Logika

Ítéletlogika

Első témakör

Elérhetőségek

Név: Tejfel Máté
Szoba: Déli épület 2.616.
E-mail cím: matej@inf.elte.hu

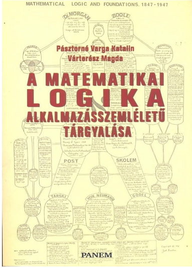
Előadás követelményei

- maximum 3 hiányzás
- Vizsga:
  - Előfeltétel - Elfogadott gyakorlat
  - Szóbeli - adott kérdések alapján
- részletes információk Canvas-ban fent lesznek.

Logika tananyag tartalma

Könyv: Pásztorné Varga Katalin, Várterész Magda: A Matematikai Logika Alkalmazásszemléletű Tárgyalása

- Ítéletlogika alapfogalmai
- Elsőrendű logika alapfogalmai
- Formulák szemantikus tulajdonságai és azok vizsgálata
- Szintaktikus és szemantikus következményfogalom vizsgálata
  - Ítéletkalkulus, Predikátumkalkulus
  - Természetes levezetés
  - Szekvent kalkulus
  - Rezolúció
  - Tabló kalkulus



Bevezetés

- Az ég kék.
- A 2 egy páros szám.
- Az 5 egy páros szám.

Egyszerű, konkrét állítások, amelyek egy egyedről mondanak valamit. Ilyeneket tudunk **ítéletlogikában** megfogalmazni.

- Minden nyúl rágcsáló.
- Van olyan hal, ami kék színű.

Egyszerű, konkrét állítások, amelyek egy egyedekből álló csoportról mondanak valamit. Ilyeneket tudunk **elsőrendű logikában** megfogalmazni.

Ilyen típusú állításokhoz egyértelműen tudunk igazságértéket rendelni. Vagyis egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy igaz vagy hamis egy állítás.

Tartalom

Alapfogalmak

Halmazok direktszorzata

A és B tetszőleges halmazok direkt vagy Descartes szorzata $A \times B$ az összes olyan (a, b) párok halmaza, ahol $a \in A$ és $b \in B$.
U^n-nel jelöljük U-nak önmagával vett n-szeres direktszorzatát, ami az U elemeiből képezhető összes n elemű sorozatok halmaza ($U^2 = U \times U$).

Példa

$A = \{1, 2, 3\}$ és $B = \{a, b\}$
$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$
$A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1),$
$(3, 2), (3, 3)\}$
$B^3 = B \times B \times B = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (a, b, b),$
$(b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$

Alapfogalmak

Függvény

Legyen D és R (nem feltétlenül különböző) halmazok. Függvénynek nevezünk egy $D \to R$ (D halmaz minden eleméhez egy R-beli elemet rendelő) leképezést. D a leképezés értelmezési tartománya, R az értékkészlete.

Példa

- Összeadás művelete: $D = \{\mathit{egész\ számok}\}^2$, $R =$ egész számok
- Függvény, ami eldönti egy adott számról, hogy páros vagy páratlan: $D =$ egész számok, $R = \{\mathit{páros}, \mathit{páratlan}\}$
- Logikai 'És' reláció: $D = \{\mathit{igaz}, \mathit{hamis}\}^2$, $R = \{\mathit{igaz}, \mathit{hamis}\}$

Alapfogalmak

Függvény fajtái

Legyen D a függvény értelmezési tartománya, R az értékkészlete. Valamint legyen U egy tetszőleges (individuum)halmaz.

- Ha $D = U$, akkor a függvény egyváltozós,
- ha $D = U^n$ $(n > 1)$, akkor n változós,
- ha $R = \mathbb{N}$, akkor a függvény egészértékű,
- ha $R = \{i, h\}$, akkor a függvény logikai függvény, más néven reláció,
- ha $D = R^n$ (azaz a függvény általános alakja: $U^n \to U$), akkor a függvény matematikai függvény, más néven művelet,
- az $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ alakú függvény logikai művelet.

Alapfogalmak

Szerkezeti rekurzió:

- definíciós módszer
- alaplépés + rekurzív lépés
- példa: logikai formulákon értelmezett függvények definíciója

Szerkezeti indukció:

- bizonyítási módszer rekurzívan definiált struktúrák tulajdonságairól
- alaplépés + indukciós lépés
- speciális példa: teljes indukció
- példa: logikai formulák tulajdonságainak bizonyítása

Következtetésforma

Gondolkodásforma vagy következtetésforma

Egy $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ állításhalmazból és egy A állításból álló (F, A) pár.

Helyes következtetésforma

Egy $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ állításhalmazból és egy A állításból álló (F, A) pár helyes következtetésforma, ha létezik olyan eset, hogy az F állításhalmazban szereplő mindegyik állítás igaz és minden ilyen esetben az A állítás is igaz.

Példa következtetésforma

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:

- Ha férfi a tettes, akkor kistermetű.
- Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be.
- A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott.
- Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles, akkor az ablakon mászott be.
- A helyszíni szemlén megállapították, hogy senki sem mászott be az ablakon.

A nyomozók azt sejtik ezek alapján, hogy a tettes nem férfi.

Tartalom

Nyelvdefiníció

$$\text{Nyelv} = \text{Ábécé} + \text{Szintaxis} + \text{Szemantika}$$

Ítéletlogika vagy állításlogika

Tárgya egy egyszerű állítások és a belőlük logikai műveletekkel kapott összetett állítások vizsgálata.

