5. Normák, kondíciószám

5.1. Feladat

Tekintsük a $v = (-1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 5) \in \mathbb{R}^5$ vektort! Határozzuk meg a v vektor $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ normáit!

- Az $\|.\|_1$ normát a következő képlet alapján számoljuk:

$$\|v\|_1 := \sum_{k=1}^{5} |v_k|,$$

így tehát $\quad \|v\|_1 = |-1| + |0| + |1| + |3| + |5| = 10.$

- A $\|.\|_2$ norma a vektor szokásos (euklideszi) hosszúsága:

$$\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{5} |v_k|^2},$$

vagyis $\quad \|v\|_2 = \sqrt{|(-1)|^2 + |0|^2 + |1|^2 + |3|^2 + |5|^2} = 6.$

- A $\|.\|_\infty$ norma pedig:

$$\|v\|_\infty := \max_{k=1}^{5} |v_k|,$$

tehát $\quad \|v\|_\infty = \max\{|-1|,\ |0|,\ |1|,\ |3|,\ |5|\} = 5.$

5.2. Feladat*

(a) Igaz, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\|x\|_p \leq \|x\|_q$, ha $p \geq q \geq 1$?

(b) Hogyan szemléltethető az (a) feladatbeli állítás az $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ normák és egy tetszőleges $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektor esetén?

(a) Az állítás belátásához legyen x tetszőleges nem nulla vektor, és legyen $\alpha = \|x\|_q^{-1}$. Mivel

$$0 \leq \alpha |x_i| = \frac{|x_i|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^q \right)^{1/q}} = \left(\frac{|x_i|^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^q} \right)^{1/q} \leq 1,$$

azaz $0 \leq \alpha|x_i| \leq 1$, így $(\alpha|x_i|)^p \leq (\alpha|x_i|)^q$ minden $i = 1 \ldots n$ esetén. Ezt az összefüggést minden komponensre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha|x_k|)^p \leq \sum_{k=1}^{n} (\alpha|x_k|)^q = \alpha^q \sum_{k=1}^{n} |x_k|^q = 1.$$

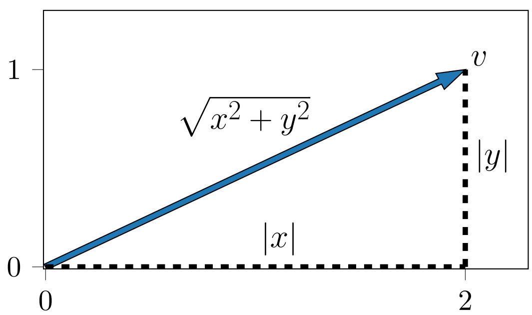
Innen viszont

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha|x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha \|x\|_p \leq 1.$$

Leosztva α-val, és kihasználva, hogy $\alpha = \|x\|_q^{-1}$:

$$\|x\|_p \leq \frac{1}{\alpha} = \|x\|_q.$$

(b) Ábrázoljunk egy tetszőleges $v = (x, y)$ pontot derékszögű koordinátarendszerben!



Ekkor a v vektor, valamely tengelyre vett merőleges vetülete és az origó egy derékszögű háromszöget határoz meg. A háromszög befogói $|x|$ és $|y|$ hosszúságúak, az átfogó pedig a Pitagorasz-tétel szerint $\sqrt{x^2+y^2}$ hosszú. Mivel

$$\|v\|_1 = |x| + |y|, \qquad \|v\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \|v\|_\infty = \max\{|x|, |y|\},$$

