Ítéletlogika alapjai

Gyakorlat

Logika

2022/2023 1. félév

Bevezető

A tárgy a következő problémákat járja körbe:

Hogyan tudunk állításokat formalizálni?
Állítások egy halmazából következik-e egy állítás?
Létezik-e módszer ennek bizonyítására?

A félév során ezen problémák megválaszolására az ítéletlogika és egy elsőrendű logika nyelvét fogjuk megismerni, majd szemantikus és szintaktikus módszerek segítségével különböző válaszokat adunk.

A félév során szó lesz a következő témakörökről:

- Igazságtábla és elsőrendű formula értéktáblája
- Igazságértékelés függvény
- Bizonyításelmélet
- Természetes levezetés
- Rezolúció

Követelmény: elérhető Teamsben/Canvasben! Aki nincs rajta, jelezze!

Alapvető fogalmak

Egyszerű állítások

Esik az eső.	E ítéletváltozó
Felhős az ég.	F ítéletváltozó

Összetett állítások

Nem süt a Nap.	$\neg N$	- negációs ($\neg$) formula
Esik az eső és nem süt a Nap.	$E \wedge \neg N$	- konjunkciós ($\wedge$) formula
Süt a Nap vagy felhős az ég.	$N \vee F$	- diszjunkciós ($\vee$) formula
Ha esik az eső, akkor felhős az ég.	$E \supset F$	- implikációs ($\supset$) formula

A feladat

Betörtek egy házba. A nyomok alapján próbálják megállapítani, hogy az épület melyik részében járt a betörő. Helyszíni szemle alapján ilyen kapcsolatok véltek felfedezni a helyszínelők a szobák között:

1. A konyhában az ajtó be volt törve, így a betörő ott biztos járt.
2. Ha a konyhában járt, akkor biztos nem volt a fürdőben.
3. A hálóban vagy a fürdőben volt, illetve nem járt a spájzban vagy járt a hálóban.
4. Nem igaz az az állítás, hogy: a hallban járt és ha nem járt a nappaliban, akkor a spájzban volt.
5. Akkor és csak akkor volt az spájzban, ha volt az étkezőben is.
6. A spájzt feldúlta a betörő, és csak akkor járt a nappaliban, ha a hallban is.
7. A betörő csak akkor járt a fürdőben, ha nem volt a spájzban vagy járt a fürdőben.

Mely szobákban járt a betörő?

Formalizáljuk az állításokat!

1. A konyhában az ajtó be volt törve, így a betörő ott biztos járt.
2. Ha a konyhában járt, akkor biztos nem volt a fürdőben.
3. A hálóban vagy a fürdőben volt, illetve nem járt a spájzban vagy járt a hálóban.
4. Nem igaz az az állítás, hogy: a hallban járt és ha nem járt a nappaliban, akkor a spájzban volt.
5. Akkor és csak akkor volt az spájzban, ha volt az étkezőben is.
6. A spájzt feldúlta a betörő, és csak akkor járt a nappaliban, ha a hallban is.
7. A betörő csak akkor járt a fürdőben, ha nem volt a spájzban vagy járt a fürdőben.

Mik lehetnének az atomi állítások - ítéletváltozók?

- A– A konyhában járt a betörő
- B– A fürdőben járt a betörő
- C– A hálóban járt a betörő
- D– A spájzban járt a betörő
- E– Az étkezőben járt a betörő
- F– A nappaliban járt a betörő
- G– A hallban járt a betörő

Hogyan nézzenek ki a formulák?