Egyszerű állítás

Egy olyan kijelentés, amelynek tartalmáról eldönthető, hogy igaz-e vagy nem. Egy állításhoz hozzárendeljük az igazságértékét: az i (igaz) vagy h (hamis) értéket.

Összetett állítás

Egy egyszerű állításokból álló összetett mondat, amelynek az igazságértéke csak az egyszerű állítások igazságértékeitől függ. Az összetett állítások csak olyan nyelvtani összekötőszavakat tartalmazhatnak, amelyek logikai műveleteknek feleltethetők meg.

Tartalom

2. Ítéletlogika
   - Ítéletlogika - ábécé
   - Ítéletlogika - szintaxis
   - Ítéletlogika - szemantika

Az ítéletlogika leíró nyelvének ábécéje (V_0)

Ítéletlogika ábécéje

- Ítéletváltozók (V_v): $X, Y, X_i, \ldots$
- Unér logikai műveleti jel: $\neg$ (negáció)
- Binér logikai műveleti jelek:
  - $\wedge$ (konjukció)
  - $\vee$ (diszjunkció)
  - $\supset$ (implikáció)
- Elválasztójelek: ( )

Tartalom

Az ítéletlogika leíró nyelvének szintaxisa (L_0)

Ítéletlogikai formula

1. (alaplépés) Minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula. (prímformula)
2. (rekurzív lépés)
   - Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ is az.
   - Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $(A \circ B)$ is ítéletlogikai formula "$\circ$" a három binér művelet bármelyike.
3. Minden ítéletlogikai formula az 1,2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Példa

Ez alapján a következő ítéletlogikai formulák szintaktikailag helyesek?

X

$X \vee Y$

$(X \wedge Y)$

$\neg X \wedge (Y \supset \neg X)$

$(A \vee B) \wedge \neg X \wedge Z$

Az ítéletlogika leíró nyelvének szintaxisa (L_0)

Ítéletlogikai formula (szerkezeti rekurzióval)

1. (alaplépés) Minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula. (prímformula)
2. (rekurzív lépés)
   - Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ is az.
   - Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $(A \circ B)$ is ítéletlogikai formula "$\circ$" a három binér művelet bármelyike.
3. Minden ítéletlogikai formula az 1,2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Példa

Ez alapján a következő ítéletlogikai formulák szintaktikailag helyesek?

X	$\longrightarrow$ helyes
$X \vee Y$	$\longrightarrow$ nem helyes. Jó lenne: $(X \vee Y)$
$(X \wedge Y)$	$\longrightarrow$ helyes
$\neg X \wedge (Y \supset \neg X)$	$\longrightarrow$ nem helyes. Jó lenne: $(\neg X \wedge (Y \supset \neg X))$
$(A \vee B) \wedge \neg X \wedge Z$	$\longrightarrow$ nem helyes. Több módon javítható pl.: $((A \vee B) \wedge (\neg X \wedge Z))$

Formulaszerkezet

Ítéletlogikában a következő formulaszerkezeteket különböztetjük meg:

- $\neg A$ - negációs formula
- $(A \wedge B)$ - konjukciós formula
- $(A \vee B)$ - diszjunkciós formula
- $(A \supset B)$ - implikációs formula

Itt A és B tetszőleges formulák.

Így például:

- $\neg(X \wedge (\neg Z \supset X))$ - negációs formula
- $(X \wedge (Y \wedge \neg Z))$ - konjukciós formula
- $(\neg X \vee (X \wedge Y))$ - diszjunkciós formula
- $((X \wedge \neg Y) \supset (X \vee Y))$ - implikációs formula

Formulaszerkezet vizsgálata

Közvetlen részformula

1. Prímformulának nincs közvetlen részformulája.
2. $\neg A$ közvetlen részformulája A.
3. Az $(A \circ B)$ közvetlen részformulái az A (baloldali) és B (jobboldali).

Példa

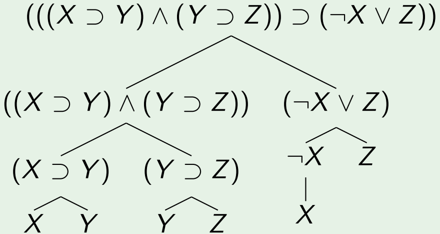
A $(\neg(Z \supset \neg X) \vee Y)$ formula baloldali részformulája: $\neg(Z \supset \neg X)$, jobboldali részformulája: Y.

Szerkezeti fa

Szerkezeti fa definíciója

Egy adott formulához tartozó szerkezeti fa egy olyan fa, melynek gyökere a formula, minden csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula közvetlen részformulái, a fa levelei pedig ítéletváltozók.

Példa

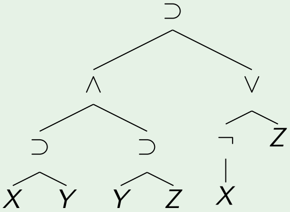


Szintaxis fa

Szintaxis fa definíciója

Egy adott formulához tartozó szintaxis fa egy olyan fa, melynek gyökere a formula fő logikai összekötőjele, minden csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula közvetlen részformuláinak fő logikai összekötőjelei, a fa levelei pedig ítéletváltozók.

Példa



Zárójelelhagyás

A teljesen zárójelezett formulákat kevesebb zárójellel írhatjuk fel, ha bevezetjük a műveletek prioritását.

