legyen $b = [-4 \;\; 1 \;\; 2]^T$. Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert az LU-felbontás ismeretében!

(a) Az LU-felbontást most az $A = LU$ mátrixszorzásból határozzuk meg felhasználva, hogy az L és U mátrixok alakja speciális. Az L és U mátrixokat a következő alakban kereshetjük:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Sorfolytonos kifejtéssel dolgozunk, azaz A elemeire a mátrixszorzásból adódó egyenleteket a következő sorrendben dolgozzuk fel:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ (7) & (8) & (9) \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az egyenleteket:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad && 1 \cdot \boxed{u_{11}} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2, \\
&(2) && 1 \cdot \boxed{u_{12}} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = 1, \\
&(3) && 1 \cdot \boxed{u_{13}} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = 3, \\
&(4) && \boxed{\ell_{21}} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4, \\
&(5) && \ell_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot \boxed{u_{22}} + 0 \cdot 0 = 4, \\
&(6) && \ell_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot \boxed{u_{23}} + 0 \cdot u_{33} = 7, \\
&(7) && \boxed{\ell_{31}} \cdot u_{11} + \ell_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2, \\
&(8) && \ell_{31} \cdot u_{12} + \boxed{\ell_{32}} \cdot u_{22} + 1 \cdot 0 = 5, \\
&(9) && \ell_{31} \cdot u_{13} + \ell_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot \boxed{u_{33}} = 9.
\end{aligned}$$

A jó sorrendnek hála, minden egyenletben egyetlen ismeretlen van, így azokat egyenként meg tudjuk határozni:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & u_{11} = 2, \\
(2) & u_{12} = 1, \\
(3) & u_{13} = 3, \\
(4) & \ell_{21} = 2, \\
(5) & u_{22} = 4 - 2 \cdot 1 = 2, \\
(6) & u_{23} = 7 - 2 \cdot 3 = 1, \\
(7) & \ell_{31} = 1, \\
(8) & \ell_{32} = \frac{1}{2} \cdot \Big(5 - 1 \cdot 1 \Big) = 2, \\
(9) & u_{33} = 9 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4.
\end{array}
$$

A kapott elemeket írjuk vissza az L és U mátrixok megfelelő pozícióiba! Ezek alapján az A mátrix LU-felbontása a következő:

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.
$$

4.2. Megjegyzés

Az LU-felbontás során kapott LER megoldásában kulcsfontosságú volt az egyenletek megfelelős sorrendben történő megoldása. A sorfolytonos kifejtés „jó sorrendet” eredményezett, ebben a sorrendben felírva az egyenleteket mindig csak egy ismeretlenünk volt, amit az aktuális egyenletből ki is tudtunk fejezni. Megjegyezzük azonban, hogy léteznek más „jó sorrendek” is, ilyen pl. az oszlopfolytonos

$$
\begin{bmatrix} (1) & (4) & (7) \\ (2) & (5) & (8) \\ (3) & (6) & (9) \end{bmatrix},
$$

illetve a parkettaszerű kifejtés:

$$
\begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (6) & (7) \\ (5) & (8) & (9) \end{bmatrix}.
$$

(b) Az LU-felbontás ismeretében a lineáris egyenletrendszerek egyszerűen és gyorsan megoldhatók két egymást követő visszahelyettesítés segítségével:

$$
Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad LUx = b \quad \Longleftrightarrow \quad Ly = b \ \wedge \ Ux = y.
$$

Először tehát a b jobb oldal vektor mellett az L alsóháromszög mátrixú LER-t oldjuk meg, majd ennek megoldását használjuk jobb oldal vektorként az U felsőháromszög mátrixú LER-ben. Az alsóháromszög mátrixú LER megoldása lényegében egy visszahelyettesítés fordított sorrendben, ekkor az 1. sortól kezdve egyenként ki tudjuk fejezni az ismeretleneket:

$$Ly = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot y = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ebből pedig

$$\begin{array}{ll} (1) & y_1 = -4, \\ (2) & y_2 = 1 - 2y_1 = 1 - 2 \cdot (-4) = 9, \\ (3) & y_3 = 2 - y_1 - 2y_2 = 2 - (-4) - 2 \cdot 9 = -12. \end{array}$$

A másik LER ezután

$$Ux = y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ -12 \end{bmatrix},$$

innen pedig

$$\begin{array}{ll} (3) & x_1 = \frac{1}{4} \cdot (-12) = -3, \\ (2) & x_2 = \frac{1}{2}\big(9 - x_1\big) = \frac{1}{2}\big(9 - (-3)\big) = 6, \\ (1) & x_3 = \frac{1}{2}\big(- 4 - x_2 - 3x_3\big) = \frac{1}{2}\big(- 4 - 6 - 3 \cdot (-3)\big) = -\frac{1}{2}, \end{array}$$

ezért az $Ax = b$ LER megoldása:

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Mivel az alsó- és felsőháromszög mátrixú LER is $n^2 + O(n)$ művelettel megoldható, nagy n-ekre lényegesen kevesebb műveletet kell végeznünk, mintha GE-val dolgoznánk, melynek műveltigény $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$. Persze ehhez rendelkeznünk kell az A mátrix LU-felbontásával, amelynek előállítása ugyanennyi műveletbe kerül. Akkor érdemes tehát LU-felbontást készíteni, ha az A mátrixú LER-t több különböző jobb oldal vektor mellett kell megoldanunk.

4.4. Feladat*

Vizsgáljuk meg, hogy a következő mátrixoknak hány LU-felbontása létezik!