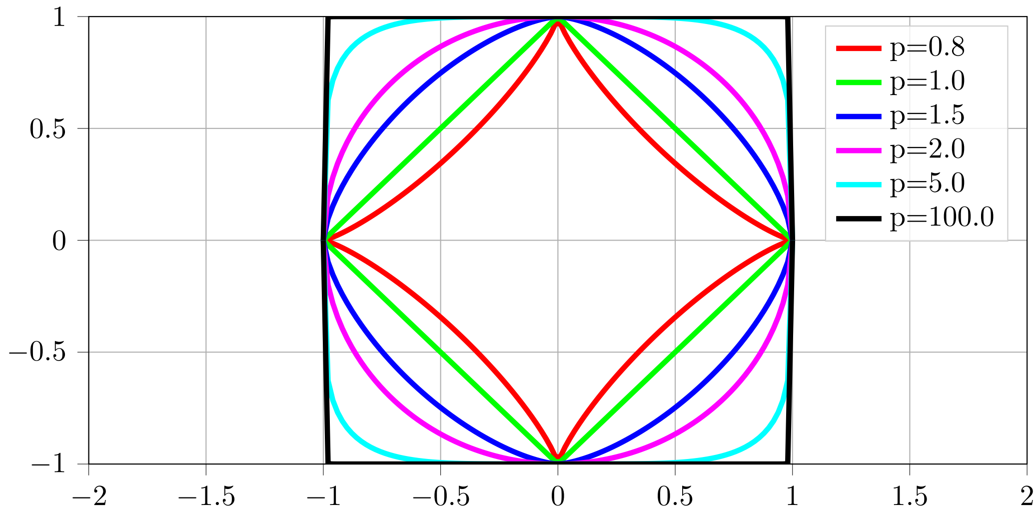
így $\|v\|_1$ a két befogó együttes hosszával egyenlő, $\|v\|_2$ az átfogó hosszával, $\|v\|_\infty$ pedig a hosszabbik befogó hosszával, melyek között a

$$\|v\|_1 \geq \|v\|_2 \geq \|v\|_\infty$$

egyenlőtlenségek nyilván fennálnak. A szóban forgó normákat szokás az „egységgömbjükkel" jellemezni, ehhez meg kell találnunk az összes olyan síkbeli vektort, amelyek valamely normában mért hosszúsága éppen 1. A fentiek szerint a tetszőleges v síkvektorhoz szerkesztett T derékszögű háromszögre a következők igazak:

- $\|v\|_1 = 1$ akkor és csak akkor, ha a T befogói hosszának összege 1,
- $\|v\|_2 = 1$ akkor és csak akkor, ha a T átfogója 1 hosszú,
- $\|v\|_\infty = 1$ akkor és csak akkor, ha a T hosszabbik befogója 1 hosszú.

A következő ábrán néhány $\|.\|_p$ „norma" egységgömbjét ábrázoltuk. Fontos megjegyezni, hogy a $\|.\|_p$ kifejezés ugyan értelmezhető abban az esetben is, ha $0 < p < 1$, azonban ekkor $\|.\|_p$ nem norma, ugyanis nem teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget.



5.3. Feladat

Határozzuk meg a következő mátrixok $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_F$ és $\|.\|_\infty$ mátrixormáit!

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Az A mátrix normái a következők.

- Az $\|.\|_1$ mátrixnorma az *oszlopnorma*, melyet az $\|.\|_1$ vektornorma indukál. Értékét úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámítjuk a mátrix *oszlopvektorainak* $\|.\|_1$ vektornormáját, majd vesszük az így kapott számok maximumát:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{|-1| + |1|, \quad |0| + |2|\} = 2.$$

- A $\|.\|_\infty$ mátrixnorma a *sornorma*, melyet az $\|.\|_\infty$ vektornorma indukál. Értékét úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámítjuk a mátrix *sorvektorainak* $\|.\|_1$ vektornormáját, majd vesszük az így kapott számok maximumát:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{|-1| + |0|, |1| + |2|\} = 3.$$

- Az A mátrix Frobenius-normája az elemei négyzetösszegének gyöke, képlete alapján nagyon hasonlít a $\|.\|_2$ vektornormára, de érdemes megjegyezni, hogy nincs közöttük indukciós kapcsolat. Sőt, a Frobenius-norma nem indukált norma, nem létezik vektornorma, amely indukálná. Jelen feladat esetében:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|^2} = \sqrt{|-1|^2 + |1|^2 + |0|^2 + |2|^2} = \sqrt{6}.$$

