3. Gauss-elimináció

3.1. Feladat

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(a) Határozzuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldását Gauss-eliminációval és visszahelyettesítéssel!

(b) Határozzuk meg a megoldást sorműveletekkel is!

(c) Számítsuk ki az A mátrix determinánsát!

(a) Először végezzük el a Gauss-eliminációt!

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right] \overset{\substack{(2)-2\cdot(1)\\(3)+1\cdot(1)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{array}\right] \overset{(3)+1\cdot(2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

A Gauss-elimináció elvégzése után alulról felfelé egyesével megoldhatjuk az egyenleteket a visszahelyetessítés algoritmusával. Az egyenletek a következők:

$$\begin{array}{lrcr} (1) & x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 4, \\ (2) & -5x_2 + 5x_3 & = & -5, \\ (3) & 5x_3 & = & 5. \end{array}$$

A jó sorrend miatt a megoldásvektor egyes komponensei közül minden sorban csak egy komponens lesz ismeretlen:

$$\begin{array}{lrcl}
(3) & x_3 & = & 1, \\
(2) & x_2 & = & -\frac{1}{5}(-5-5\cdot 1)=2, \\
(1) & x_1 & = & 4-2\cdot 2+1=1.
\end{array}$$

Így tehát a megoldás a következő:

$$x=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

(b) A másik lehetőség, hogy miután Gauss-eliminációval felsőháromszög mátrix alakra hoztuk a LER mátrixát, visszafelé indítjuk az algoritmus, a jobb alsó saroktól a bal felső sarok felé eliminálva a megmaradt elemeket a főátló *felett*. Oldjuk meg így is a kapott LER-t!

$$\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -5 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{array}\right] \overset{\substack{(2)-1\cdot(3)\\(1)+\frac{1}{5}\cdot(3)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & 0 & 5\\ 0 & -5 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{array}\right] \overset{(1)+\frac{2}{5}\cdot(2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{array}\right] \overset{\substack{-\frac{1}{5}\cdot(2)\\\frac{1}{5}\cdot(3)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

Az utolsó lépésben az egyes sorokat olyan számokkal osztottuk, hogy a bal oldalra éppen egységmátrixot kapjunk (vigyázat, ez a művelet nem determinánstartó!). Innen már kiolvasható, hogy $x_1=1$, $x_2=2$ és $x_3=1$, azaz

$$x=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

3.1. Megjegyzés

Fontos megjegyezni, hogy ha Gauss-elimináció (GE) és sorműveletek (SM) segítségével az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer mátrixát egységmátrix alakra hozzuk, akkor a jobb oldal vektor helyén a megoldás áll. Ezt a tényt a következőképpen foglalhatjuk össze:

$$\left[\, A \mid b \,\right] \quad \overset{GE+SM}{\sim} \quad \left[\, I \mid x \,\right]$$

(c) A GE során determinánstartó műveleteket végzünk, ezért a transzformáció akármelyik lépésében a bal oldalon szereplő mátrix determinánsa megegyezik az A mátrix determinánsával. A GE végeztével kapott felsőháromszög mátrixot érdemes ellenőriznünk, hiszen a háromszögmátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata, ezért

$$\det(A) = 1 \cdot (-5) \cdot 5 = -25.$$

Érdemes azonban hansúlyozni, hogy a LER sorműveletekkel való megoldásának utolsó lépésében végzett művelet (sorok számmal való szorzása) nem determinánstartó. A determináns leolvasását érdemes még azelőtt megtenni, hogy egy efféle műveletettel megváltoztatnánk annak értékét.

3.2. Feladat

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg az $Ax = b$ és $Ay = c$ lineáris egyenletrendszereket Gauss-elimináció segítéségével! Az eliminációt csak egyszer végezzük el!

