Számítógépes Grafika
mintafeladatok

Feladat: Forgassunk a 3D-s pontokat 45 fokkal a X tengely körül, majd nyújtsuk az eredményt minden koordinátájában kétszeresére az origóhoz képest, utána forgassunk 90 fokot a Z tengely körül, végül tükrözzük az XY síkra. Mik az elemei a 4 transzformáció együttesét leíró 4x4-esmátrixnak?

Segítség: $\sin(45°)=\cos(45°)=\frac{\sqrt{(2)}}{2}$

Megoldás:

A négy transzformáció 4 mátrixa:

$$T_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_3=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Az eredmény *T* transzformációs mátrix ezeknek a részmátrixoknak a szorzata:

$$T=T_4 T_3 T_2 T_1=\begin{bmatrix}0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Feladat: Mi a Descartes koordinátája annak a pontnak, amelyik polárkoordinátás alakjából az derül ki, hogy 60 fokot zár be a vízszintes tengellyel, az origótól két egységre van.
Segítség: $\cos(60°)=0,5$ és $\sin(60°)=\sqrt{3}/2$

Megoldás:

$$X=r*\cos(\alpha)$$
$$Y=r*\sin(\alpha)$$
ahol $\alpha=60$ és $r=2$.

Ezért a megoldás az $(1,\sqrt{3})$ koordinátapáros.

Feladat: Adott egy pont egy baricentrikus (síkbeli) koordináta-rendszerben, melynek 3 súlypontja adott: $P1=(\sqrt{1},\sqrt{2})$, $P2=(\sqrt{3},\sqrt{4})$ és $P3=(\sqrt{6},\sqrt{7})$. Ismerjük egy pont első két baricentrikus koordinátáját, mindkettő értéke 0,25. Mennyi lesz a harmadik koordináta?

Megoldás: Mivel a baricentrikus koordináták összege mindig egy, a harmadik koordináta *0,5*.

Feladat: Adott egy pont a síkon homogén koordinátás alakban:

$$P=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

Írja fel polárkoordinátás alakban ugyanezt a pontot!

Megoldás: Először átváltjuk descartes-i alakba, ehhez a harmadik koordinátával elosztjuk az első kettőt:

$$P_{desc}=\begin{bmatrix}1/2\\3/2\\1\end{bmatrix}$$

Utána számíthatjuk a sugarat és a szöget:

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\phi=atan2(3,1)$$

Megjegyzés: $atan2(3,1)\approx 71,5°$ de ez nem szükséges a ZH-n a maximális pont eléréséhez.

Feladat: Adott három pont ***a****=(0,1)*, ***b****=(-1,1) és* ***c****(1,-1)*. Ez a három pont alkosson egy baricentrikus koordináta-rendszert. Határozd meg az origó baricentrikus kooordinátáit!

Megoldás:

Ki kell számolni négy területet. (Az egyszerűség kedvéért mindenhol a terület kétszeresével számolunk, hiszen a determinánsok a háromszög területének kétszeresét adják):

1. Az ***a***,***b***,***c*** pontok által meghatározott terület:
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1-1-0+1+0+1=2$$
2. Az origó, az ***a*** és a ***b*** pontok területe
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0+1-0+0+0-0=1$$
3. Az origó, az ***a*** és a ***c*** pontok területe
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0-1-0+0+0-0=-1$$
   (megjegyzés: előjel nem számít, az a csúcsok felsorolásától függ!!)
4. Az origó, a ***b*** és a c pontok területe
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1-0+0+0-0+0=0$$
   Tehát a koordináták: $\lambda_1=0/2=0$, $\lambda_2=1/2$ és $\lambda_1=1/2$

Feladat:

Adott egy 3×4 -es vetítő mátrix:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

Vetítés után a képernyőn hol helyezkedik el a $[200,100,200]^T$ térbeli pont vetülete?

Megoldás:

A projekciós mátrixszal meg kell szorozni a pont homogén koordinátás alakját:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200\\ 100\\ 200\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}603\\ 1101\\ 101\end{bmatrix}$$

Befejezésül a homogén osztást kell elvégezni:

$$\begin{bmatrix}603\\ 1101\\ 101\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}603/101\\ 1101/101\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5,87\\ 10,9\end{bmatrix}$$

Feladat:

Írjuk fel az $x^2+y^2+z^2=9$ gömb és a $[0,1,2]^T$ ponton átmentő, $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$ irányvektorú egyenes metszéspontjait!