- A $\|.\|_2$ mátrixnorma a *spektrálnorma*, értéke az A^TA mátrix spektrálsugara, azaz legnagyobb abszolútértékű sajátértéke. Emlékeztetünk, hogy az A^TA mátrix szimmetrikus, ezért sajátértékei valósak; valamint pozitív szemidefinit, ezért a sajátértékei nemnegatívak. Így az alábbi kifejezés bármely A mátrix esetén értelmezhető:

$$\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{2} \lambda_i(A^TA)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\varrho(A^TA)}.$$

  Számítsuk ki először az A^TA mátrixot:

$$A^TA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tudjuk, hogy A^TA sajátérékei karakterisztikus polinomjának gyökei, keressük meg a szóban forgó gyököket:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot 2 =$$
$$= 8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete használatával megkapjuk a két gyököt, melyek tehát az A^TA mátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Ebből pedig

$$\varrho(A^TA) = \max_{i=1}^{2} |\lambda_i(A^TA)| = \max\left\{|3-\sqrt{5}|,\ |3+\sqrt{5}|\right\} = 3+\sqrt{5},$$

így végül

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^TA)} = \sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

(b) A B mátrix normái a következők.

- B $\|.\|_1$ normája a következő:

$$\|B\|_1 = \max_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} |b_{ij}| = \max\{|4|+|2|, \quad |2|+|4|\} = 6.$$

- B szimmetriája miatt a sor- és az oszlopnormák megegyeznek, ezért a $\|.\|_\infty$ normát nem is érdemes definíció szerint számolnunk.

5.1. Megjegyzés

$$B = B^T \quad \Longrightarrow \quad \|B\|_1 = \|B\|_\infty$$

vagyis $\|B\|_\infty = 6$.

- A Frobenius-norma:

$$\|B\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} |b_{ij}|^2} = \sqrt{|4|^2+|2|^2+|2|^2+|4|^2} = \sqrt{40}.$$

- A B mátrix szimmetrikus, ezért $\|B\|_2$-t kiszámíthatjuk B spektrálsugarával, ugyanis
$$\|B\|_2 = \sqrt{\varrho(B^TB)} = \sqrt{\varrho(B^2)} = \sqrt{\varrho^2(B)} = \varrho(B).$$

5.2. Megjegyzés

$$B = B^T \quad \Longrightarrow \quad \|B\|_2 = \rho(B)$$

Írjuk fel ezek után B karakterisztikus polinomját:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} &= (4-\lambda)^2 - 2\cdot 2 = \\ &= 16 - 8\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \end{aligned}$$

A $P(\lambda) = 0$ egyenletet megoldva kapjuk a sajátértékeket:

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1} = 4 \pm 2,$$

az előzőek alapján pedig

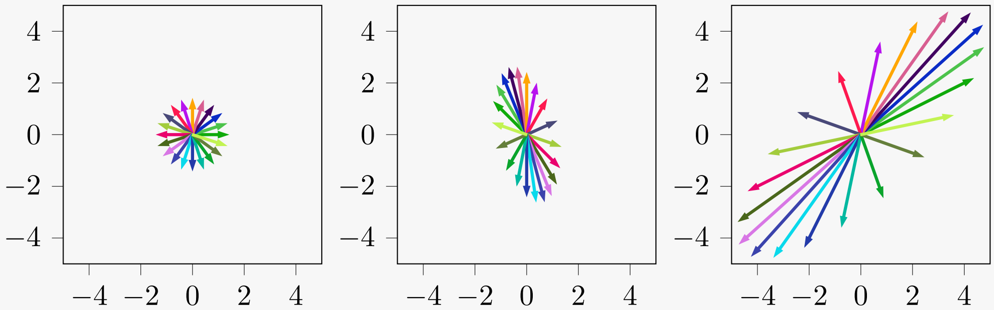
$$\|B\|_2 = \varrho(B) = \max_{i=1}^{2} |\lambda_i(B)| = \max\{|2|,\ |6|\} = 6.$$

5.3. Megjegyzés

Érdemes geometriai szemléletet is társítani a most megoldott feladathoz. Legyen

$$v_k := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \end{bmatrix} \qquad (m \in \mathbb{N},\ k = 0\dots, m-1).$$

Ekkor a v_k vektorok egy egységkörbe írt szabályos m oldalú sokszög csúcsaiba mutató helyvektorok. Ha a v_k vektorokat megszorozzuk az előző feladatbeli A és B mátrixokkal, akkor azok iránya és hossza megváltozik. A következő ábrán balról jobbra az egyes v_k, Av_k, Bv_k vektorokat tüntettük fel (a különböző színek különböző k indexekhez tartoznak).



