

A számításelmélet alapjai I.

6. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Nyelv adott szóra vonatkozó maradéknyelve

Definíció

Az A és A' automaták **ekvivalensek**, ha $L(A) = L(A')$.

Definíció

Adott L **nyelv** $p \in T^*$ -ra **szóra vonatkozó maradéknyelve** L_p , ahol $L_p := \{v \mid pv \in L\}$.

L_p tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyekkel p -t jobbról kiegészítve L -beli szót kapunk.

Például, ha $L = \{ab, aac, bc, aabc\}$, akkor $L_{aa} = \{c, bc\}$.

Tulajdonságai:

- ▶ $(L_p)_q = L_{pq}$,
- ▶ $L_\varepsilon = L$,
- ▶ $\varepsilon \in L_p \iff p \in L$.

Automata adott állaputra vonatkozó maradéknyelve

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata.

Definíció

Az $L(A, q) := \{v \in T^* \mid qv \Rightarrow_A^* p, p \in F\}$. nyelvet az A **automata** $q \in Q$ **állaputra vonatkozó maradék nyelvének** nevezzük.

Alternatív definíció: $L(A, q) := \{v \in T^* \mid \delta(q, v) \in F\}$.

Az $L(A, q)$ tehát azokat a v szavakat tartalmazza, amelyek hatására az automata q -ból indítva végállapotba kerül.


Azaz, $L(A, q)$ lenne az elfogadott nyelv, ha a kezdőállapotot q -ra változtatnánk.

Tulajdonságai:

- ▶ $L(A, q)_w = L(A, \delta(q, w)) \quad (w \in T^*),$
- ▶ $L(A, q_0) = L(A),$
- ▶ $\varepsilon \in L(A, q) \iff q \in F.$

Myhill—Nerode tétel

Myhill—Nerode tétel

$L \in \mathcal{L}_3 \iff |\{L_p\}_{p \in T^*}| < \infty$, ahol T az L nyelv ábécéje. 

Bizonyítás:

(\Leftarrow) :

Konstruálunk egy véges, determinisztikus automatát, melynek az állapothalmaza $\{L_p\}_{p \in T^*}$. Ez a feltétel szerint véges halmaz.

Az L_p állapottól azt várjuk, hogy a kezdőállapotból p input elolvasása után ő legyen az aktuális állapot.

$$A_L^{MN} := \langle \{L_p\}_{p \in T^*}, T, \delta, L_\varepsilon, F \rangle,$$

ahol $F := \{L_p \mid \varepsilon \in L_p\}$, és $\delta(L_p, t) := L_{pt}$.

Myhill—Nerode tétel

Ekkor A_L^{MN} tulajdonságai:

- 1) δ jól definiált, azaz $L_p = L_q$ esetén $\delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.
 - Ugyanis $L_p = L_q \implies (L_p)_t = (L_q)_t \implies L_{pt} = L_{qt} \implies \delta(L_p, t) = \delta(L_q, t)$.
- 2) Minden $u \in T^*$ esetén $\delta(L_p, u) = L_{pu}$.
 - A δ definíciója segítségével az u szó hosszára vonatkozó indukcióval belátható.
- 3) $L_p \in F \iff p \in L$.

Már csak azt kell belátni, hogy $L(A_L^{MN}) = L$.

Ez pedig könnyen igazolható, hiszen

$$u \in L(A_L^{MN}) \iff \delta(L_\varepsilon, u) \in F \iff L_{\varepsilon u} = L_u \in F \iff u \in L.$$

Myhill—Nerode tétel

(\Rightarrow) :

Legyen $L \in \mathcal{L}_3$. Tudjuk, hogy létezik olyan $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges, determinisztikus automata, amely az L nyelvet fogadja el, azaz $L = L(A)$.

Ekkor biztos, hogy $|\{L(A, q)\}_{q \in Q}| \leq |Q| < \infty$, mert A véges állapotszámú.

Vegyünk tetszőleges $u \in T^*$ -ra az L_u maradéknnyelvet. Ekkor $L_u = (L(A, q_0))_u = L(A, \delta(q_0, u))$.

Így nyilván fennáll, hogy

$$\{L_u\}_{u \in T^*} \subseteq \{L(A, q)\}_{q \in Q},$$

amivel a tételt beláttuk.