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

Az LU-felbontás létezéséhez és egyértelműségéhez vizsgáljuk meg a főminorokat, azaz a bal felső sarokból induló részmátrixok determinánsait. Ha a $D_1, \ldots, D_{n-1}$ főminorok nullától különbözők, akkor a felbontás létezik, továbbá ha mindezek mellett $D_n \neq 0$ is teljesül, a felbontás egyértelmű.

(a) Számítsuk ki a D_k főminorokat $k = 1, 2$ esetén:

$$D_1 = 1 \neq 0, \qquad D_2 = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Ezek alapján a mátrix LU-felbontása létezik. Az egyértelműséghez D_3-at kell vizsgálni, ami a teljes mátrix determinánsa. Az utolsó sor szerint kifejtve a determinánst kapjuk a következőt:

$$D_3 = 2 \cdot (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) = 6 \neq 0,$$

vagyis az LU-felbontás egyértelműen létezik. A felbontást ezúttal nem határozzuk meg, az a korábban tanult módszerek egyikével könnyen kiszámítható.

(b) Számoljuk ki ismét a D_k főminorokat $k = 1, 2$ esetén:

$$D_1 = 2 \neq 0, \qquad D_2 = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 0.$$

Mivel $D_2 = 0$, az LU-felbontás nem biztos, hogy létezik. A $D_1, \ldots, D_{n-1}$ főminorok nemnulla volta csak elégséges feltétele a felbontás létezésének, ezért azt viszont nem jelenthetjük ki, hogy a mátrixnak nem létezik LU-felbontása. Emlékezzünk, a $D_2 = 0$ feltétel pontosan azt jelenti, hogy (sor- és oszlopcsere nélkül) a Gauss-elimináció a 2. lépésben elakad, emiatt nem érdemes megpróbálni az elmináción keresztül előállítani az LU-felbontást, használjuk a szorzásból adódó elemenkénti formuláinkat. A felbontást kereshetjük a következő alakban:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix}$$

.

4.3. Megjegyzés

Érdemes megjegyezni, hogy az LU-felbontás U mátrixának első sora mindig az eredeti mátrix első sorával esik egybe, ezért ezeket az elemeket nem kell ismeretlenként kezelnünk.

Sorfolytonos kifejtéssel a következő egyenleteket kapjuk az ℓ_i, u_i ismeretlenekre:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad && 2\ell_1 = 4,\\
&(2) && 4\ell_1 + u_1 = 8,\\
&(3) && 6\ell_1 + u_2 = 2,\\
&(4) && 2\ell_2 = 8,\\
&(5) && 4\ell_2 + u_1\ell_3 = 12,\\
&(6) && 6\ell_2 + u_2\ell_3 + u_3 = 14,
\end{aligned}$$

ebből pedig:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad && 2\ell_1 = 4 && \Longrightarrow \quad && \ell_1 = 2,\\
&(2) && 4 \cdot 2 + u_1 = 8 && \Longrightarrow && u_1 = 0,\\
&(3) && 6 \cdot 2 + u_2 = 2 && \Longrightarrow && u_2 = -10,\\
&(4) && 2\ell_2 = 8 && \Longrightarrow && \ell_2 = 4,\\
&(5) && 4 \cdot 4 + 0 \cdot \ell_3 = 12 && \Longrightarrow && 0 \cdot \ell_3 = -4.
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletet nem írtuk fel, mert az (5) egyenletben ellentondásra jutottunk. Nincs olyan ℓ_3, amelyre $0 \cdot \ell_3 = -4$ teljesülne, ezért a fenti egyenletrendszernek nincs megoldása, vagyis a vizsgált mátrix LU-felbontása nem létezik.

(c) Az előző részhez hasonlóan a főminorok $k = 1, 2$ esetén:

$$D_1 = 2 \neq 0, \qquad D_2 = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 0,$$

ezért az LU-felbontás nem biztos, hogy létezik. Ami biztos, hogy a GE a 2. lépésben elakadna, ezért próbáljuk kiszámítani a felbontást elemenként. Az előző részfeladathoz hasonlóan, keressük a megoldást

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & \color{red}{16} & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix}$$

alakban. Jelen mátrix az előző részben vizsgált mátrixtól egyetlen elemben különbözik, ezt pirossal jelöltük. A mátrixszorzat sorfolytonos kifejtéséből a következő LER-re jutunk:

$$\begin{array}{ll}
(1) & 2\ell_1 = 4, \\
(2) & 4\ell_1 + u_1 = 8, \\
(3) & 6\ell_1 + u_2 = 2, \\
(4) & 2\ell_2 = 8, \\
(5) & 4\ell_2 + u_1\ell_3 = 16, \\
(6) & 6\ell_2 + u_2\ell_3 + u_3 = 14.
\end{array}$$

Ebből pedig:

$$\begin{array}{llcl}
(1) & 2\ell_1 = 4 & \Longrightarrow & \ell_1 = 2, \\
(2) & 4 \cdot 2 + u_1 = 8 & \Longrightarrow & u_1 = 0, \\
(3) & 6 \cdot 2 + u_2 = 2 & \Longrightarrow & u_2 = -10, \\
(4) & 2\ell_2 = 8 & \Longrightarrow & \ell_2 = 4, \\
(5) & 4 \cdot 4 + 0 \cdot \ell_3 = 16 & \Longrightarrow & \ell_3 \in \mathbb{R}, \\
(6) & 6 \cdot 4 + (-10)\ell_3 + u_3 = 14 & \Longrightarrow & u_3 = 10(\ell_3 - 1).
\end{array}$$

Ezek alapján a vizsgált mátrixnak végtelen sok LU-felbontása létezik, ugyanis tetszőleges $\ell_3 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 16 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \ell_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 10(\ell_3 - 1) \end{bmatrix}.$$