Mivel v_k az egységkör (vagyis az eukledszi norma egységgömbjének) egy pontja, így $\|v_k\|_2 = 1$. Tudjuk, hogy

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2,$$

azaz $\|A\|_2$ az a legnagyobb szám, ahányszorosára változhat az egységvektorok hossza az A mátrix által leírt transzformáció hatására. Az ábrákról leolvasható, hogy az A mátrixszal transzformált vektorok közül a leghosszabb kb. 2 hosszúságú, míg a B-vel transzformált vektorok leghosszabbika kb. 6 egység hosszú. Emlékezzünk, hogy $\|A\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}} \approx 2.29$, míg $\|B\|_2 = 6$, mely a fenti ábrákon látható hosszváltozásokat megmagyarázza.

5.4. Feladat

Határozzuk meg az előző feladatbeli mátrixokra a $\mathrm{cond}_1(A)$ és $\mathrm{cond}_2(B)$ mennyiségeket!

(a) A kondíciószám definícióját használjuk fel:

$$\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1.$$

Tehát a kondíciószám meghatározásához először is meg kell határoznunk A^{-1}-et:

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)\cdot 2 - 1\cdot 0}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Most, az előző feladat alapján kiszámíthatjuk $\|A^{-1}\|_1$ értékét.

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{j=1,2}\left\{|-1| + \left|\frac{1}{2}\right|, \quad |0| + \left|\frac{1}{2}\right|\right\} = \frac{3}{2},$$

Ezt, valamint korábbi eredményeinket felhasználva

$$\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 2\cdot\frac{3}{2} = 3.$$

(b) Most $\mathrm{cond}_2(B) = \|B\|_2 \cdot \|B^{-1}\|_2$ értékét szeretnénk meghatározni. Ehhez elvileg ki kellene számolnunk a B^{-1} mátrixot és a $\|B^{-1}\|_2$ normát. Azonban B szimmetrikus, ezért a kettes kondíciószám meghatározására használhatjuk az alábbi összefüggést.

5.4. Megjegyzés

$$B = B^T \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{cond}_2(B) = \varrho(B)\cdot\varrho(B^{-1}) = \frac{\max\limits_{i=1}^{n}(|\lambda_i(B)|)}{\min\limits_{i=1}^{n}(|\lambda_i(B)|)}$$

A 2. (b) feladat alapján a B mátrix sajátértékei a 2 és a 6, ezt felhasználva:

$$\mathrm{cond}_2(B) = \frac{\max\{|6|,\ |2|\}}{\min\{|6|,\ |2|\}} = \frac{6}{2} = 3.$$

5.5. Feladat*

Legyen $\varepsilon > 0$ kicsi pozitív szám, és definiáljuk az A mátrixot a következőképpen:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mint mondhatunk az A mátrix 1-es kondíciószámáról?

(b) Állítsuk elő az A mátrix LU-felbontását! Vizsgáljuk meg az L és U mátrixok 1-es kondíciószámát!