Myhill—Nerode tétel

1. Példa:

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{Ekkor } L_{a^k} = \{a^{n-k} b^n \mid n \geq k\}. \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$b^i \in L_{a^k} \iff i = k,$$

Tehát ez a végtelen sok maradéknyelv páronként különböző, így

$$L \notin \mathcal{L}_3.$$

Myhill—Nerode tétel

2. Példa:

Jelölje $|u|_x$ az u szóban szereplő x betűk számát.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a \text{ és } |w|_b \text{ páros}\}.$$

$L_u = ?$ Könnyen látható, hogy $|u|_a$ illetve $|u|_b$ paritásától (párosságától) függően az

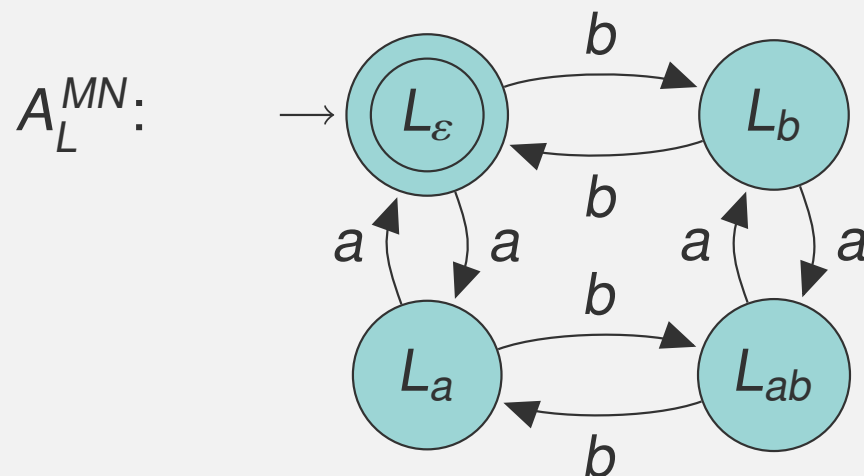
$$L_\varepsilon = \{v \in \{a, b\}^* : |w|_a \equiv |w|_b \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$L_b = \{v \in \{a, b\}^* : |w|_a \equiv 0 \pmod{2}, |w|_b \equiv 1 \pmod{2}\},$$

$$L_a = \{v \in \{a, b\}^* : |w|_a \equiv 1 \pmod{2}, |w|_b \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$L_{ab} = \{v \in \{a, b\}^* : |w|_a \equiv |w|_b \equiv 1 \pmod{2}\},$$

nyelvek egyike. Például $L_{abbabbbab} = L_a$. Tehát $L \in \mathcal{L}_3$.



Minimális automata

Mivel A_L^{MN} állapothalmaza $\{L_u\}_{u \in T^*}$, ezért az alábbi következményt kapjuk:

Következmény

Az A_L^{MN} automata állapotszáma kisebb vagy egyenlő, mint tetszőleges, az L nyelvhez adott véges, determinisztikus automata állapotszáma.

Bizonyítás: A bizonyítás végén látott $\{L_u\}_{u \in T^*} \subseteq \{L(A, q)\}_{q \in Q}$ összefüggésből azonnal adódik.

Definíció

Az A véges determinisztikus automata minimális állapotszámú (**minimális automata**), ha nincs olyan A -val ekvivalens A' véges determinisztikus automata, aminek kevesebb állapota van mint A -nak. Egy L nyelv minimális automatája alatt egy L -et felismerő minimális véges determinisztikus automatát értünk.

Tehát A_L^{MN} az L nyelv minimális automatája.

Minimális automata készítése

Cél: Adott automatához minél kevesebb állapotú, vele ekvivalens, azaz az eredeti automata által felismert nyelvet elfogadó automatát megadni. Két lépésben fogjuk ezt elérni:

1) Összefüggővé alakítás:

Nyilván átmeneteikkel együtt elhagyhatók azok az állapotok, melyekbe nem tud eljutni az automata. Az átmenetdiagramon ez annak felel meg, hogy nincs a kezdőállapotból irányított út a csúcsba.

2) Ekvivalens állapotok összevonása:

Ha két állapotból pontosan ugyanazon szavak hatására kerül az automata végállapotba, akkor az elfogadás szempontjából mindegy, hogy a működés során a két állapotba közül melyikbe került az automata. Ezek az állapotok nyilván összevonhatók.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

Emlékeztetőül:

Definíció

Legyen $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automata. A q állapotot a kezdőállapotból **elérhetőnek** mondjuk, ha létezik $q_0 x \Rightarrow^* q$ redukció, ahol $x \in T^*$.