Megoldás:

Az egyenes pontjai a $[0,1,2]^T+\frac{t}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$ paraméteres felírással adhatók meg, ebből a három koordináta:

$$x=\frac{t}{\sqrt{3}}$$
$$y=1+\frac{t}{\sqrt{3}}$$
$$z=2+\frac{t}{\sqrt{3}}$$

Ezt behelyettesítve a gömb egyenletébe:

$$\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(1+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(2+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2=9$$

Ez egy másodfokú egyenlet:

$$t^2+\frac{6}{\sqrt{3}}t-4=0$$

A megoldás a jól ismert megoldóképletből jön:

$$t=\frac{\frac{-6}{\sqrt{3}}\pm\sqrt{12+16}}{2}$$

Ebből a két megoldás:

$$t_1=\frac{-3}{\sqrt{3}}+\sqrt{7} \qquad t_2=\frac{-3}{\sqrt{3}}-\sqrt{7}$$

A megoldásokat a kapott paramétereket visszahelyettesítve kapjuk meg a két metszéspontot:

$$[0,1,2]^T+\left(-1+\sqrt{7/3}\right)[1,1,1]^T$$

és

$$[0,1,2]^T+\left(-1-\sqrt{7/3}\right)[1,1,1]^T$$

Feladat:

Számítsuk ki 2D-ben a $x+2y+3=0$ és a $4x+5y+6=0$ implicit egyenlettel megadott egyenesek metszéspontját!

Megoldás:

Amennyiben homogén koordinátákkal számolunk, a megoldás az $A\,p=0$ egyenletből jön, ahol

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \text{ és } p=\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix} .$$

A feladat

$A'\,p'=b'$ alakra hozható, ahol $A'=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, $p'=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ és $b'=\begin{bmatrix}-3\\ -6\end{bmatrix}$

A megoldás $p'=A'^{-1}-b'$

A mátrix inverze az adjungált és a determináns hányadosa:

*det(A')=1*5-2*4=-3*

$$adj(A')=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{det}(A')\,adj(A')\,b=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ -6\end{bmatrix}$$

A műveletet elvégezve *x=1* és *y=-2* adódik.

Megoldás 2:

Az implicit egyenletekből két vektor adódik, amelyere merőleges az eredmény (homogén koordinátás alakban):

$v_1=[1,2,3]^T$ és $v_2=[4,5,6]^T$.

Az a vektor, amelyik két vektorra merőleges, a két vektornak a vektoriális szorzatával megkapható:

$$v_1\times v_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 6\\ -3\end{bmatrix}$$

A homogén osztást elvégezve adódik a végeredmény:

$\begin{bmatrix}-3\\ 6\\ -3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$, ami éppen megegyezik az első megoldásban kapott értékekkel.

Feladat:

Számítsuk ki a $[0,1,2]^T$ pont és a $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$ irányvektorú egyenes metszéspontját a $x+2y+3z+4=0$ síkkal!

Megoldás:

Az irányvektornak nem kell feltétlen egységvektornak lenni ezért az egyenest $[0,1,2]^T+t[1,1,1]^T$ alakban írjuk fel. A koordináták így alakulnak a paraméter függvényében:

$$x=t$$
$$y=1+t$$
$$z=2+t$$

Ezt behelyettesítve az egyenes egyenletébe kapjuk, hogy

$$t+2(1+t)+3(2+t)+4=0$$

Ebből *t=-2* adódik. Ezt visszahelyettesítve az egyenes parametrikus egyenesére kijön, hogy *x=-2*, y=-1 és *z=0*.

Feladat:

Határozzuk meg a $p_e = [0,1,2]^T$ ponttal és $v_e = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^T$ irányvektorral meghatározott egyenes metszéspontját azzal a síkkal, melynek egy pontja $p_s = [3,4,5]^T$, normálvektora $n = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^T$

Megoldás:

Egy *p* pont akkor van rajta a síkon, ha igaz, hogy $n^T(p - p_s) = 0$

Az egyenes paraméteres alakja: ($\sqrt{2}$ skalárokat szokásos módon elhagyva):
$p = [0,1,2]^T + t[1,0,1]^T$

Ez visszahelyettesítve:

$$n^T(p - p_s) = [1,1,0]^T([0,1,2]^T + t[1,0,1]^T - [3,4,5]) = 0$$

$$[1,1,0]^T(+t[1,0,1]^T - [3,3,3]) = 0$$

$$t - 6 = 0$$

$$t = 6$$

Ebből pedig a pontra adódik, hogy

$$p = [0,1,2]^T + t[1,0,1]^T = [6,1,8]$$

Feladat:

Adott egy felület pontja $x = [0,1,2]^T$ és normálvektora $n = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$. Beérkezik egy fénysugár a felületi pontba, a fénysugár irányvektora $v = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^T$. A felületen a fény tükrözödik. Visszaverődés után mi lesz az új fény egyenese (ponttal és irányvektorral ábrázolva)?