(a) Számítsuk ki az A^{-1} mátrixot!

$$\det(A) = \varepsilon \cdot 1 - 1 \cdot 1 = \varepsilon - 1 \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon - 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Feltételezéseink szerint $\varepsilon > 0$ kicsi pozitív szám (azaz sokkal kisebb, mint 1), ezért

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\Big\{|\varepsilon| + |1|,\ |1| + |1|\Big\} = 2, \\ \|A^{-1}\|_1 &= \frac{1}{|\varepsilon - 1|} \max\Big\{|1| + |-1|,\ |-1| + \varepsilon\Big\} = \frac{2}{1 - \varepsilon} \approx 2. \end{aligned}$$

Így tehát

$$\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 \approx 2 \cdot 2 = 4.$$

(b) Számítsuk ki az A mátrix LU-felbontását GE segítségével:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{(2) - \frac{1}{\varepsilon}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix},$$

ezért tehát

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

A kondíciószám meghatározásához számítsuk ki az L és U mátrixok inverzeit:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U^{-1} = \frac{1}{\varepsilon - 1} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\varepsilon} & -1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Ezután számítsuk ki (és becsüljük) az L, L^{-1}, U, U^{-1} mátrixok $\|.\|_1$ normáit:

$$\begin{aligned}
\|L\|_1 &= \max\Big\{|1| + |\tfrac{1}{\varepsilon}|,\ |0| + |1|\Big\} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon},\\
\|L^{-1}\|_1 &= \max\Big\{|1| + |-\tfrac{1}{\varepsilon}|,\ |0| + |1|\Big\} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon},\\
\|U\|_1 &= \max\Big\{|\varepsilon| + |0|,\ |1| + |1 - \tfrac{1}{\varepsilon}|\Big\} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1}{\varepsilon},\\
\|U^{-1}\|_1 &= \frac{1}{|\varepsilon - 1|} \max\Big\{|0| + |1 - \tfrac{1}{\varepsilon}|,\ |-1| + |\varepsilon|\Big\} =\\
&= \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] \approx 1 \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Így végül a következőt kapjuk a kondíciószámokra:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cond}_1(L) &= \|L\|_1 \cdot \|L^{-1}\|_1 \approx \frac{1}{\varepsilon^2},\\
\mathrm{cond}_1(U) &= \|U\|_1 \cdot \|U^{-1}\|_1 \approx \frac{1}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszerek perturbációs tételei szerint a LER numerikus megoldásának relatív hibája a LER mátrixának kondíciószámával közelítőleg egyenesen arányos. Az $Ax = b$ LER „jól kondícionált”, hiszen $\mathrm{cond}_1(A) = 4$ meglehetősen kicsi. Viszont, ha az LU felbontáson keresztül számítjuk megoldást, akkor az $Ly = b$ és $Ux = y$ egyenletrendszerek mindegyike rosszul kondícionált, hiszen ha ε kicsi pozitív szám, akkor $\frac{1}{\varepsilon^2}$ nagyon nagy pozitív szám, és ahogy ez imént láttuk $\mathrm{cond}_1(L) \approx \mathrm{cond}_1(U) \approx \frac{1}{\varepsilon^2}$.

5.5. Megjegyzés

A feladat A mátrixának főminorai nullától különbözők, ezért a LU-felbontása létezik és egyértelmű. Azonban az LU-felbontás kiszámítása során ugyanúgy jelentkezhetnek a generáló elemek rögzített kiválasztási sorrendjéből eredő nemkívánatos jelenségek, ahogy azt a GE esetén is tapasztaltuk. Érdemes lehet az LU-felbontáshoz használt GE során is részleges főelemkiválasztást használni, így nyerhetjük az LUP-felbontást. Az $PA = LU$ felbontásban az LU-felbontáshoz hasonlóan $L \in \mathcal{L}_1, U \in \mathcal{U}$, P pedig permutáló mátrix, mely az egységmátrix sorainak/oszlopainak permutációjával kapható. A részleges főelemkiválasztás numerikus hibát csökkentő tulajdonságának köszönhetően elkerülhető a szorzatfelbontás során a kondíciószám nagymértékű növekedése. Jelen feladat esetében az A mátrix LUP-felbontása például:

$$A = P^T \cdot L \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix}.$$

A fenti mátrixokra pedig:

$$\begin{aligned} \mathrm{cond}_1(P^T) &= 1, \\ \mathrm{cond}_1(L) &\approx 1, \\ \mathrm{cond}_1(U) &\approx 4. \end{aligned}$$