1. A
2. $(A \supset \neg B)$
3. $((C \vee B) \wedge (\neg D \vee C))$
4. $\neg(G \wedge (\neg F \supset D))$
5. $((D \supset E) \wedge (E \supset D))$
6. $(D \wedge (F \supset G))$
7. $(B \supset (\neg D \vee B))$

Műveletek

Műveletek prioritása csökkenő sorrendben

$\neg, \wedge, \vee, \supset$

Műveletek zárójelezésének iránya

- $\wedge, \vee$ zárójelezésének iránya tetszőleges
  - Pl.: $A \wedge B \wedge \neg C \approx ((A \wedge B) \wedge \neg C)$ $\approx (A \wedge (B \wedge \neg C))$
- $\supset$ zárójelezése jobbról balra történik!
  - Pl.: $A \supset \neg B \supset C \approx (A \supset (\neg B \supset C))$

Honnan lehetne elhagyni a zárójelet?

$$\begin{array}{lcl}
((C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)) & = & (C \vee B) \wedge (\neg D \vee C) \\
\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) & = & \neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \\
((D \supset E) \wedge (E \supset D)) & = & (D \supset E) \wedge (E \supset D) \\
((C \vee B) \supset (\neg D \vee C)) & = & C \vee B \supset \neg D \vee C \\
(B \supset (\neg D \vee B)) & = & B \supset \neg D \vee B
\end{array}$$

És ennél a formulánál? $((A \wedge B) \vee (A \supset (\neg B \supset A))) = A \wedge B \vee (A \supset \neg B \supset A)$

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Műveletek közös igazságtáblája

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \supset Y$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Készítsük el a következő formulához a **kiterjesztett** igazságtáblát:

$$B \supset (\neg D \vee B)$$

B	D	$\neg D$	$\neg D \vee B$	$B \supset (\neg D \vee B)$
i	i	h	i	i
i	h	i	i	i
h	i	h	h	i
h	h	i	i	i

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség/tautológia formulákra

Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Egy B formula **tautológia** ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti. A tautológiát **ítéletlogikai törvény**nek is nevezik.

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Ezek alapján mit tudunk elmondani az előbb vizsgált formuláról?

- Kielégíthető?
- Kielégíthetetlen?
- Tautológia?

B	D	$\neg D$	$\neg D \vee B$	$B \supset (\neg D \vee B)$
i	i	h	i	i
i	h	i	i	i
h	i	h	h	i
h	h	i	i	i

$\Longrightarrow$ **Kielégíthető és tautológia!** *Minden interpretáció kielégíti.*

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Milyen tulajdonságúak a következő formulák?

A	B	$A \supset \neg B$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

$\Longrightarrow$ **Kielégíthető!**

Van legalább 1 interpretáció, ami kielégíti.

A	B	$(\neg A \supset \neg B) \wedge \neg(A \vee \neg B)$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	h

$\Longrightarrow$ **Kielégíthetetlen!**

Nincs olyan interpretáció, ami kielégítené.

Formulahalmaz szemantikus tulajdonságai

Formulahalmaz szemantikus tulajdonságai

Adott $F := \{F1, F2, .., Fn\}$ formulahalmaz.

F formulahalmaz **kielégíthető**, ha van olyan interpretáció, amely minden elemét kielégíti.
F formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha minden interpretációban van legalább 1 formulája, amely hamisra értékelődik ki.

Formula szemantikus tulajdonság $F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$	Formulahalmaz szemantikus tulajdonság $\{F1, F2, \ldots, Fn\}$
kielégíthető	kielégíthető
kielégíthetetlen	kielégíthetetlen
tautológia	minden interpretációban kielégíthető

Szemantikus következmény

Szemantikus következmény

Adott az $F = \{F1, F2, ..., Fn\}$ formulahalmaz és G formula. Azt mondjuk, hogy G formula szemantikus következménye F formiulahalmaznak ($\{F1, F2, ..., Fn\} \models_0 G$), ha minden olyan I interpretáció, amely kielégíti az F formulahalmazt ($I \models_0 \{F1, F2, ...Fn\}$), az kielégíti a G következményformulát ($I \models_0 G$) is.

Szemantikus következmény - igazságtáblával

(1) A konyhában az ajtó be volt törve, így a betörő ott biztos járt.
(2) Ha a konyhában járt, akkor biztos nem volt a fürdőben.

Mire következtethetnénk ezekből az állításokból?

$$\{A, A \supset \neg B\} \models_0 \neg B$$

A	B	A	$A \supset \neg B$	$\neg B$
i	i	i	h	h
i	h	i	i	i
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

Tudjuk, hogy konyhában biztos járt, és a fürdőben nem.