Műveletek prioritása csökkenő sorrendben

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$

A **zárójelelhagyás**[1] célja egy formulából a legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének megtartása mellett.
Lépései:

1. A formula külső zárójel párjának elhagyása (ha még van ilyen).
2. Egy binér logikai összekötő hatáskörébe eső részformulák külső zárójelei akkor hagyhatók el, ha a részformula fő logikai összekötőjele nagyobb prioritású nála.

[1] Tk. 52. o.

Láncformulák zárójelezése

$A_1 ... A_n$ tetszőleges formulák esetén:

- **Konjunkciós**: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ (tetszőlegesen zárójelezhető)
- **Diszjunkciós**: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ (tetszőlegesen zárójelezhető)
- **Implikációs**: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n$ (zárójelezése jobbról-balra)
  $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots (A_{n-1} \supset A_n) \ldots)$

Zárójelelhagyás

Példa

$(((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (\neg X \vee Z))$ a zárójelelhagyás után:
$(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z$

$((Y \wedge \neg X) \supset (\neg Z \vee V))$ a zárójelelhagyás után: $Y \wedge \neg X \supset \neg Z \vee V$

$(((Y \supset X) \supset \neg Z) \supset V)$ a zárójelelhagyás után: $((Y \supset X) \supset \neg Z) \supset V$

Láncformulák

Literál

Ha X ítéletváltozó, akkor az X és a $\neg X$ formulákat literálnak nevezzük. Az ítéletváltozó a literál alapja. (X és $\neg X$ azonos alapú literálok.)

Elemi konjunkció

Különböző literálok konjunkciója.
Pl.: $X \wedge \neg Y \wedge \neg W \wedge Z$

Elemi diszjunkció

Különböző literálok diszjunkciója.
Pl.: $\neg X \vee Y \vee \neg W \vee \neg Z$

Formula logikai összetettsége

Logikai összetettség definíciója (szerkezeti rekurzióval) (Tk.4.1.12)

Alaplépés

- Ha A ítéletváltozó, akkor $\ell(A) = 0$

Rekurziós lépések

- $\ell(\neg A) = \ell(A) + 1$
- $\ell(A \circ B) = \ell(A) + \ell(B) + 1$

Példa

$\ell((X \wedge Y) \supset (\neg Z \vee V)) = \ell(X \wedge Y) + \ell(\neg Z \vee V) + 1 =$
$(\ell(X) + \ell(Y) + 1) + (\ell(\neg Z) + \ell(V) + 1) + 1 =$
$(\ell(X) + \ell(Y) + 1) + ((\ell(Z) + 1) + \ell(V) + 1) + 1 =$
$(0 + 0 + 1) + ((0 + 1) + 0 + 1) + 1 = 4$

Logikai műveletek hatásköre

Definíció (Tk.4.1.17.)

Logikai műveletek hatásköre a formula részformulái közül az a legkisebb logikai összetettségű, amelyben az adott logikai összekötőjel előfordul.

Példa

A $(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z$ formula $\wedge$ műveletet tartalmazó részformulái:

1. $\ell[(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z) \supset \neg X \vee Z] = 6$
2. $\ell[(X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)] = 3$

Ezek közül a 2. formula az $\wedge$ hatásköre.

Definíció (Tk.4.1.18.)

Egy formula **fő logikai összekötőjele** az az összekötőjel, amelynek a hatásköre maga a formula.

Tartalom

Szemantika

A nyelv ábécéjének értelmezése (interpretációja - modellezése).
Az ítéletlogika ábécéjében már csak az ítéletváltozókat kell interpretálni.
Az ítéletváltozók befutják az állítások halmazát. Ha megmondjuk melyik ítéletváltozó melyik állítást jelenti, akkor a változó igazságértékét adtuk meg. Annak rögzítését melyik ítéletváltozó *i*(gaz) és melyik *h*(amis) igazságértékű **interpretáció**nak nevezzük.

Interpretáció

Igazságkiértékelés, interpretáció (Tk.4.2.1.)

$\mathcal{I} = V_v \to \{i, h\}$

$\mathcal{I}(x)$ jelöli az x ítéletváltozó értékét az $\mathcal{I}$ interpretációban.
n db ítéletváltozó interpretációinak száma 2^n.
Megadása:

- Felsorolással
- Szemantikus fával
- Stb.

$n = 3$ esetén legyenek az ítéletváltozók X, Y, Z. Ezen változók egy sorrendjét **bázis**nak nevezzük. Legyen most a bázis X, Y, Z. Ekkor az összes interpretációt megadhatjuk táblázatos felsorolással, vagy szemantikus fával is.

Interpretáció megadása táblázattal

X	Y	Z
i	i	i
i	i	h
i	h	i
i	h	h
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Table: Interpretáció megadása táblázattal X, Y, Z bázis esetén

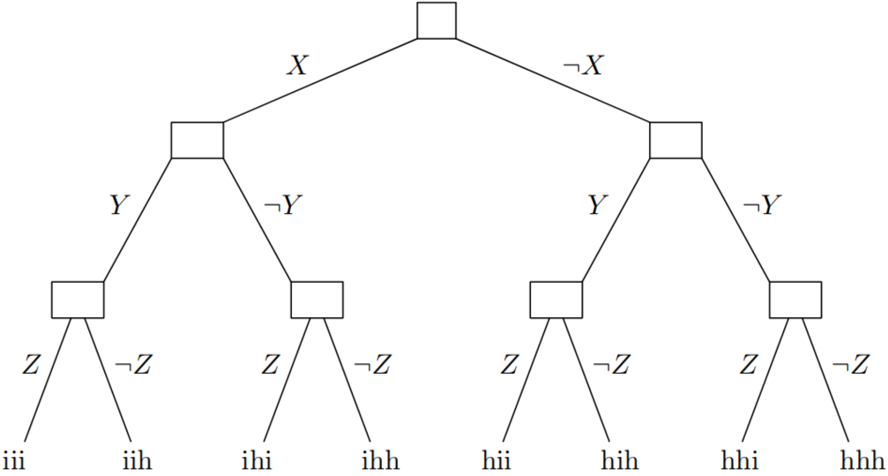
Interpretáció megadása szemantikus fával