Az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Definiáljuk a H halmazt a következőképpen. Legyen

$$H_0 = \{q_0\},$$

$$H_{i+1} = H_i \cup \{r \mid \delta(q, a) = r, q \in H_i, a \in T\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Mivel $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_k \subseteq Q$ ezért létezik olyan $k \geq 0$, amelyre $H_k = H_{k+1}$. Ekkor minden $\ell \geq k$ -ra $H_\ell = H_k$. Legyen $H := H_k$. Könnyen látható, hogy H azoknak az állapotoknak a halmaza, amelyek a kezdőállapotból elérhetők.

Összefüggővé alakítás (emlékeztető)

A $(Q \setminus H)$ -beli állapotok elhagyásával kapott $A' = \langle H, T, \delta|_H, q_0, F \cap H \rangle$ determinisztikus véges automata összefüggő és A -val ekvivalens.

Példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_4
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2
q_3	q_1	q_2
q_4	q_5	q_2
$\leftarrow q_5$	q_4	q_2

$$H_0 = \{q_0\}$$

$$H_1 = \{q_0, q_2, q_4\}$$

$$H_2 = \{q_0, q_2, q_4, q_5\} =$$

$$H_3 = H$$

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_4
$\leftarrow q_2$	q_0	q_2
q_4	q_5	q_2
$\leftarrow q_5$	q_4	q_2

Redukált automata

Definíció

Legyenek $q, q' \in Q$ állapotok. q -t és q' -t nevezzük **megkülönböztethetetlenek**, ha $L(A, q) = L(A, q')$.
Jelölése: $q \sim q'$.

Észrevétel:

- ▶ \sim ekvivalenciareláció
- ▶ ha $q \sim q'$, akkor minden $t \in T$ -re $\delta(q, t) \sim \delta(q', t)$ teljesül.
(erre a tulajdonságra úgy hivatkozunk majd, hogy \sim ún. **jobb-kongruencia reláció**)

Definíció

Egy véges determinisztikus automata **redukált**, ha nincsenek megkülönböztethetetlen állapotai.

A faktorautomata

Definíció

Legyen \sim az $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ automata megkülönböztethetlenségi relációja. Definiáljuk $A/\sim = \langle Q', T, \delta', q'_0, F' \rangle$ **faktorautomatáját** a következőképpen.

- ▶ Legyen Q' a $Q \sim$ szerinti ekvivalenciaosztályai.
 - ▶ Ha $t \in T$ és $r \in q'$ a $q' \in Q'$ ekvivalenciaosztály egy tetszőleges reprezentánsa, akkor $\delta'(q', t)$ legyen $\delta(r, t)$ ekvivalenciaosztálya.
 - ▶ q'_0 legyen q_0 ekvivalenciaosztálya.
 - ▶ $F' = \{q' \in Q' \mid q' \text{ valamely } r \in Q \text{ reprezentánsára } r \in F\}$.
-
- ▶ δ' definíciójában mindegy melyik reprezentánst választjuk, hiszen \sim jobb-kongruencia reláció.
 - ▶ Ha egy ekvivalenciaosztály valamelyik reprezentánsa F -beli, akkor minden reprezentánsa F -beli (ε -ra se lehet őket megkülönböztetni).

A faktorautomata

Definíció

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q'_0, F' \rangle$ véges determinisztikus automaták. A két automata **izomorf**, ha van olyan $\varphi : Q \rightarrow Q'$ bijekció, melyre

- ▶ $\varphi(q_0) = q'_0$.
- ▶ $\varphi(F) := \bigcup_{q \in F} \{\varphi(q)\} = F'$.
- ▶ $\forall q \in Q, t \in T$ esetén $\varphi(\delta(q, t)) = \delta'(\varphi(q), t)$.

Tétel

Az A automata A/\sim faktorautomatája

1. ekvivalens A -val,
2. redukált, továbbá
3. izomorfia erejéig az egyetlen összefüggő, redukált A -val ekvivalens automata.

A faktorautomata

Lemma

Legyen $q \in Q$ tetszőleges és $q' \subseteq Q$ a $q \sim$ szerinti ekvivalenciaosztálya. Ekkor $L(A, q) = L(A/\sim, q')$.