3.2. Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a GE lépései csak az egyenletrendszer mátrixától függenek, a jobb oldal vektortól nem. Ezért ha a LER-t több különböző jobb oldal vektorok mellett kell megoldanunk, érdemes ezt egyszerre megtenni, ekkor nem kell feleslegesen újra és újra elvégeznünk ugyanazokat a számításokat a mátrix elemein. Ha például az $Ax = b$ és $Ay = c$ LER-t egyszerre szeretnénk megoldani, akkor azt megtehetjük egyszerűen úgy, hogy nem egy, hanem két jobb oldalvektorral dolgozunk, és A-t egységmátrix alakra hozzuk GE+SM segítségével:

$$\left[\begin{array}{c|cc} A & b & c \end{array}\right] \quad \overset{GE+SM}{\sim} \quad \left[\begin{array}{c|cc} I & x & y \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2)-2\cdot(1) \\ (3)-3\cdot(1) \\ (4)-1\cdot(1) \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} (3)-1\cdot(2) \\ (4)-1\cdot(2) \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

A Gauss-elimináció ezen a ponton elakad, mivel a bekeretezett elemmel kellene osztanunk. A mátrix utolsó két sora csupa 0, ami a determináns nulla voltát jelzi. Mivel detereminánstartó műveleteket végeztünk, levonhatjuk a következtetést, hogy a megadott A

mátrix determinánsa is nulla, azaz a lineáris egyenletrendszernek (semmilyen jobb oldal vektor mellett) nincs egyértelmű megoldása. Ennél viszont többet is észrevehetünk, a b jobb oldal vektor mellett az utolsó két sor

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$$

alakú, amely bármely $x \in \mathbb{R}^4$ vektor esetén igaz, ezért az $Ax = b$ LER-nek végtelen sok megoldása van. Viszont a c jobb oldal vektor mellett az utolsó sor jelentése a következő

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -2$$

amely egyetlen $x \in \mathbb{R}^4$ vektor esetén sem teljesül, azért az $Ay = c$ LER-nek nincs megoldása.

3.3. Megjegyzés

Ha a mátrix determinánsa 0, akkor általában a GE valamely lépésben elakad, ez viszont nem szükségszerű. Az is előfordulhat, hogy az utolsó lépésben kapunk a főátlóba nullát, tehát a GE befejezi a működését, és a visszahelyettesítésnél észleljük, hogy a LER-nek nincs egyértelmű megoldása.

3.4. Megjegyzés

Ha a Gauss-elimináció elakad (azaz valamely köztes lépésben nullát kapunk a főátlóba), abból nem következik semmi a LER megoldását illetően. Lehet ugyanis, hogy a LER egyértelműen megoldható, csak éppen az egyenletek „rossz sorrendben vannak felírva”. Ekkor a megfelelő sorok/oszlopok cseréjével megakadályozhatjuk a GE elakadását, ha létezik egyértelmű megoldás. A szóban forgó probléma megoldására vonatkoznak majd az úgynevezett főelemkiválasztási stratégiák.

3.3. Feladat

Határozzuk meg az alábbi A mátrix inverzét Gauss-elimináció és sorműveletek segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

3.5. Megjegyzés

Tegyük fel, hogy az A invertálható, és jelöljük az inverzét X-szel. Az előzőek szerint az $AX = I$ mátrix jobb oldalú LER-t is meg tudjuk oldani, amelynek megoldás mátrixa épp $X = A^{-1}$. Ehhez csak be kell írnunk a jobb oldal mátrixot a jobb oldal vektor helyére, majd GE+SM segítségével egységmátrix alakra kell hoznunk az egyenletrendszer mátrxát. Röviden összefoglalva:

$$\left[\, A \;\middle|\; I \,\right] \quad \overset{GE+SM}{\sim} \quad \left[\, I \;\middle|\; X \,\right] = \left[\, I \;\middle|\; A^{-1} \,\right]$$

Írjuk be a GE jobb oldalára az I egységmátrixot, majd végezzük el a GE lépéseit!