Szemantikus fa

Egy n-változós **szemantikus fa** egy n-szintű bináris fa, ahol a szintek a bázisbeli változóknak vannak megfeleltetve. Egy X változó szintjén a csúcsokból kiinduló élpárokhoz X, $\neg X$ címkéket rendelünk. X jelentése X *igaz*, $\neg X$ jelentése X *hamis* az élhez tartozó interpretációkban, így egy n-szintű szemantikus fa ágain az összes (2^n) lehetséges igazságkiértékelés (I interpretáció) megjelenik.

Interpretáció megadása szemantikus fával

Szemantikus fa az X, Y, Z logikai változókra, mint bázisra:



Formula helyettesítési értéke

Formula helyettesítési értéke $\mathcal{I}$ interpretációban: $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(C)$.

$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(C)$ definíciója szerkezeti rekurzióval (Tk.4.2.2.)

1. Ha C formula ítéletváltozó, akkor $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(C) = \mathcal{I}(C)$.
2. Ha C formula negációs, akkor $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\neg A) = \neg \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A)$.
3. Ha C formula $(A \circ B)$ alakú, akkor $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A \circ B) = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A) \circ \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(B)$.

Példa

Adjuk meg az $(X \vee \neg Y)$ formula helyettesítési értékét, az X,Y bázissal meghatározott (i, h) interpretációban.
(Az interpretációt így is jelölhetnénk: $\mathcal{I}(X) = i, \mathcal{I}(Y) = h$.)
$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(X \vee \neg Y) = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(X) \vee \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\neg Y) = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(X) \vee \neg \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(Y) =$
$\mathcal{I}(X) \vee \neg \mathcal{I}(Y) = i \vee \neg h = i \vee i = i$

Formula igazságtáblája

Formula igazságtáblája

Egy n-**változós formula igazságtáblája** egy olyan $n + 1$ oszlopból és $2^n + 1$ sorból álló táblázat, ahol a fejlécben a bázis (a formula változói rögzített sorrendben) és a formula szerepel. A sorokban a változók alatt az **interpretációk** (a **változók igazságkiértékelései**), a formula alatt **a formula helyettesítési értékei** találhatók.

Formula igazságtáblája

Egy n-változós formula az igazságtáblájával megadott $\{i,h\}^n \rightarrow \{i,h\}$ n-változós logikai műveletet ír le. Példa: $(\neg(Z \supset \neg X) \vee Y)$ formula igazságtáblája

X	Y	Z	$(\neg(Z \supset \neg X) \vee Y)$
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	h
h	h	h	h

Egy formula **igazhalmaza** azon $\mathcal{I}$ interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke igaz.

Példában az X, Y, Z bázis esetén az igazhalmaz: $\{(i,i,i),(i,i,h),(i,h,i),(h,i,i),(h,i,h)\}$

Egy formula **hamishalmaza** azon $\mathcal{I}$ interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke hamis.

Példában az X, Y, Z bázis esetén a hamishalmaz: $\{(i,h,h),(h,h,i),(h,h,h)\}$

Logikai műveletek igazságtáblája

A lehetséges **kétváltozós** logikai műveletek közös igazságtáblája.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X	**Y**	**X∧Y**	**X∨Y**	**X⊃Y**	**X↔Y**	**¬↔**	**¬∧**	**¬∨**	**¬⊃**	**¬⊂**	**X⊂Y**	**¬X**	**¬Y**	**X**	**Y**	**i**	**h**
i	i	i	i	i	i	h	h	h	h	h	i	h	h	i	i	i	h
i	h	h	i	h	h	i	i	h	i	h	i	h	i	i	h	i	h
h	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	i	h	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i	h	i	i	h	h	i	i	i	h	h	i	h

A táblázat tartalmazza a 16 db 2-változós műveletet (a 4 db 1- és a 2 db 0-változós művelet is köztük van). Ezekből a logika tárgyalásánál a $\neg, \wedge, \vee, \supset$ műveleteket használjuk csak.

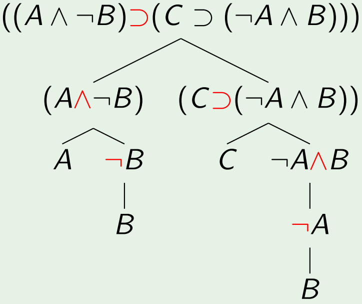
Példa feladatok

Feladat szerkezeti fára

Adjuk meg a következő formula szerkezeti fáját:
$A \wedge \neg B \supset C \supset \neg A \wedge B$

Az első részfeladat a formula helyes bezárójelezése:
$((A \wedge \neg B) \supset (C \supset (\neg A \wedge B)))$

A szerkezeti fa:



Feladat igazságtáblára

Adjuk meg a következő formula igazságtábláját: :
$A \wedge \neg B \supset C \supset \neg A \wedge B$.