Szemantikus következmény - igazságtáblával

(1+2) Tudjuk, hogy a fürdőben nem járt.

(3) A hálóban vagy a fürdőben volt, illetve nem járt a spájzban vagy járt a hálóban.

$$\{\neg B, (C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)\} \models_0 C$$

B	C	D	$\neg B$	$(C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)$	C
i	i	i	h	$(i \vee i) \wedge (\neg i \vee i) = \text{i}$	
i	i	h	h	$(i \vee i) \wedge (\neg h \vee i) = \text{i}$	
i	h	i	h	$(h \vee i) \wedge (\neg i \vee h) = \text{h}$	
h	i	i	i	$(i \vee h) \wedge (\neg i \vee i) = \text{i}$	i
i	h	h	h	$(h \vee i) \wedge (\neg h \vee h) = \text{i}$	
h	i	h	i	$(i \vee h) \wedge (\neg h \vee i) = \text{i}$	i
h	h	i	i	$(h \vee h) \wedge (\neg i \vee h) = \text{h}$	
h	h	h	i	$(h \vee h) \wedge (\neg h \vee h) = \text{h}$	

Tudjuk, hogy a hálóban járt betörő.

Szemantikus következmény - igazságtáblával

Egy kis előrekövetkeztetés:

A következőkből melyik formulák következményei a $\{A, B \supset A\}$ formulahalmaznak?

				✗	✓	✓	✗	✗	✓
A	B	A	$B \supset A$	$\neg B$	$A \vee D$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \vee \neg A$
i	i	i	i	h	i	i	h	i	i
i	h	i	i	i	i	i	h	h	i
h	i	h	h	h	D	i	i	i	i
h	h	h	i	i	D	h	i	i	i

És a $\{A \wedge B, \neg B \vee \neg A\}$ formulahalmaznak?

				✓	✓	✓	✓
A	B	$A \wedge B$	$\neg B \vee \neg A$	A	$B \vee \neg B$	$\neg A \wedge A$	E
i	i	i	h	i	i	h	?
i	h	h	i	i	i	h	?
h	i	h	i	h	i	h	?
h	h	h	i	h	i	h	?

Igazságértékelés függvény szabályai

Igazságértékelés szabályok grafikus ábrázolása

$$
\begin{array}{c} \varphi(\neg A)^i \\ | \\ \varphi(A)^h \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \varphi(A \land B)^i \\ | \\ \varphi(A)^i \\ | \\ \varphi(B)^i \end{array}
\qquad
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\varphi(A \lor B)^i} \\ / & \backslash \\ \varphi(A)^i & \varphi(B)^i \end{array}
\qquad
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\varphi(A \supset B)^i} \\ / & \backslash \\ \varphi(A)^h & \varphi(B)^i \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} \varphi(\neg A)^h \\ | \\ \varphi(A)^i \end{array}
\qquad
\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\varphi(A \land B)^h} \\ / & \backslash \\ \varphi(A)^h & \varphi(B)^h \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \varphi(A \lor B)^h \\ | \\ \varphi(A)^h \\ | \\ \varphi(B)^h \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \varphi(A \supset B)^h \\ | \\ \varphi(A)^i \\ | \\ \varphi(B)^h \end{array}
$$

Formula vizsgálat - igazságértékeléssel

Számoljuk ki a $\neg(G \wedge (\neg F \supset D))$ formula igaz- és hamishalmazát!

$\varphi(\neg(G \wedge (\neg F \supset D)))^i$ (1)

$\varphi(G \wedge (\neg F \supset D))^h$ (2)

$\varphi(G)^h$ $\quad$ $\varphi(\neg F \supset D)^h$ (3)

$\varphi(\neg F)^i$ (4)

$\varphi(D)^h$

$\varphi(F)^h$

1. ág			2. ág		
G	F	D	G	F	D
h	*	*	*	h	h
h	i	i	i	h	h
h	i	h	h	h	h
h	h	i			
h	h	h			

Igazhalmaz:

G	F	D
h	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Formula vizsgálat - igazságértékeléssel

Számoljuk ki a $\neg(G \wedge (\neg F \supset D))$ formula igaz- és hamishalmazát!