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \overset{\substack{(2)-2\cdot(1)\\(3)+1\cdot(1)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \overset{(3)-3\cdot(2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Félúton járunk, a bal oldalon leolvashatjuk az A mátrix determinánsát:

$$\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -2 \neq 0$$

Eszerint valóban létezik az A mátrix inverze. Végezzük el a sorműveleteket, amely a bal oldali mátrixot diagonális, majd egységmátrix alakra hozza!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{(1)+1\cdot(3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{(1)-\frac{1}{2}\cdot(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -\frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{\frac{1}{2}\cdot(2) \\ -1\cdot(3)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -\frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

A bal oldalra az egységmátrix került, eszerint a jobb oldalon az A mátrix inverze áll:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -\frac{7}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -7 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.4. Feladat

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció és részleges főelemkiválasztás használatával!

(b) Határozzuk meg az A mátrix determinánsát is!

3.6. Megjegyzés

Részleges főelemkiválasztás használata esetén a GE k-adik lépésének végrehajtása előtt megnézzük, hogy a k-adik oszlopban a főátló alatt melyik a maximális abszolútértékű elem. Jelöljön m egy olyan indexet, amelyre a maximum felvétetik, azaz $|a_m| = \max_{j=k}^n |a_{jk}|$. Ha $|a_m| > |a_k|$, akkor a k-adik és az m-edik sort kicseréljük. A részleges főelemkiválasztás (RF) használata nem csak a GE elakadásának problémáját oldja meg (abban az értelemben, hogy ha $\det(A) \neq 0$, akkor a GE+RF algoritmus a mátrixot biztosan felsőháromszög alakra hozza), de csökkenti a numerikus hibát is. Emlékezzünk, a nagy abszolút értékű számokkal való osztás numerikusan stabil művelet, míg a kis számokkal végzett osztás nem az!

(a) Hajtsuk végre a GE+RF algoritmust:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \quad \overset{(1)\leftrightarrow(2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \quad \overset{\substack{(2)-\frac{1}{2}\cdot(1) \\ (3)-\frac{1}{2}\cdot(1)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right] \quad \overset{(2)\leftrightarrow(3)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad \overset{(3)+\frac{1}{3}\cdot(2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

A GE+RF algoritmus tehát terminált, a LER mátrixa felsőháromszög alakú. A megoldás megkereséséhez használhatjuk például a visszahelyettesítés algoritmusát:

$$\begin{aligned} &(3) \qquad x_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1, \\ &(2) \qquad x_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{11}{2} \cdot 1\right) = -1, \\ &(1) \qquad x_1 = \frac{1}{4} \cdot \Big(1 - 4 \cdot (-1) - 7 \cdot 1\Big) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A megoldásvektor tehát

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) A GE+RF algoritmusa alatt összesen 2 alkalommal cseréltünk sort. A háromszög alakra hozott mátrix diagonális elemeit, valamint a cserék számát figyelembe véve az A determinánsa:

$$\det(A) = 4 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot (-1)^2 = 16.$$

3.7. Megjegyzés

Jegyezzük, hogy minden sor- illetve oszlopcserére a mátrix determinánsa (-1)-gyel szorzódik. Ez esetben is a háromszög alakra hozott mátrix determinánsát érdemes leolvasnunk figyelembe véve a sor- és oszlopcseréket.

3.8. Megjegyzés

A részleges főelemkiválasztáson kívül használatos még az úgynevezett teljes főelemkiválasztás, mely esetében a GE k-adik lépését megelőzően a teljes eliminálatlan mátrixrészben keressük meg a maximális abszolútértékű elemet, majd ennek sorát és oszlopát is kicseréljük a a k-adik sorral és oszloppal. Fontos megjegyezni, hogy ezzel a módszerrel a numerikus hiba tovább csökkenthető, de ennél többet nem nyerünk, hiszen ha $\det(A) \neq 0$, akkor a GE+RF biztosan nem akad el.