Az első részfeladat a formula helyes bezárójelezése:
$((A \wedge \neg B) \supset (C \supset (\neg A \wedge B)))$

Formula igazságtáblája:

A	B	C	$((A \wedge \neg B) \supset (C \supset (\neg A \wedge B)))$
i	i	i	$((i \wedge \neg i) \supset (i \supset (\neg i \wedge i))) = \mathbf{i}$
i	i	h	$((i \wedge \neg i) \supset (h \supset (\neg i \wedge i))) = \mathbf{i}$
i	h	i	$((i \wedge \neg h) \supset (i \supset (\neg i \wedge h))) = \mathbf{h}$
h	i	i	$((h \wedge \neg i) \supset (i \supset (\neg h \wedge i))) = \mathbf{i}$
i	h	h	$((i \wedge \neg h) \supset (h \supset (\neg i \wedge h))) = \mathbf{i}$
h	i	h	$((h \wedge \neg i) \supset (h \supset (\neg h \wedge i))) = \mathbf{i}$
h	h	i	$((h \wedge \neg h) \supset (i \supset (\neg h \wedge h))) = \mathbf{i}$
h	h	h	$((h \wedge \neg h) \supset (h \supset (\neg h \wedge h))) = \mathbf{i}$

Igazságértékelés függvény

Egy formula **igaz-/hamis**halmazának előállításához keressük a formula bázisának interpretációira azokat a feltételeket, amelyek biztosítják, hogy ő az igazhalmaz illetve a hamishalmaz eleme legyen.
Ennek eszköze a φA^{α} **igazságértékelés függvény** ($\alpha =$ **i** vagy **h**), amely egy A formula esetén az igazságtábla felírása nélkül megadja a formula közvetlen részformuláin keresztül az A interpretációira vonatkozó $\varphi A^{\mathbf{i}}$ és a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételeket, amelyeket teljesítő interpretációkban a formula értéke **i** vagy **h** lesz.
A φA^{α} függvény értelmezési tartománya a formulák halmaza értékkészlete a formula interpretációira vonatkozó feltételek.

Igazságértékelés függvény

A φ-igazságértékelés függvény definiálása szerkezeti rekurzióval

1. Ha A prímformula (ítéletváltozó), akkor $\varphi A^{\mathbf{i}}$ feltételt pontosan azok az $\mathcal{I}$ interpretációk teljesítik, amelyekben $\mathcal{I}(A) = i$, a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételt pedig azok, amelyekben $\mathcal{I}(A) = h$.
2. A $\varphi(\neg A)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételek.
3. A $\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek mind a $\varphi A^{\mathbf{i}}$, mind a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.
4. A $\varphi(A \vee B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{i}}$ vagy a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.
5. A $\varphi(A \supset B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ vagy a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.

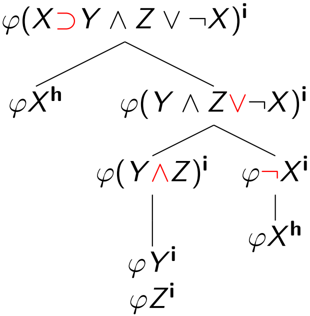
A $\varphi(\neg A)^{\mathbf{h}}$, a $\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{h}}$, a $\varphi(A \vee B)^{\mathbf{h}}$, és a $\varphi(A \supset B)^{\mathbf{h}}$ feltételek értelemszerűen adódnak.

Igazságértékelés szabályok grafikus ábrázolása

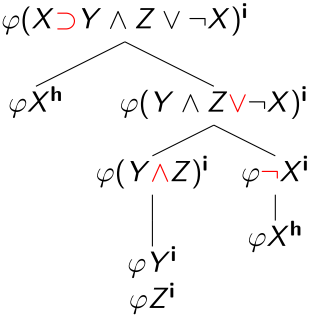
$$\begin{array}{c} \varphi(\neg A)^{\mathbf{i}} \\ | \\ \varphi A^{\mathbf{h}} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \varphi(A \wedge B)^{\mathbf{i}} \\ | \\ \varphi A^{\mathbf{i}} \\ | \\ \varphi B^{\mathbf{i}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \varphi(A \vee B)^{\mathbf{i}} & \\ / & & \backslash \\ \varphi A^{\mathbf{i}} & & \varphi B^{\mathbf{i}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \varphi(A \supset B)^{\mathbf{i}} & \\ / & & \backslash \\ \varphi A^{\mathbf{h}} & & \varphi B^{\mathbf{i}} \end{array}$$

Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával

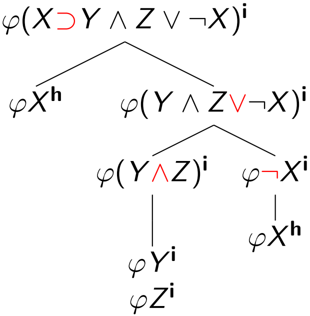


Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával



1.ág			2.ág			3.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
h	$*$	$*$	$*$	i	i	h	$*$	$*$

Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával



Az igazhalmaz:

X	Y	Z
i	i	i
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

1.ág			2.ág			3.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
h	$*$	$*$	$*$	i	i	h	$*$	$*$

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.
A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.
A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$
$$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$$
$$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi Y^{\mathbf{h}} \qquad \varphi Z^{\mathbf{h}}$$

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.
A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$
$$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$$
$$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi Y^{\mathbf{h}} \qquad \varphi Z^{\mathbf{h}}$$

1.ág			2.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z
i	h	$*$	i	$*$	h

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.
A **hamishalmazt** a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi Y^{\mathbf{h}} \qquad \varphi Z^{\mathbf{h}}$$

A hamishalmaz:

X	Y	Z
i	i	h
i	h	i
i	h	h

1.ág			2.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z
i	h	$*$	i	$*$	h

Tartalom

Formulák szemantikus tulajdonságai

Interpretáció kielégít egy formulát

Az ítéletlogikában egy $\mathcal{I}$ **interpretáció kielégít egy** B **formulát** ($\mathcal{I} \models_0 B$). ha a formula helyettesítési értéke i az $\mathcal{I}$ interpretációban. A formulát kielégítő $\mathcal{I}$ interpretációt a formula modelljének is szokás nevezni.