Megoldás:

A visszaverődés után az egyenes átmegy az *x* ponton. Irányvektorát így számoljuk:
n normálvektor és *v* irányvektor skaláris szorzata*:* $n \cdot v = \frac{2}{\sqrt{6}}$ A visszaverődés összefüggése:

$$v_r = v - 2\mathrm{n}(n \cdot v)$$

Behelyettesítve:

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^T - \frac{2}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1]^T - \frac{4}{\sqrt{18}}[1,0,1]^T$$

$$\left[-\sqrt{\frac{1}{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}, -\sqrt{\frac{1}{18}}\right]^T$$

Feladat:

Adott egy felület pontja $x=[0,0,0]^T$ és normálvektora $n=[0,1,0]^T$. Beérkezik egy fénysugár a felületi pontba, a fénysugár irányvektora $v=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^T$. A felületen a fény megtörik, a törésmutató $\eta=1,5$ Törés után mi lesz az új fény egyenese (ponttal és irányvektorral ábrázolva)?

Megoldás:

A visszaverődés után az egyenes átmegy az *x* ponton (origón), ez lesz a fényegyenes egyik pontja.

A megtört fény irányát a Snellius-Descartes törvény segítségével írhatjuk le. A beeső fény szögét az irányvektor és a normálvektor skaláris szorzatából számíthatjuk ki:

$$\cos\alpha=n\cdot v=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Azaz *45°*-os a beeső szög. A törés utáni szög: $\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{\eta}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Ebből a szög koszinuszára megkapjuk: $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$$v_t=\sin\beta\, n_{mer}-n\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{3}[1,0,0]^T-\frac{\sqrt{7}}{3}[0,1,0]^T=\left[\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{-\sqrt{7}}{3},0\right]$$

Feladat:

Az $x+2y+3=0$ implicit egyenlettel megadott egyenes elvágja-e a *[0 1]*, illetve [2 1] végpontokkal megadott szakaszt?

Megoldás:

Be kell helyettesíteni a két pontot az implicit egyenletbe. Így 0+2+3=5 és 2+2+3=7 adódik. Mivel a két szám előjele megegyezik, nem fogja elvágni.

Feladat:

A $p_0=[2,3]^T$ ponttal és $n=\frac{1}{\sqrt{5}}[1,2]^T$ normálvektorral megadott egyenes elvágja-e a *[10 1]*, illetve [-2 1] végpontokkal megadott szakaszt? Ha igen, hol lesz a metszéspont?

Megoldás:

A végpontokból le kell vonni az egyenes pontját., és a normálvektorral kell skalárisan szorozni. A két előjel különbözése esetén kell vágni., Normálvektornál a hossz ebben az esetben nem számít, az $n'=[1,2]^T$ alakkal nyugodtan lehet számolni.

$$\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=-4$$

és

$$\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=8$$

Az előjelek különböznek, tehát vágni kell.

Metszéspont számítása könnyű, szerencsére a szakaszon az y koordináta nem változik. A szakasz egyenlete:

$$\begin{bmatrix}10\mathrm{t}-(1-t)2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\mathrm{t}-2\\1\end{bmatrix}$$

Metszés:

$$\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12\mathrm{t}-2\\1\end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=0$$

Azaz

$$-12\mathrm{t}+4+4=0$$

Ebből *t=8/12* adódik. Visszahelyettesítve [6 1] pont jön ki.

Feladat:

Egy háromszög három csúcsa a *[-1,-1,-1], [-1 1,1]* és *[1,0,0]* pontokban van. A háromszög középpontja a súlypontban, azaz a *[-1/3,0,0]* pontban. Doo-Sabin algoritmust futtatva hol lesznek a lapon az új csúcspontok az első iteráció végén?

Megoldás:

A három vertex-nél lesznek új csúcsok. A szakaszfelező pontok, a lapközéppont és a vertex eredeti csúcsának átlagaként jönnek ki.

A felezőpontok:

1. ([-1,-1,-1] +[-1,1,1])/2 = [-1,0,0]
2. ([-1,1,1] +[1,0,0])/2 = [0,1/2,1/2]
3. ([-1,-1,-1] +[1,0,0])/2 = [0,-1/2,-1/2]

Végezetül új vertex-ek

1. ([-1,-1,-1] +[-1,0,0] + [0,-1/2,-1/2] + *[-1/3,0,0])/4 = [-7/12 , -3/8 , -3/8]*
2. *([-1,1,1] +[-1,0,0] + [0,1/2,1/2] + [-1/3,0,0])/4 = [-7/12 , 3/8 , 3/8]*
3. *([-1,0,0]+[0,1/2,1/2]+[0,-1/2,-1/2]+[-1/3,0,0])/4 = [-1/3,0,0]*