Bizonyítás: Legyen $u \in T^*$ tetszőleges. Először vegyük észre, hogy $\delta'(q', u)$ éppen $\delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ez $|u|$ -ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítható. Valóban, $|u| = 0$ esetén nyilvánvaló. Ha minden $|u|$ -nál rövidebb szóra tudjuk, akkor legyen $u = vt$ ($v \in T^*$, $t \in T$). Ekkor $\delta'(q', vt) = \delta'(\delta'(q', v), t)$. v -re teljesül az indukciós feltétel, tehát $\delta'(q', v)$ éppen $\delta(q, v)$ osztálya, így választhatjuk $\delta(q, v)$ -t $\delta'(q', v)$ reprezentánsának. Így $\delta'(\delta'(q', v), t)$ éppen $\delta(\delta(q, v), t) = \delta(q, vt) = \delta(q, u)$ ekvivalenciaosztálya.

Ekkor viszont

$$u \in L(A, q) \Leftrightarrow \delta(q, u) \in F \Leftrightarrow \delta'(q', u) \in F' \Leftrightarrow u \in L(A/\sim, q').$$

A faktorautomata

1. Azonnal adódik a Lemmából q_0 -ra alkalmazva.
2. Legyenek $q', r' \in Q'$ tetszőleges A/\sim -ben megkülönböztethetetlen ekvivalenciaosztályok, azaz $q' \sim r'$. Ekkor $L(A/\sim, q') = L(A/\sim, r')$. A lemma miatt tetszőleges $q \in q', r \in r'$ reprezentánsokra $L(A, q) = L(A, r)$, azaz $q \sim r$. Tehát $q' = r'$, azaz a faktorautomata redukált.
3. Következik az alábbi, általánosabb lemmából:

Lemma

Legyenek $A = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ és $A' = \langle Q', T, \delta', q'_0, F' \rangle$ összefüggő, redukált és egymással ekvivalens véges determinisztikus automaták. Ekkor A és A' izomorfak.

Az izomorfizmus:

$$\varphi(\delta(q_0, u)) := \delta'(q'_0, u)$$

minden $u \in T^*$ -ra. Mivel az automaták összefüggőek, ezért $\text{Dom}(\varphi) = Q$ és $\text{Ran}(\varphi) = Q'$.

A faktorautomata

Legyenek $u, v \in T^*$ tetszőleges szavak.

$$\begin{aligned} \delta(q_0, u) = \delta(q_0, v) &\stackrel{\text{redukáltság}}{\iff} L(A, \delta(q_0, u)) = L(A, \delta(q_0, v)) \iff \\ L(A, q_0)_u = L(A, q_0)_v &\stackrel{\text{ekvivalencia}}{\iff} L(A', q'_0)_u = L(A', q'_0)_v \iff \\ L(A', \delta'(q'_0, u)) = L(A', \delta'(q'_0, v)) &\stackrel{\text{redukáltság}}{\iff} \delta'(q'_0, u) = \delta'(q'_0, v). \end{aligned}$$

Az első $\iff (\Rightarrow)$ iránya nyilván teljesül, míg a (\Leftarrow) irány A redukáltságából következik. Az utolsó \iff -ra hasonlóan.

Tehát φ jól definiált és bijektív.

- ▶ $\varphi(q_0) = \varphi(\delta(q_0, \varepsilon)) = \delta'(q'_0, \varepsilon) = q'_0,$
- ▶ $\varphi(F) = \bigcup_{u \in L(A)} \{\varphi(\delta(q_0, u))\} = \bigcup_{u \in L(A')} \{\delta'(q'_0, u)\} = F'$
- ▶ tetszőleges $\delta(q_0, u) \in Q$ állapot és $t \in T$ esetén
 $\varphi(\delta(\delta(q_0, u), t)) = \varphi(\delta(q_0, ut)) = \delta'(q'_0, ut),$ és
 $\delta'(\varphi(\delta(q_0, u)), t) = \delta'(\delta'(q'_0, u), t) = \delta'(q'_0, ut),$

azaz φ valóban izomorfizmus, a lemmát és így a tételt beláttuk.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

Jelölés: $T^{\leq i} := \{ w \in T^* \mid |w| \leq i \}$

q és q' megkülönböztethetlensége azt jelenti, hogy:

$$\begin{aligned} q \sim q' &\iff L(A, q) = L(A, q') \iff \\ &\iff \forall u \in T^* : (\delta(q, u) \in F \iff \delta(q', u) \in F). \end{aligned}$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $q \in Q$ **i -megkülönböztethetetlen** ($i \geq 0$) $q' \in Q$ -től (jelölés: $q \stackrel{i}{\sim} q'$), ha

$$\forall u \in T^{\leq i} : (\delta(q, u) \in F \iff \delta(q', u) \in F).$$

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

A $\varrho_2 \subseteq X \times X$ reláció a $\varrho_1 \subseteq X \times X$ reláció **finomítása** (jelölés: $\varrho_1 < \varrho_2$), ha minden $x, y \in X$ esetén $x\varrho_2y \Rightarrow x\varrho_1y$.