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség/tautológia formulákra (Tk.4.3.1.)

Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Egy B formula **tautológia** ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti. A tautologiát **ítéletlogikai törvény**nek is nevezik.

Példák

Példák ítéletlogikai törvényekre (Tk 71.o és 74.o)

$\models_0 A \supset (B \supset A)$

$\models_0 (A \supset B \supset C) \supset (A \supset B) \supset A \supset C$

$\models_0 A \supset B \supset (A \wedge B)$

$\models_0 ((A \supset B) \supset A) \supset A$

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formulahalmaz.

Interpretáció kielégít egy formulahalmazt

Az ítéletlogikában egy $\mathcal{I}$ interpretáció **kielégít** egy F formulahalmazt ($\mathcal{I} \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke i az $\mathcal{I}$ interpretációban.

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség formulahalmazokra (Tk.4.3.12.)

Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha bármely interpretációban legalább egy formulája h (nincs olyan interpretáció, ami kielégítené).

Szemantikus következményfogalom

Szemantikus következmény (Tk.4.4.1.)

Egy G formula **szemantikus** vagy **tautologikus következménye** az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmaznak,
ha minden olyan $\mathcal{I}$ interpretációra, amelyre $\mathcal{I} \models_0 \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ fennáll, $\mathcal{I} \models_0 G$ is fennáll (ha $\mathcal{I}$ modellje $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$-nek, akkor modellje G-nek is).
Jelölés: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$

Tétel

Ha egy G formula bármely $\mathcal{F}$ feltételhalmaznak következménye, akkor G tautológia ($\models_0 G$).

Tehát (F, G) akkor helyes következtetésforma, ha teljesül, hogy $F \models_0 G$ és létezik olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, melyre $\mathcal{I} \models_0 F$.

Tartalom

Szemantikus következményfogalom

Tétel (Tk.4.4.3.)

Ha $\mathcal{F}$-nek következménye G_1 ($\mathcal{F} \models_0 G_1$) és
$\mathcal{F}$-nek következménye G_2 ($\mathcal{F} \models_0 G_2$) valamint
$\{G_1, G_2\}$-nek következménye A ($\{G_1, G_2\} \models_0 A$),
akkor $\mathcal{F}$-nek következménye A ($\mathcal{F} \models_0 A$).

Szemantikus következményfogalom

Eldöntésprobléma

Eldöntésproblémának nevezik a logikában annak eldöntését, hogy egy (F, G) pár a szemantikus következményfogalom szerint helyes gondolkodásforma-e.

Tétel (Tk.4.4.4.)

$\mathcal{F}$-nek akkor és csak akkor következménye G, ha az $\mathcal{F} \cup \neg G$ formulahalmaz vagy $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ formula kielégíthetetlen.

Ennek alapján az egyik **szemantikus eldöntésprobléma**: tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.

Szemantikus következményfogalom

Tétel (dedukciós) (Tk.4.4.7.)

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha
$\{F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}\} \models_0 (F_n \supset G)$

Tétel (eldöntésprobléma) (Tk.4.4.8.)

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha
$\models_0 F_1 \supset (F_2 \supset \ldots (F_{n-1} \supset (F_n \supset G)) \ldots)$

Ennek alapján a másik **szemantikus eldöntésprobléma**: tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy tautológia-e.

Dedukciós tétel bizonyítási elve (nem kell vizsgára, csak magyarázat)

F_1	$\ldots$	F_{n-1}	F_n	G
i	i	i	i	i
i	i	i	h	i/h
i	h	i	i	i/h
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

F_1	$\ldots$	F_{n-1}	$F_n \supset G$
i	i	i	$i \supset i = i$
i	i	i	$h \supset \{i/h\} = i$
i	h	i	$\{i/h\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

A fenti 2 "igazságtábla" (nincs benne konkrét interpretáció) mutatja a 3 lehetséges helyettesítési érték fajtát, amelyek előfordulhatnak.
Az első, amikor a formulahalmaz minden eleme igaz, és a következmény is. Ez az eset az, amikor az eredeti következmény ($\{F_1, .., F_n\} \models_0 G$) feltétele és az átalakított következmény ($\{F_1, .., F_{n-1}\} \models_0 F_n \supset G$) feltétele is teljesül.
A második eset, amikor minden formulahalmazbeli formula helyettesítési értéke igaz, kivéve annak, amelyet átviszünk a jobb oldalra. Ilyenkor a bal oldali következmény feltételét nem kell vizsgálnunk, hiszen nem igaz minden formulahalmazbeli forula, így a következmény értéke lényegtelen. Viszont ha megtörténik az F_n formula átvitele a következményformulába, akkor egy olyan formulahalmazunk lesz, amely minden eleme igazra helyettesítődik, szóval az átalakított következményben a helyes feltételt is vizsgálni kell. A feltétel teljesülni fog, hiszen a $h \supset i$ vagy $h \supset h$ formula szerint helyettesítődik, ami igaz.
A harmadik eset az összes többi esetet foglalja magában (egy konkrétat kiemelve), amikor a formulahalmazban másutt is előfordulhat minimum egy hamis érték. Ezek azok az esetek, amikor sem az eredeti, sem az átalakított következményben nem fog teljesülni, hogy a feltételhalmaz minden eleme igaz, így a követkemény szempontjából lényegtelenek a további helyettesítési értékek.