$\varphi(\neg(G \wedge (\neg F \supset D)))^h$ (1)

$\varphi(G \wedge (\neg F \supset D))^i$ (2)

$\varphi(G)^i$

$\varphi(\neg F \supset D)^i$ (3)

$\varphi(\neg F)^h$ (4) $\quad \varphi(D)^i$

$\varphi(F)^i$

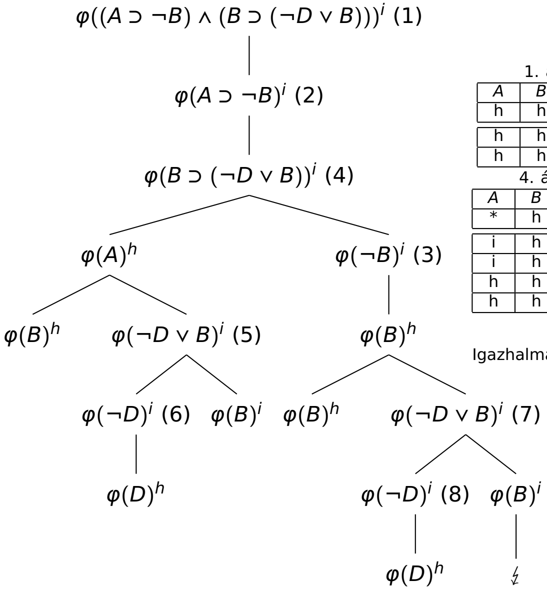
1. ág			2. ág		
G	F	D	G	F	D
i	i	*	i	*	i
i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	i

Hamishalmaz:

G	F	D
i	i	i
i	i	h
i	h	i

Formula vizsgálat - igazságértékeléssel

Számoljuk ki a $(A \supset \neg B) \wedge (B \supset (\neg D \vee B))$ formula igaz- és hamishalmazát!



1. ág			2. ág			3. ág		
A	*B*	*D*	*A*	*B*	*D*	*A*	*B*	*D*
h	h	*	h	*	h	h	i	*
h	h	i	h	i	h	h	i	i
h	h	h	h	h	h	h	i	h

4. ág			5. ág		
A	*B*	*D*	*A*	*B*	*D*
*	h	*	*	h	h
i	h	i	i	h	h
i	h	h	h	h	h
h	h	i			
h	h	h			

Igazhalmaz:

A	*B*	*D*
i	h	i
h	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Formula vizsgálat - igazságértékeléssel

$$\varphi((A \supset \neg B) \wedge (B \supset (\neg D \vee B)))^h \; (1)$$

$$\varphi(A \supset \neg B)^h \; (2)$$

$$\varphi(A)^i$$

$$\varphi(\neg B)^h \; (3)$$

$$\varphi(B)^i$$

$$\varphi(B \supset (\neg D \vee B))^h \; (4)$$

$$\varphi(B)^i$$

$$\varphi(\neg D \vee B)^h \; (5)$$

$$\varphi(\neg D)^h$$

$$\varphi(B)^h$$

$$\lightning$$

Hamishalmaz:

1. ág

A	B	D
i	i	*
i	i	i
i	i	h

Szemantikus következmény - igazságértékelés

(4) Nem igaz az az állítás, hogy: a hallban járt és ha nem járt a nappaliban, akkor a spájzban volt.

(5) Akkor és csak akkor volt az spájzban, ha volt az étkezőben is.

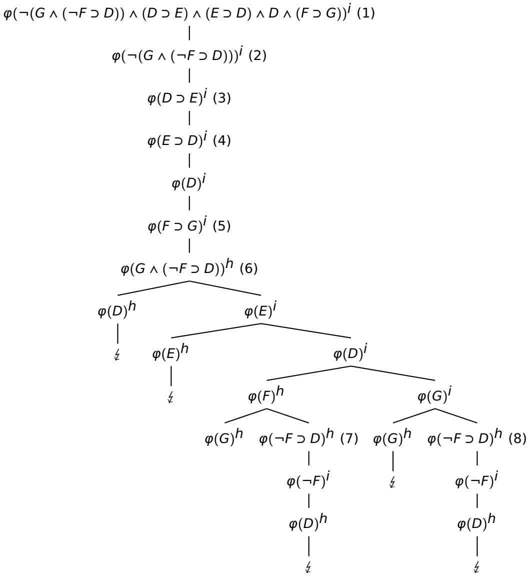
(6) A spájzt feldúlta a betörő, és csak akkor járt a nappaliban, ha a hallban is.