$\overset{i}{\sim}$ tulajdonságai:

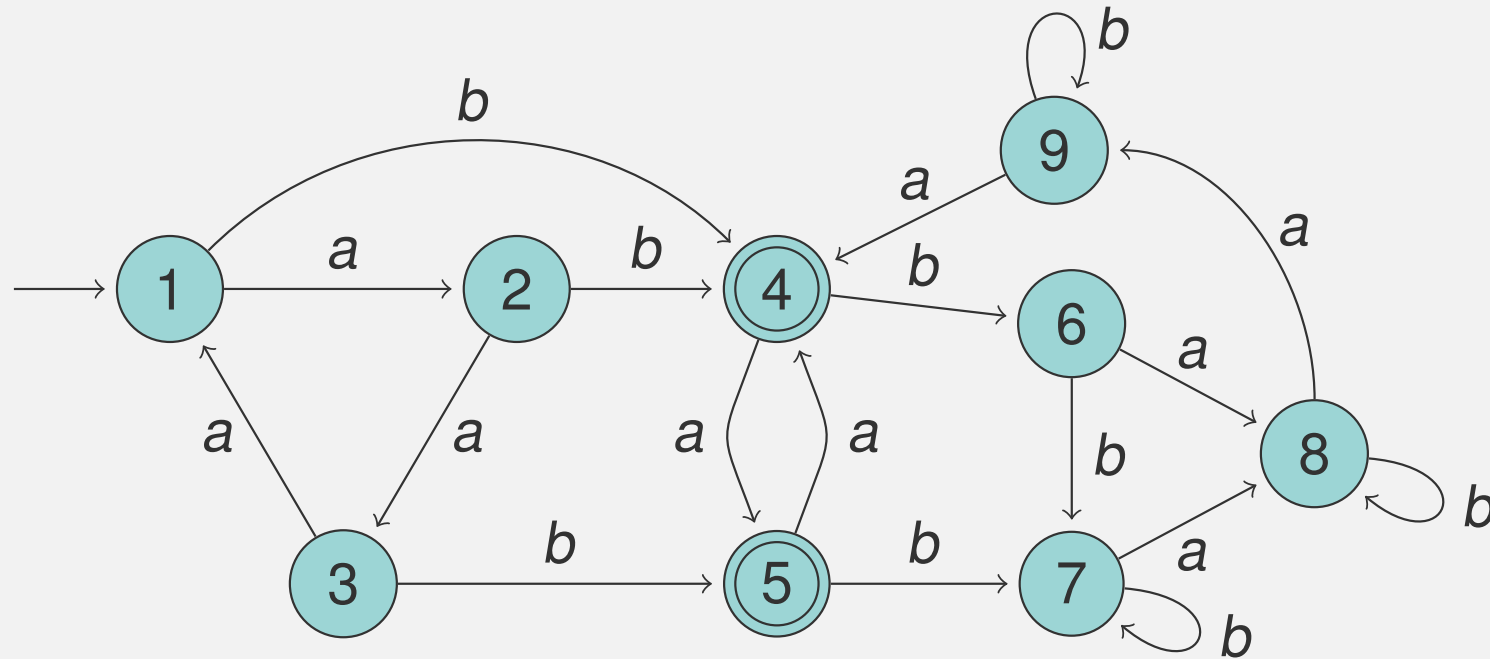
- ▶ $\overset{i}{\sim}$ ekvivalenciareláció,
- ▶ $q \overset{0}{\sim} q'$, ha $(q \in F \Leftrightarrow q' \in F)$,
- ▶ minden $q, q' \in Q$ -ra
 $q \overset{i+1}{\sim} q' \Leftrightarrow q \overset{i}{\sim} q' \wedge (\forall t \in T : \delta(q, t) \overset{i}{\sim} \delta(q', t))$,
- ▶ $\overset{0}{\sim} < \overset{1}{\sim} < \overset{2}{\sim} < \dots < \sim$,
- ▶ $q \sim q' \Leftrightarrow \forall i \geq 0 : q \overset{i}{\sim} q'$.

$\overset{i}{\sim}$ egy ponton túl tehát nem finomodhat tovább.