Tautologikusan ekvivalens

Definíció 1. változat (Tk.4.3.7.)

Két vagy több formula igazságtáblája lehet azonos, ekkor azt mondjuk, hogy a formulák **tautologikusan ekvivalensek**. Ennek jelölésére a $\sim_0$ szimbólumot használjuk.

Definíció 2. változat

Az A és B formulák **tautologikusan ekvivalensek**,
ha $A \models_0 B$ és $B \models_0 A$.

Ekkor $\models_0 (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Átalakítási szabályok

$X \supset Y \sim_0 \neg X \vee Y$

$\neg\neg X \sim_0 X$

De Morgan szabályok:

1. $\neg(X \wedge Y) \sim_0 \neg X \vee \neg Y$
2. $\neg(X \vee Y) \sim_0 \neg X \wedge \neg Y$

Egyszerűsítési szabályok:

1. $(X \vee d) \wedge (\neg X \vee d) \sim_0 d$
2. $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) \sim_0 k$

   ahol d elemi diszjunkció és k elemi konjunkció.

Következtetési módok I.

Definíció (Tk.4.4.14.)

Legyen a $\mathcal{F}$ feltételhalmazban szereplő változók száma n. Ekkor a **legszűkebb következmény** az az $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ leképezés, amely pontosan azokhoz az interpretációkhoz rendel i értéket, amelyek kielégítik az $\mathcal{F}$-et.

Előrekövetkeztetés

Ismert az $\mathcal{F}$ feltételhalmaz, és keressük $\mathcal{F}$ lehetséges következményeit. Megkeressük $\mathcal{F}$ legszűkebb következményét, R-t. Következmény minden olyan G formula, amelyre $R \supset G$ tautológia, azaz R igazhalmaza része G igazhalmazának.

Előrekövetkeztetés – példa

$\mathcal{F} = \{Z \supset M \vee P, Z, \neg P\}$

P	M	Z	$Z \supset M \vee P$	Z	$\neg P$	Iszk.	köv.
i	i	i	i	i	h	h	h/i
i	i	h	i	h	h	h	h/i
i	h	i	i	i	h	h	h/i
i	h	h	i	h	h	h	h/i
h	i	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i	h	h/i
h	h	i	h	i	i	h	h/i
h	h	h	i	h	i	h	h/i

Csak egy igazságértékre kielégíthető a feltételhalmaz.

Következtetési módok II.

Visszakövetkeztetés

Az $\mathcal{F}$ feltételhalmaz és a B következményformula ismeretében eldöntjük, hogy B valóban következménye-e $\mathcal{F}$-nek. Mivel $\mathcal{F} \models_0 B$ pontosan akkor, ha az $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

Más szóval B pontosan akkor következménye $\mathcal{F}$-nek, ha minden olyan interpretációban, ahol B hamis, az $\mathcal{F}$ kielégíthetetlen.

Példa

Legyen $\mathcal{F} = \{Z \supset M \vee P, Z, \neg P\}$ és lássuk be, hogy M következmény. Be kell látni, hogy, ha $\neg M$ igaz egy interpretációban, akkor $\mathcal{F}$ nem lesz kielégíthető. Ahhoz,hogy minden feltételformula i legyen $Z = i$, $P = h$ mellett $Z \supset M \vee P$-nek igaznak kellene lennie, viszont ha M hamis, akkor $Z \supset M \vee P = h$ lehet csak. Tehát M következménye F-nek.

Tartalom

Formalizálás az ítéletlogikában [2]

Tegyük fel, hogy adott valamilyen köznapi vagy matematikai probléma. Ennek természetes nyelvű egyszerű vagy összetett kijelentő mondatokkal való leírását ismerjük.
Az **egyszerű kijelentő mondatok** formalizálására bevezetünk egy **azonosítót (állításjel, ítéletváltozó)**.
Az **összetett mondatot** analizáljuk, átalakítjuk azonos értelmű, de egyszerű kijelentő mondatokból olyan nyelvtani összekötőkkel felírt mondattá, ahol **a nyelvtani összekötők egyben logikai összekötők** (logikai műveletek).

[2] Tk.54-55.o.

Példa Tk. 54.o

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
Ha férfi a tettes, akkor kistermetű.
Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be.
A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott.
Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles akkor az ablakon mászott be.
A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be.
A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi.

Példa Tk. 54.o

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
Ha férfi a tettes (F), akkor kistermetű (K). $F \supset K$
Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be (A). $K \supset A$
A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott (R). $F \vee R$
Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles (H), akkor az ablakon mászott be. $(R \wedge H) \supset A$
A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be. $\neg A$
A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi. $\neg F$

A feltételhalmaz: $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A\}$
A feltételezés szerinti következmény: $\neg F$

Példa Tk. 54.o

Előrekövetkeztetés:
Az $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A\}$ formulahalmazt egyetlen interpretáció elégíti ki: $A = h,\ F = h,\ K = h,\ R = i,\ H = h$, azaz a legszűkebb következényt leíró formula: $\neg A \wedge \neg F \wedge \neg K \wedge R \wedge \neg H$
$(\neg A \wedge \neg F \wedge \neg K \wedge R \wedge \neg H) \supset \neg F$ tautológia, így $\neg F$ következmény.