Mi lehet a következménye?

$$\{\neg(G \wedge (\neg F \supset D)), (D \supset E) \wedge (E \supset D), D \wedge (F \supset G)\} \models_0 ?$$

Próbáljunk meg előrekövetkeztetni igazságértékelés segítségével!

Előrekövetkeztetés



Mit tudunk leolvasni?

1 interpretáció van, ami a formulát illetve formulahalmazt kielégíti.

3. ág

D	E	F	G
i	i	h	h

Lehetséges következmény: $D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G$

Szemantikus következmény alakítás tautológia vizsgálatra

Ellenőrizzük:
$\{\neg(G \wedge (\neg F \supset D)), (D \supset E) \wedge (E \supset D), D \wedge (F \supset G)\} \models_0 D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G$

1 irány:

Dedukciós tétel

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B (n \geq 1)$ tetszőleges ítéletlogikai formulák.
$\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\} \models_0 A_n \supset B$.

Az eldöntésprobléma tétele

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ ítéletlogikai formulák. $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha $\models_0 A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset B$, vagy másképp a $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n \supset B$ formula tautológia.

Kéne:
$\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \supset ((D \supset E) \wedge (E \supset D)) \supset (D \wedge (F \supset G)) \supset (D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G)$ **tautológia**?

Szemantikus következmény alakítás kielégíthetetlenség vizsgálatra

Ellenőrizzük:
$\{\neg(G \wedge (\neg F \supset D)), (D \supset E) \wedge (E \supset D), D \wedge (F \supset G)\} \models_0 D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G$

2. irány:

Tétel

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B (n \geq 1)$ tetszőleges ítéletlogikai formulák.
$\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\} \models_0 B$ pontosan akkor, ha az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen, vagy másképp a $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ formula kielégíthetetlen.

Kéne: $\{\neg(G \wedge (\neg F \supset D)), (D \supset E) \wedge (E \supset D), D \wedge (F \supset G), \neg(D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G)$ **kielégíthetetlen?**

Tulajdonság vizsgálattal

Kéne: $\{\neg(G \wedge (\neg F \supset D)), (D \supset E) \wedge (E \supset D), D \wedge (F \supset G), \neg(D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G)\}$ **kielégíthetetlen?**

Formula szemantikus tulajdonság vizsgálatává alakítás:
$\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \wedge (D \supset E) \wedge (E \supset D) \wedge D \wedge (F \supset G) \wedge \neg(D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G)$

Két megközelítés igazságértékeléssel:

- $\varphi(\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \wedge (D \supset E) \wedge (E \supset D) \wedge D \wedge (F \supset G) \wedge \neg(D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G))^i$ - minden ágon ellentmondást kapunk?
- $\varphi(\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \wedge (D \supset E) \wedge (E \supset D) \wedge D \wedge (F \supset G) \wedge \neg(D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G))^h$ - minden interpretációt megkapunk?