$i_0 := \min \{ i \mid \overset{i}{\sim} = \overset{i+1}{\sim} \}$. Ekkor $i_0 \leq |Q| - 1$, és $\sim = \overset{i_0}{\sim}$.

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

Példa: Redukáljuk a következő automatát!



Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

\sim_0 : {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9} , {4, 5}

	<i>a</i>	<i>b</i>
4	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}
5	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
2	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
3	{1,2,3,6,7,8,9}	{4,5}
6	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
7	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
8	{1,2,3,6,7,8,9}	{1,2,3,6,7,8,9}
9	{4,5}	{1,2,3,6,7,8,9}

\sim_1 : {1, 2, 3} , {4, 5} , {6, 7, 8} , {9}

	<i>a</i>	<i>b</i>		<i>a</i>	<i>b</i>		<i>a</i>	<i>b</i>
4	{4,5}	{6,7,8}	1	{1,2,3}	{4,5}	6	{6,7,8}	{6,7,8}
5	{4,5}	{6,7,8}	2	{1,2,3}	{4,5}	7	{6,7,8}	{6,7,8}
			3	{1,2,3}	{4,5}	8	{9}	{6,7,8}

\sim_2 : {1, 2, 3} , {4, 5} , {6, 7} , {8} , {9}

Állapotok ekvivalenciájának algoritmikus eldöntése

\tilde{z} : $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{6, 7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$

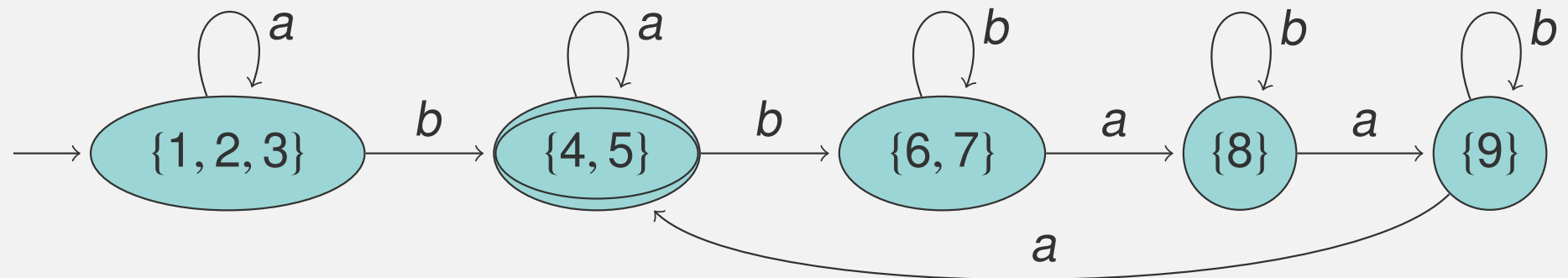
	<i>a</i>	<i>b</i>
4	$\{4, 5\}$	$\{6, 7\}$
5	$\{4, 5\}$	$\{6, 7\}$

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5\}$
2	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5\}$
3	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5\}$

	<i>a</i>	<i>b</i>
6	$\{8\}$	$\{6, 7\}$
7	$\{8\}$	$\{6, 7\}$

$\tilde{z} = \tilde{z} = \sim$

A redukált automata:



Az átmenetek és elfogadó állapotok meghatározásához tetszőleges reprezentánst tekinthetünk. Az eredeti kezdőállapotot tartalmazó ekvivalenciaosztály lesz az új kezdőállapot.

Minimális automata – összegzés

Tehát egy A véges determinisztikus automatához minimális automatát készíthetünk úgy, hogy

1. az elérhetetlen állapotait elhagyjuk ezzel előállítva egy A -val ekvivalens összefüggő automatát,
 2. majd a már összefüggő automata $\stackrel{i}{\sim}$ relációnak meghatározása segítségével a fenti módon algoritmikusan előállítunk egy redukált automatát.
- ▶ Az így kapott automata, összefüggő, redukált és ekvivalens A -val, ezért korábbi tételünk alapján izomorf az A/\sim -vel,
 - ▶ mivel az A_L^{MN} automata, ahol $L = L(A)$ szintén összefüggő, redukált (minden minimális automata redukált kell legyen) és A -val ekvivalens, ezért A_L^{MN} ugyanezen tétel alapján szintén izomorf a faktorautomatával,
 - ▶ mivel A_L^{MN} minimális automata, ezért a faktorautomata és az $\stackrel{i}{\sim}$ által algoritmikusan meghatározott automata is minimális automata, és ezek izomorfia erejéig ugyanazok.