Visszakövetkeztetés:
$\neg F$ következmény, mivel a negáltját hozzávéve a feltételhalmazhoz, a kapott formulahalmaz: $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A,\ F\}$ kielégíthetetlen.

Példák

Vizsgálat: formula tautológia - igazságtáblával

A	B	$A \supset B \supset (A \wedge B)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A formula helyettesítési értéke minden interpretáció esetén igaz! $\Rightarrow$
A formula kielégíthető és tautológia.

Vizsgálat: formula tautológia - igazságértékelés fával

$$\varphi(A \supset (B \supset (A \wedge B)))^{\mathbf{h}} \ (1)$$

$$\varphi(A)^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi(B \supset (A \wedge B))^{\mathbf{h}} \ (2)$$

$$\varphi(B)^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{h}} \ (3)$$

$$\varphi(A)^{\mathbf{h}} \qquad \varphi(B)^{\mathbf{h}}$$

$$\lightning \qquad \lightning$$

Minden előállt úton ellentmondásra jutunk. A bal oldali ágon az A értéke miatt, a jobb oldali ágon pedig a B ítéletváltozó értéke miatt. Így a formula hamishalmaza üres, vagyis az igazhalmaza az összes interpretációt tartalmazza. Ezek szerint a formula helyettesítési értéke minden interpretációban igaz, a formula tautológia.
(Az igaz feltételt is lehetett volna számolni, de akkor ellenőrizni kell, hogy a kiszámolt igazhalmaz tartalmazza-e az összes interpretációt.)

Példák

Vizsgálat: formula kielégíthetetlen - igazságtáblával

A	B	$(\neg A \wedge B) \wedge (B \supset A)$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A formula helyettesítési értéke minden interpretáció esetén hamis! $\Rightarrow$
A formula kielégíthetetlen.

Vizsgálat: formula kielégíthetelen - igazságértékelés fával

$$\varphi((\neg A \wedge B) \wedge (B \supset A))^{\mathbf{i}} \ (1)$$

$$\varphi(\neg A \wedge B)^{\mathbf{i}} \ (2)$$

$$\varphi(B \supset A)^{\mathbf{i}} \ (4)$$

$$\varphi(\neg A)^{\mathbf{i}} \ (3)$$

$$\varphi(B)^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi(A)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi(B)^{\mathbf{h}} \qquad \varphi(A)^{\mathbf{i}}$$

$$\lightning \qquad \lightning$$

Minden ágon ellentmondásra jutottunk, vagyis a formula igazhalmaza üres. Így a formula helyettesítési értéke minden interpretációban hamis, vagyis kielégíthetetlen.

Példák

Formulahalmaz igazságtáblája

Adott a következő formulahalmaz: $\{\neg A, A \vee B, B \supset \neg A\}$. Adjuk meg a formula helyettesítési értékeit a különböző interpretációkban igazságtáblával.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$B \supset \neg A$
i	i	h	i	h
i	h	h	i	i
h	i	i	i	i
h	h	i	h	i

A (h, i) (A,B bázissal) interpretációban minden formulahalmazbeli formula helyettesítési értéke igaz, így ebben az interpretációban a formulahalmaz kielégíthető.

Példák

Formulahalmaz szemantikai tulajdonságai

Adott a következő formulahalmaz: $\{\neg A, A \vee B, B \supset \neg A\}$. Ha egy formulahalmaz szemantikai tulajdonságait szeretnénk vizsgálni, akkor lehet egy közös igazságtáblán is számolni, vagy átalakíthatjuk a feladatot formula vizsgálatára.

A követekező formulahalmaz $\{\neg A, A \vee B, B \supset \neg A\}$ átalakítható a következő formulára

$\neg A \wedge (A \vee B) \wedge (B \supset \neg A)$.

A	B	$\neg A \wedge (A \vee B) \wedge (B \supset \neg A)$
i	i	h
i	h	h
h	i	i
h	h	h

A leolvasható eredmény ugyanaz. Vagyis az (h, i) interpretációban kielégíthető a formula, így az eredeti formulahalmaz is. Ha például minden helyettesítési érték hamis lenne, akkor a formula kielégíthetetlen, visszatérve az eredeti feladatra a formulahalmaz is kielégíthetetlen. Ha minden helyettesítési érték igaz lenne, akkor a formula tautológia, visszaérve az eredeti formulahalmazra csak azt mondhatjuk el, hogy kielégíthető, vagy minden interpretációban kielégíthető, hiszen formulahalmazokon tautológi fogalmát nem használjuk.

Példák

Szemantikus következmény igazáságtáblával

Helyes-e a következő szemantikus következmény:
$\{\neg A, \neg A \vee B, B \supset A\} \models_0 \neg A \supset B$.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$B \supset \neg A$	$\neg A \supset B$
i	i	h	i	h	i
i	h	h	h	i	i
h	i	**i**	**i**	**i**	i
h	h	**i**	**i**	**i**	h

A formulahalmaz a (h, i) és (h, h) interpretációkban kielégíthető, így ezekben az esetekben kell vizsgálni a következmény formula helyettesítési értékét is. A (h, i) interpretációban igaz, eddig még jónak tűnik a következmény. Viszont ha megnézzük a (h, h) interpretációt, ott hamis lesz a következmény helyettesítési értéke, így a következmény nem helyes!