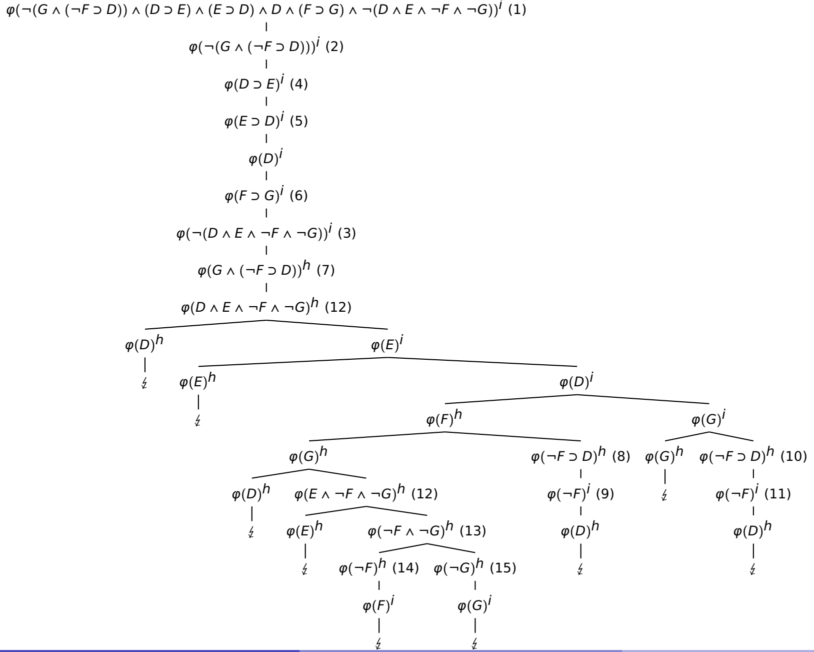
VAGY

Kéne: $\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \supset ((D \supset E) \wedge (E \supset D)) \supset (D \wedge (F \supset G)) \supset (D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G)$ **tautológia**?

Két megközelítés:

- $(\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \supset ((D \supset E) \wedge (E \supset D)) \supset (D \wedge (F \supset G)) \supset (D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G))^i$ - minden interpretációt tartalmazza?
- $(\neg(G \wedge (\neg F \supset D)) \supset ((D \supset E) \wedge (E \supset D)) \supset (D \wedge (F \supset G)) \supset (D \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg G))^h$ - minden ágon ellentmondást kapunk?

Kielégíthetetlenség vizsgálat



Szemantikus következmény ellenőrzés

Vizsgáljuk meg a $\{\neg B, (C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)\} \models_0 C$ következményt.

1. irány: Tautológia vizsgálat:

$\neg B \supset ((C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)) \supset C$

- igazhalmaz esetén - minden interpretáció kell
- hamishalmaz esetén - mindenhol ellentmondást kell kapni

2. irány: Kielégíthetetlenség vizsgálat:

$\{\neg B, (C \vee B) \wedge (\neg D \vee C), \neg C\}$

Formula vizsgálatává alakítás után:

$\neg B \wedge (C \vee B) \wedge (\neg D \vee C) \wedge \neg C$

- igazhalmaz esetén - mindenhol ellentmondást kell kapni kell
- hamishalmaz esetén - minden interpretáció

Tautológia vizsgálattal - hamishalmazzal

$$\varphi(\neg B \supset ((C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)) \supset C)^h \ (1)$$

$$\varphi(\neg B)^i \ (2)$$

$$\varphi((C \vee B) \wedge (\neg D \vee C))^i \ (3)$$

$$\varphi(C)^h$$

$$\varphi(B)^h$$

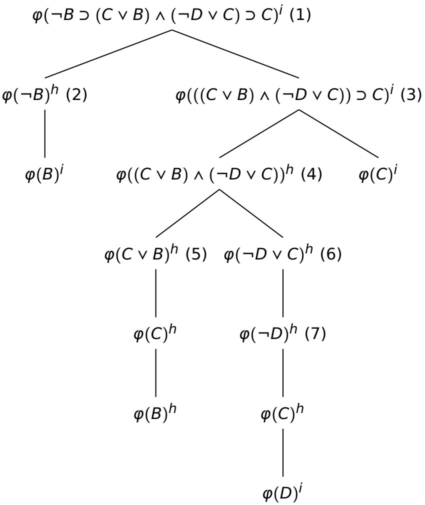
$$(C \vee B)^i \ (4)$$

$$\varphi(\neg D \vee C)^i$$

$$\varphi(C)^i \qquad \varphi(B)^i$$

$$\lightning \qquad \lightning$$

Tautológia vizsgálattal - igazhalmazzal



1. ág			2. ág		
B	*C*	*D*	*B*	*C*	*D*
i	*	*	h	h	*
i	i	i	h	h	i
i	i	h	h	h	h
i	h	i			
i	h	h			

3. ág			4. ág		
B	*C*	*D*	*B*	*C*	*D*
*	h	i	*	i	*
i	h	i	i	i	i
h	h	i	i	i	h
			h	i	i
			h	i	h

Igazhalmaz:

B	*C*	*D*
i	i	i
i	i	h
i	h	i
h	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Kielégíthetetlenség vizsgálat - igazhalmazzal

$$\varphi(\neg B \wedge ((C \vee B) \wedge (\neg D \vee C)) \wedge \neg C)^i \ (1)$$

$$\varphi(\neg B)^i \ (3)$$

$$\varphi(C \vee B)^i \ (4)$$

$$\varphi(\neg D \vee C)^i$$

$$\varphi(\neg C)^i \ (2)$$

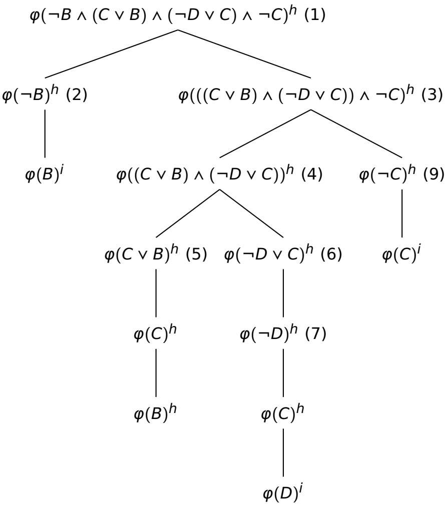
$$\varphi(C)^h$$

$$\varphi(B)^h$$

$$\varphi(C)^i \qquad \varphi(B)^i$$

$$\lightning \qquad \lightning$$

Kielégíthetetlenség vizsgálattal - hamishalmazzal



1. ág			2. ág		
B	C	D	B	C	D
i	*	*	h	h	*
i	i	i	h	h	i
i	i	h	h	h	h
i	h	i			
i	h	h			

3. ág			4. ág		
B	C	D	B	C	D
*	h	i	*	i	*
i	h	i	i	i	i
h	h	i	i	i	h
			h	i	i
			h	i	h

Hamishalmaz:

B	C	D
i	i	i
i	i	h
i	h	i
h	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Szemantikus tulajdonságok - gondolkodós

Vizsgáljuk a következő szemantikus tulajdonságú formulák által alkotott formulákat, melyik tulajdonság teljesül rájuk? Válaszunk indokoljuk!

1. (kielégíthetetlen formula) $\supset$ (tetszőleges formula)
2. (kielégíthető formula) $\supset$ (kielégíthető formula)
3. (tautológia) $\vee$ (tetszőleges formula)
4. (kielégíthető formula) $\wedge$ (tetszőleges formula)

Fejtörő

Hosszú évek keresése után végre ráleltél kis felderítőcsapatoddal az inkák ősi aranyvárosára El Dorado-ra. Azonban a helyi lakosok nem vették jó néven, amikor meg akartad lovasítani aranyukat a kincstárból. Az uralkodó úgy döntött, hogy ad nektek egy utolsó esélyt a szabadulásra, ráadásul az összes arany amit elbírtok is magatokkal vihetitek, ha kiálljátok próbáját!

Az uralkodó felszólította legkiválóbb alkimistáját, hogy álljon elő egy az alkalomhoz méltó próbával. Az alkimista hosszas gondolkodás után négy pohár színes italt helyez eléd, majd azt mondja:

"Ezen négy pohár ital közül egy szabadulásod kulcsát tartalmazza, míg a másik 3 veszted okozza, segítségül öt állítással szolgálok, választásodhoz sok szerencsét kívánok!"

Az állítások a következőek:

1. Ha a piros ital vagy a kék ital méreg, akkor a zöld is.
2. Vagy a lila ital vagy a piros méreg, vagy mindkettő.
3. A zöld vagy a kék ital nem méreg, de a piros biztosan.
4. Ha a kék méreg, akkor a piros vagy a lila ital is.
5. Csak akkor nem méreg a lila, ha a piros sem.

Melyik színű ital nem méreg? Válaszod indokold!